Publ. Mat U.A.B.
nº 6 des. 1977

Cohomología sobre el espectro de un álgebra de Banach

F. Puerta

1.- Introducción

Desde que hace aproximadamente 30 años diversos autores rusos, especialmente Gelfand, estudiaran las propiedades topológicas del espectro de ideales maximales de un álgebra de Banach conmutativa, quedó establecida una conexión natural entre la categoría de álgebras de Banach y la categoría de espacios topológicos compactos (localmente compactos si el álgebra no es unitaria): la que a cada álgebra de Banach A hace corresponder su espectro de ideales maximales X_A.

Se han venido derivando desde entonces aplicaciones diversas de la teoría así iniciada, a diversos campos del análisis funcional: análisis armónico, operadores, funciones holomorfas, etc. Más recientemente y como consecuencia de importantes teoremas de Arens se ha iniciado el estudio de cómo pueden caracterizarse los diversos invariantes topológicos del espectro de un álgebra de Banach A: grupos de homología, cohomología, homotopía,..., a través de la estructura de A. En una de estas direcciones, grupos de cohomología de Cech, se han obtenido descripciones satisfactorias de los grupos $H^0(X,\mathbb{Z})$, $H^1(X,\mathbb{Z})$ y $H^2(X,Z)$ en términos de cualquier álgebra de Banach cuyo espectro sea X. En otra dirección, teoría K, se obtienen descripciones completas de todos los grupos de cohomología que en dicha teoría aparecen, en términos análogos al caso anterior. Vamos a tratar de precisar debidamente los resultados a que acabamos de referirnos.

2.- Teorías cohomológicas

Una teoría homológica (cohomológica) es una sucesión de functores (cofunctores) de la categoría de espacios topológicos en la de grupos abelianos que satisfacen ciertos axiomas. La naturaleza de estos axiomas viene fijada por el tipo o tipos de teorías clásicas de homología o cohomología que se desean englobar. Por ejemplo en la obra "Fundations of Algebraic Topology" de Eilenberg-Steenrod se da una axiomática que es verificada por las teorías de homología singular y cohomología de Cech, entre otras. Dicha axiomática tiene el interés, esencialmente, de permitir la deducción de importantes teoremas de la teoría a partir de los axiomas, y da resultados generales de topología y álgebra, sin necesidad de recurrir a la definición específica de la teoría homológica en cuestión, obteniéndose así una considerable simplificación en las demostraciones.

La aparición de nuevas teorías cohomológicas como la teoría K ha obligado a limitar la exigencia axiomática, al objeto de dar cabida a estas nuevas teorías, pudiendo citarse en este sentido las obras " Cohomology Theories" de E. Dyer y "General Cohomology Theory and K-Theory" de P. Hilton.

Una exposición sintética y particularmente útil de axiomatización de teorías cohomológicas es la que figura en el artículo " Banach Algebras and Topology" de J.L. Taylor y que pasamos a describir.

Una <u>teoría cohomológica generalizada reducida (TCGR)</u> es una familia $(\tilde{H}^p)_{p \in Z}$ de cofunctores de la categoría de compactos punteados, $\mathcal{KP}$, en la categoría de grupos abelianos, $\mathcal{G}\mathcal{A}b$ con una familia de transformaciones naturales $\delta^*: \tilde{H}^p(Y) \to \tilde{H}^{p+1}(X/Y)$ para todo par X, Y de $\mathcal{KP}$ con $Y \subset X$ tales que

1) Continuidad: Cada $\tilde{H}^p$ es continuo.
2) Exactitud: Para todo X,Y como los anteriores, la sucesión

$$\ldots \xrightarrow{\delta^*} \tilde{H}^p(X/Y) \xrightarrow{\pi^*} \tilde{H}^p(X) \xrightarrow{\iota^*} \tilde{H}^p(Y) \xrightarrow{\delta^*} \tilde{H}^{p+1}(X/Y) \xrightarrow{\pi^*} \ldots$$

es exacta.

(Se ha utilizado ι, π para las aplicaciones de inclusión $Y \to X$ y proyección $X \to X/Y$, respectivamente. Se ha escrito, para simplificar, δ^* en lugar de δ^{*p}).

Decir que un cofunctor $\tilde{H}$ de $\mathcal{KP}$ en $\mathcal{G}\mathcal{A}b$ es contínuo significa que, dada la familia $(X_\alpha)_\alpha$ con $X_\alpha \in \mathcal{KP}$ contenidos todos en $Y \in \mathcal{KP}$ con el mismo punto base y supuesta dicha familia filtrante por indución si $X = \varprojlim X_\alpha$, es $\tilde{H}(X) = \varinjlim \tilde{H}(X_\alpha)$. La propiedad de continuidad es más fuerte que el clásico axioma de homotopía. Se demuestra, en efecto, que si $\tilde{H}$ es contínuo y $\varphi, \psi : X \to Y$ son aplicaciones homotopas de $\mathcal{KP}$ en $\mathcal{KP}$, se verifica la igualdad

$$\varphi^* = \psi^* : \tilde{H}(Y) \to \tilde{H}(X).$$

Se deducen entonces de los axiomas anteriores las propiedades

1) $\tilde{H}(pt) = 0$.
2) Si X es contráctil $\tilde{H}^p(X) = 0$.
3) Para todo $X \in \mathcal{KP}$, $\tilde{H}^p(X) \cong \tilde{H}^{p+1}(SX)$, donde $SX = S^1 \wedge X = (\mathbb{R} \times X^-)^+ = S^1 \times X / \{\infty\} \times X \cup S^1 \times \{x_0\}$, ∞ y x_0 son los

puntos base de S^1 y X, resp.) es la suspensión reducida de X.

4) Si $Y \subset X$ es un retracto de deformación

$$\tilde{H}^p(X) = \tilde{H}^p(X/Y) \oplus \tilde{H}^p(Y).$$

Clásicamente las teorías cohomológicas se definen sobre pares compactos. En esta situación general también puede darse una axiomática para este caso. De hecho, como diremos, ambas formulaciones son equivalentes, en el sentido de que pueden deducirse una de otra. Una <u>teoría cohomológica generalizada</u> TCG es una familia $(H^p)_{p\in Z}$ de cofunctores de la categoría de pares compactos (X,Y) con $Y \subset X$ en la de grupos abelianos, con una familia de transformaciones naturales $\delta : H^p(Y) \to H^{p+1}(X,Y)$, que verifican los siguientes axiomas :

1) <u>Continuidad</u>: cada H^p es contínuo.

2) <u>Escisión</u>: Si K,L son compactos de X tales que $K \cup L = X$, la inclusión $i:(K,K \cap L) \to (X,L)$ induce un isomorfismo $H^p(X,L) \cong H^p(K,K \cap L)$.

3) <u>Exactitud</u>: para todo par compacto (X,Y), la sucesión

$$\dots \to H^p(X,Y) \xrightarrow{\pi^*} H^p(X) \xrightarrow{i^*} H^p(Y) \xrightarrow{\delta^*} H^{p+1}(X,Y) \to \dots$$

es exacta.

(Se han denotado π y i las inclusiones $X \equiv (X,\emptyset) \subset (X,Y)$, $Y \equiv (Y,\emptyset) \subset X$).

Una <u>teoría cohomológica</u> en el sentido de Eilenberg-Steenrod, verifica los axiomas anteriores (sustituyendo el axioma de continuidad por el de homotopía) y además el de

4) <u>Dimensión</u>: $H^p(pt) = 0$ si $p \neq 0$, $H^0(pt) = Z$.

(Si se define la teoría cohomológica sobre pares de espacios topológicos, no necesariamente compactos, el axioma de escisión se debe modificar convenientemente).

Los axiomas de una teoría cohomológica en el sentido de E-S, determinan ésta de forma única, salvo isomorfismos, si se define sobre la clase de espacios triangulables. La axiomática dada aquí garantiza, según Taylor, la unicidad para pares compactos. Para T.C.G., la situación es considerablemente más complicada.

Para las teorías cohomológicas generalizadas se tienen propiedades análogas a las anteriores.

Si $(\tilde{H}^p)_{p \in Z}$ es una T.C.G.R., se define una T.C.G., $(H^p)_p$, mediante $H^p(X,Y) = \tilde{H}^p(X^+/Y^+)$ $(= \tilde{H}^p(X/Y)$ si $Y \neq \emptyset)$.

Recíprocamente, si $(H^p)_p$ es una TCG, se define una TCGR, $(\tilde{H}^p)_p$ a través de

$$\tilde{H}^p(X) = H^p(X, \{x_0\})$$

donde x_0 es el punto base de X.

Las correspondencias así definidas son inversa una de otra. Este resultado precisa el sentido de la equivalencia a que nos hemos referido anteriormente.

2) <u>Cohomología de Cech</u>.

Un ejemplo de teoría cohomológica es la cohomología de Cech. De hecho la cohomología de Cech a coeficientes enteros o en general en un grupo abeliano cualquiera, es un caso particular de la cohomología de Cech con coeficientes en un haz que describimos brevemente.

Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de X. Para cada haz $\mathcal{F}$ sobre X y $p \in Z$, $p \geq 0$, designemos por $C^p(\mathcal{U};\mathcal{F})$ el grupo abeliano (si $\mathcal{F}$ es un haz de grupos abelianos) de las aplicaciones f que asignan a cada ordenada $(p+1)$-pla $U_0, U_1, \ldots, U_p$ de elementos de $\mathcal{U}$ un elemento $f(U_0,\ldots,U_p) \in \Gamma(U_0 \cap \ldots \cap U_p)$, esto es, una sección sobre $U_0 \cap \ldots \cap U_p$. (Con $\Gamma(\emptyset) = 0$). Se define un operador coborde

$$\delta : C^p(\mathcal{U};\mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U};\mathcal{F})$$

por

$$(\delta f)(U_0,\ldots,U_{p+1}) = \sum_{0 \leq i \leq p+1} (-1)^i f(U_0,\ldots,\widehat{U}_i,\ldots,U_{p+1})/_{U_0 \cap \ldots \cap U_{p+1}}$$

Se cumple que $\delta^2 = 0$ con lo que $C^*(\mathcal{U};\mathcal{F}) = (C^p(\mathcal{U};\mathcal{F}),\delta)_p$ es un complejo de cocadenas. Su grupo de cohomología lo designamos por $H^*(\ ;\mathcal{F})$.

Si $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$, a toda $\lambda : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ tal que $\lambda(V) \supset V$ corresponde

$$\lambda^* : C^*(\mathcal{U};\mathcal{F}) \to C^*(\mathcal{V};\mathcal{F})$$

definida por

$$(\lambda^{*}f)(V_0,\ldots,V_p) = f(\lambda(V_0),\ldots,\lambda(V_p))/_{V_0\cap\ldots\cap V_p}$$

que da lugar a una aplicación

$$\lambda^{*}: H^{*}(\mathcal{U};\mathcal{F}) \to H^{*}(\mathcal{V};\mathcal{F})$$

que es independiente de λ.

Se tiene entonces, por definición

$$H^{p}(X,\mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^{p}(\mathcal{U};\mathcal{F})$$

$H^{p}(X,\mathcal{F})$ es el p-ésimo grupo de cohomología de Cech de X con coeficientes o valores en el haz $\mathcal{F}$.

Los clásicos grupos de cohomología de Cech de X, con coefientes en un grupo abeliano G resultan de tomar en la construcción anterior como $\mathcal{F}$ el haz constante G.

La cohomología de Cech para compactos con coeficientes en G se define, si (X,Y) es un tal par, considerando el subgrupo $C^{p}(\mathcal{U},Y,G)$ de $C^{p}(\mathcal{U},g)$ formado por las $f \in C^{p}(\mathcal{U},G)$ tales que

$$f(U_0,\ldots,U_p) = 0 \text{ si } (U_0 \cap\ldots\cap U_p) \cap Y \neq \emptyset$$

y procediendo a partir de aquí de modo análogo al anterior. La cohomología de Cech para pares compactos así definida es un ejemplo de teoría cohomológica .

3) Primera descripción de los grupos $H^p(X,\mathbb{Z})$ para $p=0,1,2$.

Si X es un espacio compacto designemos por: $\mathscr{C}(X)$ el haz de gérmenes de funciones continuas de X en $\mathbb{C}$, $\mathscr{C}(X)^{-1}$ el haz de gérmenes de funciones inversibles del haz anterior y $\mathbb{Z}$ el haz constante sobre X. Se tiene entonces la sucesión exacta de haces

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathscr{C}(X) \xrightarrow{ex} \mathscr{C}(X)^{-1} \to 0$$

donde i es la inclusión natural y $ex(f) = e^{2\pi i f}$.

Se deduce de aquí la sucesión exacta de cohomología para haces

$$0 \to H^0(X,\mathbb{Z}) \to H^0(X,\mathscr{C}(X)) \to H^0(X,\mathscr{C}(X)^{-1}) \to$$
$$\to H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathscr{C}(X) \to H^1(X,\mathscr{C}(X)^{-1}) \to \dots .$$

Teniendo en cuenta que $\mathscr{C}(X)$ es un haz fino y que $H^0(X,\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F})$ (secciones globales), resulta la sucesión exacta

$$0 \to \Gamma(X,\mathbb{Z}) \to \Gamma(X,\mathscr{C}(X)) \to \Gamma(X,\mathscr{C}(X)^{-1}) \to H^1(X,\mathbb{Z}) \to 0 \to$$
$$\to H^1(X,\mathscr{C}(X)^{-1}) \to H^2(X,\mathbb{Z}) \to 0 \to \dots$$

de donde se obtiene

a) $H^0(X,Z) = \Gamma(X,Z) = \mathrm{Nuc}\ (ex: C(X) \to C(X)^{-1})$

b) $H^1(X,Z) = C(X)^{-1}/_{ex\, C(X)} = \mathrm{Conuc}\ (ex: C(X) \to C(X)^{-1})$

c) $H^2(X,Z) = H^1(X,C(X)^{-1}) = \mathrm{Vect}^1(X)$ (Fibrados vectoriales complejos de dimensión 1 sobre X).

Estos resultados son válidos si se sustituye X por una variedad diferenciable (separada y con base numerable de abiertos) y $\mathscr{C}(X)$ por $\mathcal{E}(X)$ haz de gérmenes de funciones diferenciables o aún por una variedad compleja de Stein y el haz de gérmenes de funciones holomorfas $\mathcal{O}(X)$, respectivamente.

Tal como se ha dicho en la introducción y remarcamos ahora, este tipo de resultados son los que justifican su intento de generalización para cualquier álgebra Banach o Frechet. Concretándonos a b), la igualdad en cuestión nos dice que la topología de X, pues $H^1(X,\mathbb{Z})$ es un invariante topológico de X, nos informa sobre los elementos inversibles de $\mathscr{C}(X)$ que admiten logaritmo... Por ejemplo, si X es un grupo de Lie semisimple compacto, resulta que $H^1(X,\mathbb{Z})= 0$, con lo que toda función diferenciable compleja sobre X admite logaritmo. Esto se demuestra viendo:

a) Que $H^1(X,\mathbb{Z})$ es sin torsión a través de $H^1(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{C}(X)^{-1}/\exp\mathbb{C}(X)$

b) El primer número de Betti de X es cero.

3) <u>Segunda descripción de los grupos H^0, H^1, H^2.</u>

Tal como se acaba de decir, el hecho de que se obtengan resultados análogos para las álgebras de funciones continuas, diferenciables u homolorfas y que en todos los casos el espectro del álgebra correspondiente sea el espacio de definición ha movido a diversos matemáticos a intentar la correspondiente generalización para cualquier álgebra de Banach, Fréchet,....Se tienen en este sentido los siguientes teoremas:

(Shilov) Si A es un álgebra de Banach conmutativa unitaria de espectro maximal X_A, la transformación de Gelfand induce un isomorfismo de $H^0(X_A,\mathbb{Z})$ en Nuc (ex: $A \to A^{-1}$)

(Arens-Royden) En las condiciones del teorema anterior, se tiene el isomorfismo $H^1(X_A,\mathbb{Z}) \cong A^{-1}/_{\mathrm{ex}\ A}$ = Conuc (ex: $A \to A^{-1}$)

(Forster) En las mismas condiciones se tiene el isomorfismo $H^2(X_A,\mathbb{Z}) \cong$ Pic (A), donde Pic(A) llamado grupo de Picard de A, es el grupo de los A-módulos proyectivos finitamente generados inversibles respecto del producto tensorial.

Los dos primeros teoremas son válidos para álgebras de Fréchet, considerando el espectro topológico de A, es decir, el de ideales maximales cerrados. (En el caso Banach coincide con el maximal). En cuanto a las demostraciones, señalemos que para los dos primeros se utilizan básicamente los teoremas de cálculo funcional holomorfo sobre el espectro de álgebra de Banach. En cuanto al tercero, la demostración que conocemos es un tanto indirecta, en el sentido de que utiliza elementos de la teoría K.

4) Teoría K.

La teoría K tiene su origen en los teoremas de periodicidad de Bott relativos a la estructura de los grupos de homotopía de U(n) y O(n). Concretamente dichos teoremas dicen que si $n \geq \frac{i+2}{2}$ (resp. $n \geq i+2$), se tiene para todo $i \geq 0$

$$\pi_{i+2}(U(n)) \cong \pi_i(U(n)) \text{ (resp. } \pi_{i+8}(O(n)) \cong \pi_i(O(n))).$$

Estos teoremas inicialmente demostrados por Bott, fueron redemostrados en el marco de la teoría K por Atiyah y Hirzebruch, quedando como casos particulares de una situación más amplia cuyo esquema base es el siguiente

$$\begin{tikzcd} \text{Espacios compactos} \arrow[r, shift left, "\mathcal{F}_C"] \arrow[r, shift right, swap, "\mathcal{F}_R"] & \text{Categorías aditivas} \arrow[r, "\phi"] \arrow[rr, bend left, "K"] & \text{Monoides abelianos} \arrow[r, "\zeta"] & \text{Grupos abelianos} \end{tikzcd} \quad (1)$$

donde

$\mathcal{F}_C$ (resp $\mathcal{F}_R$) denota el functor contravariante que a todo espacio compacto X, asocia la categoría aditiva de los fibrados vectoriales complejos (resp. reales) de dimensión finita y base X y que a toda aplicación contínua $f: X \to Y$ asocia el functor aditivo "imagen recíproca por f, f^*".

ϕ asocia a toda categoría aditiva, el monoide abeliano de las clases de isomorfismo de objetos de la categoría.

ζ es el functor simetrización, que a todo monoide abeliano asocia el grupo universal abeliano correspondiente.

K se define mediante la composición: $K = \zeta \circ \phi$.

Finalmente,

$$K_{\mathbb{C}} = \mathcal{F}_{\mathbb{C}} \circ K, \qquad K_{\mathbb{R}} = \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \circ K$$

Designemos para simplificar por K indistintamente a $K_{\mathbb{C}}$ ó $K_{\mathbb{R}}$.

El functor K está definido en la categoría de espacios compactos. Si X es un compacto punteado con punto base $\{x_0\}$, a partir de las aplicaciones naturales $i:\{x_0\} \to X$, $j: X \to \{x_0\}$ es posible definir un functor $\tilde{K}$ sobre la categoría $\mathcal{KP}$ que verifica la igualdad: $K(X) = \tilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}$. El functor $\tilde{K}$ de $\mathcal{KP}$ en $\mathfrak{Ab}$ es el que proporciona la información interesante de K. La interpretación de los teoremas de Bott en teoría K se basa en las igualdades

$$\tilde{K}(S^n) = \pi_{n-1}(U(n)) \qquad \text{(caso complejo)}$$

$$K(S^n) = \pi_{n-1}(O(n)) \qquad \text{(caso real).}$$

El functor $\tilde{K}$ verifica un teorema de periodicidad a través del cual define una TCGR, que es propiamente la teoría K. Esta teoría construida a partir del esquema (1) presenta inconvenientes de tipo práctico, pues entre otras cuestiones el cálculo efectivo de los K^n resulta difícil.

Una nueva opción de construir esta teoría viene sugerida por el siguiente conocido resultado (Swan). Si X es un compacto y C(X) el anillo de funciones continuas sobre X, la categoría aditiva $\mathcal{F}(X)$ de los fibrados vectoriales sobre X de dimensión finita es equivalente a la categoría aditiva de los módulos proyectivos finitamente generados sobre C(X): la equivalencia se realiza a través del functor Γ que a todo fibrado vectorial $E \to X$ asocia el C(X)-módulo $\Gamma(E)$ de las secciones globales contínuas de E. Podemos considerar entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\text{Espacios compactos} \arrow[dr, "\mathcal{F}"] \arrow[dd, "c"] & & \\
 & \text{Categorías aditivas} \arrow[r, "K"] & \text{Grupos abelianos} \\
\text{Anillos} \arrow[ur, "\rho"'] & &
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

en el que C se define mediante $X \to C(X)$ y ρ es el functor que a todo anillo A asocia la categoría aditiva de los A-módulos proyectivos finitamente generados. Entonces la K-teoría algebraica (Bass) consiste en definir y estudiar functores K''^n de la categoría de anillos en la de grupos abelianos con la evidente condición: $K''^0 = K \circ \rho$. Una tal teoría no verifica desgraciadamente, el teorema de periocidad de Bott, ni K''^n se factoriza a través de K^n para $n \neq 0$.

Una nueva posibilidad aparece si se considera que C(X) es de hecho un álgebra de Banach respecto de la norma de la convergencia uniforme. Es posible entonces definir una sucesión de functores sobre la categoría de álgebras de Banach conmutativas y unitarias, que llameremos teoría K sobre álgebras de Banach, que verifica el teorema de periocidad de Bott y factoriza para todo n a través de la teoría K topológica (correspondiente al esquema (1)). Esto es

$$\text{Espacios compactos} \xrightarrow{\ C\ } \text{Algebras de Banach} \xrightarrow{\text{teoría } K} \text{Grupos abelianos} \qquad (3)$$

tal es la construcción que se desarrolla en el artículo "Algebras de Banach y topología" de J.L. Taylor y que desarro llaremos brevemente más adelante.

Finalmente, M. Karoubi ha desarrollado recientemente una teoría K para anillos de Banach que contiene a la vez los marcos algebraico y topológico, a través del esquema

$$
\begin{tikzcd}
\text{Espacios compactos} \arrow[dr] & & & \\
& \text{Algebras Banach} \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "\text{Teoría K Banach}"] & & \\
& & \text{Anillos de Banach} \arrow[r, "\text{teoría K}", "\text{general}"'] & \text{Grupos Abelianos} \\
\text{Anillos unitarios} \arrow[urr] \arrow[urrr, bend right, "\text{teoría K algebraica}"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

Un anillo de Banach es un anillo A (no necesariamente conmutativo ni unitario) con una aplicación (norma) $\| \ \| : A \to R^+$ tal que

1) $\|x\| = 0$ si $x = 0$,
2) $\forall\, x \in A,\ \|-x\| = \|x\|$,
3) $\forall\, x,y \in A,\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
4) Existe $\lambda > 0$ tal que $\forall\, x,y \in A,\ \|xy\| \leq C\|x\|\cdot\|y\|$,
5) A es completo respecto de la métrica $(x,y) \to \|x-y\|$.

La categoría de anillos de Banach contiene evidentemente a la de álgebras de Banach así como a la de anillos: todo anillo A puede dotarse de una norma mediante:

$\|x\| = 0$ si $x = 0$, $\|x\| = 1$ si $x \neq 0$.

5) Teoría K para álgebras de Banach.

El teorema de Arens-Royden según el cual $A^{-1}/\mathrm{ex}(A) \cong C(X_A)/\mathrm{ex}\, C(X_A)$ para toda álgebra de Banach conmutativa unitaria, fue generalizada por Arens probando que la transformación de Gelfand induce un isomorfismo

$$GL_n(A)/_{\mathrm{ex}\, M_n(A)} \cong GL_n(C(X_A))/_{\mathrm{ex}\, M_n(C(X_A))}$$

$\forall\, n > 0$, donde $GL_n(A)$ es el grupo inversibles del álgebra de Banach $M_n(A)$ (matrices $n \times n$ con coeficientes en A). Ello motiva la definición de un grupo $K_1(A)$ a partir de estos cocientes, que sólo dependerá del espectro de A. Si denotamos

$$L_n(A) = GL_n(A)/_{GL_n^0(A)}$$

donde $GL_n^0(A)$ es la componente conexa de la identidad en $GL_n(A)$, que coincide con $\mathrm{ex}\, M_n(A)$, resulta que la inclusión natural

$$\begin{array}{ccc} GL_n(A) & \longrightarrow & GL_{n+r}(A) \\ \Psi & & \\ a & \longrightarrow & a \oplus I_r \end{array}$$

induce una inyección $L_n(A) \to L_m(A)$, con la importante particularidad de que la imagen de $L_n(A)$ por la inclusión anterior es un grupo conmutativo $\forall\, m \geq 2n$. Ello permite definir $K_1(A)$ mediante:

$$K_1(A) = \lim_{\to} L_n(A)$$

con lo que claramente $K_1(A)$ sólo depende del espectro de A. La correspondencia $A \to K_1(A)$ es un functor de la categoría de álgebras de Banach ($\mathcal{AB}$) conmutativas unitarias (c.u) en $\mathcal{GAb}$, que designamos por K.

Si A es de $\mathcal{AB}c$, no necesariamente unitaria se define $\tilde{K}_1(A) = K_1(A^+)$ donde $A^+ = A \oplus \mathbb{C}$ es el álgebra de Banach unitarizada de A, resultando que, así mismo, la correspondencia $A \to \tilde{K}_1(A)$ es functorial y extensión de K_1. El functor $\tilde{K}_1$ es tal que si A es un álgebra de Banach conmutativa, e I un ideal cerrado de A, la sucesión exacta

$$0 \to I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/I \to 0$$

induce la sucesión exacta

$$\tilde{K}_1(I) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}_1(A) \xrightarrow{\pi^*} \tilde{K}_1(A/I) \quad .$$

Siguiendo el paralelismo con la cohomología de Cech, así como $K_1(A)$ se definió a partir de $L_n(A) = GL_n(A)/\,\mathrm{ex}\, M_n(A)$, $K_0(A)$ se va a definir a partir de $Q_n(A) = \mathrm{Nuc}(\mathrm{ex}\colon M_n(A) \to GL_n(A))$.

El proceso es el siguiente:

1) $Q_n(A)$ es el conjunto de $a \varepsilon M_n(A)$ tales que $e^{2\pi i a} = I$.

Consideremos el conjunto $\bigcup_n Q_n(A)$ y definimos

$$a \oplus b = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad , \quad a,b \in \bigcup_n Q_n(A)$$

2) En $\bigcup_n Q_n(A)$ definimos la siguiente relación:

Dados $a,b \in \bigcup_n Q_n(A)$ diremos que a y b son equivalentes si existen extensiones triviales de a y b, $a \oplus 0_r$, $b \oplus 0_s$, que son conjugados, esto es tales que existe $u \in GL_p(A)$ que verifica

$$a \oplus 0_r = u\ (b \oplus 0_s)\ u^{-1}.$$

Definimos entonces

$$J(A) = \bigcup Q_n(A) / \sim \ .$$

J(A) es un semigrupo conmutativo con la operación $\oplus$.

3) Sea UJ(A) el grupo universal simetrizado de J(A). Notemos $\{a\}$ la clase de $a \in Q_n(A)$ en él y por $+$ la operación del grupo. Puesto que en $Q_n(A)$ tenemos una operación $+$ para elementos que conmutan y queremos que sea compatible con la suma de UJ(A), consideremos el subgrupo J_0 de UJ(A) engendrado por los elementos de la forma $\{a+b\} - \{a\} - \{b\}$ donde $a,b \in Q_n(A)$ conmutan; definimos

entonces

$$K_0(A) = UJ(A)/J_0$$

y designaremos por $[a]$ la clase de $a \in Q_n(A)$ en $K_0(A)$.

$K_0(A)$ es un grupo abeliano y $[a+b] = [a] + [b]$ si $a,b \in Q_n(A)$ y conmutan. La correspondencia $K_0 : A \to K_0(A)$ es un functor de $\mathcal{AB}$cu en $\mathcal{G}ab$.

Si A no es unitaria, tenemos la sucesión exacta

$$0 \to A \to A^+ \to \mathbb{C} \to 0$$

donde $A^+ = A \oplus \mathbb{C}$ es la unitarizada de A. Pues bien, se define

$$\tilde{K}_0(A) = \text{Nuc}\ (K_0(A^+) \to K_0(\mathbb{C}),$$

de donde resulta,

$$K_0(A^+) \cong \tilde{K}_0(A) \oplus K_0(\mathbb{C})$$

La correspondencia $\tilde{K}_0 : A \to \tilde{K}_0(A)$ es un functor de $\mathcal{AB}c$ en $\mathcal{G}ab$. y extensión de K_0.

El functor $\tilde{K}_0$ verifica una propiedad de exactitud análoga a la de $\tilde{K}_1$: Si $A \in \mathcal{AB}c$, e I es un ideal cerrado de A, la sucesión exacta

$$0 \to I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/I \to 0$$

induce una sucesión exacta

$$\widetilde{K}_0(I) \to \widetilde{K}_0(A) \to K_0(A/I) .$$

El grupo $K_0(A)$ tiene una descripción más simple que la anterior y que de hecho es la que se utiliza para demostrar la exactitud anterior y obtener una representación particularmente cómoda de sus elementos. Consideremos el conjunto $\bigcup_n P_n(A)$ donde $P_n(A)$ son los idempotentes de $M_n(A)$. Este conjunto es cerrado respecto de $\oplus$ con lo que $\bigcup P_n(A)/\sim$ es un subsemigrupo de $J(A)$. Pues bien el grupo universal simetrizado del cociente anterior resulta ser isomorfo a $K_0(A)$. Se obtiene de aquí que:

a) Todo elemento de $K_0(A)$ es de la forma $[p]-[I_n]$ donde p es un idempotente.

b) $[p]-[I_n] \in K_0(A^+)$ es de $\widetilde{K}_0(A)$ si y sólo si el rango de la proyección de p en $M_m(\mathbb{C})$ es n ($p \in P_m(A^+)$).

c) Dados dos idempotentes p,q, es $[p]=[q]$ si y sólo si $p \oplus I_n$ y $q \oplus I_n$ son conjugados para algún n.

Finalmente se demuestra la existencia del morfismo

$\delta^*: \widetilde{K}_1(A/I) \to \widetilde{K}_0(I)$, que hace exacta la sucesión:

$$\widetilde{K}_1(I) \to \widetilde{K}_1(A) \to \widetilde{K}_1(A/I) \xrightarrow{\delta^*} \widetilde{K}_0(I) \to \widetilde{K}_0(A) \to \widetilde{K}_0(A/I)$$

y de isomorfismos α^*, β^* :

$$\alpha^*: \widetilde{K}_1(A) \to \widetilde{K}_0(SA)$$

$$\beta^*: \widetilde{K}_0(A) \to \widetilde{K}_1(SA)$$

donde SA es la llamada álgebra suspendida de A formada por las aplicaciones $f : [0,1] \to A$ tales que $f(0)=f(1)=0$. El calificativo dado a SA se debe a que el espectro de $(SA)^+$ es la suspensión de la compactificación del espectro de A.

De los isomorfismos anteriores se deducen los importantes resultados siguientes :

1) $\tilde{K}_0(A) = \tilde{K}_0(S^2A)$ (Teorema de periodicidad de Bott).

2) Se tiene la sucesión exacta:

$$\xrightarrow{\delta^*} \tilde{K}_0(I) \to \tilde{K}_0(A) \to \tilde{K}_0(A/I) \xrightarrow{\delta_0^*} \tilde{K}_1(A) \to \tilde{K}_1(A) \to \tilde{K}_1(A/I) \to \cdots$$

donde $\delta_0^* = (\alpha^*)^{-1} \circ \delta^* \circ \beta^*$.

Si definimos entonces para todo compacto punteado X de base x_0

$$\tilde{K}^{2n}(X) = \tilde{K}_0(C_0(X))$$

$$\tilde{K}^{2n+1}(X) = \tilde{K}_1(C_0(X)) , \qquad n \in Z$$

donde $C_0(X)$ es el álgebra de Banach de funciones nulas en x_0 obtenemos una TCGR, que verifica, además el teorema de periodicidad:

$$\tilde{K}^p(X) = \tilde{K}^p(S^2X), \qquad p \in Z .$$

Los teoremas de Arens y Bott prueban que $C_0(X)$ puede sustituirse por cualquier álgebra de Banach de espectro X.

De acuerdo con la teoría general, obtenemos una TCG a partir de $(\tilde{K}^p)_p$ definiendo para todo par X,Y de compactos con $\phi \neq Y \subset X$,

$$K^p(X,Y) = \tilde{K}^p(X/Y).$$

Si $Y = \phi$ se define $K^p(X) = K^p(X,\phi) = \tilde{K}^p(X^+)$

resultando que

$$K^p(X,Y) = \tilde{K}_p(C_0(X/Y)) \quad p = 0,1 \qquad \text{si} \quad Y \neq \phi,$$

$$K^p(X) = K_p(C_0(X)) \qquad p = 0,1 .$$

6) Comparación con la teoría K topológica.

Tal como se ha dicho en 4), la teoría K topológica se construye a partir del functor K del modo siguiente: Si X es un espacio topológico compacto, Vect (X) denota el conjunto de clases de isomorfismo de fibrados complejos sobre X de dimensión finita. Vect (X) tiene una estructura de semigrupo con la suma directa como operación interna. Pues bien K(X) denota el grupo universal simetrización del semigrupo abeliano Vect (X), verificándose el isomorfismo $K(X) \cong K_0(X)$. La demostración de este isomorfismo se basa en el teorema de Swan ya citado, según el cual el functor Γ "tomar secciones globales" es un isomorfismo de la categoría de fibrados vectoriales complejos de dimensión finita sobre X, en la de C(X)-módulos proyectivos finitamente generados. Si A = C(X), y M es un A-módulo proyectivo finitamente generado, existirá N, A-módulo, tal que $M \oplus N \cong A^r$ para algún r; la proyección $(m,n) \to (m,0)$ determina entonces un idempotente p de $M_r(A)$. A partir de aquí es fácil comprobar el isomorfismo en cuestión.

7) Conclusión.

Volviendo sobre el tema inicial, vamos a remarcar algunos de los resultados que se han mencionado. Hemos visto como los primeros grupos de cohomología de una variedad diferenciable (compleja) se podían interpretar a través de su estructura diferenciable (compleja). Recordémoslos,

$$H^1(X,\mathbb{Z}) = C_\infty(X)^{-1}/_{ex\ C_\infty}(X)$$

$$H^2(X,\mathbb{Z}) = \mathrm{Vect}^1(X)$$

y análogo para el caso complejo. Otras descripciones de los grupos de cohomología las dan los clásicos teoremas de de Rham y Dolbeault , a través de

$$H^p(X,\mathbb{R}) \cong Z_p(\text{formas cerradas})/_{Z_p}(\text{formas exactas})$$

Asimismo el teorema de Riemann-Roch para superficies de Riemann establece una relación del mismo género de las anteriores. En este caso se tiene

$$\dim H^0(M,\theta(\xi)) - \dim H^1(M,\theta(\xi)) - c(\xi) = \frac{1}{2}\chi(M)$$

para toda superficie compacta conexa M y para todo fibrado $\xi \in H^1(M,\theta^*)$.

Mencionemos finalmente el teorema según el cual todo fibrado contínuo sobre una variedad diferenciable, admite una estructura de fibrado diferenciable, con lo que carece de interés el estudio de una teoría K "diferenciable", esto es, podría escribirse $K^{C_0}(X) = K^{C_\infty}(X)$.

La importancia de estos resultados dan la medida del interés que tiene el estudio de las relaciones entre invariantes topológicos del espectro de un álgebra topológica y propiedades que dependen más específicamente de la misma. En este sentido podemos citar los importantes teoremas de Shilov, Arens-Royden, Forster y Arens, ya mencionados, y que contribuyen a mantener el interés de proseguir este estudio.

B I B L I O G R A F I A

1) R. Arens. To what extend does the space the space of maximal ideals determine the algebra? Function Algebras, ed. F.J. Britel; Scott-Foresman, Chicago,1966.

2) M.F. Atiyah. K-Theory, Benjamin, N.Y.,1967.

3) H. Bass. Algebraic K-Theory. Benjamin, N.Y., 1968.

4) S. Eilenberg and N. Steenrod. Fountions of algebraic topology, Princeton, U.P., 1952.

5) Gamelin. Uniforme Algebras, Princete-Hall, 1969.

6) P. Hilton. General Cohomology Theory and K-Theory, Cambridge Univ.Press, 1971.

7) Karoubi,M. K-Theory, University of Montreal Press,Montreal, 1971.

8) E.H. Spanier. Algebraic Topology. McGraw-Hill, N.Y., 1966.

9) J.L. Taylor. Banach Algebras and Topology.