Publ. Mat. U.A.B.
nº 6 des. 1977

Espacios de Köthe y series de Dirichlet

J. Prada Blanco.

INTRODUCCION

En un trabajo anterior("Series de Dirichlet consideradas como espacios de sucesiones".Collectanea Mathemática.Barcelona.En prensa),estudiamos los espacios de sucesiones

$$H(r)=\left\{a \in \omega \;/\; \sum |a_m| \cdot e^{-\lambda_n r'} < \infty \;,\; \forall r' > r \right\}$$

$$H(-\infty)=\left\{a \in \omega \;/\; \sum |a_m| \cdot e^{-\lambda_m r'} < \infty \;,\; \forall r' \in R \right\}$$

$$H[r] = \left\{b \in \omega \;/\; \exists n_0 \in N,\; \exists r' > r \;/\; |b_m| \leq e^{-\lambda_n r'},\; n \geq n_0 \right\}$$

$$H[-\infty] = \left\{b \in \omega \;/\; \exists n_0 \in N,\; \exists r' \in R \;/\; |b_m| \leq e^{-\lambda_m r'},\; n \geq n_0 \right\}$$

siendo (λ_m) una sucesión de números reales tal que $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 \cdots \to \infty$ con la condición $\lim \lambda_n/n > 0$ (finito o no).

En este trabajo consideramos los mismos espacios, siendo (λ_m) cualquier sucesión de números reales tal que $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 \cdots \to \infty$. Si $\underline{\lim}\, \lambda_n/n > 0$, tenemos que $\forall r_i$ $\exists r_j \;/\; \sum e^{-\lambda_m (r_i - r_j)} < \infty$, siendo (r_i) una sucesión de números reales estrictamente decreciente y convergente a r;evidentemente,$\underline{\lim}\, \lambda_n/n > 0$ implica,tambien, que $\forall i \in N,\; \exists j \in N \;/\; \sum e^{\lambda_m (i-j)} < \infty$.

Por lo tanto, este artículo presenta resultados mucho más generales que el previamente citado.

LA α -DUALIDAD

Proposición 1

Los espacios H(r) (r R y r=- ∞) son espacios escalonados de orden uno.(XII).

Proposición 2

$$H(r)^{x} = H[r] \qquad y \qquad H(-\infty)^{x} = H[-\infty]$$

Demostración

a) $H[r] \subset H(r)^{x}$

$y \in H[r] \Rightarrow |y_m| \leq e^{-\lambda_m r'}$, $r' > r$, $n \geq n_o$ .Entonces $y \in H(r)^{x}$

b) $H(r)^{x} \subset H[r]$

$u \in H(r)^{x} \Rightarrow$ u pertenece a la envoltura normal de un vector $\rho . e^{-\lambda_m r_i}$, $\rho > 0$.Entonces $|u_m| \leq \rho . e^{-\lambda_m r_i}$

Sea r' tal que $r_i > r' > r$ .Tenemos $e^{-\lambda_m (r_i - r')} \longrightarrow 0 \Rightarrow$

$\rho . e^{-\lambda_m r_i} \leq e^{-\lambda_m r'}$, $\forall\ n \geq n_o$.

Analogamente, $H(-\infty)^{x} = H[-\infty]$

Nota. $H[r]^{x} = H(r)$ y $H[-\infty]^{x} = H(-\infty)$

TOPOLOGIAS EN LOS ESPACIOS $H(r)$ y $H(-\infty)$

Consideremos las parejas duales $< H[r], H(r) >$ y $< H[-\infty], H(-\infty) >$.

Proposición 3

Los espacios $H(r)$ ($r \in R$ y $r=-\infty$) son de Fréchet con la topología normal.(IX,pag.419).

Proposición 4

Supongamos que $\forall\, r_i$, $\exists\, r_j$ tal que $e^{-\lambda_m(r_i - r_j)} \in l^1$ (respectivamente, $\forall\, i \in N$, $\exists\, j \in N$ tal que $e^{\lambda_m(i-j)} \in l^1$) y consideremos en $H(r)$ ($r \in R$) y $H(-\infty)$ las seminormas $h_p((a_m)) = \sup(|a_m| \cdot e^{-\lambda_m p})$, $p > r$ y $h_p((a_m)) = \sup(|a_m| \cdot e^{-\lambda_m p})$, $p \in R$ (respectivamente).Estas seminormas engendran en $H(r)$ ($r \in R$ y $r=-\infty$) una topología $\mathcal{T}$ que coincide con la normal.

Demostración

Como los espacios $H(r)$ ($r \in R$ y $r=-\infty$) son nucleares con la topología normal (IX,pag.98) el resultado es trivial.

Nota.Una base de entornos para la topología $\mathcal{T}$ viene dada por la familia $\mathcal{U} = \{U_{(p,\varepsilon)},\ p > r,\ \varepsilon > 0\}$

siendo $U_{(\rho,\varepsilon)} = \{ a \in H(r) \ / \ e^{-\lambda_m \rho} |a_m| \leq \varepsilon \}$

Analogamente, $\mathcal{U} = \{ U_{(\rho,\varepsilon)} \ , \ \rho \in R \ , \ \varepsilon > 0 \}$ es una base de entornos de cero para la topología $\mathcal{T}$ de $H(-\infty)$.

Proposición 5

Supongamos que $\exists\, r_i \ / \ \forall\, r_j$ tengamos $e^{-\lambda_m (r_i - r_j)} \notin l^1$ (respectivamente, $\exists\, i \in N \ / \ \forall\, j \in N$ tengamos $e^{\lambda_m (i-j)} \notin l^1$) y consideremos en $H(r)$ $(r \in R)$ y $H(-\infty)$ las seminormas $h_\rho((a_m)) = \sup (|a_m| \cdot e^{-\lambda_m \rho})$ $\rho > r$ y $h_\rho((a_m)) = \sup (|a_m| \cdot e^{-\lambda_m \rho})$, $\rho \in R$ (respectivamente). Estas seminormas engendran en $H(r)$ ($r \in R$ y $r = -\infty$) una topología $\mathcal{T}$ estrictamente menos fina que la topología normal.

Demostración

Como los espacios $H(r)$ ($r \in R$ y $r = -\infty$) no son nucleares con la topología normal(IX,pag.98) el resultado es trivial.

Nota. Si $\exists\, r_i \ / \ \forall\, r_j$ tengamos $e^{-\lambda_m (r_i - r_j)} \notin l^1$ (respectivamente, $\exists\, i \in N \ / \ \forall\, j \in N$ tengamos $e^{\lambda_m (i-j)} \notin l^1$), los espacios $H(r)$ ($r \in R$ y $r = -\infty$)

no son completos con la topología $\mathcal{T}$.

Proposición 6

Supongamos que $\exists\, r_i \,/\, \forall\, r_j$ tengamos $e^{-\lambda_n(r_i-r_j)} \notin 1^1$ (respectivamente, $\exists\, i \in N \,/\, \forall\, j \in N$ tengamos $e^{\lambda_n(i-j)} \notin 1^1$).Entonces,la topología $\mathcal{T}$ en $H(r)$ ($r \in R$ y $r=-\infty$) no es compatible con la pareja dual $\langle H[r], H(r)\rangle$, ($r \in R$ y $r=-\infty$).

Demostración

Supongamos que $\mathcal{T}$ en $H(r)$ ($r \in R$) fuese compatible con la pareja dual $\langle H[r], H(r)\rangle$. Entonces, todo entorno del origen en la topología débil sería entorno del origen en la topología $\mathcal{T}$.

Sea $V=\left\{a \in H(r) \;/\; \left|\sum a_m \cdot e^{-\lambda_n r_i}\right| \leq \varepsilon\right\}$

Existe un $V'=\left\{a \in H(r) \;/\; e^{-\lambda_n r_j}\,|a_m| \leq \varepsilon'\right\}$ tal que $V' \subset V$.

Consideremos las siguientes sucesiones

$$a^k = \begin{cases} \varepsilon' e^{\lambda_m r_j} & , n \leq k \\ \\ 0 & , n > k \end{cases}$$

$a^k \in V'$ pero no pertenecen a V.En efecto: $a^k \in V$

$\sum_{0}^{m} e^{-\lambda_s(r_i-r_j)} \leq \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$, $\forall n \in N$, lo cual no es posible.

En $H(-\infty)$, la demostración es similar.

<u>Proposición 7</u>

Supongamos que $\exists\, r_i \,/\, \forall\, r_j$, tengamos $e^{-\lambda_m(r_i-r_j)} \notin l^1$ (respectivamente, $\exists\, i \in N \,/\, \forall\, j \in N$, tengamos $e^{\lambda_m(i-j)} \notin l^1$). Entonces $(H(r), \tau)' = \{u \in H[r] \,/\, \exists\, r_j \,/\, \sum |u_m| \cdot e^{\lambda_m r_j} < \infty\}$ y $(H(-\infty), \tau)' = \{u \in H[-\infty] \,/\, \exists\, j \in N \,/\, \sum |u_m| \cdot e^{-\lambda_m j} < \infty\}$.

Demostración

a) Sea $u \in (H(r), \tau)'$

Dado $V = \{a \in H(r) \,/\, |\sum u_m \cdot a_m| \leq \varepsilon\}$, $\exists\, V' \subset V$ siendo $V' = \{a \in H(r) \,/\, e^{-\lambda_m r_j} |a_m| \leq \varepsilon'\}$

Consideremos las sucesiones

$$a^k = \begin{cases} \varepsilon' e^{\lambda_m r_j} \bar{u}_m / |u_m|, & n \leq k, (u_m \neq 0);\ 0 \text{ si } u_m = 0 \\ 0 & , n > k \end{cases}$$

$a^k \in V'$, $\forall k \Rightarrow a^k \in V$

$$\left| \sum_{0}^{k} \varepsilon' e^{\lambda_m r_j} \bar{u}_m u_m / |u_m| \right| \leq \varepsilon, \ \forall k \Rightarrow \sum_{0}^{\infty} |u_m| \cdot e^{\lambda_m r_j} < \infty$$

b) Sea $u \in H[r]$ tal que $\exists r_j$ tal que $\sum |u_m| . e^{\lambda_m r_j} < \infty$

Entonces $u \in (H(r), \tau)'$. En efecto:

Dado $V = \{ a \in H(r) \ / \ |\sum u_m . a_m| \leq \varepsilon \}$, $\exists V' \subset V$

siendo $V' = \{ a \in H(r) \ / \ e^{-\lambda_m r_j} |a_m| \leq \varepsilon / M$, donde $M =$

$= \sum |u_m| . e^{\lambda_m r_j}$.

En $H(-\infty)$ la prueba es similar.

TOPOLOGIAS EN LOS ESPACIOS $H[r]$ Y $H[-\infty]$

Proposición 8

Los espacios $H[r]$ ($r \in R$ y $r = -\infty$) son de Montel con la topología de Mackey. (IX, pag. 423).

Nota. En $H[r]$ ($r \in R$ y $r = -\infty$) las topologías fuerte y de Mackey coinciden.

Proposición 9

Supongamos que $\forall r_i$, $\exists r_j$ / $e^{-\lambda_m (r_i - r_j)} \in l^1$ (respectivamente, $\forall i \in N$, $\exists j \in N$ / $e^{\lambda_m (i-j)} \in l^1$).

Entonces, en $H[r]$ ($r \in R$ y $r = -\infty$) las topologías normal y de Mackey coinciden.

Demostración

El resultado es inmediato por proposición 6 de XV.

Proposición 10

Supongamos que $\exists\, r_i \;/\; \forall\, r_j$, tengamos $e^{-\lambda_m(r_i-r_j)} \notin l^1$. Entonces, las topologías normal y de Mackey no coinciden en $H[r]$, $r \in R$.

Demostración

Supongamos que ambas topologías coinciden. Sea $y_m = e^{\lambda_m r}$. Evidentemente, $e^{\lambda_m r} \cdot e^{-\lambda_m r_i} \to 0$, $\forall\, r_i$. Entonces, $e^{\lambda_m r} \cdot e^{-\lambda_m r_i} \in l^1$, $\forall\, r_i$. Ahora bien, $r_i \to r \Rightarrow r_i - r < \mathcal{E}$, $\forall\, i \geq i_0$. Por lo tanto, tenemos que $e^{-\lambda_m \mathcal{E}} \in l^1$, $\forall\, \mathcal{E}\, 0$, con lo que la condición establecida no puede cumplirse.

Proposición 11

Supongamos $\lim \lambda_m / \lg n = 0$. Entonces, las topologías normal y de Mackey no coinciden en $H[-\infty]$.

Demostración

Es una consecuencia inmediata de la siguiente proposición:

Proposición 12

Supongamos que $\lim \lambda_m / \lg n = 0$. Entonces, $\sum e^{-k\lambda_m} = \infty$ $\forall\, k \in N$, pero existe una sucesión (x_m), $x_m \geq 0$ tal que

a) $x_n \cdot e^{k\lambda_n} \to 0,\ \forall\, k \in N$

b) $\sum x_n \cdot e^{k\lambda_n} = \infty\ ,\ \forall\, k \in N.$

Demostración

Pongamos $\lambda_n = \delta_n \cdot \lg n\ ,\ n > 1.$ $\delta_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

$e^{-k\lambda_n} = n^{-k\delta_n} > n^{-\varepsilon}\ ,\ \forall\, \varepsilon > 0$ y $n \geq n_o(\varepsilon)$.

Entonces $\sum e^{-k\lambda_n} = \infty$

a) Tomemos $x_n = e^{-\delta_n^{1/2} \lg n}$ $(n \geq 2), x_o = x_1 = 0$

Tenemos

$$x_n \cdot e^{k\lambda_n} = \exp(k \cdot \delta_n \cdot \lg n - \delta_n^{1/2} \lg n) =$$

$$= \exp(-\delta_n^{1/2} \cdot \lg n \cdot (1 - k\,\delta_n^{1/2}))$$

$1 - k\,\delta_n^{1/2} \to 1$ y $\delta_n^{-1/2} \cdot \lg n > \delta_n \cdot \lg n = \lambda_n$, para n suficientemente grande $\Rightarrow$ $\delta_n^{1/2} \cdot \lg n \to \infty$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_n \cdot e^{k\lambda_n} \to 0.$

b) $x_n \cdot e^{k\lambda_n} =$

$$= n^{-\delta_n^{1/2}(1 - k\,\delta_n^{1/2})}$$

El exponente tiende a cero $\Rightarrow$ $\sum x_n \cdot e^{k\lambda_n}$ diverge.

Proposición 13

Los espacios $H[r]$ ($r \in R$ y $r = -\infty$) con la topología fuerte no son metrizables.

Demostración

Basta ver que $H(r)$ con la topología normal no es normable.

Supongamos que $V' = \{a \in H(r) \;/\; \sum |a_m| \cdot e^{-\lambda_m r_i} \leq \varepsilon'\}$ fuese acotado. Entonces, dado $V = \{a \in H(r) \;/\; \sum |a_m| \cdot e^{-\lambda_m r_j} \leq \varepsilon\}$ existiría un $\lambda > 0$ tal que $\lambda V' \subset V$.

Consideremos las sucesiones

$$a^k = \begin{cases} \varepsilon' e^{\lambda_m r_i} & , n=k \\ 0 & , n \neq k \end{cases}$$

$a^k \in V' \Rightarrow \lambda a^k \in V$. Por tanto, $e^{-\lambda_m (r_j - r_i)} \leq \dfrac{\varepsilon}{\lambda \varepsilon'}$, $n \in N$

Si $r_j < r_i$, la condición anterior no puede cumplirse.

En $H[-\infty]$, la prueba es similar.

LOS ESPACIOS $H(\mathcal{R}_o)$ Y $H(C)$

Sea $\mathcal{R}_r = \{z \in C \;/\; R(z) > r\}$. Llamemos $H(\mathcal{R}_o)$ y $H(C)$ a los siguientes espacios

$H(\mathcal{R}_o) = \{ f(z) \ / \ f(z) = \sum a_m \cdot e^{-\lambda_m z}, \ z \in \mathcal{R}, \ a \in H(r) \}$

$H(C) = \{ f(z) \ / \ f(z) = \sum a_m \cdot e^{-\lambda_m z}, \ z \in C, \ a \in H(-\infty) \}$

Proposición 14

Supongamos que $\forall r_i$, $\exists r_j$ tal que $e^{-\lambda_m (r_i - r_j)} \in l^1$ (respectivamente, $\forall i \in N$, $\exists j \in N \ / \ e^{\lambda_m (i-j)} \in l^1$) y consideremos en $H(\mathcal{R})$ y $H(C)$ las seminormas

$h_\rho (f(z)) = \sup |f(z)|$, $z = x + iy$, $x \geq \rho > r$, $y \in R$ y

$h_\rho (f(z)) = \sup |f(z)|$, $z = x + iy$, $x \geq \rho$, $\rho \in R$, respectivamente. Estas seminormas engendran en $H(\mathcal{R})$ y $H(C)$ una topología T tal que $(H(\mathcal{R}), T)$ es isomorfo a $(H(r), \mathcal{T})$ y $(H(C), T)$ a $(H(-\infty), \mathcal{T})$.

Demostración

La topología T dada por las seminormas h_ρ está dada, tambien, por las seminormas h_{r_i}, siendo

$h_{r_i} (f(z)) = \sup |f(z)|$, $z = x + iy$, $x \geq r_i > r$, $y \in R$

a) Sea V un entorno de cero en T. Entonces $f^{-1}(V)$ es un entorno de cero en $\mathcal{T}$.

$V = \{ f(z) \ / \ \sup |\sum a_m \cdot e^{-\lambda_m z}| \leq \varepsilon \}$, $z = x + iy$, $x \geq r_i > r$, $y \in R$

$f^{-1}(V) = \{ a \ / \ \sup |\sum a_m \cdot e^{-\lambda_m z}| \leq \varepsilon$, $z = x + iy$, $x \geq r_i > r$, $y \in R \}$

Consideremos $V' = \{ a \ / \ |a_m| \leq \varepsilon' e^{\lambda_m r_j} \}$, siendo r_j tal que $e^{-\lambda_m (r_i - r_j)} \in 1^1$ y $\varepsilon' \leq \varepsilon / \sum e^{-\lambda_m (r_i - r_j)}$.

Entonces, $V' \subset f^{-1}(V)$

b) Sea V un entorno de cero en $\mathcal{T}$. Entonces, $f(V)$ es un entorno de cero en T.

$V = \{ a \in H(r) \ / \ e^{-\lambda_m r_i} |a_m| \leq \varepsilon \ , \ r_i > r \ , \ \varepsilon > 0 \}$

$f(V) = \{ f(z) = \sum a_m \cdot e^{-\lambda_m z} \ / \ e^{-\lambda_m r_i} |a_m| \leq \varepsilon \ , \ a \in H(r) \}$

Consideremos $V'' = \{ f(z) \in H(\mathcal{R}) / \sup | \sum a_m \cdot e^{-\lambda_m z} | \leq \varepsilon,$ $z = r_i + it, \ t \geq t_0 \}$

V'' es un entorno de cero en T y además $V'' \subset f(V)$.

En $H(C)$, la prueba es similar.

<u>Proposición 15</u>

Supongamos que $\exists r_i \ / \ \forall r_j$ tengamos $e^{-\lambda_m (r_i - r_j)} \notin 1^1$ (respectivamente, $\exists i \in N \ / \ \forall j \in N$, tengamos $e^{\lambda_m (i-j)} \notin 1^1$) y consideremos en $H(\mathcal{R})$ y $H(C)$ las seminormas $h_\rho(f(z)) = \sup |f(z)|$, $z = x + iy$, $x \geq p > r$, $y \in R$ y $h_p(f(z)) = \sup |f(z)|$, $z = x + iy$, $x \geq p$, $p \in R$, respectivamente. Estas seminormas engendran en $H(\mathcal{R})$ y $H(C)$ una topología T pero $(H(\mathcal{R}), T)$ y $(H(C), T)$

no son isomorfos a $(H(r), \mathcal{T})$ y $(H(-\infty), \mathcal{T})$, respectivamente.

Demostración

a) Dado $V=\left\{ a \in H(r) \ / \ e^{-\lambda_m r_i} |a_m| \leq \mathcal{E}, \ r_i > r, \ \mathcal{E}>0 \right\}$ $f(V)$ es un entorno de cero en T.

Consideremos $V''=\left\{ f(z) \ / \ \sup\left| \sum a_m \cdot e^{-\lambda_m z}\right| \leq \mathcal{E}, \ z= r_i + it, \ t \geq t_o \right\}$. Entonces, $V'' \subset f(V)$.

b) Dado $V=\left\{ f(z) \ / \ \sup\left| \sum a_m \cdot e^{-\lambda_m z}\right| \leq \mathcal{E}, \ z= r_i + it, \ t \geq t_o \right\}$, $f^{-1}(V)$ no es un entorno de cero en $\mathcal{T}$, pues si lo fuese existiría un entorno de cero V' tal que $V' \subset f^{-1}(V)$ siendo $V'=\left\{ a \in H(r) \ / \ |a_m| \leq \mathcal{E}' e^{\lambda_m r_j} \right\}$

Consideremos las siguientes sucesiones

$$a^k = \begin{cases} \mathcal{E}' e^{\lambda_m (r_j + i t_o)} & , n \leq k \\ 0 & , n > k \end{cases}$$

$a^k \in V'$, k=1,2..Entonces $a^k \in f^{-1}(V) \Rightarrow \mathcal{E}' \sum_{s=0}^{m} e^{-\lambda_s (r_i - r_j)} \leq \mathcal{E}$, $\forall \ n \in N \Rightarrow \sum e^{-\lambda_m (r_i - r_j)} < \infty$, lo cual no es posible.

En H(C), la prueba es similar.

<u>Proposición 16</u>

Supongamos que $\exists \ r_i \ / \ \forall \ r_j$ tengamos $e^{-\lambda_m (r_i - r_j)} \notin l^1$

(respectivamente, $\exists\, i \in N \,/\, \forall j \in N$, tengamos $e^{\lambda_m(i-j)} \notin l^1$) y (λ_m) independiente sobre Z. Entonces los espacios $H(\mathcal{R}_o)$ y $H(C)$ con la topología T son isomorfos a los espacios $H(r)$ y $H(-\infty)$ con la topología normal, respectivamente.

Demostración

Es una consecuencia inmediata de las siguiente proposición:

Proposición 17

Sea (λ_m) independiente sobre Z.

Si $a \in H(r)$, entonces

$$\sum |a_m| . e^{-\lambda_m r'} = \sup \left| \sum a_m . e^{-\lambda_m z} \right| , \quad z = r' + iy, y \in R, r' > r$$

Si $a \in H(-\infty)$, entonces

$$\sum |a_m| . e^{-\lambda_m r'} = \sup \left| \sum a_m . e^{-\lambda_m z} \right| , \quad z = r' + iy, y \in R, r' \in R$$

Demostración

Dados $\xi_k \in C$, $0 \leq k \leq n$ tales que $|\xi_k| = 1$ y $\varepsilon > 0$ existe $y \in R$ tal que

$$\left| e^{i\lambda_k y} - \xi_k \right| < \varepsilon , \quad 0 \leq k \leq n \text{ (Teorema de Kronecker)}$$

$$a \in H(r) \Rightarrow \sum_{k > n_o} |a_k| . e^{-\lambda_k r'} \leq \varepsilon$$

Consideremos los números complejos $\bar{a}_k/|a_k|$, $k \leq n_o$

y $\mathcal{E}' = \mathcal{E} / \sum_{k\leq n_o} |a_k| e^{-\lambda_k r'}$

Entonces, existe un $y \in R$ tal que

$$\left| e^{-i\lambda_k y} - \bar{a}_k / |a_k| \right| < \mathcal{E} \quad , k \leq n_o \Rightarrow$$

$$\left| \sum_{k\leq m_o} a_k \, e^{-\lambda_k r'} e^{-i\lambda_k y} - \sum_{k\leq m_o} |a_k| . e^{-\lambda_k r'} \right| \leq$$

$$\leq \mathcal{E}' \sum_{k\leq m_o} |a_k| . e^{-\lambda_k r'} \Rightarrow \left| \sum_{k\leq m_o} a_k . e^{-\lambda_k r'} . e^{-i\lambda_k y} \right| \geq$$

$$\geq \sum_{k\leq m_o} |a_k| . e^{-\lambda_k r'} - \mathcal{E}$$

Entonces

$$\left| \sum_{o}^{\infty} a_k . e^{-\lambda_k r'} . e^{-i\lambda_k y} \right| \geq \left| \sum_{k\leq m_o} a_k . e^{-\lambda_k r'} . e^{-i\lambda_k y} \right| -$$

$$- \left| \sum_{m_o+1}^{\infty} a_k . e^{-\lambda_k r'} . e^{-i\lambda_k y} \right| \Rightarrow$$

$$\left| \sum_{o}^{\infty} a_k . e^{-\lambda_k r'} . e^{-i\lambda_k y} \right| \geq \sum_{o}^{\infty} |a_k| . e^{-\lambda_k r'} - 3\mathcal{E}$$

En $H(-\infty)$, la prueba es similar.

Nota. Si consideramos $H(\mathcal{R})$ y $H(C)$ con la topología compacto-abierta T',tenemos que T es más fina que T'.

Además,si $\exists r_i$ / $\forall r_j$,tengamos $e^{-\lambda_m(r_i-r_j)} \notin 1^1$, (respectivamente,si $\exists i \in N$ / $\forall j \in N$,tengamos $e^{\lambda_m(i-j)} \notin 1^1$),$H(\mathcal{R})$ y $H(C)$ con la topología T' no son isomorfos a $H(r)$ y $H(-\infty)$ con la topología normal,respectivamente.

BIBLIOGRAFIA

I.- Besicovitch,A.S."Almost Periodic Functions".Cambridge at the University Press.Dover Publications,Inc. 1954.

II.-Cerdá Martín,J.L."Dualidad de Köthe y funciones analíticas".Collectanea Mathemática.Volumen XXII,157-189.Barcelona,1971.

III.-Dieudonne,J."Sur les espaces de Köthe".J.Analyse Math.81-115.1951.

IV.-Fremlin,D.H."On Köthe spaces".Dissertation.Cambridge,1966.

V.-Garling,D.J.H."On topological sequence spaces".Proc. Camb.Phil.Soc.63.997-1019.1967.

VI.-Garling,D.J.H."The β- and γ-duality of sequence spaces".Proc.Camb.Phil.Soc.63.963-981.1967.

VII.-Hardy,G.H. and Riesz,M."Dirichlet Series".Stechert-Hafner Service Agency.New York and London.1964.

VIII.-Komura,T and Komura,Y."Sur les espaces parfaits des suites et leurs généralisations".J.Math.Soc.Japan.15.319-338.1963.

IX.-Köthe,G."Topological Vector Spaces I".Springer-Verlag.Berlin.Heidelberg.New York.1969.

X.-Mandelbrojt,S."Series adhérentes.Regularisation des suites.Applications".Gauthiers-Villars.1952.

XI.-Pietsch,A."Nuclear Locally Convex Spaces".Springer-Verlag.Berlin.Heidelberg.New York.1972.

XII.-Prada Blanco,J."Series de Dirichlet consideradas como espacios de sucesiones".Collectanea Mathemática. En prensa.

XIII.-Sargent,W.L.C."Some sequence spaces related to the l^p spaces".J.London.Math.Soc.35.161-171.1960.

XIV.-Toeplitz,C."Dir linearen vollkommenen Raume del Funktionen theorie".Comm.Math.Hel.23.222-242.1949.

XV.-Tort Pinilla,M."Consideraciones sobre la topología normal en los espacios de Köthe".Actas de las primeras jornadas matemáticas luso-españolas.203-216.1973.