SOBRE SK_1 D'UN GRUP FINIT

M. Castellet

1. El grup de Whitehead

Desgraciadament, donats dos espais topològics és molt difícil determinar quan són del amteix tipus d'homotopia. J.H.C. Whitehead va donar a [4] una interpretació combinatorial de la teoria d'homotopia en la línia seguida ja els anys 30 per la topologia, és a dir, introduïnt canvis elementals: dos complexos són "combinatorialment equivalents" si es pot passar de l'un a l'altre per una successió d'aquests canvis elementals. Això va portar al concepte de tipus d'homotopia simple d'un complex, i a la introducció d'un grup abelià, el grup Whitehead Wh(K), que dóna informació sobre quan dos complexos són simplement homotòpicament equivalents respecte un subcomplex K.

Les tècniques desenvolupades posteriorment han portat a una interpretació purament algebraica del grup de Whitehead en termes de la teoria K algebraica: Si G és el grup fonamental de K i $\mathbb{Z}G$ l'anell de grup de G sobre $\mathbb{Z}$, aleshores $Wh(K) = K_1(\mathbb{Z}G)/_{G^*}$ on G^* és la imatge del grup de les unitats trivials de $\mathbb{Z}G$ a $K_1(\mathbb{Z}G)$.

Molt poc es coneix de Wh(K) si el grup $G = \pi_1 K$ no és abelià. H. Bass va demostrar a [1] que si G és finit, Wh(K) és de tipus finit i va determinar el rang en termes del nombre de representacions irreduïbles reals i racionals de G. Més recentment, C.T.C. Wall [3] ha demostrat que el subgrup de torsió de Wh(K) és, precisament, el grup especial $SK_1(\mathbb{Z}G)$, que en el cas commutatiu coincideix amb el nucli del determinant $K_1(\mathbb{Z}G) \to (\mathbb{Z}G)^*$ i que en el cas no commutatiu es pot definir de la següent manera:

Donat un grup finit G, QG(l'anell de grup amb coeficients racionals) és isomorf a un producte finit d'anells de matrius M_i sobre anells de divisió, els centres Z_i dels quals contenen tots $\mathbb{Q}$. Aleshores, existeix un cos de nombres F que conté tots els Z_i i tal que $F \otimes_{Z_i} M_i$ és isomorf a un anell de matrius $M_{r_i}(F)$ sobre F. Les inclusions

$$\mathbb{Z}G \rightarrowtail \prod_i M_{r_i}(G)$$

donen, aleshores, un homomorfisme

$$GL(n, \mathbb{Z}G) \longrightarrow \prod_i GL(n \cdot r_i, F)$$

i per tant, passant als grups infinits i fent quocient pels commutadors, un homomorfisme de grups abelians

$$K_1(\mathbb{Z}G) \longrightarrow \prod_i K_1(F),$$

que, compost amb el determinant de $F: K_1(F) \rightarrow F^*$, ens dóna un homomorfisme de grups

$$\det: K_1(\mathbb{Z}G) \longrightarrow \prod_i F^*.$$

Aleshores, es defineix $SK_1(\mathbb{Z}G) = \operatorname{Ker} \det$.

Observis que si G és un grup abelià, QG és producte directe de cossos i $K_1(\mathbb{Z}G) \rightarrow (\mathbb{Z}G)^*$ és el determinant usual.

L'estudi de $SK_1(\mathbb{Z}G)$ és, doncs, vital, per a conèixer el grup de Whitehead Wh(K), on $G = \pi_1 K$. En aquest aspecte hi ha sols resultats molt aïllats. Per exemple, B.A. Magurn ha demostrat a [2] que si G és un grup dièdrid $SK_1(\mathbb{Z}G)$ és trivial (i, per tant, Wh(K) és lliure).

<u>Una imatge epimòrfica de $SK_1(\mathbb{Z}G)$</u>

$SK_1(-)$ que, en principi, és un functor de la categoria d'anells amb unitat, es pot considerar, al restringir-lo als anells de grup, com un functor definit a la categoria dels grups

$$
\begin{aligned}
SK_1 \ : \ & Gr \longrightarrow Ab \\
& G \longmapsto SK_1(\mathbb{Z}G)
\end{aligned}
$$

ja que tot homomorfisme de grups $f\colon G \longrightarrow G'$ s'estén a un homomorfisme d'anells $f\colon \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}G'$.

Per altra banda, si A és un anell commutatiu, tot homomorfisme d'anells $g\colon \mathbb{Z}G \longrightarrow A$ factoritza a través de $\mathbb{Z}G_{ab}$ (G_{ab} l'abelianitzat de G) i, per tant, l'homomorfisme induït per SK_1 factoritza de la manera següent

$$
\begin{tikzcd}
SK_1(\mathbb{Z}G) \arrow[rr, "g_*"] \arrow[dr, "\pi_*"'] & & SK_1(A) \\
& SK_1(\mathbb{Z}G_{ab}) \arrow[ur, dashed, "\bar{g}_*"'] &
\end{tikzcd}
$$

on π_* està induït per la projecció canònica $\pi\colon G \longrightarrow G_{ab}$.

L'aplicació π_* mereix, doncs, un estudi detallat.

<u>Proposició</u>. Si G és finit, $\pi_*\colon SK_1(\mathbb{Z}G) \longrightarrow SK_1(\mathbb{Z}G_{ab})$ és un epimorfisme.

Demostració: Sigui n l'ordre del commutador $[G,G]$. Aleshores el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}G & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,G \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi' \\ \mathbb{Z}G_{ab} & \xrightarrow{\rho'} & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,G_{ab} \end{array}$$

és un "pull-back" amb totes les fletxes exhaustives. Es pot aplicar, doncs, la successió exacta de Magurn [2], extensió de la de Milnor, obtenint

$$K_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,G_{ab}) \to SK_1(\mathbb{Z}G) \xrightarrow{\alpha} SK_1(\mathbb{Z}G_{ab}) \times SK_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}G) \xrightarrow{\beta} K_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}G_{ab})$$

on, per tot $x \in SK_1(\mathbb{Z}G)$, $\alpha(x) = (\pi_* x, \rho_* x)$ y per tot $(a,b) \in SK_1(\mathbb{Z}G_{ab}) \times SK_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,G)$, $\beta(a,b) = \rho'_* a - \pi'_* b$.

Ara bé, com que $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\,G_{ab}$ és un anell commutatiu finit, $SK_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,G_{ab}) = 0$, d'on, per tot $a \in SK_1(\mathbb{Z}G_{ab})$ existeix un $b \in SK_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,G)$ tal que $\rho'_* a = \pi'_* b$, i per tant existeix un $x \in SK_1(\mathbb{Z}G)$ tal que $\pi_* x = a$.

L'epimorfisme de la proposició permet afirmar que $SK_1(\mathbb{Z}G) \neq 0$ (i per tant Wh(K) té torsió) sempre que $SK_1(\mathbb{Z}G_{ab}) \neq 0$. En un proper article donaré aplicacions de la proposició anterior.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. Bass "The Dirichlet unit theorem, induced characters and Whitehead groups of finite groups" Topology, 4 (1966), 391-410.

[2] B.A. Magurn "Whitehead groups of nonabelian finite groups" Tesi doctoral. Northwestern University, 1976.

[3] C.T.C. Wall "Norms of units in group rings" Proc. London Math. Soc. 3, 29 (1974), 593-632.

[4] J.H.C. Whitehead "Simplicial spaces, nucleii and m-grups" Proc. London Math. Soc. 45(1939),243-327.