Publ. Mat U.A.B.
nº 8 Juny 1978

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BARCELONA

FACULTAD DE CIENCIAS

SECCION DE MATEMATICAS

SEMISISTEMAS DINAMICOS DISCRETOS DEBILES, Y SU APLICACION A LA OPTIMIZACION DE FUNCIONALES

Memoria presentada para
optar al grado de doctor

E.Llorens Fuster

Esta tesis doctoral fue dirigida por el Catedrático Dr.D. FLORENCIO DEL CASTILLO ABANADES, y fue leida el día 9 de diciembre de 1977 en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de Barcelona ante el siguiente tribunal:

PRESIDENTE

Dr.D. Alberto Dou Mas de Xexás

VOCALES

Dr.D. Juan Luis Cerdá Martín

Dr.D. Florencio del Castillo Abánades

Dr.D. Julián Cufí Sobregrau

VOCAL SECRETARIO

Dr.D. Carlos Perelló Valls

Calificación:

SOBRESALIENTE "CUM LAUDE"

Deseo hacer constar mi agradecimiento al Prof.Dr.D.Florencio del Castillo Abanades, Catedrático de la Universidad de Málaga, Director de este trabajo, sin cuya ayuda y comprensión no hubiera sido posible.

I N D I C E

INTRODUCCION

Dado un espacio topológico X y una aplicación $\pi: X\times R \longrightarrow X$ con las propiedades:

I) $\forall x\in X$, $\pi(x,0)= x$

II) $\forall x\in X$, $\forall h,k\in R$, $\pi(\pi(x,h),k))=\pi(x,h+k)$.

III) π es continua en $X\times R$,

se dice que la terna (X,R,π) es un sistema dinámico ordinario, definición axiomática que se inspira en algunas propiedades de las soluciones de un sistema diferencial autónomo sobre R^n.

Si $x\in X$ se llama solución de (X,R,π) pasando por x, a la aplicación $\pi_x: R\to X$ definida por $\pi_x(t)= \pi(x,t)$, y se llama trayectoria de x al conjunto $\{\pi(x,t): t\in R\}$.

Si la trayectoria de x se reduce al punto x, dicho punto es llamado crítico o de equilibrio. Una propiedad de especial interés es que si x es crítico, de ser $y\neq x$ con $\pi(y,t_n)\to x$, tiene que ser $t_n\to+\infty$ ó $t_n\to-\infty$, es decir que los puntos críticos no pueden alcanzarse en tiempos finitos.

Un estudio detallado de los sistemas dinámicos ordinarios, se encuentra en el libro de V.V.Nemytskii y V.V Stepanov, Qualitative Theory of Differential Equations, 1947, y una puesta al día de esta teoría, con indicación de los campos estudiados y técnicas empleadas en los últimos años, puede verse en (5), obra desarrollada preferentemente en el caso en que el espacio fase X es métrico localmente compacto. En Topological Dinamics and Ordinary Differential Equations, (1971), G.R. Sell estudia el caso en que X es un espacio uniforme.

Modificando algunos elementos de la terna que constituye un sistema dinámico ordinario, se obtienen algunas de las generalizaciones que conducen al concepto de semi-sistema dinámico discreto débil sin unicidad, cuyo estudio es, en parte, un objetivo de la presente memoria.

Citaremos algunas de ellas.

Si se considera $\pi X \times R^{+} \longrightarrow X$ se obtienen <u>semi-sistemas dinámicos</u>, estudiados por N.P. Bhatia y O.Hajek en (3). Como particularidades importantes propias de los semisistemas dinámicos pueden señalarse:

a) El concepto de punto de partida: Situaciones que no pueden ser intermedias del fenómeno considerado y sí pueden ser condiciones iniciales.

b) Un punto crítico puede ser alcanzado en tiempo finito.

En 1.970 M.Slemrod en (29) define sistemas dinámicos débiles (en realidad semi-sistemas) manteniendo inalterados los axiomas I y II, y reenunciando III de modo que, (siendo X un espacio de Banach),

III') Si $|t_n - t| \to 0$ y $x_n \to x$ (débilmente) entonces $\pi(x_n,t_n) \to \pi(x,t)$ (débilmente).

Si la aplicación π es multívoca se obtienen, a partir de los sistemas dinámicos ordinarios, los <u>sistemas dinámicos sin unicidad</u>, que constituyen un estudio axiomático de las ecuaciones diferenciales ordinarias con existencia de solución y prolongación de cada una de ellas a toda la recta real. y que han sido estudiados por G.P. Szego y G.Treccani en (32).

Análogamente, si la aplicación π es multívoca, se obtienen a partir de semisistemas dinámicos ordinarios los <u>sistemas generales de control</u>, un estudio de los cuales puede verse en "Stability in general control systems" (1965) de E.Roxin.

También en 1.970, G.P.Szego y G. Treccani presentan en Varenna (Como, Italia) la comunicación "An abstract formulation of minimization algorithms", recogida después en (30), en la que se introduce el concepto de <u>semi-sistema dinámico discreto</u>, que considerado en la línea de las anteriores generalizaciones, toma la aplicación

$$\pi : X \times I^{+} \longrightarrow 2^{X}$$

y el axioma III queda, si X es un espacio métrico.

III') Si $x_n \to x$ entonces $\pi(x_n,k) \xrightarrow{\beta} \pi(x,k)$ $\forall k \in I^{+}$, donde el símbolo $\xrightarrow{\beta}$ indica la convergencia en una adecuada topología introducida en F(X), espacio de las partes no vacías y compactas de X.

En el mismo trabajo se aplica la Teoría de Semi-sistemas dinámicos discretos para dar una prueba elegante de la convergencia de determinados algoritmos de minimización de funciones sobre R^n. 13

En efecto, si $J:R^n \longrightarrow R$, y se trata de determinar sus mínimos, un procedimiento es construir una sucesión $\{x_n\} \subset R^n$ tal que

a) $J(x_o) > J(x_1) > \ldots$

b) $\{x_n\}$ tiene como límite un punto x^*, en el que J tiene un mínimo.

Si J es suficientemente regular como para que las operaciones que se indican tengan sentido, un método para construir $\{x_n\}$ es el llamado del gradiente, en el que, a partir de un punto inicial arbitrario x_o se toma:

$$x_{n+1} = x_n + \rho_n \frac{-\mathrm{Grad.}J(x_n)}{\|\mathrm{Grad.}J(x_n)\|}$$

siendo

$$\rho_n = \underset{\rho \in [0,k]}{\mathrm{arg.min.}} \; J\left(x_n + \rho \frac{-\mathrm{Grad.}J(x_n)}{\|\mathrm{Grad.}J(x_n)\|} \right),$$

con $k>0$ previamente fijado.

Se trata de definir sobre R^n un semi-sistema dinámico discreto adecuado, (R^n, I^+, π) de modo que, si $x \in R^n$ $\pi(x,k)$ sea el conjunto de los puntos obtenidos a partir de x por k aplicaciones sucesivas del algoritmo, aprovechando propiedades del semisistema para probar su convergencia.

Observamos que:

a) El proceso sólo tiene sentido en una dirección, y además sería de desear que el punto crítico se alcance en un número finito de pasos.

b) Fijado x_n sucede que ρ_n, y por tanto x_{n+1} no está unícamente determinado, lo que hace pensar en la necesidad de prescindir de la unicidad.

c) Fijado x_n los posibles x_{n+1} forman un compacto de R^n. Los compactos no vacíos jugarán un papel fundamental en toda la Teoría de semisistemas dinámicos discretos.

En (8) se hace un estudio extenso de cierta clase de semisistemas dinámicos discretos sobre R^n, que en (34) G. Treccani aplica a la minimización de funciones sobre R^n.

También se exponen resultados en la misma línea en (26).

De modo formalmente similar a como se efectua en R^n, pueden aplicarse resultados de la Teoría de Semisistemas dinámicos discretos al estudio de la convergencia de algoritmos de minimización de funcionales sobre un espacio de Banach, presentándose en este caso las lógicas dificultades derivadas de no ser localmente compacto el espacio considerado. Una aportación a este respecto es el trabajo de F.Castillo (8), en que, definiendo sobre un espacio real de Hilbert separable semisistemas adecuados, se prueba la convergencia (fuerte) al mínimo de un funcional dado, de las sucesiones obtenidas por la aplicación del algoritmo anteriormente descrito sobre R^n.

Sin embargo, en la mayoría de los algoritmos de minimización de funcionales definidos sobre un espacio de Banach reflexivo, extensamente estudiados en (10) y (14),se construyen sucesiones que, bajo determinadas condiciones para dichos funcionales, convergen débilmente a su mínimo.

Ello condujo al doble problema de definir sobre un espacio de Hilbert semisistemas dinámicos discretos adecuados, y a probar que, en efecto son aplicables al estudio de la convergencia débil de algoritmos de minimización, tal como se hizo en los casos anteriores.

La principal dificultad para el primero de estos propósitos radicaba en la expresión de un modo adecuado de un "axioma de continuidad" para la aplicación multívoca definidora del semisistema dinámico discreto, o en otros términos, de hallar una forma idónea del axioma III.

La distribución de la presente memoria en secciones, es la siguiente:

En la Sección 1 se estudian, con vistas a la enunciación del antedicho axioma de continuidad, determinados tipos de convergencia secuencial en el espacio F(H) de las partes no vacías débilmente compactas de H, que para una de ellas resulta ser un espacio con límite.

En la Sección 2 se definen Semisistemas dinámicos discretos débiles sobre H, (terminología que parece la más natural en consonancia con la de sistema dinámico débil), y se estudian propiedades de invariancia, conjuntos límite, estabilidad, funcionales de Liapunov, atracción, minimalidad, etc., siempre bajo el doble aspecto (habitual en semisistemas dinámicos sin unicidad) de condirerarlas para el cono completo de soluciones (propiedades "fuertes") y para las soluciones individuales (propiedades "débiles"). Se ha procurado mantener esta acepción del término 'débil', evitando su empleo en las correspondientes propiedades topológicas, que se han distinguido con el prfijo σ habitual.

Las definiciones relativas a los conceptos de invariancia, estabilidad etc., se ha procurado expresarlas de modo que constituyan generalizaciones de las usuales, aunque en las que son de naturaleza topológica se haya hecho necesario desdoblarlas, apareciendo, por ejemplo, conjuntos límite fuerte y débil de soluciones, atracción fuerte y débil, etc.

El estudio de estos semisistemas dinámicos, se ha hecho con vistas a su aplicación a las pruebas de convergencia de algoritmos de minimización de funcionales sobre H, por lo que no se tratan los conceptos "negativos".

La Sección 3 se dedica a exponer los métodos a seguir para probar la convergencia débil al mínimo, de ciertos algoritmos de minimización de funcionales, definiendo para ello semisistemas dinámicos discretos débiles adecuados, y mostrando que las sucesiones que generan son soluciones del correspondiente semisistema, soluciones cuya convergencia débil a un cierto compacto (que en este caso será el formado por el punto en que el funcional alcanza su mínimo), se ha probado en la sección precedente.

Es de notar que si $\{x_n\}$ es una sucesión de la que se ha probado que converge débilmente al mínimo x^*

del funcional considerado J, nose sigue necesariamente, si H es de dimensión infinita, que $\{J(x_n)\}$ converja a $J(x^*)$ ya que la mayoría de los funcionales empleados en la práctica, no son débilmente continuos (Cfr. 1.1 .). Ello impone sensibles cambios con respecto a los métodos usuales en dimensión finita, en los que la continuidad juega un papel esencial.

El disponer de esta interpretación "dinámica" de los algorítmos de minimización de funcionales, aparte de la unicidad de los métodos y consiguiente mayor elegancia, puede aportar una contribución a su estudio en condiciones menos exigentes para el funcional, asi como al comportamiento de nuevos algoritmos o a la extensión a dimensión infinita de otros conocidos para $\mathbb{R}^n$.

1.: EL ESPACIO CON LIMITE $(F(H),\tilde{\sigma})$

1.1.: NOTACIONES

Se supondrá dado en lo que sigue un espacio real de Hilbert H, separable, en el que se considerarán las topologías débil y de la norma. Si $\{x_n\}$ es una sucesión en H se emplearán los símbolos $x_n \rightharpoonup x$ y $x_n \to x$ para indicar que converge a $x \in H$ respectivamente en cada una de ellas.

La topología débil de H será denotada con el prefijo σ .Para el producto interno, norma y distancia en H se usarán las notaciones habituales $(./.)$, $\|.\|$, y $d(.,.)$ respectivamente.

1.2.: LEMA

Sean $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ sucesiones en H tales que

$x_n \rightharpoonup x$, $y_n \rightharpoonup y$,

verificando además que, para cada $n=1,2,...$

$\|y_n - x_n\| \leq k$.

Entonces se tiene que $\|y - x\| \leq k$.

Prueba:

Para cada entero positivo i, y para todo vector $a \in H$, se cumple que:

$$|(y_i/a)-(x_i-a)| = |(y_i-x_i/a)| \leq \|y_i-x_i\| \|a\| \leq$$
$$\leq k \|a\|.$$

Por tanto:

$$\lim_{i\to\infty} |(y_i/a)-(x_i/a)| \leq k \|a\|$$

lo que, por hipótesis equivale a

$$|(y/a) - (x/a)| \leq k \|a\| .$$

Tomando en particular

$$a = \frac{y - x}{\|y - x\|}$$

quedará:

$$|(y-x \ / \ a)| = \left|\left(y-x/ \ \frac{y-x}{\|y-x\|}\right)\right| = \|y-x\| \leq k \|a\| = k$$

lo que completa la demostración.

□

1.3 : TEOREMA

Sea $B \subset H$ un conjunto débilmente compacto.

Entonces

$S[B,\varepsilon] = \{x \in H : d(B,x) \leq \varepsilon\}$

es débilmente compacto.

Prueba:

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $S[B,\varepsilon]$.

Al ser $S[B,\varepsilon]$ acotado, la sucesión dada admite una subsucesión $\{x_{n_p}\}$ débilmente convergente a un punto $x \in H$.

Como para cada $p \in I^+$, $x_{n_p} \in S[B,\varepsilon]$, $d(B,x_{n_p}) = \alpha_{n_p}$ con $\alpha_{n_p} \leq \varepsilon$.

Al ser B débilmente compacto, es fácil comprobar que , existe $y_{n_p} \in B$ $(p=1,\dots)$ tal que:

$d(B,x_{n_p}) = \|y_{n_p} - x_{n_p}\| = \alpha_{n_p} \leq \varepsilon$ $(p=1,\dots)$.

B es débilmente secuencialmente compacto, por lo que $\{y_{n_p}\} \subset B$ admite una subsucesión (que puede suponerse es ella misma) débilmente convergente a un punto $y \in B$.

Como, obviamente, $x_{n_p} \rightharpoonup x$, por el ema anterior se tendrá que

$\|y - x\| \leq \varepsilon$

y de aquí que $x \in S[B,\varepsilon]$ probándose asi que $S[B,\varepsilon]$ es débilmente secuencialmente compacto, siguiéndose la conclusión de

□

En lo que sigue F(H) es el conjunto de las partes no vacías débilmente compactas de H.

1.4 : DEFINICION

Dados $A,B \in F(H)$ se llama semidesviación de A respecto de B al número real

$$\beta(A,B) = \sup_{x \in A} \{d(x,B)\} .$$

1.5 : TEOREMA

Para cualesquiera $A,B,C \in F(H)$ se cumple:

1.5 .1. $\beta(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \subset B$.

1.5 .2. $\beta(A,B) < \varepsilon \Leftrightarrow A \subset S(B,\varepsilon) = \{x \in H : d(x,B) < \varepsilon\}$.

1.5 .3.: En general, $\beta(A,B) \neq \beta(B,A)$.

1.5 .4.: $\beta(A,B) \leq \beta(A,C) + \beta(C,B)$.

La prueba se omite, por ser simple consecuencia de la definición.

1.6 .: TEOREMA

Sean $A\epsilon F(H)$ y $S_\beta(A,r)=\{ B\epsilon F(H) : \beta(B,A)<r\}$.

Si se define $\Sigma = \{S_\beta(A,r) : A\epsilon F(H), r>_0\}$ se obtiene una base de una topología sobre F(H), que satisface el primer axioma de numerabilidad, y que es no T_1.

La comprobación es inmediata.

$A_n \xrightarrow{\beta} A$ indicará en adelante que la sucesión $\{A_n\} \subset F(H)$ converge en esta topología al conjunto $A\epsilon F(H)$.

1.7 .: DEFINICION

Sea $\{A_n\}$ una sucesión en F(H), y sea $A\epsilon F(H)$. Se dice que $\{A_n\}$ σ-converge a A, ($A_n \overset{\sigma}{\to} A$), si para toda sucesión $\{x_n\}$ con $x_n \epsilon A_n$ $(n=1,\ldots)$ puede obtenerse una subsucesión x_{n_p} con $x_{n_p} \longrightarrow x\epsilon A$.

Con esta convergencia F(H) no es un espacio con límite (Cfr .20. I).

1. .: DEFINICION

Sea $\{A_n\}$ una sucesión en F(H), y sea $A\epsilon F(H)$. Se dice que $\{A_n\}$ $\tilde{\sigma}$-converge a A, ($A_n \overset{\tilde{\sigma}}{\to} A$), si para cualquier subsucesión $\{A_{n_k}\}$ de $\{A_n\}$ se tiene que $A_{n_k} \overset{\sigma}{\to} A$.

1.9 .: TEOREMA

F(H) con la convergencia $\tilde{\sigma}$, es un espacio con límite.

Prueba:

Sea $\{A_n\}$ una sucesión en F(H), y sea $A\epsilon F(H)$.

Es sabido que F(H) es un espacio con límite para la convergencia $\tilde{\sigma}$, si verifica:

1) Si $\tilde{\sigma}\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n=A$ y $k_1<k_2$ ... entonces $\tilde{\sigma}\text{-}\lim_{n\to\infty} A_{k_n} = A$.

2) Si para cada n, $A_n=A$, entonces $\tilde{\sigma}\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

3) Si $\{A_n\}$ no $\tilde{\sigma}$-converge a A, contiene una subsucesión tal que ninguna de sus subsucesiones $\tilde{\sigma}$-converge a A.

Para ver (1) supongamos que $A_n \xrightarrow{\tilde{\sigma}} A$ mietras
20 que para alguna subsucesión $\{A_{n_p}\}$ de $\{A_n\}$ se tiene que $A_{n_p} \not\xrightarrow{\tilde{\sigma}} A$.

En tal caso, al menos una subsucesión $\{A_{n_{p_j}}\}$ de $\{A_{n_p}\}$ verifica que

$$A_{n_{p_j}} \not\xrightarrow{\sigma} A.$$

Pero como $\{A_{n_{p_j}}\}$ es subsucesión de $\{A_n\}$ se obtiene que

$$A_n \not\xrightarrow{\tilde{\sigma}} A$$

en contra de lo supuesto.

Si, para cada n, $A_n=A$, y $\{A_{n_p}\}$ es una subsucesión arbitraria de $\{A_n\}$ entonces tomando $\{x_p\}\subset H$ con $x_p \in A_{n_p}$ $(p=1,\dots)$, por ser A débilmente compacto, puede suponerse que $x_p \rightharpoonup x \in A$. Luego $A_{n_p} \xrightarrow{\sigma} A$, y al ser arbitraria la subsucesión $\{A_{n_p}\}$, se tiene que $A_n \xrightarrow{\tilde{\sigma}} A$, estableciéndose de este modo (2).

Si la sucesión $\{A_n\}$ no $\tilde{\sigma}$-converge hacia A, alguna subsucesión suya verifica que $A_{n_p} \not\xrightarrow{\sigma} A$. Probaremos que ninguna subsucesión de $\{A_{n_p}\}$ $\tilde{\sigma}$converge al compacto A.

En efecto: Caso contrario, si la sucesión $\{A_{n_{p_j}}\}$ extraida de A_{n_p} verificase que $A_{n_{p_j}} \xrightarrow{\tilde{\sigma}} A$, en particular también se tendría que

$$A_{n_{p_j}} \xrightarrow{\sigma} A$$

y si tomamos cualquier sucesión $\{x_{n_p}\}\subset H$, con $x_{n_p}\in A_{n_p}$ $(p=1,\dots)$, una subsucesión de

$$\{x_{n_{p_j}}\}$$

converge débilmente a un punto de A.

Pero, al ser esa misma, subsucesión de $\{x_{n_p}\}$ se obtiene, en definitiva que

$$A_{n_p} \xrightarrow{\sigma} A$$

una contradicción.

Se ha demostrado pues (3) y con ello el teorema. □

Nótese que la convergencia σ verifica en F(H) los axiomas (2) y (3), mas no el (1). No obstante:

1.10.: TEOREMA

Sean $\{A_n\}\subset F(H)$, $A\in F(H)$. $A_n \xrightarrow{\sigma} A$ si y sólo si, para alguna subsucesión $A_{n_p} \xrightarrow{\sigma} A$.

Prueba:

Si para alguna subsucesión $\{A_{n_p}\}$ de $\{A_n\}$ se tiene que $A_{n_p} \xrightarrow{\sigma} A$, entonces dada cualquier sucesión $(x_n) \subset H$, con $x_n \in A_n$ $(n=1,2,\ldots)$, $\{x_{n_p}\}$ admite una subsucesión débilmente convergente a un punto de A. Luego también (x_n) admite una subsucesión débilmente convergente a un punto de A, y, en consecuencia, $A_n \xrightarrow{\sigma} A$.

□

1.11.: TEOREMA

Sea $\{A_n\}$ una sucesión en F(H).

Si $A_n \xrightarrow{\beta} A$, entonces $A_n \overset{\sigma}{\rightarrow} A$.

Prueba:

Si $A_n \xrightarrow{\beta} A$, dado $k>0$ se tiene que $\beta(A_n,A)<k$ salvo, quizás, para un número finito de subíndices. Puede suponerse, por tanto, que

$A_n \subset S[A,k]$ $n=1,2,\ldots$

Si $\{x_n\}$ es cualquier sucesión con $x_n \in A_n$ para $n=1,2,\ldots$ entonces $\{x_n\} \subset S[A,k]$ y como consecuencia de 1.3., admite una subsucesión $\{x_{n_p}\}$ con $x_{n_p} \rightharpoonup x \in S[A,k]$.

Como $\beta(A_{n_p},A) \to 0$, también $\alpha_{n_p} = d(x_{n_p},A) \to 0$. De modo análogo al expuesto en la prueba de 1.3., puede hallarse una sucesión $\{y_{n_p}\} \subset A$, tal que

$d(x_{n_p},y_{n_p}) = d(x_{n_p},A) = \alpha_{p}$.

Al ser A débilmente compacto, puede suponerse que $y_{n_p} \rightharpoonup y \in A$.

Dado $\varepsilon>0$, puede hallarse $p(\varepsilon) \in I^+$ tal que si

$p \geq p(\varepsilon)$, $d(x_{n_p},y_{n_p}) = \alpha_{n_p} < \varepsilon$,

lo que, en virtud del lema 1.2., implica que $d(x,y) \leq \varepsilon$.

Luego, necesariamente $d(x,y)=0$, es decir que $x \in A$, completándose de este modo la demostración.

□

1.12.: COROLARIO

Sea $\{A_n\}$ una sucesión en F(H). Sea $A \in F(H)$.

Si $A_n \xrightarrow{\beta} A$, entonces $A_n \xrightarrow{\sigma} A$.

Prueba:

Si $A_n \xrightarrow{\beta} A$, para cualquier subsucesión $\{A_{n_p}\}$ de $\{A_n\}$ se tiene que $A_{n_p} \xrightarrow{\beta} A$, y en consecuencia, por el teorema anterior, $A_{n_p} \xrightarrow{\sigma} A$. Luego $A_n \xrightarrow{\sigma} A$.

□

1.13.: OBSERVACION

Si $\{e_i\}$ es una base ortonormal en H, entonces
22 la sucesión $\{\{e_i\}\}\subset F(H)$ verifica que $\{e_i\} \overset{g}{\to} \{0\}$

Pero $\beta(\{e_i\},\{0\}) = 1$ para odo $i=1,2,\ldots.$

Por lo tanto el recíproco del anterior teorema es falso.

1.14.: TEOREMA

Sea (A_n) una sucesión en F(H).

Si $A_n \overset{g}{\to} A$ puede encontrarse una subsucesión (A_{n_p}) de (A_n), tal que $A_{n_p} \subset S[A,k]$ $p=1,2,\ldots$, p. a algún $k>0$.

(O, en otros términos, (A_n) está contenida frecuentemente $S[A,k]$ para algún $k>0$).

Prueba:

Caso contrario (A_n) está últimamente no contenida en $S[A,k]$ para todo $k>0$.

Dado $k=2$ $\exists n_1$ / si $n\geq n_1$ $\beta(A_n,A) \geq 2$

Dado $k=2$ $\exists n_2>n_1$ / si $n\geq n_2$ $\beta(A_n,A) \geq 2^2$

...

Dado $k=2^p$ $\exists n_p>n_{p-1}$/ si $n\geq n_p$ $\beta(A_n,A) \geq 2^p$

...

Por tanto:

Dado $k=2$ $\exists n_1$ / si $n\geq n_1$ $\exists x_n^1\in A_n$ $d(x_n^1,A)\geq 2$

Dado $k=2^2$ $\exists n_2>n_1$ / si $n\geq n_2$ $\exists x_n^2\in A_n$ $d(x_n^2,A)\geq 2^2$

...

Dado $k=2^p$ $\exists n_p>n_{p-1}$/ si $n\geq n_p$ $\exists x_n^p\in A_n$ $d(x_n^p,A)\geq 2^p$

...

Se construye ahora la sucesión (y_i) del siguiente modo:

$y_1\in A$ arbitrario, ... $,y_{n_1-1}\in A_{n_1-1}$ arbitrario,

$y_{n_1}=x_{n_1}^{(1)}\in A_{n_1}, \ldots, y_{n_2-1}=x_{n_2-1}^{(1)}\in A_{n_2-1},$

$y_{n_2}=x_{n_2}^{(2)}\in A_{n_2}, \ldots, y_{n_3-1}=x_{n_3-1}^{(2)}\in A_{n_3-1}, \ldots$

Obviamente:

$d(y_{n_1},A)\geq 2, \ldots, d(y_{n_2-1},A) \geq 2, d(y_{n_2},A)\geq 2^2, \ldots, d(y_{n_3-1},A) \geq 2^2, \ldots.$

Como $y_n\in A_n$ $n=1,\ldots,$ y $A_n \overset{g}{\to} A$ por hipótesis, puede obtenerse una subsucesión (y_{n_k}) de (y_n) tal que

$$y_{n_k} \longrightarrow y\in A$$

y además, para cada k, $d(y_{n_k},y)\geq d(y_{n_k},A)$.

Por lo tanto, $\{d(y_{n_k},y)\}$ está minorada por una sucesión numérica no acotada, lo cual es absurdo ya que si $y_{n_k} \longrightarrow y$, existe $M>0$ tal que
$\|y_{n_k} - y\| < M, \quad (k=1,\ldots)$.

1.15.: TEOREMA

Sea $J: H \longrightarrow R$ un funcional sobre H tal que

1.15.1.: J es débilmente secuencialmente contínuo en H.

1.15.2.: J admite un mínimo, x^*.

Entonces si $J(x_o) > J(x^*)$, el conjunto de nivel

$W(x_o) = \{z \in H \mid J(z) \leq J(x_o)\}$

es no acotado.

Prueba:

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en H tal que $x_n \longrightarrow x^*$.

Al ser J débilmente secuencialmente contínuo,

$J(x_n) \to J(x^*)$

por lo que, para n suficientemente grande

$J(x_n) - J(x^*) < J(x_0) - J(x^*)$.

Puede suponerse, pues, que $\{x_n\} \subset W(x_o)$.

Por otra parte, si $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ es la base ortonormal canónica de H, se tiene que:

$$
\begin{array}{llll}
e_1+x_1, & e_2+x_2, & \ldots\ e_p+x_p, & \ldots \longrightarrow x^* \\
2e_1+x_1, & 2e_2+x_2, & \ldots\ 2e_p+x_p, & \ldots \longrightarrow x^* \\
\vdots & & & \\
ke_1+x_1, & ke_2+x_2, & \ldots\ ke_p+x_p, & \ldots \longrightarrow x^* \\
\vdots & & &
\end{array}
$$

Por lo que, al ser J débilmente secuencialmente contínuo

$$
\begin{array}{l}
J(e_1+x_1), \ldots, J(e_p+x_p), \ldots \to J(x^*) \\
J(2e_1+x_1), \ldots, J(2e_p+x_p), \ldots \to J(x^*) \\
\vdots \\
J(ke_1+x_1), \ldots, J(ke_p+x_p), \ldots \to J(x^*) \\
\vdots
\end{array}
$$

Sea $r = J(x_o) - J(x^*)$. Dado $r/2$, se tiene que

$\exists n_1 \in I^+ \mid$ si $n \geq n_1$ $\quad J(e_n + x_n) - J(x^*) < r/2$
$\exists n_2 \in I^+ \mid$ si $n \geq n_2$ $\quad J(2e_n + x_n) - J(x^*) < r/2$
$\vdots$
$\exists n_k \in I^+ \mid$ si $n \geq n_k$ $\quad J(ke_n + x_n) - J(x^*) < r/2$
$\vdots$

De donde

$$J(e_{n_1} + x_{n_1}) < J(x^*) + r/2 = J(x_o) - r/2 < J(x_o)$$
$$J(2e_{n_2} + x_{n_2}) < J(x^*) + r/2 = J(x_o) - r/2 < J(x_o)$$
$$\vdots$$
$$J(ke_{n_k} + x_{n_k}) < J(x^*) + r/2 = J(x_o) - r/2 < J(x_o)$$
$$\vdots$$

Obteniéndose así la sucesión $\{ke_{n_k} + x_{n_k}\}$, obviamente no acotada y contenida en $W(x_o)$, completándose de este modo la prueba.

N ó t e s e q u e 1.15.I se da, por ejemplo, si el funcional J es Gateaux diferenciable en H y si además se verifica que

$$\left.\begin{array}{l} x_n \longrightarrow x \\ y_n \longrightarrow y \end{array}\right\} \Rightarrow \quad J'(x_n, y_n) \longrightarrow J'(x, y) .$$

2.: SEMISISTEMAS DINAMICOS DISCRETOS DEBILES SOBRE H

2.1.: DEFINICION

Se denomina semisistema dinámico discreto debil sin unicidad sobre H a la terna (H, I^+, π), donde

$$\pi : H \times I^+ \longrightarrow F(H)$$

verifica:

2.1.1.: $\pi(x,0) = \{x\} \quad \forall x \in H.$

2.1.2.: Si $x_n \longrightarrow x$ en H, entonces, para cada entero no negativo k, $\pi(x_n,k) \xrightarrow{\sigma} \pi(x,k)$.

2.1.3.: $\pi(\pi(x,h),k) = \pi(x,h+k) \quad \forall x \in H, \forall h,k \in I^+$.

2.2.: OBSERVACIONES

2.2.1.:

En 2.1.3. se afirma implícitamente que es débilmente compacto el conjunto

$$\pi(\pi(x,h),k) = \bigcup_{y \in \pi(x,h)} \pi(y,k).$$

Ello es consecuencia de los axiomas anteriores, en el siguiente sentido:

Si $M \in F(H)$, y $\pi(.,k) : H \longrightarrow F(H)$ verifica los axiomas 2.1.1. y 2.1.2., entonces el conjunto

$$\pi(M,k) = \bigcup_{y \in M} \pi(y,k)$$

es débilmente compacto.

En efecto:

Sea $\{x_n\} \subset \pi(M,k)$. Por definición puede obtenerse otra sucesión $\{y_n\} \subset M$, tal que $x_n \in \pi(y_n,k) \quad (n=1,2,\ldots)$.

Como M es débilmente compacto, $\{y_n\}$ admite una subsucesión $\{y_{n_p}\}$ tal que

$$y_{n_p} \longrightarrow y \in M,$$

lo que, en virtud de 2.1.2., implica que

$$\pi(y_{n_p},k) \xrightarrow{\sigma} \pi(y,k).$$

Como $x_{n_p} \in \pi(y_{n_p},k) \quad (p=1,2,\ldots)$, la sucesión $\{x_{n_p}\}$ ad mite una subsucesión $\{x_{n_{p^*}}\}$ tal que

$$x_{n_{p^*}} \longrightarrow x \in \pi(y,k) \subset \pi(M,k).$$

Se ha probado, pues, que $\pi(M,k)$ es débilmente secuencialmente compacto y, por tanto también que es débilmente compacto.

2.2.2.:

La definición de semisistema dinámico discreto sin unicidad sobre un espacio métrico X, dada en (30) y recogida en (26), es como sigue:

(X,I^+,π) es un s.s.d.d. sobre X si

$$\pi : X\times I^+ \longrightarrow F(X)$$

verifica:

1) $\pi(x,0) = \{x\} \quad \forall x\in X$.

2) $\pi(\pi(x,k),h)= \pi(x,k+h) \quad \forall x\in X \quad \forall h,k\in I^+$

3) Para cada $k\in I^+$, $x_n\to x \Rightarrow \pi(x_n,k) \xrightarrow{\beta} \pi(x,k)$.

Como consecuencia de 1.12., es claro que todo semisistema dinámico discreto sin unicidad sobre R^n, es un semisistema dinámico discreto debil sin unicidad sobre R^n. Recíprocamente, supongamos que $x_n \to x$ en R^n. Entonces, por 2.1.2., para cada entero no negativo k, $\pi(x_n,k) \xrightarrow{\sigma} \pi(x,k)$ Veamos que también $\pi(x_n,k)\xrightarrow{\beta}\pi(x,k)$:

Caso contrario existe $\varepsilon>0$ tal que, para una subsucesión $\beta(\pi(x_{n_p},k), \pi(x,k)) \geq \varepsilon$. Puede encontrarse entonces $y_{n_p}\in \pi(x_{n_p},k)$ $p=1,2,\ldots$ tal que $d(y_{n_p},\pi(x\ ,k))\geq \varepsilon$. Como $x_{n_p}\to x$, necesariamente $\pi(x_{n_p},k) \xrightarrow{\sigma} \pi(x,k)$, en cuyo caso, para una subsucesión de $\{y_{n_p}\}$ (que, por comodidad supondremos es ella misma):

$$y_{n_p} \longrightarrow y\in \pi(x,k)$$

es decir, $d(y_{n_p},y)\to 0$, y por tanto, $d(y_{n_p}, \pi(x,k))\to 0$, lo que es absurdo.

Luego, sobre R^n, coinciden los conceptos de semisistema dinámico discreto y semisistema dinámico discreto debil.

2.2.3.:

El axioma 2.1.2., puede expresarse de modo equivalente afirmando que:

2.1.2.' : Si $x_n\to x$ en H, entonces para cada entero no negativo, k, $\pi(x_n,k) \xrightarrow{\tilde{\sigma}} \pi(x,k)$.

En efecto, si $x_n \longrightarrow x$ y se tuviera que $\pi(x_n,k) \not\xrightarrow{\tilde{\sigma}} \pi(x,k)$, para alguna subsucesión

$$\pi(x_{n_p},k) \not\xrightarrow{\sigma} \pi(x,k)$$

pero como $x_{n_p} \longrightarrow x$, en virtud de 2.1.2.,

$$\pi(x_{n_p},k) \xrightarrow{\sigma} \pi(x,k)$$

lo que es contradictorio.

Por lo tanto, si se considera el espacio topológico (H,σ) como espacio con límite, al igual que $(F(H),\tilde{\sigma})$ [2] todavía puede redactarse de otro modo el axioma considerado semejante al introducido originalmente en (30):

2.1.2'': Para cada $k\in I^+$, la aplicación

$\pi(.,k): H \longrightarrow F(H)$

es σ-$\tilde{\sigma}$-continua en H.

Naturalmente, la continuidad debe entenderse en el sentido de (22).20.III.

2.2.4.:

Si $\pi(x,k)$ está constituido por un número finito de puntos, para todo $k\in I^+$, se dice que (H,I^+,π) es localmente finito en x.

Si para cada $x\in H$, existe $y\in H$ tal que $\pi(x,1)=\{y\}$ (H,I^+,π) se dice que tiene unicidad positiva.

El siguiente teorema proporciona un método "standard" para definir sobre H un semisistema dinámico discreto débil:

<u>2.3.: TEOREMA</u>

Sea $\pi(.,1): H \longrightarrow F(H)$ una aplicación tal que:

2.3.1.: Si $x_n \longrightarrow x$ en H, entonces

$\pi(x_n,1) \xrightarrow{\sigma} \pi(x,1)$, en F(H).

Si se define $\pi: H\times I^+ \longrightarrow F(H)$ de modo que:

$\pi(x,0) = \{x\} \quad \forall\, x\in H.$

$$\pi(x,k+1) = \bigcup_{y\in\pi(x,k)} \pi(y,1)$$

la terna (H,I^+,π) constituye un semisistema dinámico discreto sobre H, que denominaremos inducido en H por la aplicación $\pi(.,1)$ dada.

Prueba:

$\pi: H\times I^+ \longrightarrow F(H)$ está bien definida como consecuencia de 2.2.1.,y verifica 2.1.1., por construcción.

Veamos que cumple también 2.1.3.:

Se procederá por inducción sobre k. Para k=1 se cumple por la misma definición de π. Supongámoslo válido para k-1.

Si $z\epsilon\pi(x,h+k)$, existe $z_1\epsilon\pi(x,h+k-1)$ tal que $z\epsilon\pi(z_1,1)$, y por hipótesis de inducción, $z_1\epsilon\pi(\pi(x,h),k-1)$.

Sea $y\epsilon\pi(x,h)$ tal que $z_1\epsilon\pi(y,k-1)$. Entonces:

$z\epsilon\pi(z_1,1)\subset\pi(\pi(y,k-1),1)$ y por tanto $z\epsilon\pi(y,k)$, de donde

$$z\epsilon\pi(\pi(x,h),k)$$

con lo que se demuestra que $\pi(x,h+k)\subset\pi(\pi(x,k),k)$.

Sea ahora $z\epsilon\pi(\pi(x,h),k)$. Puede encontrarse $y\epsilon\pi(x,h)$ tal que

$$z\epsilon\pi(y,k)=\pi(\pi(y,k-1),1).$$

Entonces si $z_1\epsilon\pi(y,k-1)$ es tal que $z\epsilon\pi(z_1,1)$, se tiene que:

$$z_1\epsilon\pi(y,k-1)\subset\pi(\pi(x,h),k-1)=\pi(x,h+k-1)$$

de donde

$$z\epsilon\pi(z_1,1)\subset\pi(\pi(x,h+k-1),1)=\pi(x,k+h),$$

es decir que también $\pi(\pi(x,h),k)\subset\pi(x,h+k)$, completándose la prueba de 2.1.3.

Por último veamos, por inducción sobre k,que se verifica 2.1.2.:

Para k=1 es evidente.

Si $x_n\longrightarrow x$ en H, consideremos la sucesión $\{z_n\}$ con $z_n\epsilon\pi(x_n,k)$, n=1,2,... .

Como $\pi(x_n,k)=\pi(\pi(x_n,k-1),1)$, existe una sucesión $\{y_n\}$ con $y_n\epsilon\pi(x_n,k-1)$ $\forall n=1,2,\ldots$,tal que $z_n\epsilon\pi(y_n,1)$, para cada n=1,2,... .

Por hipótesis de inducción $\pi(x_n,k-1)\xrightarrow{\sigma}\pi(x,k-1)$ y de aquí que $\{y_n\}$ admite una subsucesión $\{y_{n_p}\}$ tal que

$$y_{n_p}\longrightarrow y\epsilon\pi(x,k-1)$$

pero entonces

$$\pi(y_{n_p},1)\xrightarrow{\sigma}\pi(y,1)$$

lo que implica que $\{z_{n_p}\}$ admite una subsucesión $\{z_{n_p*}\}$tal que:

$$z_{n_p*}\longrightarrow z\epsilon\pi(y,1).$$

Como $y\epsilon\pi(x,k-1)$, $z\epsilon\pi(\pi(x,k-1),1)=\pi(x,k)$ lo que demuestra que $\pi(x_n,k)\xrightarrow{\sigma}\pi(x,k)$, probándose asi el teorema.

□

2.4.: EJEMPLOS

Como consecuencia del teorema anterior, pueden darse definiendo únicamente una aplicación $\pi(.,1):H\to F(H)$, sobreentendiéndose que se trata del semisistema dinámico discreto débil que induce en H.

2.4.1.:

Sea $M\in F(H)$, fijo. Se define para todo x de H:

$\pi_1(x,1) = M$.

Obviamente verifica 2.3.1., y por tanto $(H,I^+\pi_1)$ es un semisistema dinámico discreto débil sobre H.

2.4.2.:

Sean F un conjunto finito no vacío y

$B= \{v_i : i\in F\}\subset H$.

Definimos $\pi_2(x,1)= \{(x/v_i)v_i : i\in F\}$

Si $x_n \rightharpoonup x$ en H, sea (z_n) tal que $z_n\in\pi_2(x_n,1)$, $n=1,\dots$. Puede escribirse entonces que:

$$z_n= (x_n/v_{i(n)})v_{i(n)}$$

y al ser F finito, para algún $i_0\in F$ existe una subsucesión (z_{n_p}) tal que

$$z_{n_p} = (x_{n_p}/v_{i_0})\, v_{i_0}$$

en cuyo caso es inmediato que

$$z_{n_p} \longrightarrow (x/v_{i_0})v_{i_0}\in\pi_2(x,1).$$

Luego $\pi_2(x_n,1) \xrightarrow{\tau} \pi_2(x,1)$ y de aquí que (H,I^+,π_2) es un semisistema dinámico discreto débil sobre H.

2.4.3.:

Sean $k>0$ y $\alpha\in R$, fijos.

Se define $\pi_3(x,1) = S[\alpha x,k]$

Si $x_n \longrightarrow x$ en H, sea (z_n) tal que $z_n\in\pi(x_n 1)$ $n=1,2,\dots$. En tal caso

$$z_n = \alpha x_n + v_n \quad \text{con} \quad \|v_n\| \leq k, \ (n=1,2,\dots).$$

Al ser (v_n) acotada, puede extraerse de ella una subsucesión

$$v_{n_p} \longrightarrow v\in S[0,k]$$

luego

$$z_{n_p} \longrightarrow \alpha x + v\in S[\alpha x,k] = \pi_3(x,1)$$

Por tanto, $\pi_3(x_n,1) \xrightarrow{\tau} \pi_3(x,1)$, y, en consecuencia, (H,I^+,π_3) es un semisistema dinámico discreto débil sin unicidad sobre H.

2.4.4.:

Sean $M\in F(H)$, y $\alpha\in R$, fijos.

Se define $\pi_4(x,1)=\alpha x + M$.

De forma análoga a los ejemplos anteriores se prueba que $\pi_4(.,1)$ verifica 2.3.1., y, en consecuencia, (H,I^+,π_4) es un semisistema dinámico discreto débil sobre H.

2.4.5.:

Sea $A:H \longrightarrow H$ tal que cumple que

$x_n \longrightarrow x \Rightarrow A(x_n) \longrightarrow A(x)$.

Si se define $\pi_5(x,1)= A(x)$ trivialmente se tiene que (H,I^+,π_5) es un semisistema dinámico discreto debil sobre H, localmente finito en cada $x\in H$, y con unicidad positiva.

En lo que sigue, se supondrá dado un semisistema dinámico discreto dèbil (H,I^+,π).

2.5.: <u>DEFINICION</u>

Se llama solución de (H,I^+,π) a través de $x\in H$, a toda aplicación

$\chi:I_\chi \longrightarrow H$

que verifique las siguientes propiedades:

2.5.1.: $I^+\subset I_\chi \subset I$.

2.5.2.: $\chi(0)= x$.

2.5.3.: $\chi(j)\in\pi(\chi(h),j-h) \quad \forall j,h\in I_\chi \quad j \geq h$.

Las imágenes de I^+, $I_\chi \cap I^-$, I por la aplicación χ se denominan, respectivamente semitrayectoria positiva por x, semitrayectoria negativa por x, y trayectoria de la solución χ.

En adelante, cuando no haya lugar a confusión, no se distinguirá entre una solución y su recorrido o trayectoria, empleándose el mismo símbolo para su designación.

2.6.: <u>TEOREMA</u>

Sea $x\in H$. Si $y\in\pi(x,k)$ para algún $k\in I^+$, entonces existe una solución χ por x, tal que $\chi(k)= y$.

Prueba:

Cfr. (26).1.

sobreentendiéndose que se trata del semisistema dinámico discreto débil que induce en H.

2.4.1.:

Sea $M \in F(H)$, fijo. Se define para todo x de H:

$\pi_1(x,1) = M$.

Obviamente verifica 2.3.1., y por tanto $(H, I^+ \pi_1)$ es un semisistema dinámico discreto débil sobre H.

2.4.2.:

Sean F un conjunto finito no vacío y

$B = \{v_i : i \in F\} \subset H$.

Definimos $\pi_2(x,1) = \{(x/v_i)v_i : i \in F\}$

Si $x_n \longrightarrow x$ en H, sea $\{z_n\}$ tal que $z_n \in \pi_2(x_n,1)$, $n=1,\ldots$. Puede escribirse entonces que:

$$z_n = (x_n/v_{i(n)})v_{i(n)}$$

y al ser F finito, para algún $i_0 \in F$ existe una subsucesión $\{z_{n_p}\}$ tal que

$$z_{n_p} = (x_{n_p}/v_{i_0})\, v_{i_0}$$

en cuyo caso es inmediato que

$$z_{n_p} \longrightarrow (x/v_{i_0})v_{i_0} \in \pi_2(x,1).$$

Luego $\pi_2(x_n,1) \xrightarrow{\tau} \pi_2(x,1)$ y de aquí que (H, I^+, π_2) es un semisistema dinámico discreto débil sobre H.

2.4.3.:

Sean $k>0$ y $\alpha \in R$, fijos.

Se define $\pi_3(x,1) = S[\alpha x, k]$

Si $x_n \longrightarrow x$ en H, sea $\{z_n\}$ tal que $z_n \in \pi(x_n 1)$ $n=1,2,\ldots$. En tal caso

$$z_n = \alpha x_n + v_n \quad \text{con} \quad \|v_n\| \leq k, \ (n=1,2,\ldots).$$

Al ser $\{v_n\}$ acotada, puede extraerse de ella una subsucesión

$$v_{n_p} \longrightarrow v \in S[0,k]$$

luego

$$z_{n_p} \longrightarrow \alpha x + v \in S[\alpha x,k] = \pi_3(x,1)$$

Por tanto, $\pi_3(x_n,1) \xrightarrow{\tau} \pi_3(x,1)$, y, en consecuencia, (H, I^+, π_3) es un semisistema dinámico discreto débil sin unicidad sobre H.

2.4.4.:

Sean $M\in F(H)$, y $\alpha\in\mathbb{R}$, fijos.

Se define $\pi_4(x,1)=\alpha x + M$.

De forma análoga a los ejemplos anteriores se prueba que $\pi_4(.,1)$ verifica 2.3.1., y, en consecuencia, (H,I^+,π_4) es un semisistema dinámico discreto débil sobre H.

2.4.5.:

Sea $A:H \longrightarrow H$ tal que cumple que

$x_n \longrightarrow x \quad \Rightarrow \quad A(x_n) \longrightarrow A(x)$.

Si se define $\pi_5(x,1)= A(x)$ trivialmente se tiene que (H,I^+,π_5) es un semisistema dinámico discreto debil sobre H, localmente finito en cada $x\in H$, y con unicidad positiva.

En lo que sigue, se supondrá dado un semisistema dinámico discreto débil (H,I^+,π).

2.5.: DEFINICION

Se llama solución de (H,I^+,π) a través de $x\in H$, a toda aplicación

$\chi:I_\chi \longrightarrow H$

que verifique las siguientes propiedades:

2.5.1.: $I^+\subset I_\chi \subset I$.

2.5.2.: $\chi(0)= x$.

2.5.3.: $\chi(j)\in\pi(\chi(h),j-h) \quad \forall j,h\in I_\chi \quad j \geq h$.

Las imágenes de I^+, $I_\chi\cap I^-$, I por la aplicación χ se denominan, respectivamente semitrayectoria positiva por x, semitrayectoria negativa por x, y trayectoria de la solución χ.

En adelante, cuando no haya lugar a confusión, no se distinguirá entre una solución y su recorrido o trayectoria, empleándose el mismo símbolo para su designación.

2.6.: TEOREMA

Sea $x\in H$. Si $y\in\pi(x,k)$ para algún $k\in I^+$, entonces existe una solución χ por x, tal que $\chi(k)= y$.

Prueba:

Cfr. (26).1.

2.7.: TEOREMA

Sea $\{\chi_n\}$ una sucesión de soluciones de (H,I^+,π) tales que

$$\chi_n(0) \longrightarrow x\in H.$$

Existe entonces una solución χ a través de x, tal que

$$\chi(i) = \sigma\text{-}\lim_{p\to\infty} \chi_{n_p}(i) \quad (i=1,2,\ldots)$$

siendo $\{\chi_{n_p}\}$ subsucesión de $\{\chi_n\}$ (que depende de i).

Prueba:

$\chi_n(1)\in\pi(\chi_n(0),1)$, lo que, como consecuencia de 2.1.2. da que puede extraerse una subsucesión $\{\chi_{n_1}(1)\}$ de $\chi_n(1)\}$ tal que $\chi_{n_1}(1) \longrightarrow y_1\in\pi(x,1)$.

$\chi_{n_1}(2)\in\pi(\chi_{n_1}(1),1)$, por lo que, como consecuencia de 2.1.2., puede extraerse una subsucesión $\{\chi_{n_2}(2)\}$ de $\{\chi_{n_1}(2)\}$ tal que $\chi_{n_2}(2) \longrightarrow y_2\in\pi(y_1,1)$.

...

$\chi_{n_{k-1}}(k)\in\pi(\chi_{n_{k-1}}(k-1),1)$, por lo que, como consecuencia de 2.1.2., puede extraerse una subsucesión $\{\chi_{n_k} k\}$ de $\{\chi_{n_{k-1}}(k)\}$ tal que $\chi_{n_k}(k) \longrightarrow y_k\in\pi(y_{k-1},1)$.

...

La aplicación $\chi:I^+\longrightarrow H$ definida de modo que $\chi(k)=y_k$, es, obviamente, solución de (H,I^+,π) que verifica la tesis propuesta si se toma $\chi(o)= y_o=x$.

□

2.8.: DEFINICION

Sea $x\in H$. Los conjuntos

$$T^+(x) = \bigcup_{\chi(0)=x} \chi(I^+) \qquad T^-(x)= \bigcup_{\chi(0)=x} \chi(I_\chi\cap I^-)$$

son llamados respectivamente, semiconos de trayectorias positivo y negativo, a través de x.

2.9.: DEFINICION

Un conjunto $M\subset H$ se dirá ser

2.9.1.: Positivamente invariante, si $T^+(M)= M$.

2.9.2.: Negativamente invariante, si $T^+(H-M) = H-M$.

2.9.3.: Invariante, si es a la vez positiva y negativamente invariante.

2.9.4.: Cuasipositivamente invariante (o débilmente positivamente invariante), si para todo $x\in M$ existe una solución χ a través de x, tal que su semitrayectoria positiva está contenida en M.

2.9.5.: Cuasi negativamente invariante (débilmente negativamente invariante) si para todo $x \in M$ existe una solución χ a través de x, tal que $\chi(I_\chi \cap I^-) \subset M$.

2.10.: TEOREMA

Los conjuntos positivamente invariantes de H, constituyen una topología sobre H.

Prueba:

Puede considerarse que la aplicación multivaluada $\pi(.,1): H \longrightarrow 2^H$ hace que $(H, \pi(.,1))$ sea un grafo.

Mostraremos que:

Si (X,π) es un grafo, existe una topología $\tau(\pi)$ sobre X, tal que un conjunto es $\tau(\pi)$-abierto si y sólo si $\pi(U) \subset U$.

En efecto:

Si se define $\xi_x = \{V \in 2^X : \{x\} \cup \pi(x) \subset V\}$, se tiene que:

1) Si $S \in \xi_x$ y $S' \in \xi_x$ entonces $S \cap S' \in \xi_x$.

2) Si $S \in \xi_x$ y $U \supset S$, entonces $U \in \xi_x$.

3) Si $S \in \xi_x$ entonces $x \in S$.

Por lo tanto

$\tau(\pi) = \{U \in 2^X : U \in \xi_x \text{ para cada } x \in U\}$

es una topología sobre X.

Si $\pi(U) \subset U$, para todo $x \in U$, $\pi(x) \subset U$, es decir que para todo $x \in U$, $U \in \xi_x$ y en consecuencia, U es $\tau(\pi)$-abierto.

Recíprocamente, si $U \in \tau(\pi)$, para todo $x \in U, U \in \xi_x$, y en consecuencia, para todo $x \in U, \pi(x) \subset U$, es decir que $\pi(U) \subset U$.

Como los conjuntos positivamente invariantes M son los mismos que verifican que $\pi(M,1) \subset M$, se obtiene

□

2.11.: TEOREMA

Sea $M \subset H$. M es débilmente positivamente invariante si y sólo si

Para todo $x \in M$, $\pi(x,1) \cap M \neq \phi$.

2.12.: COROLARIO

La unión de cualquier colección de conjuntos débilmente positivamente invariantes, es débilmente positivamente invariante.

2.13.: TEOREMA

Sea M H. Si M es débilmente positivamente invariante, entonces ${}^{\sigma s}\overline{M}$ (cierre secuencial débil de M) también lo es.

Prueba:

Sea $x \in {}^{\sigma s}\overline{M}$. Existe una sucesión $\{x_n\}$ M tal que $x_n \longrightarrow x$, y como M es débilmente positivamente invariante, para cada x_n existe una solución χ_n a través de x_n tal que su semitrayectoria positiva está contenida en M.

Por el teorema 2.7., existe una solución χ a través de x, verificando que

$$\chi(i) = \sigma\text{-}\lim_{p \to \infty} \chi_{n_p}(i) \quad (i=1,\ldots),$$

de donde se deduce que, para cada entero positivo i,

$$\chi(i) \in {}^{\sigma s}\overline{M}$$

y la conclusión se sigue ahora de 2.11.

2.14.: DEFINICION

Sea $x \in H$. Si para todo $y \in H$ y para cada entero positivo k, $x \notin \pi(y,k)$, x es llamado punto de partida.

2.15.: DEFINICION

Sea $x \in H$. Si $T^{+}(x) = \{x\}$, entonces x es llamado **punto crítico**.

2.16.: DEFINICION

Sea $x \in H$. Si $x \in \pi(x,1)$, entonces x es llamado punto singular.

2.17.: DEFINICION

Sea $x \in H$. Se dice que x es un punto periódico si existe $k \in I^{+} - \{0\}$ tal que $x \in \pi(x,k)$.

En tal caso se tiene también que $x \in \pi(x,nk)$ $n \in N$.

Se llama periodo del punto periódico x al

$$p(x) = \min \{k \in I^{+} - \{0\} : x \in \pi(x,k)\}$$

2.18.: OBSERVACIONES

Todo punto crítico es periódico y singular.

Todo punto singular es periódico de período unidad.

Si x es crítico $\{x\}$ es positivamente invariante, y si x es singular, $\{x\}$ es débilmente positivamente invariante.

2.19.: TEOREMA

Si $x \in H$ es periódico de período k_0 se verifica que:

$\pi(x,p) \subset \pi(x, k_0+p) \subset \pi(x,2k_0+p) \subset \ldots \quad (\forall p \in I^+)$.

Prueba:

Por hipótesis, $x \in \pi(x,k_0)$. Entonces:

$\pi(x,p) \subset \pi(\pi(x,k_0),p) = \pi(x,k_0+p)$.

Igualmente:

$\pi(\pi(x,p),k_0) \subset \pi(\pi(x,k_0+p),k_0)$

por lo que

$\pi(x,k_0+p) \subset (x,2k_0+p)$.

Procediendo de igual forma se llega a la conclusión deseada.

□

2.20.: TEOREMA

Si $x \in H$ es periódico de período k_0, entonces y sólo entonces existe una solución χ a través de x tal que $\chi(nk_0) = x \quad \forall n \in I^+$.

Prueba:

Como $x \in \pi(x,k_0)$, por 2.6. sabemos que existe una solución χ^* a través de x, con $\chi^*(k_0)=x$.

Naturalmente, se cumple que:

$\chi^*(0) = x \in \pi(x,0) \subset \pi(x,k_0)$

$\chi^*(1) \in \pi(x,1)$

$\chi^*(2) \in \pi(x,2)$

...

$\chi^*(k_0-1) \in \pi(x,k_0-1)$

Podemos entonces definir la aplicación $\chi: I^+ \to H$ de modo que

$\chi(0) = \chi(k_0) = \chi(2k_0) = \ldots = x$

$\chi(1) = \chi(k_0+1) = \chi(2k_0+1) = \ldots = \chi^*(1)$

$\chi(2) = \chi(k\ +2) = \chi(2k\ +2) = \ldots = \chi^*(2)$

...

$\chi(k_0-1) = \chi(2k_0-1) = \chi(3k_0-1) = \ldots = \chi^*(k_0-1)$

Como consecuencia del teorema anterior, χ es solución de (H,I^+,π) que verifica la tesis del teorema, completándose de este modo su prueba. □

CONJUNTOS LIMITE

2.21.: DEFINICION

Sea χ una solución de (H,I^+,π).

Se llama conjunto norma-límite secuencial positivo de χ, al

$$L^+(\chi)=\{y\in H : \exists\{k_n\}\subset I^+,\ k_n\to\infty,\ \chi(k_n)\to y\}$$

2.22.: DEFINICION

Sea χ una solución de (H,I^+,π).

Se llama conjunto límite débil secuencial positivo de χ, al

$$L^+_\sigma(\chi)=\{y\in H : \exists\{k_n\}\subset I^+,\ k_n\to\infty,\ \chi(k_n)\rightharpoonup y\}$$

2.23.: DEFINICION

Sea χ una solución de (H,I^+,π).

Se llama conjunto límite finito de χ, al

$$L_F(\chi)=\{y\in H : \exists\{k_n\}\subset I^+,\ k_n\to\infty,\ \chi(k_n)=y\}$$

2.24.: DEFINICION

Sea χ una solución de (H,I^+,π), sin puntos de partida, con $I = I_\chi$.

Se llama conjunto norma-límite secuencial negativo de χ, al

$$L^-(\chi)=\{y\in H : \exists\{k_n\}\subset I,\ k_n\to-\infty,\ \chi(k_n)\to y\}$$

2.25.: DEFINICION

Sea χ una solución de (H,I^+,π), sin puntos de partida, con $I= I_\chi$.

Se llama conjunto límite débil secuencial negativo de χ, al

$$L^-_\sigma(\chi)=\{y\in H : \exists\{k_n\}\subset I,\ k_n\to-\infty,\ \chi(k_n)\rightharpoonup y\}$$

2.26.: OBSERVACION

Obviamente $L_F(\chi)\subset L^+(\chi)\subset L^+_\sigma(\chi)$ para cada solución χ de (H,I^+,π). También, si χ es cualquier solución apropiada, $L^-(\chi)\subset L^-_\sigma(\chi)$.

2.27.: EJEMPLOS

Sea (H,I^+,π_1) el semisistema dinámico discreto debil sin unicidad introducido en 2.4.1.

Sea $\{e_i\}$ una base ortonormal de H.

Considérese la siguiente solución: $\chi:I^+\to H$ tal que:

$$\chi(0) = \chi(1) = e_1$$
$$\chi(2) = \chi(4) = \chi(8) = \ldots = \chi(2^p) = \ldots = e_2$$
$$\chi(3) = \chi(9) = \chi(3^3) = \ldots = \chi(3^p) = \ldots = e_3$$
$$\chi(5) = \chi(25) = \chi(5^3) = \ldots = \chi(5^p) = \ldots = e_5$$
$$\chi(6) = e_6$$
$$\chi(7) = \chi(49) = \chi(7^3) = \ldots = \chi(7^p) = \ldots = e_7$$
$$\chi(10) = e_{10}$$
$$\ldots$$

Obviamente se tiene:

$$L_F(\chi) = \{e_2,e_3,e_5, \ldots , e_k, \ldots\ k\in I^+ \text{ primo } \}$$
$$L^+(\chi) = L_F(\chi).$$
$$L_\sigma^+(\chi) = \{0\} \cup L_F(\chi).$$

Por otra parte, si $x\notin S[0,1]$, necesariamente es un punto de partida.

Todo punto de $S[0,1]$ es singular, y no existen puntos críticos.

La aplicación $\psi:I \longrightarrow H$ definida de modo que

$$\psi(0) = x\in S[0,1] \quad \psi(-i)=e_i \quad (i=1,2,\ldots)$$
$$\psi(i) = 1/2^i\, e_i \quad (i=1,\ldots)$$

es, igualmente, una solución de (H,I^+,π_1) para la que se tiene:

$$L^+(\psi) = L_\sigma^+(\psi) = \{0\}$$
$$L^-(\psi) = \phi = L_F(\psi),$$
$$L_\sigma^-(\psi) = \{0\}.$$

2.28.: TEOREMA

Sea χ una solución de (H,I^+,π).

El conjunto $L_\sigma^+(\chi)$ es débilmente positivamente invariante.

Prueba:

Sea $y\in L_\sigma^+(\chi)$. por definición existe $\{k_n\}\subset I^+$, $k_n\to\infty$, tal que $\chi(k_n) \longrightarrow y$. Entonces:

$$\pi(\chi(k_n),1) \xrightarrow{\sigma} \pi(y,1)$$

y como $\chi(k_n+1)\epsilon\pi(\chi(k_n),1)$ la sucesión $\{\chi(k_n+1)\}$ admite una subsucesión $\{\chi(k_{n_i}+1)\}$ con

$$\chi(k_{n_i}+1) \longrightarrow y^*\epsilon\pi(y,1)$$

Como $k_{n_i}+1\to+\infty$, $y^*\epsilon L_\sigma^+(\chi)$, y por consiguiente

$$L_\sigma^+(\chi)\cap\pi(y,1) \neq \phi$$

siguiéndose la conclusión de 2.11.

Nótese que $L_\sigma^+(\chi)$ no es, en general, positivamente invariante, como se pone de manifiesto en el ejemplo anterior.

□

2.29.: TEOREMA

Si $x\epsilon H$ es periódico de período k entonces existe una solución χ a través de x tal que $x\epsilon L_F(\chi)$, y su semitrayectoria positiva coincide con sus conjuntos límite positivos.

Prueba:

Basta tomar la solución χ construida en la prueba de 2.20.:

Su semitrayectoria positiva consta de k puntos, por lo que

$$L_F(\chi)= L^+(\chi) = L^+(\chi) = Im.(\chi) = \{x,\chi^*(1),\ldots,\chi^*(k-1)\}.$$

□

2.30.: TEOREMA

Sea χ una solución de (H,I^+,π).

El conjunto $L_F(\chi)$ no contiene subconjuntos propios positivamente invariantes.

Prueba:

Sea $A\subset H$, positivamente invariante con $\phi\neq A\subset L_F(\chi)$

El conjunto $\{h\epsilon I^+: \chi(h)\epsilon A\}$ es entonces no vacío. Sea $h_A=\min\{h\epsilon I^+: \chi(h)\epsilon A\}$.

La aplicación $\chi^*:I^+\to H$ definida con $\chi^*(j)=\chi(h_A+j)$ es una solución de (H,I^+,π) a través de $\chi^*(0) = =\chi(h_A)\ \epsilon A$, luego:

$$\{\chi(h): h \geq h_A\} \subset A\subset L_F(\ ).$$

Pero si $t\epsilon L_F(\chi)$ existe una sucesión $\{k_n\}\subset I^+$, $k_n\to\infty$, con $\chi(k_n) = t$, por lo que $t\epsilon\{\chi(h): h \geq h_A\}$. Por lo tanto $L_F(\chi)\subset\{\chi(h): h \geq h_A\}$, y, en consecuencia:

$$L_F(\chi) = A.$$

□

2.31.: TEOREMA

Sea χ una solución de (H,I^+,π), a través de $x\in H$.

Si (H,I^+,π) es localmente finito en x, entonces $L_F(\chi)$ es débilmente positivamente invariante.

Prueba:

Sea $y\in L_F(\chi)$. Por definición, existe una sucesión $\{k_n\}\subset I^+$, $k_n\to\infty$, con $\chi(k_n)=y$, de donde

$$\pi(y,1)=\pi(\chi(k_n),1),\quad (n=1,\ldots).$$

Si tomamos $\chi(k_n+1)\in\pi(\chi(k_n),1)$, al ser necesariamente finito el conjunto $\pi(y,1)=\pi(\chi(k_n),1)$, para una subsucesión $\{k_n^*+1\}\subset I^+$, $k_n^*+1\to\infty$, se cumplirá que

$$z=\chi(k_n^*+1)\quad (n=1,\ldots)$$

luego

$$z\in L_F(\chi).$$

Como también $z\in\pi(y,1)$ se obtiene que

$$\pi(y,1)\cap L_F(\chi)\neq\phi$$

siguiéndose la conclusión de 2.11.

□

2.32.: TEOREMA

Sea χ una solución de (H,I^+,π), a través de $x\in H$

Si para todo $k\in I^+$, $\pi(x,k)$ está constituido por un solo punto, (es decir si el semisistema tiene en x unicidad positiva), entonces $L_F(\chi)$ es positivamente invariante.

Prueba:

Sea $y\in L_F(\chi)$. Por definición existe $\{k_n\}\subset I^+$, $k_n\to\infty$, tal que $\chi(k_n)=y$.

Como $\chi(k_n+1)\in\pi(\chi(k_n),1) = \pi(y,1)$ $(n=1,\ldots)$ y el semisistema tiene unicidad positiva en x, quedará que

$$\pi(x,k_n+1) = \pi(y,1) = \{\chi(k_n+1)\}$$

y al ser $k_n+1\to\infty$:

$$\chi(k_n+1)\in L_F(\chi)$$

o lo que es lo mismo,

$$\pi(y,1)\subset L_F(\chi)$$

lo que equivale a que $L_F(\chi)$ es positivamente invariante.

□

2.33.: COROLARIO

Si (H,I^+,π) tiene unicidad positiva en x, y para la solución correspondiente χ a través de x, $L_F(\chi)\neq\phi$, entonces existe $h\in I^+$, dependiente sólo de x, tal que

$$L_F(\chi) = \{\chi(k)\in H : k\geq h\} = M_h$$

2.34.: OBSERVACION

Si (X,I^{+},π) es un semisistema dinámico discreto sobre el espacio métrico X, el conjunto límite de cualquier solución x, para la topología de la norma, es cerrado en dicha topología. (30).

En nuestro caso cabría esperar que $L^{+}_{\sigma}(x)$ fuera débilmente secuencialmente cerrado.

Sin embargo, en general no es así, como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo:

2.34.1.:

Sea $\{e_i\}$ una base ortonormal de H.

Consideremos la sucesión $\{x_i\}$ en H, construida de modo que:

$$\begin{array}{llll} x_1= e_1+ e_1 & x_2= e_1+ e_2 & x_6= e_1+ e_3 & \dots \\ x_3= e_2+2e_1 & x_5= e_2+2e_2 & x_8= e_2+2e_3 & \dots \\ x_4= e_3+3e_1 & x_9= e_3+3e_2 & x_0= e_3+3e_3 & \dots \\ \dots & & & \end{array} \qquad (1)$$

Se define la aplicación $\pi(.,1)$: $H\rightarrow F(H)$ de forma que:

$$\begin{cases} \pi(x_i,1) = \{x_i,x_{i+1}\} & \\ \pi(x,1) = S[0,1] & \text{si } x\in\{0,e_1,e_2,\dots\} = B \\ \pi(x,1) = \{x\} & \text{si } x\notin B \text{ y } x\notin \mathrm{Im}.\{x_i\} = M. \end{cases}$$

Nótese que $\forall x\in H$, $x\in\pi(x,1)$.

Sea $\{y_n\}$ H tal que $y_n \longrightarrow y$.

Pueden darse las siguientes alternativas (no triviales) :

a) Una subsucesión $\{y_{n_j}\}$ extraida de $\{y_n\}$ es tal que $y_{n_j} \notin B\cup M$ $(\forall j=1,2,\dots)$.

Entonces $\pi(y_{n_j},1) = \{y_{n_j}\} \xrightarrow{\sigma} \pi(y,1)$ ya que $y_{n_j} \longrightarrow y\in\pi(y,1)$.

Como consecuencia de 1.h.., se cumple, entonces que $\pi(y_n,1) \xrightarrow{\sigma} \pi(y,1)$.

b) Una subsucesión $\{y_{n_j}\}$ extraida de $\{y_n\}$ es tal que $y_{n_j}= e_{p(j)}$ $(j=1,2,\dots)$.

En tal caso, sea finito o no el conjunto $\{e_{p(j)} : j=1,\dots\}$, necesariamente $y = 0$ o bien $y= e_j$ para algún $j\in I^{+}$.

En ambas situaciones $\pi(y_{n_j},1) \xrightarrow{\sigma} \pi(y,1)$ ya que $\pi(y_{n_j},1) \equiv S[0,1] = \pi(y,1)$. También por 1.10, se sigue que

$$\pi(y_n,1) \xrightarrow{\sigma} \pi(y,1).$$

c) Una subsucesión $\{y_{n_j}\}$ extraida de $\{y_n\}$ es tal que $y_{n_j} = x_{p(j)}$ $(j=1,\ldots)$.

Si $\{x_{p_j} : j=1,\ldots\}$ es finito, claramente

$\pi(y_{n_j},1) = \{x_{n_j},x_{n_j+1}\} \xrightarrow{\sigma} \pi(y,1)$.

Si $\{x_{p(j)} : j=1,\ldots\}$ es infinito, necesariamente es el rango de una subsucesión de una fila de (1), pues, de otro modo, $\{y_{n_j}\}$ sería no acotada, lo que es absurdo.

Por lo tanto, puede suponerse que

$y_{n_j} \longrightarrow y= e_r \varepsilon B.$

y entonces $\pi(y,1) = S[0,1]$.

Si tomamos una sucesión $\{z_j\}$ con $z_j \varepsilon \pi(y_{n_j},1)$ $j=1,\ldots$ necesariamente tiene su rango en la unión de las filas $r-1,r,r+1$ de (1), por lo que una subsucesión extraida de $\{z_j\}$ converge débilmente, bien a e_{r-1}, a e_r ó a e_{r+1} pertenecientes a $S[0,1]$.

Luego también $\pi(y_{n_j},1) \xrightarrow{\sigma} \pi(y,1) \Rightarrow$

$\pi(y_n,1) \xrightarrow{\sigma} \pi(y,1)$.

Se ha llegado , en resumen, a probar que, en los tres casos, $y_n \longrightarrow y \Rightarrow \pi(y_n,1) \xrightarrow{\sigma} \pi(y,1)$.

La aplicación $\pi(.,1)$ induce en H un semisistema dinámico discreto debil, sin unicidad, para el cual,

$\chi : I^+ \to H$ con $\chi(i)= x_i$ $i=1,\ldots$

es una solución, a través de $\chi(0)=x_1$.

Pero

$L^+_\sigma(x)= \{e_1,e_2, \ldots \}$

no es débilmente secuencialmente cerrado, ni (por tanto) débilmente cerrado.

Para que se de una situación análoga a la del ejemplo anterior, es esencial que el conjunto $\{\chi(i):i=1,\ldots\}$ sea no acotado, como puede verse en el siguiente:

2.35.: TEOREMA

Sea $x \varepsilon H$, tal que $T^+(x)$ es acotado.

Entonces, para cada solución χ a través de x, $L^+(\chi)$ es no vacío y débilmente compacto.

Prueba:

$\{\chi(n)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ es una sucesión en $T^+(x)$, que, por estar contenida en un conjunto acotado, admite una subsucesión débilmente convergente:

$\{\chi(n_j)\}$ con $\chi(n_j) \longrightarrow z\in H$.

Como $n_j \to \infty$, $z\in L_\sigma^+(\chi) \neq \emptyset$.

Sea ahora $y\in L_\sigma^+(\chi)$. Por definición y es límite debil de una sucesión de elementos de $T^+(x)$, luego $y\in {}^\sigma\overline{T(x)}$; es decir que $L_\sigma^+(\chi) \subset {}^\sigma\overline{T^+(x)}$.

Al ser $T^+(x)$ acotado, su clausura débil es un conjunto débilmente compacto, y por consiguiente, también acotado.

Sea $(y_n)\subset L_\sigma^+(\chi)$, $y_n \longrightarrow y$. Existen sucesiones de enteros no negativos, $\{k_p^n\}$, $k_p^n \xrightarrow{p} \infty$, tales que $\chi(k_p^n) \xrightarrow{p} y_n$, $(n=1,2,\ldots)$.

Como $T^+(x)$ es acotado, su topología relativa de la débil de H, es definible mediante una métrica $d^*(.,.)$ y podemos suponer que las sucesiones $\{\chi(k_p^n)\}$ verifican que

$$d^*(\chi(k_p^n), y_n) \leq 1/p \quad (\forall n = 1,\ldots),$$

y también que $k_n^n < k_{n+1}^{n+1}$

Es fácil ver, entonces, que $\chi(k_n^n) \longrightarrow y$ lo que implica que $y\in L^+(x)$.

$L_\sigma^+(x)$ es pues débilmente secuencialmente cerrado, y al estar contenido en un conjunto débilmente compacto es débilmente secuencialmente compacto, y por consiguiente, débilmente compacto, completándose de este modo la prueba.

$\square$

2.36.: DEFINICION

Se dice que (H,I^+,π) es estable en el sentido de Lagrange, en el punto $x\in H$, si $T^+(x)$ es acotado.

Se dice que (H,I^+,π) es estable en el sentido de Lagrange, si lo es en cada punto $x\in H$.

El teorema anterior pone de manifiesto la importancia de este tipo de semisistemas.

2.37.: DEFINICION

Se considera la aplicación $\lambda^+ : H \longrightarrow 2^H$ tal que:

$$\lambda^{+}(x) = \begin{cases} \Phi \text{ si existe una solución } \chi \text{ por } x \text{ tal que } L^{+}(\chi) = \Phi. \\ \bigcup_{\chi(0)=x} L^{+}(\chi) \quad \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Para cada $x \in H, \lambda^{+}(x)$ se denomina conjunto norma límite positivo de x.

2.38.: DEFINICION

Se considera la aplicación $\lambda_{\sigma}^{+}: H \longrightarrow 2^{H}$ tal que:

$$\lambda_{\sigma}^{+}(x) = \begin{cases} \Phi \text{ si existe una solución } \chi \text{ por } x \text{ tal que } L_{\sigma}^{+}(\chi) = \Phi \\ \bigcup_{\chi(0)=x} L_{\sigma}^{+}(\chi) \quad \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

2.39.: DEFINICION

Se considera la aplicación $\lambda_{F}: H \longrightarrow 2^{H}$ tal que:

$$\lambda_{F}(x) = \begin{cases} \Phi \text{ si existe una solución } \chi \text{ por } x \text{ tal que } L_{F}^{+}(\chi) = \Phi. \\ \bigcup_{\chi(0)=x} L_{F}^{+}(\chi) \quad \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Para cada $x \in H$, $\lambda_{\sigma}^{+}(x)$ $(\lambda_{F}^{+}(x))$ se denomina conjunto límite secuencial debil (conjunto límite finito) de x.

2.40.: TEOREMA

Sea $x \in H$. El conjunto $\lambda_{\sigma}^{+}(x)$ es débilmente positivamente invariante.

Prueba:

Es simple consecuencia de 2.12. y 2.28.

2.41.: TEOREMA

Sea $x \in H$. Si (H, I^{+}, π) es localmente finito en x, entonces $\lambda_{F}(x)$ es débilmente positivamente invariante.

Prueba:

Es simple consecuencia de 2.12., y 2.31.

2.42.: DEFINICION

Sean $V \subset H$ y $J: V \longrightarrow R$.

Se dice que J es un funcional de Liapunov para (H, I^+, π) si y sólo si:

2.42.1.: J es débilmente secuencialmente inferiormente semicontínuo.

2.42.2.: Si x es cualquier solución de (H, I^+, π) contenida en V, y (k_n) cualquier sucesión creciente de enteros positivos, con $x(k_n) \longrightarrow v \in V$, entonces $J(x(k_n)) \to J(v)$.

2.42.3.: $J(x) \geq J(x(1))$ para todo $x \in V$ y para cualquier solución x por x con $x(1) \in V$.

2.43.: OBSERVACIONES

2.43.1.: Un semisistema dinámico dicreto débil dado, puede no admitir mas funcionales de Liapunov que las constantes, como sucede, por ejemplo, al introducido en 2.4.3. para $\alpha=1$, pues si $x, y \in H$ son tales que para algún funcional de Liapunov $J(x) \neq J(y)$, como existe en el semisistema una solución por x que contiene al punto y, $J(y) \leq J(x)$, y recíprocamente, al existir también una solución a través de y en cuya trayectoria está x, $J(x) \leq J(y)$, obteniéndose en tal caso una contradicción.

2.43.2.: Si J es un funcional sobre $V \subset H$, débilmente secuencialmente contínuo, verifica trivialmente 2.42.1 y 2.42.2., y será funcional de Liapunov para el semisistema considerado si es no creciente a lo largo de las trayectorias de sus soluciones.

2.43.3.: Si H es de dimensión finita, y J cualquier función sobre H, contínua, a valores reales acotada inferiormente y con todos sus conjuntos de nivel acotados, puede definirse

$$\pi(.,1): H \longrightarrow F(H)$$

de modo que

$$\pi(x,1) = W(x) = \{z \in H: J(z) \leq J(x)\}$$

Claramente está bien definida, pues para cada x de H, $\pi(x,1)$ es cerrado y acotado.

Veremos inmediatamente que induce sobre H un semisistema dinámico discreto, y note-mos que es esencial el requerir que H sea de dimensión finita, en virtud de 1.15.

Sea ahora $\{x_n\} \subset H$ tal que $x_n \longrightarrow x \in H$.

Si $\{y_n\} \subset H$ es tal que $y_n \in \pi(x_n, 1)$ $(n=1,\ldots)$, entonces $J(y_n) \leq J(x_n)$ $(n=1,\ldots)$ y como J es acotado inferiormente, existe $M \in R$ tal que

$$M \leq J(y_n) \leq J(x_n) \quad (n=1,\ldots).$$

y al ser convergente la sucesión numérica $\{J(x_n)\}$ podemos concluir que $\{J(y_n)\}$ es acotada, pudiendo extraersele una subsucesión $\{J(y_{n_j})\}$ con

$$J(y_{n_j}) \longrightarrow r \in [M, J(x)]$$

Consideremos ahora la correspondiente sucesión $\{J(x_{n_j})\}$ que converje a $J(x)$:

Puede ocurrir alguno de los siguientes casos:

a)

$J(x_{n_j}) = J(x)$ salvo, quizás, para algún número finito de subíndices.

En tal caso, como $J(y_{n_j}) \leq J(x_{n_j}) = J(x)$ se tendrá que $\{y_{n_j}\} \subset W(x)$, salvo, quizás, para un número finito de subíndices n_j.

Al ser $W(x)$ (débilmente) compacto, puede suponerse que

$$y_{n_j} \longrightarrow y \in W(x)$$

lo que prueba que

$$\pi(x_{n_j}, 1) \xrightarrow{\sigma} \pi(x, 1) = W(x)$$

y, como consecuencia de 1.10.,

$$\pi(x_n, 1) \xrightarrow{\sigma} \pi(x, 1).$$

b)

Una subsucesión de $J(x_{n_j})$ (que, por comodidad de escritura supondremos es ella misma) converge a $J(x)$ por la derecha.

En este caso puede suponerse también que la sucesión numérica considerada es monótona decreciente.

Como $J(y_{n_j}) \leq J(x_{n_j})$ $(j=1,\ldots)$ se tendrá que $\{y_{n_j}\} \subset W(x_{n_1})$, completándose como en (a) la prueba de que

$$\pi(x_n, 1) \xrightarrow{\sigma} \pi(x, 1).$$

c)

Una subsucesión de $\{J(x_{n_j})\}$ converge a $J(x)$ por la izquierda.

En este caso, como en el (a) puede obtenerse una subsucesión de $\{y_{n_j}\}$ contenida en $W(x)$, completándose como allí la prueba del mismo resultado.

En todos los casos se tiene, en definitiva, que

$$x_n \longrightarrow x \implies \pi(x_n,1) \xrightarrow{\sigma} \pi(x,1)$$

y, como consecuencia de 2.3., la aplicación $\pi(.,1)$ induce en H un semisistema dinámico discreto (debil), sin unicidad, que denominaremos asociado al funcional J dado.

Si $x \in H$ y χ es cualquier solución a través de x,

$$J(\chi(1)) \leq J(x)$$

ya que $\chi(1) \in \pi(x,1) = W(x)$.

Al ser J (débilmente secuencialmente) contínuo por hipótesis, y no creciente a lo largo de las soluciones de (H, I^+, π), es un funcional de Liapunov para dicho semisistema.

2.44.: TEOREMA

Sean $V \subset H$ y $J: V \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional de Liapunov para (H, I^+, π).

Si V es débilmente secuencialmente cerrado, y χ cualquier solución de semitrayectoria positiva contenida en V, con $L_\sigma^+(x) \neq \phi$, entonces J está definido y es constante sobre $L_\sigma^+(x)$.

Prueba:

Al estar la semitrayectoria positiva de χ contenida en V, y éste ser débilmente secuencialmente cerrado, se tendrá que si $x \in L_\sigma^+(\chi)$ entonces $x \in V$, es decir que J está definido sobre $L_\sigma^+(x)$.

Sean $y, z \in L_\sigma^+(\chi)$, con $J(y)\ J(z)$.

Pueden encontrarse sucesiones $(h_n) \subset I^+$, $(k_n) \subset I^+$, $h_n \to \infty$, $k_n \to \infty$, tales que

$$\chi(h_n) \longrightarrow z, \qquad \chi(k_n) \longrightarrow y.$$

Ambas sucesiones pueden ser tomadas de modo que $h_n < k_n$ $(n=1,2,\ldots)$, por lo que, para cada n se tiene:

$$J(\chi(k_n)) \leq J(\chi(h_n))$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} J(\chi(k_n)) \leq \lim_{n\to\infty} J(\chi(h_n))$$

obteniéndose, por 2.42.2.

$$J(y) \leq J(z)$$

lo cual es una contradicción, pobándose de este modo el teorema.

□

2.45.: DEFINICION

Sean $M \in F(H)$, $x \in H$.

2.45.1.: x es σ-atraido por M, si, para cualquier solución por x, $\sigma\text{-}\lim_{n\to\infty} (\chi(n)) = y \in M$.

2.45.2.: x es norma-atraido por M si, para cualquier solución χ por x, $\|\cdot\|\text{-}\lim_{n\to\infty} (\chi(n)) = y \in M$

2.45.3.: x es débilmente σ-atraido por M si $\lambda_{\sigma}^{+}(x) \neq \Phi$, y $\lambda_{\sigma}^{+}(x) \subset M$.

2.45.4.: x es débilmente norma-atraido por M, si $\lambda^{+}(x) \neq \Phi$, y $\lambda^{+}(x) \subset M$.

2.45.5.: x es fuertemente atraido por M, si para todo norma-entorno U de M, existen un norma-entorno V de x y un entero positivo k_U tales que $\pi(V,n) \subset U \quad \forall n \geq K_U$.

2.45.6.: x es uniformemente norma-atraido por M, si existe un norma-entorno V de x tal que toda solución χ, a través de $y \in V$ está últimamente en todo norma entorno de M

2.45.7.: x es uniformemente σ-atraido por M, si existe un norma-entorno V de x tal que toda solución χ por y V está últimamente en todo σ-entorno de M.

2.45.8.: x es débilmente atraido por M si cualquier solución a través de x, tiene su semitrayectoria últimamente contenida en todo norma-entorno de M.

2.45.9.: x es finitamente atraido por M si existe una solución χ por x, tal que $L_F(\chi) \subset M$.

2.46.: DEFINICION

Sea $M \in F(H)$.

2.46.1.: El conjunto $\{x \in H$: x es σ-atraido por M$\}$ $= A^{\sigma}(M)$, es llamado región de σ-atracción de M.

2.46.2.: El conjunto $\{x \in H$: x es norma atraido por M$\}$ = A(M), es llamado región de norma atracción de M.

2.46.3.: El conjunto $\{x \in H$: x es débilmente σ-atraido por M$\}$ = $A_d^{\sigma}(M)$, es llamado región de σ-atracción debil de M.

2.46.4.: El conjunto $\{x \in H$: x es débilmente norma atraido por M$\}$ = $A_d(M)$, es llamado región de norma atracción débil de M.

2.46.5.: El conjunto $\{x \in H$: x es fuertemente atraido por $M\} = A_f(M)$ es llamado región de atracción fuer te de M.

2.46.6.: El conjunto $\{x \in H$: x es uniformemente norma atraido por $M\} = A_u(M)$, es llamado región de norma atracción uniforme de M.

2.46.7.: El conjunto $\{x \in H$: x es uniformemente σ-atraido por $M\} = A_u^\sigma$, es llamado región de σ-atracción uni forme de M.

2.46.8.: El conjunto $\{x \in H$: x es débilmente atra ido por $M\} = A_w(M)$ es llamado región de atracción puntual debil de M.

2.46.9.: El conjunto $\{x \in H$: x es finitamente atraido por $M\} = A_F(M)$, es llamado región de atracción fini ta de M.

2.47.: EJEMPLOS Y OBSERVACIONES

2.47.1.: Son consecuencia inmediata de las defi niciones:

2.47.1.1.: $A_f(M) \subset A_u(M) \subset A_u^\sigma(M)$

2.47.1.2.: $A\ (M) \subset A^\sigma(M) \subset A_d^\sigma(M)$

2.47.1.3.: $A\ (M) \subset A_d(M) \subset A_d^\sigma(M)$

2.47.2.: Sea (H, I^+, Π_1) el semisistema dinámico; discreto débil introducido en 2.41.

Sea $M = S[0,1]$

$A_F(M) = A_f(M) = A_u^\sigma(M) = A_u(M) = A_w(M) = A_d^\sigma(M) = H.$

Para todo $x \in H$, la solución χ descrita en 2.2 . (tomando $\chi(0)=x$) verifica que $L_F(\chi) = L^+(\chi) \subset M$, pero es fa cil construir otra solución a través del mismo x con $L^+(\psi) = \Phi$, de donde

$A_d(M) = A(M) = \Phi$

y también puede obtenerse una solución por x que considera- da como sucesión, no tenga límite débil (aunque necesaria— mente ha de tener puntos de acumulación), por lo que

$A^o(M) = \Phi.$

2.47.3.: Para el semisistema dinámico discreto débil engendrado en H por el operador identidad, se tiene que todas las regiones de atracción del compacto débil $\{x\}$, definidas en 2.46 , se reducen a $\{x\}$.

2.47.4.: Sea $v\in H$, fijo. Considérese la aplicación $t:H\to F(H)$ / $t(x) = \{-x+v\}$.

Engendra t en H un semisistema dinámico discreto debil, para el cual, $x_0\in H$ es débilmente norma atraido por el compacto débil $M=\{x_0,v\}$ pero no es norma atraido por M.

Por otra parte, si W es un norma-entorno de x_0, $T^+(W) = W \cup v-W$. Tomando como norma entorno de M el conjunto $W\cup S[v,\varepsilon]$ fácilmente se ve que x_0 no es fuertemente atraido por M. Sin embargo, x_0 es uniformemente norma atraido por M.

2.47.5.: Sea $B=\{u,v\}$ con $(u/v) = 0$ y $\|u\| = \|v\| = 1/2$. Sea (H,I^+,μ) el semisistema dinámico discreto debil sobre H dado por:

$$\mu(x,1) = \{(x/u)u,(x/v)v\}$$
$$\mu(x,2) = \{0,\ \frac{1}{4}(x/u)u,\ \frac{1}{4}(x/v)v\}$$
$$\ldots$$
$$\mu(x,k) = \{0,\ \frac{1}{4^{k-1}}(x/u)u,\ \frac{1}{4^{k-1}}(x/v)v\}$$
$$\ldots$$

Para él se verifica:

$A(\{0\}) = A^\sigma(\{0\}) = A_d^\sigma(\{0\}) = A_d(\{0\}) = A_w(\{0\}) = H$.

2.47.6.: Supongamos $H=\ell^2$, y sea $x=(x_1,x_2,\ldots)\in H$. Sea (H,I^+,δ) el semisistema dinámico discreto debil inducido sobre H por la aplicación

$\delta(.,1):H\to F(H)$ / $\delta(x,1)= (0,x_1,x_2,\ldots)$.

Se tiene que:

$A^\sigma(\{0\}) = A_d^\sigma(\{0\}) = A_u^\sigma(\{0\}) = H$

$A(\{0\}) = A_w(\{0\}) = A_d(\{0\}) = \{0\}$

$A_u(\{0\}) = A_f(\{0\}) = \Phi$

$A_F(\{0\}) = \{0\}$.

2.48.: TEOREMA

Sean $x\in H$, $M\in F(H)$.

Si $x\in A_u(M)$ y $\lambda_\sigma^+(x) \neq \Phi$, entonces $x\in A_d(M)$.

Prueba:

Sea $y\in\lambda_\sigma^+(x)$. Existe una solución χ a través de x, tal que $y\in L_\sigma^+(\chi)$, es decir que, para alguna sucesión

$\{k_n\} \subset I^+$ $k_n \to \infty$, $\chi(k_n) \longrightarrow y$.

Si $y \notin M$, al ser H débilmente paracompacto, y por tanto normal, obtenemos abiertos débiles G_1 y G_2, disjuntos, tales que $M \subseteq G_1$, $y \in G_2$, y como $\chi(k_n)$ está últimamente en G_2, no puede estar últimamente en G_1. Por ello se tiene que $x \notin A_u(M)$, contra la hipótesis.

Luego $y \in M$, y en consecuencia, $\lambda_\sigma^+(x) \subset M$, es decir que $x \in A_d^\sigma(M)$.

□

2.49.: TEOREMA

Sea $M \in F(H)$. Se verifica que $A_u(M) \subset A_d^\sigma(M)$.

Prueba:

Sean $x \in A_u(M)$ y χ una solución arbitraria a través de x.

Dado $\epsilon > 0$, existe $k_\epsilon \in I^+$ tal que si $k \geq k_\epsilon$

$\chi(k) \in S(M,\epsilon) \subset S[M,\epsilon]$

$S[M,\epsilon]$ es débilmente compacto en virtud de 1.31 por lo que puede obtenerse una subsucesión

$\chi(k_p) \longrightarrow y \in S[M,\epsilon]$.

Si, en estas circunstancias, $y \notin M$, podrían, como antes, obtenerse abiertos débiles disjuntos G_1 y G_2, tales que

$M \subset G_1$ $y \in G_2$.

Como G_1 es también norma-entorno de M, y $x \in A_u(M)$, las sucesión $\chi(k)$ está últimamente en G_1, con lo que es imposible que esté frecuentemente en G_2; y por tanto se llega a una contradicción.

Luego $y \in M$, y además, por construcción $y \in L_\sigma^+(x)$

Procediendo de forma análoga con cualquier elemento de $L_\sigma^+(x)$, se obtiene que $L_\sigma^+(x) \subset M$, y al ser χ arbitraria

$\lambda_\sigma^+(x) \neq \phi$ y $\lambda_\sigma^+(x) \subset M$

lo que prueba que $x \in A_d^\sigma(M)$, completándose la demostración.

□

2.50.: TEOREMA

Sea $M \in F(H)$. Se verifica que $A_w(M) \subset A_d^\sigma(M)$.

La demostración se omite por ser idéntica a la anterior.

2.51.: TEOREMA

Sea $M \in F(H)$. Se verifica que $A_f(M) \subset A_d^{\sigma}(M)$.

Prueba:

Sea $x \in A_f(M)$. Consideremos los norma entornos de M de la forma $S[M, 1/2^n]$ $(n \in I^+)$. Por definición podemos encontrar una sucesión de norma entornos V_n de x, y una sucesión de enteros positivos k_n tales que

$$\forall k \geq k_n, \quad \pi(V_n, k) \subset S[M, 1/2^n] \quad (n=1, \ldots).$$

Si χ es cualquier solución arbitraria a través de x, como

$$\beta(\pi(V_n, k_n), M) \leq \beta(S[M, 1/2^n], M) \longrightarrow 0$$

y $\chi(k_n) \in \pi(V_n, k_n)$ $(n=1, \ldots)$, como consecuencia de 1.11., se deduce que una subsucesión $\{\chi(k_{n_p})\}$ extraida de $\{\chi(k_n)\}$ cumple que

$$\chi(k_{n_p}) \longrightarrow y \in M$$

Luego $L_\sigma^+(\chi) \neq \phi$ y también, por ser χ arbitraria $\lambda_\sigma^+(x) \neq \phi$.

Si $z \in \lambda_\sigma^+(x)$, un razonamiento análogo al expuesto en 2.49., muestra que $z \in M$, y, en consecuencia $\lambda_\sigma^+(x) \subset M$, lo que completa la prueba.

□

2.52.: TEOREMA

Sea $M \in F(H)$: El conjunto $A_d^{\sigma}(M)$ es positivamente invariante.

Prueba:

Caso contrario existirían $x \in A_d^{\sigma}(M)$ y una solución χ a través de x, tales que para algún entero positivo h, $\chi(h) \notin A_d^{\sigma}(M)$, lo cual implica que, o bien $\lambda_\sigma^+(\chi(h)) = \phi$, o $\lambda_\sigma^+(\chi(h)) \not\subset M$.

Existe, por lo tanto una solución ψ a través de $\chi(h)$ tal que

$$L_\sigma^+(\psi) = \phi \quad , \quad \text{o bien} \quad L_\sigma^+(\psi) \not\subset M.$$

La aplicación $\xi : I^+ \longrightarrow H$ definida de modo que

$$\begin{cases} \xi(j) = \chi(j) & j \leq h \\ \xi(j) = \psi(j-h) & j > h \end{cases}$$

es una solución a través de x, con $L_\sigma^+(\xi) = L_\sigma^+(\psi)$. Se tendría entonces que $x \notin A_d(M)$, en contra de la hipótesis.

□

2.53.: TEOREMA

Sea $M\epsilon F(H)$. Son positivamente invariantes las regiones $A(M)$, $A^{\sigma}(M)$, $A_d(M)$ $A_w(M)$

La prueba es idéntica a la del teorema anterior y por tanto se omite.

2.54.: TEOREMA

Sea $M\epsilon F(H)$. Si para todo $x\epsilon H$ se verifica que el norma-interior de $\pi(x,1)$ es no vacío, entonces la región $A_u(M)$ es cuasipositivamente invariante.

Prueba:

Caso contrario existe $x\epsilon A_u(M)$ tal que

$\pi(x,1) \cap A_u(M) = \phi$

Sea entonces $z\epsilon \| \|$-int.$(\pi(x,1))$. Como $z\notin A_u(M)$, para todo norma entorno de z, y en particular para $\pi(x,1)$ existe $y\epsilon\pi(x,1)$ tal que alguna solución χ a través de y, no está últimamente en algún norma entorno de M.

χ puede ser prolongada, como se hizo en la prueba de 2.52., de modo que sea solución a través de x, y entonces para todo norma entorno V de x, existe un punto, el propio x, tal que una solución por x no está últimamente en algún norma entorno de M. Luego $x\notin A_u(M)$, contra la hipótesis.

□

2.55.: TEOREMA

Sea $M\epsilon F(H)$. Si para todo $x\epsilon H$ se verifica que $\| \|$-int.$(\pi(x,1)) \neq \phi$, entonces $A_u^{\sigma}(M)$ es cuasipositivamente invariante.

La demostración es idéntica a la anterior.

2.56.: TEOREMA

Sea $M\epsilon F(H)$. Si para todo $x\epsilon H$, $\| \|$-int.$(\pi(x,1)) \neq \phi$, entonces $A_f(M)$ es cuasipositivamente invariante.

Prueba:

Caso contrario, existe $x\epsilon A_f(M)$ tal que

$\pi(x,1) \cap A_f(M) = \phi$

Sea $z\epsilon \| \|$-int.$(\pi(x,1))$. Como $z\notin A_f(M)$, existe un norma entorno U_z de M tal que para todo norma entor no V de z puede hallarse una sucesión creciente de enteros positivos $\{k_n^V\}$ tal que $\pi(V,k_n^V)\not\subset U_z$. Tomando, en particular $V=\pi(x,1)$, obtenemos la correspondiente sucesión $\{k_n^{\pi(x,1)}\}\equiv\{k_n\}$ para la que

$$\pi(\pi(x,1),k_n)\not\subset U_z$$

es decir:

$$\pi(x,k_n+1)\not\subset U_z$$

Entonces, si W es cualquier norma entorno de x, es claro que

$$\pi(x,k_n+1)\subset\pi(W,k_n+1)$$

y por tanto

$$\pi(W,k_n+1)\not\subset U_z$$

de donde se deduce que $x\notin A_f(M)$ contra lo supuesto.

□

2.57.: DEFINICION

Sea $M\in F(H)$.

2.57.1.: Si $A^\sigma(M)$ es norma entorno de M, se dice que M es σ-atractor.

2.57.2.: Si $A(M)$ es norma entorno de M, se dice que M es norma atractor.

2.57.3.: Si $A_d^\sigma(M)$ es norma-entorno de M, se dice que M es σ-atractor debil.

2.57.4.: Si $A_d(M)$ es norma-entorno de M, se dice que M es norma atractor debil.

2.57.5.: Si $A_f(M)$ es norma-entorno de M, se dice que M es atractor fuerte.

2.57.6.: Si $A_u^\sigma(M)$ es norma entorno de M, se dice que M es σ-atractor uniforme.

2.57.7.: Si $A_u(M)$ es norma entorno de M, se dice que M es norma atractor uniforme.

2.57.8.: Si $A_w(M)$ es norma entorno de M, se dice que M es atractor puntual debil.

2.57.9.: Si $A_F(M)$ es norma entorno de M, se dice que M es atractor finito.

2.58.: OBSERVACIONES

Sea $M\in F(H)$. Como consecuencia de las definiciones, se deduce de forma inmediata:

2.58.1.: Si M es atractor fuerte, entonces es norma atractor uniforme.

2.58.2.: Si M es norma atractor uniforme, entonces es σ-atractor uniforme.

2.58.3.: Si M es norma atractor, entonces es σ-atractor.

2.58.4.: Si M es σ-atractor, entonces es σ-atractor dēbil.

2.58.5.: Si M es norma atractor, entonces es norma atractor dēbil.

2.58.6.: Si M es norma atractor debil, entonces es σ-atractor dēbil.

2.58.7.: Si M es norma atractor uniforme, entonces es σ-atractor dēbil.

2.58.8.: Si M es atractor puntual debil, entonces es σ-atractor dēbil.

2.58.9.: Si M es atractor fuerte, entonces es atractor dēbil, en norma.

2.58.10.: Con las notaciones de 2.47.2., se verifica que M es atractor fuerte, atractor puntual dēbil, norma atractor uniforme, atractor finito y también σ-atractor dēbil, pero no es norma atractor, norma atractor debil ni σ-atractor. Se tiene así un contraejemlo que prueba la falsedad de los recíprocos de 2.58.4. y 2.58.6.

2.58.11.: En el semisistema descrito en 2.47.5., $M=\{0\}$ es norma atractor, atractor, σ-atractor dēbil norma atractor dēbil y atractor puntual dēbil.

2.58.12.: Para el semisistema dinamico discreto definido sobre $H=\ell^2$, en 2.47.6., $M=\{0\}$ es σ-atractor σ-atractor dēbil, σ-atractor uniforme. No es en cambio, norma atractor, atractor puntual dēbil, atractor fuerte, ni norma atractor dēbil.

Se tiene asi un contraejemplo que muestra la falsedad de los recíprocos de 2.58.7., 2.58.8., y 2.58.9

2.59.: DEFINICION

Sea $M\in F(H)$. Se dice que M es estable si, para
54 cada $x\notin M$, $y\in M$ existen sendos norma entornos U de x, V de y, tales que:

$$U\cap T^{+}(V)=\phi.$$

2.60.: DEFINICION

Sea $M\in F(H)$. Se dice que M es orbitalmente estable, si existen norma entornos de M positivamente invariantes arbitrariamente pequeños.

2.61.: TEOREMA

Sea $M\in F(H)$. Si M es orbitalmente estable, entonces es positivamente invariante.

Prueba:

Caso contrario, existe $x\in T^{+}(M)-M$. Como M es norma cerrado, existe un norma abierto V tal que $M\subset V$ y $x\notin V$, en cuyo caso:

$$M\subset V\subset H-\{x\}.$$

Por tanto, $H-\{x\}$ es un norma entorno de M y como M es orbitalmente estable, contiene un norma entorno U de M, positivamente invariante. Es decir:

$$x\in T^{+}(M)\subset T^{+}(U)\subset U\subset H-\{x\},$$

una contradicción.

□

2.62.: TEOREMA

Sea $M\in F(H)$. Si M es estable, entonces es positivamente invariante.

Prueba:

Si $x\in M$ e $y\in M$, por definición existen norma entornos U de x, V de y tal que $U\cap T^{+}(V)=\phi$, y, en particular $x\notin T^{+}(y)$. Al ser y arbitrario en M, obtenemos que

$$x\notin T^{+}(M).$$

Luego $H-M\subset H-T^{+}(M)$, o lo que es lo mismo,

$$T^{+}(M)\subset M$$

lo que prueba que M es positivamente invariante.

□

2.63.: TEOREMA

Sea $M\in F(H)$. Si M es orbitalmente estable, entonces es estable.

Prueba:

Al ser M débilmente compacto es débilmente cerrado y por tanto, norma cerrado; si $x \notin M$ existen norma abiertos disjuntos W, U, con $M \subset W$ y $x \in U$.

Como M es orbitalmente estable, existe un norma entorno V de M, positivamente invariante contenido en W de donde

$T^{+}(V) \subset V \subset W$.

Luego $U \cap T^{+}(V) = \emptyset$, y como V es, obviamente, entorno de cada $y \in M$, se concluye que M es estable.

□

2.64.: TEOREMA

Sea $M \in F(H)$. Si M es orbitalmente estable y norma atractor debil, entonces es atractor puntual debil.

Prueba:

Sean $x \in A_d(M)$ y V un norma entorno arbitrario de M. Como $A_d(M)$ es norma entorno de M, también lo es $V \cap A_d(M)$ y por ser M orbitalmente estable existe un norma entorno W de M, positivamente invariante, tal que $W \subset A_d(M) \cap V$.

Sea χ una solución arbitraria por x, y $\{\chi(i)\}$ su semitrayectoria positiva. Sabemos que $L^{+}(\chi) \neq \emptyset$ y $L^{+}(\chi) \subset M$ por lo que $\{\chi(i)\}$ está frecuentemente en cada norma entorno de M y en particular en H H-int.$(W) \subset W$. Pero al ser W positivamente invariante, se tendrá que $\{\chi(i)\}$ está últimamente en W, y por consiguiente en V.

Por lo tanto $x \in A_w(M)$, obteniéndose pues que

$A_w(M) \supset A_d(M)$

de donde se deduce que M es atractor puntual debil.

□

2.65.: DEFINICION

Sea $M \in F(H)$.

2.65.1.: M es σ-asintóticamente estable, si es orbitalmente estable y σ-atractor.

2.65.2.: M es asintóticamente norma estable si es orbitalmente estable y norma atractor.

2.66.: EJEMPLOS

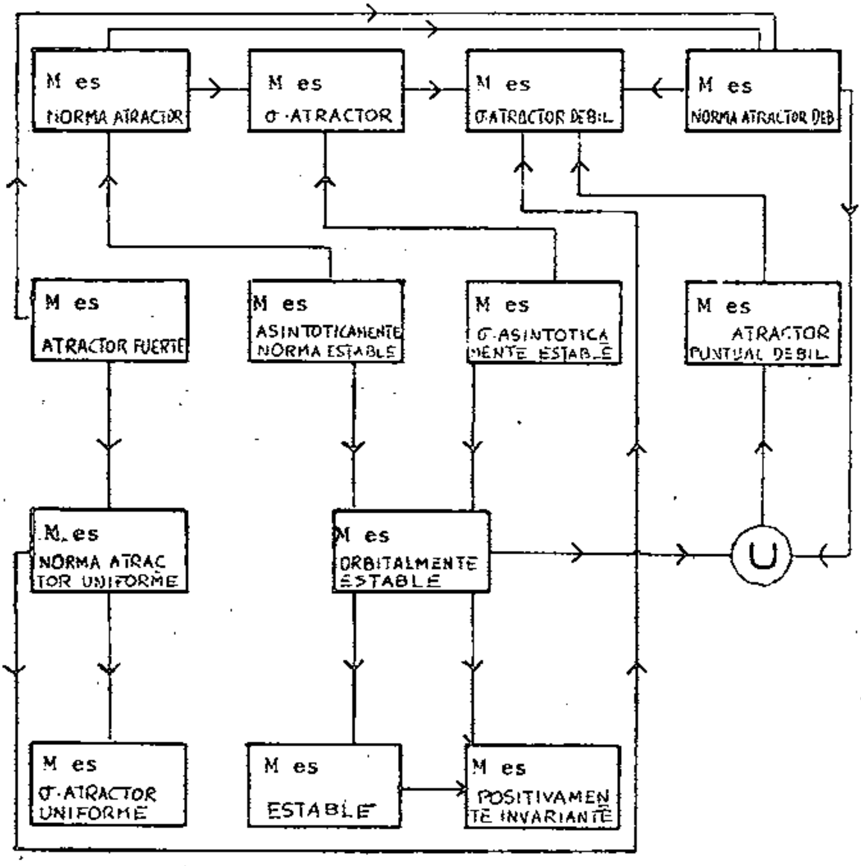
2.66.1.: En el semisistema dinámico discreto inducido en H por el operador identidad, si $x \in H$, todo conjun to de la forma {x} es estable y orbitalmente estable, pero no es atractor en ninguno de los sentidos definidos.

2.66.2.: El conjunto M= S[0,1] es orbitalmente estable en el semisistema dinámico discreto (H, I^{+},π_1) descrito en 2.47.2.

2.66.3.: Con las notaciones de 2.47.5., {0} es asintóticamente norma estable en (H,I^{+},π_2).

2.66.4.: Para el semisistema dinámico discreto sobre ℓ^2 definido en 2.47.6., M= {0} es asintóticamente σ-estable, pero no asintóticamente norma estable.

2.67.: DIAGRAMA



2.68.: TEOREMA

Sean $V \subset H$, y $J:V \longrightarrow R$ un funcional de Liapunov para (H,I^{+},π).

Sean $M \in F(H)$, y $W \in F(H)$, con $M \subset W \subset V$, tales que

2.68.1.: W es norma entorno de M

2.68.2.: W es positivamente invariante.

2.68.3.: Si $x \in W-M$ y χ es cualquier solución a través de x, $J(\chi(1)) < J(x)$.

Entonces M es σ-atractor debil, y $A_d^{\sigma}(M) \supset W$.

Prueba:

Sean $x \in W$ y χ una solución arbitraria a través de x. Su semitrayectoria positiva es una sucesión en W, por ser éste positivamente invariante.

Al ser W débilmente compacto, para una subsucesión $\{\chi(n_p)\}$ se verifica que

$\chi(n_p) \longrightarrow y \in W$.

Por lo tanto, $L_\sigma^{+}(\chi) \neq \phi$, y al ser χ arbitraria, $\lambda_\sigma^{+}(x) \neq \phi$.

Por otra parte, si $z \in \lambda_\sigma^{+}(x)-M$, existe una solución ψ a través de x, tal que $z \in L_\sigma^{+}(\psi)-M$.

Como $L_\sigma^{+}(\psi)$ es cuasipositivamente invariante, existe una solución ξ a través de z tal que $\xi(1) \in L_\sigma^{+}(\psi)$.

Al ser $z \notin M$ se puede afirmar que

$J(z) > J(\xi(1))$

pero esto es una contradicción, pues se ha probado en 2.44. que J es constante sobre $L_\sigma^{+}(\psi)$.

Por consiguiente, $\lambda_\sigma^{+}(x) - M = \phi$, o, lo que es lo mismo, $\lambda_\sigma^{+}(x) \subset M$.

Al ser el conjunto límite débil de x, no vacío y contenido en M, se tiene que $x \in A_d^{\sigma}(M)$, completándose de este modo la demostración.

□

2.69.: COROLARIO

Con las mismas notaciones e hipótesis que en 2.68., si para algún $x^{*} \in H$, $M=\{x^{*}\}$, entonces:

2.69.1.: M es σ-atractor.

2.69.2.: Para todo $x \in W$, $J(x^{*}) \leq J(x)$.

Prueba:

Sea $x \in W$. Sea χ una solución arbitraria por x.

Si se tuviera que $\chi(n) \not\longrightarrow x^*$, existirían
58 un abierto débil U, entorno de x^*, y una subsucesión $\{\chi(n_p)\}$ de $\{\chi(n)\}$ tales que $\chi(n_p) \notin U$ $p=1,2....$

Al ser $\{\chi(n_p)\} \subset W$, para una subsucesión

$\chi(n_{p_i}) \longrightarrow z \in W$.

Por un razonamiento idéntico al empleado en 2.74., se obtiene que $z \in M$, y en consecuencia:

$\chi(n_{p_i}) \longrightarrow x^*$

lo cual es absurdo, pues $\chi(n_{p_i}) \notin U$ $i=1,...$.

Necesariamente, por tanto, $\chi(n) \longrightarrow x^*$, y entonces $x \in A^\sigma(M)$, completándose la prueba de 2.69.1.,

Para ver 2.69.2, supongamos que para algún $y \in W$ $J(y) < J(x^*)$.

Como $y \notin M$, dada cualquier solución χ por y,

$J(\chi(1)) < J(y) < J(x^*)$

luego $\chi(1) \notin M$.

Procediendo de igual forma se llega a estable - cer que

$J(x^*) > J(y) > J(\chi(1)) > J(\chi(2)) > ... > J(\chi(n)) > ...$

Pero, por 2.75.1. sabemos que $\chi(n) \rightharpoonup x^*$, y al ser J débilmente secuencialmente inferiormente semicontínuo,

$J(x^*) \leq \lim\inf J(\chi(n))$

una contradicción.

□

2.70.: COROLARIO

Con las mismas hipótesis y notaciones de 2.68., si J es constante sobre M y $M' \in F(H)$, $M' \subset M$, verifica 2.68 . 3., entonces $M' = M$.

Prueba:

Si $x \in M - M'$ como para cualquier solución χ a través de x, $J(\chi(1)) < J(x)$, al ser J constante sobre M, necesariamente $\chi(1) \in W - M$.

Si $\chi(2) \in M$ se llega a una contradicción, pues $J(\chi(1)) > J(\chi(2))$. Luego también $\chi(2) \in W - M$,y repitiendo el razonamiento puede llegar a establecerse que

$J(x) > J(\chi(1)) > J(\chi(2)) > ...$

Como M'es atractor débil y su correspondiente región de atracción contiene a W, $L^+_\sigma(\chi)$ es no vacío y contenido en M', es decir que para alguna subsucesión

$(\chi(n_p))$ extraida de $(\chi(n))$ se tendrá que

$$\chi(n_p) \longrightarrow z \in M' \subset M$$

por lo que

$$J(\chi(n_p)) \longrightarrow J(z)$$

y, en consecuencia:

$$J(x) > J(z)$$

lo que es absurdo, pues J es constante sobre M.

Luego $M' - M = \Phi$, es decir $M' = M$.

□

MINIMALIDAD

2.71.: DEFINICION

El conjunto $M \subset H$ es positivamente minimal, si es σ-cerrado, positivamente invariante, y no posee ningún subconjunto propio con ambas características.

2.72.: DEFINICION

El conjunto $M \subset H$ es débilmente positivamente minimal, si es σ-cerrado, débilmente positivamente invariante, y no posee ningún subconjunto propio con ambas características.

2.73.: OBSERVACIONES Y EJEMPLOS

2.73.1.: En el semisistema dinámico discreto debil (H, I^+, π_1) descrito en 2.4.1., el conjunto $M = S[0,1]$ es positivamente minimal.

2.73.2.: En el semisistema dinámico discreto débil (H, I^+, π_3) descrito en 2.4.3., el conjunto M=H es positivamente minimal.

2.73.3.: Dos conjuntos positivamente minimales, o coinciden o son disjuntos.

2.73.4.: Un conjunto positivamente minimal, no necesariamente es débilmente positivamente minimal, como sucede, por ejemplo, al M de 2.7 .1.

2.73.5.: Si $x \in H$ es un punto crítico, entonces $M = \{x\}$ es positivamente minimal, y débilmente positivamen te minimal.

2.73.6.: En el semisistema dinámico discreto débil (H,I^+,π_1) (2.4.1.), el conjunto $M=\{0\}$ es débilmente positivamente minimal, pero no positivamente minimal.

La situación es extensible a cualquier punto singular no crítico.

2.73.7.: Sea $x\varepsilon H$. Si el conjunto $M\subset H$, $M\neq\{x\}$, es positivamente minimal, entonces no contiene puntos críticos. Si M es débilmente positivamente minimal, no contiene puntos singulares.

2.73.8.: Sea (H,I^+,π) un semisistema dinámico discreto débil, para el que todo punto es singular. En él se verifica que dos conjuntos débilmente positivamente minimales, o coinciden o son disjuntos.

2.74.: TEOREMA

Todo conjunto débilmente compacto no vacío y débilmente positivamente invariante, contiene algún subconjunto débilmente positivamente minimal.

Prueba:

Consideremos la familia Σ de los subconjuntos del compacto débil considerado M, que sean no vacíos σ-cerrados y débilmente positivamente invariantes. Obviamente, Σ es no vacía y la inclusión es en ella una relación de orden parcial.

Sea $\{M_i\}_{i\varepsilon\Gamma}$ una cadena en ella.

Toda parte finita de $\{M_i\}_{i\varepsilon\Gamma}$ tiene intersección no vacía, y al ser M σ-compacto, esto basta para afirmar que dicha cadena tiene intersección no vacía y σ-cerrada.

Sea pues $x\varepsilon \bigcap_{i\varepsilon\Gamma} M_i = M^*$. Probaremos que

$\pi(x,1)\cap M^*\neq\phi$.

En efecto, para cada $i\varepsilon\Gamma$, $x\varepsilon M_i$, y como M_i es débilmente positivamente invariante,

$N_i=\pi(x,1)\cap M_i\neq\phi$.

Además, si $i<j$, $M_i\supset M_j$, por lo que $N_i\supset N_j$ y

y de aquí que cada parte finita de la cadena $\{N_i\}_{i\in\Gamma}$ tiene intersección no vacía, y al ser M σ-compacto,

$$N^* = \bigcap_{i\in\Gamma} N_i \neq \phi$$

Como

$$\pi(x,1)\cap M^* = \bigcap_{i\in\Gamma} (x,1)\cap M_i = N^*,$$

se prueba que M^* es débilmente positivamente invariante.

Se ha visto, pues, que toda cadena en Σ tiene cota inferior en Σ. Por el lema de Zorn, existen en Σ elementos minimales, y cada uno de ellos, es cerrado, no vacío y débilmente positivamente invariante, por lo que es débilmente positivamente minimal (y además débilmente compacto), completándose de este modo la demostración. □

2.75 .: TEOREMA

Sea $M\in F(H)$. M es débilmente positivamente minimal, si y sólo si para cada solución χ a través de x, de semitrayectoria positiva contenida en M, $L^+_\sigma(\chi) = M$.

Prueba:

Supongamos que M es débilmente positivamente minimal.

Sean $x\in M$ y χ una solución a través de x con $\{\chi(n)\}\subset M$ $(n=1,\ldots)$. Existe una tal solución por ser M débilmente positivamente invariante.

Al ser $M\in F(H)$ sabemos por 2.38. que $L^+_\sigma(\chi)$ es no vacío, débilmente compacto, y contenido en M.

Como, en virtud de 2.29, $L^+_\sigma(\chi)$ es también débilmente positivamente invariante, la minimalidad de M implica que

$$L^+_\sigma(\chi) = M.$$

Recíprocamente, sea $P\subset M$, no vacío σ-cerrado y débilmente positivamente invariante:

Si $x\in P$, existe una solución ψ a través de x, con $\psi(n)\in P$ $(n=1,\ldots)$, y como, obviamente

$$L^+_\sigma(\psi)\subset P$$

y al ser, por hipótesis, $M = L^+_\sigma(\psi)$, se sigue que

$$M\subset P$$

y de aquí que $P = M$, y que, M es débilmente positivamente minimal. □

2.76.: TEOREMA

Si (H,I^+,π) tiene unicidad positiva, el conjunto $M\epsilon F(H)$ es positivamente minimal si y sólo si, para todo $x\epsilon M$:

$$\overline{T^+(x)}^{\sigma} = M$$

Prueba:

Sea $x\epsilon M$. Si M es positivamente minimal, es positivamente invariante, por lo que $T^+(x)\subset M$, de donde

$$\overline{T^+(x)}^{\sigma} \subset \overline{M}^{\sigma} = M.$$

Como (H,I^+,π) tiene unicidad positiva,

$$T^+(x) = \chi(I^+)$$

para la solución χ a través de x.

Al estar $\chi(I^+)$ contenida en el compacto débil M, su clausura débil coincide con su clausura débil secuencial, pudiendo escribirse que:

$$\overline{T^+(x)}^{\sigma} = \overline{\chi(I^+)}^{\sigma} = \chi(I^+)\cup L_\sigma^+(\chi) = P$$

Si $y\epsilon L_\sigma^+(\chi)$, para una sucesión $\{k_n\}\subset I^+$, $k_n\to\infty$, $\chi(k_n) \longrightarrow y$, en cuyo caso $\pi(\chi(k_n),1) \xrightarrow{\sigma} \pi(y,1)$ por lo que, para una subsucesión

$$\chi(k_{n_i}+1) \longrightarrow z\epsilon\ \pi(y,1)$$

de donde se deduce que $z\epsilon L_\sigma^+(\chi)$, es decir que

$$\{z\} = \pi(y,1) \subset L_\sigma^+(\chi)$$

o lo que es lo mismo, que $L_\sigma^+(\chi)$ es positivamente invariante.

Como $\chi(I^+)$ es también positivamente invariante (por la unicidad positiva del semisistema considerade), se sigue que P es positivamente invariante.

Al ser M minimal, se obtiene que $P=M$, lo que completa la prueba del directo.

Recíprocamente, si $N\subset M$ es no vacío débilmente cerrado y positivamente invariante, para cualqier $x\epsilon N$

$$T^+(x)\subset N$$

y, por consiguiente

$$\overline{T^+(x)}^{\sigma} = M \subset \overline{N}^{\sigma} = N$$

siguiéndose que $N=M$, y que M es positivamente minimal.

$\square$

2.77.: DEFINICION

Sean A, B, subconjuntos de H.

2.77.1.: B es recursivo respecto de A si y sólo si, para cada $T \in I^+$ existe $t \in I^+$ tal que $t > T$ y $\pi(A,t) \cap B \neq \phi$.

2.77.2.: B es débilmente recursivo respecto de A si y sólo si para todo $x \in A$ existe una solución χ_x a través de x, cuya semitrayectoria positiva está frecuentemente en B.

Si A es recursivo respecto de A (débilmente recursivo respecto de A) se dice que A es autorrecursivo (débilmente autorrecursivo).

2.78.: DEFINICION

2.78.1.: El conjunto $M \in F(H)$ es estable en el sentido de Poissón, si todo entorno débil de M es recursivo respecto de M.

2.78.2.: El conjunto $M \in F(H)$ es débilmente estable en el sentido de Poissón, si todo entorno débil de M es débilmente recursivo respecto de M.

2.79.: DEFINICION

Sea $x \in H$.

2.79.1.: Se dice que x es no errante, si todo entorno débil de x es autorrecursivo.

2.79.2.: Se dice que x es débilmente no errante si todo entorno débil de x es débilmente autorrecursivo.

2.80.: EJEMMPLOS Y OBSERVACIONES

2.80.1.: Si B es débilmente recursivo respecto de A, entonces B es recursivo respecto de A, pues para todo $x \in A$ existe una solución χ_x tal que para una sucesión $(k_n) \subset I^+$, $k_n \to \infty$, $(\chi_x(k_n)) \subset B$. Como $\chi_x(k_n) \in \pi(x,k_n)$ se obtiene que $\pi(A,k_n) \cap B \neq \phi$, es decir, que B es recursivo respecto de A.

2.80.2.: Sin embargo, para el semisitema dinámico
64 co discreto débil descrito en 2.37.1. no es cierto el recíproco:

Sean los conjuntos: $A= S\left[x_1, 1/8\right]$, $B=\{x_2, x_6, x_7, \ldots\}$.

B no es débilmente recursivo respecto de A, pues basta tomar $x \in A-\{x_1\}$: Por x no pasa mas que la solución $\{x,x,x, \ldots\}$ que no está frecuentemente en B.

No obstante, B es recursivo respecto de A, pues para la sucesión $\{2-1, 6-1, \ldots\} \subset I^+$ se verifica que

$\pi(A,2-1) \cap B \neq \phi$ ya que tienen en común x_2

$\pi(A,6-1) \cap B \neq \phi$ ya que tienen en común x_6

$\pi(A,7-1) \cap B \neq \phi$ ya que tienen en común x_7

...

2.80.3.: Como consecuencia de 2.86.1., se tiene que:

Si A es débilmente autorrecursivo, es autorrecursivo.

Si $x \in H$ es débilmente no errante, es no errante.

Si $M \in F(H)$ es débilmente Poissón estable, es Poissón estable.

2.80.4.: Para el semisistema dinamico discreto débil (H, I°, π_1) de 2,4.1., el conjunto $M = S[0,1]$ es recursivo y débilmente recursivo respecto de cualquier subconjunto $B \subset H$. Por lo tanto es débilmente Poissón estable.

Si $x \in M$ es no errante y débilmente no errante, ocurriendo lo contrario si $x \notin M$.

2.80.5.: Para el semisistema dinámico discreto débil descrito en 2.4.3., $(\alpha=1)$ se tiene que si A y B son cualesquiera subconjuntos no vacíos, A es débilmente recursivo respecto de B.

En particular, todo conjunto $M \in F(H)$ es débilmente Poissón estable. Todo punto $x \in H$ es débilmente no errante.

2.80.6.: Todo conjunto $M \in F(H)$ autorrecursivo es estable en el sentido de Poisson. Todo conjunto $M \in F(H)$ débilmente autorrecursivo, es débilmente estable en el sentido de Poissón.

2.81.: TEOREMA

Todo conjunto $M \in F(H)$ débilmente positivamente invariante, es débilmente estable según Poissón.

Prueba:

Sea U un entorno débil arbitrario de M.

Si $x \in M$ existe una solución χ a través de x con semitrayectoria positiva contenida en M, es decir, en U.

Por lo tanto U es débilmente recursivo respecto de M, y al ser U arbitrario, M es débilmente estable Poissón. □

2.82.: COROLARIO

Si (H,I^+,π) es estable Lagran e y χ es cualquier solución de dicho semisistema, entonces $L^+_\sigma(\chi)$ es dé-- bilmente estable Poissón, y por tanto, estable Poisson.

Prueba:

Es simple consecuencia de 2.29. y 2.38.

□

2.83.: COROLARIO

Sea $M \in F(H)$. Si M es estable, o bien orbitalmente estable, entonces es débilmente estable en el sentido de Poissón.

2.84.: TEOREMA

Sea χ una solución de (H,I^+,π) con límite secuencial débil no vacío.

Si $x \in L^+_\sigma(\chi)$, entonces es no errante.

Prueba:

Sea $x \in L^+_\sigma(\chi)$. Por definición existe una sucesión $\{k_n\} \subset I^+$, $k_n \to \infty$, tal que $\chi(k_n) \to y$.

Si U es cualquier entorno débil de x, existe un entero positivo $k(U)$ tal que, si $k_n \geq k(U) = k_{n_0}$

$\chi(k_n) \in U$.

Si llamamos $y = \chi(k(U))$, ocurre que:

$$\chi(k_{n_0+p}) \in \pi(y, k_{n_0+p} - k_{n_0}) \quad (p=1,\dots)$$

luego

$$\pi(y, k_{n_0+p} - k_{n_0}) \cap U \neq \phi \quad (p=1,\dots)$$

es decir que

$$\pi(U, k_{n_0+p} - k_{n_0}) \cap U \neq \phi \quad (p=1,\dots)$$

por lo que U es autorrecursivo.

□

SEMISISTEMAS DINAMICOS DISCRETOS DEBILES SOBRE UN CONJUNTO DEBILMENTE COMPACTO

Sean $W\in F(H)$ y $F(W)$ el conjunto de las partes no vacías débilmente compactas en W. Nótese que $F(W)\subset F(H)$.

2.85.: DEFINICION

Llamaremos semisistema dinámico discreto débil sin unicidad sobre W, a la terna (W,I^{+},π) donde

$$\pi: W\times I^{+} \longrightarrow F(W)$$

verifica:

2.85.1.: $\pi(x,0)=\{x\}$ $\forall x\in W$.

2.85.2.: Si $\{x_n\}\subset W$ es tal que $x_n \rightharpoonup x$, entonces $\pi(x_n,k)\xrightarrow{\sigma}\pi(x,k)$ en $F(W)$, $\forall k\in I^{+}$.

2.85.3.: $\pi(\pi(x,h),k)=\pi(x,h+k)$ $\forall x\in W$, $\forall h,k\in I^{+}$.

Si $M\in F(W)$ entonces, de forma enteramente análoga a como se hizo en 2.2.1., se comprueba que $\pi(M,k)\in F(H)$.

Damos ahora, sin desarrollar la prueba, el resultado correspondiente al teorema 2.3.:

2.86.: TEOREMA

Sea $\pi(.,1): W \longrightarrow F(W)$ una aplicación tal que:

2.86.1.: Si $x_n \rightharpoonup x$ en W, $\pi(x_n,1)\xrightarrow{\sigma}\pi(x,1)$ en $F(W)$.

Si se define $\pi: W\times I^{+}\to F(W)$ de modo que:

$$\pi(x,0)=\{x\}$$

$$\pi(x,k+1)=\bigcup_{y\in\pi(x,k)}\pi(y,1) \qquad (k=1,\ldots)$$

entonces (W,I^{+},π) constituye un semisistema dinámico discreto débil sobre W que denominaremos inducido en W por la aplicación dada.

De forma idéntica a como se hizo para semisistemas dinámicos discretos débiles sobre H, se definen en este caso, con las modificaciones (formales) obvias, soluciones, conjuntos invariantes y débilmente invariantes, conjuntos límite, funciones de Liapunov etc. No se repetirán tales definiciones, ni se establecerán más resultados que los inmediatamente aplicacbles al estudio de algoritmos de minimización de funcionales.

Se omitirán las pruebas reproducibles de modo evidente, a partir de sus correspondientes para semisistemas sobre H.

2.87.: OBSERVACION

Si (H,I^+,π) es un semisistema dinámico discreto débil para el que todo punto de W es singular, entonces la aplicación

$$\pi_W(\cdot,1): W \to F(W) \;/\; \pi_W(x,1) = \pi(x,1) \cap W$$

induce sobre W un semisistema dinámico discreto débil, que diremos es la restricción a W de (H,I^+,π).

La condición de que todos los puntos de W sean singulares, puede debilitarse exigiendo únicamente que $\forall x \in W$, $\pi(x,1) \cap W \neq \Phi$.

2.88.: TEOREMA

Sea χ una solución de (W,I^+,π).
Entonces $L^+_\sigma(\chi) \in F(W)$.
Prueba:
Cfr. 2.35.

2.89.: TEOREMA

Sea χ una solución de (W,I^+,π).
El conjunto $L^+_\sigma(\chi)$ es débilmente positivamente invariante.
Prueba:
Cfr. 2.28.

2.90.: TEOREMA

Sea $J: W \to R$ un funcional de Liapunov para (W,I^+,π). Sea χ cualquier solución de dicho semisistema.

En estas condiciones, J es constante sobre el conjunto $L^+_\sigma(\chi)$.
Prueba:
Cfr. 2.44.

2.91.: TEOREMA

Sea $J: W \longrightarrow R$ un funcional de Liapunov para (W,I^{+},π). Sea $M\in F(W)$.

Si se verifica:

2.91.1.: W es norma-entorno de M.

2.91.2.: Para todo $x\in W-M$ y para cualquier solución χ a través de x, $J(\chi(1)) < J(x)$.

Entonces M es σ-atractor débil y su región de atracción es W.

Prueba:

Cfr. 2.68.

2.92.: TEOREMA

Sean $J:W \longrightarrow R$ una función de Liapunov para (W,I^{+},π), y $x^{*}\in W$ tales que:

2.92.1.: Si $x\neq x^{*}$ y χ es cualquier solución a través de x, $J(\chi(1))<J(x)$.

Entonces $\chi(n) \rightharpoonup x^{*}$ y $J(x^{*}) \leq J(x)$ $\forall x\in W$.

Prueba:

Desde luego, una subsucesión de $\{\chi(n)\}$ es débilmente convergente, por ser $W\in F(H)$. Si

$$\chi(n_p) \rightharpoonup y\neq x^{*}$$

como $y\in L_{\sigma}^{+}(\chi)$ y $L_{\sigma}^{+}(\chi)$ es cuasipositivamente invariante, existe una solución ψ a través de y con semitrayectoria positiva contenida en $L_{\sigma}^{+}(\chi)$, y en particular con $\psi(1)\in L_{\sigma}^{+}(\chi)$.

Pero, por 2.92.1., $J(\psi(1))<J(y)$, obteniéndose un absurdo pues J es constante sobre los conjuntos límite de soluciones. Luego $y=x^{*}$.

Si $\{\chi(n)\}$ no converge débilmente a x^{*}, existe un abierto débil U que contiene a x^{*}, y una subsucesión $\{\chi(n_p)\}$ tal que $\chi(n_p)\notin U$ $(p=1\ldots)$. Repitiendo con esta subsucesión el razonamiento expuesto en los párrafos anteriores, se llega a probar que $\chi(n_p) \rightharpoonup x^{*}$, una contradicción.

La prueba de que $J(x^{*}) \leq J(x)$ $\forall x\in W$ es idéntica a la de 2.69.2.

□

3.: APLICACION AL ESTUDIO DE ALGORITMOS DE MINIMIZACION DE FUNCIONALES

3.1.: HIPOTESIS Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El objetivo de esta sección es definir semisistemas dinámicos discretos débiles adecuados para la descripción de algunos de los algoritmos de minimización de funcionales sobre H, cuyo estudio desde otro punto de vista, se encuentra en (10) ó en (14).

Consideraremos en lo que sigue un funcional

$J: H \longrightarrow R$

verificando:

→ H.1.

Para cualesquiera $x,\gamma \in H$ existe

$$J'(x,\gamma) = \lim_{\theta\to 0} \frac{J(x+\theta\gamma)-J(x)}{\theta}$$

y la aplicación $\gamma \to J'(x,\gamma)$ es lineal y contínua.

→ H.2.

Existe en H un único punto x^* crítico de J, que es precisamente su mínimo.

→ H.3.

Si $\{u_n\}$ es cualquier sucesión en H

$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = +\infty$ si y sólo si $\|u_n\| \to \infty$

→ H.4.

J es convexo en H.

→ H.5.

Para todo $\gamma \in H$,

$$x_n \longrightarrow x \implies J'(x_n,\gamma) \to J'(x,\gamma)$$

→ H.6.

La aplicación $u \to J'(u,\gamma)$ es uniformemente contínua en algún conjunto de la forma

$$W(x_0) = \{x \in H \mid J(x) \leq J(x_0)\} \quad (x_0 \neq x^*),$$

para todo $\gamma \in H$ con $\|\gamma\| = 1$.

Obsérvese que, como consecuencia de H.1 y H.4, J es débilmente secuencialmente inferiormente semicontínuo. (Cfr. (10), Ch.2, 1-4).

Por otra parte, el conjunto $W(x_o)$ es débilmente secuencialmente cerrado, pues si la sucesión $\{x_n\} \subset W(x_o)$ es tal que $x_n \rightharpoonup x$, entonces $J(x) \leq \liminf . J(x_n) \leq J(x_o)$.
70 Como, en virtud de H.3 $W(x_o)$ es acotado, es también débilmente compacto.

Por simplificar notablemente los planteamientos posteriores, sería de desear que J fuera débilmente secuencialmente contínuo, mas se ha visto que, si H es de dimensión infinita ello es contradictorio con la existencia de un conjunto de nivel acotado. $(W(x_o))$.

Hechas las hipótesis anteriores, en lo que sigue escribiremos

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\nabla J(x)}{\|\nabla J(x)\|} & \text{si } x \neq x^* \\ 0 & \text{si } x = x^*. \end{cases}$$

Sea $\{x_n\} \subset H$ tal que $x_n \rightharpoonup x \neq x^*$; $(x_n \neq x^*\ n=1,\ldots)$

Por tener límite débil, $\{x_n\}$ es acotada y por verificar J H.5. se sigue que

$$\nabla J(x_n) \rightharpoonup \nabla J(x)$$

lo que implica, igualmente, que $\{\|\nabla J(x_n)\|\}$ es acotada en R, y además

$$0 < \|\nabla J(x)\| \leq \liminf . \ \|\nabla J(x_n)\|$$

por lo que, para una subsucesión

$$\|\nabla J(x_{n_p})\| \longrightarrow \gamma = \liminf . \ \|\nabla J(x_n)\|$$

de donde

$$p(x_{n_p}) \longrightarrow \frac{\nabla J(x)}{\gamma} = \frac{\|\nabla J(x)\|}{\gamma}\ p(x) = \alpha \cdot p(x),\ \alpha \leq 1.$$

No es cierto, en general, que si J cumple las hipótesis anteriores, y $\{u_n\}$ $\{v_n\}$ son sucesiones en H con

$$u_n \rightharpoonup u, \quad v_n \rightharpoonup v, \quad J(v_n) \leq J(u_n)$$

necesariamente se siga que $J(v) \leq J(u)$. No obstante, admitiremos que J verifica:

→ H,7.

Si $t_n \to t$ en R y $x_n \rightharpoonup x$ en H, con

$$J(x_n - t_n p(x_n)) \leq J(x_n - c(\|\nabla J(x_n)\|)\ p(x_n))$$

entonces

$$J(x - t\alpha p(x)) \leq J(x - c(\|\nabla J(x)\|) p(x))$$

siendo $c: R^+ \to R^+$ contínua, y las restantes notaciones las introducidas al comienzo del presente párrafo.

En adelante se supone dado un funcional J sobre H, verificando, salvo advertencia en contrario, las condicio

3.2.: DEFINICION

La función $d: R^+ \longrightarrow R^+$ es llamada f-función si, para toda sucesión $\{x_n\} \subset R^+$, $d(x_n) \to 0$ si y sólo si $x_n \to 0$.

3.3.: DEFINICION

Sea $\alpha = \sup. \{ \|\nabla J(x) - \nabla J(y)\| : x,y \in W(x_o) \}$

La función $\delta; R^+ \longrightarrow R^+$ definida de modo que

$$\delta(t) = \begin{cases} \inf.\{\|x-y\| : x,y \in W(x_o), \|\nabla J(x) - \nabla J(y)\| \geq t & \text{si } t \in [0,\alpha) \\ \lim_{s \to \alpha^-} \delta(s) & \text{si } t \in [\alpha,\infty). \end{cases}$$

es llamada "módulo inverso de continuidad de J en $W(x_o)$"

Está bien definida como consecuencia de H.6. y es una f-función acotada y monótona creciente en R^+.

3.4.: DEFINICION

La sucesión $\{x_n\} \subset H$ es minimizadora para J si y sólo si $J(x_n) \to J(x^*)$.

3.5.: DEFINICION

La sucesión $\{x_n\} \subset H$ es critizadora para J si y sólo si $\|\nabla J(x_n)\| \to 0$.

3.6.: TEOREMA ((14), T 4.3.1.).

Si $\{x_n\}$ es critizadora, es minimizadora.

Prueba:

Como $J(x^*) = \inf. \{J(x): x \in W(x_o)\}$ podemos obtener una sucesión $\{y_n\} \subset W(x_o)$, tal que $J(y_n) \to J(x^*)$.

Al ser J convexo

$J(y_n) - J(x_n) \geq (y_n - x_n, \nabla J(x_n))$.

Ahora bien:

$|(y_n - x_n, J(x_n))| \leq \|y_n - x_n\| . \|\nabla J(x_n)\|$

y como las sucesiones $\{y_n\}\{x_n\}$ son acotadas, y $\{x_n\}$ es critizadora:

$$\lim_{n \to \infty} |(y_n - x_n, J(x_n))| = 0$$

luego

$\lim \sup. (J(y_n) - J(x_n)) \geq 0.$

Por construcción existe $\lim J(y_n)$, y por otra parte:

$J(x^*) \leq \lim \inf. J(x_n) \leq \lim \sup J(x_n) \leq \lim J(y_n) = J(x^*)$

luego

Los algoritmos de minimización considerados serán de tipo iterativo, es decir en los que, fijado un cierto punto inicial $x_0 \in H$, se construye una sucesión (x_i) de suerte que, si $x_i \neq x^*$, $J(x_{i+1})<J(x_i)$.

La sucesión anterior se forma de modo que

$$x_{i+1}= x_i - \rho_i p_i$$

donde la dirección p_i y el escalar ρ_i se calculan en cada paso en función de x_i (y del funcional J).

Como $\frac{d}{dt} J(x+tp)\Big|_{t=0} = (\nabla J(x),p)$, vemos que J es instantáneamente más rápidamente decreciente en la dirección p que verifique:

$$(\nabla J(x),p) = - \| \nabla J(x)\| = \sup_{|\gamma|=1} (\nabla J(x),\gamma)$$

dirección llamada de *máximo descenso*, y que en un Espacio de Hilbert es

$$p= \frac{-\nabla J(x)}{\|\nabla J(x)\|}$$

lo que justifica la notación anteriormente adoptada.

Todos los algoritmos considerados en esta sección serán del tipo del máximo descenso (es decir, en los que $p = \nabla J(x)/ \|\nabla J(x)\|$, si $x\neq x^*$) variando en cada caso el procedimiento de cálculo del escalar ρ_i("amplitud de paso") cuya elección se hace, en la mayoría de los métodos, en un intervalo dependiente de x_i y de $p(x_i)$.

La convergencia de un algoritmo implica poder garantizar que la sucesión (x_i) obtenida converge (débilmente o en norma) al mínimo del funcional, lo que en dimensión infinita, no necesariamente va ligado al hecho de que $J(x_i)\to J(x^*)$.

Un modo natural de calcular ρ_i es darle el valor del primer mínimo de la función $t\to J(x-tp(x))$.(*Método de Curry*) que puede generalizarse prefijando una sucesión(α_n) con $0\leq\alpha_n\leq\leq\alpha<1$.En estas condiciones se toma ρ_i igual al primer mínimo local positivo de la función

$$t\to J(x_i-tp(x_i))- \alpha_i t\|\nabla J(x_i)\| .$$

(Tomando $\alpha_i=0$ resulta el algoritmo habitual).

En adelante nos referiremos a al algoritmo aquí descrito mediante el nombre de "método de Curry generalizado" (Cfr. (14) Secc.4.3).

3.7.: TEOREMA

Para cada $x\in H$ se define el conjunto
$f(x)=\{x-tp(x):\ c(\|\nabla J(x)\|)\leq t,\ J(x-tp(x))\leq J(x-c(\|\nabla J(x)\|)p(x))\leq J(x)\}$
siendo $c:R^{+}\to R^{+}$ una f-función contínua verificando que $c(t)/t$ es monótona creciente, y tal que haga $f(x)\neq\phi$ para cada $x\in H$.

Entonces se tiene:

3.7.1.: $f(x)\in F(H)$, $\forall x\in H$.

3.7.2.: $x_n \longrightarrow x$ en H, $f(x_n) \overset{g}{\to} f(x)$ en $F(H)$.

Prueba:

3.7.1.

Si $x=x^*$ $f(x)=\{x^*\}\in F(H)$, obviamente.

Si $x\neq x^*$ y tomamos una sucesión $\{y_n\}\subset f(x)$, será:

$y_n \equiv x - t_n p(x)$, con $J(y_n) \leq J(x-c(\|\nabla J(x)\|)p(x))$.

Como, para cada n, $\|x-t_n p(x)\| \geq \|-t_n p(x)\| - \|x\|$ si la sucesión $\{t_n\}$ no fuera acotada, tampoco lo sería en norma la sucesión $\{x-t_n p(x)\}$, lo que es absurdo pues está contenida en el conjunto de nivel $W(x)$, que es acotado en virtud de H.3.

Puede suponerse pues que

$t_n \to t\in R^{+}$

en cuyo caso

$y_n \to y = x - tp(x)$

y como J es débilmente secuencialmente inferiormente semicontínuo

$J(y) \leq \liminf J(x-t_n p(x)) \leq J(x-c(\|\nabla J(x)\|)p(x))$.

Además, al ser $c(\|\nabla J(x)\|) \leq t_n$, también $c(\|\nabla J(x)\|) \leq t$, deduciéndose de ello que $y\in f(x)$, y en consecuencia que $f(x)$ es débilmente compacto. (En realidad se ha probado que es compacto para la topología de la norma).

3.7.2.:

a) Consideremos en primer lugar el caso en que $x_n\neq x^*$ $(n=1,\dots)$ y también $x\neq x^*$.

Tomemos la sucesión (y_n) con $y_n\in f(x_n)$ $(n=1,\dots)$.

Será $y_n \equiv x_n - t_n p(x_n)$.

Al cumplirse que $x_n \longrightarrow x$, como consecuencia de H.5., $\nabla J(x_n) \longrightarrow \nabla J(x)$, por lo cual puede suponerse que

$\gamma_n = \|\nabla J(x_n)\| \to \gamma < +\infty$

Además no puede ser $\gamma=0$, pues como

$$\|\nabla J(x)\| \leq \liminf \gamma_n = \gamma,$$

74 si fuera este el caso, necesariamente $\|\nabla J(x)\|=0$, y entonces x sería crítico en contra de lo supuesto.

Veamos, por otra parte, que $\{t_n\}$ es acotada: Caso contrario, como

$$\|x_n-t_n p(x_n)\| \geq \|-t_n p(x_n)\| - \|x_n\|$$

y para un cierto $M\in R$ es $\|x_n\| \leq M$ (ya que $\{x_n\}$ tiene límite débil), quedará:

$$\|x_n-t_n p(x_n)\| \geq |t_n| - M$$

y en el supuesto considerado

$$\|x_n-t_n p(x_n)\| \to \infty$$

lo que, en virtud de H.3., implica que:

$$J(x_n-t_n p(x_n))\to\infty \Rightarrow J(x_n-c(\|\nabla J(x_n)\|)p(x_n))\to\infty$$

lo cual, nuevamente en virtud de H.3., daría que

$$\|x_n- c(\|\nabla J(x_n)\|)\, p(x_n)\| \to\infty$$

lo cual es absurdo pues, por H.5.

$$x_n- c(\|\nabla J(x_n)\|)\frac{\nabla J(x_n)}{\|\nabla J(x_n)\|} \rightharpoonup x - \frac{c(\gamma)}{\gamma}\nabla J(x\ )$$

Por lo tanto, $\{t_n\}$ es acotada, y para una subsucesión

$$t_{n_k} \to t$$

y entonces

$$x_{n_k}-t_{n_k}p(x_{n_k}) \rightharpoonup x-t\frac{\nabla J(x)}{\gamma} = x - t\frac{\|\nabla J(x)\|}{\gamma}p(x)= y$$

y, teniendo en cuenta H.7.:

$$J(x- t\frac{\|\nabla J(x)\|}{\gamma}p(x)) \leq J(x- c(\|\nabla J(x)\|)p(x))$$

Como, además $c(\|\nabla J(x_{n_k})\|) \leq t_{n_k}$, se tendrá que $c(\gamma) \leq t$; La función $c(t)/t$ es monótona creciente y al ser $\|\nabla J(x)\| \leq \gamma$

$$\frac{c(\|\nabla J(x)\|)}{\|\nabla J(x)\|} \leq \frac{c(\gamma)}{\gamma} \leq \frac{t}{\gamma}$$

luego

$$c(\|\nabla J(x)\|) \leq \frac{t\ \|\nabla J(x)\|}{\gamma}$$

lo que prueba que $y\in f(x)$, y por tanto que $f(x_n) \overset{g}{\to} f(x)$ en este caso.

b) Supongamos ahora que $x_n\neq x^*$ $(n=1,\dots)$ y que $x=x^*$.

Si $\gamma\neq 0$, procediendo como en el caso anterior obtenemos una subsucesión

$$x_{n_k}-t_{n_k}p(x_{n_k}) \longrightarrow x^*-\frac{t}{\gamma}\nabla J(x^*) = x^*\in f(x^*)$$

con lo que también $f(x_n) \ni f(x^*)$.

Si $\gamma=0$ la sucesión $\{x_n\}$ es critizadora, y por tanto minimizadora, es decir $J(x_n) \to J(x^*)$.

$$\text{Como}\quad J(y_n) \leq J(x_n-c(\|\nabla J(x_n)\|)p(x_n)) \leq J(x_n)$$

en virtud de H.3. deducimos que $\{y_n\}$ es acotada, y para una subsucesión

$$y_{n_k} \longrightarrow y$$

de donde

$$J(y) \leq \liminf J(y_{n_k}) \leq \liminf J(x_n) = J(x^*)$$

y al ser x^* el único mínimo de J en H

$$y = x^*$$

lo que completa la prueba de que $f(x_n) \ni f(x^*)$, y también la del teorema.

□

3.8.: COROLARIO

Bajo las hipótesis de 3.7., si se define $\pi_f : H\times I^+ \to F(H)$, de modo que

$$\begin{cases} \pi_f(x,0) = \{x\} \\ \pi_f(x,1) = f(x) \\ \pi_f(x,k+1) = \bigcup_{y\in\pi_f(x,k)} \pi_f(y,1) \qquad (k\geq 1), \end{cases}$$

la terna (H,I^+,π_f) constituye un semisistema dinámico discreto débil sobre H.

3.9.: OBSERVACION

La existencia de una f-función c que verifique las condiciones exigidas en 3.7. dependerá en cada caso de las características del funcional J.

Si escribimos, como es habitual, $(H(u)\phi,\psi) = J''(u,\phi,\psi)$, y, por ejemplo, existen $m>0$, $M<+\infty$, tales que para todo $u,\gamma\in H$ $(H(u)\gamma,\gamma) = m\|\gamma\|^2$, y $\|H(u)\|\leq M$, entonces se demuestra en (8),5.3., que si

$$0 < a \leq b \leq 2m/M^2$$

$x\in H$ es no crítico y

$$\alpha\in\left[a\|\nabla J(x)\|,\ b\|\nabla J(x)\|\right]$$

entonces

$$J(x - \alpha p(x)) < J(x)$$

bastando pues, en este caso tomar $c(t) \equiv a.t$.

3.10.: TEOREMA

Sean $x_0 \varepsilon H$ arbitrario no crítico y $W=\{x\varepsilon H: J(x) = J(x_0)\}$.

Si se define, para cada $x\varepsilon W$, $f(x)$ como en 3.7., entonces:

3.10.1.: $f(x)\varepsilon F(W)$.

3.10.2.: Si $x_n \longrightarrow x$ en W, $f(x_n) \overset{g}{\to} f(x)$ en $F(W)$.

Prueba:

Si $x\varepsilon W$ y $u\varepsilon f(x)$, entonces $J(u) \leq J(x) \leq J(x_0)$, por lo que $f(x) \subset W$.

El resto de la demostración es idéntico a la prueba de 3.7.

□

3.11.: COROLARIO

Si se define $\pi_f: W x I^+ \to F(W)$ de modo que

$$\begin{cases} \pi_f(x,0) = x \\ \pi_f(x,1) = f(x) \\ \pi_f(x,k+1) = \bigcup\limits_{y\varepsilon\pi_f(x,k)} \pi_f(y,1) \end{cases}$$

la terna (W, I^+, π_f) constituye un semisistema dinámico discreto débil sobre W.

3.12.: TEOREMA

Sea $c_2 \varepsilon (0,1)$ fijo;

Si existe una f-función contínua $c: R^+ \to R^+$ verificando las condiciones del teorema 3.7. y además, para todo $x\varepsilon W$, que

$c(\|\nabla J(x)\|) \leq \delta(c_2 \|\nabla J(x)\|)$,

entonces J es un funcional de Liapunov para (W, I^+, π_f).

Prueba:

El único extremo no evidente es que si

$\chi(n) \equiv u_n$

es una solución del semisistema considerado, con $u_n \longrightarrow u$, entonces $J(u_n) \to J(u)$.

Para mayor simplicidad escribiremos:

$p(u_n) = p_n$, $\|\nabla J(u_n)\| = \gamma_n$.

Al ser, para cada n, $u_{n+1} \varepsilon \pi_f(u_n, 1)$ se tiene que

$u_{n+1} = u_n - t_n p_n$.

Si $t_n \leq \delta(c_2\gamma_n)$, puede verse en 14.4.2.4., que

$$J(u_n) - J(u_{n+1}) \geq c(\gamma_n)(\gamma_n - c_2\gamma_n) \qquad (1)$$

Si, para algún n, $t_n > \delta(c_2\gamma_n)$, o bien

$$J(u_n - t_n p_n) \leq J(u_n - \delta(c_2\gamma_n)p_n) \qquad (2)$$

o bien, dada la convexidad de J, existe $t'_n \in [c(\gamma_n), \delta(c_2\gamma_n)]$ con

$$J(u_n - t_n p_n) = J(u_n - t'_n p_n) \qquad (3)$$

por lo que , si $t_n > \delta(c_2\gamma_n)$, es decir en los casos (2) y (3), puede afirmarse que, para algún $\tau_n \in [c(\gamma_n), \delta(c_2\gamma_n)]$

$$J(u_n) - J(u_{n+1}) \geq J(u_n) - J(u_n - \tau_n p_n)$$

por lo que, de cualquier forma

$$J(u_n) - J(u_{n+1}) \geq c(\gamma_n)(\gamma_n - c_2\gamma_n).$$

Al ser J acotado inferiormente, necesariamente

$$\gamma_n \to 0$$

ya que c es una f-función. Luego $\{u_n\}$ es critizadora, y por lo tanto minimizadora:

$$J(u_n) \to J(x^*)$$

y como también

$$J(u) \leq \liminf J(u_n) = J(x^*)$$

se deduce, por ser x^* mínimo de J, que

$$J(u) = J(x^*)$$

y por consiguiente

$$J(u_n) \to J(u)$$

completándose la prueba.

□

Veremos a continuación que las sucesiones obtenidas a partir de x_o mediante aplicación reiterada del método de Curry generalizado, son soluciones del semisistema (W, I^+, π_f).

3.13.: TEOREMA

Si existe una f-función c verificando las condiciones de los teoremas 3.7. y 3.12., y $\{x_n\}$ es una sucesión obtenida a partir de $x_o \in H$ por aplicación del algoritmo de Curry generalizado, entonces

$$x_n \longrightarrow x.$$

Prueba:

Escribiremos, para mayor simplicidad

$\|\nabla J(x_n)\| = \gamma_n = (\nabla J(x_n), p(x_n))$, $-p(x_n) = p_n$.

Veremos en primer lugar que la aplicación $\chi: I^+ \to W$ definida de forma que $\chi(n) = x_n$, es una solución del semisistema (W, I^+, π_f).

Prefijada una sucesión $\{\alpha_n\}$ con $0 \leq \alpha_n \leq \alpha < 1$, para cada $n \in I$, por la naturaleza del algoritmo se tendrá:

$$\frac{d}{dt} (J(x_n + tp_n) + \alpha_n t\gamma_n)\Big|_{t=t_n} = 0 \qquad (1)$$

y, si $0 \leq \tau \leq t_n$

$$\frac{d}{dt} (J(x_n + tp_n) - \alpha_n t\gamma_n)\Big|_{t=\tau} = 0 \qquad (2)$$

por lo que, para $0 \leq \tau \leq t_n$

$$J(x_n + t_n p_n) - \alpha_n t_n \gamma_n \leq J(x + \tau p_n) - \alpha_n \tau \gamma_n$$

Pero (1) puede reescribirse

$$(\nabla J(x_n + t_n p_n) , p_n) - \alpha_n (\nabla J(x_n), p_n) = 0 \qquad (3)$$

y, fijado $c_2 \in (0, 1-\alpha)$, si se tuviera que $t_n < \delta(c_2\gamma_n)$, por definición de la función δ, se tendría que

$$|(\nabla J(x_n + t_n p_n) - \nabla J(x_n) , p_n)| \leq c_2 \gamma_n$$

o, lo que es lo mismo

$$|((\nabla J(x_n + t_n p_n) - \alpha_n \nabla J(x_n)) - (\nabla J(x_n) - \alpha_n \nabla J(x_n)), p_n)| \leq$$
$$\leq c_2 \gamma_n.$$

lo cual implicaría que

$$|(\nabla J(x_n + t_n p_n), p_n) - \alpha_n (\nabla J(x_n), p_n) + (1-\alpha_n)\gamma_n| \leq c_2 \gamma_n$$

y, teniendo en cuenta (3) quedará

$$|(1-\alpha_n) \gamma_n| \leq c_2 \gamma_n \Rightarrow 1-\alpha_n \leq c_2 < 1-\alpha \Rightarrow \alpha_n > \alpha$$

una contradicción.

Luego $t_n \geq \delta(c_2\gamma_n) \geq c(\gamma_n)$

Por otra parte, teniendo nuevamente en cuenta la definición de t_n, para todo $\tau \in [0, t_n]$

$$J(x_n) - J(x_n + t_n p_n) \geq J(x_n) - (J(x_n + \tau p_n) + \alpha_n \tau \gamma_n -$$
$$- \alpha_n t_n \gamma_n) = J(x_n) - J(x_n + \tau p_n) + \alpha_n (t_n - \tau)\gamma n \geq J(x_n) - J(x_n + \tau p_n).$$

y tomando en particular

$$\tau = c(\gamma_n) \leq \delta(c_2\gamma_n) \leq t_n$$

queda que

$$J(x_n) - J(x_{n+1}) \geq J(x_n) - J(x_n - c(\gamma_n)p(x_n))$$

es decir que $x_{n+1} \in \pi_f(x_n, 1) = f(x_n)$.

Por otra parte, si ξ es cualquier solución del semisistema a través de $x \neq x^*$, veamos que $J(\xi(1)) < J(x)$:

En efecto; Será $\xi(1) = x - tp(x)$ con $c(\|\nabla J(x)\|) \leq t$, y $J(x - c(\|\nabla J(x)\|)p(x)) \geq J(\xi(1))$.

Si $t \in [c(\|\nabla J(x)\|), \delta(c_2 \|\nabla J(x)\|)]$, en (14)4.2.4. se muestra que

$$J(x) - J(x - tp(x)) \geq c(\|\nabla J(x)\|)(\|\nabla J(x)\| - c_2 \|\nabla J(x)\|) > 0$$

y, al ser $x \neq x^*$

$$J(x) > J(\xi(1)).$$

Si $t > \delta(c_2 \|\nabla J(x)\|)$, como también

$$J(x - tp(x)) \leq J(x - c(\|\nabla J(x)\|)p(x))$$

de cualquer modo se tendrá que

$$J(\xi(1)) < J(x).$$

La conclusión del teorema se sigue ahora de 2.98.

□

Pueden construirse semisistemas dinámicos discretos débiles sobre W, mas sencillos que los hasta ahora considerados, si ∇J verifica en dicho conjunto una condición de Lipschitz:

3.14.: TEOREMA

Si, para cualesquiera $x, y \in W$

$$\|\nabla J(x) - \nabla J(y)\| \leq L \|x - y\|$$

y se define, prefijados $\bar{c}, c' \in (0,1)$, la aplicación $f: W \to 2^W$ de modo que

$$f(x) = \{x - t\nabla J(x) : c \leq t \leq (1-c')/L\}$$

entonces se tiene:

3.14.1.: $f(x) \in F(W)$

3.14.2.: Si $x_n \longrightarrow x$ en W, $f(x_n) \overset{q}{\to} f(x)$ en $F(W)$.

Prueba:

Veremos en primer lugar que f verifica la tesis 3.14.1.

Desde luego, si $\nabla J(x)$ verifica la condición del enunciado, entonces es inmediato ver que $\delta(t) \geq t/L$.

Por lo tanto, si $x \in W$ y $c \leq t \leq (1-c')/L$, entonces:

$$c . \|\nabla J(x)\| \leq t \|\nabla J(x)\| \leq ((1-c')\|\nabla J(x)\|/L) \leq$$
$$\leq \delta((1-c')\|\nabla J(x)\|)$$

y, como se muestra en (14),4.2.4. también en este caso

$$J(x-t\nabla J(x))=J(x-t\|\nabla J(x)\|p(x)) < J(x) \quad (\text{si } x\neq x^*).$$

luego

$$x-t\nabla J(x)\in W \quad (\forall t\in[c,(1-c')/L]).$$

es decir, $f(x)\subset W$. El resto de la prueba es muy similar a la de 3.14.2. y se omite.

Para probar la segunda conclusión supongamos que $x_n \longrightarrow x$ en W y tomemos $y_n\in f(x_n)$ $(n=1,\ldots)$.

Será $y_n = x_n - t_n\nabla J(x_n)$, con $t_n\in[c,(1-c')/L]$.

Para una subsucesión

$$t_{n_k} \to t\in[c,\ (1-c')/L]$$

con lo que

$$y_{n_k} \longrightarrow x-\ t\ \nabla J(x)\ \in f(x).$$

de donde se sigue que $f(x_n) \ ? \ f(x)$. □

Nótese que no se ha hecho uso de H.7.

3.15.: CORORLARIO

Si se define $\pi: W\times I \to F(W)$ como en 3.11., entonces la terna (W,I^+,π) constituye un semisistema dinámico discreto débil sobre W, para el que J es un funcional de Liapunov.

La prueba es idéntica a las de 3.11 y 3.12.

3.16.: TEOREMA

Bajo la hipótesis del teorema 3.14., si (x_n) es cualquier sucesión construida de modo que

$$x_{n+1}= x_n - t_n\ \nabla J(x_n) \qquad t_n\in[c,(1-c')/L]$$

entonces

$$x_n \longrightarrow x^*.$$

Prueba:

Es simple consecuencia del teorema anterior y del 2.97.

BIBLIOGRAFIA

(1) BALL, J.M.
Stability Theory for an Extensible Beam.
Journal of Differential Equations 14,399-418, (1.973).

(2) BERGE, C.
Espaces topologiques et fonctions multivoques.
Dunod, Paris, 1.959.

(3) BHATIA, N.P.; HAJEK, O.
Local Semi-Dynamical Systems
Lecture Notes in Mathematics, Vol 90, Springer 1.970.

(4) BHATIA, N.P.; SZEGO, G.P.
Dynamical Systems: Stability Theory and Applications.
Lecture Notes in Math. Vol 35. Springer, 1.967.

(5) BHATIA, N.P.; SZEGO, G.P.
StabilIty Theory of Dinamical Systems.
Grund. Math. Wiss. Vol. 161. Springer, 1.970.

(6) BOURBAKI, N.
Topologie Generale
Hermann, París, 1.971.

(7) BOURBAKI, N.
Espaces Vectoriels Topologiques, Ch.III,IV,V.
Hermann, París, 1.957.

(8) CASTILLO, F.
Discrete Semy-Dinamical Systems and Applications
In "Towards Global Optimization" Szego-Dixon Eds.
North Holland, 1.975.

(9) CASTILLO,F.
Semisistemas Dinámicos Discretos.
Public. Fac. Ciencias Univ. Complutense Madrid, A.171. Madrid, 1972.

(10) CEA, J.
Optimisation: Theorie et Algoritmes.
Dunod, París, 1971.

(11) CEA, J.
Les Methodes de "Descente" dans la Theorie de L'Optimisation.
R.I.R.O. 2° année n°13, p.79-102, 1.968.

(12) CEA, J.; GLOWINSKI, R.
Sur les Methodes D'Optimisation par Relaxation.
R.A.I.R.O., 7°année, R3, p-5-32, (1.973).

(13) DANIELL, J.W.
Applications and Methods for the Minimization of Functionals.
Nonlinear Functional Analysis and Applications.
Academic Press, 1.971.

(14) DANIELL, J.W.
The Approximate Minimization of Functionals.
Prentice Hall Series in Aut. Comput.Englewod Cliffs N.Y. 1.972.

(15) DANIELL, J.W.
Convergent Step Sizes for Curvilinear Path Methods of Minimization.
C.N.A. Univ. of Texas at Austin (1.971).

(16) DANIELL, J.W.
Convergent Step Sizes for Gradient-Like Feasible Direction Algorithms for Constrained Minimization.
Nonlinear Programing. Academic Press, p. 245-274, 1.970.

(17) DUMFORD, N.: SCHWARTZ, J.
Linear Operators, Part. I.
Interscience, Inc., New York. 1958.

(18) HALE, J.K.
Sufficient Conditions for the Stability and Instability of Autonomous Functional-Differential Equations.
J.Diff. Equations, I (1.965) p. 452-482.

(19) KEELEY, A.J.
General Topology.
Van Nostrand, 1.955.

(20) KOLMOGOROV, A.N.; FROMIN S.V.
Introductory Real Analysis

(21) KOTHE, G.
Topological Vector Spaces, I.
Springer-Verlag, 1.969.

(22) KURATOWSKI
Topologie II
Varsovia, 1.950

(23) ORTEGA, J.M.; RHEINBOLDT, W.C.
Iterative solution of non linear equations in several variables.
Academic Press, 1.970.

(24) RITTER, K.
A Quasi-Newton Method for minimization problems.
Math. Research Ct. Univ. of Wisconsin, 1.975.

(25) ROBERTSON, A.P.; ROBERTSON, W.J.
Topological Vector Spaces.
Cambridge Univ. Press, 1.973.

(26) RODRIGUEZ, G.
Semisistemas dinámicos discretos y algoritmos de minimización.
Collectanea Math. vol XXV, fascíc. 10,(1.974).

(27) RODRIGUEZ, G.
Semiflujos discretos sin unicidad y su aplicación a la minimización de funcionales.
Revista Hispano Americana

(28) SELL, G.R.
Topological Dynamics and Ordinary Differential Equations.
Van Nostrand Reinhold Comp. Londres, 1.971.

(29) SLEMROD, M.
Assimptotic Behaviour of a Class of Abstract Dynamical Systems.
J. of Diff. Eq., 7, 584-600, (1.970).

(30) SZEGO, G.P.; TRECCANI, G.
An Abstract Formulation of Minimization Algorithms, en
Differential Games and Related Topics, Kuhn,H. W. y Szego, G.P. Editores. North Holland Publ. Comp. 1.971

(31) SZEGO, G.P.: TRECCANI. G.
Mathematical Theory of Minimization Algorithms.
En G.P. Szego Ed. Minimization Algorithms,
Academic Press, 1.972.

(32) SZEGO, G.P.; TRECCANI. G.
Semigruppi di transformazioni multivoche.
Lecture Notes in Math. Vol 101.Springer, 1.969.

(33) SZEGO, G.P.; TRECCANI,G.
Teoría matematica degli algoritmi di minimizza
zione. En
Szego, Ed. Minimization Algorithms, Academic
Press, 1.972.

(34) TRECCANI , G.
A new axiomatization of minimization algorithms.
En Szego Ed. Minimization Algorithms, Academic
Press, 1.972.

(35) WHITLEY, R.
An elementary proof of the Eberlein-Smulian
Theorem.
Math.Annalen, 172, 116-118 (1.967)