Publ. Mat. U.A.B.
nº 8 Juny 1978

ALGUNAS IDEAS SOBRE LA DESINGULARIZACION DE UN ESPACIO ANALITICO COMPLEJO.

J.L. Vicente.

Antes que nada, debo advertir que ésta es una charla muy informal. La complicación del tema va a impedir la precisión de lenguaje, que necesitaría desarrollos mucho más largos. Se trata, pues, de una conferencia en la que procuraré condensar todas las ideas importantes, aunque no siempre estén expresadas correctamente.

El objetivo del proceso de desingularización de un espacio analítico complejo es establecer el siguiente

<u>Teorema de resolución de singularidades</u>. Sea X un espacio analítico complejo numerable en el infinito y sea S un subespacio cerrado de X que contenga a todos los puntos singulares de X. Existe entonces un espacio analítico complejo X' y un morfismo $\pi : X' \to X$ tales que:

(1).- X' es liso y π es propio.

(2).- π induce un isomorfismo

$$\pi|_{X'-\pi^{-1}(S)} : X'-\pi^{-1}(S) \simeq X - S$$

(3).- $\pi^{-1}(S)$ es una hipersuperficie de X' y existe una familia finita $\{H_i\}_{1\le i\le t}$ de hipersuperficies lisas de X', con cruzamientos normales, tal que

$$|\pi^{-1}(S)| = \bigcup_{i=1}^{t} |H_\alpha|$$

donde las barras verticales designan el espacio topológico subyacente.

(4).- Si U y V son dos abiertos de X y $\psi : X|_U \to X|_V$ es un isomorfismo tal que

$$\psi\,(S|_U) = S|_V .$$

existe un isomorfismo

$$\psi' : X'|_{\pi^{-1}(U)} \to X'|_{\pi^{-1}(V)}$$

tal que

$$\psi \cdot \pi|_U = \pi|_V \cdot \psi' .$$

Vamos a analizar la demostración de ese teorema atendiendo a los puntos siguientes:

a) El instrumento.

b) El control.

c) El proceso.

a) <u>El instrumento</u>.- El proceso de resolver las singularidades de X se basa en aplicar a X, sucesivamente, unas ciertas transformaciones elementales propias, que reducen progresivamente la singularidad. El punto está en probar que, luego de un número finito de ellas, la singularidad queda reducida del todo, y que su composición verifica las condiciones del teorema. Estas transformaciones se llaman explosiones y vamos a pasar a describirlas brevemente.

Sea $Z = \mathbb{C}^{n+1}$ el espacio vectorial complejo de dimensión $n+1$, $\mathbb{P}_n$ el correspondiente espacio proyectivo de dimensión n y

$$\pi_o : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}_n$$

la aplicación natural. Sea Z' el cierre en $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}_n$ del grafo de π_o y sea $\pi : Z' \to Z$ la aplicación inducida por la primera proyección. Este π induce un isomorfismo de $Z' - \pi^{-1}(\underline{0})$ sobre $Z - \{\underline{0}\}$ y $\pi^{-1}(\underline{0}) = \mathbb{P}_n$.

De manera natural se puede dotar a Z' de una estructura de variedad analítica compleja (i.e. espacio analítico complejo liso) definida a través del recubrimiento

$$Z' = \bigcup_{i=0}^{n} Z_i' \quad , \qquad\qquad Z_i' \simeq \mathbb{C}^{n+1} \, ,$$

donde para cada $i = 0, 1, \dots, n$ la inclusión $Z_i' \to Z'$ viene dada por

$$(\omega_o, \omega_1, \dots, \omega_n) \to [(\omega_o\omega_i, \dots, \omega_{i-1}\omega_i, \omega_i, \omega_{i+1}\omega_i, \dots, \omega_n\omega_i),$$

$$\pi_o(\omega_o, \dots, \omega_{i-1}, 1, \omega_{i+1}, \dots \omega_n)].$$

A la aplicación π se la llama explosión del origen en $\mathbb{C}^{n+1}$ o transformación cuadrática de $\mathbb{C}^{n+1}$ con centro el origen.

Sea ahora Z una variedad analítica compleja de dimensión $n+1$, $\underline{x} \in Z$; existe un entorno U de $\underline{x}$ en Z isomorfo a un entorno de $\underline{0}$ en $\mathbb{C}^{n+1}$. La transformación cuadrática de $\mathbb{C}^{n+1}$ con centro el origen induce una transformación $p: U' \to U$, que es un isomorfismo sobre $U - \{\underline{x}\}$. Así p se puede extender, por un isomorfismo sobre $Z - \{\underline{x}\}$ a un morfismo propio

$$\pi : Z' \to Z \, .$$

Este π está unívocamente determinado por Z y $\underline{x}$ (salvo isomorfismos) y se llama transformación cuadrática de Z con centro en $\underline{x}$, o explosión de $\underline{x}$ en Z.

Supongamos ahora que X es un subespacio analítico cerrado de Z que contiene al punto $\underline{x}$; $\pi: Z' \to Z$ la explosión de $\underline{x}$ en Z. Llamaremos transformado estricto X' de X por π al mínimo subespacio analítico cerrado de $\pi^{-1}(X)$ tal que π induce un isomorfismo

$$X' - \pi^{-1}(\underline{x}) \cap X' \simeq X - \underline{x}.$$

Si X es una hipersuperficie localmente alrededor de $\underline{x}$, entonces X' puede ser calculado localmente alrededor de $\underline{x}$, de forma sencilla. Supongamos que $\{\omega_o, \omega_1, \ldots, \omega_n\}$ es un sistema de coordenadas locales en Z alrededor de $\underline{x}$ y sea $f = 0$ la ecuación de X en el π-1($\underline{x}$). Entonces, alrededor de $\pi^{-1}(\underline{x})$, X' es unión de piezas

$$X' = \bigcup_{i=0}^{n} X'_i$$

donde cada X'_i está definida por la ecuación

$$f(\underline{\omega}) / \omega_i^{\nu(f)} = f\left(\frac{\omega_o}{\omega_i}, \ldots, \frac{\omega_{i-1}}{\omega_i}, \omega_i, \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i}, \ldots, \frac{\omega_n}{\omega_i}\right)$$

donde $\nu(f)$ designa al orden de f.

Si X no es una hipersuperficie la situación es muy distinta y el cálculo no es tan fácil.

Veamos ahora la noción de transformación monoidal . Sea $V = \mathbb{C}^{n+1}$ y $\pi_o: V' \to V$ la explosión del origen en V. Sean $Z = V \times \mathbb{C}^m$, $Z' = V' \times \mathbb{C}^m$ y $\pi: Z' \to Z$, $\pi = \pi_o \times id_{\mathbb{C}^m}$. Esta π es llamada explosión de $\mathbb{C}^m$ en Z o transformación monoidal de Z con centro $\mathbb{C}^m$.

Sea ahora Z una variedad analítica compleja, Y un subespacio complejo de Z liso y cerrado. Dado un punto $\underline{x} \in Y$, localizando Z e Y alrededor de $\underline{x}$ se puede suponer una situa ción como ésta

$$\begin{array}{ccc} Z & \hookrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^m \\ \cup & & \cup \\ Y & \hookrightarrow & \underline{0} \times \mathbb{C}^m \end{array}$$

donde las aplicaciones horizontales son abiertas.

La transformación monoidal de $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^m$ induce una transformación

$$\pi_{\underline{x}} : Z'_{\underline{x}} \to Z \quad \text{(alrededor de } \underline{x})$$

que es biyectiva fuera de Y. Esta transformación se llama una transformación monoidal de Z con centro Y alrededor de $\underline{x}$. Por globalización, se puede definir una transformación

$$\pi : Z' \to Z$$

por $\pi = \pi_{\underline{x}}$, alrededor de todo $\underline{x} \in Y$ y biyectiva alrededor de todo $x' \in Z - Y$. A esta transformación π se la llama transformación monoidal de Z con centro Y.

Ahora bien, si X es un subespacio analítico cerrado de Z que contiene a Y, el mínimo subespacio analítico cerrado X' de $\pi^{-1}(X)$ tal que π induce un isomorfismo

$$X' - (\pi^{-1}(Y) \cap X') \xrightarrow{\sim} X - Y$$

se llama transformado estricto de X mediante π. Si X es, localmente alrededor de un punto $\underline{x} \in Y$, una hipersuperficie, tomando un sistema $\{y_0, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m\}$ tal que Y esté definido por las ecuaciones

$$y_0 = y_1 = \ldots = y_n = 0$$

92 y considerando la ecuación $f(\underline{y},\underline{z}) = 0$ de X alrededor de $\underline{x}$, se tiene que, alrededor de $\pi^{-1}(\underline{x})$, X' es unión de piezas

$$X' = \bigcup_{i=0}^{n} X'_i$$

donde cada X'_n está definida por

$$f(\underline{y},\underline{z})/y_2^{\nu(f)} = f\left(\frac{y_o}{y_i}, \ldots, y_i, \ldots, \frac{y_n}{y_i}, z_1, \ldots, z_m\right)$$

b) El control .- El control del estado de una singularidad se ejerce con la función de Hilbert-Samuel.

Sea X un espacio analítico complejo, $x \in X$. Se considera la función

$$H_{X,x} : Z_o \rightarrow Z_+$$

definida por

$$H_{X,x}(d) = \dim_{\mathbb{C}} [\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^{d+1}] = \sum_{i=0}^{d} \dim_{\mathbb{C}} [\mathfrak{m}_{X,x}^{i}/\mathfrak{m}_{X,x}^{i+1}]$$

donde $\mathcal{O}_{X,x}$ es la fibra del haz estructural de X en x y $\mathfrak{m}_{X,x}$ es el ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$.

Así pues, para cada punto $x \in X$ se tiene una función $H_{X,x}$, que se llama función de Hilbert-Samuel de X en x. El conjunto de todas ellas se puede ordenar

$$H_{X,x} \leq H_{X,x'} \Leftrightarrow H_{X,x}(d) \leq H_{X,x'}(d), \ \forall d \in Z_o.$$

A partir de la función de Hilbert-Samuel podemos construir lo que llamaremos una estratificación analítica compleja de X en la siguiente manera: Por definición, un estrato de

Samuel de X es el conjunto de todos los puntos de X que poseen una misma función de Hilbert-Samuel. Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es el conjunto de todos los estratos de Samuel de X, se verifican las siguientes propiedades:

1) Cada X_i es un subespacio analítico liso y reducido de X.

2) X es unión disjunta de todos los X_i y la familia $\{X_i\}_{i\in I}$ es localmente finita.

3) $\forall\ i \in I$, $\overline{X}_i$ y $\overline{X}_i - X_i$ son subespacios analíticos cerrados de X.

En el caso particular de que X sea compacto el número de estratos de Samuel de X y el número de funciones de Hilbert-Samuel diferentes es finito. Para explicar el procedimiento de desingularización, nos restringiremos al caso en que X es compacto, pues en el caso general no se aportan nuevas ideas importantes, sino sólo ciertos detalles técnicos.

Desde el punto de vista de la desingularización de X aparece ahora claro que las transformaciones monoidales de X que van a interesar son aquellas que no hagan crecer los datos de control. Esto se consigue efectuando transformaciones monoidales con centros permitidos, en el sentido que se va a hacer preciso ahora mismo.

Sean $Y \subset X \subset Z$ espacios analíticos complejos, donde Y,Z son lisos,Y es cerrado en X y X cerrado en Z. A partir de la $\mathcal{O}_Y$-álgebra $gr_Y(Z)$ se construye el fibrado normal $N_{Z,Y}$ de Z a lo largo de Y. El núcleo del homomorfismo natural de $\mathcal{O}_Y$-álgebra $\ell : gr_Y(Z) \to gr_Y(X)$ define un subespacio analítico cerrado de $N_{Z,Y}$, al que se llama cono normal a X a lo largo de Y. Se dirá que X es normalmente plano a lo largo de Y (o que Y es permitido en X) si $C_{X,Y}$ es plano sobre Y.

Esta noción puede ser descrita localmente en la siguien te manera. Sea $x \in Y$, J el ideal de $\mathcal{O}_{Z,x}$ que define X alrededor de x, P_x el que define Y alrededor de x, M_x el ideal maximal de $\mathcal{O}_{Z,x}$. Naturalmente $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{Z,x}/J_x$. Consideremos el ideal $\mathfrak{p}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ imagen directa de P_x por el homomorfismo natural. Entonces, las condiciones siguientes con equivalentes (para todo punto $x \in Y$):

(1) X es normalmente plano a lo largo de Y.

(2) $gr_{\mathfrak{p}_x}(\mathcal{O}_{X,x})$ es libre sobre $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{p}_x$.

(3) J_x posee una base $(f_1,\dots,f_r)$ que verifica las condiciones siguientes:

(3-a) Las formas iniciales respecto de M_x, de $f_1,\dots,f_r$ forman una base minimal del ideal inicial de J_x en $gr_{M_x}(\mathcal{O}_{Z,x})$ (i.e. del ideal que define alrededor de x el cono tangente a X en x).

(3-b) $\nu_{M_x}(f_i) = \nu_{P_x}(f_i)$, $\forall i = 1,\dots, r$.

Hay una estrecha relación entre platitud normal y función de Hilbert- Samuel, que se manifiesta en el siguiente resultado:

<u>Proposición 1</u>.- En la situación anterior, X es normalmente plano a lo largo de Y si y sólo si todas las componentes conexas de Y están contenidas en estratos de Samuel de X.

El resultado crucial aquí es el siguiente:

<u>Teorema 1 (B.M. Bennett)</u>.- Supongamos que X, es sumamente plano a lo largo de Y. Sea $\pi : Z' \to Z$ la transformación monoidal de Z con centro Y, X' el transformado estricto de X por π, $p : X' \to X$ la aplicación inducida. Para todo punto $x \in Y$ y todo $x' \in X'$ tal que $p(x') = x$, se verifica que

$$H_{X',x'} \leq H_{X,x} .$$

Esto nos da lo que pretendíamos: centros de explosión que no empeoran las funciones de Hilbert-Samuel.

c) El proceso.- No podemos meternos en muchas profundidades al analizar el proceso de desingularización de un espacio analítico complejo, pues es materia de muchas páginas de teoremas (c.f. [1],[2],[3]), pero trataremos de dar una idea global, aunque imperfecta.

Supongamos que X es compacto; hay entonces un número finito de estratos de Samuel y un número finito de funciones de Hilbert-Samuel. Designemos por $\{H_i\}$, $0 \leq i \leq m$, a la totalidad de ellas y por S_i al estrato correspondiente a H_i.

Las funciones de Hilbert-Samuel son semicontinuas superiormente con respecto a $x \in X$, es decir, se verifica la

Proposición 2.- Si $\overline{S}_i \cap S_j \neq \emptyset$ entonces $H_i(d) \leq H_j(d)$, $\forall\, d \in Z_o$.

Supongamos que H_o es la mayor función de Hilbert-Samuel, para el orden lexicográfico, de entre todas las H_i. Por la proposición 2, S_o es cerrado en X. (La notación $H \leq H'$ introducida antes será conservada). Para el orden lexicográfico usaremos palabras del lenguaje ordinario.

Para lograr la desingularización de X, al menos en el caso particular en que sea reducido, nos bastará probar el siguiente

Teorema I.- Existe una sucesión finita de explosiones

$$\{\pi^{(i)} : X^{(i)} \to X^{(i-1)}\}_{0 < i \leq p} \quad \text{con centros } E^{(i-1)},\ 0 < i \leq p$$

tal que verifica:

a) $X^{(0)} = X$, $S^{(0)} = S_o$ y $E^{(0)}$ es un subespacio complejo cerrado y liso de $S^{(0)}$.

b) Si $S^{(i)}$ es el estrato de Samuel de $X^{(i)}$ correspondiente a la misma H_o, entonces $E^{(i)}$ es un subespacio complejo, liso y cerrado de $S^{(i)}$, $0 < i \leq p$.

c) $S^{(p)}$ es vacio.

A este enunciado le da sentido y una cierta justificación el siguiente resultado que no es más que una refundición de la proposición 1 y el teorema 1.

Proposición 3.- Para cualquier explosión $\pi^{(i)}$ como las del teorema se verifica que

$$H_{X^{(i)},x^{(i)}}(d) \leq H_{X^{(i-1)},x^{(i-1)}}(d), \ \forall\, d \in Z_o,$$

para todo $x^{(i)} \in X^{(i)}$ y $x^{(i-1)} = \pi^{(i)}(x^{(i)})$.

Hay que hacer notar que, según esta proposición, toda función de Hilbert-Samuel de $X^{(p)}$ es estrictamente menor, en orden lexicográfico, que H_o y que ésta es la"peor" función de todos los espacios $X^{(i)}$, $0 \leq i < p$.

Vamos a ver cómo el teorema I es la clave de la desingularización de X. Supongamos que dicho teorema se verifica; siempre se puede hallar una sucesión $\{\pi^{(i)}\}$ de explosiones que verifiquen las condiciones dadas en él. Sea $f_1: X_1 \to X$ la composición de todas las $\pi^{(i)}$, donde $X_1 = X^{(p)}$ en la notación del teorema I. Aplicamos lo mismo a X_1 y así sucesivamente se obtiene una sucesión

$$\{f_j: X_j \to X_{j-1}\}_{j \geq 1}$$

donde $X_o = X$. El punto está entonces en probar el

Teorema 2.- Existe un entero $r > 0$ tal que $X_r = \phi$.

Una vez probado el teorema 2, ya tenemos la desingularización de X, al menos, repito, en el caso en que X sea reducido. En efecto, omitimos aquellas explosiones contenidas en $\{f_j\}_{1 \leq j < r}$ cuyos centros contengan puntos lisos. La composición de las restantes explosiones es una desingularización de X, lo que tiene sentido pues el centro de cada explosión omitida está sucesivamente fuera del lugar singular y no tiene nada que ver con las siguientes explosiones que no se omiten.

Veamos de dar demostración al teorema 2. Para ello admitamos que se tiene

Proposición 4.- (Teorema de finitud de Hilbert).- Sea
$\{g_i : Y_i \to Y_{i-1}\}_{i \in Z_+}$

una sucesión infinita de explosiones tal que el centro F_{i-1} de g_i es un subespacio complejo de Y_{i-1}, liso y cerrado, contenido en un único estrato de Samuel. Para cualquier sucesión de puntos $\{ y_i \in Y_i\}_{i \geq 0}$ tal que $g_i(y_i) = y_{i-1}$, $\forall$ i, existe un índice i_o tal que

$$H_{Y_{i+1}, y_{i+1}} = H_{Y_i, y_i},$$

para todo $i \geq i_o$.

Este teorema, dicho en otras palabras, significa que una singularidad no puede mejorarse indefinidamente por una sucesión cualquiera de explosiones con centros permitidos.

¿ Por qué la proposición 4, que es estrictamente de carácter local, implica algo global como es el teorema 2?. La razón es fácil de ver.

Supongamos que el teorema 2 no es cierto y sea

$$\hat{X} = \varprojlim X_j$$

(sólo en el sentido de espacios topológicos y aplicaciones continuas). Desde luego sabemos que $\hat{X}$ es compacto. Separemos todas las f_j como producto de explosiones $\{g_i\}$ como en la proposición 4. Cada punto $\hat{x} \in \hat{X}$ corresponde a una sucesión $\{y_i\}$ como la de la proposición 4. Sea $\{x_j \in X_j\}$ la sub-sucesión correspondiente. Por dicha proposición, existe $j_o > 0$ tal que

$$H_{X_{j+1}, x_{j+1}} = H_{X_j, x_j} \qquad \forall\ j \geq j_o .$$

Esto implica que las imágenes en X_{j_o} de los peores estratos de X_j, $j \geq j_o$ están todas fuera del estrato de X_{j_o} (pues si no, por el teorema I, la función de Samuel podría ser mejorada).

Vamos a ver ahora que existe un entorno abierto U de x_{j_o} en X_{j_o} cuya imagen recíproca en cualquier X_j, $j \geq j_o$, no corta al peor estrato de X_j. Consideremos la sucesión $\{f_j\}_{j \geq j_o}$ descompuesta en las explosiones que la constituyen. Puesto que el peor estrato de X_{j_o} no pasa ciertamente por x_{j_o}, se puede encontrar un entorno abierto U_1 de x_{j_o} que no corta a dicho estrato (recordemos que los estratos "peores" son cerrados). Así en la primera explosión este U_1 se trasplanta de manera isomorfa al espacio inmediato; llamaremos también U_1 a este nuevo abierto si el peor estrato de este nuevo espacio no corta a U_1, se procede de la misma forma y así sucesivamente.

El punto está en que, en un paso determinado, el peor estrato de Samuel puede cortar a U_j. Pero esto ocurre si y sólo si la función de Hilbert-Samuel correspondiente coincide con una de las que ya había abajo, es decir en X_{j_o}, pues los levantamientos de U_1 son isomorfos. En este caso, se puede encontrar un nuevo $U_2 \subset U_1$, que sea un entorno abierto de la imagen inversa de x_{j_o} y tal que no corta al peor estrato.

Ahora bien, puesto que el número de funciones de Hilbert-Samuel en X_{j_o} es finito, estamos obligados a hacer esta "reducción de entorno", un número finito de veces únicamente. Si se designa por U a la imagen en X_{j_o} del más pequeño de ellos, nuestro aserto está probado.

Finalmente, si $\hat{U}$ es la imagen inversa de un tal U en $\hat{X}$, la colección de todas esas $\hat{U}$ recubre $\hat{X}$. Por la compacidad de $\hat{X}$, existe un subrecubrimiento finito. De aquí se sigue que, para todo j lo suficientemente grande X_j no tiene un "peor estrato". Así debe existir un r tal que X_r es vacío, lo que supone una contradicción.

Así, siempre bajo la hipótesis de que el teorema I se verifica, para probar el teorema 2 nos falta por demostrar la proposición 4. A esta proposición le hemos dado el sobrenombre de "Teorema de finitud de Hilbert" porque su demostración es una nueva aplicación del archiconocido teorema de la base de Hilbert.

Como la proposición 4 es de carácter local, se puede tomar una cadena de espacios ambiente (lisos, claro), $Z_i \supset Y_i$ de tal manera que cada uno sea la explosión del anterior, con el centro prefijado. Sea n la dimensión de Z_o en y_o y sea

$$R_i = gr_{Y_i}(Z_i).$$

En esta situación, es posible elegir un isomorfismo (no canónico) de R_i sobre un anillo de polinomios fijo $\mathbb{C}[Z_1,\ldots,Z_n]$ de tal manera que, si $I_{i,m}$ designa la parte homogénea de grado m del ideal del cono C_{Y_i,y_i} en $\mathbb{C}[\underline{Z}]$, entonces $I_{i+1,m} = I_{i,m}$ para todo i suficientemente grande. Sea $I_m = I_{i,m}$ para $i \gg 0$. Se tiene así un ideal I de $\mathbb{C}[\underline{Z}]$ tal que I_m es su parte homogénea de grado m, para todo $m \geq 0$. Por el teorema de la base de Hilbert, I está finitamente generado; digamos

$$I = \{I_m \mid m \leq m_o\}\ \mathbb{C}[\underline{Z}].$$

Sea $i_o > 0$ tal que $I_m = I_{i,m}$, $\forall\ i \geq i_o$ y todo $m \leq m_o$. Así, en virtud de la proposición 3 se tiene que

$$C_{Y_{i+1},y_{i+1}} \approx C_{Y_i,y_i} \quad \text{(no canónicamente)},$$

lo que implica que la función de Hilbert-Samuel se estabiliza, como se quería probar

Bien, entonces, estamos en la situación de que, para desingularizar necesitamos probar el teorema I. Aquí es donde empieza realmente el trabajo. Lo único que hemos hecho hasta ahora es reducir el teorema general de desingularización enunciado al principio, a una forma más manejable: el teorema I. Y no sólo más manejable, sino más débil pues concierne al estrato S_o únicamente; he aquí el valor de la reducción.

Para probar este teorema, nos guiamos por el principio de "recurrencia sobre las dimensiones". El punto está en que la demostración del teorema I se logra apoyandose en los teoremas de desingularización de espacios de dimensión más pequeña que la de X. Así, empezando por el caso de curvas, cuya desingularización se conoce bien, se puede montar una recurrencia ascendente de desingularización.

Para poner de manifiesto este proceso de recurrencia, hemos de apoyarnos en la teoría del contacto maximal. En ella se define algo que se llamará exponente idealístico de contacto, que no es sino una generalización de la noción de primer exponente característico de Puiseux en el caso de curvas.

La idea primaria está en el hecho de que, si en la curva $y^2-x^3=0$, que tiene como primero y único exponente de Puiseux , (de y respecto de x), 3/2, dejo a la y de grado 1 y otorgo a la x grados racionales, decrecientes a partir de 1, el cono tangente a ella (i.e. la forma inicial) sigue siendo la misma que al principio hasta que, justamente en el punto en que el grado de x es 2/3, este cono tangente ya varía, pues la forma inicial sería y^2-x^3. Así se puede atrapar el primer exponente característico de Puiseux de la curva anterior como el inverso de aquel número, $\frac{2}{3}$, que es el primer grado que, otorgado a x, hace variar la forma inicial.

Resumamos brevemente la teoría del contacto maximal. Toda ella es de naturaleza local, así es que se operará sin más preámbulos, alrededor de un punto.

Sea Z un espacio analítico liso, W un subespacio de Z, liso y cerrado, $x \in W$. Sea $(\underline{z},\underline{w}) = (z_1,\dots,z_c, w_1,\dots,w_d)$ un sistema de coordenadas locales de Z alrededor de x tal que $(\underline{z})$ es una base del ideal P de W y tal que $(\underline{w})$ induce un sistema de coordenadas locales de W alrededor de x. Pongamos, para cada número real $\delta \geq 1$,

$$F^{(\nu)}_{Z,W,x,\delta} = \overline{\sum_{A \in Z_o^c,\ B \in Z_o^d,\ |A| + \frac{|B|}{\delta} \geq \nu} (\underline{z}^A \underline{w}^B)\, \mathcal{O}_{Z,x}}$$

$$F^{(\nu +)}_{Z,W,X,\delta} = \overline{\sum_{A \in Z_o^c,\ B \in Z_c^d,\ |A| + \frac{|B|}{\delta} > \nu} (\underline{z}^A \underline{w}^B)\, \mathcal{O}_{Z,x}}$$

$$gr_{W,x,\delta}(Z) = \bigoplus_{\nu \geq 0} (F^{(\nu)}_{Z,W,x,\delta} / F^{(\nu +)}_{Z,W,x,\delta}) = \bigoplus_{\nu \geq 0} gr^{\nu}_{W,x,\delta}(Z).$$

Se comprueba con facilidad que

$$[1]\ gr_{W,x,\delta}(Z) \simeq \mathbb{C}\,[\underline{\tilde{z}},\underline{\tilde{w}}]\ , \qquad \tilde{z}_i = w_i + F^{(1+)}_{Z,W,x,\delta}$$

$$\tilde{z}_i = w_i + F^{(1/\delta\, +)}_{Z,W,x,\delta}$$

pero el homomorfismo no lo es de estructuras graduadas.

Sea ahora X un subespacio analítico cerrado de Z tal que $x \in X$, $I_{Z,X,x}$ el ideal de X en $\mathcal{O}_{Z,x}$. Designaremos por

$in_x^{w,\delta}(Z,X)$ al ideal de $gr_{W,x,\delta}(Z)$ engendrado por las formas iniciales de los elementos de $I_{Z,X,x}$. Vía el isomorfismo [1], el ideal $\mathrm{in}_x^{W,\delta}(Z,X)$ define un subconjunto algebraico de $\mathbb{C}^n$ al que se llama cono tangente pesado a X en x, en la dirección de W y con peso δ. A este conjunto algebraico se le representa por $C_{X,x}^{W,\delta}$.

Se pueden interpretar, o visualizar, geométricamente, los conceptos anteriores de manera fácil. Como $\mathcal{O}_{Z,x} = \mathbb{C}\{\underline{z},\underline{w}\}$, cada monomio $\underline{z}^A\ \underline{w}^B$ lo podemos dibujar en el plano $\mathbb{R}^2$ como el punto de coordenadas $(|B|,|A|)$. Así se tiene:

a) Dibujando la recta que pasa por $(0,\nu)$ y tiene pendiente $-\frac{1}{\delta}$, $F_{Z,W,x,\delta}^{(\nu)}$ está engendrado por los monomios que corresponden a puntos en esa recta o a la derecha de ella. Asimismo, $F_{Z,W,x,\delta}^{(\nu+)}$ está engendrado por los monomios correspondientes a puntos a la derecha de ella.

b) $\mathrm{gr}_{W,x,\delta}^{\nu}(Z)$ está engendrado en $\mathbb{C}[\underline{Z},\underline{W}]$ por los monomios correspondientes a los puntos que están en esa recta.

c) Dada una función $f \in \mathcal{O}_{Z,x}$, su forma inicial en $\mathrm{gr}_{W,x,\delta}(Z)$, $\mathrm{in}_x^{W,\delta}(f)$, se obtiene representando los monomios de f con coeficiente distinto de cero y tomando los términos de f correspondientes a los puntos contenidos en la recta de pendiente $-1/\delta$, más proxima al origen, que contenga algún punto correspondiente a f.

d) Supongamos que H es una hipersuperficie de ecuación f = 0. tal que la retracción cañónica $r: Z \to W$ sea transversal a ella (i.e. si $\nu = \nu_x(f)$, la forma inicial ordinaria de f contiene un monomio $\underline{z}^A$ con coeficiente distinto de cero y $|A| = \nu$). Entonces el cono tangente ordinario a H en x y el cono tangente pesado coincidirán para todos los valores de δ menores que uno dado, el correspondiente a la pendiente de la primera recta que, pasando por $(0,\nu)$ contiene algún punto correspondiente a un monomio de f con coeficiente no nulo. A este número le llamaremos exponente de contacto de W con H y se generaliza a un subespacio analítico cualquiera X de Z, como antes.

Definición.- Si X es como antes y $r: Z \to W$ es transversal a X en x se llamará exponente de contacto de W con X en x, y se designará por $\delta_x(X,W)$, al máximo número real, o infinito, tal que $\forall\ \delta \in \mathbb{R}_0$, $1 \leq \delta \leq \delta_x(X,W)$, es

$$C_{X,x} \approx C^{W,\delta}_{X,x} .$$

Es inmediato ver que $\delta_x(X,W) > 1 \Leftrightarrow T_{W,x} \subset T_{X,x}$ (aquí $T_{W,x}$ representa al espacio tangente estricto a W en x).

Definición.- El número real, o infinito,

$$\delta_2(X) = \sup_{W \text{ curva lisa}} \delta_x(X,W)$$

se le llamará primer exponente característico de X en x.

El número anterior representa una cierta medida del contacto entre W y X en x. Pero esta medida es imperfecta, pues no puede describir bien la situación, toda vez que, según la dirección que elijamos en W, éste puede tener mayor o menor contacto con X en x. Para obviar este inconveniente se introducen los exponentes idealísticos de un contacto.

Consideremos los pares (J,b) donde J es un ideal coherente sobre W y b es un entero positivo. En el conjunto de todos esos pares se define una relación por:

$(J,b) \sim (J',b') \Leftrightarrow J^{b'}$ es íntegramente equivalente a J'^{b}. Esta relación es de equivalencia y a cada clase respecto de ella la llamaremos un exponente idealístico sobre W. A la clase de (J,b) la representaremos por ((J,b)).

Una aplicación de prueba de W en x es una aplicación holomorfa $h: \mathbb{D} \to W$, donde $\mathbb{D}$ es el disco unidad, tal que $h(0) = x$. En otras palabras, una aplicación de prueba es una curva sobre W. Las aplicaciones de prueba establecen propiedades direcciona les de los exponentes idealísticos. Sobre todas ellas está el test de la equivalencia entera, contenido en el siguiente

Lema.- $(J,b) \sim (J',b')$ si y sólo si, para toda aplicación de prueba $h\colon \mathbb{D} \to W$ de W en x, es

$$\frac{\nu_0(J\theta_{\mathbb{D}})}{b} = \frac{\nu_0(J'\theta_{\mathbb{D}})}{b'} .$$

La utilidad de los exponentes idealísticos en la teoría del contacto queda de manifiesto en el siguiente resultado:

Lema.- Supongamos que la retracción canónica $r\colon Z \to W$ es transversal a X en x. Existe un entorno abierto W_0 de x en W y un único exponente idealístico $((J,b))$ en W_0 tal que, para toda aplicación de prueba $h\colon \mathbb{D} \to W$ de W en x, se verifica que

$$\delta_{x_h}(W_h,X_h) = \frac{\nu_0(J\theta_{\mathbb{D}})}{b} , \quad X_h = X_W \times \mathbb{D},\ W_h = W_W \times \mathbb{D},$$

$$x_h = (x,0).$$

Definición.- Al exponente idealístico del lema anterior se le llamará **exponente idealístico de contacto de W con X en x.**

Ahora podemos, por fin, definir lo que se entiende por contacto maximal.

Definición de contacto maximal.- Si $\dim T_{X,x} \leq 1$ y si W es una curva lisa, diremos que W tiene contacto maximal con X en x si y sólo si

$$\delta_x(X,W) = \delta_x(X).$$

En el caso general, se dirá que W tiene contacto maximal con un X en x si y sólo si

a) r es perpendicular a X en x (i.e. r es transversal a X en x y $T_{X\cap r^{-1}(x),\,x} = \{\underline{0}\}$).

b) Para toda aplicación de prueba $h\colon \mathbb{D} \to W$ de W en x, W_h tiene contacto maximal con x_h en X_h.

En el caso en que X es, localmente alrededor de c, una hipersuperficie, es fácil encontrar una hipersuperficie W que tenga contacto maximal con X en x. La existencia de contacto maximal en el caso general es un problema mucho más complicado que no podemos abordar aquí. Supongamos, pues, que X es una hipersuperficie; se puede siempre encontrar para ella una ecuación local en la forma de Weierstrass

$$z^{\nu}+\varphi_1^{\nu}(\underline{w})\, z^{\nu-1}+\cdots+\varphi_{\nu}(\underline{w})=0 \qquad (\text{aquí } c=1).$$

Con el cambio de variable $z'=z+\varphi_1(\underline{w})/\nu$, la ecuación anterior se convierte en

$$z'^{\nu}+\varphi_2'(\underline{w})\, z'^{\nu-2}+\cdots+\varphi_{\nu}'(\underline{w})=0.$$

En este caso, si W es la hipersuperficie $z'=0$, se verifica que W tiene contacto maximal con X en $x=(\underline{0})$.

Pero el resultado clave de la teoría del contacto maximal está aún por ver, y es de lo que nos vamos a ocupar a continuación.

Llamamos explosión local de Z en x a la explosión de un entornoabierto U de x en Z con centro un subespacio E de Z, liso y cerrado, que contenga a x seguida de la inclusión en Z de dicho entorno. Una explosión local de Z en x induce explosiones locales de todos los subespacios de Z que contienen al centro de explosión. Más aún, dada una retracción local $r: Z \to W$, donde W es un subespacio liso y cerrado, conteniendo al centro de explosión, ésta induce una retracción local r' entre los correspondientes explotados. Finalmente, si $K=((J,b))$ es un exponente idealístico sobre W y si I es el ideal de W correspondiente al centro E de la explosión, entonces J es claramente divisible por I^b y se puede formar, sobre el transformado estricto local W' de W un ideal

$$J'=I^{-b}\, J\,\theta_{W'}.$$

Al exponente idealístico $K'=((J',b))$ se le llama transformado de K por la explosión local de centro E.

Vamos a enunciar ahora los teoremas de estabilidad del contacto maximal.

<u>Situación</u>.- Sea Z un espacio analítico complejo liso, X y W

subespacios cerrados de Z con W liso, y sea $x \in X \cap W$. Sea K un exponente idealistico sobre W, π una explosión local de Z en x con centro $E \subset \mathrm{Sing}(K)$. Sea $r : Z \to W$ una retracción local y $r' : Z' \to W'$ su transformada por π. Entonces, si r es transversal a X en x, se verifica:

Teorema de estabilidad I.-

(i) $\mathrm{Sing}(K)$ coincide con $W \cap S$ en un entorno de x, siendo S el estrato de Samuel de X que contiene a x.

(ii) Si K' es el transformado de K por π, S' el de S, X' el de X y W' el de W, es

$$\mathrm{Sing}(K') \cap \pi^{-1}(x) = W' \cap S' \cap \pi^{-1}(x).$$

(iii) r' es transversal a X' en x' y K' es el exponente de contacto de W' con X' en cualquier punto de $(K') \cap \pi^{-1}(x)$.

Teorema de la estabilidad II.- Si, además, W tiene contacto maximal con X en x, entonces

(iv) $\mathrm{Sing}(K) = S$ en un entorno de x.

(v) $\mathrm{Sing}(K') \cap \pi^{-1}(x) = S' \cap \pi^{-1}(x)$.

(vi) W' tiene contacto maximal, respecto de r', en todos los puntos de $S' \cap \pi^{-1}(x)$.

Vamos a explotar estos resultados desde el punto de vista de nuestra resolución de singularidades. Aunque ya quede bastante atrás, no debemos olvidar que nuestro objetivo es probar el teorema I por recurrencia sobre las dimensiones.

Volvemos a la situación de ese teorema. Sea X un espacio analítico complejo, compacto, $\{H_i\}_{0 \leq i \leq m}$ las funciones de Hilbert-Samuel sobre X, $\{S_i\}_{0 \leq i \leq m}$ los estratos de Samuel correspondientes. Suponemos que H_o es, lexicográficamente, la mayor de entre las H_i.

De la teoría del contacto maximal se deduce que, dado un punto $x \in S_o \subset X$, se pueden encontrar los datos suficientes:

(d)
- U : un entorno abierto de x en X.
- $X|U \hookrightarrow Z$: una inmersión cerrada en un espacio complejo liso.
- $W \hookrightarrow Z$: un subespacio complejo, liso y cerrado, que pasa por x.
- $\mathscr{E} = ((J,b))$ un exponente idealístico sobre W.

gozando de las siguientes propiedades

(d-1) $S_o \cap U \subset W$ y $S_o \cap U = \mathrm{Sing}(\mathscr{E})$.

(d-2) W tiene contacto maximal con X, teniendo a $\mathscr{E}$ como su exponente idealístico de contacto, en todo punto de $S_o \cap U$.

(d-3) $\dim W = \dim T_{X,x} (\leq \dim_x X)$.

Ahora bien, los teoremas de estabilidad del contacto maximal nos dicen que los dos enunciados siguientes son equivalentes:

<u>Teorema I_U</u> .- Existe una sucesión finita de explosiones $\pi^{(i)} : X^{(i)} \to X^{(i-1)}$ con centros $E^{(i-1)}$, $0 \leq i < p$ tal que

1) $X^{(0)} = X \mid U$, $S^{(0)} = S_o \mid U$ y $E^{(0)}$ es un subespacio complejo, liso y cerrado, de $S^{(0)}$.
2) Si $S^{(i)}$ es el estrato de Samuel de $X^{(i)}$ correspondiente a la misma H_o, entonces $E^{(i)}$ es un subespacio complejo, liso y cerrado, de $S^{(i)}$, $0 \leq i < p$.
3) $S^{(p)} = \emptyset$.

Nótese que ésto es exactamente una versión local del teorema I. (De ahí el número I_U).

<u>Teorema II</u>.- Existe una sucesión finita de explosiones $q^{(i)}: W^{(i)} \to W^{(i-1)}$ con centros $D^{(i-1)}$, $0 < i \leq p$ tal que

1) $W^{(0)} = W$, $\mathscr{E}^{(0)} = \mathscr{E}$ y $D^{(0)}$ es un subespacio complejo, liso y cerrado, de $\mathrm{Sing}(\mathscr{E})$.
2) Si $\mathscr{E}^{(i)}$ es el transformado de $\mathscr{E}^{(i-1)}$ por $q^{(i)}$, entonces $D^{(i)}$ es un subespacio complejo, liso y cerrado de $\mathrm{Sing}(\mathscr{E}^{(i)})$.
3) $\mathrm{Sing}\ (\mathscr{E}^{(p)}) = \emptyset$.

Para ver la equivalencia entre (I_U) y (II) basta hacer $E^{(i-1)} = D^{(i-1)}$. Para mayor claridad, analicemos el primer paso. Si $E^{(0)} = D^{(0)}$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
X^{(1)} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi^{(1)}"'] & Z^{(1)} \arrow[d, "p^{(1)}"] & W^{(1)} \arrow[l, hook'] \arrow[d, "q^{(1)}"] \\
X^{(0)} = X \mid U \arrow[r, hook] & Z & W \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

donde $p^{(1)}$ es la explosión de centro $E^{(0)} = D^{(0)}$. Las condiciones 1 de I_U y II son equivalentes por (d-1). Entonces, por el teorema de la estabilidad del contacto maximal, $S^{(1)} = \mathrm{Sing}(\mathscr{E}^{(1)})$ y así las condiciones 2) de (I_U) y (II) son equivalentes, para $i = 1$. De nuevo por la estabilidad del contacto maximal, se puede repetir el mismo razonamiento para $i = 2,3$, etc, teniendo la equivalencia entre (I_U) y (II).

Nuestra intención ahora es probar el teorema II, lo cual probaría automáticamente el teorema I_U y a partir de él, se pretende tener probado el teorema I. Pero, con estas intenciones nos encontramos con dos tipos de dificultades:

1) ¿Cómo podemos salvar la diferencia existente entre el enunciado I_U, que es local, y el enunciado II, que es global?

2) ¿Es el enunciado (II) un especie de desingularización?. O mejor aún, ¿es realmente una desingularización en dimensión menor que la de X?

Que (II) es una especie de desingularización no cabe duda: es la desingularización de un exponente idealístico.

De la cuestión 1) no vamos a hablar. Para resolverla se ideó la teoría del "gardening" de las singularidades, que es demasiado complicada para exponer aquí, siquiera sean los enunciados. Quizás éste pueda ser el objeto de una próxima conferencia. De momento, nos vemos obligados a dejarlo estar.

Para responder a la pregunta 2) hay cierto soporte psicológico: la consideración de un caso particular. Supongamos que encontramos los datos (d) de tal forma que $U \supset S_0$ (o sea, que la cuestión 1) no existe) y $\mathfrak{E} = ((J,b))$, donde J es localmente principal y $b = \max\{\nu_y(J) \mid y \in W\}$. Sea X' el subespacio complejo de W definido por J. En este caso, no es difícil de ver que $\mathrm{Sing}(\mathfrak{E})$ es el "peor" estrato de Samuel de X' y (II) no es sino (I) para X' (en lugar de X). Y como $\dim X' < \dim W \leq \dim X$, tenemos nuestra recurrencia montada.

Pero, realmente, este hecho no nos sirve de nada, sino para lo que dijimos antes: como apoyo psicológico. La realidad es mucho más complicada y, para exponerla en su totalidad, deberíamos caer en profundos tecnicismos. Lo que quiero decir es que ya, en este punto, el proceso se aleja de la intuición.

El caso en que J no sea localmente principal pero $b = \max\{\nu_y(J) \mid y \in W\}$ ya presenta mayores dificultades porque (II) no es equivalente a (I) para X'. La diferencia estriba en la disparidad de la noción de transformado fuerte y transformado débil de un ideal por una explosión.

He llegado, en estos momentos, hasta donde se puede explicar de la resolución de singularidades de un espacio analítico complejo sin recurrir a medios técnicos sofisticados. El germen de ideas está ya expuesto, y este era mi propósito desde un principio. La elaboración completa de estas ideas está en [1],[2] y [3].

Voy a terminar exponiendo una nueva dificultad que hasta ahora no había aparecido. Hasta el momento presente nuestra actitud ha sido siempre actuar sobre el peor estrato de Samuel. Pero esto no siempre produce buenos resultados, como en el caso $b < \max\{\nu_y(J) \mid y \in W\}$. Veamos un ejemplo simple.

Sea $W = \mathbb{C}^2$, con coordenadas $\{z_1, z_2\}$. Sea $J=(z_1 z_2)\mathcal{O}_W$ y $\mathcal{E} = ((J,1))$. Así

$$\max\{\nu_y(J) \mid y \in W\} = 2$$

$$\mathrm{Sing}(J,2) = \{(0,0)\}.$$

Así, el peor estrato de Samuel de este exponente idealístico es el origen. Sea $q: W' \to W$ la transformación cuadrática de W con centro el origen, W'_1 y W'_2 las dos piezas abiertas que recubren W', con coordenadas respectivas $\{z_{11}, z_{12}\}$, $\{z_{21}, z_{22}\}$ donde

$$z_{11} = z_1 \qquad z_{12} = z_2/z_1$$

$$z_{21} = z_1/z_2, \quad z_{22} = z_2$$

El transformado $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ viene dado por $\mathcal{E}' = ((J',1))$ donde

$$J' = \begin{cases} (z_{11}\, z_{12})\mathcal{O}_{W'} & \text{en } W'_1 \\ (z_{21}\, z_{22})\mathcal{O}_{W'} & \text{en } W'_2 . \end{cases}$$

Así, la singularidad de $\mathcal{E}$ no ha mejorado explotando el peor estrato de Samuel, pues Sing($\mathcal{E}'$) es esencialmente igual a Sing($\mathcal{E}$). Este caso se resuelve tomando la explosión no ya delorigen, sino de un eje coordenado entero.

Así, la filosofía de "primero el peor estrato de Samuel", debe ser cambiada en casos por "primero el mayor". Esto da una nueva idea de dificultades que aún tenemos ante nosotros.

Referencias:

[1] Hironaka, H. : "Introduction to the theory of infinitely near singular points". Memorias de Matemática del Instituto Jorge Juan, 28,(1974).

[2] Aroca, J.M., Hironaka, H., Vicente, J.L. : "The theory of the maximal contact", Memorias de Matemática del Instituto Jorge Juan, 29 (1975).

[3] Aroca,J.M., Hironaka, H., Vicente, J.L. : "Desingularization theorems", Memorias de Matemática del Instituto Jorge Juan, 30 (1977).