

Flux Geodèsic en Superfícies de Revolució (\*)

Joan de Solà-Morales i Rubió

Secció de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Aquest treball és el resultat d'un estudi en dues direccions principals: la primera, la descripció qualitativa del flux geodèsic en superfícies de revolució, i la segona el descobrir si algunes de les propietats d'aquest (concretament, l'estabilitat de certes trajectòries) es conserven en els fluxs geodèsics de superfícies no pas de revolució però prou properes a elles, o, en general, en fluxs hamiltonians pròxims al flux geodèsic d'una superfície de revolució.

El primer d'aquests objectius pot resumir-se en el següent: Seguint l'article de Smale [16], l'estudi qualitatiu de sistemes hamiltonians amb simetria es pot dividir en dues parts diferenciades: En primer lloc, l'estudi de les superfícies invariants pel flux a l'espai de fases, desde el punt de vista de la seva topologia, i en segon lloc l'estudi del flux restringit a cadascuna d'elles. En el nostre cas, l'existència de prou integrals primeres ens permet d'assegurar, com a conseqüència del Teorema de Liouville-Arnold, que les superfícies invariants son tors de dimensió 2, excepte en casos degenerats, i que el flux en ells està determinat per el seu número de rotació.

L'estudi d'aquestes superfícies invariants el fem al Capítol II, on es descriu el que en diem el seu Retrat.

(\*) Tesi de Llicenciatura presentada a la Secció de Matemàtiques de la Facultat de Ciències de la U.A.B., Juny 1978.

Igualment s'estudia l'estabilitat estructural del retrat de fases segons la definició que es dóna en el mateix text.

Quant al número de rotació en els tors invariants, el seu càlcul, que es fa per una quadratura, es dóna en els primers apartats del Capítol III.

Aquest càlcul seria suficient per a donar la idea qualitativa del flux en els tors invariants, però per a poder estudiar els fluxs pròxims al flux geodèsic d'una superfície de revolució -el segon dels nostres objectius-, i, en particular, per a poder aplicar el Teorema del Twist en el Capítol IV, ens cal un coneixement més precís de la variació del número de rotació entre dos tors invariants propers.

Aixó es fa a través de la funció número de rotació, que es defineix i estudia al Capítol III. Un cop fet aquest estudi dediquem els darrers apartats del capítol a alguns problemes fàcils d'estudiar en aquest context, però una mica fòra de l'objectiu inicial del treball, com són els problemes relacionats amb geodèsiques tancades, i, en concret, l'existència de superfícies de revolució en que el número de rotació en els tors invariants pel seu flux geodèsic sigui constant.

El Capítol IV es dedica al segon dels nostres objectius inicials, i en ell es demostra l'existència i estabilitat d'equadors exteriors en els fluxs hamiltonians pròxims al flux geodèsic d'una superfície de revolució.

Finalment, voldria fer constar el meu agraïment a tots els que m'han ajudat d'una o altra manera a la realització d'aquest

treball. Especialment al Dr. Carles Perelló, que m'ha dirigit amb tant d'entusiasme, i a en Jordi Valero, que ha tingut intervencions clarificadores, especialment en el Capítol III.

Bellaterra, juny del 1978.

P.S. Després d'haver presentat aquest treball com a tesi de llicenciatura, em cal agrair als membres del tribunal, i especialment al Dr. Carles Simó, la seva minuciosa lectura així com els suggeriments que hi han fet, amb els que he procurat corregir alguns defectes del treball inicial.

Bellaterra, setembre del 1978.

## Capítol I

### Generalitats sobre el flux geodèsic en superfícies de revolució

En aquest capítol donarem les definicions i les primeres propietats de les superfícies de revolució i del seu flux geodèsic, i deduirem algunes propietats de les trajectòries del flux en relació amb la seva estabilitat orbital.

1.-Superfícies de revolució. Considerem una superfície connexa  $M$ , subvarietat diferenciable de classe  $C^n$  de  $\mathbb{R}^3$ , obtinguda per la revolució d'una corba de  $\mathbb{R}^2$  al voltant de l'eix  $X$ . Sigui  $g(s) = (g_x(s), g_y(s))$  aquesta corba, que suposarem parametritzada per la longitud de l'arc i diferenciable amb continuïtat al menys  $n$  vegades.

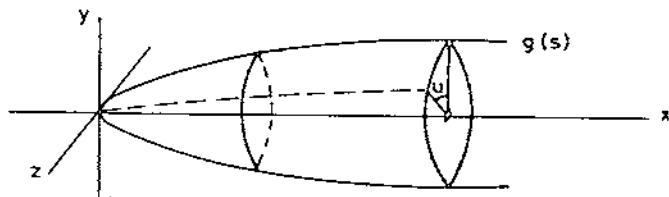
Aleshores,  $M = M(g)$  ve donada paramètricament per

$$(x, y, z) = (g_x(s), g_y(s) \cdot \cos u, g_y(s) \cdot \sin u),$$

on  $u$  varia entre  $0$  i  $2\pi$ .

Notem que de cara a que  $M$  sigui varietat diferenciable podem suposar sempre, entre altres coses, que  $g_y(s) \geq 0$ .

Per aquest mètode podem obtenir superfícies de diversos tipus topològics: a) Tipus  $S^1 \times \mathbb{R}$  (cilindre); b) Tipus  $S^2$  (esfera); c) Tipus  $T^2$  (tor); Tipus  $\mathbb{R}^2$  (com el paraboloides de revolució).



Notem que en un entorn d'un punt qualsevol de  $M$  que no estigui sobre l'eix  $X$  (i això només passa en els punts corresponents a  $g_y(s) = 0$ ),  $u$  i  $s$  ens donen coordenades locals. En elles la mètrica de  $M$ , obtinguda per restricció de la de  $\mathbb{R}^3$ , s'escriu:

$$T = g_y^2(s) du^2 + ds^2.$$

2.- Flux geodèsic. El flux geodèsic de la varietat de Riemann  $(M, T)$  és el flux hamiltonià definit a  $T(M)$  (fibrat tangent) corresponent al moviment d'una partícula a  $M$  que no estigui sotmesa a cap força, excepte la que la fa romandre a  $M$ . Com es sabut, la trajectòria d'una partícula en aquestes condicions consisteix en recórrer les geodèsiques de  $M$  amb velocitat constant (en mòdul).

El problema dinàmic ve donat doncs per la funció lagrangiana  $L = 1/2 g_y^2(s) \dot{u}^2 + 1/2 \dot{s}^2$ . En terminologia hamiltoniana tenim les variables canòniques  $P_u = g_y^2(s) \dot{u}$ ,  $P_s = \dot{s}$  que prenem com a noves coordenades de  $T(M)$  en substitució de  $\dot{u}$  i  $\dot{s}$ . La funció de Hamilton s'escriu:

$$H = 1/2 P_u^2 / g_y^2(s) + 1/2 P_s^2.$$

Les equacions del moviment són doncs:

$$\dot{u} = P_u / g_y^2(s)$$

$$\dot{s} = P_s$$

$$\dot{P}_u = 0$$

$$\dot{P}_s = P_u^2 \dot{g}_y(s) / g_y^3(s).$$

Com es veu a les equacions anteriors,  $P_u$  és una integral primera del moviment (moment angular). Aquest fet és conegut com Teorema de Clairaut, doncs va ser demostrat per A.C. Clairaut el 1735 amb l'enunciat equivalent de  $P_u = g_y(s) \cdot \cos \alpha$ , on  $\alpha$  és l'angle format pel vector tangent a la geodèsica en un punt amb el paral·lel de  $M$  que passa pel punt.

L'altra integral primera del moviment és  $H$ . Notem que  $H$  mesura el mòdul del vector tangent, i que la subvarietat invariant  $H = 1/2$  de  $T(M)$  és  $T_1(M)$ , el fibrat tangent unitari. Universalment es considera com a definició de flux geodèsic la restricció a  $T_1(M)$  del flux donat per les equacions anteriors. Nosaltres també ho farem així, excepte quan indiquem explícitament el contrari. Notem que no es perd informació amb aquesta restricció, doncs com ja hem dit abans les trajectòries que apareixen en altres nivells d'energia són simplement reparametritzacions lineals de les obtingudes amb  $H = 1/2$ .

3.-Integració local. L'existència de les dues integrals primeres ens redueix el problema suficientment com per a poder expressar localment per quadratures les solucions de les equacions del moviment.

Efectivament: conèixer localment la geodèsica  $(u(t), s(t))$  tal que  $u(0) = u_0$  i  $s(0) = s_0$  amb velocitats inicials  $\dot{u}_0$  i  $\dot{s}_0$  es redueix a conèixer localment  $s(t)$ , doncs  $\dot{u}(t) = P_u / g_y^2(s(t))$ , o sigui que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t k / g_y^2(s(t)) dt,$$

on  $k = P_u = g_y^2(s_0) \cdot \dot{u}_0$ . El problema és doncs conèixer  $s(t)$ . Però

de l'equació de conservació de l'energia deduem:

$$1/2 = 1/2 k^2/g_Y^2(s) + 1/2 \dot{s}^2, \text{ o sigui que}$$

$$\dot{s}(t) = \pm \sqrt{1 - k^2/g_Y^2(s(t))} .$$

que és una equació diferencial ordinària per a  $s(t)$ . Notem que aquesta equació no satisfà la condició de Lipschitz en un entorn del punt  $s_1$  en el que  $g_Y(s_1) = |k|$ , i caldrà tenir-ho en compte doncs apareix, perdent-se l'unicitat, la solució  $s(t) = s_1$  (constant) que en general no té per què satisfer les equacions del moviment (per que una trajectòria sigui solució de les equacions del moviment la conservació de l'energia i el moment angular son condicions necessàries, però no suficients). Aquesta equació en  $s(t)$  amb la condició inicial  $s(0) = s_0$  és fàcil de resoldre si  $\dot{s}_0 \neq 0$  posant localment  $t$  en funció de  $s$ :

$$t(s) = \int_{s_0}^s \pm (1 - k^2/g_Y^2(s))^{-1/2} ds ,$$

on el signe de l'arrel quadrada és el mateix que el de  $s_0$ .

Un altre mètode d'integració local és resoldre l'equació de l'òrbita, i no pas la de la trajectòria, posant localment  $u$  en funció de  $s$  sobre la primera. En els punts en que  $\dot{s} \neq 0$  podem escriure

$$\frac{du(s)}{ds} = \frac{du}{dt} / \frac{ds}{dt} = \frac{k/g_Y^2(s)}{\pm \sqrt{1 - k^2/g_Y^2(s)}} = \frac{\pm k}{g_Y(s) \sqrt{g_Y^2(s) - k^2}} ,$$

$$u(s) = u_0 + \int_{s_0}^s \frac{\pm k}{g_y(s) \sqrt{g_y^2(s) - k^2}}$$

amb la mateixa regla per al signe.

4.- Meridians i paral·lels. Les equacions del moviment escrites abans no són en general integrables globalment en termes de funcions conegudes. Per això resulta d'interès veure si al menys les òrbites més senzilles, els meridians i els paral·lels, son geodèsiques de M.

Els meridians ho són sempre: la corba  $u(t) = u_0$ ,  $s(t) = t$  és el meridià que passa per  $u = u_0$  i compleix les equacions del moviment. Sobre els meridians  $P_u = 0$ . (Notem que també compliria les equacions fent  $s(t) = -t$ ).

En canvi el paral·lel que passa per  $s = s_0$  només és una geodèsica quan  $\dot{g}_y(s_0) = 0$ . A aquesta mena de paral·lels, que passen per punts d'ordenada crítica, en direm equadors de M. En particular, als que passin per un màxim relatiu de  $g_y$  en direm equadors exteriors.

#### 5.- Estabilitat orbital.

Lema: Sigui  $(u(t), s(t))$  una geodèsica sobre la que  $P_u = k$  i  $H = 1/2$ . Aleshores qualsevol punt de l'òrbita a M està a distància més gran o igual que  $|k|$  de l'eix de rotació de M.

Demostració:  $1/2 g_y^2(s(t)) \dot{u}^2(t) + 1/2 \dot{s}^2(t) = 1/2$ ,

$$g_y^2(s(t)) \dot{u}(t) = k.$$

$$k^2/g_y^2(s(t)) + \dot{s}^2(t) = 1, \quad k^2/g_y^2(s(t)) \leq 1, \quad g_y^2(s(t)) \geq k^2. //.$$



Com a conseqüència tenim que una geodèsica amb moment angular  $k$  està confinada a la banda  $g_y(s) \geq |k|$ .

Definició: Sigui  $E$  una varietat diferenciable, i  $F_t$  un flux definit a  $E$ . Donat  $p \in E$  direm que la òrbita  $F_t(p)$  és orbitalment estable si donat qualsevol entorn  $U$  d'aquesta, existeix un altre entorn  $V$  d'ella tal que si  $q \in V$ , aleshores  $F_t(q) \in U$  per a tots els valors de  $t$  pels que estigui definit.

Proposició: Si els punts  $s$  tals que  $\dot{g}_y(s) = 0$  no s'acumelen, llavors tots els equadors exteriors de  $M(g)$  son orbitalment estables.

Demostració: Si els punts d'ordenada crítica no s'acumulen, llavors els equadors exteriors corresponen a màxims relatius estrictes de  $g_y$ . I del lema anterior es dedueix l'estabilitat. //

Lema: Sigui  $M(g)$  compacta (per tant, tipus  $S^2$  ó  $T^2$ ) i tal que els punts d'ordenada crítica no s'acumulin. Sigui  $(u(t), s(t))$  una geodèsica de  $M$  tal que  $s(t)$  no sigui constant. Aleshores la geodèsica ha de tallar a un equador exterior.

Demostració: Suposem  $P_u = k$  sobre la geodèsica. Com que  $s(t)$  no és constant i els punts d'ordenada crítica no s'acumulen, existeix  $t_0$  tal que  $\dot{s}(t_0) \neq 0$ ,  $\dot{g}_y(s(t_0)) \neq 0$  i  $g_y(s(t_0)) > |k|$ .

Considerem la banda de  $M$  definida per  $g_y \geq |k|$ . La component connexa d'aquesta en que està confinada la geodèsica és de la forma

$$\{(u, s) \mid u \in [0, 2\pi), s \in [s_1, s_2]\}$$

amb  $g_y(s_1) = g_y(s_2) = |k|$ . Es compleix que  $s(t_0) \in (s_1, s_2)$ .

Ha d'existir  $s_3 \in (s_1, s_2)$  que sigui un màxim relatiu per a  $g_y$  i que entre  $s(t_0)$  i  $s_3$  no hi hagi cap punt en que  $g_y(s) = |k|$ .

Llavors existeix  $t_3$  tal que  $s(t_3) = s_3$  que ve donat per

$$t_3 = t_0 + \int_{s^3}^{s_3} (t_0) \pm (1 - k^2 / g_y^2(s))^{-1/2} ds ,$$

segons l'integració local feta al apartat nº 3. Aquesta integral, per les precaucions preses no presenta problemes de convergència.//.

Proposició: Sigui  $M(g)$  compacta i tal que els punts d'ordenada crítica no s'acumulin. Llavors:

- i) Els equadors no exteriors no són orbitalment estables.
- ii) Els meridians mai són orbitalment estables.

Demostració: i) Es conseqüència del lema anterior.

ii) Considerem el meridià  $u = u_0$ , i sigui  $(u(t), s(t))$  una geodèsica tal que  $u(0) = u_0$ . Si sobre ella  $P_u = k$  suposarem  $k \neq 0$ , doncs amb  $k = 0$  seria el mateix meridià. Sigui  $R$  el suprem dels valors de  $g_y$  (l'ordenada màxima de la corba). Llavors com que  $\dot{u}(t) \cdot g_y^2(s(t)) = k$  tenim que  $\dot{u}(t) \geq \frac{|k|}{R^2}$ , i per tant  $(u(t), s(t))$  s'allunya de  $u = u_0$  amb velocitat que val com a mínim  $|k|/R^2 > 0$ .//.

## Capítol II

### Superfícies invariants i Retrat de fases

L'objecte d'aquest capítol és estudiar qualitativament les superfícies invariants pel flux geodèsic definides a  $T(M)$  per  $H = \text{constant}$  i  $P_u = \text{constant}$ , o definides a  $T_1(M)$  si prenem  $H = 1/2$ . Estudiarem la seva topologia i l'evolució d'aquesta variant els paràmetres  $H$  i  $P_u$  (bifurcacions).

El Teorema de Liouville-Arnold (vegi's [2], apèndix 26) és el resultat essencial en aquest context i ens assegura que les superfícies invariants, en el cas compacte, estan constituïdes per tors de dimensió 2, sempre que es compleixin certes condicions de no degeneració i la condició  $(H, P_u) = 0$  (involució) que en el nostre cas es verifiquen excepte per als casos que es veuran. El mateix teorema afirma que el flux en cada tor invariant és homogeni (periòdic o quasi-periòdic).

El capítol inclou també el concepte de retrat de les varietats invariants, receptes per a la seva obtenció i un estudi d'algunes qüestions relatives a la estabilitat estructural, en el sentit que es defineix en el mateix text.

En tot el capítol suposarem  $M$  compacta. A partir d'un punt que s'indicarà en el text suposarem que  $M$  està generada per una corba  $g$  tancada d'ordenades estrictament positives, amb el que  $M(g)$  serà difeomorfa a  $T^2$ .

#### 6.- Conjunts invariants. Punts de bifurcació.

Definició: Donats  $h, k \in \mathbb{R}$  definim  $I_{h,k}$  com  $(H, P_u)^{-1}(h, k)$ , o

sigui l'antiimatge de  $(h, k)$  per l'aplicació  $(H, P_u): T(M) \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Del fet que  $H$  i  $P_u$  són integrals primeres del moviment es dedueix que els conjunts  $I_{h,k}$  són invariants pel flux geodèsic. Nosaltres ens interessarem pels de la forma  $I_{1/2, k} \subset T_1(M)$  que abreujadament denotarem  $I_k$ .

Definició: Definim el conjunt de punts de bifurcació, (vegi's [16] o [9]),  $\Sigma$ , com

$$\Sigma = \left\{ k \in \mathbb{R} \mid \text{existeix al menys un punt a } I_k \text{ en el que } (\text{grad } H) \text{ i } (\text{grad } P_u) \text{ no són linealment independents} \right\}.$$

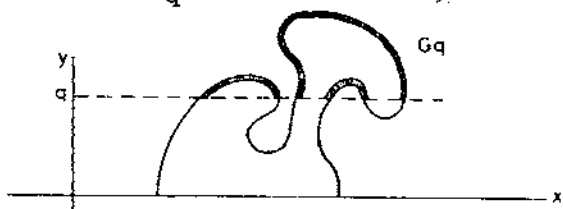
Per a les superfícies  $M(g)$  en les que  $g_y$  pren algun cop el valor 0 incluïm també a  $\Sigma$  el valor  $k=0$ . Noti's que en aquest cas no té sentit parlar de grad  $H$  en algun punt de  $I_0$ .

$$\begin{aligned} \text{Com que } \text{grad } H &= \left( \frac{\partial H}{\partial P_u}, \frac{\partial H}{\partial P_s}, \frac{\partial H}{\partial u}, \frac{\partial H}{\partial s} \right) = \\ &= (P_u/g_y^2(s), P_s, 0, -P_u^2 \dot{g}_y(s)/g_y^3(s)) \end{aligned}$$

$$\text{i } \text{grad } P_u = (1, 0, 0, 0)$$

han de ser dependents cal que o bé  $P_u = 0$  i  $P_s = 0$ , o bé  $P_s = 0$  i  $\dot{g}_y(s) = 0$ . El primer cas correspon al nivell d'energia zero, i no es donarà mai a  $T_1(M)$ . En el nivell  $H = 1/2$  hi haurà doncs dependència en els punts  $(P_u, P_s, u, s)$  en els que  $\dot{g}_y(s) = 0$  i  $P_s = 0$ . Però si  $H = 1/2$  caldrà que en aquests punts  $P_u = \pm g_y(s)$ . En conclusió  $\Sigma$ , és el conjunt dels valors  $k \in \mathbb{R}$  tals que  $|k|$  és un valor crític de  $g_y$ . En particular,  $\Sigma$  és compacte.

7.-Notació: Direm  $G$  al conjunt de punts de la corba  $g$ . Donat  $q \in \mathbb{R}^+$  definim  $G_q = \{(x, y) \in G \mid y \geq q\}$ .



Per abús de notació  $M(G_q) = \{(u, s) \in M(g) \mid g_y(s) \geq q\}$ .

Diem  $\pi$  a la projecció canònica  $\pi: T_1(M) \rightarrow M$ .

Proposició:  $\pi(I_k) = M(G_{|k|})$ .

Demostració: Que el primer membre de l'igualtat està contingut en el segon és el resultat del lema primer de l'apartat nº 5.

Sigui ara  $g(s_0) \in G_{|k|}$  i sigui  $u_0 \in [0, 2\pi)$  qualsevol:

$(u_0, s_0) \in M(G_{|k|})$ .

Serà  $g_y(s_0) \geq |k|$ , o sigui  $(1 - k^2/g_y^2(s_0)) \geq 0$ .

Sigui  $p = + (1 - k^2/g_y^2(s_0))^{1/2}$ . Aleshores el punt  $P_u = k$ ,  $P_s = p$ ,

$u = u_0$ ,  $s = s_0$  està a  $I_k$  i la seva projecció a  $M$  és  $(u_0, s_0) \checkmark$ .

Proposició: Si  $k \in \mathbb{R} - \Sigma$ , llavors  $I_k$  o bé és buit o bé és una varietat diferenciable que topològicament és reunió disjunta de tors  $T^2$ .

Demostració:  $I_k = (H, P_u)^{-1}(1/2, k)$  serà compacte, doncs és un tancat contingut a  $T_1(M)$  (compacte).

Pel Teorema de la funció implícita,  $I_k$  serà varietat diferenciable de dimensió 2 si la funció  $(H, P_u)$  té rang 2 en tot punt de  $I_k$ . Això es compleix si  $k \notin \Sigma$  doncs  $\text{grad } H$  i  $\text{grad } P_u$  son linealment independents.

Si  $k \in \mathbb{R} - \Sigma$ ,  $I_k$  és orientable (vegi's [1] Teorema 11.15).

Ademés, el camp de  $T(M)$  que genera el flux és

$$X = P_u^2 \dot{g}_y(s)/g_y^3(s) \frac{\partial}{\partial P_s} + P_u/g_y^2(s) \frac{\partial}{\partial u} + P_s \frac{\partial}{\partial s},$$

el qual és un camp tangent a  $I_k$  i que no s'anul·la enlloc si  $k \notin \Sigma$ . Per tant la característica d'Euler de  $I_k$  és zero pel Teorema de Poincaré-Hopf (vegi's [12], § 6).

Resumint:  $I_k$  és una varietat diferenciable de dimensió 2, compacta i orientable i amb característica d'Euler zero. Pel teorema de classificació de varietats diferenciables compactes i orientables de dimensió 2,  $I_k$  ha de ser reunió disjunta de tors  $T^2$  //.

Notem que aquest resultat és una de les tesis del Teorema de Liouville-Arnold. Aquí no ens ha calgut utilitzar l'acció transitiva del grup de Lie  $\mathbb{R}^2$  sobre  $T(M)$  gràcies a que en dimensió 2 disposem del teorema de classificació de varietats abans esmentat.

El que ens falta saber ara es quants tors  $T^2$  componen  $I_k$ . Això ens ho dirà la Proposició de l'apartat 9. L'apartat següent és purament tècnic, al servei d'això.

8.- Sigui  $R$  i  $S$  les ordenades màxima i mínima de  $G$  respectivament (pot ser  $S=0$ ). Sigui  $d$  una correspondència de variable real definida per:

$d(q) = 0$ , si  $|q| > R$ ,

$d(q) = 2$ , si  $|q| < S$ ,

$d(q) =$  cardinal del conjunt de components connexes  
de  $G_{|q|}$  si  $S \leq |q| \leq R$ .

Sigui  $D$  el conjunt de punts en que  $d$  és discontinua.

Lema:  $D \subset \Sigma$ .

Nota: Observem primer el següent: sigui  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  definida per  $f((x,y))=y$ . L'aplicació  $f$  és diferenciable. Els valors regulars de  $f$  son els  $q \in \mathbb{R}$  tals que  $g_y(s)=q \implies \dot{g}_y(s) \neq 0$ . Es fàcil veure que si  $a$  és una component connexa de  $G_q$  i  $q$  és un valor regular de  $f$  aleshores  $a = g([s_1, s_2])$  amb  $g_y(s_1) = g_y(s_2) = q$ , i per tot  $s \in (s_1, s_2)$  és  $g_y(s) > q$ . Llavors en particular el número de components connexes de  $G_q$  serà la meitat del cardinal de  $f^{-1}(q)$ , el qual sempre és un nombre parell si  $q \notin \Sigma$  (vegi's [12], § 4). També és fàcil veure que per ser  $G$  compacta, si  $q$  és un valor regular de  $f$ ,  $\# f^{-1}(q)$  és localment constant ([12], § 1).

Demostració: (pel contrarrecíproc)  $q \notin \Sigma \implies$  si  $g_y(s) = |q|$  és que  $\dot{g}_y(s) \neq 0 \implies |q|$  és valor regular de  $f \implies d(q) = 1/2 \cdot \# f^{-1}(|q|) \implies d(q)$  és localment constant a  $q \implies q \notin D$ .

Tot això per  $S \leq |q| \leq R$ . En altre cas es evident.//.

9.- Proposició: Si  $k \notin \Sigma$ ,  $I_k$  té exactament  $d(k)$  components connexes.

Demostració: Distingim casos.

1.  $|k| > R$ . Llavors  $d(k) = 0$ . Efectivament, si  $|k| > R$ ,  $I_k$  és buit.

26n.  $|k| < S$ . En aquest cas  $d(k) = 2$  i  $G_{|k|} = G$ . Sigui  $(u_0, s_0) \in M$ . La fibra  $\pi^{-1}(u_0, s_0)$  restringida a  $I_k$  la formen els dos punts:

$$(k, +(1-k^2/q_y^2(s_0))^{1/2}, u_0, s_0) \text{ i } (k, -(1-k^2/q_y^2(s_0))^{1/2}, u_0, s_0).$$

En aquest cas  $I_k$  té dues components connexes,  $I^+$  i  $I^-$  definides per

$$I^+ = \{(P_u, P_s, u, s) \in I_k \mid P_s \geq 0\} \text{ i } I^- = \{(P_u, P_s, u, s) \in I_k \mid P_s \leq 0\}.$$

Es comprova fàcilment que son disjunctes i que cadascuna és arc-connexa.

3r.  $|k| \in (S, R)$ . Per la Proposició de l'apartat n9 7,  $I_k$  no pot tenir menys de  $d(k)$  components connexes. Veurem que no en pot tenir més.

Sigui  $a$  una component connexa de  $M(G_{|k|})$ . Topològicament serà  $a = A \times S^1$  on  $A$  és una component connexa de  $G_{|k|}$ ,  $a = g([s_1, s_2])$ .

Considerem les dues corbes de  $I_k$  donades per  $(k, 0, u, s_1)$  i  $(k, 0, u, s_2)$  variant  $u$ , que en direm  $I^1$  i  $I^2$ . Donat un punt qualsevol de  $\pi^{-1}(a) \cap I_k$  és fàcil construir una corba contínua que uneixi  $I^1$  amb  $I^2$  i passi pel punt. Per tant  $\pi^{-1}(a) \cap I_k$  és arc-connex. //.

#### 10.- Retrat de les Varietats Invariants.

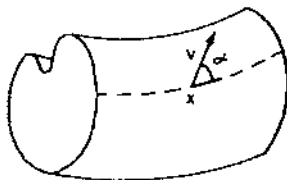
A partir d'ara i per la resta del capítol ens restringirem al cas en que  $M(g)$  és difeomorfa a  $T^2$ . Així doncs,  $G$  és topològicament  $S^1$ .

Com a conseqüència de l'anterior  $T_1(M)$  és topològicament  $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$  i podem visualitzar  $T_1(M)$  com el cub de



$\mathbb{R}^3, [-\pi, \pi]^3$ , amb les degudes identificacions de les cares oposades. A les tres coordenades de  $[-\pi, \pi]^3$  en direm  $(u, s, \alpha)$ .

Suposem que tenim una parametrització de  $G$  no pas per l'arc sinó tal que el paràmetre varii a  $[-\pi, \pi]$ . Llavors un punt  $v_x \in T_1(M)$  vindrà representat per les coordenades  $u, s$  que corresponen a  $x$  (el punt de  $M$  en que s'aplica  $v_x$ ), i la tercera coordenada  $\alpha$  que identifica a  $v_x$  dins de  $T_{1x}(M)$ , vindrà donada per l'angle que forma el vector  $v_x$  amb el paral·lel que passa per  $x$ .



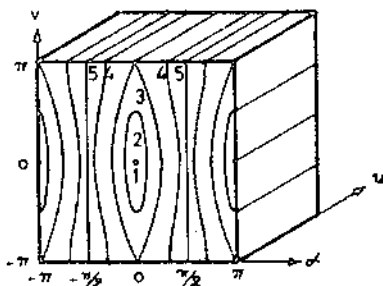
Com que el mòdul de  $v_x$  és 1, el cosinus de  $\alpha$  vindrà donat per la longitud de  $\dot{u} \frac{\partial}{\partial u}$ , que és  $g_y(s) \cdot \dot{u} = P_u / g_y(s)$ . Per tant  $\alpha = \arccos P_u / g_y(s)$ , i les superfícies invariants vistes a  $[-\pi, \pi]^3$  vindran donades per  $P_u = g_y(s) \cdot \cos \alpha = \text{constant}$ .

Com que a l'expressió de  $P_u$  no apareix la coordenada  $u$ , la forma de les superfícies invariants és la mateixa per a tots els plans  $u = u_0$ . Així doncs, les corbes  $P_u = g_y(s) \cdot \cos \alpha = \text{constant}$  en un pla  $(s, \alpha)$  ens determinaran les superfícies  $P_u = \text{constant}$  de  $[-\pi, \pi]^3$ . A la família de corbes  $P_u = \text{constant}$  de  $[-\pi, \pi]^2$  en direm el Retrat de les Varietats Invariants del flux.

## 11.- Retrat de les Varietats Invariants en el tor de revolució.

Comencem per estudiar el retrat de les Varietats Invariants del flux geodèsic del Tor de revolució (estudi ja fet per E. Lacomba a [9]). El tor de revolució és la superfície de revolució generada per la corba  $g(v)=(r.\sin v, R+r.\cos v)$ ,  $v \in ]\pi, \pi]$ . En conseqüència,  $r$  és el radi interior del Tor i  $R$  l'exterior; l'ordenada màxima de la corba és  $R+r$  i la mínima  $R-r$ . Cal exigir que  $r < R$ .

La "foliació" de  $[-\pi, \pi]^3$  en superfícies invariants donades per la funció  $P_u=(R+r.\cos v) . \cos u$  té l'aspecte següent

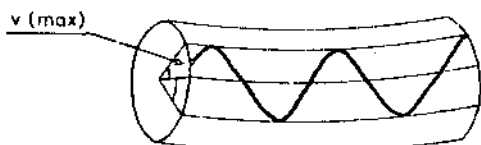


El dibuix de la façana anterior és el que anomenem el retrat.

El significat de les corbes numerades és el següent:

1.- Correspon a  $P_u=R+r$  (valor màxim). No és  $T^2$  sinó  $S^1$ . Correspon a la geodèsica que recorre l'equador exterior ( $v=0$ ) amb  $\dot{u} > 0$ .

2.- Tota aquesta família de superfícies (entre 1 i 3) són els tors  $T^2$  que corresponen a  $P_u \in (R-r, R+r)$ . Aquests tors es projecten sobre  $M$  cobrint una banda de valors de  $v$  entre  $v(\max)=\arccos(P_u-R)/r$  i  $-v(\max)$ . Les trajectòries en aquests tors un cop projectades a  $M$  donen lloc a les geodèsiques tipus  $\gamma_1$  (vegi's [2], Apèndix 1) que tenen l'aspecte del dibuix:



3.- Correspon a  $P_u = R-r$ . És una superfície degenerada consistent en dos tors amb un equador comú (l'equador  $\alpha = 0$ ,  $v = \pm \pi$ ,  $u \in [-\pi, \pi]$ ). Per raons de simetria i d'unicitat de solucions aquesta intersecció ha de ser una òrbita del flux: correspon a l'equador  $v = \pm \pi$  (interior) de  $M$  recorregut amb  $\dot{u} > 0$ .

Les demés geodèsiques que corresponen a aquest nivell són les del tipus  $\gamma_2$  (separatrius). Sobre elles  $v = \pm(1-(R-r)/(R-r \cdot \cos v))^{1/2}$  i per tant tendeixen asimptòticament a l'equador interior. Dibuixant  $M$  com un tor pla les geodèsiques tindrien l'aspecte següent:



Cadascun dels tipus correspon a un dels tors que s'intersecten.

4.- Correspon a  $P_u \in (0, R-r)$ . Dóna lloc a les geodèsiques  $\gamma_3$ . Es reuneix disjunta de dos tors  $T^2$ .

En el dibuix següent es representen sobre  $M$  dues geodèsiques corresponents al mateix valor de  $P_u$  però de dues components connexes diferents.

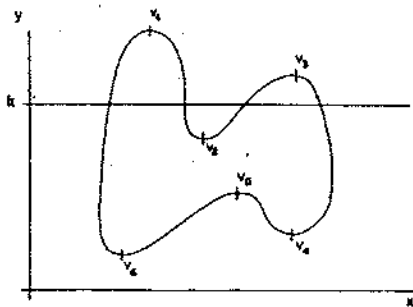


5.- Correspon a  $P_u = 0$ . Dóna lloc als meridians: amb  $\dot{v} > 0$  en una component connexa i amb  $\dot{v} < 0$  en l'altra.

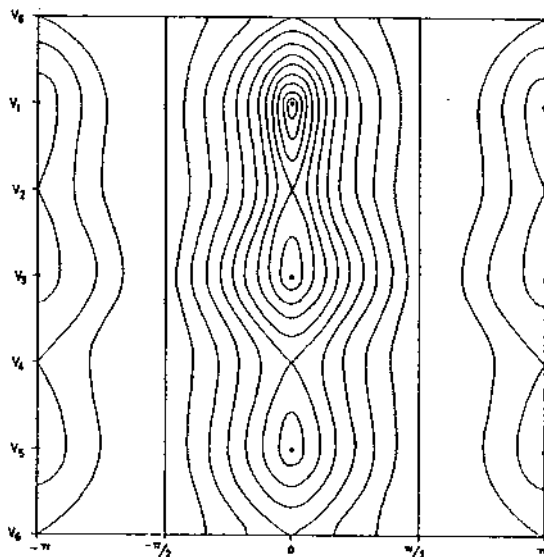
Els valors negatius de  $P_u$  provenen de valors de  $|\alpha| > \pi/2$ . Com es veu al dibuix són simètrics respecte als positius degut a que  $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos(\frac{\pi}{2} + x)$ . Les geodèsiques de  $M$  que s'obtidrien per projecció serien les mateixes que per  $P_u > 0$ , però recorregudes al revés.

12.- Per a dibuixar el retrat de les varietats invariants d'un flux geodèsic en una superfície de revolució qualsevol, recordem que l'únic que s'ha de fer és representar les corbes de nivell de la funció  $\cos \alpha \cdot g_y(v)$  al pla  $(\alpha, v)$ , que serà  $[-\pi, \pi]^2$  si suposem que el paràmetre  $v$  de  $g$  pren valors entre  $-\pi$  i  $\pi$ . El dibuix que surti sempre serà simètric respecte a l'eix  $\alpha = 0$  i respecte a  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ .

Concretament, donada una corba tancada, com per exemple la del dibuix de més avall, el retrat de les varietats invariants es troba de la següent manera:



Considerem el valor del moment angular  $k$  positiu, que utilitzarem com a paràmetre quan vagi decreixent. Quan  $k$  prengui el valor corresponent al màxim més gran tindrem al retrat de les varietats invariants un punt corresponent a l'equador de radi màxim. Al anar disminuint  $k$  ens apareixeran cercles al voltant d'aquest punt, representant els tors  $I_k$  que envolten a l'equador exterior.



Quan  $k$  prengui el valor d'un segon màxim ens apareix un altre punt aïllat corresponent a un altre equador exterior, que també s'anirà voltant de cercles corresponents a les  $I_k$  per a valors més petits de  $k$ .

Quan s'arribi a un mínim relatiu entre els dos màxims tindrem que els tors que envolten els equadors exteriors s'uneixen en una trajectòria tancada (equador interior) comuna, mentre que el reste de trajectòries són doblement asimptòtiques a aquesta. En el retrat aixó correspon a una figura de 8.

Per a valors més petits de  $k$ , els dos màxims es troben encerclats en comú, i es van afegint noves "capes" que al seu torn poden fusionarse amb les provinents d'altres màxims al arribar als mínims relatius, donant lloc a tors enganxats.

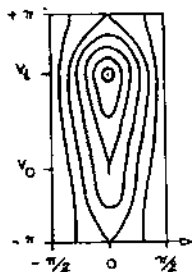
Tot això fins arribar al valor de  $k$  corresponent al mínim d'ordenades, en que la  $I_k$  s'enganxa amb ella mateixa en un equador exterior que ve representat pel punt central del marge superior i inferior del dibuix.

Per a valors més petits de  $k$  (però encara positius) les  $I_k$  corresponents consisteixen en dos tors, que venen representats per dues línies que uneixen els marges superior i inferior del dibuix. Fins a arribar a  $k=0$  en que aquestes línies son les rectes  $\alpha = \pm \pi/2$ , que corresponen als meridians.

Per a valors negatius de  $k$  les línies que apareixen son simètriques a les ja obtingudes, amb la diferència de que  $\alpha$  pren valors a  $[-\pi, -\pi/2]$  i a  $[\pi/2, \pi]$  en lloc de prendre's a  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

### 13.- Dos exemples no genèrics.

a) Un punt d'inflexió. Suposant que per un valor  $v_0 \in [-\pi, \pi]$  es compleix  $\dot{g}_y(v_0) = 0$ , però que la primera derivada diferent de zero a  $v_0$  fos d'ordre senar, el retrat de les varietats invariants seria com indica el dibuix:



De fet  $g_y(v_0)$  pertany al conjunt de punts de bifurcació, i com es veu, el conjunt  $P = g_y(v_0)$  no és una varietat diferenciable, doncs té un plec. Té l'aspecte del dibuix:



L'existència del plec es demostra de la següent manera:  
 Sigui  $2n+1$  la primera derivada de  $g_y$  que no és zero a  $v_0$ .  
 Sobre la corba  $g_y(v) \cdot \cos \alpha = g_y(v_0)$  podem escriure

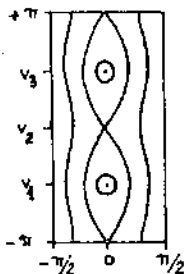
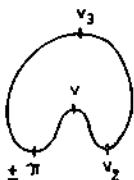
$$\alpha = \arccos (g_y(v_0)/g_y(v)).$$

$$\frac{d\alpha}{dv} = \frac{g'_y(v_0) \dot{g}_y(v)}{g_y(v) \sqrt{g_y^2(v) - g_y^2(v_0)}}.$$

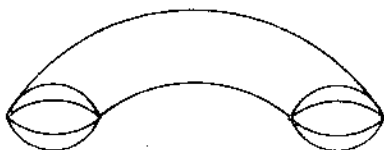
El numerador és de l'ordre de  $(v-v_0)^2$ , i el denominador de  $(v-v_0)^{(2n+1)/2}$ .

Com que  $n \geq 1$  tenim que  $d\alpha/dv$  tendeix a zero quan  $v$  tendeix a  $v_0$ .

b) Dos mínims amb la mateixa ordenada.



La superfície  $P_u = g_y(v_0) = (\pm\pi)$  és una superfície degenerada consistent en dos tors enganxats no pas per un equador comú, sinó per dos.



De la mateixa manera obtindriem superfícies degenerades al fer coincidir l'ordenada d'un nombre qualsevol de mínims:



14.- Estabilitat estructural. Es dirà que el flux geodèsic en una superfície de revolució  $M(g)$  és estructuralment estable quan al canviar  $g$  per una altra corba prou propera a  $g$  les propietats qualitatives del retrat de fases es conservin. La definició implica, per tant, haver definit prèviament qué s'entén per fluxos estructuralment equivalents, en el sentit de que els retrats de fases tinguin les mateixes propietats qualitatives.

L'equivalència estructural de dos sistemes dinàmics en general vol dir que existeix un homeomorfisme de l'espai de fases del primer en el del segon que porta òrbites en òrbites. En el nostre cas això és demanar massa: com que el flux en els tors invariants és homogeni, l'homeomorfisme dels espais de fases hauria de conservar números de rotació (vegi's el Capítol III), i no hi hauria fluxos estructuralment estables en cap topologia acceptable. La nostra definició exigirà només l'existència d'un homeomorfisme que porti conjunts invariants tancats en conjunts invariants tancats.



El propòsit d'aquest apartat és demostrar que l'estabilitat estructural de flux geodèsic en superfícies de revolució és una propietat genèrica.

Notació: Direm  $Z_n$ , per  $n \geq 2$ , al conjunt dels encabiments (imbeddings)  $g: S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  de classe  $C^n$ .  $Z_n$  té una estructura d'espai topològic donada per la norma de la convergència uniforme de la funció i les derivades fins al ordre  $n$ . Pot comprovar-se que  $Z_n$  és un obert de  $\mathcal{C}^n(S^1; \mathbb{R}^2)$ .

Definició: Donades  $g^1, g^2 \in Z_n$  direm que les superfícies de revolució  $M(g^1)$  i  $M(g^2)$  tenen els fluxos geodèsics estructuralment equivalents si existeix un homeomorfisme  $F: T_1(M(g^1)) \rightarrow T_1(M(g^2))$  que envia els conjunts invariants pel flux geodèsic del primer (definites com les components connexes dels  $I_k$ ) en els del segon.

Si, com a l'apartat nº 10, parametrizem  $T_1(M)$  per  $(u, s, \alpha)$ , notem que l'homeomorfisme abans esmentat existeix si i sols si existeix un homeomorfisme  $f: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$  tal que envia les corbes de nivell de la funció  $g_Y^1(s) \cdot \cos \alpha$  en les de la funció  $g_Y^2(s) \cdot \cos \alpha$ . Prenem aquesta darrera com a definició d'equivalència entre  $g^1$  i  $g^2 \in Z_n$ .

Lema: Donades  $g^1$  i  $g^2$  a  $Z_n$  és condició suficient per que siguin equivalents que existeixin homeomorfismes  $z: S^1 \rightarrow S^1$ , i  $t: \text{Im } g_Y^1 \rightarrow \text{Im } g_Y^2$ ,  $t$  creixent, tals que commuti el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 & \xrightarrow{z} & S^1 \\
 g_Y^1 \downarrow & & \downarrow g_Y^2 \\
 \text{Im } g_Y^1 & \xrightarrow{t} & \text{Im } g_Y^2
 \end{array}$$

(Aquesta condició és pràcticament equivalent a que  $g_Y^1$  i  $g_Y^2$  siguin topològicament equivalents (vegi's [5], §1)).

Demostració: Anem a construir  $f: T^2 \rightarrow T^2$  que conservi corbes de nivell. Per la simetria del retrat de fases n'hi haurà prou amb definir

$$f: [0, \pi/2] \times S^1 \rightarrow [0, \pi/2] \times S^1.$$

Si  $t$  és creixent podem estendre'l a  $T: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , homeomorfisme també creixent tal que  $T(0) = 0$ .

Definim  $f(\alpha, s) = (\text{arc cos} \{ T(g_Y^1(s) \cdot \cos \alpha) / T(g_Y^1(s)) \}, z(s))$ .

Per definició commuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} [0, \pi/2] \times S^1 & \xrightarrow{f} & [0, \pi/2] \times S^1 \\ \downarrow g_Y^1(s) \cdot \cos \alpha & & \downarrow g_Y^2(s) \cdot \cos \alpha \\ \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^+ \end{array}$$

i en conseqüència  $f$  porta corbes de nivell en corbes de nivell. //

Definició: Sigui  $g \in Z_n$ . Direm que el flux geodèsic de  $M(g)$  és  $(n)$ -estructuralment estable si  $g$  és un punt interior, en la topologia de  $Z_n$ , a la seva classe d'equivalència, per la relació d'equivalència definida a  $Z_n$  més amunt. Direm  $E \subset Z_n$  al conjunt dels estructuralment estables.

Proposició: En és obert i dens a  $Z_n$ . (La propietat de ser estructuralment estable és genèrica).

Demostració:

Per la seva definició, En és obert a  $Z_n$ .

Per a veure que és dens veurem que conté un conjunt dens. Definim el conjunt  $Z \subset Z_n$  per:  $g \in Z$  si compleix

- i)  $g$  és de classe  $C^\infty$ .
- ii)  $g_y$  no té punts crítics degenerats.
- iii) Si  $s_1$  i  $s_2$  són dos punts crítics de  $g_y$ , llavors  $g_y(s_1) \neq g_y(s_2)$ .

Definim  $Z_\infty$  com els encabiments (imbeddings) de  $Z_n$  de classe  $C^\infty$ . Com que  $Z_\infty$  és dens a  $Z_n$  (en la topologia de  $Z_n$ ) només ens cal demostrar que  $Z$  és dens a  $Z_\infty$ : sigui  $(g_x, g_y) \in Z_\infty$ .

Sabem que existeix una successió  $g^n$  de funcions de  $S^1$  en  $\mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  i que compleixen ii) i iii), que tendeixen a  $g_y$  en la topologia de  $C^n$  (Morse) (vegi's [11] §6.8). Les corbes  $(g_x, g^n)$  tendeixen a  $(g_x, g_y)$  a  $C^n(S^1; \mathbb{R}^2)$ , i com que  $Z_n$  és un obert de  $C^n(S^1; \mathbb{R}^2)$ , per  $n$  prou gran les corbes  $(g_x, g^n)$  són encabiments, i de classe  $C^\infty$ .

Ens falta veure que  $Z \subset \text{En}$ . Ho veurem aplicant el lema anterior.

sigui  $g \in Z$ . Com que  $g$  compleix ii) i iii), i  $n \geq 2$ , existeix  $\epsilon > 0$  tal que si  $\|g_y - h\|_n < \epsilon$  llavors  $h$  té el mateix nombre de punts crítics que  $g_y$ , tots no degenerats, i si  $\epsilon$  és prou petit a cada punt crític  $s_i$  de  $g_y$  n'hi co-

respon un de  $h$ ,  $z(s_1)$  en el sentit de que  $|s_i - z(s_i)| < \delta$ ,  
i  $\delta$  tendeix a zero quan  $\epsilon$  tendeix a zero. Si  $\epsilon$  és prou  
petit és obvi que  $z(s_1)$  és un màxim (resp. un mínim)  
si  $s_i$  és un màxim (resp. un mínim).

Si  $\epsilon$  és prou petit es compleix també que si  $g_Y(s_1) <$   
 $< g_Y(s_2)$ , llavors  $h(z(s_1)) < h(z(s_2))$ . Per tant podem de-  
finir  $t: \text{Im } g_Y \rightarrow \text{Im } h$ , creixent tal que  $t(g_Y(s_i)) = h(z(s_i))$ .

Busquem  $z: S^1 \rightarrow S^1$  homeomorfisme que commuti amb  $g_Y$ ,  
 $t$  i  $h$ , i es pugui aplicar el lema anterior.  $z$  està defi-  
nit ja sobre els punts crítics  $s_i$  de  $g_Y$ . En el interval  
 $[s_i, s_{i+1}]$   $z$  s'ha d'aplicar en  $[z(s_i), z(s_{i+1})]$ , però com  
que  $h$  és monòtona entre  $z(s_i)$  i  $z(s_{i+1})$  podem definir  $h^{-1}$   
contínua, i aleshores definir

$$z|_{[s_i, s_{i+1}]} = h^{-1} \circ t \circ g_Y \quad . // .$$

### Capítol III

#### Número de Rotació

Com és sabut, el flux en cada tor invariant de  $T_1(M)$  està determinat qualitativament pel seu número de rotació  $\rho$ . En el nostre cas, com a conseqüència del Teorema de Liouville-Arnold, existeixen noves variables  $I_1, I_2, \theta_1, \theta_2$  (variables acció-angle) en les que el flux en el tor  $I_1, I_2 = \text{constants}$ , dona lloc a òrbites que són les rectes de pendent  $\rho$  si imaginem el tor com el quadrat  $[0, 2\pi]^2 \ni (\theta_1, \theta_2)$  amb les identifications habituals. Si el número de rotació, que depèn del tor invariant, és racional llavors les trajectòries del moviment són periòdiques, i quasi periòdiques en altre cas.

Aquest capítol és fonamentalment tècnic en el sentit de que en ell s'estudia el número de rotació del flux en els tors invariants en funció del que serà necessari en el capítol IV, on es demostrarà que si es modifica lleugerament la superfície, perdent inclús la propietat de ser de revolució, llavors els equadors exteriors es conserven, i en general segueixen sent estables.

Però també tractarem en aquest capítol de qüestions bastant marginals al fil principal d'aquest treball, però que podem resoldre amb l'ajuda del que sabem sobre el número de rotació. Ens referim a qüestions relacionades amb el problema de la geodèsica tancada (vegi's [6] com a referència clau en aquest tema).

En resum, el contingut del capítol és: determinació del número de rotació en els tors de  $T_1(M)$  invariants pel flux geodèsic; estudi de la regularitat de la funció número de rotació que dóna localment el número de rotació en funció del moment angular; estudi d'algunes propietats d'aquesta funció en el cas del tor de revolució; superfícies amb número de rotació constant.

### 15.- Definicions.

En un tor bidimensional  $T^2$  amb coordenades angulars  $a$  i  $b$  en que tinguem definit un camp  $X$ , definim número de rotació del flux associat a  $X$  en un punt  $x \in T^2$  com

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{a}(t,x)}{\bar{b}(t,x)},$$

on  $(\bar{a}(t,x), \bar{b}(t,x))$  és la corba integral del camp  $X$  estès a l'espai recubridor  $\mathbb{R}^2$  i que quan  $t=0$  passa per  $x$ . Per definició:

$$\bar{a}(t,x) = \int_0^t \frac{d a}{d t}(t,x) dt, \quad \bar{b}(t,x) = \int_0^t \frac{d b}{d t}(t,x) dt,$$

si  $(a(t,x), b(t,x))$  és la corba integral a  $T^2$ .

En resum: el número de rotació de  $X$  a  $x$  és la fracció mitjana de voltes que la trajectòria que passa per  $x$  ha donat en la direcció de  $a$  quan n'ha donat una en la direcció de  $b$ .

Es evident que el número de rotació és el mateix per punts de la mateixa òrbita. Denjoy a [4], utilitzant aplicacions de  $S^1$  en  $S^1$  induïdes pel flux, provà que és el mateix per a totes les òrbites. En el nostre cas particular això és conseqüència immediata del següent

**Lema:** Si  $k \notin \Sigma$  i  $T$  és un tor de  $I_k$  amb coordenades globals  $u, v$ , ón  $u$  és la mateixa que la de  $T(M)$ , i si  $(u_0, v_0)$  i  $(u_1, v_1)$  son dos punts qualsevols de  $T$  tals que  $(u(t), v(t))$  és la trajectòria de  $X$  que quan  $t=0$  passa pel primer, llavors existeix  $t_1$  tal que la trajectòria que quan  $t=0$  passa per  $(u_1, v_1)$  és  $(u(t)+u_1-u_0, v(t+t_1))$ .

**Demostració:** De les equacions del moviment es dedueix que si  $k \notin \Sigma$  i  $X$  és el camp restringit a  $T$ ,  $X$  no es redueix a tenir només component en  $\frac{\partial}{\partial u}$  en cap punt de  $T$ . En conseqüència existeix  $t_1$  tal que  $v(t_1) = v_1$ . Per la unicitat de solució de les equacions del moviment es compleix el lema. //

La definició de número de rotació donada abans és poc pràctica a l'hora de calcular. En donem una d'equivalent (vegi's [8]):

**Proposició:** Sigui  $X = X_u \frac{\partial}{\partial u} + X_v \frac{\partial}{\partial v}$  la restricció del camp a  $T$ . Si  $P_u = k$  i  $k \notin \Sigma$  podem calcular  $\rho$  com

$$\frac{\int_T X_u \, dm}{\int_T X_v \, dm}$$

en que  $m$  és una mesura invariant pel flux i tal que  $m(T) = 1$ .

Demostració:

$$\rho = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{u}(t)}{\bar{v}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \dot{u}(t) dt}{\int_0^t \dot{v}(t) dt} = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \dot{u}(t) dt}{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \dot{v}(t) dt} = \frac{W_u}{W_v}$$

en que, com es veu,  $W_u$  i  $W_v$  son les mitjanes temporals de  $X_u$  i  $X_v$  respectivament. Demostrarem que  $W_u$  existeix i coincideix amb  $\int_T X_u dm$ , i el mateix es fa per  $W_v$ .

El Teorema de Birkhoff-Khinchin (vegi's [2], §6) afirma que la mitjana temporal  $W_u$  existeix q.p.t. condició inicial i com a conseqüència del lema anterior en el nostre cas existirà sempre. El mateix Teorema diu que:

$$\int_T X_u dm = \int_T dm \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \dot{u}(t) dt \right] = W_u \cdot \int_T dm = W_u .$$

#### 16.- Càlcul del número de rotació.

Sigui  $T$  un tor invariant determinat per  $H=1/2$  i  $P_u=k$ . Com hem vist a l'apartat nº 7,  $T$  es projecta sobre  $M$  en una banda produïda per la revolució d'una component connexa de  $G_{|k|}$ . Si aquesta component és de la forma  $g([s_1, s_2])$  llavors podem parametritzar aquesta banda com  $[0, 2\pi] \times [s_1, s_2]$ .

Dividim ara  $T$  en dos casquets:  $T^+ = \{x \in T \mid P_s(x) \geq 0\}$ ,  $T^- = \{x \in T \mid P_s(x) \leq 0\}$  i podem parametritzar cadascun d'ells per  $(u, s) \in [0, 2\pi] \times [s_1, s_2]$  fent correspondre a  $(u, s)$  el



punt  $(k, +(1-k^2/g_Y^2(s))^{1/2}, u, s)$  de  $T^+$ , o bé  $(k, -(1-k^2/g_Y^2(s))^{1/2}, u, s)$  de  $T^-$ .

A l'interior de cada casquet podem escriure la restricció del camp de les equacions del moviment com

$$x = k/g_Y^2(s) \frac{\partial}{\partial u} \pm (1-k^2/g_Y^2(s))^{1/2} \frac{\partial}{\partial s}$$

amb el signe + o - corresponent a  $T^+$  o a  $T^-$  respectivament.

Busquem ara a cada casquet una mesura  $m$  invariant pel flux. Definim  $dm = \pm (1-k^2/g_Y^2(s))^{-1/2} du \wedge ds$ , amb el mateix conveni per als signes. La motivació per a elegir-la es veurà més endavant. Comprovem que és invariant:

$$L_X dm = i_X d(dm) + d(i_X dm) = d\left( \frac{k}{g_Y(s) \sqrt{g_Y^2(s) - k^2}} ds \mp du \right) = 0.$$

Ara, per a poder aplicar la fórmula del número de rotació ens cal fer el canvi de variable  $v = s/Q$  on  $Q = (s_2 - s_1)/\pi$ , a fi de que la nova variable prengui valors entre 0 i  $2\pi$ , igual que  $u$ . Finalment, a l'hora d'integrar dividim per  $m(T)$  de cara a normalitzar la mesura. Queda:

$$W_u = \int_{T^+} \frac{kQ du \wedge dv}{g_Y(Qv) \sqrt{g_Y^2(Qv) - k^2}} \frac{1}{m(T)} + \int_{T^-} \frac{kQ du \wedge dv}{-g_Y(Qv) \sqrt{g_Y^2(Qv) - k^2}} \frac{1}{m(T)}$$

$$W_v = \int_{T^+} \frac{du \wedge dv}{m(T)} + \int_{T^-} \frac{du \wedge dv}{m(T)}$$

Com que, parametritzats per  $u$  i  $s$ , tenim  $T^+ = [0, 2\pi] \times [s_1, s_2]$  i també  $T^- = [0, 2\pi] \times [s_2, s_1]$  (variem l'ordre de  $s_1$  i  $s_2$  per conservar l'orientació), tenim ara que

$$W_u = \frac{2\pi Q}{m(T)} \int_0^\pi \frac{2 \cdot k \, dv}{g_y(Qv) \sqrt{g_y^2(Qv) - k^2}}$$

$$W_v = (2\pi)^2 \frac{1}{m(T)}$$

$$\begin{aligned} \rho &= W_u / W_v = \frac{Q}{2\pi} \cdot \int_0^\pi \frac{2 \, k \, dv}{g_y(Qv) \sqrt{g_y^2(Qv) - k^2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{s_1}^{s_2} \frac{2 \, k \, ds}{g_y(s) \sqrt{g_y^2(s) - k^2}} \end{aligned}$$

Quan  $k$  és més petit que l'ordenada menor de la corba  $G$ , la varietat  $I_k$  està formada per dos tors  $T^2$ , la projecció de cadascun dels quals a  $M$  és tot  $M$ . La diferència entre ells està en el signe de  $P_s$ . En ells el número de rotació és

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \int_G \frac{\pm k \, ds}{g_y(s) \sqrt{g_y^2(s) - k^2}}$$

Recordem que  $s$  és el paràmetre longitud de l'arc. Evidentment aquesta darrera integral convergeix sempre. El que cal veure és si

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{k ds}{g_Y(s) \sqrt{g_Y^2(s) - k^2}}$$

convergeix quan  $|k|$  està entre les ordenades màxima i mínima de  $G$ , doncs l'integral és impròpia al ser

$$g_Y(s_1) = g_Y(s_2) = |k|.$$

Si  $s_1$  i  $s_2$  son els dos únics punts de  $[s_1, s_2]$  en que  $g_Y$  val  $|k|$  i  $\dot{g}_Y(s_1) \neq 0$ ,  $\dot{g}_Y(s_2) \neq 0$  l'integral convergeix, doncs  $g_Y^2(s) - k^2$  és de l'ordre de  $(s-s_i)$  per  $s$  prop de  $s_i$  ( $i=1,2$ ).

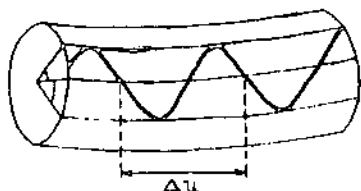
En canvi, si existeix  $s_0 \in (s_1, s_2)$  tal que  $g_Y(s_0) = |k|$  (amb el que  $\dot{g}_Y(s_0) = 0$  i  $k \in \Sigma$ ), o bé si  $\dot{g}_Y$  és zero a  $s_1$  o  $s_2$  (igualment  $k \in \Sigma$ ), aleshores  $(g_Y^2(s) - k^2)^{-1/2}$  és de l'ordre de  $(s-s_i)^{-1}$  per  $s$  prop de  $s_i$  ( $i=0,1,2$ ) i l'integral divergeix.

Queda doncs demostrada la següent

Proposició: Sigui  $T \subset I_k$  un tor invariant tal que  $\pi(T) = [0, 2\pi] \times [s_1, s_2]$ . Aleshores el número de rotació del flux a  $T$  ve donat per

$$\frac{1}{\pi} \int_{s_1}^{s_2} \frac{k ds}{g_Y(s) \sqrt{g_Y^2(s) - k^2}} \quad \text{si } k \notin \Sigma.$$

17.- Del lema de l'apartat n<sup>o</sup> 15 es dedueix el següent: si  $\rho$  és finit a T i  $(u(t), v(t))$  és la trajectòria de T tal que  $u(0) = u_0$  i  $v(0) = v_0$ , al cap d'un cert temps  $t_0$  es compleix que  $v(t_0) = v_0$ . Si diem  $\Delta u = u(t_0) - u(0)$  tenim que  $u(t+t_0) = u(t) + \Delta u$ , i  $v(t+t_0) = v(t)$ . Amb això concluïm que la trajectòria projectada a M té la típica forma de ones en el casquet corresponent al voltant de l'equador exterior, i que la longitud d'ona és  $\Delta u$ .



Resulta clar que la fracció mitjana de voltes donades en la direcció de  $u$  quan n'ha donat una en la direcció de  $v$  (o de  $s$ ) és  $\Delta u / 2\pi$ , i això ho demostra clarament el càlcul, doncs

$$\frac{\dot{u}}{\dot{s}} = \frac{k}{g_y(s) \sqrt{g_y^2(s) - k^2}}$$

$$\Delta u = \int_{s_1}^{s_2} \frac{2k ds}{g_y(s) \sqrt{g_y^2(s) - k^2}} = 2\pi\rho,$$

(la coherència amb aquest resultat és el que ens ha induït a elegir  $dm$  tal com s'ha fet a l'apartat n<sup>o</sup> 16).

18.- La funció número de rotació.

Si sobre un cert tor invariant amb  $P_u = k_0$  és  $k_0 \notin \Sigma$ ,

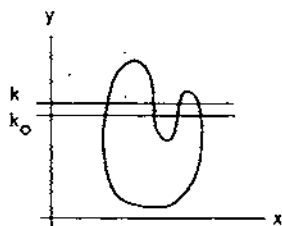
aleshores existeix a  $T_1(M)$  un entorn del tor integrament foliat per tors invariants de manera que correspon un valor diferent de  $P_u$  a cada tor diferent. Per tant, en un cert interval  $(k_0 - \epsilon, k_0 + \epsilon)$  està definida la funció número de rotació  $k \mapsto \rho(k)$ , on  $\rho(k)$  és el número de rotació del flux en el tor proper a l'inicial en que  $P_u = k$ . És obvi que  $\rho(k)$  no és una funció unívoca, considerada globalment.

Analfíticament:

$$\rho(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{s_1(k)}^{s_2(k)} \frac{2k ds}{g_Y(s) \sqrt{g_Y^2(s) - k^2}}$$

$$s_1(k) \leq s_2(k),$$

$$g_Y(s_1(k)) = g_Y(s_2(k)) = |k|.$$



Proposició: Si  $g_Y$  és de classe  $C^n$  en  $s$ , llavors  $\rho(k)$  és de classe  $C^{n-1}$  en  $k$ .

Demostració: (Resulten difícils d'utilitzar aquí les regles habituals de derivació d'expressions integrals, doncs s'obtenen indeterminacions només resolubles (potser) amb canvis de variable prou enginyosos. Això justifica el mètode seguit en la demostració, que és una mica rebuscat. Existeix una referència a [16], §2.2 per a un cas semblant, però que

no hem pogut consultar.)

Si bé és difícil derivar explícitament l'expressió de  $\rho(k)$ , es veu fàcilment que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{s_1(k)}^{s_2(k)} -2(1-k^2/g_Y^2(s))^{1/2} ds$$

és una primitiva de  $\rho(k)$ . Aquesta funció té una interpretació interessant: considerem un pla de  $T_1(M)$  definit per  $u = \text{constant}$  (localment plà, globalment  $T^2$ ), coordinat per  $P_s, s$ . En ell, amb altres coordenades, hem considerat al apartat nº 10 la família de corbes de nivell de la funció  $P_u = g_Y(s) \cdot (1 - P_s^2)^{1/2}$ . Considerem l'àrea donada per l'element  $dP_s \wedge ds$  del recinte limitat per la corba  $P_u = k$ :

$$A(k) = \int_{P_u \geq k} dP_s \wedge ds = \int_{P_u = k} P_s ds = 2 \int_{s_1(k)}^{s_2(k)} (1 - k^2/g_Y^2(s))^{1/2} ds$$

i concluïm que  $\frac{d}{dk} A(k) = -2\pi \rho(k)$ .

El que ens queda per veure és que  $A(k)$  és de classe  $C^n$ , això és conseqüència del lema de l'apartat següent.//.

19.- Lema: Sigui  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $B$  un obert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f$  de classe  $C^n$ . Sigui  $k_0$  un valor regular de  $f$  tal que  $\{(x, y) \mid f(x, y) = k_0\}$  sigui una corba tancada i que el seu interior sigui  $\{(x, y) \mid f(x, y) > k_0\}$ . Aleshores

$$A(k) = \int_{f \geq k} dx \wedge dy$$

té sentit per  $k$  en un entorn de  $k_0$ , i  $A(k)$  és de classe  $C^n$  en  $k$ .

**Demostració:** Considerem a  $B$  el camp de vectors  $X = (\text{grad } f) / \|\text{grad } f\|^2$  que està definit al menys en un entorn de la corba  $f = k_0$ , i considerem el grup uniparamètric local de difeomorfismes que li és associat,  $F_t$ .

Es compleix

$$\frac{d}{dt} f(F_t(p)) = \langle \text{grad } f, (\text{grad } f) / \|\text{grad } f\|^2 \rangle = 1$$

i per tant  $f(F_t(p)) = f(p) + t$ .

Considerem ara el camp (ortogonal a l'anterior)

$$Y = f_y \frac{\partial}{\partial x} - f_x \frac{\partial}{\partial y} \quad (\text{gradient simplèctic de } f) \text{ del qual}$$

les corbes  $f = \text{constant}$  en són les integrals. Sigui

$q: [0, s_0] \rightarrow \mathbb{R}^2$  la corba integral de  $Y$  sobre la que  $f = k_0$ .

Tenim:

$$\frac{d}{dk} A(k) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{k \leq f \leq k+h} dx \wedge dy.$$

Considerem el difeomorfisme  $[0, s_0] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow B$

donat per

$(s, t) \longmapsto F_t(q(s))$ . Si  $J(s, t)$  és el seu jacobià es veu que  $J(s, 0) = 1$ . Pel Teorema del canvi de variable i el del valor mig del càlcul integral tenim:

$$\frac{dA}{dk}(k_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{s_0} ds \int_0^h J(s, t) dt = \int_0^{s_0} J(s, 0) ds = s_0.$$

Sabem que  $s_0$  és el període de la trajectòria  $f = k_0$  vista com a corba integral de  $Y$ . Com que  $Y$  és un camp de classe  $C^{n-1}$ , aplicant el teorema de diferenciabilitat successiva respecte a les condicions inicials de les solucions d'una equació diferencial ordinària, i el teorema de la funció implícita és fàcil veure que el període és una funció de classe  $C^{n-1}$  en  $k$ .

20.- Comentari: L'haver obtingut  $\rho(k)$  com a derivada de la funció  $A(k)$  és un fet en principi sorprenent, però anàleg al que succeeix per a l'expressió del període de les solucions d'un sistema hamiltonià amb un grau de llibertat. I això ja no és tant sorprenent si ens mirem  $\rho(k)$  com la longitud d'ona a que hem fet referència a l'apartat 17, i per tant com una mena de període de la funció que ens dona  $s$  en funció de  $u$  sobre l'òrbita.

Creiem també que aquest no és un fet exclusiu del flux geodèsic en superfícies de revolució, sinó que d'alguna manera pot trobar-se en altres problemes bidimensionals integrables. Per exemple: en un camp de forces centrals, en que es conserva l'energia ( $E$ ) i el moment angular ( $P$ ), el número de rotació en un cert tor invariant de l'espai de fases amb energia-moment  $(E_0, P_0)$  és (vegi's

[16] 2.2):



$$\rho = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2P_0} \int_{u_2}^{u_1} (2E_0 - 2V_{P_0}(1/u))^{-1/2} du,$$

en que  $V_P$  és el potencial efectiu,  $u=1/r$ ,  $r$  és la distància radial,  $V_{P_0}(u_1) = V_{P_0}(u_2) = E_0$ , i per qualsevol  $u \in [u_1, u_2]$ ,

$$V_{P_0}(u) \geq E_0.$$

Fixat  $P_0$  i variant  $E$ ,  $\rho(E)$  és la derivada respecte a  $E$  de

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{2P_0} \int_{u_2}^{u_1} (2E - 2V_{P_0}(1/u))^{1/2} du,$$

que coincideix, excepte un factor constant, amb el període de la corba  $f(x,y) = 1/2(x/2P_0)^2 + V_{P_0}(1/y) = E$ , vista com a solució del sistema hamiltonià donat per la funció de Hamilton  $f(x,y)$  amb  $x$  i  $y$  canòniques.

Finalment, notem que en general l'expressió explícita de  $\rho(k)$  difícilment podrà expressar-se en termes de funcions elementals. Inclús per a superfícies de revolució senzilles, com el tor de revolució, ens ha resultat impossible (exceptuant els casos trivials, com l'esfera, en que el número de rotació és constant, que estudiarem més endavant).

21.- En aquest apartat ens dedicarem a estudiar localment la funció número de rotació en els tors que envolten un equador exterior aïllat  $s = s_0$ . Concretament, a partir dels valors de  $g_y$  i de les seves derivades a  $s = s_0$  calcularem explícitament els límits de  $\rho(k)$  i de  $\rho'(k)$  quan  $k$  tendeix a  $g_y(s_0)$ , és a dir els límits de  $\rho$  i de  $\rho'$  quan ens aproximem a l'equador desde els tors que l'envolten. Aquests càlculs ens seran necessaris en el Capítol IV.

El mètode que utilitzarem m'ha estat proposat per el Dr. Simó i simplifica considerablement els meus càlculs anteriors.

Suposem, per a fixar idees, que  $s_0 = 0$  i que  $g_y(0) = R$ .

Concretament, el que farem serà donar el desenvolupament de Taylor fins al tercer terme de la funció  $A(k)$  definida a l'apartat nº 18, al voltant de  $k = R$

$$A(k) = 2 \int_{s_1(k)}^{s_2(k)} (1 - k^2/g_y^2(s))^{1/2} ds = 2 \int_{s_1(k)}^{s_2(k)} \frac{\sqrt{g_y(s)+k} \sqrt{g_y(s)-k}}{g_y(s)} ds.$$

Si  $g_y(s) = R + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 + O(s^5)$ , introduïm una nova variable  $z$  definida per  $g_y(s) = R + a_2 z^2$ . Si diem  $\Delta = R - k$  es compleix:

$$\sqrt{g_y(s)+k} = \sqrt{2R} \left[ 1 - \frac{1}{4R} (\Delta - \alpha_2 z^2) + 0(\Delta - \alpha_2 z^2)^2 \right],$$

$$\sqrt{g_y(s)-k} = \sqrt{\Delta + \alpha_2 z^2},$$

$$\frac{1}{g_y(s)} = \frac{1}{R} \left[ 1 - \frac{\alpha_2}{R} z^2 + 0(z^3) \right],$$

$$ds = \left[ 1 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2} z + \left( \frac{15}{8} \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} - \frac{3}{2} \frac{\alpha_4}{\alpha_2} \right) z^2 + 0(z^3) \right] dz,$$

$$A(k) = 2 \int_{-\sqrt{\frac{-\Delta}{\alpha_2}}}^{+\sqrt{\frac{-\Delta}{\alpha_2}}} \left[ 1 - \frac{\alpha_2}{R} z^2 + 0(z^3) \right] \sqrt{2R} \left[ 1 - \frac{1}{4R} (\Delta - \alpha_2 z^2) + \right.$$

$$\left. + 0(\Delta - \alpha_2 z^2)^2 \right] \frac{1}{R} \sqrt{\Delta + \alpha_2 z^2} \times \left[ 1 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2} z + \left( \frac{15}{8} \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} - \frac{3}{2} \frac{\alpha_4}{\alpha_2} \right) z^2 + 0(z^3) \right] dz.$$

Fem el nou c.d.v.  $\sqrt{\frac{-\Delta}{\alpha_2}} \sin t = z$ , i ens queda

$$A(k) = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{R}} \frac{\Delta}{\sqrt{-\alpha_2}} \left[ \left( 1 - \frac{\Delta}{4R} \right) + \left( 1 - \frac{\Delta}{4R} \right) \left( \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right) \sqrt{\frac{-\Delta}{\alpha_2}} \sin t \right.$$

$$\left. + \left( \frac{15}{8} \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} - \frac{3}{2} \frac{\alpha_4}{\alpha_2} + \frac{\alpha_2}{4R} - \frac{\alpha_2}{R} \right) \frac{\Delta}{\alpha_2} \sin^2 t + 0(\Delta) \right] \cos^2 t dt.$$

Si fem  $A(k) = b_1 \Delta + b_2 \Delta^2 + O(\Delta^3)$ , tenint en compte que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t = \pi/2 \quad \text{i que} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \sin^2 t = \pi/8,$$

$$\text{tenim que} \quad b_1 = 2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-\alpha R}} \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\sqrt{-g_Y(s_0)} \ddot{g}_Y(s_0)},$$

$$b_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{R} \sqrt{-\alpha R}} \frac{\pi}{8} \left( \frac{-1}{4R} + \frac{3}{2} \frac{\alpha}{\alpha_2} - \frac{15}{8} \frac{\alpha_3}{\alpha_2^2} \right) =$$

$$= \frac{4\pi}{8 \ddot{g}_Y^3(s_0) \sqrt{-g_Y(s_0)} \ddot{g}_Y(s_0)} \times$$

$$= \left[ \frac{-\ddot{g}_Y^3(s_0)}{4R} + \frac{1}{4} \ddot{g}_Y(s_0) \ddot{g}_Y'(s_0) - \frac{5}{12} \ddot{g}_Y^3(s_0) \right].$$

i ens queda:

$$\lim_{k \rightarrow R} \rho(k) = \frac{-b_1}{-2\pi} = \frac{1}{\sqrt{-g_Y(s_0)} \ddot{g}_Y(s_0)},$$

$$\lim_{k \rightarrow R} \rho'(k) = \frac{2b_2}{-2\pi} = \frac{[\ddot{g}_Y^3(s_0)/R - \ddot{g}_Y(s_0) \cdot \ddot{g}_Y'(s_0) + 5/3 \ddot{g}_Y^3(s_0)]}{8 \ddot{g}_Y^3(s_0) \sqrt{-g_Y(s_0)} \ddot{g}_Y(s_0)}.$$

22.- Funció número de rotació del flux geodèsic en el tor de revolució.

Anem a estudiar la funció número de rotació per al cas del tor de revolució de radi exterior  $R$  i radi interior  $r$ , que és la superfície de revolució generada per la corba  $g(v) = (r \cdot \sin v, R + r \cdot \cos v)$ ,  $v \in [0, 2\pi]$ . L'element d'arc sobre  $g$  serà doncs  $r \, dv$ , i la funció número de rotació ve definida per:

$$\rho(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\arccos \frac{k-R}{r}}^{+\arccos \frac{k-R}{r}} \frac{2 \cdot k \cdot r \, dv}{(R+r \cdot \cos v) \sqrt{(R+r \cdot \cos v)^2 - k^2}}$$

per  $R-r < |k| < R+r$ , i

$$\rho(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{k \cdot r \, dv}{(R+r \cdot \cos v) \sqrt{(R+r \cdot \cos v)^2 - k^2}}$$

per  $0 \leq |k| < R-r$ .

Lema:  $\rho'(k) \neq 0$  si  $k \in (-R-r, -R+r) \cup (-R+r, R-r) \cup (R+r, R+r)$ .

Demostració: Per  $|k| < R-r$  a l'expressió del número de rotació els límits d'integració no varien, i s'obté el resultat que volem demostrar derivant sota el signe d'integració.

Per  $k \in (-R-r, -R+r)$  es redueix al cas en que  $k \in (R-r, R+r)$ .

En aquest darrer cas, fent el canvi de variable  $y = R + r \cdot \cos v$  tenim

$$\rho(k) = \frac{2}{\pi} \int_k^{R+r} \frac{k \cdot r \, dy}{y \sqrt{y^2 - k^2} \sqrt{r^2 - (y-R)^2}} .$$

La funció subintegral presenta certa similitud amb la funció

$$\frac{k(R+r)}{y \sqrt{y^2 - k^2} \sqrt{(R+r)^2 - y^2}}$$

la primitiva de la qual és

$$V(k,y) = \frac{-1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left( \frac{2(R+r)^2 k^2 / y^2 - ((R+r)^2 + k^2)}{(R+r)^2 - k^2} \right)$$

i per tant  $\frac{2}{\pi} \int_k^{R+r} \frac{\partial V}{\partial y}(k,y) \, dy = 1$ , resultat que no és

d'estranyar doncs l'integral correspon al número de rotació de les geodèsiques de l'esfera de radi  $R+r$  amb moment angular  $k$ , i, és clar, val 1 doncs són els cercles màxims.

En termes de  $\partial V / \partial y(k,y)$  tenim:

$$\rho(k) = \frac{2}{\pi} \int_k^{R+r} \sqrt{\frac{(R+r)^2 - y^2}{r^2 - (y-R)^2}} \frac{r}{R+r} \partial V / \partial y(k,y) \, dy.$$

$$\text{Si diem } U(y) = \frac{r}{R+r} \sqrt{\frac{(R+r)^2 - y^2}{r^2 - (y-R)^2}} = \frac{r}{R+r} \sqrt{\frac{R+r+y}{r+y-R}}, \text{ tenim,}$$

per la fórmula de l'integració per parts, que:

$$\rho(k) = \frac{2}{\pi} [U(y) V(k,y)]_k^{R+r} - \frac{2}{\pi} \int_k^{R+r} V(k,y) \frac{dU(y)}{dy} \, dy.$$

i queda

$$\rho(k) = \frac{1}{2} U(R+r) + \frac{1}{2} U(k) - \frac{2}{\pi} \int_k^{R+r} V(k, y) \frac{dU}{dy}(y) dy,$$

i derivant:

$$\frac{d}{dk} \rho(k) = - \frac{2}{\pi} \int_k^{R+r} \partial V / \partial k (k, y) \frac{dU}{dy}(y) dy.$$

Com que

$$\partial V / \partial k (k, y) = \frac{-(R+r) \sqrt{(R+r)^2 - y^2}}{((R+r)^2 - k^2) \sqrt{y^2 - k^2}}, \text{ es compleix } \partial V / \partial k < 0$$

per a tota  $y \in [k, R+r)$ . Igualment passa amb  $dU/dy = \frac{r}{r+R} (-R)$ .

$$.(r+y-R)^{-3/2} .(r+y+R)^{-1/2}.$$

En conseqüència,  $\frac{d}{dk} \rho(k) < 0$  per tota  $k \in (R-r, R+r)$ .///

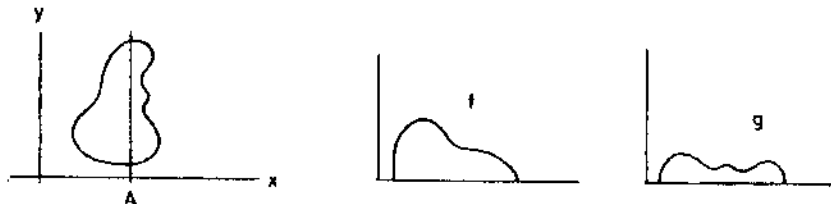
Proposició: El conjunt  $\text{Per}(T_1(T^2))$ , definit com el conjunt de punts de  $T_1(T^2)$  per als que l'òrbita que hi passa és periòdica, és dens a  $T_1(T^2)$ . (Per abús de notació,  $T^2$  vol dir aquí el tor bidimensional de revolució amb paràmetres  $R$  i  $r$  qualsevols i la mètrica induïda per  $\mathbb{R}^3$ .)

Demostració: Es conseqüència del lema anterior i del fet de que una òrbita en un tor invariant de  $T_1(T^2)$  és periòdica si el seu número de rotació és racional.///

### 23.- Una altra expressió del número de rotació.

De cara a estudiar posteriorment les superfícies de revolució amb funció número de rotació constant, dediquem aquest apartat a descriure una nova expressió d'aquest.

Una forma fàcil de descriure una corba de  $\mathbb{R}^2$ , al menys prop d'un màxim relatiu d'ordenades aïllat és per mitjà de les funcions  $f$  i  $g$  que indica el dibuix.

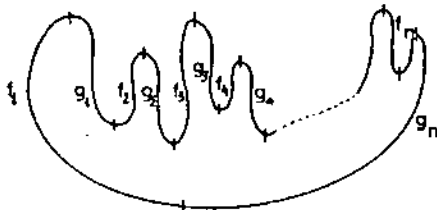


D'aquesta manera els punts de la corba representada per  $f$  i  $g$  són els de la forma  $(A-f(y), y)$  ó bé  $(A+g(y), y)$ , per  $y \in [R_0, R]$ .

L'element d'arc en funció del paràmetre  $y$  s'escriu  $(1+f'(y)^2)^{1/2} dy$  i  $(1+g'(y)^2)^{1/2} dy$ , en una i altra branca respectivament, i per tant el número de rotació serà:

$$\rho(k) = \frac{1}{2\pi} \int_k^R \frac{2k((1+f'(y)^2)^{1/2} + (1+g'(y)^2)^{1/2})}{y(y^2-k^2)^{1/2}} dy$$

Per a globalitzar aquest mètode en una situació com la del dibuix





tindriem:

$$\rho(k) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_k^R \frac{2k(p_i(y) + q_i(y)) dy}{y(y^2 - k^2)^{1/2}}$$

on

$$p_i(y) = (1 + f_i'(y)^2)^{1/2}, \quad q_i = (1 + g_i'(y)^2)^{1/2}$$

estes amb valor zero fora del domini de definició de  $f_i$  i  $g_i$ .

Aquestes integrals són convergents si  $k \notin \Sigma$ .

Fent el canvi de variable  $z = 1/y^2 - 1/R^2$ , i dient

$h(z) = \frac{1}{2} \cdot y \cdot (p(y) + q(y))$  i  $a = (R^2 - k^2)/k^2 \cdot R^2$  ens queda

$$\rho(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{h(z) dz}{\sqrt{a-z}}$$

En aquests termes ens proposem abordar el problema de les superfícies de revolució amb número de rotació constant. L'apartat següent és essencialment tècnic, amb aquesta finalitat.

24.- Lema: Condició necessària i suficient per que

$\int_0^a \frac{h(z) dz}{\sqrt{a-z}} = 0$  per tota  $a \in (0, a_0]$  (amb  $h$  contínua) és

que  $h(z)$  sigui idènticament zero.

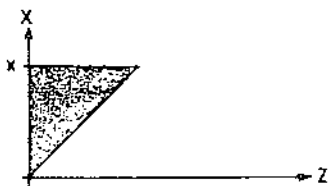
Demostració: (Es tracta d'un cas particular de solució de l'equació de Abel. Vegi's [17] 1.12. Repetim la demostració).

$$\int_0^a \frac{h(z) dz}{\sqrt{a-z}} = 0 \text{ per a tota } a \in (0, a_0] \Rightarrow$$

$$\int_0^x \frac{da}{\sqrt{x-a}} \int_0^a \frac{h(z) dz}{\sqrt{a-z}} = 0 \text{ per a tota } x \in (0, a_0] \Rightarrow$$

$$\int_0^x \int_0^a \frac{h(z) dz da}{\sqrt{x-a} \sqrt{a-z}} = 0 \text{ per a tota } x \in (0, a_0]$$

Aquesta darrera és una integral doble sobre el recinte de la figura.



Aplicant el Teorema de Fubini tenim:

$$\int_0^x h(z) dz \int_z^x \frac{da}{\sqrt{x-a} \sqrt{a-z}} = 0 \text{ per a tota } x \text{ en el interval esmen-$$

tat. Però com que  $\int_z^x \frac{da}{\sqrt{x-a} \sqrt{a-z}} = \pi$ , concluïm que  $\int_0^x h(z) dz = 0$

per a tota  $x \in (0, a_0)$ , i per ser  $h$  contínua, ha de ser  $h(z) = 0$  idènticament.//.

Lema: Donat  $C \in \mathbb{R}$  es compleix que

$$\int_k^R \frac{k((1+f(y))^{1/2} + (1+g^-(y))^2)^{1/2}}{y(y^2 - k^2)^{1/2}} dy =$$

$$= C \cdot \int_k^R \frac{k((1+f'(y))^2)^{1/2} + (1+s'(y))^2)^{1/2}}{y(y^2 - k^2)^{1/2}} dy, \quad \forall k \in [k_0, R),$$

si i sols si

$$(1+f'(y))^2)^{1/2} + (1+g'(y))^2)^{1/2} = C((1+r'(y))^2)^{1/2} + (1+s'(y))^2)^{1/2},$$

per a tota  $y \in [k_0, R)$ .

En paraules geomètriques: dues superfícies de revolució generades per dues corbes  $G$  i  $Q$  de  $\mathbb{R}^2$  que tinguin l'ordenada màxima comuna, compleixen que les funcions número de rotació d'una i altra son proporcionals, és a dir  $\rho_G(k) = C \cdot \rho_Q(k)$ , si i sols si la longitud de  $G_k$  és  $C$  vegades la de  $Q_k$ , per tota  $k$ .

Demostració: Evident després dels canvis de variable fets al apartat anterior, i després del lema de més amunt.

Notem que les longituds de  $G_k$  i de  $Q_k$  són, respectivament,

$$\int_k^R ((1+f'(y))^2)^{1/2} + (1+g'(y))^2)^{1/2} dy, \quad i$$

$$\int_k^R ((1+r'(y))^2)^{1/2} + (1+s'(y))^2)^{1/2} dy //.$$

## 25.- Superfícies amb número de rotació constant (localment).

Proposició (Darboux): (vegi's [3], §582) Donada una superfície de revolució de perfil  $G$  amb un màxim relatiu aïllat per l'ordenada  $R$  es compleix que  $\rho(k) = C$  (constant) per

$k \in [k_0, R)$  si i sols si per a tota  $k \in [k_0, R)$  la longitud de  $G_k$  és  $C$  vegades la del arc de la circumferència de radi  $R$  limitat per la corda  $y=k$ .

**Demostració:** És un cas particular del lema anterior.//.

Es fàcil veure que en una circumferència de radi  $R$  les funcions  $p$  i  $q$  definides a l'apartat nº 23 compleixen  $p(y) + q(y) = 2R/(R^2 - y^2)^{1/2}$ , i per tant un perfil  $G$  definit localment prop d'un màxim relatiu d'ordenades per les funcions  $f$  i  $g$ , per que el seu número de rotació valgui constantment  $C$  ha de complir

$$(1 + f'(y)^2)^{1/2} + (1 + g'(y)^2)^{1/2} = C \cdot 2R / (R^2 - y^2)^{1/2}.$$

**Corol·lari:** Si  $G$  és simètrica respecte al màxim relatiu (localment), aleshores  $f(y) = g(y) = R \cdot C \cdot E(1/C, \arccos y/R)$ , en que  $E$  és l'integral el·líptica fonamental de segona espècie,

$$E(k, u) = \int_0^u (1 - k^2 \sin^2 u)^{1/2} du.$$

**Demostració:**

$$f = g \Rightarrow 2(1 + f'(y)^2)^{1/2} = C \cdot 2R / (R^2 - y^2)^{1/2} \quad \Rightarrow$$

$$f'(y) = -(C^2 R^2 / (R^2 - y^2) - 1)^{1/2},$$

i fent el canvi de variable  $y = R \cdot \cos u$ , i imposant que  $f(R) = 0$ , queda:

$$f(y) = \int_0^{\arccos y/R} \left(1 - \frac{1}{C^2} \sin^2 u\right)^{1/2} du. //.$$

L'expressió paramètrica de les corbes obtingudes en el corol.lari és:

$$g_x(s) = R.C \int_0^{s/R.C} \left(1 - \frac{1}{C^2} \sin^2 u\right)^{1/2} du,$$

$$g_y(s) = R \cos s/R.C,$$

en que  $s$  és el paràmetre longitud de l'arc. És fàcil veure que les superfícies de revolució engendrades tenen curvatura de Gauss constant i igual a 1. Igualment pot comprovar-se que excepte en el cas  $C=1$  (esfera) les corbes no generen superfícies de revolució compactes (vegi's [7]).

3.9.1, on es classifiquen i descriuen les superfícies de revolució amb curvatura constant). El que es pot fer és prendre una d'aquestes prop d'un màxim i tancar-la després de qualsevol manera: la superfície obtinguda tindrà per a un cert interval de valors de  $k$  el número de rotació constantment igual a  $C$ . Si  $C$  és irracional obtenim així un exemple de superfície de revolució compacta en la que el conjunt  $\text{Per}(T_1(M))$  definit a l'apartat 22 no és dens a  $T_1(M)$  (vegi's [6], 5.2.9).

## 26.- Superfícies amb número de rotació constant (globalment)

Ens interessem en el problema de saber si existeixen superfícies de revolució compactes en les que el número de rotació sigui constant sempre. (Això no exclou, està clar, que sempre es complirà que  $\rho(-k) = -\rho(k)$ ).

Proposició: Una superfície de revolució compacta té el número de rotació constant (globalment) si i sols si aquest val constantment 1 (ò -1, per k negatiu) i además la superfície prové de la revolució d'una corba que es pot expressar globalment com

$$(x_0 - f(y), y), (x_0 + g(y), y) \quad y \in [0, R],$$

i òn f i g compleixen

$$(1 + f'(y)^2)^{1/2} + (1 + g'(y)^2)^{1/2} = 2R / (R^2 - y^2)^{1/2}.$$

Demostració: Sigui g la corba que genera la superfície de revolució. Si  $g_y$  no té cap màxim relatiu aïllat, és fàcil veure que si R és el suprem dels valors que pren  $g_y$  existeix un interval  $[r_1, r_2]$  de valors del paràmetre longitud de l'arc en el que  $g_y$  val constantment R. En conseqüència per  $0 \leq k < R$  tenim:

$$\rho(k) = \int_{s_1(k)}^{s_2(k)} \frac{k \, ds}{g_y(s) \sqrt{g_y^2(s) - k^2}} \approx \int_{r_1}^{r_2} \frac{k \, ds}{R \sqrt{R^2 - k^2}}$$

i per tant  $\lim_{k \rightarrow R} \rho(k) = +\infty$

En conclusió, no podem esperar trobar una superfície de revolució compacta amb número de rotació globalment en que  $g_y$  no tingui cap màxim relatiu aïllat.

Una superfície de revolució compacta ha de ser difeomorfa o bé a  $T^2$  o bé a  $S^2$ . Si és difeomorfa a  $T^2$  s'obté per rotació d'una corba  $G$  que ha de ser tancada. Suposem que existeixi en ella un punt d'ordenada màxima aïllat als voltants del qual existiràn funcions  $f$  i  $g$  com han estat definides a l'apartat 23. Però si la corba és tancada haurà d'existir per força un valor  $y_0 \neq R$  en el que

$$\lim_{y \rightarrow y_0} |f'(y)| = \infty, \quad \text{o bé} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} |g'(y)| = \infty$$

(per exemple al mínim absolut). Però això contradiu l'equació:

$$(1+f'(y)^2)^{1/2} + (1+g'(y)^2)^{1/2} = C \cdot 2R/(R^2 - y^2)^{1/2}$$

obtinguda abans. En conseqüència no podem esperar números de rotació constants en superfícies tipus  $T^2$ , sinó que en tot cas les superfícies hauràn de ser difeomorfes a  $S^2$ , obtingudes per rotació d'una corba que talli ortogonalment al eix  $X$ .

Ara bé: una corba així no pot tenir punts d'ordenada mínima relativa doncs en ells  $f'(y_0) = \infty$ , o bé  $g'(y_0) = \infty$ . En conseqüència aquesta corba vindrà donada globalment per dues funcions  $f$  i  $g$  tals que

$$f(R) = g(R) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} f'(y) = \lim_{y \rightarrow 0} g'(y) = 0.$$

Per tant ha de complir-se necessàriament que:

$$\lim_{y \rightarrow 0} ((1+f'(y)^2)^{1/2} + (1+g'(y)^2)^{1/2}) = 2 = \lim_{y \rightarrow 0} 2C.R/(R^2-y^2)^{1/2} = 2C.$$

Per tant necessàriament  $C=1$ .//.

Corol.lari: Tota superfície de revolució compacta té infinites geodèsiques tancades.

Nota: Aquest corol.lari és un cas particular del següent Teorema (Klingenberg, 1976): Sigui  $M$  una varietat de Riemann compacta amb grup fonamental finit. Llavors existeixen a  $M$  infinites geodèsiques tancades. (Vegi's [6], 4.3.4).



## Capítol IV

### Petites pertorbacions

L'objectiu d'aquest capítol és demostrar que en un flux pròxim al flux geodèsic d'una superfície de revolució, existeixen trajectòries periòdiques pròximes als equadors exteriors del flux no pertorbat que, en general, segueixen sent estables orbitalment.

Per flux pròxim al flux geodèsic d'una superfície de revolució entenem un flux hamiltonià donat pel flux geodèsic en una superfície pròxima a una de revolució, en la topologia convenient, o bé el donat per l'existència d'un potencial feble en la mateixa superfície o en una de propera. (Al dir potencial volem dir simplement una part no quadràtica del hamiltonià). En tot cas, un flux pròxim poden suposar-lo donat per una petita variació del hamiltonià  $H: T(M) \rightarrow \mathbb{R}$  utilitzat fins ara, sense necessitat de canviar d'espai de configuracions.

El mètode utilitzat és el de reduir el problema al de l'existència i estabilitat dels punts fixos de certes aplicacions de Poincaré. Estabilitat que es demostrarà utilitzant el Teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser, en la versió coneguda com el Teorema del Twist.

El contingut del capítol serà: Primer: definir i escriure en forma normal de Birkhoff l'aplicació de Poincaré del flux no pertorbat en una superfície de secció conve-

nient. Segon: fer el mateix per les aplicacions de Poincaré del flux pertorbat, en cada nivell d'energia. Tercer: demostrar l'existència de punts fixos de les aplicacions pertorbades prop dels corresponents als equadors exteriors del flux no pertorbat. Quart: posar de manifest la proximitat entre els coeficients de la forma normal de les aplicacions pertorbades i els de la no pertorbada. Cinquè: donar condicions per que es compleixin les hipòtesis del Teorema del Twist.

## 27.- Aplicació de Poincaré associada a un equador exterior.

### Forma normal.

Sigui  $M$  una superfície de revolució generada per la corba  $g(s)$ . Suposem que  $g_y$  té un màxim relatiu per  $s = s_0$ . Sigui  $\Sigma''$  la superfície de  $T_1(M)$  definida per  $u = u_0$  (secció meridiana). Diguem  $x_0$  al punt de  $\Sigma''$  definit per  $P_u = g_y(s_0)$ ,  $P_s = 0$ ,  $u = u_0$ ,  $s = s_0$ . Com es veu  $x_0$  és un punt de l'òrbita de l'equador exterior que passa per  $s = s_0$ .

Diguem  $\Sigma$  a l'entorn de  $x_0$  dins de la superfície  $\Sigma''$  de manera que per tot punt  $x \in \Sigma$ ,  $\dot{u}(x) \neq 0$ . Com que  $x_0$  està en una trajectòria periòdica podem definir l'aplicació de Poincaré  $P: \Sigma \rightarrow \Sigma' \subset \Sigma''$  tal que  $P(x) = x'$  si l'òrbita que passa per  $x$  la vegada següent que talla a  $\Sigma''$  ho fa a  $x'$ .  $P$  és un difeomorfisme diferenciable tantes vegades com el camp de les equacions del moviment (una vegada menys que  $g$ ) i que conserva l'element d'àrea  $dP_s \wedge ds$  (vegi's [2], apèndix 31).

Anem a buscar noves coordenades a  $\Sigma$  que substitueixin a  $P_s$  i  $s$  de manera que el canvi sigui simplèctic i que  $P$  tingui en les noves coordenades una expressió en forma normal.

Les noves coordenades, inspirades en les acció-angle, seràn  $I, \theta$  en que  $I$  ve definida per

$$I = \left( \int_{s_1(k)}^{s_2(k)} P_s ds \right) / \pi = \frac{1}{\pi} \int_{s_1(k)}^{s_2(k)} (1 - k^2 / g_y^2(s))^{1/2} ds,$$

és a dir,  $I(P_s, s)$  és  $1/2\pi$  multiplicat per l'àrea limitada per la corba  $P_u = k$ , si  $k = P_u(P_s, s)$ .

Definim la funció generatriu:

$$S(I, s) = \int_{s_0}^s P_s ds = \int_{s_0}^s (1 - k^2 / g_y^2(s))^{1/2} ds,$$

en que els límits  $s_0$  i  $s$  volen dir integració al llarg d'un arc de la corba  $P_u = k$  ( $k$  està determinat per  $I$ ) que uneixi  $s_0$  amb  $s$ . Ens queda

$$\theta = \frac{\partial S}{\partial I} = \frac{\partial S}{\partial k} \frac{dk}{dI} = \int_{s_0}^s \frac{-k ds}{g_y(s) \sqrt{g_y^2(s) - k^2}} \frac{-1}{\rho(k)},$$

doncs, com havíem demostrat a l'apartat nº 18,  $\frac{d}{dk} A(k) = -2\pi \rho(k)$ .

Es dedueix de la definició que  $\theta$  es una variable angular que pren valors entre 0 i  $2\pi$ , i que  $\theta(P_s, s_0) = 0 = 2\pi$ .

Actualment, el tor invariant  $T \subset T_1(M)$  definit per  $P_u = k$  prop de l'equador  $s = s_0$ , podem coordinar-lo per  $u$  i  $\theta$  en lloc de  $u$  i  $s$ , amb el que obtenim una representació global.

Notem que per  $k$  fix, al tor  $P_u = k$  s'escriu

$$d\theta = \frac{1}{\rho(k)} \frac{k}{g_Y(s) \sqrt{g_Y^2(s) - k^2}} ds$$

i si el camp del moviment a  $T$  s'escriu  $X_u \frac{\partial}{\partial u} + X_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$

és que

$$\begin{aligned} X_\theta &= d\theta \left( k/g_Y^2(s) \frac{\partial}{\partial u} + (1 - k^2/g_Y^2(s))^{1/2} \frac{\partial}{\partial s} \right) = \\ &= \frac{1}{\rho(k)} \frac{k}{g_Y^2(s)} \end{aligned}$$

Si  $k$  està prou prop de  $g_Y(s_0)$  la component  $X_u$  és sempre diferent de zero, i podem considerar el camp

$$\frac{\partial}{\partial u} + X_\theta/X_u \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \text{que té les mateixes òrbites que l'anterior, i per tant la mateixa aplicació de Poincaré associada, però que es redueix a}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\rho(k)} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

amb el que les trajectòries són  $u(t) = u_0 + t$ ,  $\theta(t) = \theta_0 + \frac{t}{\rho(k)}$ .

D'això es dedueix que l'aplicació de Poincaré té una expressió molt senzilla en aquestes coordenades, doncs si diem  $(I', \theta') = P(I, \theta)$ , és

$$I' = I,$$

$$\theta' = \theta + 2\pi / \rho(k) \quad (\text{mòdul } 2\pi).$$

Com que  $\rho$  només depèn de  $k$ , i per tant només de  $I$ , podem desenvolupar la funció  $2\pi / \rho(k)$  en potències de  $I$ :

$$2\pi / \rho(k) = a_0 + a_1 I + O(I^2).$$

A partir dels càlculs fets sobre  $\rho(k)$  en el capítol anterior, es veu que:

$$a_0 = 2\pi (-\ddot{g}_y(s_0) \cdot g_y(s_0))^{1/2},$$

$$a_1 = \frac{-2\pi (-\ddot{g}_y^3(s_0) + g_y(s_0) \ddot{g}_y(s_0) \ddot{g}_y'(s_0) - 5/3 g_y(s_0) \ddot{g}_y^2(s_0))}{8 \ddot{g}_y^2(s_0)}$$

Notem que la forma en que ha quedat escrita  $P$  en un entorn  $E$  de  $x_0$  és una forma normal de Birkhoff. Per tant, si  $P$  s'escriu en unes altres coordenades  $I_1, \theta_1$  com

$$I_1' = I_1 + O(I_1^2),$$

$$\theta_1' = \theta_1 + b_0 + b_1 \cdot I_1 + O(I_1^2),$$

aleshores necessàriament,

$$b_0 = a_0 \quad i \quad b_1 = a_1$$

(vegi's [15], §23).

28.- Els apartats que seguiran són, pas per pas, la demostració del següent

**Teorema:** Sigui  $M$  una superfície de revolució compacta generada per  $g(s)$  amb  $s = s_0$  un màxim relatiu de  $g_y$ ,  $g$  diferenciable amb continuïtat al menys sis vegades i que compleixi que  $a_0$  i  $a_1$  definits a l'apartat anterior a partir de  $g_y(s)$  compleixin que  $a_1 \neq 0$  i, si  $\lambda = e^{ia_0}$ ,  $\lambda^3 \neq 1$ ,  $\lambda^4 \neq 1$ .

Sigui  $H: T(M) \rightarrow \mathbb{R}$  el hamiltonià corresponent al flux geodèsic de  $M$ . Sigui  $K$  un entorn compacte de  $T_1(M) = H^{-1}(1/2)$  del tipus

$$K = \{z \in T(M) \mid H(z) \in [1/2 - k, 1/2 + k], \text{ amb } 0 < k < 1/2\}.$$

Llavors existeix  $\epsilon > 0$  tal que si  $H_1: T(M) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$H_1 \in C^6(T(M)) \text{ compleix } |H_1(z)| < \epsilon \quad \forall z \in T(M), \text{ i } \|H_1\|_4^K < \epsilon$$

(norma del suprem sobre  $K$  de la funció i de totes les seves derivades parcials fins al ordre 4), llavors el flux corresponent al nou hamiltonià  $H' = H + H_1$  té una òrbita periòdica a  $H' = 1/2$  orbitalment estable (no sols isoenergèticament) i tant propera com volguem al equador  $s = s_0$  si  $\epsilon$  és prou petit.

Comentari: Propiament, el que demostrarem serà l'existència d'una família uniparamètrica contínua d'òrbites periòdiques cadascuna en un nivell d'energia diferent, i cadascuna isoenergèticament orbitalment estable.

La complicació tècnica d'aquesta demostració prové de la necessitat de comparar cada aplicació de Poincaré del flux pertorbat (una a cada nivell d'energia) amb la del flux no pertorbat (definida a  $\Sigma$ ) quan totes estan definides sobre dominis diferents. La manera de fer-ho és projectar difeomòrficament les superfícies  $H^* = h$  (constant) sobre  $T_1(M)$ , i prendre allà una única superfície de secció comuna a tots els fluxs. Naturalment, cal assegurar-se de que la projecció envia òrbites en òrbites de manera bijectiva.

### 29.- Pas primer.

En aquest pas considerarem els camps  $X_h^*$  del moviment definit per el hamiltonià  $H^*$  a cada superfície invariant  $H^* = h$ , i els reduïrem a un únic domini,  $T_1(M)$ , sense perdre propietats orbitals ni la proximitat entre ells. Concretament, demostrarem:

$$\text{Sigui } T_0(M) = \{ (x, v) \in T(M) \mid v \neq 0 \} .$$

Considerem  $p: T_0(M) \rightarrow T_1(M)$  definida per  $p(x, v) = (x, v/\|v\|)$ .

Llavors donat  $\epsilon > 0$  existeixen  $\delta_1$  i  $\delta_2 > 0$

tals que  $\forall h \in (1/2 - \delta_1, 1/2 + \delta_1)$  i  $\forall H_1: T(M) \rightarrow \mathbb{R}$

tal que  $\|H_1\|_0^{T(M)} < \delta_2$  i  $\|H_1\|_4^K < \delta_2$ , el conjunt  $C_h = H^{-1}(h)$

compleix:

i)  $C_h$  és una varietat diferenciable i  $C_h \subset K$ .

ii)  $p$  és un difeomorfisme de  $C_h$  en  $T_1(M)$ .

iii) Si  $X_h'$  és el camp definit per  $H$  a  $C_h$ , existeix un camp  $X_h$  a  $T_1(M)$  que depèn diferenciablement de  $h$ , que les seves corbes integrals són les de  $X_h'$  traslladades per  $p$  (encara que amb una altra parametrització), i que compleix  $\|X_h - X_h'\|_{3,1}^{T_1(M)} < \varepsilon$ , on  $X$  és el camp definit per  $H$  a  $T_1(M)$ . Ademés els camps  $X_h$  són diferenciables amb continuïtat al menys cinc vegades si  $H$  ho és al menys sis.

Demostració:

i) Per aconseguir  $C_h \subset K$  n'hi ha prou amb que  $(\delta_1 + \delta_2) < k$ . I per que  $C_h$  sigui varietat diferenciable n'hi ha prou amb que  $\text{grad } H' \neq 0$  a  $C_h$ , i això es compleix si

$$\delta_2 < \inf_{z \in K} \|\text{grad } H(z)\|.$$

ii) En un punt de  $C_h$  el nucli de  $p_*$  restringida al espai tangent en aquell punt és el subespai vectorial generat per el vector  $\text{grad } H$ . Com que  $p_*$  té sempre rang 3 a tot punt de  $T_0(M)$ ,  $p_*$  tindrà rang 3 al tangent de  $C_h$  si  $\langle \text{grad } H, \text{grad } H' \rangle \neq 0$ , doncs els vectors tangents a  $C_h$  són els  $v$  tals que  $\langle v, \text{grad } H' \rangle \neq 0$ .

Però  $\langle \text{grad } H', \text{grad } H \rangle \neq 0$  si  $|\langle \text{grad } H, \text{grad } H_1 \rangle| < \|\text{grad } H\|^2$ . O sigui que per la desigualtat de Schwarz n'hi ha prou amb que  $\|\text{grad } H_1\| < \|\text{grad } H\|$  i això és cert



si  $\delta_2$  és prou petit.

En aquestes condicions,  $p$  restringit a  $C_h$  és un difeomorfisme local. Anem a veure que  $p$  és bijectiu (diem també  $p$  a  $p$  restringit a  $C_h$ ).

Efectivament: pel que hem vist, tot punt de  $T_1(M)$  és un valor regular de  $p$ , i per tant card  $(p^{-1}(z))$  és constant per  $z \in T_1(M)$  (vegi's [12], §1). Sigui  $z_0 \in T_1(M)$  qualsevol.  $p^{-1}(z_0)$  no és buit, doncs  $C_h$  no ho és. D'altra banda, si  $z_1, z_2 \in p^{-1}(z_0)$  no és possible que  $z_1 \neq z_2$ , doncs en tal cas si  $z_0 = (x_0, v_0)$ ,  $z_1 = (x_0, v_1)$ ,  $z_2 = (x_0, v_2)$ , i  $v_1 = a \cdot v_0$ ,  $v_2 = b \cdot v_0$ , existiria necessàriament  $c$  entre  $a$  i  $b$  tal que

$$\frac{d}{d\lambda} H(x_0, \lambda v_0) \Big|_{\lambda=c} = 0$$

és a dir que  $\frac{d}{d\lambda} H(x_0, \lambda v_0) \Big|_{\lambda=c} = -\frac{d}{d\lambda} H_1(x_0, \lambda v_0) \Big|_{\lambda=c}$ ,

i això no és possible si  $\delta_2$  és prou petit doncs  $H$  és homogènia de grau 2 en  $\lambda$  i per tant podem acotar fàcilment

$$\frac{d}{d\lambda} H(x_0, \lambda v_0) \text{ sobre } K.$$

iii) Distingint ara entre  $p$  i  $p_h$  (restricció del primer a  $C_h$ ) definim

$$x_h = (2 \cdot (H \circ p_h^{-1}))^{-1/2} \cdot p(x'),$$

$X_h$  depen diferenciablement de  $h$ .

Si  $Y$  és el camp definit per  $H$  a  $T(M)$ , y  $X$  la seva restricció a  $T_1(M)$ , per la particular estructura del flux geodèsic es compleix que

$$(2 \cdot (H \circ p_h^{-1}))^{-1/2} \cdot p_* (Y) = X \text{ per a tota } h.$$

Concluïm:

a)  $X_h$  té les mateixes òrbites que  $p_* (X_h^c)$ , i per tant es corresponen amb les de  $X_h$  a través de  $p$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } \|X_h - X\|_3^{T_1(M)} &= \|(2 \cdot (H \circ p_h^{-1}))^{-1/2} \cdot p_* (Y + X_1) - \\ &- (2 \cdot (H \circ p_h^{-1}))^{-1/2} \cdot p_* (Y)\|_3^{T_1(M)} = \|(2 \cdot (H \circ p_h^{-1}))^{-1/2} \cdot p_* (X_1)\|_3^{T_1(M)}, \end{aligned}$$

on  $X_1$  és el gradient simplèctic de  $H_1$ , que podem suposar tant petit com volguem doncs  $\|X_1\|_3^K < \delta_2$ .

c) Obviament els camps  $X_h$  són de classe  $C^5$ .

30.- Pas segon:

Un cop unificat el domini de definició dels camps  $X$  i  $X_h$  definim les corresponents aplicacions de Poincaré sobre una superfície de secció comuna, i comprovem que aquestes difereixen poc entre elles. Això és en essència el contingut del enunciat següent:

Considerem la superfície  $u = u_0$  de  $T_1(M)$ . Sabem que existeix en entorn  $\Sigma$  de  $x_0$  ( $x_0$  és el punt de l'equador, definit per  $P_s = 0$ ,  $s = s_0$ ) que és superfície de secció per el camp  $X$ . Si els camps  $X_h$ , obtinguts al pas anterior, amb  $h \in (1/2 - \delta, 1/2 + \delta)$ , compleixen  $\|X_h - X\|_3^T(M) < \varepsilon$  amb  $\varepsilon$  prou petit, llavors:

- i)  $\Sigma$  també es superfície de secció per els  $X_h$ .
- ii) Existeixen les aplicacions de Poincaré  $P_h$  definides sobre  $\Sigma$  i compleixen  $\|P(x) - P_h(x)\| < \delta_3$ ,  $\forall x \in \Sigma$ , i  $\delta_3$  és tan petit com volguem, si  $\varepsilon$  és prou petit.
- iii) Les  $P_h$  preserven àrea.

Demostració:

- i) Evident, amb una eventual reducció de  $\Sigma$ .
- ii) L'existència de les  $P_h$  és conseqüència de i).

Per veure que les aplicacions  $P_h$  son pròximes a  $P$ , notem que les òrbites de  $X_h$  les podem considerar solucions aproximades de les de  $X$ , amb una aproximació  $\varepsilon$ , i per tant val la desigualtat fonamental: Si  $u(t)$  és la corba integral de  $X$  amb  $u(0) = x \in \Sigma$ , i  $v(t)$  és la de  $X_h$  amb la mateixa condició inicial, es compleix

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \varepsilon \cdot (e^{Q \cdot |t|} - 1)/Q,$$

on  $Q$  és una cota de  $\|DX\|$  en un compacte que contingui ambdues òrbites.

Si  $t_1$  és el temps que tarda  $x$  en tornar a tallar  $u = u_0$  sobre les òrbites de  $X$ , i  $t_2$  ho és sobre les de  $X_h$  tenim:

$$\begin{aligned} \|u(t_1) - v(t_2)\| &= \|P(x) - P_h(x)\| \leq \|u(t_1) - u(t_2)\| + \\ &+ \|u(t_2) - v(t_2)\| \leq Q_1 \cdot |t_2 - t_1| + \varepsilon \cdot (e^{Q|t_2|} - 1)/Q, \end{aligned}$$

en que  $Q_1$  és una cota superior de  $\|X\|$ . Tenim que entre  $x$  i la seva imatge per  $P$  o per  $P_h$  la coordenada  $u$  s'ha incrementat en  $2\pi$ , i com que  $\|X_u - X_{hu}\| < \varepsilon$  tenim que  $|t_2 - t_1| \leq \varepsilon/2\pi \implies |t_2| \leq \varepsilon/2\pi + |t_1|$ , i queda

$$\|P(x) - P_h(x)\| \leq Q_1 \cdot \varepsilon/2\pi + \varepsilon (e^{Q(\varepsilon/2\pi + |t_1|)} - 1)/Q = \delta_3$$

Com es veu,  $\delta_3$  depèn només de  $\varepsilon$  i de  $X$ , i  $\delta_3$  tendeix a zero quan  $\varepsilon$  tendeix a zero.

iii) Es conseqüència de que les òrbites de  $X_h$  a  $T_1(M)$  es corresponen amb les de  $X_h^c$  (notacions del apartat 29) a  $C_h$  a través de la projecció  $P_h: C_h \rightarrow T_1(M)$ , i per tant  $P_h = p_h \circ P_h^c \circ p_h^{-1}$ , on  $P_h^c$  és una aplicació de Poincaré corresponent al flux definit a  $C_h$  per  $X_h^c$ , que preserva àrea.

### 31.- Pas tercer.

En aquest pas demostrarem que cada aplicació  $P_h$  té un punt fix  $x_h$  de manera que  $\|x_h - x_0\|$  es fa tan petit com volguem si  $\|P_h - P\|$  és prou petit. Això es conseqüència de la següent

Proposició: Sigui  $A$  un obert de  $\mathbb{R}^2$ , i sigui  $P: A \rightarrow \mathbb{R}^2$  un difeomorfisme tal que existeixi  $x_0 \in A$  amb  $P(x_0) = x_0$  i tal que  $DP(x_0)$  no tingui el valor propi 1. Aleshores existeix un entorn compacte  $K$  de  $x_0$  a  $A$  de manera que donat qualsevol  $\varepsilon > 0$  existeix un  $\delta > 0$  tal que si  $Q: A \rightarrow \mathbb{R}^2$  és una aplicació contínua que compleix que  $\|P-Q\|^{K} < \delta$  llavors existeix un punt  $x_1 \in A$  fix per  $Q$  i tal que  $\|x_0 - x_1\| < \varepsilon$ .

Demostració: Sigui  $K$  un entorn compacte de  $x_0$  a  $A$  tal que existeixi una constant  $c > 0$  tal que per tot  $x \in K$  i per tot  $z \in \mathbb{R}^2$  es compleixi

$$\|(I - DP(x))(z)\| \geq c\|z\|.$$

(Existeixen  $K$  i  $c$  perquè 1 no és valor propi de  $DP(x_0)$ ).

Considerem la funció  $F(x) = x - P(x)$ . Compleix  $F(x_0) = 0$ , i  $DF(x_0)$  té rang 2. Per tant existeix  $r > 0$  tal que la bola  $B_r$  de radi  $r$  centrada en el 0 està continguda a la imatge de  $F$ , i sobre  $B_r$  està definida  $F^{-1}$ , amb  $F^{-1}(B_r) \subset K$ .

Prenem  $\delta$  més petit que  $r$  i que  $\varepsilon$ .

Segui  $G(x) = Q(x) - P(x)$ . La imatge de  $G$  està continguda a  $B_\delta$  :

$$B_r \xrightarrow{F^{-1}} A \xrightarrow{G} B_\delta \subset B_r .$$

Com que  $G \circ F^{-1}$  és contínua, pel Teorema de Brouwer existeix  $y_1 \in B_r$  fix per  $G \circ F^{-1}$ . Segui  $x_1 = F^{-1}(y_1)$ . Es compleix  $G(x_1) = F(x_1)$ , i per tant  $Q(x_1) = x_1$ .

Ademés,  $(x_1 - x_0) = (F^{-1}(y_1) - F^{-1}(0))$ . Per tant existeix  $y_2$  a  $B$  tal que  $x_1 - x_0 = (DF^{-1}(y_2))(y_1)$ . En conseqüència  $\|x_1 - x_0\| \leq \|y_1\| / c < \delta / c < \varepsilon$ .

### 32.- Pas quart.

Situat el problema en aquest termes, el que queda és una aplicació standard del Teorema del Twist. Demostrarem:

- i)  $DP(x_0)$ ,  $D^2P(x_0)$ , i  $D^3P(x_0)$  (considerats matricialment) tenen els seus coeficients tan prop com volguem dels de  $DP_h(x_h)$ ,  $D^2P_h(x_h)$  i  $D^3P_h(x_h)$ .
- ii) Per  $h$  en un entorn de  $h=1/2$ , els punts  $x_h$  són una corba diferenciable.

Demostració:

i) Si  $t_0$  és el període de la trajectòria de  $X$  que passa per  $x_0$ , i  $t_h$  és el de la de  $X_h$  que passa per  $x_h$ , llavors els coeficients de  $D^iP(x_0)$  i de  $D^iP_h(x_h)$  per  $i=1,2,3$  es dedueixen dels de  $D^iF_{t_0}(x_0)$  i de  $D^iF_{t_h}^h(x_h)$ , ón  $F_t$  i  $F_t^h$  són els grups de difeomorfisme associats a  $X$  i  $X_h$  (vegi's [10]).

Lema 2B.3).

D'altra banda,

$$\begin{aligned} & \| D^i F_{t_h}^h(x_h) - D^i F_{t_0}(x_0) \| \leq \| D^i F_{t_h}^h(x_h) - D^i F_{t_h}^h(x_0) \| + \\ & + \| D^i F_{t_h}^h(x_0) - D^i F_{t_0}(x_0) \|. \end{aligned}$$

La segona d'aquestes diferències pot acotar-se fàcilment per el producte d'una constant que només depèn de  $X$  multiplicada per  $|t_h - t_0|$ , que al seu torn pot acotar-se per  $\varepsilon/2\pi$  si  $\|x - x_h\| < \varepsilon$ . D'aquí es dedueix també que  $|t_h| \leq \varepsilon/2\pi + |t_0|$ .

Llavors la primera d'aquestes diferències pot ser tan petita com volguem com a conseqüència de la continuïtat respecte a paràmetres de les solucions d'una equació diferencial ordinària, en el sentit de que si  $\|x - x_h\|_3$  és prou petit llavors  $\|D^i F_t^h - D^i F_t^h\|_3$  és tan petit com volguem, per a  $t$  fix.

ii) Es conseqüència de i) i del Teorema de la funció implícita, doncs l'equació  $P_h(x) - x = 0$  té solució  $x = x_{1/2}$  per  $h = 1/2$ , i  $P_h$  depèn diferenciablement de  $h$ , complint-se que  $DP_{1/2}(x_{1/2}) - I$  és no singular si està prou prop de  $DP(x_0) - I$ .

33.- Pas cinquè.

Si dues aplicacions simplèctiques de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  que deixen fix un punt tenen prou pròximes les seves diferencials primera, segona i tercera en els respectius punts fixos, llavors els coeficients de la forma normal de Birkhoff primer i segon d'una i altra son tan pròxims com volguem.

Demostració: Això es conseqüència de la construcció de la forma normal de manera recurrent a partir dels coeficients del desenvolupament de Taylor (vegi's [15], § 23).

#### 34.- Pas sisè.

En aquest moment sabem ja que  $P_h$  pot escriure's, per  $h$  en un entorn de  $h=1/2$ , en la forma

$$I' = I + O(I^2),$$

$$\theta' = \theta + a_0^h + a_1^h \cdot I + O(I^2),$$

i que podem aconseguir que  $a_0^h$  i  $a_1^h$  estiguin prou prop de  $a_0$  i  $a_1$  (corresponents a  $P$ ) de manera que

$$a_0^h \neq 2\pi, 2\pi/3, 4\pi/3, \pi/2, 3\pi/2, \pi,$$

$$a_1^h \neq 0.$$

Sabem també que  $P_h$  és diferenciable amb continuïtat al menys cinc vegades.

Per tant, aplicant el Teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser, en la versió del Teorema del Twist per cinc graus de diferenciabilitat, concluïm que  $P_h$  té corbes tancades invariants tan prop com volguem de  $x_h$ , el que ens assegura l'estabilitat orbital de l'òrbita periòdica que passa per  $x_h$  (vegi's [13]). Notem que en principi es tracta d'estabilitat isoenergètica, però que la continuïtat de  $x_h$  respecte de  $h$  ens assegura estabilitat orbital a  $T(M)$ .



(Vegi's [13] per el Teorema del Twist demostrat per Moser per 333 graus de diferenciabilitat, i [14] per la demostració de Rüssmann en què es redueixen a cinc).

Bibliografia citada

- [1] Abraham, R. i J.E. Marsden: "Foundations of Mechanics", Benjamin, 1967.
- [2] Arnold, V.I. i A. Avez: "Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classique", Gauthier-Villars, 1967.
- [3] Darboux, G.: "Théorie Générale des Surfaces", Gauthier-Villars, 1894.
- [4] Denjoy, A.: "Sur les courbes définies par des équations différentielles a la surface du tore", J. de Math., V. XI, 333-375 (1932).
- [5] Guckenheimer, J.: "Bifurcation and Catastrophe", a "Dynamical Systems", pàgs. 95-109, Ed.: M.M. Peixoto, Academic Press, 1973.
- [6] Klingenberg, W.: "Lectures on Closed Geodesic", Mathematisches Institut der Universität, Bonn, 1976.
- [7] Klingenberg, W.: "Curso de Geometria diferencial", Alhambra, 1978.
- [8] Kolmogorov, A.N.: "The General Theory of Dynamical Systems and Classical Mechanics" (Appendix de [1]).
- [9] Lacomba Zamora, Ernesto A.: "Ejemplos de Sistemas Mecánicos con Simetría", Acta Mexicana Ci. Tecn., 5, 155-191, (1971).
- [10] Marsden, J.E. i M. McCracken: "The Hopf Bifurcation and its Applications", Springer-Verlag, 1976.
- [11] Milnor, J.: "Morse Theory", Princeton University Press, 1969.

- [12] Milnor, J.: "Topology from the Differentiable Viewpoint",  
The University Press of Virginia, 1969.
- [13] Moser, J.: "Stability and Nonlinear Character of Ordinary  
Differential Equations", a "Nonlinear Problems", pags.  
139-150, Ed.: R. Langer, The University of Wisconsin Press,  
1963.
- [14] Rüssmann, H.: "Über invariante Kurven differenzierbarer  
Abbildungen eines Kreisringes", Nachrichten Akad. Wiss.  
Göttingen Math. Phys. Klass., (1970).
- [15] Siegel, C.L. i Moser, J.: "Lectures on Celestial Mecha-  
nics", Springer-Verlag, 1971
- [16] Smale, S.: "Topology and Mechanics", Inventiones Math.,  
X, 305-331, (1970); XI, 45-64, (1970).
- [17] Tricomi, F.G.: "Integral Equations", Intersciencie, 1970.