Pub. Mat. UAB
Nº 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

EL TRIPLE Hom(M,-) EN CONJUNTOS

J.M. Barja Pérez, M.A. López López

Dpto. de Algebra y Fundamentos
Universidad de Santiago de Compostela

Abstract For a set M, the functor Hom(M,-) admits one, and only one triple structure $\mathbb{H}_M$, because its own adjoint functor M x - has a single cotriple structure. X is a $\mathbb{H}_M$-algebra if and only if , X is the cartesian product of a set family indexed by M.

Comunicación:

Para un conjunto M, existe un único cotriple $\mathbb{C}$ en la categoría de conjuntos sobre el funtor M x - . La adjunción $M \times - \dashv H(M,-)$ induce una(única) estructura de triple, $\mathbb{H}_M$, sobre el funtor H(M,-), tal que el cotriple $\mathbb{C}$ es adjunto del triple $\mathbb{H}_M$, $\mathbb{C} \dashv \mathbb{H}_M$ (|6|, (4.6.1),p.91).

$$\mathbb{H}_M = (H(M,-)\,,\ h\ ,\omega\,)$$

$h_A : A \longrightarrow H(M,A)$, $(h_A\ a\,)(n) = a = \dot{a}\ (n)$
$\omega_A : H(M,H(M,A)) \longrightarrow H(M,A)$, $(\omega_A F)(n) = (F(n))(n)$.

Un $\mathbb{H}_M$-álgebra es un par (X,ξ) , $\xi : H(M,X) \longrightarrow X$, que verifica 1) $\xi(\dot{x}) = x$ 2) $\xi \cdot \omega_X = \xi \cdot H(M,\xi)$.

Dados un $\mathbb{H}_M$-álgebra (X,ξ) y $x \in X$, si $g \in H(M-\{n\}, X)$, $n \in M$, se denota $g_x \in H(M,X)$ la aplicación: $g_x(n) = x$, $m \neq n$ $g_x(m) = g(m)$. Para cada $n \in M$, se puede definir una relación de equivalencia en X

$$x \sim_n y \iff \forall g \in H(M-\{n\},\ X),\ \xi(g_x) = \xi(g_y).$$

<u>Lema</u> Si $f \in H(M,X)$, para $n \in M$ $\xi(f) \sim_n f(n)$.
<u>Teorema</u> La aplicación canónica $\Phi : X \longrightarrow \prod_{n \in M} X / \sim_n$ es biyectiva.

Así, a cada $\mathbb{H}_M$-álgebra (X,ξ) corresponde una descomposición de X en producto cartesiano de una familia de conjuntos con índices en M. Y recíprocamente, para cada descomposición de X en un producto cartesiano de una familia de conjuntos con índices en el conjunto M , se define un $\mathbb{H}_M$-álgebra (X,ξ), por $\xi(f) = \langle\{p_n(f(n)) \ / \ n\in M\}\rangle$, $f \in H(M,X)$.

Para cada triple $\mathbb{T} = (T,\eta,\mu)$ en Set, el funtor M x - admite una ley distributiva sobre el triple $\mathbb{T}$, $\gamma : M \times TA \longrightarrow T(M \times A)$, $\gamma_A(n,p) := T(\bar{n}_A)(p)$, donde $\bar{n}_A : A \longrightarrow M \times A$, $\bar{n}_A(a) = (n,a)$ (|7|, Prop 3.3.7,p.312). γ es, además, una ley distributiva de tipo mixto (|8|,p.69) entre el cotriple $\mathbb{C}$ y el triple $\mathbb{T}$. Pero no es la única ley distributiva de tipo mixto:

Si $\mathbb{T} = (T,\eta,\mu)$ es un triple en Set, y $T = T(1) \times -$, o equivalentemente, T tiene adjunto por la derecha (|1|,(1.2.6), p.19), hay una correspondencia biunívoca entre leyes distributivas de tipo mixto entre el cotriple $\mathbb{C}$ sobre M x - y el triple $\mathbb{T}$, y las T(1)-acciones sobre M, $q : M \times T(1) \longrightarrow M$.

Como $\mathbb{C} \dashv \mathbb{H}_M$, cada ley distributiva de tipo mixto entre $\mathbb{C}$ y un triple $\mathbb{T}$, induce una ley distributiva del triple $\mathbb{T}$ sobre $\mathbb{H}_M$.

El original completo de este trabajo aparecerá publicado en Alxebra 26. Dept. Algebra y Fund. Santiago.

Bibliografía

|1| Barja Pérez, J.M. Teoremas de Morita para triples en categorías cerradas.Alxebra 20.Dpto. Algebra y Fund. Santiago (1978).

|2| Beck,J. Distributive laws.Lect. Notes in Math.80 (1969)

|3| Bunge, M. On relationships between composite and tensor product triples. Journal of Pure and Appl. Algebra 13 (1978),139-156.

|4| Burroni, E. Algébres relatives á une loi distributive. C.R.Acad.Sc.Paris,T.276, serie A(1973) 443 - 446.

|5| Caruncho Castro, J.R. Teoría de triples.Alxebra 5.Dept. Algebra y Fund. Santiago (1971)

|6| López López, M.A. Algebras de Hopf respecto a un cotriple.Alxebra 17.Dept. Algebra y Fund. Santiago (1977)

|7| Manes, E.G. Algebraic theories (1976) Springer.

|8| Wätjen,D. Liftungen von tripeln. Manuschripta Math. 12 (1974), 67-71.

|9| Watts, C.E. Intrinsic characterizations of some additive functors.Proc.Amer.Math.Soc.11(1960) 5-8