

FUNDAMENTOS DE LA TEORIA DE LA DECISION Y DE LA TEORIA DE LA ESTIMACION ESTADISTICA

JOSE M. DOMENECH MASSONS

I.-INTRODUCCION

No es la uniformidad sino la variabilidad el atributo fundamental que caracteriza a la naturaleza.

No es la rigidez sino el azar quien está en la base de los hechos psicológicos o biológicos.

En la naturaleza, el azar hace que la variabilidad entre los individuos sea la regla. La estadística es el único instrumento matemático adecuado para analizar datos de fenómenos cuya característica fundamental es la variabilidad.

No es posible estudiar la variabilidad con un solo individuo. De ahí que la formulación estadística de un problema no pueda ser una formulación a nivel individual sino que debe ser una formulación a nivel de grupo.

Los diseños experimentales son problemas formulados a nivel de grupo. En consecuencia, una vez tratados estadísticamente los datos obtenidos, las conclusiones de estos diseños no pueden ser conclusiones a nivel individual sino que son conclusiones a nivel de grupo. Esto quiere decir, por ejemplo, que si con un diseño experimental se demuestra la superioridad de un tratamiento X respecto a otro tratamiento A, el resultado que obtendremos al aplicar el tratamiento X a toda la población, en media,

será superior al resultado que hubieramos obtenido al aplicar el tratamiento A a toda la población; sin embargo para ciertos individuos el tratamiento A será superior al X.

En este artículo se desarrollan dos problemas fundamentales que estudia la estadística: los Problemas de Estimación y los Problemas de Decisión.

Con fines didácticos este estudio se particulariza a caracteres cualitativos. La Teoría de la Estimación se desarrolla a partir del caso particular de una proporción. La Teoría de la Decisión se desarrolla a partir del caso particular de la prueba de comparación de una proporción observada a una proporción teórica. Sin embargo la generalización a otros casos es inmediata.

II.- CONCEPTO DE PROPORCION

Sea un cierto aspecto A que se observa n_A veces en una muestra de n individuos. Se define como proporción observada de individuos con el aspecto A, al cociente :

$$(1) \quad p_o = n_A / n$$

A la proporción observada de individuos de la muestra que no presentan el aspecto A, se la designa por q_o y vale:

$$(2) \quad q_o = 1 - p_o$$

A la verdadera proporción de individuos, de la población origen de la muestra, que presenta el aspecto A, se la designa por p y a su complemento a 1 se lo designa por q

III.- CONCEPTO DE INTERVALO DE PROBABILIDAD $1-\alpha$

Tanto para la Teoría de la Estimación como para la Teoría de la decisión es necesario resolver el siguiente e importante problema de predicción mediante la Teoría de la Probabilidad: conocer el intervalo donde fluctúan las proporciones p_o observadas en muestras de tamaño n procedentes de una población caracterizada por una proporción p .

El siguiente experimento permite resolver dicho problema.

Se tiene una población que contiene una proporción p conocida de bolas blancas y el resto $q=1-p$ son bolas negras.

Se extrae un conjunto muy grande de muestras con n_1 bolas cada una (muestras de tamaño n_1) y se tabulan y representan graficamente el conjunto de las proporciones p_o observadas de bolas blancas observadas en cada una de estas muestras.

Nuevamente se extrae un conjunto muy grande de muestras, ahora con n_2 bolas cada una (n_2 mayor que n_1) y se tabulan y representan graficamente el conjunto de proporciones de bolas blancas p_o observadas en cada una de estas muestras.

Y así sucesivamente se extraen conjuntos muy grandes de muestras pero cada vez compuestas de un número n de bolas mayor que los anteriores y se representan graficamente el conjunto de proporciones de bolas blancas p_o observadas en cada conjunto de muestras.

La figura 1 ilustra estas representaciones gráficas para conjuntos de muestras de tamaño $n_1=10$, $n_2=20$ y $n_3=40$, cuando en la población origen de estas muestras hay la mitad de bolas blancas y la otra mitad de bolas negras ($p=q=0.5$).

La observación de estas representaciones gráficas permite sacar las siguientes conclusiones:

a.- En todas las gráficas la proporciones observadas

p_o se agrupan alrededor del valor p (proporción de bolas blancas que contiene la población origen de las muestras).

b.- Cuando aumenta el número n de bolas que hay en las muestras, las proporciones observadas p_o están más agrupadas alrededor del valor p . El conjunto de proporciones observadas p_o es cada vez menos disperso a medida que el tamaño n de las muestras aumenta.

Este concepto de dispersión se cuantifica mediante el índice σ_p :

(3)

$$\sigma_p = \sqrt{pq/n}$$

llamado desviación tipo.

Por ejemplo, si las muestras proceden de una población que contiene una proporción $p=0.5$ de bolas blancas y el resto $q=1-p=0.5$ de bolas negras, cuando $n=10$ la desviación tipo de las proporciones observadas vale:

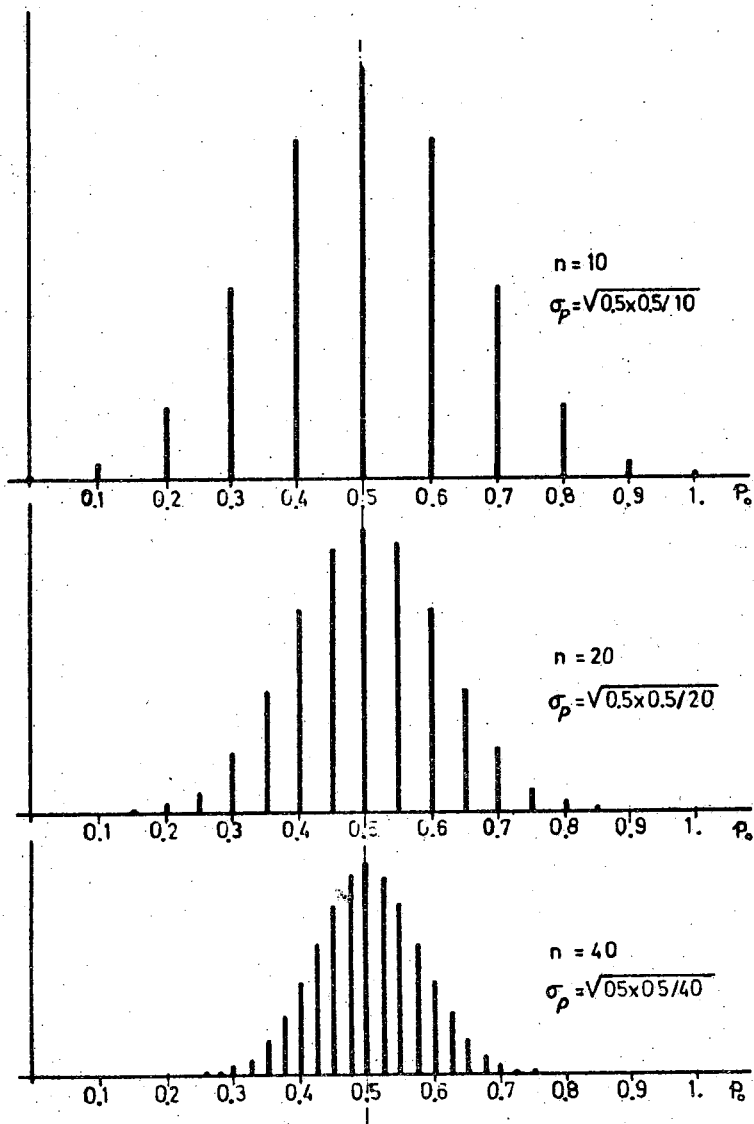
$$\sigma_p = \sqrt{0.5 \times 0.5 / 10} = 0.16$$

c.- Si las muestras son grandes, se ve como estas gráficas simétricas alrededor de un eje vertical que pasa por el valor p y tienen la misma forma de "campana". La diferencia entre ellas está en que las "campanas" son mas estrechas a medida que correspondan a muestras mas grandes.

Este único modelo que siguen todas las gráficas recibe el nombre de modelo o ley normal. Esta ley ha sido estudiada por Laplace y Gauss, hace varios siglos.

Teorema Fundamental

Se demuestra que el desvío, a cada lado del punto central p , que deja dentro el 95% de las proporciones p_o observadas



Fluctuación de las proporciones p_o de bolas blancas observadas en muestras de tamaño n extraídas al azar de una población que contiene una proporción de bolas blancas $p = 0.5$

figura 1

en las muestras, se obtiene multiplicando el valor constante $z_{\alpha} = 1.96$ por la desviación tipo σ_p correspondiente. Es decir:

$$e = 1.96 \sqrt{pq/n}$$

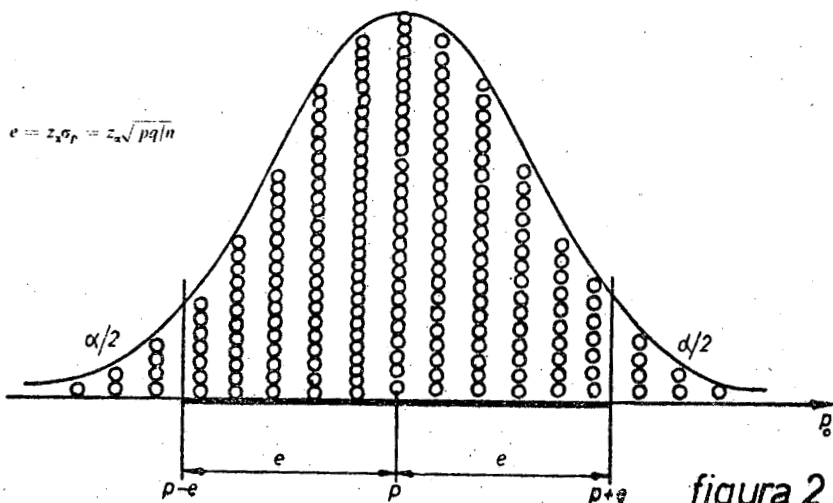
El desvío e que deja dentro el 99% de las p_o se obtiene multiplicando $z_{\alpha} = 2.58$ por dicha desviación tipo.

En general estos valores constantes se simbolizan por z_{α} y el desvío e viene dado por:

(4)

$$e = z_{\alpha} \sqrt{pq/n}$$

En la tabla 1 se dan los valores mas importantes de z_{α} en función de α y en la figura 2 se ilustra el desvío e.



α	10%	5%	2%	1%	2%	1%
z_{α}	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

TABLA 1

El valor α representa la cantidad, en tantos por uno, de proporciones observadas que están fuera del intervalo alrededor de p , definido por dicho desvío e .

Condiciones de aplicación

La fórmula (4) y los valores z_α dados en la tabla 1, son válidos exclusivamente para distribuciones que siguen el modelo normal.

Se comprueba experimentalmente que la distribución de las proporciones observadas sigue un modelo normal cuando se cumple que los productos np y nq son iguales o superiores a 5. Estas muestras reciben el nombre de muestras grandes.

Este Teorema Fundamental se demuestra a partir de la Teoría de la Probabilidad (*) y es un caso particular de un importante teorema llamado Teorema Límite Central.

Definición de Intervalo de Probabilidad

Se define intervalo de probabilidad todo intervalo, simétrico alrededor de p , que contenga gran parte de las proporciones observadas en muestras de tamaño n extraídas al azar de una población caracterizada por la proporción p .

El intervalo alrededor de p , definido por el desvío e , que contiene el 95% de las proporciones observadas, recibe el nombre de intervalo de probabilidad del 95%. En general, recibe el nombre de intervalo de probabilidad $1-\alpha$, aquel intervalo que contiene el $1-\alpha$ (en tantos por uno) de las proporciones observadas p_0 , es decir, aquel intervalo que sólo deja fuera una pequeña proporción de las proporciones observadas p_0 .

En el intervalo probabilidad $1-\alpha$, el valor α indica la probabilidad de observar, en una muestra precedente de la población p , una proporción observada p_0 fuera de dicho inter-

(*) Un estudio detallado puede verse en la obra (1) de la Bibliografía Seleccionada

valo.

Una idea importante es que un intervalo de probabilidad nunca podrá contener todas las proporciones que pueden observarse en las muestras. Para definir el intervalo de probabilidad siempre debe excluirse una proporción α , tan pequeña como queramos, de casos extremos.

La estadística analiza fenómenos cuya regla fundamental es la variabilidad. Si queremos dar un intervalo en el que se encuentren los valores de un cierto carácter, medido en una población de individuos, la variabilidad puede hacer que en algún individuo este carácter tome un valor excepcionalmente grande o excepcionalmente pequeño.

La estadística busca un intervalo que sea lo más pequeño posible pero que a la vez contenga la máxima información posible (el máximo número de casos posible). Para lograrlo se debe prescindir de unos pocos casos extremos que agranden mucho el intervalo sin casi aportar información.

Por convenio se ha aceptado universalmente dar intervalos que contengan el 95% de los individuos.

De esta definición y de la observación de la figura 2 se deduce fácilmente la fórmula del intervalo de probabilidad:

(5)

$$p_0 \in p \pm z_\alpha \sqrt{pq/n}$$

C. de A.: Las muestras deben ser grandes (np y $nq \geq 5$).

El intervalo de probabilidad $1-\alpha$ permite predecir, aceptando el riesgo α de equivocarnos, el intervalo en el cual estará contenida la proporción p_0 observada en una cierta muestra de tamaño n procedente de una población caracterizada por la proporción p .

Generalización

El concepto de intervalo de probabilidad se generaliza fácilmente a otras características estadísticas. Por ejem

plo si se estudia un carácter cuantitativo, el intervalo de probabilidad que permite predecir con riesgo α , el intervalo en el cual estará contenida la media \bar{x} observada en una muestra de tamaño n , procedente de una población caracterizada por una media μ y una desviación tipo σ , viene dado por (6).

(6)

$$\bar{x} \in \mu \pm z_{\alpha} \sqrt{\sigma^2 / n}$$

C. de A.: Las muestras deben ser grandes ($n \geq 30$).

Ejemplo 1

Dada una población que contiene un 50% de bolas blancas y un 50% de bolas negras, predecir el intervalo en el que se encontrará el 95% de las proporciones observadas en muestras de 40 bolas extraídas, no exhaustivamente y al azar, de dicha población.

Aplicando la fórmula (5) se obtiene el intervalo pedido:

$$0.50 \pm 1.96 \sqrt{0.50 \times (1-0.50)/40} = 0.50 \pm 0.16$$

$$P_0 \in (0.34 + 0.66)$$

IV.- TEORIA DE LA ESTIMACION ESTADISTICA

Un problema de estimación consiste en hallar, con determinada precisión, el verdadero valor de un parámetro (proporción, media, variancia, etc. calculada con todos los individuos de una población), a partir solamente de la información contenida en una muestra representativa (*) de la población.

(*) La obtención de una muestra representativa es un problema de naturaleza estadística cuya solución correcta es que la elección de los individuos de la muestra excluya cualquier sistemática. Esto se logra mediante una elección al azar.

En el caso particular de estimar una proporción p , si sólo se dispone de la información contenida en una muestra de tamaño n , es decir de la proporción p_o observada en ella, se demuestra que la mejor estimación puntual de p es la proporción puntual de p es la proporción p_o observada en la muestra.

Además de esta estimación puntual, es importante conocer su precisión, es decir lo próximo o lo alejado que p_o puede estar de p . Este concepto de precisión se explicita con la estimación por intervalo de p o intervalo de confianza, que es un intervalo simétrico alrededor de p_o que tiene gran probabilidad de contener el valor p .

El intervalo de confianza se deduce a partir del intervalo de probabilidad.

Si por un momento imaginamos conocida la proporción p de la población al ir extrayendo de ellas muestras de tamaño n las proporciones p_o observadas en ellas, excepto una pequeña cantidad α de ellas, irán cayendo dentro del intervalo de probabilidad.

Salvo la pequeña cantidad α de ellas, las proporciones observadas p_o no estarán mas alejadas de p que la distancia definida por el desvío e (figura 3):

$$(7) \quad p_o \in p \pm e = p \pm z_{\alpha} \sqrt{pq/n}$$

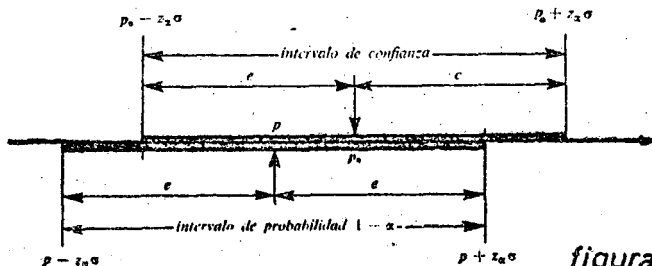


figura 3

Volvamos al problema real, en el que sólo se conoce p_o . Si esta proporción p_o ha caído dentro del intervalo de probabilidad no estará más alejada de p que la distancia definida por el desvío e . Es decir el valor desconocido p estará en algún punto del intervalo (figura 3):

$$(8) \quad p \in p_o \pm e = p_o \pm z_{\alpha} \sqrt{pq/n}$$

La probabilidad de que el intervalo (8) no contenga el valor p coincide con la probabilidad de que p_o no esté dentro del intervalo de probabilidad. Esta probabilidad vale α

El intervalo (8) que tiene gran probabilidad de contener p , aun no puede calcularse ya que para hallar la desviación tipo σ_p , debe conocerse p .

Se demuestra cuando la muestra es grande que el parámetro σ_p , desviación tipo teórica, puede ser estimado mediante el estadístico s_p , que es la desviación tipo calculada a partir de los datos observados en la muestra:

$$(9) \quad s_p = \sqrt{p_o q_o / n}$$

Sustituyendo este valor en (8) se obtiene el intervalo de confianza:

(10)

$$p \in p_o \pm z_{\alpha} \sqrt{p_o q_o / n}$$

C. de A.: La muestra debe ser grande (np y $nq \geq 5$).

Intervalo de Probabilidad y Intervalo de confianza

La figura 4 muestra como estos dos conceptos son totalmente diferentes.

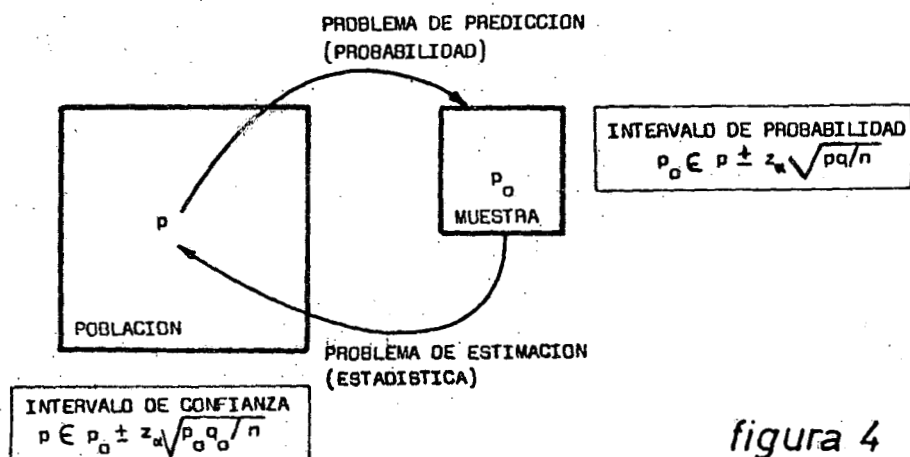


figura 4

El intervalo de probabilidad es la base teórica que permite deducir el intervalo de confianza. Ambos intervalos son de naturaleza radicalmente diferente. En efecto el intervalo de probabilidad parte del conocimiento de la proporción p que caracteriza a la población y resuelve un problema de predicción al indicar dónde estarán situadas las proporciones p_o observadas en muestras de tamaño n procedentes de dicha población. El intervalo de confianza parte únicamente del conocimiento de la proporción p_o observada en una muestra de tamaño n y resuelve un problema de estimación al dar el intervalo que tiene gran probabilidad de contener la verdadera proporción p (desconocida) que caracteriza a la población origen de dicha muestra.

Dado un cierto tamaño de muestra n y un valor α , existe un único intervalo de probabilidad mientras que pueden haber infinitos intervalos de confianza, uno para cada muestra que se tenga.

Tamaño de la muestra

La fórmula de cálculo del intervalo de confianza in-

dica cómo a medida que aumenta el tamaño n de la muestra, este intervalo es más estrecho, es decir la estimación de la proporción p a partir de la proporción observada p_o es más precisa.

¿ Cuántos individuos deberemos elegir para estimar la proporción p ?. Se trata de fijar a priori la precisión e deseada y a partir de ella calcular el valor de n para que la proporción observada en la muestra como máximo esté a una distancia $\pm e$ de la verdadera proporción p .

Despejando el valor n en la fórmula (4) se obtiene n en función de la precisión e :

(11)

$$n = z_{\alpha}^2 pq / e^2$$

El valor p es desconocido ya que precisamente se realiza el sondeo para estimarlo. En la fórmula (11) debe sustituirse p por un valor aproximado, obtenido según uno de los siguientes criterios:

- a.- Estudios anteriores proporcionan una idea aproximada del valor de p .
- b.- Realizar un sondeo previo, extrayendo una pequeña muestra, y sustituir p por la proporción p_o observada en ella.
- c.- Sustituir el producto pq de la fórmula (11) por el caso más desfavorable. El valor $pq=0.25$ es el mayor de todos los posibles.

Estrategia global

La determinación del tamaño de la muestra da una nueva perspectiva a los problemas de estimación. En efecto, es más lógico fijar la precisión e deseada que partir de un tamaño de muestra arbitrario.

El proceso metodológico óptimo para estimar una proporción es el siguiente:

1.- Fijar la precisión e deseada y el riesgo α .

2.- Determinar el tamaño n de la muestra:

$$n = z_{\alpha}^2 pq / e^2$$

3.- Realizar un sondeo para extraer una muestra al azar de tamaño n.

4.- Calcular la proporción observada en dicha muestra. (Estimación puntual de p) :

$$p_o = n_A / n$$

5.- Calcular el intervalo de confianza (Estimación por intervalo de p):

$$p_o \pm z_{\alpha} \sqrt{p_o q_o / n}$$

Aunque éste es el proceso óptimo, no siempre es posible seguirlo. En efecto, si sólo se dispone de una información limitada, por ejemplo de $n=87$ individuos, y no hay posibilidad de obtener más información, la estimación se realizará con la máxima información disponible, es decir con los $n=87$ individuos, pasando directamente por 4.

Generalización

Cuando la característica estadística a estimar no es una proporción, cambian las tres fórmulas recuadradas, pero el proceso anterior permanece invariable.

Ejemplo 2

El resultado de un primer sondeo de opinión sitúa entre un 70% y un 83% el porcentaje de votos SI en un referendun.

a.- ¿Cuántos individuos deberá contener el próximo son-

deo, para que la proporción de votos afirmativos, dados por los individuos de la muestra, no esté más alejada de un $\pm 2\%$ de la verdadera proporción?. Se acepta un riesgo $\alpha = 0.05$.

Se aplica la fórmula (11). Por estar el valor de p comprendido entre 0.70 y 0.83, el caso más desfavorable corresponde a $p=0.70$.

$$n = 1.96^2 \times 0.70 \times 0.30 / 0.02^2 = 2017 \text{ individuos}$$

b.- Una vez realizado el sondeo al azar con 2017 individuos, se ha observado que 1613 votarán afirmativamente. Estimar la proporción de votos SI que dará toda la población.

La estimación puntual es:

$$p_0 = 1613/2017 = 0.80$$

La estimación por intervalo es:

$$0.80 \pm 1.96 \sqrt{0.80 \times 0.20 / 2017} = 0.80 \pm 0.017$$

$$p_0 \in (0.783 + 0.817)$$

V.- TEORIA DE LA DECISION ESTADISTICA

Un problema de decisión consiste en elegir entre dos hipótesis complementarias H_0 y H_1 la más verosímil de ellas, a partir de resultados observados en muestras. Al elegir la hipótesis H_1 existe el riesgo α de tomar una decisión equivocada. Al elegir la hipótesis H_0 existe el riesgo β de tomar una decisión equivocada.

Sea una muestra que contiene n bolas, de las cuales una proporción p_0 de ellas son blancas.

Sea una población A conocida que contiene una proporción p de bolas blancas.

Se desea saber si la muestra procede o no procede de dicha población.

Hipótesis nula e Hipótesis alternativa

La figura 5 esquematiza el planteo general de este problema de decisión.

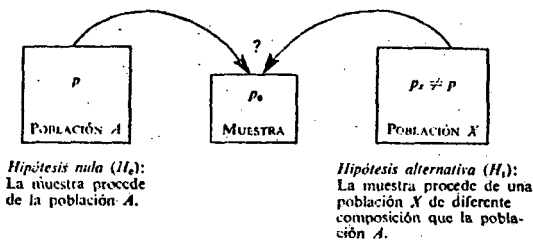


figura 5

Hay dos hipótesis posibles. La hipótesis principal es la hipótesis nula H_0 , según la cual la muestra procede de la población A. En este caso la diferencia existente entre las proporciones p_0 y p ha sido producida por la influencia del azar. Cuando la hipótesis nula es falsa significa que la muestra procede de una población X caracterizada por una proporción p_x desconocida, diferente de la proporción p . Esta hipótesis, complementaria a la anterior, recibe el nombre de hipótesis alternativa.

Prueba de decisión

La prueba es muy sencilla y está ilustrada en la figura 6. Las pruebas de decisión estadística están basadas en la hipótesis nula. Si la muestra procede de la población A, la proporción p_0 observada en ella estará dentro del intervalo de pro

babilidad, es decir dentro del intervalo en el que se encuentran la mayor parte de las proporciones observadas en muestras de tamaño n procedentes de la población p .

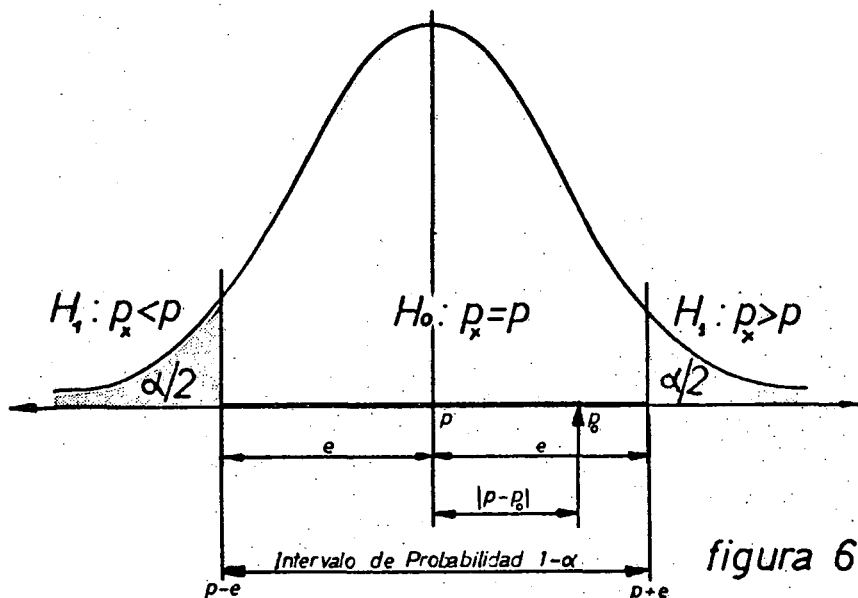


figura 6

Cuando la proporción observada p_0 está fuera del intervalo de probabilidad, lo más verosímil es que la muestra proceda de una población p_x diferente de la población p . En este caso la decisión a tomar es la de quedarse con la hipótesis alternativa.

Ver si p_0 está dentro o fuera del intervalo de probabilidad equivale a ver si la diferencia, en valor absoluto, entre p y p_0 es menor o mayor que el desvío e :

$$(12) \quad |p_0 - p| \begin{matrix} \leq & \rightarrow H_0 \\ > & \rightarrow H_1 \end{matrix} z_{\alpha} \sqrt{pq/n}$$

Dividiendo ambos miembros por la raíz cuadrada:

$$(13) \quad |p_o - p| / \sqrt{pq/n} \begin{cases} \leq z_{\alpha} & \rightarrow H_0 \\ & \rightarrow H_1 \end{cases}$$

Si llamamos z al primer miembro, se obtiene una prueba de decisión estadística llamada prueba de comparación de una proporción observada a una proporción teórica. Esta prueba, por estar basada en el intervalo de probabilidad, será válida para muestras grandes.

PRUEBA DE COMPARACION DE UNA PROPORCION OBSERVADA
 p_o EN UNA MUESTRA DE TAMAÑO n , A UNA PROPORCION
 TEORICA p

$$z = |p - p_o| / \sqrt{pq/n}$$

$z \leq z_{\alpha}$: Nada se opone en aceptar la hipótesis nula.

(14) $z > z_{\alpha}$: Rechazo de la hipótesis nula con un riesgo α .

Condiciones de aplicación: La prueba es sólo válida para muestras grandes (np y nq mayores o iguales a 5).

Cuando la conclusión estadística es rechazar H_0 con riesgo α , y sólo en este caso, le corresponde la siguiente conclusión experimental:

Si $p_o > p$ podemos afirmar con riesgo α que la muestra procede de una población p_x mayor que p .

Si $p_o < p$ podemos afirmar con riesgo α que la muestra procede de una población p_x menor que p .

Esta afirmación es evidente, ya que por ejemplo, si p_0 es menor que p , tanto que se ha demostrado que no puede proceder de p , es lógico que proceda de una población caracterizada por una proporción p_x menor que la proporción p .

Nótese que una prueba cuando concluye aceptar H_1 , afirma sólo que p_x es diferente de p .

Para saber en que cantidad p_x es mayor o menor que p , es necesario conocer el valor p_x . Esto es un problema de naturaleza diferente pero que ya ha sido estudiado: basta estimar p_x a partir de p . Se trata de un problema de estimación que se resuelve mediante el intervalo de confianza.

Los riesgos asociados a una decisión estadística

Hay sólo dos posibilidades de equivocarse al tomar la decisión:

Cuando se toma la decisión de aceptar H_1 , puede ser que H_0 sea verdadera. Este error recibe el nombre de Error tipo I. La probabilidad de cometer un error tipo I se llama riesgo α o riesgo de primera especie.

Cuando se toma la decisión de aceptar H_0 , puede ser que H_1 sea verdadera. Este error recibe el nombre de Error tipo II. La probabilidad de cometer un error tipo II se llama riesgo β o riesgo de segunda especie.

El riesgo α es conocido y se fija a priori. En la prueba anterior la probabilidad de que una proporción observada se encuentre fuera del intervalo de probabilidad (zona de aceptación de H_1) procediendo de la población p (H_0 verdadera) viene dada por el valor α asociado al intervalo de probabilidad. Esta probabilidad es la que se define como riesgo α o riesgo de primera especie.

De ahí la frase se rechaza la hipótesis nula con riesgo α .

Las frases se rechaza H_0 al nivel de significación α o se rechaza H_0 al nivel de confianza $1-\alpha$, son equivalentes y expresan el mismo concepto de riesgo α .

El riesgo β es siempre desconocido. El hecho de observar una proporción p_o dentro del intervalo de probabilidad, indica un resultado que no está en contradicción con la hipótesis nula, pero en ningún caso prueba que H_o sea verdadera.

En efecto, es posible que, debido a la influencia del azar, una proporción p_o observada en una muestra procedente de la población p_x , caiga dentro del intervalo de probabilidad p (zona de no rechazo de H_o). Esto ocurre más a menudo cuando p_x tiene un valor próximo a p . La probabilidad de que esto pase, llama riesgo β o riesgo de segunda especie, siempre se desconoce ya que la proporción p_x es también desconocida.

Una frase equivalente a la de nada se opone en aceptar la hipótesis nula es la diferencia encontrada no es significativa.

Un estudio detallado del riesgo β se hace en uno de los siguientes apartados.

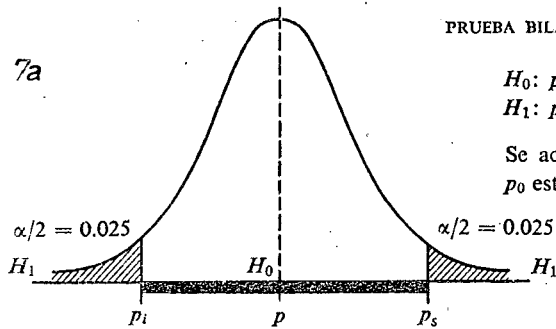
Se define como Potencia de una prueba de decisión estadística el valor $1 - \beta$. Si el riesgo β indica la probabilidad de equivocarse al aceptar H_o , la potencia es la probabilidad complementaria al riesgo β . Es decir la potencia caracteriza la capacidad que tiene una prueba de decisión estadística de no equivocarse al aceptar H_o .

Pruebas bilaterales y pruebas unilaterales

Se aplica una prueba bilateral o prueba de dos colas cuando se tiene la hipótesis alternativa: la población X es diferente de la población A . La prueba de decisión descrita es una prueba bilateral ya que la hipótesis alternativa (doble) era que la proporción p_x podía ser superior o inferior a la proporción p (p_x diferente de p). La figura 7a ilustra esta prueba para un riesgo $\alpha = 0.05$.

Cuando la hipótesis alternativa (simple) es que la característica estudiada en la población X es superior a la de la población A , se trata de una prueba unilateral o prueba de una cola por la derecha, tal como ilustra la figura 7b.

7a



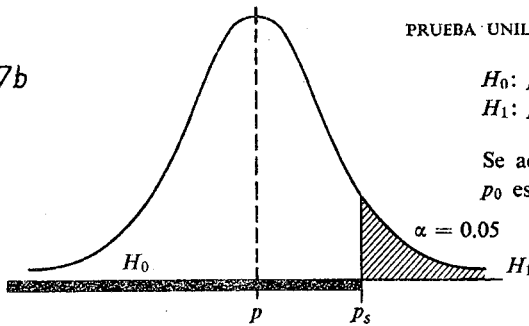
PRUEBA BILATERAL CON RIESGO $\alpha = 0.05$

$$H_0: p_0 = p$$

$$H_1: p_0 \neq p$$

Se acepta H_1 cuando el valor de p_0 está fuera del intervalo $p_i \div p_s$.

7b



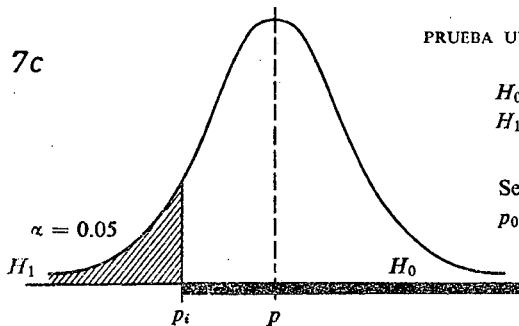
PRUEBA UNILATERAL CON RIESGO $\alpha = 0.05$

$$H_0: p_0 = p$$

$$H_1: p_0 > p$$

Se acepta H_1 cuando el valor de p_0 es mayor que p_s .

7c



PRUEBA UNILATERAL CON RIESGO $\alpha = 0.05$

$$H_0: p_0 = p$$

$$H_1: p_0 < p$$

Se acepta H_1 cuando el valor de p_0 es menor que p_i .

figura 7

Cuando la hipótesis alternativa (simple) es que la característica estudiada en la población X es inferior a la característica de la población X , se trata de una prueba unilateral por la izquierda, tal como ilustra la figura 7c para el mismo riesgo $\alpha=0.05$.

Las pruebas unilaterales se diferencian de las bilaterales, entre otras razones por el hecho de que el riesgo α está situado en uno de los dos lados, en el correspondiente a la zona de aceptación de H_1 , ya que el riesgo α indica la probabilidad de que una proporción observada procedente de p caiga en dicha zona.

De ahí se deduce (*) que para realizar una prueba unilateral basta comparar el valor z calculado en la prueba con el valor $z_{2\alpha}$ correspondiente a dos veces el riesgo fijado. La tabla 2 da los valores con que se deben comparar z según la prueba sea bilateral o unilateral.

RIESGO DE PRIMERA ESPECIE	10%	5%	1%	1%
PRUEBA BILATERAL z_{α}	1.65	1.96	2.58	3.29
PRUEBA UNILATERAL $z_{2\alpha}$	1.28	1.65	2.33	3.09

TABLA 2

Actitud explicativa y actitud pragmática

¿En que casos se aplica una prueba bilateral y en cuáles se aplica una prueba unilateral?

(*) Un estudio más detallado puede verse en la obra (3) pp. 75 y sig., cuya referencia se encuentra en la bibliografía seleccionada.

Este aspecto, poco discutido en las obras de estadística, es muy importante. Para comprenderlo se necesitan definir dos actitudes fundamentales que pueden adoptarse ante un problema experimental.

Se está en actitud explicativa cuando se tratan estadísticamente datos de problemas de investigación fundamental. Por ejemplo, si se elabora un nuevo método audiovisual de enseñanza X en investigación fundamental tan interesante es demostrar que X es más eficaz que un método de referencia A.

Para analizar los datos de este experimento con actitud explicativa, se aplicará una prueba bilateral, ya que la hipótesis alternativa planteada es doble.

Aunque el equipo de investigación a priori piense que X es más eficaz que A, la prueba a aplicar debe ser bilateral ya que si finalizado el experimento se observara una diferencia significativa en sentido contrario, el investigador no dudará en concluir que A es más eficaz que X.

Se está en actitud pragmática cuando se tratan estadísticamente problemas de investigación aplicada. Continuando con el ejemplo anterior, la Dirección de un Centro de Enseñanza que emplea el curso A, para decidir la compra del curso X estará sólo interesada en saber si el curso X es más eficaz que el A. Probar que X es menos eficaz que A no le interesa en absoluto. Se trata de un problema de investigación aplicada.

Para analizar los datos de este experimento, en actitud pragmática, se aplicará una prueba unilateral, ya que la hipótesis alternativa planteada es simple.

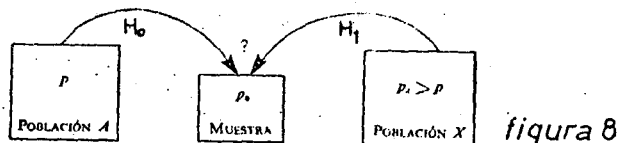
En Psicología Experimental, las pruebas bilaterales son las más utilizadas ya que el investigador adopta una actitud explicativa ante la mayor parte de los problemas.

Determinación del número de individuos necesarios para limitar el riesgo β

El concepto del riesgo α y su interpretación gráfica han quedado claros con las anteriores explicaciones. Ahora se aborda el estudio y la interpretación gráfica del riesgo β en el caso particular de la prueba unilateral de comparación de una proporción

observada a una proporción teórica. En caso de utilizar otras pruebas las fórmulas son diferentes (*) pero los conceptos aquí definidos permanecen invariables.

La prueba unilateral de comparación de una proporción observada a una proporción teórica, resuelve el problema esquematizado en la figura 8. Los valores p , p_o , y n son datos conocidos. El valor p_x , correspondiente a la hipótesis alternativa, es siempre desconocido.



La prueba consiste en ver si el valor p_o está dentro o fuera del intervalo de probabilidad de p . En la prueba unilateral se trata de ver si p_o está a la derecha o a la izquierda de \underline{p}_s (figura 9a). Se llegan a las siguientes conclusiones:

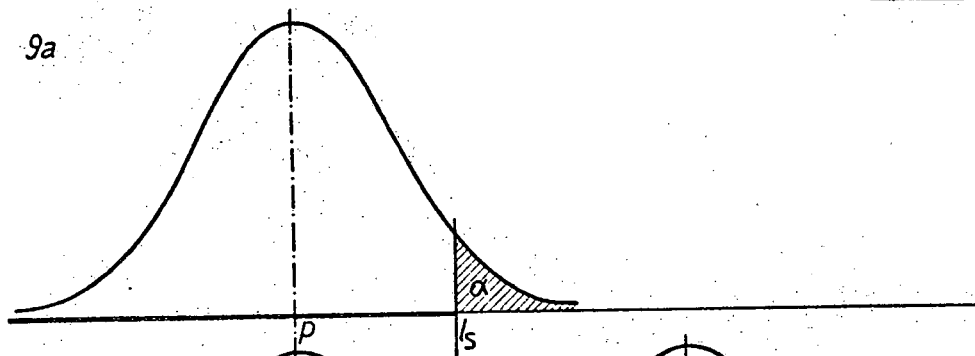
$p_o \leq \underline{p}_s$: Nada se opone en aceptar H_0

$p_o > \underline{p}_s$: Se rechaza H_0 con riesgo α

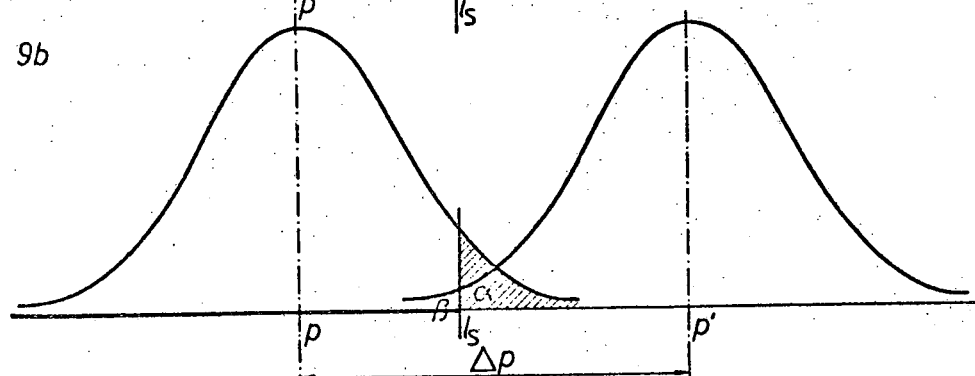
Cuando la conclusión de la prueba es nada se opone en

(*) El problema de la determinación del número de individuos necesario, para las pruebas de decisión estadística más usuales, puede estudiarse en DOMENECH MASSONS, J. M.: Métodos Estadísticos para la Investigación en Ciencias Humanas. Herder Barcelona, 1975.

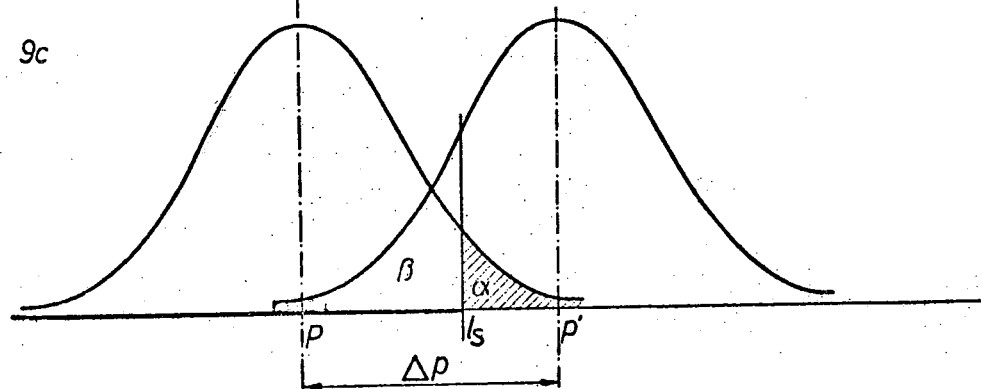
9a



9b



9c



9d

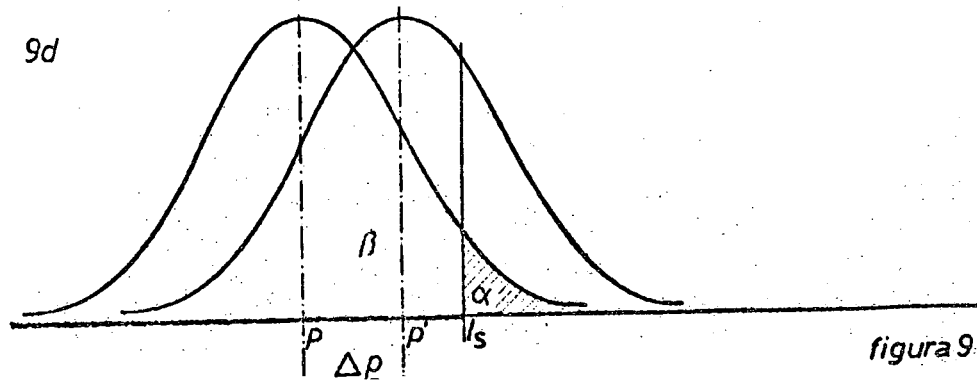


figura 9

aceptar H_0 , no quiere decir que la muestra proceda de la población p , ya que podría muy bien proceder de una población $p_x > p$ pero debido a las fluctuaciones del azar p_0 cayese a la izquierda de \underline{c}_s , es decir dentro de la zona de no rechazo de H_0 . Por este motivo la conclusión de la prueba es indicar que el resultado observado no está en contradicción con la hipótesis nula, y no la de afirmar que la hipótesis nula es verdadera.

Si la población origen de la muestra fuese la población p' , las proporciones observadas en muestras procedentes de p' fluctuarían alrededor de p' según una ley normal. Si se dibuja dicha distribución junto al gráfico de la figura 9a, se obtiene la figura 9b. El riesgo β será la zona sombreada ya que indica la cantidad de veces que muestras procedentes de p' dan proporciones observadas a la izquierda de \underline{c}_s , es decir dentro de la zona de no rechazo de H_0 .

El riesgo β , dibujada en la figura 9b, corresponde al riesgo de la prueba si la muestra procediese de la población p' . Pero el riesgo β real de la prueba es desconocido ya que la proporción p_x , correspondiente a la hipótesis alternativa, es un valor que existe pero que no se conoce.

La figura 9d ilustra el caso en que la proporción p_x coincide con un valor p' muy cercano al valor p . En el caso representado en la figura 9d el riesgo β es muy grande, supera el 50%.

La figura 9 muestra cómo a medida que p' se aproxima a p el riesgo β de la prueba va aumentando.

Por otra parte existe una influencia de n sobre β (y también sobre α). La figura 10 ilustra cómo para una misma hipótesis alternativa al aumentar el tamaño n de la muestra disminuye el riesgo β (y también el riesgo α).

El objeto de este apartado es calcular n de tal manera que los riesgos α y β sean pequeños, por ejemplo $\alpha = \beta = 0.05$. ¿Cómo lograrlo si p_x es desconocido?

El conocimiento de p_x no es necesario si se analiza el problema desde un ángulo práctico. En efecto, supóngase que se trata de probar si una muestra procede de una población $p=0.80$. Si en realidad procede de una población $p_x = 0.81$ y la prueba concluye que proceda de p , este error tipo II cometido no tiene nin-

guna importancia ya que $p = 0.80$ está muy próximo de $p_x = 0.81$. Lo mismo ocurriría si p_x valiese 0.82, 0.83, ...etc. Pero llegará un momento, a partir de un cierto valor $p \leq p + \Delta p$, en que el afirmar que la muestra procede de p empieza a ser un error tipo II grave y no se está dispuesto a cometerlo, es decir a que la prueba concluya que la muestra procede de p cuando procede de una población caracterizada por la proporción p_x igual o mayor que p' .

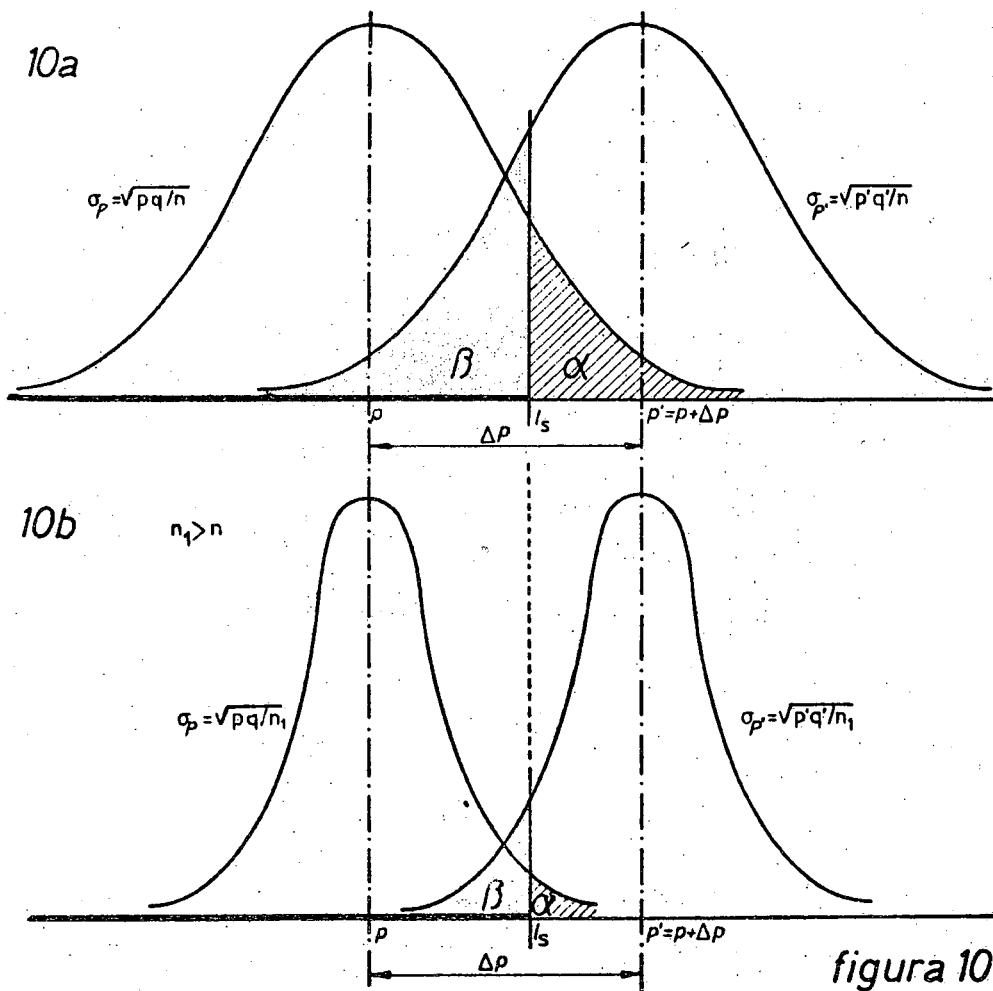


figura 10

El valor Δp se fija subjetivamente y es el valor a partir del cual si p_x es igual o superior a $p \pm \Delta p$ no se está dispuesto a cometer un error tipo II. (decir que p_o procede de p cuando en realidad procede de p_x).

Por lo tanto, para determinar el número de individuos necesario para asegurar un riesgo β pequeño, se debe evaluar subjetivamente Δp y fijar a priori unos riesgos α y β pequeños. La ecuación (15), que relaciona los datos p , p' , Δp , α y β con n , se deduce de la figura 10.

$$(15) \quad \Delta p = \overline{p_1}_s + \overline{1_s p'} = z_{2\alpha} \sqrt{pq/n} + z_{2\beta} \sqrt{p'q'/n}$$

Despejando n de esta ecuación se obtiene :

NUMERO DE INDIVIDUOS NECESARIOS EN UNA PRUEBA UNILATERAL DE COMPARACION DE UNA PROPORCION OBSERVADA A UNA PROPORCION TEORICA

$$n = \left[(z_{2\alpha} \sqrt{pq} + z_{2\beta} \sqrt{p'q'}) / \Delta p \right]^2$$

(16)

Condiciones de aplicación: El valor n encontrado debe ser tal que los productos np , nq , np' y nq' sean iguales o mayores que 5

Con un razonamiento análogo es fácil deducir (*) la fórmula (17) que da el número de individuos necesarios para una prueba bilateral de comparación de una proporción observada a una proporción teórica.

(*) Véase la obra (3) pp. 86 y sig. de la Bibliografía Seleccionada.

NUMERO DE INDIVIDUOS NECESARIOS EN UNA PRUEBA BILATERAL DE COMPARACION DE UNA PROPORCION OBSERVADA A UNA PROPORCION TEORICA

$$n = \left[(z_{\alpha} \sqrt{pq} + z_{2\beta} \sqrt{p'q'}) / \Delta p \right]^2$$

- (17) Condiciones de aplicación: El valor encontrado n debe ser tal que los productos np , nq , np' y nq' sean iguales o mayores que 5

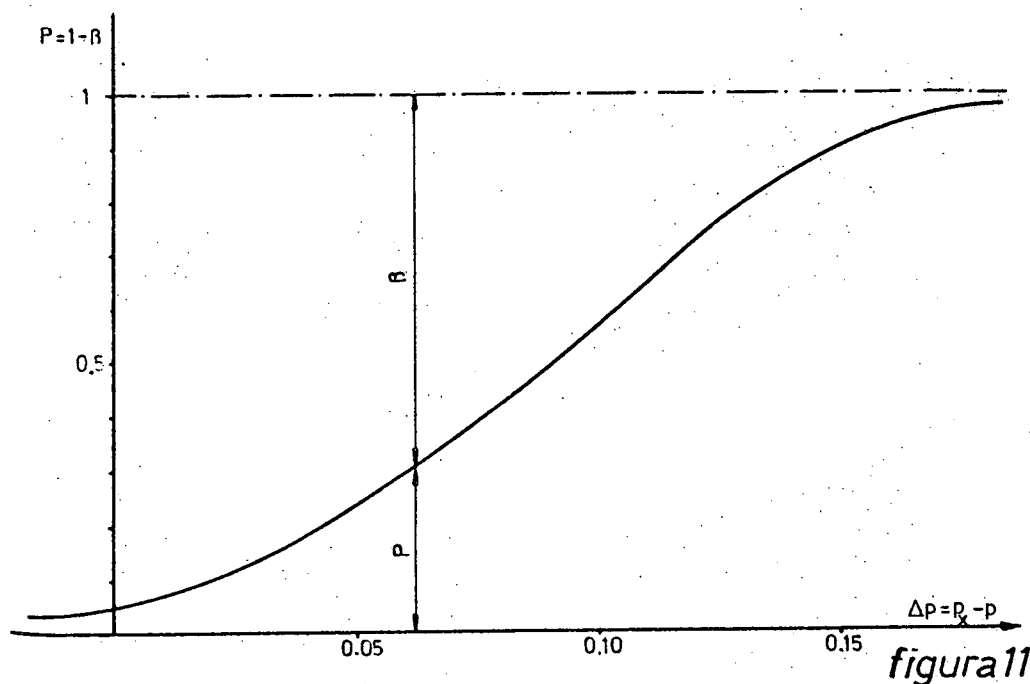


figura 11

Curva de Potencia

La figura 11, llamada curva de potencia, da los valores de la potencia $p=1-\beta$ en función de posibles valores p_x correspondientes a la hipótesis alternativa, en una prueba unilateral de

comparación de una proporción observada a una proporción teórica, en el caso particular de $p=0.50$, $n=100$ y un riesgo $\alpha=0.05$.

Esta curva es otra manera de ver el concepto ilustrado en la figura 9, según el cual β aumenta ($p=1-\beta$ disminuye) a medida que Δp se hace pequeño.

No se indica la manera de dibujar esta curva ya que se trata de un sencillo problema de calcular repetidas veces superficies bajo la ley normal, según el esquema de la figura 9.

Estrategia global

La determinación previa del número de individuos completa la conclusión de la prueba cuando la decisión a tomar es la de no rechazo de la hipótesis nula.

El proceso metodológico a seguir en un proceso de decisión, mediante la prueba de comparación de una proporción observada a una proporción teórica, es el siguiente:

1.- Fijar subjetivamente el valor Δp y los riesgos α y β .

2.- Determinar el número n de individuos:

$$n = \left[(z_{\alpha} \sqrt{pq} + z_{\beta} \sqrt{p'q'}) / \Delta p \right]^2$$

3.- Realizar el experimento con la muestra de n individuos.

4.- Calcular el valor z de la prueba de decisión:

$$z = |p_o - p| / \sqrt{pq/n}$$

5.- Tomar la decisión dando una de las siguiente conclusiones:

$z \leq z_{\alpha}$: Nada se opone en aceptar H_0 . La probabilidad de equivocarse, cuando p_x está más alejado de p que la distancia Δp , es igual o inferior al valor β fijado.

$z > z_{\alpha}$: Se acepta H_1 . La probabilidad de equivocarse es igual al riesgo α fijado.

Generalización

Cuando la prueba de decisión es otra que la prueba bilateral de comparación de una proporción observada a una proporción teórica, cambian las fórmulas recuadradas, pero el anterior proceso permanece invariable.

Ejemplo 3

Un grupo de Investigación ha construido un nuevo cuestionario X para medir el factor neuroticismo y desea estudiar su eficacia con relación a la del cuestionario A de referencia cuyo rendimiento es de 0.80 (80 de cada 100 individuos neuróticos son diagnosticados correctamente).

a.- ¿Cuántos individuos neuróticos debe haber en la muestra?

Se trata de asegurar una determinada potencia a la prueba bilateral (actitud explicativa) de comparación de una proporción observada a una proporción teórica. El equipo de investigación evalúa $\Delta p = \pm 0.10$, ya que considera importante averiguar si el nuevo cuestionario detecta un $\pm 10\%$ de individuos neuróticos respecto a los del cuestionario A, y acepta unos riesgos $\alpha = \beta = 0.05$. Sustituyendo valores en (17) y teniendo en cuenta que de los dos valores $p^* q^*$ posibles:

$$p^s = 0.80 + 0.10 = 0.90$$

$$q^s = 1 - 0.90 = 0.10$$

$$p^i = 0.80 - 0.10 = 0.70$$

$$q^i = 1 - 0.70 = 0.30$$

se elige el correspondiente al mayor producto:

$$p^* q^* = \max (p^i q^i, p^s q^s) = 0.70 \times 0.30$$

Se obtiene:

$$n = \left((1.96\sqrt{0.8 \times 0.2} + 1.65\sqrt{0.7 \times 0.3}) / 0.1 \right)^2 = 233$$

b.- En una muestra de $n=233$ neuróticos el cuestionario X ha diagnosticado correctamente 201 de ellos. ¿X tiene eficacia diferente de A?

Si se acepta $\alpha = 0.05$, aplicando (14) para comparar $p_o = 201/233 = 0.86$ con $p = 0.80$, se obtiene:

$$z = |0.86 - 0.80| / \sqrt{0.8 \times 0.2 / 233} = 2.32 > 1.96$$

Conclusión estadística: Se acepta H_1 con riesgo 0.05

Conclusión experimental: Puesto que $p_o = 0.86$ es superior a $p = 0.80$, y la diferencia encontrada es significativa, el rendimiento de X es superior al rendimiento de A.

c.- ¿En qué cantidad el rendimiento del cuestionario X es superior al del cuestionario A?

Basta estimar la proporción p_x de diagnosticos correctos del cuestionario X, a partir de la proporción $p_o = 0.86$ observada en la muestra de $n=233$ neuróticos. Aceptando un riesgo $\alpha = \beta = 0.05$ y aplicando (5) se obtiene:

$$0.86 \pm 1.96 \sqrt{0.86 \times 0.14 / 233} = 0.86 \pm 0.04$$

$$p_x \in (0.82 + 0.90)$$

El rendimiento de X está situado entre 0.82 y 0.90, es decir el rendimiento del cuestionario X será superior entre un 2 % y un 10 % respecto al rendimiento del cuestionario A.

d.- Una vez demostrada estadísticamente la superioridad del cuestionario X, el Grupo de Investigación desea venderlo a un Gabinete Psicológico que emplea el cuestionario A. Antes de comprarlo el Director de dicho Gabinete desea realizar un experimento para probar que la eficacia del cuestionario X es supe-

rior a la del cuestionario A. ¿Cuántos individuos debe haber en la muestra?

Se trata de asegurar una cierta potencia a la prueba unilateral (actitud pragmática) de comparación de una proporción observada a una proporción teórica. El Director del Gabinete psicológico evalúa $\Delta p = +0.07$, ya que considera importante adoptar X si como mínimo detecta un 7% más de neuróticos que A, y acepta unos riesgos $\alpha = \beta = 0.05$. Sustituyendo valores en (16) se obtiene:

$$n = \left[(1.65 \sqrt{0.80 \times 0.20} + 1.65 \sqrt{0.87 \times 0.13}) / 0.07 \right]^2 = 302$$

e.- En la muestra de $n=302$ neuróticos el cuestionario X ha diagnosticado correctamente 254. ¿X es más eficaz que A?

Si se acepta $\alpha = 0.05$, aplicando (14) pero teniendo en cuenta que se trata de una prueba unilateral de comparación de $p_o = 254/302 = 0.84$ con $p = 0.80$, se obtiene:

$$z = |0.84 - 0.80| / \sqrt{0.80 \times 0.20 / 302} = 1.74$$

El valor $z = 1.74$ es superior a $z_{2\alpha} = 1.65$ y además $p_o = 0.84$ es superior a $p = 0.80$. Conclusión: El cuestionario X es más eficaz que el cuestionario A.

VI.- BIBLIOGRAFIA SELECCIONADA

- (1) BONET, E: Fonaments d'Estadística. Teide. Barcelona, 1974
- (2) DIXON-MASY: Introducción al análisis estadístico. Castillo. Madrid, 1966
- (3) DOMENECH MASSONS, J.M.: Métodos Estadísticos para la Investigación en Ciencias Humanas. Herder. Barcelona, 1975.