

Àlgebra lineal i geometria per a físics

Ferran Cedó i Dolors Herbera

3 de març de 2006

Índex

1	Teoria de conjunts	7
1.1	Nocions bàsiques	8
1.1.1	El conjunt de les parts d'un conjunt: unió i intersecció de subconjunts	8
1.1.2	Producte cartesià	10
1.1.3	Relacions binàries	10
1.2	Aplicacions	12
1.2.1	Imatge i antiimatge	14
1.2.2	Composició d'aplicacions	15
1.2.3	Inversa d'una aplicació bijectiva	15
1.3	Els nombres naturals	16
1.3.1	El principi d'inducció	16
1.4	Exercicis	19
2	Grups	25
2.1	Subgrups i morfismes de grups	29
2.2	El grup de permutacions de n elements	33
2.2.1	Descomposició en producte de cicles i en producte de transposicions.	33
2.3	Exercicis	38
3	Anells	41
3.1	Suma i producte de matrius: Anells de matrius	43
3.2	Anells de polinomis	46
3.3	Elements invertibles d'un anell. Cossos.	49
3.4	El cos dels nombres complexos.	50
3.4.1	Interpretació geomètrica dels nombres complexos. Coordenades polars.	52
3.4.2	Aplicacions i exemples	54

3.5	Exercicis	56
4	L'anell de polinomis sobre un cos K	59
4.1	La funció grau	59
4.2	La divisió a $K[x]$	60
4.3	Polinomis irreductibles.	67
4.4	Arrels de polinomis	70
4.5	Polinomis irreductibles de $\mathbb{C}[x]$ i de $\mathbb{R}[x]$	73
4.6	Exercicis	75
5	Espais Vectorials	77
5.1	Dependència i independència lineal	82
5.2	Bases i dimensió	86
5.3	Suma i intersecció de subespais vectorials	91
5.4	Exercicis	95
6	Matrius	101
6.1	Transformacions elementals. Matrius elementals	101
6.2	Matrius esglaonades.	106
6.3	Rang d'una matriu. Matrius invertibles	111
6.4	Sistemes d'equacions lineals.	116
6.5	Exercicis	120
7	Aplicacions lineals	123
7.1	L'espai vectorial de totes les aplicacions lineals	124
7.2	Nucli i imatge d'una aplicació lineal	126
7.3	Coordenades respecte d'una base	132
7.4	Matriu d'una aplicació lineal	133
7.5	Canvi de coordenades. Canvi de Base	136
7.6	Exercicis	139
8	Determinants	143
8.1	Definició i propietats	143
8.2	Existència del determinant.	149
8.3	Exercicis	156
9	Diagonalització de Matrius i d'Endomorfismes	159
9.1	Conceptes bàsics	159
9.2	Vectors propis	161

9.3	Polinomi característic d'un endomorfisme.	164
9.4	Exercicis	170
10	Espai Dual	173
10.1	Definició i propietats	173
10.2	L'espai bidual	178
10.3	Subespai incident	180
10.4	Exercicis	183
11	Formes bilineals	185
11.1	Matriu associada a una forma bilineal	187
11.2	L'espai vectorial de les formes bilineals	189
11.3	Bases Ortogonals	191
11.4	Productes escalars	198
11.5	El Teorema Espectral	202
11.6	Exercicis	205
12	Geometria Euclidiana	207
12.1	Espai afí euclidià i varietats lineals	208
12.2	Coordenades	210
12.3	Distància i perpendicularitat	212
12.4	Distància entre dues varietats lineals	214
12.5	Isometries i desplaçaments	215
12.6	Exercicis	218
13	Tensors	221
13.1	Definicions i propietats	222
13.2	Canvi de base	224
13.3	Contraccions tensorials	226
13.4	Exercicis	227
	Índex alfabètic	229

Capítol 1

Teoria de conjunts

La noció de conjunt correspon al que entenem usualment per col·lecció, agrupació o classe d'objectes. En el llenguatge corrent aquests objectes es diuen elements, membres o individus de la col·lecció, agrupació o classe.

Els matemàtics han elegit, per designar aquests conceptes, les paraules *conjunt* i *element*, i diuen:

Un conjunt està format per elements.

La importància de la noció de conjunt es deriva del fet que actualment les matemàtiques s'escriuen fent servir el llenguatge de la *Teoria de Conjunts*. Malgrat això, el concepte de conjunt és molt delicat des d'el punt de vista lògic, i arribar a donar una definició precisa de conjunt ha estat, històricament, un procés llarg i complicat.

La definició formal i rigorosa de conjunt està fora de l'abast d'aquest curs. No saltres ens conformarem a dir que un conjunt A està ben definit quan es té un criteri que ens permet afirmar si l'element a pertany al conjunt A o no. En cas afirmatiu escriurem $a \in A$, i en cas negatiu, $a \notin A$.

Un exemple molt famós que il·lustra la dificultat de donar una definició rigorosa de conjunt és la Paradoxa de Bertrand Russell:

Sigui A el conjunt de tots els conjunts que es pertanyen a ells mateixos i sigui B el conjunt de tots els conjunts que no es pertanyen a ells mateixos. És clar que si X és un conjunt, o bé $X \in A$ o bé $X \in B$, però no pot pertànyer a A i a B a la vegada. Ara bé, si $B \in A$, llavors, per la definició de A , $B \in B$, però això no pot ser, per tant $B \notin B$, i en aquest cas, per la definició de A , tenim que $B \in A$, una altra contradicció.

Observem que segons la nostra idea del que ha de ser un conjunt, o bé A no és un conjunt o B no és un element, ja que no podem decidir si B és un element de

A o no. Com que tot conjunt X és element d'algun altre conjunt, $X \in \{X\}$, tenim també que B no és un conjunt, ja que no podem decidir si B pertany a B o no.

Per tal d'evitar paradoxes d'aquest estil, tampoc està permès que un conjunt es pertanyi a ell mateix, és a dir, no pot passar mai que $X \in X$ si X és un conjunt.

Exemples 1.0.1

- (1) El conjunt dels nombres naturals

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

- (2) El conjunt dels nombres enters

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

- (3) El conjunt dels nombres racionals

$$\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}.$$

- (4) El conjunt dels nombres reals

$$\mathbb{R} = \{a.a_1a_2a_3\dots \mid a, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n \leq 9\}.$$

- (5) El conjunt buit $\emptyset = \{\}$ és el conjunt que no té cap element.

- (6) $\{1\}$, $\{a, b, c\}$, el conjunt dels enters múltiples de 2, és a dir, $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k, \text{ on } k \in \mathbb{Z}\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b\sqrt{2}, \text{ on } a, b \in \mathbb{Q}\}$. $\diamond$

1.1 Nocions bàsiques

Siguin A i B conjunts. Direm que A és un *subconjunt* de B , i escriurem $A \subseteq B$, si i només si $x \in A \Rightarrow x \in B$ (el símbol $\Rightarrow$ es llegeix “implica” i significa que si es compleix la condició de la seva esquerra llavors també es compleix la condició de la seva dreta). En aquest cas també direm que A està contingut a B o que B conté A . Direm que A és igual a B , $A = B$, si i només si $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Si $A \subseteq B$ i $A \neq B$, escriurem $A \subset B$ i direm que A és un subconjunt propi de B . Per exemple: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1.1.1 El conjunt de les parts d'un conjunt: unió i intersecció de subconjunts

Sigui X un conjunt. El *conjunt de les parts* de X és el conjunt $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$. Per exemple, si X és el conjunt buit llavors $\mathcal{P}(X)$ té un sol element que és $\emptyset$. Noteu

que, en aquest cas, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ té dos elements $\emptyset$ i $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$. En general, si X és un conjunt, sempre són elements de $\mathcal{P}(X)$ el conjunt buit i X .

Siguin A i B subconjunts d'un conjunt X . Definim les operacions següents:

- (1) La *unió* de A i B és $A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$.
- (2) La *intersecció* de A i B és $A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ i } x \in B\}$.
- (3) El *complementari* de A és $A^c = \bar{A} = \{x \in X \mid x \notin A\}$.
- (4) La *diferència* A menys B és $A \setminus B = A \cap B^c = \{x \in X \mid x \in A \text{ i } x \notin B\}$.

Siguin $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Es pot demostrar que es compleixen les propietats següents:

- (1) Associatives: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.
- (2) Commutatives: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
- (3) Lleis d'absorció: $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$.
- (4) Lleis d'idempotència: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.
- (5) Distributives: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- (6) $A \cup A^c = X$, $A \cap A^c = \emptyset$.
- (7) $(A^c)^c = A$.
- (8) Lleis de *de Morgan*: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Sigui $\{A_i\}_{i \in I}$ una família de subconjunts d'un conjunt X , això és, per a cada índex $i \in I$, sigui $A_i \subseteq X$. Definim la seva unió com

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X \mid \exists i \in I \text{ tal que } x \in A_i\},$$

i la seva intersecció com

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X \mid x \in A_i \forall i \in I\}.$$

(Els símbols $\exists$ i $\forall$ es llegeixen “existeix” i “per a tot” respectivament.)

Direm que dos conjunts A i B són disjunts si i només si $A \cap B = \emptyset$.

1.1.2 Producte cartesià

Siguin A i B dos conjunts. Siguin $a \in A$ i $b \in B$. Un parell (a, b) és un símbol que satisfà la condició següent:

$$(a, b) = (a', b') \quad \text{si i només si} \quad a = a' \text{ i } b = b'.$$

Definim el *producte cartesià* de A per B com

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Sigui $\{A_i\}_{i \in I}$ una família de conjunts. Per a cada $i \in I$, sigui $a_i \in A_i$. Definim el símbol $(a_i)_{i \in I}$ per la propietat següent:

$$(a_i)_{i \in I} = (b_i)_{i \in I} \quad \text{si i només si} \quad a_i = b_i \quad \forall i \in I.$$

Definim el producte cartesià de la família $\{A_i\}_{i \in I}$ com

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid a_i \in A_i \quad \forall i \in I\}.$$

També escriurem $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ o $\prod_{i=1}^n A_i$ per denotar el producte cartesià dels conjunts $A_1, A_2, \dots, A_n$, i $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ per denotar un element d'aquest producte. A més, si $A_i = A \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$, denotarem el seu producte cartesià per A^n .

1.1.3 Relacions binàries

Una *relació binària* en un conjunt A és un subconjunt de A^2 . Si $\mathcal{R}$ és una relació binària en A i $(a, b) \in \mathcal{R}$, escrivim $a \mathcal{R} b$, i diem que a està relacionat amb b per $\mathcal{R}$.

Direm que la relació binària $\mathcal{R}$ és *reflexiva* si i només si

$$a \mathcal{R} a \quad \forall a \in A.$$

Direm que $\mathcal{R}$ és *simètrica* si i només si

$$a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a.$$

Direm que $\mathcal{R}$ és *antisimètrica* si i només si

$$a \mathcal{R} b \quad \text{i} \quad b \mathcal{R} a \Rightarrow a = b.$$

Direm que $\mathcal{R}$ és *transitiva* si i només si

$$a \mathcal{R} b \quad \text{i} \quad b \mathcal{R} c \Rightarrow a \mathcal{R} c.$$

Una *relació d'equivalència* és una relació binària, reflexiva, simètrica i transitiva.

Una *relació d'ordre* és una relació binària, reflexiva, antisimètrica i transitiva.

Un *conjunt ordenat* és un conjunt amb una relació d'ordre. Una relació d'ordre $\mathcal{R}$ en A és una *relació d'ordre total* si per a tot $a, b \in A$, o bé $a \mathcal{R} b$ o bé $b \mathcal{R} a$. Un conjunt amb una relació d'ordre total és un *conjunt totalment ordenat*.

Exemples 1.1.1

- (1) Sigui $A = \{\text{autobusos de Barcelona}\}$. Definim en A la relació

$a \mathcal{R} b$ si i només si a i b tenen les mateixes parades.

És fàcil veure que $\mathcal{R}$ és una relació d'equivalència.

- (2) Sigui X un conjunt. Definim en $\mathcal{P}(X)$ la relació

$A \mathcal{R} B$ si i només si $A \subseteq B$.

És fàcil veure que $\mathcal{R}$ és una relació d'ordre. A més, si X té més d'un element, aquesta relació no és d'ordre total.

- (3) La relació $\leq$ en $\mathbb{R}$ és una relació d'ordre total. $\diamond$

Notació: Normalment una relació d'ordre es denota pel símbol $\leq$, i una d'equivalència per $\sim$. $\diamond$

Sigui $\sim$ una relació d'equivalència en A . Per a cada $a \in A$, definim la *classe* de a respecte de $\sim$ com

$$[a] = \{b \in A \mid b \sim a\}.$$

Si $b \in [a]$, direm que b és un representant de la classe de a .

Lemma 1.1.2 *Siguin A un conjunt i $\sim$ una relació d'equivalència en A . Siguin a i b dos elements de A , llavors són equivalents,*

(i) $a \sim b$,

(ii) $[a] = [b]$,

(iii) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.

DEMOSTRACIÓ. Veiem que (i) implica (ii). Sigui $c \in [a]$. Llavors $c \sim a$, i com que $a \sim b$, la propietat transitiva ens diu que $c \sim b$. Per tant $c \in [b]$. Aquest argument demostra que si $a \sim b$ llavors $[a] \subseteq [b]$. Per la propietat simètrica, $b \sim a$, i llavors també tenim que $[b] \subseteq [a]$. Podem concloure doncs que $[a] = [b]$.

És clar que (ii) implica (iii). Veiem que (iii) implica (i). Sigui $c \in [a] \cap [b]$. Llavors $c \sim a$. Per la propietat simètrica, $a \sim c$. Com que també tenim que $c \sim b$, aplicant la propietat transitiva, obtenim que $a \sim b$. ■

El Lema anterior demostra que si $\sim$ és una relació d'equivalència en un conjunt A , llavors el conjunt de classes d'equivalència respecte de $\sim$ “parteix” el conjunt A en trossos disjunts.

A l'exemple 1.1.1 (1), una classe d'equivalència està formada pels autobusos que fan la mateixa línia. Les classes d'equivalència “parteixen” el conjunt d'autobusos entre els que fan la mateixa línia.

Exemples 1.1.3

(1) Definim a $\mathbb{Z}$ la relació següent:

$$a \sim b \quad \text{si i només si} \quad a - b \text{ és parell.}$$

És fàcil comprovar que $\sim$ és una relació d'equivalència. El conjunt de classes d'equivalència només té dos elements: $[0]$ i $[1]$. Aquí, $[0]$ és el conjunt dels enters parells i $[1]$ és el conjunt dels enters senars.

(2) A $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definim la relació $x \sim y$ si i només si y està a la recta determinada per $(0,0)$ i x . Veiem que $\sim$ és una relació d'equivalència.

És clar que $\sim$ satisfà les propietats reflexiva i simètrica. Per veure que també satisfà la propietat transitiva, considerem $x, y, z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tals que $x \sim y$ i $y \sim z$. Llavors $(0,0)$, x i y estan en una recta r , i $(0,0)$, y i z estan en una recta r' . Les rectes r i r' contenen els dos punts $(0,0)$ i y , per tant són la mateixa. Això vol dir que $(0,0)$, x i z estan alineats i per tant $x \sim z$.

Si $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ i r és la recta que passa per $(0,0)$ i x , llavors $[x] = r \setminus \{(0,0)\}$.

◇

1.2 Aplicacions

Siguin A i B conjunts. Una *aplicació* de A a B és una tripleta (A, B, f) , on f és un subconjunt del producte cartesià $A \times B$ que compleix les propietats següents:

(1) $\forall a \in A, \exists b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

(2) $(a, b), (a, b') \in f \Rightarrow b = b'$.

Notació: Per denotar que (A, B, f) és una aplicació, s'escriu $f: A \rightarrow B$, i es diu que f és una aplicació de A a B . En aquest cas, es diu que A és el *conjunt de sortida*

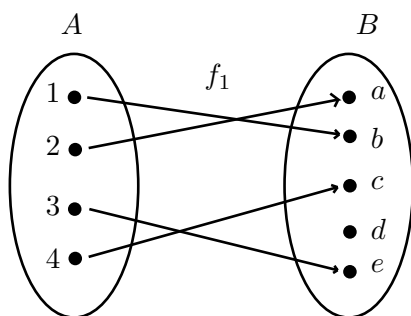
o *domini* de l'aplicació, B és el *conjunt d'arribada* de l'aplicació i f és la *gràfica* de l'aplicació. Sovint identificarem, per abús de llenguatge, la gràfica de l'aplicació amb l'aplicació mateixa, i direm que f és una aplicació, quedant implícit que hi ha un conjunt de sortida i un d'arribada. Si f és una aplicació i $(a, b) \in f$, escriurem $f: a \mapsto b$ o $f(a) = b$. $\diamond$

Si $f: A \rightarrow B$ i $g: C \rightarrow D$ són dues aplicacions, llavors $f = g$ si i només si $A = C$, $B = D$ i $f(a) = g(a) \forall a \in A$.

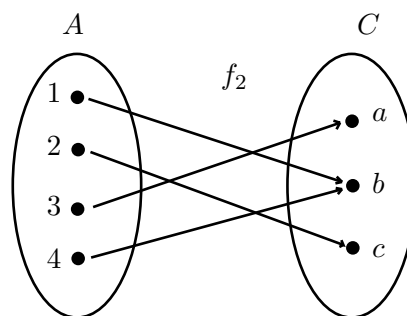
Sigui $f: A \rightarrow B$ una aplicació. Direm que f és *injectiva* si i només si $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$. Direm que f és *exhaustiva* si i només si $\forall b \in B, \exists a \in A$ tal que $f(a) = b$. Direm que f és *bijectiva* si i només si f és injectiva i exhaustiva.

Exemples 1.2.1

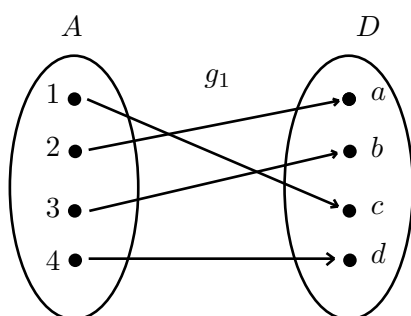
- (1) Siguin $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$, $C = \{a, b, c\}$ i $D = \{a, b, c, d\}$. Ara dibuixarem uns diagrames que representen algunes aplicacions i uns altres que no en representen cap.



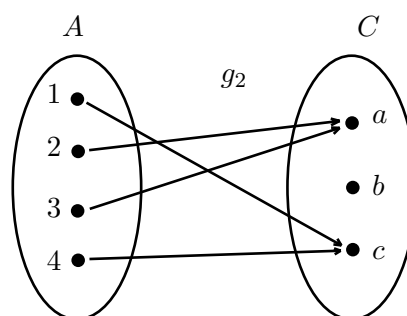
és aplicació injectiva.



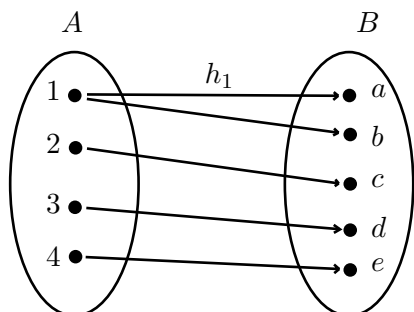
és aplicació exhaustiva.



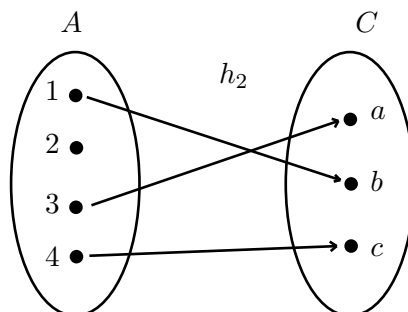
és aplicació bijectiva.



és aplicació i no és injectiva
ni exhaustiva.



no és aplicació.



no és aplicació.

Per exemple, el primer diagrama representa l'aplicació

$$\begin{aligned}
 f_1: A &\rightarrow B \\
 1 &\mapsto b \\
 2 &\mapsto a \\
 3 &\mapsto e \\
 4 &\mapsto c
 \end{aligned}$$

(2) Si A és un conjunt, l'aplicació

$$\text{id}_A: A \rightarrow A,$$

definida per $\text{id}_A(x) = x$ per a tot $x \in A$, és bijectiva i es diu aplicació identitat sobre A .

(3) Sigui A un conjunt i $B \subseteq A$. L'aplicació

$$\iota: B \rightarrow A,$$

definida per $\iota(x) = x$ per a tot $x \in B$, és injectiva i es diu inclusió canònica de B en A . $\diamond$

1.2.1 Imatge i antiimatge

Sigui $f: A \rightarrow B$ una aplicació. Siguin $C \subseteq A$ i $D \subseteq B$. Definim la *imatge* de C per f com

$$f(C) = \{f(x) \mid x \in C\}.$$

Definim la imatge de f com $\text{Im}(f) = f(A)$. Definim l'antiimatge de D per f com

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}.$$

Fent un abús de notació, escriurem $f^{-1}(b)$ en comptes de $f^{-1}(\{b\})$ quan $b \in B$.

Observem que f és exhaustiva si i només si $\text{Im}(f) = B$.

1.2.2 Composició d'aplicacions

Siguin $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ aplicacions. La *composició* de f amb g és l'aplicació

$$g \circ f: A \rightarrow C$$

definida per $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, per a tot $x \in A$.

Proposició 1.2.2 *Siguin $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ i $h: C \rightarrow D$ aplicacions. Llavors*

$$(i) \quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

$$(ii) \quad \text{id}_B \circ f = f \circ \text{id}_A = f.$$

DEMOSTRACIÓ. Sigui $a \in A$.

(i) Tenim $(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a)))$ i $((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$. Per tant $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(ii) Tenim $(\text{id}_B \circ f)(a) = \text{id}_B(f(a)) = f(a)$ i $(f \circ \text{id}_A)(a) = f(\text{id}_A(a)) = f(a)$. Per tant $\text{id}_B \circ f = f \circ \text{id}_A = f$. ■

1.2.3 Inversa d'una aplicació bijectiva

Proposició 1.2.3 *Siguin A i B conjunts no buits, i sigui $f: A \rightarrow B$ una aplicació. Llavors les afirmacions següents són equivalents.*

$$(i) \quad f \text{ és bijectiva.}$$

$$(ii) \quad \text{Existeix } g: B \rightarrow A \text{ tal que } g \circ f = \text{id}_A \text{ i } f \circ g = \text{id}_B.$$

DEMOSTRACIÓ. Sigui $f: A \rightarrow B$ una aplicació bijectiva. Observem que per a cada $y \in B$, $f^{-1}(y)$ és un subconjunt de A d'un element. Així podem definir una aplicació

$$g: B \rightarrow A,$$

per $g(y) = x$ si i només si $f(x) = y$. Llavors g satisfà les propietats que volem. Això demostra que $(i) \Rightarrow (ii)$.

Demostrem que (ii) $\Rightarrow$ (i). Si a_1 i a_2 són elements de A tals que $f(a_1) = f(a_2)$, llavors, com que $g \circ f = \text{id}_A$, $a_1 = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = a_2$. Així doncs, f és injectiva. Sigui $b \in B$, com que $f \circ g = \text{id}_B$, $f(g(b)) = b$. Per tant $g(b) \in f^{-1}(b)$, i podem concloure que f és exhaustiva. Per tant f és bijectiva. ■

L'aplicació g de la Proposició 1.2.3 es diu *aplicació inversa* de f , i es denota per f^{-1} . Observem que la inversa d'una aplicació és única, perquè si tenim dues aplicacions g i g' satisfent que $g \circ f = \text{id}_A$ i $f \circ g' = \text{id}_B$, llavors

$$g = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = g'.$$

Observem que si $f: A \rightarrow B$ és una aplicació bijectiva, llavors $f^{-1}(b)$, per a $b \in B$, té dos significats: la imatge de b per l'aplicació inversa de f i l'antiimatge de $\{b\}$ per l'aplicació f . Pel context quedarà clar què significa en cada cas.

Exemple 1.2.4 Considerem les aplicacions:

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 & \begin{array}{ll} n \mapsto n-1 & \text{si } n > 0 \\ 0 \mapsto 0 \end{array} \end{array}$$

llavors $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$ però $f \circ g \neq \text{id}_{\mathbb{N}}$. Noteu que f és injectiva i no és exhaustiva, per tant f no és bijectiva. ◇

1.3 Els nombres naturals

El conjunt dels nombres naturals $\mathbb{N}$ és un conjunt infinit totalment ordenat:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \dots < n < \dots$$

Observem també que tot subconjunt S no buit de $\mathbb{N}$ té mínim, és a dir, existeix $s \in S$ tal que $s \leq x$ per a tot $x \in S$.

Una de les propietats més importants dels nombres naturals és la següent.

1.3.1 El principi d'inducció

El principi d'inducció diu que *si S és un subconjunt de $\mathbb{N}$ tal que:*

- (1) $0 \in S$,
- (2) $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$,

llavors $S = \mathbb{N}$.

Aquesta propietat s'usa principalment per demostrar fórmules o teoremes que depenen dels nombres naturals. Així, per exemple si volem demostrar que una fórmula $F(n)$ és certa per a tot nombre natural n , el que podem fer és considerar

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid F(n) \text{ és certa} \},$$

i comprovar que aquest subconjunt dels natural compleix les condicions (i) i (ii) del principi d'inducció. Llavors el principi d'inducció ens diu que $S = \mathbb{N}$, que és el que es volia demostrar.

A la pràctica, el conjunt S no s'explicita, simplement es verifica que $F(0)$ sigui certa, i es demostra que si $F(n)$ és certa llavors també ho és $F(n+1)$. Llavors, pel principi d'inducció, obtenim que $F(n)$ és certa per a tot nombre natural n . Aquest tipus de demostració es diu demostració per inducció.

Exemple 1.3.1 Demostrarem per inducció que

$$0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{per a tot natural } n.$$

Per $n = 0$, és clar que es compleix la fórmula. Suposem que es compleix $0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Per tant $0 + 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$. I per inducció tenim que

$$0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{per a tot natural } n. \quad \diamond$$

A vegades és difícil demostrar $F(n) \Rightarrow F(n+1)$, però en canvi es pot demostrar més fàcilment que si $F(m)$ és certa per a tot $m \leq n$ llavors $F(n+1)$ també és certa. Però això no és cap problema, ja que els nombres naturals també compleixen la propietat següent.

Principi d'inducció completa. *Sigui S un subconjunt de $\mathbb{N}$ tal que:*

$$(1) \quad 0 \in S,$$

$$(2) \quad (\forall m \leq n, m \in S) \Rightarrow n+1 \in S,$$

llavors $S = \mathbb{N}$.

Per tant, si verifiquem que $F(0)$ és certa, i mostrem que si $F(m)$ és certa per a tot $m \leq n$ llavors $F(n+1)$ també és certa, el principi d'inducció completa ens diu que llavors $F(n)$ és certa per a tot nombre natural.

Exemple 1.3.2 Considerem la successió de *Fibonacci*:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots, a_n, \dots$$

on el terme general a_n compleix

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \forall n \geq 2.$$

Demostrarem que

$$a_n = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per a $n = 0$, tenim

$$1 = a_0 = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} + \frac{5 - \sqrt{5}}{10}.$$

Per a $n = 1$, tenim

$$1 = a_1 \quad \text{i} \quad \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1.$$

Suposem que $n \geq 1$ i que

$$a_m = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^m + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^m \quad \forall m \leq n.$$

Ara

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + a_{n-1} = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \\ &\quad + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \\ &= \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 \right) \\ &\quad + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \\ &\quad + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right). \end{aligned}$$

Observem que

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \left(\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} \right) = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

i

$$\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} \right) = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right).$$

Per tant

$$a_{n+1} = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}.$$

Pel principi d'inducció completa,

$$a_n = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad \diamond$$

1.4 Exercicis

Exercici 1 Considerem els subconjunts de nombres reals següents:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5 \quad \text{o} \quad x^2 + 3x + 2 = 0\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \pi \leq x < 60 \quad \text{i} \quad \sin x > 0\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid e \leq x \leq \sqrt{50} \quad \text{i} \quad \ln x > 1\}.$$

Descriviu, com a unió d'interval·ls disjunts o punts aïllats, els conjunts $A \cup B \cup C$, $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $(A \cap B) \cup C$, $(A \cup B) \cap C$, $A \cap B \cap C$.

Exercici 2 Considerem els subconjunts del pla $\mathbb{R}^2$ següents:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 2y \leq 5\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y \geq 1\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 3\}.$$

Quina figura geomètrica és $A \cap B \cap C$? Calculeu els seus vèrtexs i dibuixeu-la.

Exercici 3 Considerem el subconjunt de l'espai $\mathbb{R}^3$ següent:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\}.$$

Quina figura geomètrica és? Siguin $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fixats. Considerem els plans de $\mathbb{R}^3$ següents:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = \alpha\},$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = \beta\}.$$

Descriviu quines figures geomètriques són $A \cap B$ i $A \cap C$, en funció dels valors de α i β . Trobeu un pla π de $\mathbb{R}^3$ tal que $A \cap \pi$ sigui un pentàgon.

Exercici 4 Siguin A, B i C subconjunts d'un conjunt X . Demostreu les propietats següents:

- (a) *Associatives*: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- (b) *Commutatives*: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
- (c) *Lleis d'absorció*: $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$.
- (d) *Lleis d'idempotència*: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.
- (e) *Distributives*: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- (f) $A \cup A^c = X$, $A \cap A^c = \emptyset$.
- (g) $(A^c)^c = A$.
- (h) *Lleis de Morgan*: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
- (i) $A \subseteq B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$ (el símbol $\iff$ es llegeix “si i només si”, i significa que es compleix la condició de la seva esquerra si i només si es compleix la condició de la seva dreta);
- (j) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$; $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;
- (k) $A \cup B \neq \emptyset \iff A \neq \emptyset$ o $B \neq \emptyset$;
- (l) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$;
- (m) $A \setminus A = \emptyset$;
- (n) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$;
- (o) $A \cap (A \setminus B) = A \setminus B$;
- (p) $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$;
- (q) $(A \setminus B) \setminus A = \emptyset$;
- (r) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$;
- (s) $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$;
- (t) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;
- (u) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;
- (v) $(A \setminus B) \cup B = A \iff B \subseteq A$;
- (x) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Exercici 5 *Són equivalents $A \not\subset B$ i $B \subset A$?*

Exercici 6 *Sigui $\mathcal{P}(A)$ el conjunt de les parts de A .*

- (a) *Escriuiu els elements de $\mathcal{P}(A)$ (parts de A), on $A = \{a, b, c, d\}$.*
- (b) *Si $A = \{1, 2\}$, escriuiu els elements de $\mathcal{P}(A)$ i $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.*
- (c) *Si A és un conjunt de n elements, quants elements té $\mathcal{P}(A)$?*
- (d) *És cert que $\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$?*

Exercici 7 *Descriuiu, com a unió d'interval·ls disjunts o punts aïllats, la unió i la intersecció dels subconjunts de $\mathbb{R}$ següents:*

$$P_k = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2^{k+1}} \leq x \leq \frac{1}{2^k} \right\} \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

és a dir, $\bigcup_{k=0}^{\infty} P_k$ i $\bigcap_{k=0}^{\infty} P_k$.

Exercici 8 *Donat un conjunt finit A , indiqueu per $|A|$ el nombre d'elements de A (cardinal de A). Siguiu A i B dos conjunts finits.*

- (a) *Proveu que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.*
- (b) *Es pot trobar una fórmula semblant per a tres conjunts finits A, B i C ? I per a n conjunts?*
- (c) *Una mostra de 1000 estudiants ens dona els resultats següents: 850 prenen apunts a classe, 200 fan alguna consulta al professor i 350 consulten algun llibre; 130 prenen apunts a classe i fan alguna consulta al professor, 200 prenen apunts a classe i consulten algun llibre, 30 fan alguna consulta al professor i consulten algun llibre i només 20 fan les tres coses. Té solta aquesta distribució?*

Exercici 9 *Quines de les relacions següents entre enters positius (i tots els enters a l'apartat (d)) són reflexives, simètriques o transitives:*

- (a) $a \mathcal{R} b \iff a < b$.
- (b) $a \mathcal{R} b \iff a - b < 2$.
- (c) $a \mathcal{R} b \iff b$ és múltiple de a .
- (d) $a \mathcal{R} b \iff a \cdot b < 0$ o $a = b = 0$.

Exercici 10 Demostreu que les relacions definides a continuació són d'equivalència.

- (a) Al conjunt dels nombres enters, $x \sim y \iff x - y$ és múltiple de 3.
- (b) Al conjunt dels nombres reals, $x \sim y \iff x - y = 2k\pi$ per a algun enter k .

Exercici 11 Considerem el conjunt dels punts del pla, és a dir $\mathbb{R}^2$. Estudieu si les relacions següents són d'equivalència.

- (a) $(x, y) \sim (x', y')$ si les seves distàncies respectives a l'origen són iguals.
- (b) $(x, y) \sim (x', y') \iff x - x' \text{ i } y - y' \text{ són enters.}$
- (c) $(x, y) \sim (x', y') \iff x - x' = y - y'.$

Exercici 12 Definim al conjunt dels nombres enters la relació $a \sim b \iff 0 < a \cdot b$. Proveu que és simètrica i transitiva però no reflexiva.

Exercici 13 Trobeu l'error en l'argument següent:

Sigui $\sim$ una relació binària simètrica i transitiva en un conjunt A . Si $x \sim y$, llavors, per la propietat simètrica, $y \sim x$, i per la propietat transitiva, $x \sim x$. Això demostra que $\sim$ compleix la propietat reflexiva. Per tant $\sim$ és una relació d'equivalència.

Exercici 14 Demostreu que les relacions binàries que definim a continuació són relacions d'ordre.

- (a) Sigui X un conjunt. A $\mathcal{P}(X)$ definim la relació $\mathcal{R}$ per: $A \mathcal{R} B \iff A \subseteq B$.
- (b) Al conjunt dels enters positius definim la relació $\mathcal{R}$ per: $a \mathcal{R} b \iff b$ és múltiple de a .

Exercici 15 Siguin A i B conjunts finits no buits. Sigui $f : A \rightarrow B$ una aplicació. Demostreu que:

- (a) Si f és injectiva llavors $|A| \leq |B|$.
- (b) Si f és exhaustiva llavors $|A| \geq |B|$.
- (c) Si f és bijectiva llavors $|A| = |B|$.

Exercici 16 Sigui A un conjunt finit no buit. Sigui $f : A \rightarrow A$ una aplicació. Demostreu que f és injectiva si i només si f és exhaustiva. És certa aquesta afirmació si A és un conjunt infinit?

Exercici 17 Considerem l'aplicació $\varphi : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{Q}$ donada per $\varphi(p, q) = \frac{p}{q}$. Comproveu que és exhaustiva i calculeu l'antiimatge de $\frac{p}{q}$.

Exercici 18 Digueu si són injectives, exhaustives o bijectives les aplicacions següents:

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donada per $f(x) = e^x$,
- (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donada per $f(x) = x^3$,
- (c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donada per $f(x) = x^3 - 2x^2$,
- (d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donada per $f(x) = \sin x$,
- (e) $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ donada per $f(x) = \cos x$.

Exercici 19 Sigui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, on $\mathbb{R}^+$ és el conjunt dels reals positius, l'aplicació definida per $f(x) = e^{x^3}$. Comproveu que és bijectiva. Calculeu la seva inversa.

Exercici 20 Digueu si són injectives o exhaustives aquestes aplicacions:

- (a) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ donada per $f(a) = 2a + 1$.
- (b) $f : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ donada per $f(ax + b) = x^2 - (a + b)x + ab$. Aquí, $\mathbb{R}_n[x]$ denota els polinomis amb coeficients reals de grau menor o igual que n , per a cada nombre natural n .
- (c) $f : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ donada per $f(p(x)) = p'(x)$, la derivada de $p(x)$.

Exercici 21 Sigui $f : X \rightarrow Y$ una aplicació, siguin A i B subconjunts de X , i C i D subconjunts de Y . Demostreu o trobeu un contraexemple per a cadascuna de les afirmacions següents:

- (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
- (b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,
- (c) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$,
- (d) $f^{-1}(f(A)) = A$,
- (e) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$,
- (f) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$,
- (g) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$,

$$(h) \quad f(f^{-1}(C)) = C.$$

De les afirmacions que són falses, quines es tornen certes si suposem que f és injectiva? I si suposem que és exhaustiva?

Exercici 22 Demostreu que la composició d'aplicacions injectives és injectiva, i que la composició d'aplicacions exhaustives és exhaustiva.

Exercici 23 Siguin $f : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow C$ aplicacions i sigui $h = g \circ f$ la composició. Demostreu que

- (a) h injectiva $\Rightarrow f$ injectiva.
- (b) h exhaustiva $\Rightarrow g$ exhaustiva.
- (c) h exhaustiva i g injectiva $\Rightarrow f$ exhaustiva.
- (d) h injectiva i f exhaustiva $\Rightarrow g$ injectiva.

Exercici 24 Siguin $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ i $h : C \rightarrow A$ aplicacions. Demostreu les proposicions següents.

- (a) Si $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ i $f \circ h \circ g$ són injectives llavors f , g i h són injectives.
- (b) Si $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ i $f \circ h \circ g$ són exhaustives llavors f , g i h són exhaustives.
- (c) Si $h \circ g \circ f$ i $f \circ h \circ g$ són bijectives llavors f és bijectiva, g és injectiva i h és exhaustiva.

Exercici 25 Demostreu per inducció que per a tot natural n es verifica:

- (a) $1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
- (b) $n^3 - n$ és múltiple de 6.
- (c) Si $a \in \mathbb{R}$ i $1 \neq r \in \mathbb{R}$, llavors $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$.
- (d) Si $a, b \in \mathbb{Z}$, llavors $a^n - b^n$ és múltiple de $a - b$.
- (e) $n < 2^n$.
- (f) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ és divisible per 9.

Capítol 2

Grups

En el capítol anterior hem introduït una mica de llenguatge de Teoria de Conjunts. Usant aquest llenguatge, ens introduïrem en la part de les matemàtiques anomenada *Àlgebra*. Essencialment, l'Àlgebra estudia les estructures algebraïques, i una estructura algebraica consisteix en un conjunt amb una o més operacions que compleixen una sèrie de propietats.

Una de les estructures algebraïques més simples, però a la vegada importants, és la de *grup*.

Un *grup* és un conjunt G junt amb una operació

$$\begin{aligned} *: G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

que compleix les propietats següents:

- (1) Associativa: $(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in G$.
- (2) Element neutre: $\exists e \in G$ tal que $a * e = e * a = a \quad \forall a \in G$.
- (3) Element simètric: $\forall a \in G \exists a' \in G$ tal que $a * a' = a' * a = e$.

Si a més a més es compleix la propietat commutativa:

- (4) $a * b = b * a \quad \forall a, b \in G$,

diem que G és un *grup abelià* o *commutatiu*.

Lema 2.0.1 *En un grup $(G, *)$ l'element neutre és únic. A més, cada element de G té un únic element simètric.*

DEMOSTRACIÓ. Siguin e_1, e_2 elements neutres de G . Llavors

$$e_1 = e_1 * e_2 = e_2.$$

Per tant G només té un element neutre.

Sigui $a \in G$ i siguin $a_1, a_2 \in G$ elements simètrics de a . Llavors

$$a_1 = a_1 * e = a_1 * (a * a_2) = (a_1 * a) * a_2 = e * a_2 = a_2,$$

on e és l'element neutre de G . Per tant l'element simètric de a és únic. ■

Notació: A partir d'ara, quan parlem d'un grup G arbitrari, usarem la notació multiplicativa, és a dir, entendrem que l'operació de G és la multiplicació:

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

Amb aquesta notació l'element neutre de G es denota per 1 i es diu que és la *unitat* de G , i l'element simètric de $a \in G$ es denota per a^{-1} i es diu *l'invers* de a .

Quan treballem amb un grup abelià G arbitrari, usarem la notació additiva, és a dir, entendrem que l'operació és la suma:

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned}$$

Amb la notació additiva l'element neutre de G es denota per 0 i es diu que és el *zero* de G , i l'element simètric de $a \in G$ es denota per $-a$ i es diu *l'oposat* de a . ◇

Exemples 2.0.2

- (1) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ són grups abelians.
- (2) $(\{-1, 1\}, \cdot)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ són grups abelians.
- (3) En la Teoria de la Relativitat especial, la composició de dues velocitats v_1 i v_2 en la mateixa direcció és

$$\frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}},$$

on c és la velocitat de la llum. Sigui $G = (-c, c)$ l'interval de nombres reals entre $-c$ i c . Donats $v_1, v_2 \in G$, definim

$$v_1 \circ v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

Fixat $v_1 \in G$, definim la funció $f: \mathbb{R} \setminus \{-\frac{c^2}{v_1}\} \rightarrow \mathbb{R}$ per la fórmula

$$f(x) = \frac{v_1 + x}{1 + \frac{v_1 x}{c^2}}.$$

La funció $f(x)$ és derivable a tot el seu domini i la seva derivada és

$$f'(x) = \frac{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v_1 x}{c^2}\right)^2}.$$

Com que $v_1^2 < c^2$, tenim que $f'(x) > 0$ per a tot $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{c^2}{v_1}\}$, i per tant $f(x)$ és contínua i creixent a l'interval $[-c, c]$. Així $f(-c) < f(v_2) < f(c)$ per a tot $v_2 \in G$, i això ens diu que

$$-c < v_1 \circ v_2 < c$$

per a tot $v_1, v_2 \in G$, és a dir, $v_1 \circ v_2 \in G$ per a tot $v_1, v_2 \in G$. Així tenim definida una operació

$$\begin{aligned} \circ: G \times G &\rightarrow G \\ (v_1, v_2) &\mapsto v_1 \circ v_2 \end{aligned}$$

És més o menys llarg comprovar que aquesta operació és associativa, que l'element neutre és el 0 i que l'element simètric de v és $-v$. A més, l'operació també és commutativa. Per tant G amb l'operació $\circ$ és un grup abelià. Aquest grup modela la composició de velocitats de la mateixa direcció en Relativitat especial. $\diamond$

Una família molt important d'exemples de grups ve donada per la proposició següent.

Proposició 2.0.3 *Sigui X un conjunt no buit. Considerem*

$$S(X) = \{f: X \rightarrow X \mid f \text{ és bijectiva}\}.$$

Llavors $S(X)$ amb la composició d'aplicacions és un grup que es diu grup de permutacions de X o també grup simètric sobre X .

DEMOSTRACIÓ. Observem que la composició d'aplicacions bijectives és una aplicació bijectiva (vegeu l'exercici 22 del capítol 1). De fet, si $f, g \in S(X)$ llavors

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Sabem que la composició d'aplicacions és associativa. L'aplicació id_X és l'element neutre de $S(X)$. A més, si $f \in S(X)$ llavors $f^{-1} \in S(X)$ i

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{id}_X. \quad \blacksquare$$

Si X és un conjunt amb un nombre infinit d'elements llavors $S(X)$ té un nombre infinit d'elements. Si X és un conjunt finit llavors $S(X)$ també ho és.

Lema 2.0.4 *Siguin X i Y conjunts no buits amb n elements llavors el nombre d'aplicacions bijectives de X a Y és $n(n-1) \cdots 1 = n!$.*

En particular, si X té n elements llavors $S(X)$ té $n! = n(n-1) \cdots 1$ elements.

(El símbol $n!$ es llegeix “factorial de n ” i, com veiem, denota el producte de tots els enters entre 1 i n ambdós inclosos).

DEMOSTRACIÓ. Farem la demostració per inducció sobre n . Si $n = 1$ llavors només existeix una aplicació bijectiva entre X i Y . Com que $1 = 1!$, l'afirmació és certa en aquest cas. Suposem que $n > 1$ i que el nombre d'aplicacions bijectives entre dos conjunts de $n-1$ elements és $(n-1)!$. Hem de demostrar que el nombre d'aplicacions bijectives entre dos conjunts de n elements és $n!$.

Sigui $X = \{a_1, \dots, a_n\} = \{a_1, \dots, a_{n-1}\} \cup \{a_n\}$. Si $f: X \rightarrow Y$ és una aplicació bijectiva llavors la imatge per f de a_n pot ser qualsevol dels n elements de Y . A més, $f: \{a_1, \dots, a_{n-1}\} \rightarrow Y \setminus \{f(a_n)\}$ és una aplicació bijectiva per la qual tenim $(n-1)!$ possibilitats. En total, el nombre d'aplicacions $f: X \rightarrow Y$ bijectives és $n \cdot ((n-1)!) = n!$. ■

Si $X = \{1, 2, \dots, n\}$ llavors $S(X)$ es denota per S_n i es diu *grup de permutacions de n elements* o també *grup simètric de rang n* . Els elements de S_n es diuen *permutacions*. Si $\sigma \in S_n$, escrivim

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Per exemple, la permutació $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ és l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} \{1, 2, 3\} & \rightarrow & \{1, 2, 3\} \\ 1 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & 3 \end{array}$$

Si $\sigma, \tau \in S_n$, sovint escriurem $\sigma\tau$ en comptes de $\sigma \circ \tau$. També escriurem σ^m per denotar la composició de σ amb ella mateixa m vegades.

Si $n > 2$, el grup S_n **no** és abelià. Per exemple, a S_3 tenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

que són dues permutacions diferents.

2.1 Subgrups i morfismes de grups

Un subconjunt H d'un grup G es diu que és un *subgrup* de G si $ab \in H$ per a tot $a, b \in H$ i H amb l'operació de G restringida a elements de H és un grup.

Proposició 2.1.1 *Sigui H un subconjunt d'un grup G . Llavors les condicions següents són equivalents:*

(i) H és un subgrup de G .

(ii) $ab \in H \quad \forall a, b \in H,$

$a^{-1} \in H \quad \forall a \in H$ i

$1 \in H.$

(iii) $H \neq \emptyset$ i $ab^{-1} \in H \quad \forall a, b \in H.$

DEMOSTRACIÓ. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sigui e l'element neutre de H . Hem de veure que $e = 1$, és a dir, que e és l'element neutre de G . Tenim que $e \cdot e = e$. Sigui e^{-1} l'invers de e al grup G . Llavors

$$1 = e \cdot e^{-1} = (e \cdot e) \cdot e^{-1} = e \cdot (e \cdot e^{-1}) = e \cdot 1 = e.$$

La resta és clar.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) És clar.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Com que $H \neq \emptyset$, existeix $x \in H$. Ara $1 = xx^{-1} \in H$. Siguin $a, b \in H$. Llavors $b^{-1} = 1 \cdot b^{-1} \in H$, i per tant $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$. La propietat associativa es compleix a G i en particular també a H . ■

Exemples 2.1.2

- (1) Si G és un grup llavors $\{1\}$ i G són subgrups de G .
- (2) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ són subgrups de $\mathbb{R}$.
- (3) $\{-1, 1\}$ és un subgrup del grup multiplicatiu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (4) El conjunt G de rotacions o girs del pla $\mathbb{R}^2$ amb centre $(0, 0)$ és un subgrup commutatiu de $S(\mathbb{R}^2)$.

DEMOSTRACIÓ. Sigui $\alpha \in \mathbb{R}$. Denotem per $f_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ el gir de centre l'origen i d'angle α . Notem que

$$f_\beta \circ f_\alpha = f_{\alpha+\beta} = f_\alpha \circ f_\beta. \quad (2.1)$$

En particular, veiem que la composició de dos girs és un gir i que l'operació és commutativa. Aplicant la igualtat (2.1) a f_α i a f_0 , on f_0 és el gir d'angle 0 i centre l'origen, veiem que f_0 és l'element neutre de G . La igualtat (2.1) també ens diu que l'invers de f_α és $f_{-\alpha}$. ■

Aquest grup es diu *grup especial ortogonal de dimensió 2* i es denota per $SO_2(\mathbb{R})$.

◇

Per comparar dues estructures algebraiques del mateix tipus sobre conjunts A i B , per exemple dos grups, estudiem les aplicacions $f: A \rightarrow B$ que conserven les operacions. Aquestes aplicacions es diuen homomorfismes.

Siguin G_1, G_2 grups. Una aplicació $f: G_1 \rightarrow G_2$ tal que $f(xy) = f(x)f(y)$ per a tot $x, y \in G_1$ es diu *homomorfisme* o *morfisme de grups*.

Un *monomorfisme* és un homomorfisme injectiu. Un *epimorfisme* és un homomorfisme exhaustiu. Un *isomorfisme* és un homomorfisme bijectiu. Un homomorfisme d'un grup G en ell mateix es diu *endomorfisme* de G . Un endomorfisme de G bijectiu es diu *automorfisme* de G .

Es diu que dos grups G_1, G_2 són isomorfs si existeix un isomorfisme entre ells. Escrivim $G_1 \cong G_2$ per denotar que G_1 i G_2 són isomorfs.

Abans hem dit que els homomorfismes serveixen per comparar dues estructures algebraiques. Així, dos grups isomorfs, encara que no siguin iguals, tenen les mateixes propietats; per exemple, si un té 6 elements, l'altre també, si un és abelià, l'altre també, etc. És a dir, que si coneixem les propietats d'un grup concret, també coneixem automàticament les propietats de tots els grups isomorfs a aquest. Això fa que el problema més important en l'estudi dels grups sigui el de la seva classificació mòdul la relació d'isomorfia. Però això és un problema molt difícil i tema d'investigació dels matemàtics.

Exemples 2.1.3

(1) Si n és un enter fixat llavors l'aplicació

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ z &\mapsto nz \end{aligned}$$

és un homomorfisme.

DEMOSTRACIÓ.

$$f(z_1 + z_2) = n(z_1 + z_2) = nz_1 + nz_2 = f(z_1) + f(z_2)$$

per a tot $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$. ■

- (2) La funció $\exp(x) = e^x$ és un morfisme de grups entre $(\mathbb{R}, +)$ i $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, perquè $e^{x+y} = e^x e^y$. A més, $e^x = e^y$ si i només si $x = y$, per tant $\exp$ és un monomorfisme.
- (3) Si G_1 i G_2 són grups llavors l'aplicació $f: G_1 \rightarrow G_2$, definida per $f(x) = 1$ per a tot $x \in G_1$, és un homomorfisme que es diu homomorfisme trivial.
- (4) Si H és un subgrup d'un grup G llavors la inclusió natural

$$\begin{aligned} \iota: \quad H &\rightarrow G \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

és un monomorfisme.

- (5) Sigui a un element d'un grup G . L'aplicació

$$\begin{aligned} f: \quad G &\rightarrow G \\ x &\mapsto a^{-1}xa \end{aligned}$$

és un automorfisme de G , de fet

$$\begin{aligned} f^{-1}: \quad G &\rightarrow G \\ x &\mapsto axa^{-1} \end{aligned}$$

En efecte, $f(xy) = a^{-1}xya = a^{-1}xaa^{-1}ya = f(x)f(y)$, per a tot $x, y \in G$. $\diamond$

Proposició 2.1.4 *Sigui $f: G_1 \rightarrow G_2$ un morfisme de grups. Llavors*

- (i) $f(1) = 1$.
- (ii) $f(x^{-1}) = f(x)^{-1} \quad \forall x \in G_1$.
- (iii) Si f és bijectiva llavors $f^{-1}: G_2 \rightarrow G_1$ és morfisme de grups.

DEMOSTRACIÓ. (i) $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1)$. Multiplicant aquesta igualtat per $f(1)^{-1}$, obtenim $1 = f(1)$.

(ii) $f(x^{-1})f(x) = f(x^{-1}x) = f(1) = 1$. Per tant $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

(iii) Siguin $x, y \in G_2$. Siguin $z = f^{-1}(x)$ i $t = f^{-1}(y)$. Llavors $f(zt) = f(z)f(t) = xy$. Per tant $f^{-1}(xy) = zt = f^{-1}(x)f^{-1}(y)$. ■

Definim el *núcli* d'un morfisme de grups $f: G_1 \rightarrow G_2$ com el conjunt

$$\text{Ker}(f) = \{x \in G_1 \mid f(x) = 1\}.$$

Proposició 2.1.5 *Sigui $f: G_1 \rightarrow G_2$ un morfisme de grups. Llavors*

- (i) $\text{Ker}(f)$ és un subgrup de G_1 .

(ii) $\text{Im}(f)$ és un subgrup de G_2 .

DEMOSTRACIÓ. (i) Com que, per la Proposició 2.1.4, $f(1) = 1$, tenim que $1 \in \text{Ker}(f)$. Siguin $x, y \in \text{Ker}(f)$. Llavors, per la Proposició 2.1.4,

$$f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} = 1 \cdot 1^{-1} = 1.$$

Per tant $xy^{-1} \in \text{Ker}(f)$ i, per la Proposició 2.1.1, això demostra que $\text{Ker}(f)$ és un subgrup de G_1 .

(ii) Observem que $f(1) = 1 \in \text{Im}(f)$. Siguin $z, t \in \text{Im}(f)$. Llavors existeixen $x, y \in G_1$ tals que $f(x) = z$ i $f(y) = t$. Ara, per la Proposició 2.1.4, tenim que

$$zt^{-1} = f(x)f(y)^{-1} = f(xy^{-1}) \in \text{Im}(f).$$

Per tant, per la Proposició 2.1.1, $\text{Im}(f)$ és un subgrup de G_2 . ■

A partir d'aquí, usarem les proposicions 2.1.4 i 2.1.1 sense citar-les.

Proposició 2.1.6 *Sigui $f: G_1 \rightarrow G_2$ un morfisme de grups. Llavors f és injectiva si i només si $\text{Ker}(f) = \{1\}$.*

DEMOSTRACIÓ. Suposem que f és monomorfisme. Com que $f(1) = 1$, si $f(a) = 1$ per a un cert $a \in G_1$, llavors la injectivitat de f implica $a = 1$, i això demostra que $\text{Ker}(f) = \{1\}$.

Suposem ara que $\text{Ker}(f) = \{1\}$. Siguin a i b elements de G_1 tals que $f(a) = f(b)$. Llavors

$$1 = f(a)f(b)^{-1} = f(a)f(b^{-1}) = f(ab^{-1}),$$

i per tant $ab^{-1} \in \text{Ker}(f) = \{1\}$. Com que $ab^{-1} = 1$, multiplicant la igualtat per b per la dreta, podem concloure que $a = b$. Això demostra que f és injectiva. ■

El teorema següent demostra que els grups de permutacions juguen un paper molt important dins la Teoria de grups.

Teorema 2.1.7 (Cayley) *Sigui G un grup llavors existeix un morfisme de grups injectiu $\varphi: G \rightarrow S(G)$. És a dir, tot grup es pot veure com un subgrup d'un grup de permutacions.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $g \in G$, considerem l'aplicació $\sigma_g: G \rightarrow G$ definida per $\sigma_g(h) = gh$ per qualsevol $h \in G$. L'aplicació σ_g és bijectiva perquè $\sigma_g \circ \sigma_{g^{-1}} = \sigma_{g^{-1}} \circ \sigma_g = \text{id}_G$ (cf. Proposició 1.2.3), per tant $\sigma_g \in S(G)$.

Definim $\varphi: G \rightarrow S(G)$ per $\varphi(g) = \sigma_g$. Veurem que φ és un morfisme de grups injectiu.

Siguin $g, h, x \in G$. Tenim

$$(\varphi(gh))(x) = \sigma_{gh}(x) = ghx = (\sigma_g \circ \sigma_h)(x) = (\varphi(g) \circ \varphi(h))(x).$$

Per tant $\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$, i això demostra que φ és un morfisme de grups.

Sigui $h \in \text{Ker}(\varphi)$. Llavors $\varphi(h) = \text{id}_G$ i, per tant $hx = \varphi(h)(x) = x$ per a tot $x \in G$. En particular, per a $x = 1$, tenim que $h = 1$. Per la Proposició 2.1.6, φ és injectiva. ■

2.2 El grup de permutacions de n elements

Recordem que el grup de permutacions de n elements és el grup S_n de totes les aplicacions bijectives de $\{1, 2, \dots, n\}$ en ell mateix. El fet que el nombre de permutacions de n elements sigui un grup finit té com a conseqüència el resultat següent.

Proposició 2.2.1 *Sigui n un enter més gran o igual que 1 i sigui $\sigma \in S_n$. Llavors existeix un enter $r \geq 1$ tal que $\sigma^r = \text{id}$.*

DEMOSTRACIÓ. Considerem la successió infinita

$$\sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^s, \dots$$

Com que S_n té un nombre finit d'elements, no tots els elements de la successió poden ser diferents. Per tant existeixen s i s' , amb $s > s'$, tals que $\sigma^s = \sigma^{s'}$. Això implica que $\sigma^{s-s'} = \text{id}$. Prenent $r = s - s'$ obtenim el resultat que volíem. ■

Sigui n un enter positiu. Es diu que l'ordre d'una permutació $\sigma \in S_n$ és el mínim enter positiu r tal que $\sigma^r = 1$.

Observem que l'ordre de id és 1.

Si $n > m$, podem veure el grup de permutacions de m elements dins del grup de permutacions de n elements a través del morfisme de grups injectiu $f: S_m \rightarrow S_n$ definit per $f(\sigma) = \sigma'$, on $\sigma'(a) = \sigma(a)$ si $a \in \{1, \dots, m\}$ i $\sigma'(a) = a$ si $a \in \{m+1, \dots, n\}$. De fet, veiem S_m dins de S_n com el subgrup de les permutacions que deixen fixos els elements $m+1, m+2, \dots, n$.

2.2.1 Descomposició en producte de cicles i en producte de transposicions.

Direm que una permutació $\sigma \in S_n$ mou l'element $i \in \{1, \dots, n\}$ si $\sigma(i) \neq i$.

Sigui r un enter més gran que 1. Un *cicle* de longitud r , és una permutació $c \in S_n$ que mou exactament r elements $a_1, a_2, \dots, a_r$ de $\{1, 2, \dots, n\}$ de la manera següent:

$$c(a_1) = a_2, c(a_2) = a_3, \dots, c(a_{r-1}) = a_r, c(a_r) = a_1.$$

Denotarem el cicle c per

$$c = (a_1, a_2, \dots, a_r).$$

Un cicle de longitud 2 es diu *transposició*.

L'ordre d'un cicle de longitud r és r perquè si $c = (a_1, a_2, \dots, a_r) \in S_n$, llavors tenim la successió següent:

$$a_i, c(a_i) = a_{i+1}, \dots, c^{r-i}(a_i) = a_r, c^{r-i+1}(a_i) = a_1, \dots, c^r(a_i) = a_i,$$

per a tot $i = 1, \dots, r$, i per tant r és l'enter positiu més petit tal que $c^r = \text{id}$.

Veurem que tota permutació es pot escriure com a producte de permutacions més senzilles. Aquestes permutacions més senzilles seran els cicles. La idea bàsica per obtenir aquest tipus de descomposició està continguda en el lema següent.

Lema 2.2.2 *Siguin n un enter més gran que 1, $\sigma \in S_n$ i $a \in \{1, \dots, n\}$. Llavors existeix $k \geq 1$ tal que $\sigma^k(a) = a$. A més, si $\sigma(a) \neq a$ i k és mínim amb la propietat $\sigma^k(a) = a$, llavors*

$$\sigma = \sigma_1 \cdot (a, \sigma(a), \dots, \sigma^{k-1}(a)),$$

on σ_1 és una permutació que deixa fixos els elements de $B \cup \{a, \sigma(a), \dots, \sigma^{k-1}(a)\}$, on B denota el conjunt d'elements fixats per σ .

DEMOSTRACIÓ. Considerem la successió infinita

$$a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^s(a), \dots$$

Com que tots aquests elements són del conjunt finit $\{1, \dots, n\}$, existeixen s i s' , amb $s > s'$ tals que $\sigma^s(a) = \sigma^{s'}(a)$. Per tant $\sigma^{s-s'}(a) = a$. Prenent $k = s - s'$ obtenim que $\sigma^k(a) = a$.

Suposem que $\sigma(a) \neq a$ i que k és mínim amb la propietat $\sigma^k(a) = a$. Considerem el cicle de longitud k , $(a, \sigma(a), \dots, \sigma^{k-1}(a))$ i la permutació σ_1 definida per $\sigma_1(a) = a$ si $a \in B \cup \{a, \sigma(a), \dots, \sigma^{k-1}(a)\}$ i per $\sigma_1(a) = \sigma(a)$ en qualsevol altre cas. Llavors és clar que $\sigma_1 \cdot (a, \sigma(a), \dots, \sigma^{k-1}(a)) = \sigma$ i que σ_1 satisfà les propietats que volíem.

■

Es diu que dos cicles $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ i $(b_1, b_2, \dots, b_s) \in S_n$ són disjunts si

$$\{a_1, a_2, \dots, a_r\} \cap \{b_1, b_2, \dots, b_s\} = \emptyset.$$

Observem que si $c_1, c_2 \in S_n$ són cicles disjunts llavors

$$c_1 c_2 = c_2 c_1.$$

Fent servir el Lema 2.2.2 obtenim el resultat següent.

Teorema 2.2.3 *Tota permutació de S_n diferent de la identitat descompon en producte de cicles disjunts dos a dos.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq \text{id}$. Sigui $a \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\sigma(a) \neq a$. Llavors considerem la descomposició

$$\sigma = \sigma_1 \cdot (a, \sigma(a), \dots, \sigma^{k-1}(a)) = \sigma_1 c_1,$$

donada pel Lema 2.2.2. Notem que el Lema 2.2.2 assegura que σ_1 té més elements fixos que σ . Si $\sigma_1 = \text{id}$, llavors $\sigma = c_1$ és un cicle i ja hem acabat, si no, apliquem el Lema 2.2.2 a la permutació σ_1 per obtenir que $\sigma_1 = \sigma_2 \cdot c_2$, on c_2 és un cicle disjunt amb c_1 i σ_2 té més elements fixos que σ_1 . Obtenim doncs que $\sigma = \sigma_2 c_2 c_1$. Si σ_2 és la identitat, llavors $\sigma = c_2 c_1$, si no, tornem a aplicar el Lema 2.2.2 a σ_2 .

Podem anar repetint aquest procés de manera indefinida mentre la σ_i que obtenim no sigui la identitat. Cada vegada la permutació σ_i deixa més elements fixos. Com que el conjunt $\{1, \dots, n\}$ té un nombre finit d'elements, en un nombre finit de passos hem d'obtenir que $\sigma_i = \text{id}$, i en aquest cas $\sigma = c_i \dots c_1$, on $c_1, \dots, c_i$ són cicles disjunts dos a dos. ■

Observació 2.2.4 Es pot demostrar que la descomposició obtinguda al Teorema 2.2.3 és única llevat de l'ordre en què posem els cicles. ◇

El Teorema 2.2.3 permet calcular fàcilment l'ordre d'una permutació donada.

Corollari 2.2.5 *Sigui $\sigma \in S_n$ i sigui $\sigma = c_1 c_2 \dots c_s$ la descomposició de σ en producte de cicles disjunts. Per a $i = 1, \dots, s$, sigui r_i l'ordre de c_i . Llavors l'ordre de σ és el mínim comú múltiple de $r_1, \dots, r_s$.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui m el mínim comú múltiple de $r_1, \dots, r_s$. Observem primer que, com que els cicles disjunts commuten, $\sigma^r = c_1^r \dots c_s^r$. Si r és múltiple de tots els r_i , llavors existeixen $t_i \in \mathbb{Z}$ tals que $r = r_i t_i$ per a tot $i = 1, \dots, s$. Per tant

$$\sigma^r = c_1^{r_1 t_1} \dots c_s^{r_s t_s} = \text{id}.$$

Això demostra que $\sigma^m = \text{id}$.

Hem de veure que m és mínim satisfent aquesta propietat. Si m' és un enter positiu i $m' < m$ llavors algun r_i no és divisor de m' . Fent la divisió entera de m' entre r_i obtenim

$$m' = r_i q_i + s_i,$$

on $q_i, s_i \in \mathbb{Z}$ i $0 < s_i < r_i$. Així

$$c_i^{m'} = c_i^{r_i q_i + s_i} = c_i^{s_i} \neq \text{id}.$$

Com que els cicles $c_1, c_2, \dots, c_s$ són disjunts dos a dos, tenim que $\sigma^{m'} = c_1^{m'} \cdots c_s^{m'} \neq \text{id}$. Per tant l'ordre de σ és m . ■

Exemple 2.2.6 La descomposició de

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 7 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

en producte de cicles disjunts és:

$$\sigma = (1, 4, 5)(2, 8)(3, 7, 6).$$

El seu ordre és el mínim comú múltiple de 3, 2 i 3 que és 6. ◇

Teorema 2.2.7 *Segui n un enter més gran que 1. Tota permutació de S_n descompon en producte de transposicions.*

DEMOSTRACIÓ. En primer lloc veiem que $\text{id} = (1, 2)(1, 2)$, per tant la identitat és producte de transposicions.

Pel Teorema 2.2.3 tota permutació diferent de la identitat descompon en producte de cicles. Per tant només cal demostrar que tot cicle descompon en producte de transposicions. Però això és clar ja que

$$(a_1, a_2, \dots, a_r) = (a_1, a_2)(a_2, a_3) \cdots (a_{r-1}, a_r). \quad \blacksquare$$

Observació 2.2.8 La descomposició donada per Teorema 2.2.7 no és única, però es pot demostrar que els nombres de transposicions que apareixen en dues descomposicions d'una mateixa permutació tenen sempre la mateixa paritat. Això vol dir que si una de les descomposicions té un nombre parell de transposicions, llavors l'altra també; o que si una té un nombre senar de transposicions llavors l'altra també. ◇

Exemple 2.2.9 Observem que

$$(a_1, \dots, a_r) = (a_1, a_r)(a_1, a_{r-1}) \cdots (a_1, a_3)(a_1, a_2).$$

En particular $(1, 2, 3) = (1, 2)(2, 3) = (1, 3)(1, 2)$. $\diamond$

Sigui $\sigma \in S_n$ i sigui $\sigma = t_1 \cdots t_s$ una descomposició de σ en producte de transposicions. Com que la paritat de s només depèn de σ , definim la *signatura* o *signe* de σ com $\varepsilon(\sigma) = (-1)^s$.

Si el signe de σ és 1 diem que la permutació σ és parell, i si és -1 , diem que σ és senar.

Teorema 2.2.10 *L'aplicació signatura $\varepsilon: S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ és un morfisme de grups.*

DEMOSTRACIÓ. Siguin σ i τ dues permutacions amb descomposicions en producte de transposicions:

$$\sigma = t_1 \cdots t_r \quad \text{i} \quad \tau = t'_1 \cdots t'_s.$$

Llavors tenim una descomposició en producte de transposicions de $\sigma\tau$:

$$\sigma\tau = t_1 \cdots t_r t'_1 \cdots t'_s.$$

Així doncs $\varepsilon(\sigma\tau) = (-1)^{r+s} = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$. ■

Per la Proposició 2.1.5, el nucli de ε és un subgrup de S_n . Aquest subgrup es diu *subgrup alternat* i està format per totes les permutacions de signe 1, és a dir, per totes les permutacions parells.

Exemple 2.2.11 Sigui

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 5 & 7 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

La descomposició de σ en producte de cicles disjunts és

$$\sigma = (1, 3, 5)(2, 8)(4, 7, 6).$$

L'ordre de σ és

$$o(\sigma) = \text{m.c.m.}(3, 2, 3) = 6.$$

Per calcular la signatura de σ , la descomponem en producte de transposicions:

$$\sigma = (1, 3)(3, 5)(2, 8)(4, 7)(7, 6).$$

Llavors el signe de σ és -1 elevat al nombre de transposicions en què descompon:

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^5 = -1.$$

Calculem ara σ^{1000} . Sabem que $\sigma^6 = \text{id}$. Fent la divisió entera de 1000 entre 6, obtenim

$$1000 = 6 \cdot 166 + 4.$$

Per tant

$$\sigma^{1000} = (\sigma^6)^{166} \sigma^4 = \sigma^4.$$

Així

$$\begin{aligned} \sigma^{1000} &= \sigma^4 = (1, 3, 5)^4 (2, 8)^4 (4, 7, 6)^4 \\ &= (1, 3, 5)(4, 7, 6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 1 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}. \quad \diamond \end{aligned}$$

2.3 Exercicis

Exercici 1 *Estudieu si les operacions $*$ següents compleixen les propietats associativa, element neutre, element simètric i commutativa.*

(a) $x * y = 2^{x+y}$ sobre $\mathbb{N}$.

(b) $(a, b) * (a', b') = (aa', ba' + b')$ sobre $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}$, on $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

(c) $x * y = x \cdot y$ sobre $\mathbb{R}^+$ i sobre $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Quines d'aquestes operacions donen estructura de grup?

Exercici 2 (a) *La llei d'addició de resistències en paral·lel en un circuit elèctric és la donada per $R_1 * R_2 = R$, on*

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Comproveu que $$ és una llei associativa a $\mathbb{R}^+$. Com s'interpreta a nivell dels circuits?*

(b) *En la teoria de la relativitat especial, la llei de composició de velocitats en la mateixa direcció ve donada per*

$$v_1 * v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

on c és la velocitat de la llum. Demostreu que l'interval $(-c, c)$ amb aquesta operació $$ és un grup.*

Exercici 3 Sigui G un grup, X un conjunt i $G' = \{f \mid f : X \rightarrow G\}$ el conjunt d'aplicacions de X a G . Definim a G' el producte d'aplicacions següent:

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x),$$

per a tot $f, g \in G'$ i tot $x \in X$. Demostreu que G' amb aquesta operació és un grup.

Exercici 4 Sigui G un grup tal que per a tot $g \in G$, $g^2 = 1$. Demostreu que G és un grup abelià.

Exercici 5 Sigui G un grup i a un element de G . Proveu que l'aplicació $f_a : G \rightarrow G$, definida per $f_a(x) = axa^{-1}$, és un isomorfisme de grups. Quina és la seva inversa?

Exercici 6 Sigui G un grup de dos elements. Estudieu tots els morfismes de grups $f : G \rightarrow G$, indicant en cada cas si són injectius, exhaustius o bijectius.

Exercici 7 Demostreu que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, donada per $f(x) = e^x$, és un isomorfisme entre $(\mathbb{R}, +)$ i $(\mathbb{R}^+, \cdot)$.

Exercici 8 Observeu que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ amb la suma $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ és un grup. Sigui $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida per

$$f(x, y) = (2x - 3y, -4x + 6y).$$

Demostreu que f és un morfisme de grups i calculeu $\text{Ker}(f)$, $\text{Im}(f)$ i $f^{-1}(1, -2)$. Quina relació hi ha entre $\text{Ker}(f)$ i $f^{-1}(1, -2)$?

Exercici 9 Doneu el màxim nombre possible d'exemples de grups de 1, 2, 3 i 4 elements de manera que no hi hagi cap parell de grups diferents que siguin isomorfs. Escriviu les taules de les seves operacions.

Exercici 10 Sigui S_4 el grup de les permutacions de 4 elements. Donats els elements de S_4 següents,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

trobeu

- (a) $\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_1, \sigma_1\sigma_3, \sigma_3\sigma_4, (\sigma_1(\sigma_2\sigma_3))\sigma_4, (\sigma_2\sigma_1)\sigma_3,$
- (b) $\sigma_i^2, \sigma_i^3, \sigma_i^4, \dots, \sigma_i^n$, per a tot $i = 1, 2, 3, 4$ i $n \geq 5$.
- (c) Quants elements té S_4 ? Escriviu tots els elements de S_4 com a producte de cicles disjunts.

Exercici 11 Considereu les quatre permutacions de S_8 següents:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 7 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = (2, 3)(5, 3, 1)(4, 5), \quad \sigma_4 = (1, 2, 4, 5)(1, 2, 4).$$

- (a) Descomponen-les en producte de cicles disjunts.
- (b) Descomponen-les en producte de transposicions.
- (c) Calculeu el signe i l'ordre de cadascuna.
- (d) Calculeu $\sigma_3^{2532}, \sigma_4^{1542}$ i $\sigma_3^{1315} \circ \sigma_4^{5227}$.
- (e) Calculeu $\sigma_1 \circ \sigma_3$ i $\sigma_3 \circ \sigma_1$

Exercici 12 Considereu el grup S_3 :

- (a) Feu-ne la taula de multiplicar.
- (b) Feu una llista amb el signe i l'ordre de cada element.
- (c) Calculeu el subgrup de S_3 més petit que conté $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ i el més petit que conté $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.
- (d) Té solució l'equació $\sigma x = \tau x$? I $\sigma x = x\tau$?

Capítol 3

Anells

En aquest capítol introduïm una altra estructura algebraica que es diu anell i és una mica més complicada que la de grup.

Un *anell* és un conjunt R junt amb dues operacions:

$$\begin{array}{llll} \text{(suma) } +: & R \times R & \rightarrow & R \\ & (a, b) & \mapsto & a + b \end{array} \quad \text{i (producte) } \cdot: \begin{array}{llll} R \times R & \rightarrow & R \\ (a, b) & \mapsto & ab \end{array}$$

que compleixen les propietats següents:

(1) $(R, +)$ és un grup abelià.

(2) Associativa del producte:

$$(ab)c = a(bc) \quad \forall a, b, c \in R.$$

(3) Distributives del producte respecte de la suma:

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc \quad \forall a, b, c \in R.$$

Si, a més a més, el producte té element neutre $1 \in R$, és a dir:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in R,$$

diem que R és un *anell amb unitat* i que 1 és la unitat de R .

Si el producte és commutatiu, és a dir:

$$ab = ba \quad \forall a, b \in R,$$

diem que R és un *anell commutatiu*.

Nota: Tots els anells que estudiarem seran anells amb unitat. Per tant, a partir d'aquí, anell voldrà dir anell amb unitat. $\diamond$

Exemples 3.0.1

- (1) El conjunt $\{0\}$ amb la suma $0 + 0 = 0$ i el producte $0 \cdot 0 = 0$ és un anell que es diu anell zero.
- (2) $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$ són anells commutatius.
- (3) Sigui X un conjunt diferent del buit. Donades dues aplicacions f, g de X a $\mathbb{R}$ definim la seva suma per:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in X,$$

i el seu producte per:

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

El conjunt $F(X, \mathbb{R})$ de totes les aplicacions de X a $\mathbb{R}$ amb aquestes operacions és un anell commutatiu. $\diamond$

Proposició 3.0.2 *Sigui R un anell. Llavors*

$$(i) \quad x0 = 0x = 0 \quad \forall x \in R.$$

$$(ii) \quad x(-y) = -xy = (-x)y \quad \forall x, y \in R.$$

DEMOSTRACIÓ. (i) Tenim que $x0 = x(0 + 0) = x0 + x0$. Sumant $-x0$ a aquesta igualtat, obtenim $0 = x0$. Anàlogament es veu que $0x = 0$.

(ii) Tenim que $x(-y) + xy = x(-y + y) = x0 = 0$. Per tant $x(-y) = -xy$. Anàlogament es veu que $(-x)y = -xy$. ■

Un subconjunt S d'un anell R es diu que és un *subanell* de R si $1, a + b, ab \in S$ per a tot $a, b \in S$ i S amb les operacions suma i producte heretades de R és un anell.

Exemples 3.0.3

- (1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ és un subanell de $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, i $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ són subanells de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
- (2) El conjunt $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de totes les funcions contínues dels reals als reals és un subanell de l'anell $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de totes les funcions dels reals als reals. $\diamond$

Proposició 3.0.4 *Sigui S un subconjunt d'un anell R . Llavors S és un subanell de R si i només si*

$$(i) \quad S \text{ és un subgrup de } (R, +),$$

$$(ii) \quad ab \in S \text{ per a tot } a, b \in R,$$

$$(iii) \quad 1 \in S.$$

DEMOSTRACIÓ. Per la definició de subanell, és clar que si S és un subanell de R llavors es compleixen les propietats (i), (ii) i (iii).

Suposem que es compleixen les propietats (i), (ii) i (iii). Com que S és un subgrup de $(R, +)$, tenim que $a + b \in S$ per a tot $a, b \in S$ i S amb aquesta suma és un grup abelià. Com que $ab \in S$ per a tot $a, b \in S$, el producte, restringit a S , és una operació interna de S . A més, és clar que aquest producte de S és associatiu i distributiu respecte de la suma, com ho és el producte de l'anell R . Com que $1 \in S$, amb el que hem vist, tenim que S amb la suma i el producte heretats de R és un anell. Per tant S és un subanell de R . ■

Hi han un parell de procediments per construir anells nous a partir d'un anell donat R que són molt importants. Aquests són els *anells de polinomis* i els *anells de matrius*.

3.1 Suma i producte de matrius: Anells de matrius

Sigui R un anell, i siguin m i n enters positius. Una *matriu* $m \times n$ sobre R és una ordenació de mn elements de R en m files i n columnes, és a dir, és un objecte de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

amb $a_{ij} \in R$. També denotem aquesta matriu per $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ o per (a_{ij}) si no hi ha dubte sobre el tipus de matriu que és. Denotem el conjunt de totes les matrius $m \times n$ sobre R per $M_{m \times n}(R)$.

Les matrius $n \times n$ es diuen matrius quadrades d'ordre n . Denotem el conjunt de les matrius quadrades d'ordre n sobre R per $M_n(R)$.

Definim la suma de dues matrius $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ del mateix tipus sobre R per:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Es comprova fàcilment que $M_{m \times n}(R)$ amb la suma de matrius és un grup abelià.

Siguin $(a_{ik}) \in M_{m \times l}(R)$ i $(b_{kj}) \in M_{l \times n}(R)$. Definim el seu producte per:

$$(a_{ik})(b_{kj}) = (c_{ij}) \in M_{m \times n}(R),$$

on

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{il}b_{lj} = \sum_{k=1}^l a_{ik}b_{kj},$$

és a dir, l'element que ocupa el lloc (i, j) a la matriu producte s'obté multiplicant els elements de la fila i de (a_{ik}) pels corresponents elements de la columna j de (b_{kj}) i sumant aquests resultats.

Observem que per multiplicar dues matrius, **la primera ha de tenir tantes columnes com el nombre de files de la segona.**

Lema 3.1.1 *El producte de matrius satisfà la propietat associativa.*

DEMOSTRACIÓ. Siguin $(a_{ik}) \in M_{m \times l}(R)$, $(b_{kj}) \in M_{l \times n}(R)$ i $(d_{jp}) \in M_{n \times r}(R)$, llavors:

$$((a_{ik})(b_{kj}))(d_{jp}) = (c_{ij})(d_{jp}) = (f_{ip}),$$

on

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj}$$

i

$$\begin{aligned} f_{ip} &= \sum_{j=1}^n c_{ij} d_{jp} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj} \right) d_{jp} \\ &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq l}} a_{ik} b_{kj} d_{jp}. \end{aligned}$$

D'altra banda

$$(a_{ik})((b_{kj})(d_{jp})) = (a_{ik})(g_{kp}) = (h_{ip}),$$

on

$$g_{kp} = \sum_{j=1}^n b_{kj} d_{jp}$$

i

$$\begin{aligned} h_{ip} &= \sum_{k=1}^l a_{ik} g_{kp} \\ &= \sum_{k=1}^l a_{ik} \left(\sum_{j=1}^n b_{kj} d_{jp} \right) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq l}} a_{ik} b_{kj} d_{jp}. \end{aligned}$$

Per tant $(f_{ip}) = (h_{ip})$, és a dir

$$((a_{ik})(b_{kj}))(d_{jp}) = (a_{ik})((b_{kj})(d_{jp})). \quad \blacksquare$$

També es pot comprovar que el producte de matrius és distributiu respecte de la suma pels dos costats, és a dir, si $A, D \in M_{m \times l}(R)$ i $B, C \in M_{l \times n}(R)$ llavors

$$\begin{aligned} (A + D)B &= AB + DB, \\ A(B + C) &= AB + AC. \end{aligned}$$

La matriu

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(R)$$

es diu *matriu identitat* d'ordre n . Es comprova fàcilment que si $A \in M_{m \times n}(R)$ llavors

$$I_m A = A I_n = A.$$

Això demostra el resultat següent.

Proposició 3.1.2 *Si R un anell i sigui $M_n(R)$ el conjunt de les matrius quadrades $n \times n$. Llavors $M_n(R)$ és un anell amb la suma i el producte de matrius. L'element neutre de la suma és la matriu $n \times n$ que té totes les seves components iguals a zero, i l'element neutre del producte és la matriu identitat. ■*

Si $R \neq \{0\}$ i $n \geq 2$, llavors $M_n(R)$ no és commutatiu. Per veure això en el cas $n = 2$, considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Llavors $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En general, si $n > 2$ i considerem les matrius de $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ de $M_n(R)$ tals que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ i } j = 2, \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas} \end{cases} \quad \text{i} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2 \text{ i } j = 1, \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas,} \end{cases}$$

és a dir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

llavors

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Sobre $M_{n \times m}(R)$ tenim una altra operació que és la transposició de matrius.

Sigui $A = (a_{ij})$ una matriu $n \times m$ sobre un anell R . La transposada de la matriu A és per definició

$$A^t = (b_{ji}) \in M_{m \times n}(R),$$

on $b_{ji} = a_{ij}$. És a dir, per cada i i j , el component (j, i) de A^t és el component (i, j) de A .

Exemple 3.1.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad \diamond$$

A continuació escrivim algunes propietats de la transposició de matrius. Es deixa al lector la seva demostració.

Proposició 3.1.4 *Siguin A i B matrius de mides adequades sobre un anell commutatiu, llavors*

$$(i) \quad (A^t)^t = A.$$

$$(ii) \quad (A + B)^t = A^t + B^t.$$

$$(iii) \quad (AB)^t = B^t A^t \text{ (observem el canvi d'ordre en el producte!)}. \quad \blacksquare$$

3.2 Anells de polinomis

A la secció anterior, hem vist que donat un anell R podem construir l'anell de les matrius $n \times n$ sobre R . Ara construïrem un altre anell partint d'un anell R . Considerem el conjunt

$$R[x] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ i } a_0, a_1, \dots, a_n \in R\}.$$

Els elements $a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ es diuen *polinomis* sobre R . Els elements $a_0, a_1, \dots, a_n$ es diuen coeficients del polinomi $a(x)$. Si $a_n \neq 0$ es diu que el polinomi $a(x)$ té grau n i escrivim $\text{gr}(a(x)) = n$. En aquest cas, diem que a_nx^n és el terme de grau màxim de $a(x)$, i a_n és el *coeficient dominant* de $a(x)$.

Conveni: Direm que el polinomi 0 té grau $-\infty$. A més, $-\infty < n$ per a tot natural n i

$$-\infty + n = n - \infty = -\infty - \infty = -\infty. \quad \diamond$$

Es diu que dos polinomis $a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ i $b(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ són iguals si i només si $a_i = b_i$ per a tot i . En particular, $a(x) = b(x)$ implica $\text{gr}(a(x)) = \text{gr}(b(x))$.

Nota: Cal notar que

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + 0x^{n+1} = \\ &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + 0x^{n+1} + 0x^{n+2} = \dots \end{aligned}$$

Per tant, hi ha una certa ambigüïtat en definir els coeficients d'un polinomi donat, tot i que és clar que només pot haver-n'hi un nombre finit de diferents de zero. Per això de vegades es prefereix definir el conjunt de polinomis sobre R com el conjunt

$$\{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid a_i \in R, a_i = 0 \text{ per a tot } i \in \mathbb{N} \text{ excepte per a un nombre finit}\}.$$

En aquest llenguatge, el polinomi de $\mathbb{Z}[x]$, $1 + 2x - x^2$ s'escriu com la successió $(1, 2, -1, 0, 0, 0, \dots)$. $\diamond$

Donats dos polinomis $a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $b(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ sobre un anell R , definim la seva suma com

$$a(x) + b(x) = c(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_lx^l,$$

on $l = \max(n, m)$ i $c_i = a_i + b_i$ (aquí, $b_i = 0$ si $i > m$ i $a_i = 0$ si $i > n$). És fàcil comprovar que $R[x]$ amb aquesta operació suma és un grup abelià i el polinomi 0 és l'element neutre.

Definim el producte dels polinomis $a(x)$ i $b(x)$ com

$$a(x)b(x) = c(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{n+m}x^{n+m},$$

on $c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j}$ (igual que abans, $b_i = 0$ si $i > m$ i $a_i = 0$ si $i > n$). És fàcil comprovar que amb la suma i aquest producte $R[x]$ té estructura d'anell. Observem que l'element neutre del producte és el polinomi 1.

L'anell $R[x]$ es diu anell de polinomis en la variable x amb coeficients a R , o, simplement, anell de polinomis sobre R . Observem que R és un subanell de $R[x]$.

Com a conseqüència de la definició de la propietat commutativa, obtenim fàcilment el resultat següent.

Proposició 3.2.1 *Si R és un anell commutatiu, $R[x]$ també ho és. ■*

El tractament dels polinomis com a conjunt amb una estructura algebraica és relativament modern. Són idees més clàssiques els conceptes de funció polinòmica i el d'equació polinòmica. Adaptem ara aquests conceptes al nostre llenguatge.

Sigui R un anell commutatiu i sigui $a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ un element de $R[x]$. El valor del polinomi $a(x)$ en un element $r \in R$ és, per definició,

$$a(r) = a_0 + a_1r + \dots + a_nr^n.$$

Definim l'aplicació o funció polinòmica determinada per $a(x)$ com

$$\begin{aligned} a(x): \quad R &\rightarrow R \\ r &\mapsto a(r) \end{aligned}$$

Diem que $r \in R$ és una *arrel* del polinomi $a(x)$ si $a(r) = 0$. És a dir, r és una arrel si és un *zero* de la funció polinòmica $a(x)$.

El resultat següent explica la relació fonamental que hi ha entre les arrels d'un polinomi i l'estructura del polinomi.

Teorema 3.2.2 *Sigui R un anell commutatiu i $a(x) \in R[x]$. Un element $r \in R$ és una arrel de $a(x)$ si i només si existeix $b(x) \in R[x]$ tal que $a(x) = (x - r)b(x)$.*

DEMOSTRACIÓ. Observem que si $a(x) = (x - r)b(x)$, llavors $a(r) = (r - r)b(r) = 0$ i per tant r és arrel de $a(x)$.

Demostrem el recíproc. Sigui $a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. Suposem que $r \in R$ és una arrel de $a(x)$. Llavors tenim

$$\begin{aligned} a(x) &= a(x) - a(r) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \\ &\quad - (a_0 + a_1r + \dots + a_nr^n) \\ &= a_1(x - r) + \dots + a_n(x^n - r^n). \end{aligned}$$

Com que, per a $2 \leq i \leq n$,

$$x^i - r^i = (x - r)(x^{i-1} + x^{i-2}r + \dots + xr^{i-2} + r^{i-1}),$$

tenim que $a(x) = (x - r)b(x)$, on

$$b(x) = a_1 + a_2(x + r) + \dots + a_n(x^{n-1} + x^{n-2}r + \dots + xr^{n-2} + r^{n-1}). \quad \blacksquare$$

3.3 Elements invertibles d'un anell. Cossos.

Un element a d'un anell R es diu que és *invertible* si existeix $b \in R$ tal que $ab = ba = 1$. En aquest cas, l'element b es diu que és l'invers de a i es denota per a^{-1} .

Per exemple, la matriu amb coeficients reals $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ és invertible perquè $A^2 = \text{Id}$. En aquest cas $A^{-1} = A$.

També cal observar que si $R \neq \{0\}$ llavors, per la Proposició 3.0.2, 0 no és un element invertible.

Considerem el conjunt

$$U(R) = \{x \in R \mid x \text{ és invertible}\}.$$

Observem que $1 \in U(R)$. Si $a, b \in U(R)$ llavors $ab \in U(R)$, de fet $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. Es comprova fàcilment que $U(R)$ amb el producte és un grup. Aquest grup es diu *grup dels elements invertibles* de R o *grup de les unitats* de R .

Exemples 3.3.1

- (1) $U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$
- (2) $U(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ i $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (3) Més endavant veurem que $U(M_n(\mathbb{R}))$ està format per les matrius quadrades de determinant no nul. Aquest grup es denota per $\text{GL}_n(\mathbb{R})$. $\diamond$

Un *cos* és un anell commutatiu diferent de zero tal que tot element no nul és invertible.

Anirem veient que els cossos són una classe molt important d'anells.

Sigui R un anell i a un element no nul de R . Diem que a és un *divisor de zero* si existeix un element no nul $b \in R$ tal que o bé $ab = 0$ o bé $ba = 0$. Un anell no nul sense divisors de zeros es diu *domini d'integritat*.

Per exemple, a $M_2(\mathbb{R})$ la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és un divisor de zero perquè $A \neq 0$ i $A^2 = 0$.

Proposició 3.3.2 *Un element invertible no és divisor de zero. En particular, tot cos és domini d'integritat.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui a un element invertible d'un anell R . Si $b \in R$ i $ab = 0$, tenim que $b = (a^{-1}a)b = 0$. De la mateixa manera veiem que si $ba = 0$, llavors $b = 0$. ■

Exemples 3.3.3

- (1) $\mathbb{Z}$ és un domini d'integritat que no és cos.

(2) $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ són cossos i per tant també són dominis d'integritat. $\diamond$

Entre $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ hi han molts conjunts que són cossos. El següent n'és un exemple.

Exemple 3.3.4 Considerem el subconjunt de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Llavors amb les operacions heretades de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ és un cos.

DEMOSTRACIÓ. Siguin $a + b\sqrt{2}$ i $a' + b'\sqrt{2}$ elements de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Llavors

$$(a + b\sqrt{2}) - (a' + b'\sqrt{2}) = (a - a') + (b - b')\sqrt{2}$$

i

$$(a + b\sqrt{2})(a' + b'\sqrt{2}) = (aa' + 2bb') + (ab' + ba')\sqrt{2}.$$

Com que a , b , a' i b' són elements de $\mathbb{Q}$ també ho són $a - a'$, $b - b'$, $aa' + 2bb'$ i $ab' + ba'$, a més $1 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Per tant $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ és un subgrup de $(\mathbb{R}, +)$, i per la Proposició 3.0.4, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ és un subanell de $\mathbb{R}$.

Per veure que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ és un cos, només cal veure que tot element diferent de zero té invers. Sigui $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, llavors $(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2 \in \mathbb{Q}$. Si $a^2 - 2b^2 = 0$ i $b \neq 0$, llavors $\sqrt{2} = |a| \cdot |b|^{-1} \in \mathbb{Q}$. Però $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, per tant, si $a^2 - 2b^2 = 0$ llavors $b = 0$ i, en conseqüència, $a = 0$. Això demostra que $(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = 0$ si i només si $a + b\sqrt{2} = 0$. Per tant, si $a + b\sqrt{2}$ és un element diferent de zero de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, llavors el seu invers és $\frac{1}{a^2 - 2b^2}(a - b\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. ■ $\diamond$

La idea per construir aquest cos és afegir a $\mathbb{Q}$ una arrel del polinomi $x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Sobre $\mathbb{R}[x]$ el polinomi $x^2 + 1$ no té cap arrel. Afegir una arrel d'aquest polinomi a $\mathbb{R}$ dona com a resultat el cos dels nombres complexos.

3.4 El cos dels nombres complexos.

Els *nombres complexos* són expressions de la forma $a + bi$, on $a, b \in \mathbb{R}$ i i és un símbol satisfent que $i^2 = -1$. Dos nombres complexos $a + bi$ i $c + di$ són iguals si i només si $a = c$ i $b = d$. La suma i el producte de nombres complexos es defineix per:

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i, \\ (a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

Denotem per $\mathbb{C}$ el conjunt de tots els nombres complexos. Es comprova fàcilment que $\mathbb{C}$ amb la suma de nombres complexos és un grup abelià. Tampoc costa gaire veure que el producte de nombres complexos és commutatiu. Veiem que també és associatiu:

Siguin $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Tenim:

$$\begin{aligned}
 ((a + bi)(c + di))(e + fi) &= ((ac - bd) + (ad + bc)i)(e + fi) \\
 &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f) \\
 &\quad + ((ac - bd)f + (ad + bc)e)i \\
 &= (ace - bde - adf - bcf) \\
 &\quad + (acf - bdf + ade + bce)i, \\
 (a + bi)((c + di)(e + fi)) &= (a + bi)((ce - df) + (cf + de)i) \\
 &= (a(ce - df) - b(cf + de)) \\
 &\quad + (a(cf + de) + b(ce - df))i \\
 &= (ace - adf - bcf - bde) \\
 &\quad + (acf + ade + bce - bdf)i
 \end{aligned}$$

Per tant $((a + bi)(c + di))(e + fi) = (a + bi)((c + di)(e + fi))$.

Aplicant la definició de producte i suma de nombres complexos, es veu que el producte de complexos és distributiu respecte de la suma.

Observem que si $a, b, c \in \mathbb{R}$ llavors

$$\begin{aligned}
 (a + bi) + (c + 0i) &= (a + c) + bi & \text{i} \\
 (a + bi)(c + 0i) &= (ac) + (bc)i.
 \end{aligned}$$

En particular, per a $b = 0$ obtenim que

$$\begin{aligned}
 (a + 0i) + (c + 0i) &= (a + c) + 0i & \text{i} \\
 (a + 0i)(c + 0i) &= (ac) + 0i,
 \end{aligned}$$

és a dir que els complexos de la forma $a + 0i$ es comporten respecte de la suma i el producte de nombres complexos com els nombres reals a respecte de la suma i el producte de nombres reals. Per això, a partir d'aquí, considerarem el nombre real a i el nombre complex $a + 0i$ com la mateixa cosa. Així $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Observem també que el real 1 és la unitat de l'anell $\mathbb{C}$.

Per veure que $\mathbb{C}$ és un cos només cal veure que tot element diferent de zero té invers. Per això farem servir la conjugació d'un nombre complex i les seves propietats.

El *conjugat* d'un nombre complex $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) és $a - bi$, i es denota per $\bar{z}$.

De fet, conjuguar es pot pensar com una operació “unària” definida sobre $\mathbb{C}$. Conjuguar satisfà les propietats descrites a continuació.

Proposició 3.4.1 *Siguin $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Llavors:*

$$(i) \quad z_1 \bar{z_1} \in \mathbb{R} \text{ i } z_1 \bar{z_1} = 0 \text{ si i només si } z_1 = 0.$$

$$(ii) \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

$$(iii) \overline{\overline{z_1}} = z_1.$$

$$(iv) \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

$$(v) \overline{z_1} = z_1 \text{ si i només si } z_1 \in \mathbb{R}.$$

DEMOSTRACIÓ. Siguin $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tals que $z_1 = a + bi$ i $z_2 = c + di$.

Per veure (i), només cal adonar-se'n de que $z_1 \overline{z_1} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$. A més, com que $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 = 0$ si i només si $a = b = 0$.

Ara veurem (ii). La resta de propietats són clares a partir de la definició de conjugat. Tenim

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= \overline{ac - bd + (ad + bc)i} \\ &= ac - bd - (ad + bc)i \\ &= (a - bi)(c - di) \\ &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

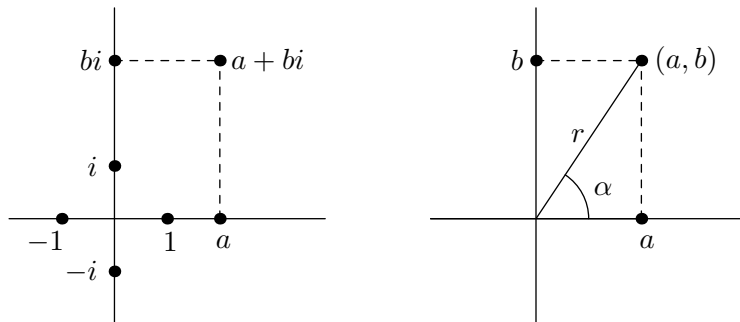
A partir de l'apartat (i) de la Proposició 3.4.1, ja podem definir l'invers d'un nombre complex no nul. Sigui $z = a + bi \neq 0$. Llavors $z\overline{z} = a^2 + b^2 > 0$. Ara tenim

$$z \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2} = (a + bi) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \right) = 1.$$

Per tant ja hem demostrat que $\mathbb{C}$ és un cos.

3.4.1 Interpretació geomètrica dels nombres complexos. Coordenades polars.

Recordem que els nombres reals es poden representar sobre una recta. De fet, hi ha una correspondència bijectiva entre els punts d'una recta i els nombres reals. Com que un nombre complex queda determinat per un parell ordenat de nombres reals, podem representar els nombres complexos sobre el pla $\mathbb{R}^2$:



La suma de dos complexos $a + bi$ i $c + di$ tals que els punts $(0, 0)$, (a, b) i (c, d) del pla no estan alineats es calcula geomètricament com el quart vèrtex del paral·lelogram determinat pels costats $\overline{(0, 0)(a, b)}$ i $\overline{(0, 0)(c, d)}$. Conjuguar un nombre complex $a + bi$ correspon geomètricament a calcular el simètric del punt (a, b) respecte de l'eix OX o eix d'abscises. És una mica més complicat interpretar geomètricament el producte de nombres complexos, per això parlarem de coordenades polars.

Observem que tot punt (a, b) del pla $\mathbb{R}^2$ diferent de $(0, 0)$ queda determinat per la seva distància a $(0, 0)$ i per l'angle que forma el semieix d'abscises positiu amb la semirrecta d'origen $(0, 0)$ que passa per (a, b) . Aquestes dues dades del punt s'anomenen *coordenades polars* del punt.

Així, el punt (a, b) representa el nombre complex $z = a + bi$, la distància d'aquest punt a l'origen $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ es diu *mòdul* del nombre complex $a + bi$ i es denota per $|z|$, i l'angle α que forma el semieix d'abscises positiu amb la semirrecta d'origen $(0, 0)$ que passa per (a, b) es diu *argument* del nombre complex $a + bi$ i el denotarem per $\arg(z)$. Tenim les relacions següents:

$$\begin{aligned}a &= r \cos \alpha \\b &= r \sin \alpha\end{aligned}$$

Així $a + bi = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Aquesta és la representació trigonomètrica de $a + bi$. Una altra forma de representar $a + bi$ és la forma polar: r_α . La part real de $a + bi$ és a i es denota per $\operatorname{Re}(a + bi)$; b és la part imaginària de $a + bi$ i es denota per $\operatorname{Im}(a + bi)$.

La proposició següent explica com varien l'argument i el mòdul de dos nombres complexos en multiplicar-los.

Proposició 3.4.2 *Siguin $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Llavors*

$$(i) \quad |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

$$(ii) \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

DEMOSTRACIÓ. Siguin $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, amb $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $r = |z_1|$, $s = |z_2|$, $\alpha = \arg(z_1)$ i $\beta = \arg(z_2)$. Llavors:

$$\begin{aligned}|z_1 z_2| &= |ac - bd + (ad + bc)i| \\&= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\&= \sqrt{a^2 c^2 - 2acbd + b^2 d^2 + a^2 d^2 + 2adbc + b^2 c^2} \\&= \sqrt{a^2 c^2 + b^2 d^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2} \\&= \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} \\&= |z_1| \cdot |z_2|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r(\cos \alpha + i \sin \alpha) s(\cos \beta + i \sin \beta) \\
&= rs(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta)) \\
&= rs(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))
\end{aligned}$$

Per tant $\arg(z_1 z_2) = \alpha + \beta = \arg(z_1) + \arg(z_2)$. ■

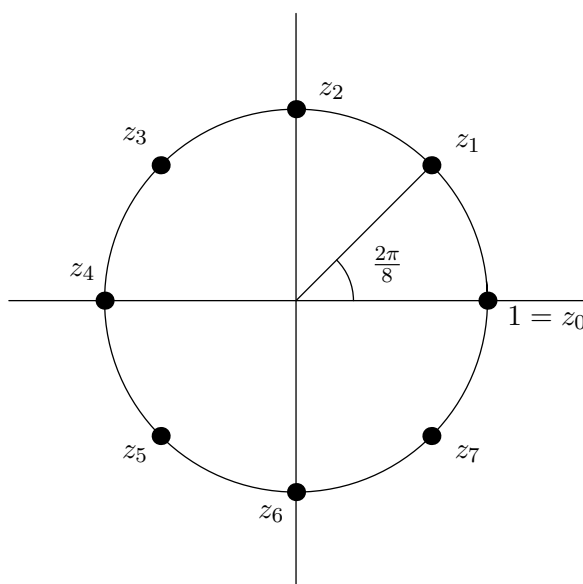
Veiem doncs a partir de la Proposició 3.4.2, que el mòdul del producte de dos nombres complexos és el producte de mòduls i l'argument del producte de dos nombres complexos és la suma d'arguments.

3.4.2 Aplicacions i exemples

La Proposició 3.4.2 ens permet calcular les arrels complexes del polinomi $x^n - 1$. Sigui $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^n = 1$. Llavors $1 = |z^n| = |z|^n$ i

$$\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) = \arg(1) = 2\pi k \quad \text{amb } k \in \mathbb{Z}.$$

Això implica que $|z| = 1$ i que $\alpha = \arg(z) = \frac{2\pi k}{n}$, on $k \in \mathbb{Z}$. D'aquests arguments els únics que són diferents són els donats pels valors de $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Tenim doncs n arrels diferents, $z_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$, per a $k = 0, 1, \dots, n-1$.



Arrels de $x^8 - 1$.

Seguint el mateix procediment podem calcular fàcilment les arrels n -simes d'un nombre complex no nul z . El mòdul d'una arrel n -sima de z és $\sqrt[n]{|z|}$ i el seu argument és un real $\alpha \in [0, 2\pi)$ tal que $n\alpha$ és l'argument de z . Com que si a un argument li sumem un múltiple enter de 2π , l'argument no varia, tenim que hi ha exactament n arrels n -simes de z :

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\beta + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\beta + 2\pi k}{n} \right)$$

per a $k = 0, 1, \dots, n-1$, on $\beta \in [0, 2\pi)$ és l'argument de z .

Exemple 3.4.3 Busquem les arrels a $\mathbb{C}$ del polinomi $x^4 + 1$. Per això hem de determinar quins $z \in \mathbb{C}$ satisfan que $z^4 = -1$. Com que -1 és un complex de mòdul 1 i argument π llavors, per la Proposició 3.4.2, z té també mòdul 1 i, a més, $4 \cdot \arg(z) = \pi + 2\pi k$ per $k = 0, 1, 2, 3$. Així obtenim les arrels

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_2 &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_3 &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_4 &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi 3}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi 3}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \diamond \end{aligned}$$

La interpretació geomètrica de $\mathbb{C}$ com el pla $\mathbb{R}^2$ també permet entendre més bé el grup de rotacions del pla $SO_2(\mathbb{R})$ que vam definir a l'exemple 2.1.2.

Com que $\mathbb{C}$ és un cos, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ és un grup amb el producte; per tant, sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tenim també una estructura de grup. Siguin w_1 i w_2 dos nombres complexos de mòdul 1 llavors, per la Proposició 3.4.2, $w_1 w_2$ també té mòdul 1. A més, si w és un complex de mòdul 1, la Proposició 3.4.2 implica que w^{-1} també ho és. Per la Proposició 2.1.1, podem concloure que el conjunt dels nombres complexos de mòdul 1 és un grup amb el producte. És a dir, la circumferència de radi 1 i centre l'origen,

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\},$$

té estructura de grup.

Sigui w un nombre complex de mòdul 1 i argument α . Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} f_\alpha: \quad \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto zw \end{aligned}$$

Per la Proposició 3.4.2, $|zw| = |z|$ i $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) = \arg(z) + \alpha$. Per tant f_α , pensada com una aplicació de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, és exactament la rotació de centre l'origen i angle α . Com a punt de $\mathbb{R}^2$, $w = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, i si $z = (a, b)$ llavors

$$f_\alpha(a, b) = (a \cos \alpha - b \sin \alpha, a \sin \alpha + b \cos \alpha).$$

Així hem donat una fórmula per descriure les rotacions. Veiem també que temin una aplicació

$$\begin{aligned}\varphi: S^1 &\rightarrow SO_2(\mathbb{R}) \\ w = \cos \alpha + i \sin \alpha &\mapsto f_\alpha.\end{aligned}$$

No costa gaire veure que φ és un isomorfisme de grups.

Exemple 3.4.4 Descrivim la rotació de centre l'origen i angle $\frac{\pi}{6}$. Sabem que $f_{\frac{\pi}{6}}$ correspon a multiplicar pel nombre complex $w = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$. Per tant

$$f_{\frac{\pi}{6}}(a, b) = \left(a \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{b}{2}, \frac{a}{2} + b \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Com que φ és un morfisme de grups l'aplicació inversa de $f_{\frac{\pi}{6}}$ correspon a multiplicar per $w^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$. Llavors

$$f_{\frac{\pi}{6}}^{-1}(a, b) = f_{-\frac{\pi}{6}}(a, b) = \left(a \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{b}{2}, -\frac{a}{2} + b \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad \diamond$$

3.5 Exercicis

Exercici 1 *Proveu que són anells:*

(a) $R \times S$, on R i S són anells i les operacions es defineixen component a component.

(b) $R = \{(a, b, -b, a) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ amb les operacions suma i producte definides per

$$(a, b, -b, a) + (c, d, -d, c) = (a + c, b + d, -b - d, a + c),$$

$$(a, b, -b, a) \cdot (c, d, -d, c) = (ac - bd, ad + bc, -ad - bc, ac - bd).$$

(c) $\mathbb{Z}$ amb la suma $\oplus$ i la multiplicació $\otimes$ definides per

$$a \oplus b = a + b + 1, \quad a \otimes b = ab + a + b.$$

Exercici 2 *Determineu $x, y \in \mathbb{R}$ sabent que es compleix:*

$$\begin{pmatrix} 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & x & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 11 & y & 8 \end{pmatrix},$$

a $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$.

Exercici 3 Considerem les matrius sobre $\mathbb{R}$ següents:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 7 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -7 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculeu $AB + C$, ABC , $BA - AB$, $A^2 - BC$ i CBA .

Exercici 4 Donada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, trobeu dues matrius quadrades no nul·les B i C tals que $AB = 0 = CA$.

Exercici 5 Siguin $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Són certes les igualtats següents?

(a) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

(b) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

(c) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Exercici 6 Amb la suma i producte de nombres reals, quins dels conjunts següents són dominis d'integritat? I cossos?

$$\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Exercici 7 Donat el conjunt $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ amb les operacions

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

i

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

proveu que

(a) $\mathbb{Z}[i]$ és un domini d'integritat.

(b) Un element de $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ és invertible si i només si $a^2 + b^2 = 1$.

(c) Els únics elements invertibles de $\mathbb{Z}[i]$ són $\pm 1, \pm i$.

Exercici 8 Expresseu els nombres complexos següents en la forma $x + iy$, amb x i y reals: $(-1 + 3i)^{-1}$, $(1 + i)(2 - i)$, $(i + 1)(i - 2)(i + 3)$, $(1 + i)^4$, $\sqrt[3]{-1 - 2i}$ i $\sqrt{2 + i\sqrt{2}}$.

Exercici 9 Expresseu en forma polar els nombres complexos següents: $1 + i\sqrt{2}$, $\frac{1}{2+i}$, $\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}$, $\sqrt[6]{1 - i\sqrt{3}}$, $i + \frac{1}{i}$ i $(1 + i)^n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Exercici 10 Donat un nombre complex $z = a + bi$, si denotem per r el seu mòdul i per α el seu argument, és clar que $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Això també ho escriurem com $z = re^{i\alpha}$.

(a) Proveu que $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\alpha}$.

(b) Calculeu $e^{k\pi i}$ per $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Calculeu $\sqrt[n]{1}$ i $\sqrt[n]{i}$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$.

Exercici 11 Demostreu que si r és una arrel cúbica qualsevol de $a \in \mathbb{C}$, llavors les arrels cúbiques de a són $r, \omega r, \omega^2 r$, on $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ i ω^2 són les arrels cúbiques imaginàries de 1.

Exercici 12 Escriviu una equació de segon grau amb coeficients a $\mathbb{R}$ que tingui per solució:

(a) $z = \sqrt{3 - \sqrt{3}} + i\sqrt{3 + \sqrt{3}}$,

(b) $z = \frac{1-2i}{1+i}$.

Exercici 13 Representeu gràficament les solucions de l'equació $z^n = -1$ per a $n = 2, 3, 4$ i 5 .

Exercici 14 Descriu geomètricament les aplicacions $f_1(z) = \bar{z}$, $f_2(z) = zi$, $f_3(z) = az$, amb $a \in \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{C}$.

Exercici 15 Descriu geomètricament els punts de $\mathbb{C}$ tals que $z\bar{z} = 1$.

Exercici 16 Siguin $z, w \in \mathbb{C}$ diferents. Demostreu que

$$\left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right| = 1,$$

si $|z| = 1$ o $|w| = 1$.

Exercici 17 Calculeu $\sin(n\alpha)$ i $\cos(n\alpha)$, per a $n \in \mathbb{Z}$, en termes de $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

Exercici 18 Si $w = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$, calculeu

$$\sum_{j=0}^{n-1} w^{rj} \quad i \quad \sum_{j=0}^{n-1} (-w^r)^j,$$

per a cada enter r .

Capítol 4

L'anell de polinomis sobre un cos K

En aquest capítol, estudiem les propietats dels anells de polinomis sobre un cos. En tot el capítol, K és un cos.

4.1 La funció grau

El grau de polinomis sobre un cos satisfà les propietats següents.

Proposició 4.1.1 *Siguin $a(x), b(x) \in K[x]$. Llavors*

$$(i) \quad \text{gr}(a(x) + b(x)) \leq \max\{\text{gr}(a(x)), \text{gr}(b(x))\}.$$

$$(ii) \quad \text{gr}(a(x)b(x)) = \text{gr}(a(x)) + \text{gr}(b(x)).$$

DEMOSTRACIÓ. Com que hem definit el grau del polinomi 0 com $-\infty$, és fàcil comprovar que si $a(x)$ o $b(x)$ són 0 llavors es compleix el resultat. Suposem doncs que els dos polinomis són diferents de 0. Sigui $n = \text{gr}(a(x))$ i $m = \text{gr}(b(x))$. Llavors $a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ i $b(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$, on $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m \in K$ i $a_n \neq 0, b_m \neq 0$. Llavors, per la definició de la suma de polinomis, $\text{gr}(a(x) + b(x)) \leq \max\{\text{gr}(a(x)), \text{gr}(b(x))\}$. En el cas del producte tenim que

$$a(x)b(x) = (\text{ termes de grau menor que } n + m) + a_nb_mx^{n+m}.$$

Per la Proposició 3.3.2, un cos no té divisors de zero, i així tenim que $a_nb_m \neq 0$. Per tant $\text{gr}(a(x)b(x)) = n + m$. ■

Observem que $\text{gr}(a(x) + b(x))$ pot ser estrictament més petit que els graus dels polinomis $a(x)$ i $b(x)$. Per exemple, si $K = \mathbb{C}$ i $a(x) = x + i$ i $b(x) = -x + i$ llavors $a(x) + b(x) = 2i$, que és un polinomi de grau zero.

Corol·lari 4.1.2 *L'anell $K[x]$ és un domini d'integritat. A més, els elements invertibles de $K[x]$ són els polinomis de grau 0, és a dir, els elements de K diferents de 0.*

DEMOSTRACIÓ. Siguin $a(x), b(x) \in K[x] \setminus \{0\}$. Per la proposició anterior

$$\text{gr}(a(x)b(x)) = \text{gr}(a(x)) + \text{gr}(b(x)) \neq -\infty.$$

Per tant $a(x)b(x) \neq 0$.

Suposem ara que $a(x)b(x) = 1$. Llavors

$$0 = \text{gr}(1) = \text{gr}(a(x)b(x)) = \text{gr}(a(x)) + \text{gr}(b(x)).$$

Per tant $\text{gr}(a(x)) = \text{gr}(b(x)) = 0$. ■

4.2 La divisió a $K[x]$

Teorema 4.2.1 (Teorema de la divisió entera) *Siguin $a(x), b(x) \in K[x]$, amb $b(x) \neq 0$. Llavors existeixen dos únics polinomis $q(x), r(x) \in K[x]$ tals que*

$$a(x) = q(x)b(x) + r(x)$$

i $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(b(x))$. Els polinomis $q(x)$ i $r(x)$ es diuen respectivament quocient i resta de la divisió entera de $a(x)$ per $b(x)$.

DEMOSTRACIÓ. Siguin $n = \text{gr}(a(x))$ i $m = \text{gr}(b(x))$. Demostrarem que existeixen $q(x)$ i $r(x)$ per inducció sobre n .

Si $n < m$ llavors

$$a(x) = 0 \cdot b(x) + a(x).$$

Per tant, en aquest cas, $q(x) = 0$ i $r(x) = a(x)$.

Suposem que $n \geq m$. Siguin a_n i b_m els coeficients dominants de $a(x)$ i $b(x)$ respectivament. Sigui $c(x) = a(x) - b_m^{-1}a_nx^{n-m}b(x)$. Llavors $\text{gr}(c(x)) < n$. Per inducció existeixen $q_1(x), r_1(x) \in K[x]$ tals que

$$c(x) = q_1(x)b(x) + r_1(x)$$

i $\text{gr}(r_1(x)) < \text{gr}(b(x))$. Ara tenim:

$$a(x) = (b_m^{-1}a_nx^{n-m} + q_1(x))b(x) + r_1(x).$$

Així, en aquest cas, $q(x) = b_m^{-1}a_nx^{n-m} + q_1(x)$ i $r(x) = r_1(x)$.

Demostrem ara que $q(x)$ i $r(x)$ són únics. Siguin $p(x), s(x) \in K[x]$ tals que $a(x) = p(x)b(x) + s(x)$ i $\text{gr}(s(x)) < m$. Per tant

$$(q(x) - p(x))b(x) = s(x) - r(x).$$

Calculant graus, obtenim:

$$\text{gr}(q(x) - p(x)) + \text{gr}(b(x)) = \text{gr}(s(x) - r(x)) < \text{gr}(b(x)).$$

I això només pot passar si $\text{gr}(q(x) - p(x)) = -\infty$. Per tant $q(x) = p(x)$, i llavors $r(x) = s(x)$. ■

Recordem que per als nombres enters també tenim la divisió entera, i aquesta es pot fer servir per estudiar la divisibilitat de nombres enters. Ara estudiarem la divisibilitat a $K[x]$.

Siguin $a(x), b(x) \in K[x]$. Es diu que $a(x)$ és múltiple de $b(x)$ o que $b(x)$ és divisor de $a(x)$ si existeix $c(x) \in K[x]$ tal que $a(x) = b(x)c(x)$.

Sigui $a(x) \in K[x]$. Observem que qualsevol element de $K \setminus \{0\}$ divideix $a(x)$ i que 0 és múltiple de tot polinomi. Per les propietats del grau, si $b(x)$ és un divisor d'un polinomi no nul $a(x)$ llavors $\text{gr}(b(x)) \leq \text{gr}(a(x))$. Per tant, si $a(x) \neq 0$, llavors el conjunt de divisors de $a(x)$ té elements de grau màxim, aquests són tots els polinomis de la forma $\lambda a(x)$ on $\lambda \in K \setminus \{0\}$.

Siguin $a(x), b(x) \in K[x]$. Suposem que o bé $a(x)$ o bé $b(x)$ és diferent de zero. Es diu que $d(x)$ és un màxim comú divisor de $a(x)$ i $b(x)$ si $d(x)$ és un divisor de $a(x)$ i de $b(x)$ de grau màxim.

Si $a(x)$ i $b(x)$ són diferents de zero, es diu que $m(x)$ és un mínim comú múltiple de $a(x)$ i $b(x)$ si $m(x)$ és un múltiple no nul de $a(x)$ i de $b(x)$ de grau mínim.

Observació 4.2.2 És molt fàcil calcular els màxims comuns divisors del polinomi zero i un polinomi no nul $a(x)$. Com que el conjunt de divisors de 0 és tot $K[x]$, el conjunt de divisors comuns de 0 i $a(x)$ és el conjunt de divisors de $a(x)$. Entre aquests, els de grau màxim són els de la forma $\lambda a(x)$, on $\lambda \in K \setminus \{0\}$. ◇

El lema següent ens donarà un algorisme per calcular un màxim comú divisor de dos polinomis qualssevol.

Lema 4.2.3 *Suposem que a $K[x]$ tenim una identitat de la forma*

$$a(x) = b(x)q(x) + r(x). \tag{4.1}$$

Llavors el conjunt de divisors comuns de $a(x)$ i $b(x)$ és el mateix que el conjunt de divisors comuns de $b(x)$ i $r(x)$.

DEMOSTRACIÓ. Sigui $p(x)$ un divisor de $a(x)$ i $b(x)$. Llavors $a(x) = p(x)a_1(x)$ i $b(x) = p(x)b_1(x)$; substituint a l'equació (4.1), obtenim

$$p(x)a_1(x) = p(x)b_1(x)q(x) + r(x).$$

Per tant $r(x) = p(x)(a_1(x) - b_1(x)q(x))$ és múltiple de $p(x)$.

Per veure que un divisor de $b(x)$ i $r(x)$ també ho és de $a(x)$, fem un raonament anàleg a l'anterior. ■

Aquest lema, combinat amb la divisió entera, dóna un mètode per calcular el màxim comú divisor de dos polinomis que es diu *Algorithme d'Euclides* o *Algorithme de les divisions successives*. Siguin $a(x)$ i $b(x)$ elements de $K[x]$ tals que $b(x) \neq 0$. Fet la divisió entera de $a(x)$ entre $b(x)$, obtenim polinomis $q_1(x)$ i $r_1(x)$ tals que

$$a(x) = b(x)q_1(x) + r_1(x) \quad \text{i} \quad \text{gr}(r_1(x)) < \text{gr}(b(x)).$$

Pel Lema 4.2.3, els divisors comuns de $a(x)$ i $b(x)$ són els mateixos que els divisors comuns de $b(x)$ i $r_1(x)$. Si $r_1(x) = 0$ llavors, per l'observació 4.2.2, els divisors comuns de $a(x)$ i $b(x)$ són exactament els divisors de $b(x)$, i en aquest cas, $b(x)$ és un màxim comú divisor de $a(x)$ i $b(x)$. Si $r_1(x) \neq 0$, llavors fem la divisió entera de $b(x)$ entre $r_1(x)$, i obtenim la igualtat

$$b(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x), \quad \text{amb} \quad \text{gr}(r_2(x)) < \text{gr}(r_1(x)).$$

Altra vegada pel Lema 4.2.3, els divisors comuns de $a(x)$ i $b(x)$ són els mateixos que els divisors comuns de $r_1(x)$ i $r_2(x)$. Si $r_2(x) = 0$ llavors, per l'observació 4.2.2, els divisors comuns de $a(x)$ i $b(x)$ són exactament els divisors de $r_1(x)$, i en aquest cas, $r_1(x)$ és un màxim comú divisor de $a(x)$ i $b(x)$. Si $r_2(x) \neq 0$, llavors fem la divisió entera de $r_1(x)$ entre $r_2(x)$, i obtenim

$$r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x), \quad \text{amb} \quad \text{gr}(r_3(x)) < \text{gr}(r_2(x)).$$

Ara podem tornar a repetir el raonament anterior una altra vegada.

D'aquesta manera, mentre la resta no es fa zero, anem trobant igualtats

$$r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x)q_n(x) + r_n(x),$$

i la relació entre els graus de les restes és

$$\text{gr}(b(x)) > \text{gr}(r_1(x)) > \text{gr}(r_2(x)) > \text{gr}(r_3(x)) > \cdots > \text{gr}(r_n(x)) \geq 0.$$

Com que el grau d'un polinomi no nul és un element de $\mathbb{N}$, aquesta successió de graus, com a molt, pot tenir tants termes com $\text{gr}(b(x)) + 1$. Això vol dir que, en un

nombre finit de passos, trobem una resta $r_n(x) = 0$. Per tant, els divisors comuns de $a(x)$ i $b(x)$ són els mateixos que els divisors de $r_{n-1}(x)$, i llavors $r_{n-1}(x)$ és un màxim comú divisor de $a(x)$ i $b(x)$.

Hem demostrat doncs el resultat següent.

Teorema 4.2.4 *Siguin $a(x)$ i $b(x)$ elements de $K[x]$, amb $b(x) \neq 0$. Llavors existeix $d(x) \in K[x]$ tal que el conjunt de divisors comuns de $a(x)$ i $b(x)$ coincideix amb el conjunt de divisors de $d(x)$. En particular, $d(x)$ és un màxim comú divisor de $a(x)$ i $b(x)$. ■*

Corol·lari 4.2.5 *Siguin $a(x)$ i $b(x)$ elements de $K[x]$, amb $b(x) \neq 0$, i sigui $d(x)$ un màxim comú divisor de $a(x)$ i $b(x)$.*

- (i) *Els divisors comuns de $a(x)$ i $b(x)$ són exactament els divisors de $d(x)$.*
- (ii) *Si $d_1(x)$ és un altre màxim comú divisor de $a(x)$ i $b(x)$, llavors existeix $\lambda \in K \setminus \{0\}$ tal que $d_1(x) = \lambda d(x)$.*

DEMOSTRACIÓ. Pel Teorema 4.2.4 sabem que existeix un màxim comú divisor $c(x)$ tal que els divisors comuns de $a(x)$ i $b(x)$ són els divisors de $c(x)$. Com que $d(x)$ és un màxim comú divisor de $a(x)$ i $b(x)$, llavors $d(x)$ també és un divisor de grau màxim de $c(x)$. Això implica que $d(x) = \lambda c(x)$ per a $\lambda \in K \setminus \{0\}$. A partir d'aquest fet és fàcil demostrar (i) i (ii). ■

Exemple 4.2.6 *Siguin $a(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$ i $b(x) = x^4 - x^3 - x + 1$ polinomis sobre $\mathbb{R}$. Calculem el seu màxim comú divisor aplicant l'algorisme d'Euclides:*

$$\begin{array}{rrrrr} x^4 & +2x^3 & -4x^2 & -5x & -6 & |x^4 - x^3 - x + 1 \\ & 3x^3 & -4x^2 & -4x & -7 & 1 \end{array}$$

Per tant,

$$a(x) = b(x) + 3x^3 - 4x^2 - 4x - 7$$

i així obtenim que els divisors comuns de $a(x)$ i $b(x)$ són els mateixos que els divisors comuns de $b(x)$ i $3x^3 - 4x^2 - 4x - 7$.

$$\begin{array}{rrrrr} x^4 & -x^3 & & -x & +1 & |3x^3 - 4x^2 - 4x - 7 \\ & \frac{1}{3}x^3 & +\frac{4}{3}x^2 & +\frac{4}{3}x & +1 & \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} \\ & & \frac{16}{9}x^2 & +\frac{16}{9}x & +\frac{16}{9} & \end{array}$$

Com que la resta d'aquesta divisió no és zero, tornem a dividir una altra vegada,

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 & -4x^2 & -4x & -7 & \left| \frac{16}{9}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{16}{9} \right. \\ & -7x^2 & -7x & -7 & \frac{27}{16}x - \frac{63}{16} \\ & & & 0 & \end{array}$$

Per tant els divisors comuns de $a(x)$ i $b(x)$ són els divisors del polinomi $\frac{16}{9}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{16}{9}$ que és un màxim comú divisor dels dos polinomis donats. Observem que, multiplicant per $\frac{9}{16}$, obtenim $x^2 + x + 1$ que és un altre màxim comú divisor dels mateixos polinomis. $\diamond$

Observació 4.2.7 L'algorisme d'Euclides no solament permet calcular el màxim comú divisor $d(x)$ de dos polinomis $a(x)$ i $b(x)$ sinó que també permet calcular polinomis $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ tals que

$$a(x)\alpha(x) + b(x)\beta(x) = d(x).$$

Ara explicarem com es fa això. En el primer pas de l'algorisme d'euclides obtenim

$$a(x) = b(x)q_1(x) + r_1(x).$$

Si posem $\alpha_1(x) = 1$ i $\beta_1(x) = -q_1(x)$, obtenim que

$$a(x)\alpha_1(x) + b(x)\beta_1(x) = r_1(x). \quad (4.2)$$

Si $r_1(x)$ és el màxim comú divisor, ja hem acabat, i prenem $\alpha(x) = \alpha_1(x)$ i $\beta(x) = \beta_1(x)$. Si no, en el segon pas de l'algorisme obtenim

$$b(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x).$$

Per (4.2), tenim que

$$b(x) = [a(x)\alpha_1(x) + b(x)\beta_1(x)]q_2(x) + r_2(x),$$

i si posem $\alpha_2(x) = -\alpha_1(x)q_2(x)$ i $\beta_2(x) = 1 - \beta_1(x)q_2(x)$, obtenim que

$$a(x)\alpha_2(x) + b(x)\beta_2(x) = r_2(x). \quad (4.3)$$

Si $r_2(x)$ és el màxim comú divisor, ja hem acabat, i prenem $\alpha(x) = \alpha_2(x)$ i $\beta(x) = \beta_2(x)$. Si no, amb l'algorisme d'Euclides obtenim

$$r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x).$$

Fent servir (4.2) i (4.3), tenim que

$$a(x)\alpha_1(x) + b(x)\beta_1(x) = [a(x)\alpha_2(x) + b(x)\beta_2(x)]q_3(x) + r_3(x),$$

i per tant, si posem $\alpha_3(x) = \alpha_1(x) - \alpha_2(x)q_3(x)$ i $\beta_3(x) = \beta_1(x) - \beta_2(x)q_3(x)$, obtenim

$$a(x)\alpha_3(x) + b(x)\beta_3(x) = r_3(x). \quad (4.4)$$

Si $r_3(x)$ és el màxim comú divisor, ja hem acabat, i prenem $\alpha(x) = \alpha_3(x)$ i $\beta(x) = \beta_3(x)$. Si no, continuem el procés. Com que sabem que en un nombre finit de passos s'acaba, acabem obtenint els polinomis $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ que volíem. $\diamond$

Exemple 4.2.8 Fem aquest procés per a l'exemple 4.2.6. Siguin $a(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$ i $b(x) = x^4 - x^3 - x + 1$. En fer els càlculs del màxim comú divisor hem obtingut les igualtats:

$$a(x) = b(x) + 3x^3 - 4x^2 - 4x - 7 \quad (4.5)$$

$$b(x) = (3x^3 - 4x^2 - 4x - 7) \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9} \right) + \frac{16}{9}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{16}{9}. \quad (4.6)$$

Per (4.5), tenim que

$$a(x) + b(x)(-1) = 3x^3 - 4x^2 - 4x - 7. \quad (4.7)$$

Per (4.6),

$$b(x) - (3x^3 - 4x^2 - 4x - 7) \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9} \right) = \frac{16}{9}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{16}{9}.$$

Per (4.7),

$$b(x) - (a(x) + b(x)(-1)) \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9} \right) = \frac{16}{9}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{16}{9}.$$

Llavors

$$a(x) \left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{9} \right) + b(x) \left(\frac{1}{3}x + \frac{10}{9} \right) = \frac{16}{9}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{16}{9}. \quad \diamond$$

Ara veurem que és fàcil calcular un mínim comú múltiple a partir d'un màxim comú divisor. Però abans veiem que si hem calculat un mínim comú múltiple, aleshores ja sabem calcular tots els mínims comuns múltiples.

Lema 4.2.9 *Siguin $a(x), b(x) \in K[x]$ dos polinomis no nuls i sigui $m(x)$ un mínim comú múltiple de $a(x)$ i $b(x)$. Llavors tot múltiple comú de $a(x)$ i $b(x)$ és múltiple de $m(x)$. En particular, si $m_1(x)$ és un altre mínim comú múltiple, llavors existeix $\lambda \in K \setminus \{0\}$ tal que $m_1(x) = \lambda m(x)$.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $c(x)$ un múltiple comú de $a(x)$ i $b(x)$. Fent la divisió entera de $c(x)$ entre $m(x)$, obtenim una igualtat

$$c(x) = q(x)m(x) + r(x) \quad \text{gr}(r(x)) < \text{gr}(m(x)).$$

Com que $c(x)$ i $m(x)$ són divisibles per $a(x)$ i $b(x)$, pel Lema 4.2.3, tenim que $r(x)$ també és múltiple comú de $a(x)$ i $b(x)$. Com que $m(x)$ és un múltiple comú no nul de grau mínim, $r(x) = 0$. Per tant $c(x) = q(x)m(x)$ és un múltiple de $m(x)$ tal com volíem veure.

Ara, si $m_1(x)$ és un altre mínim comú múltiple, llavors $\text{gr}(m_1(x)) = \text{gr}(m(x))$, i també $m_1(x) = m(x)q_1(x)$, per a cert polinomi $q_1(x) \in K[x]$. Les dues coses només poden ser certes a la vegada si $q_1(x)$ és una constant no nul·la. ■

Si $d(x)$ és un màxim comú divisor de $a(x)$ i $b(x)$, llavors existeixen polinomis $a_1(x)$ i $b_1(x)$ tals que

$$a(x) = d(x)a_1(x) \quad \text{i} \quad b(x) = d(x)b_1(x).$$

Per tant

$$\frac{a(x)b(x)}{d(x)} = a(x)b_1(x) = b(x)a_1(x),$$

és un múltiple comú de $a(x)$ i $b(x)$. Ara demostrarem que és un mínim comú múltiple.

Proposició 4.2.10 *Siguin $a(x), b(x) \in K[x]$ dos polinomis no nuls i sigui $d(x)$ un màxim comú divisor. Llavors $m(x) = \frac{a(x)b(x)}{d(x)}$ és un mínim comú múltiple de $a(x)$ i $b(x)$.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $m_1(x)$ un mínim comú múltiple de $a(x)$ i de $b(x)$ llavors, pel Lema 4.2.9, tant $a(x)b(x)$ com $m(x)$ són múltiples de $m_1(x)$. Per tant, $d_1(x) = \frac{a(x)b(x)}{m_1(x)}$ i $\frac{m(x)}{m_1(x)}$ són elements de $K[x]$. Així, $d_1(x) = d(x)\frac{m(x)}{m_1(x)}$ és múltiple de $d(x)$. També existeixen $f(x), g(x) \in K[x]$ tals que $m_1(x) = a(x)f(x) = b(x)g(x)$. Aleshores

$$d_1(x)g(x) = \frac{a(x)b(x)}{m_1(x)}g(x) = a(x)$$

i

$$d_1(x)f(x) = \frac{a(x)b(x)}{m_1(x)}f(x) = b(x),$$

és a dir, $d_1(x)$ és divisor comú de $a(x)$ i $b(x)$. Com que $d(x)$ és un màxim comú divisor, $\text{gr}(d(x)) = \text{gr}(d_1(x))$ i, com a conseqüència, $\text{gr}(m(x)) = \text{gr}(m_1(x))$. Per tant $m(x)$ també és un mínim comú múltiple de $a(x)$ i $b(x)$. ■

Exemple 4.2.11 Siguin $a(x)$ i $b(x)$ els polinomis de l'exemple 4.2.6. Calculem un mínim comú múltiple.

Dividim $a(x)$ per $x^2 + x + 1$, que és un màxim comú divisor de $a(x)$ i $b(x)$:

$$\begin{array}{r} x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 \\ x^3 - 5x^2 - 5x - 6 \\ - 6x^2 - 6x - 6 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{x^2 + x + 1} \\ x^2 + x - 6 \end{array}$$

Multiplicant $b(x)$ pel quocient d'aquesta divisió, obtenim $(x^4 - x^3 - x + 1)(x^2 + x - 6) = x^6 - 7x^4 + 5x^3 + 7x - 6$, que és un mínim comú múltiple dels polinomis $a(x)$ i $b(x)$. $\diamond$

Es diu que un polinomi no nul és *mònic* si el coeficient dominant és 1.

Observació 4.2.12 Sigui $a(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \in K[x]$ tal que $a_n \neq 0$. Llavors el polinomi $a_n^{-1}a(x)$ és un polinomi mònic. És a dir, donat un polinomi no nul $a(x)$, sempre existeix $\lambda \in K$ tal que $\lambda a(x)$ és un polinomi mònic. Observem que aquest polinomi mònic està unívocament determinat pel polinomi $a(x)$.

Per exemple, si prenem el polinomi $a(x) = (1+i)x^2 + ix + 2 \in \mathbb{C}[x]$, llavors $(1+i)^{-1}a(x)$ és un polinomi mònic. Com que $(1+i)^{-1} = \frac{1}{2}(1-i)$, obtenim que

$$(1+i)^{-1}a(x) = x^2 + \frac{1}{2}(1+i)x + 1 - i. \quad \diamond$$

Hem vist que si $d(x)$ i $m(x)$ són, respectivament, un màxim comú divisor i un mínim comú múltiple de dos polinomis no nuls $a(x)$ i $b(x)$ sobre K , llavors tots els màxims comuns divisors i tots els mínims comuns múltiples són exactament els polinomis de la forma $\lambda d(x)$ i $\lambda m(x)$, respectivament, on $\lambda \in K \setminus \{0\}$.

Així, donats dos polinomis $a(x), b(x) \in K[x] \setminus \{0\}$, existeix un únic polinomi mònic que és màxim comú divisor de $a(x)$ i $b(x)$, i el denotarem per $\text{m.c.d.}(a(x), b(x))$. També existeix un únic polinomi mònic que és mínim comú múltiple de $a(x)$ i $b(x)$, i el denotarem per $\text{m.c.m.}(a(x), b(x))$.

4.3 Polinomis irreductibles.

Els nombres primers són una peça bàsica en l'estudi de la divisibilitat dels nombres enters. Anem ara a introduir un concepte similar per als polinomis.

Un polinomi $p(x) \in K[x]$ es diu que és *irreductible* si $\text{gr}(p(x)) > 0$ i els únics divisors de $p(x)$ són λ i $\lambda p(x)$, amb $\lambda \in K \setminus \{0\}$. En aquest cas, també es diu que $p(x)$ és irreductible sobre K .

Observació 4.3.1 Observem que si $p(x) \in K[x]$ és un polinomi irreductible llavors també ho és $\lambda p(x)$, per a tot $\lambda \in K \setminus \{0\}$. $\diamond$

Una altra manera de descriure els polinomis irreductibles és la següent.

Lema 4.3.2 *Un polinomi $p(x) \in K[x]$ de grau positiu és irreductible si i només si $p(x)$ no descompon com a producte des dos polinomis de grau menor.* ■

Tot polinomi de grau 1 és irreductible. Però determinar com són els polinomis irreductibles de $K[x]$ és un problema molt difícil. Nosaltres donarem la solució a aquest problema en el cas que K sigui $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Però abans veiem uns resultats que expliquen la importància dels polinomis irreductibles.

Lema 4.3.3 (a) *Siguin $a(x)$, $b(x)$ i $c(x)$ elements no nuls de $K[x]$. Si $a(x)$ divideix $b(x)c(x)$ i $\text{m.c.d.}(a(x), b(x)) = 1$, llavors $a(x)$ divideix $c(x)$.*

(b) *Siguin $p(x)$ i $q_1(x), \dots, q_m(x)$ polinomis irreductibles mòncics. Si $p(x)$ divideix $q_1(x) \cdot \dots \cdot q_m(x)$, llavors existeix $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $p(x) = q_i(x)$.*

DEMOSTRACIÓ. Per l'observació 4.2.7, existeixen polinomis $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ de $K[x]$ tals que $a(x)\alpha(x) + b(x)\beta(x) = 1$. Multiplicant aquesta igualtat per $c(x)$, obtenim

$$a(x)c(x)\alpha(x) + b(x)c(x)\beta(x) = c(x). \quad (4.8)$$

Com que, per hipòtesi, $b(x)c(x)$ és múltiple de $a(x)$, la igualtat (4.8) implica que $c(x)$ és múltiple de $a(x)$.

Per demostrar l'apartat (b), farem servir (a) i el fet de que si $p(x)$ i $q(x)$ són dos polinomis irreductibles mòncics, llavors $p(x)$ divideix a $q(x)$ si i només si $p(x) = q(x)$. Demostrem (b) per inducció sobre m . Si $m = 1$, no hi ha res a dir. Suposem que l'enunciat és cert per a $m - 1$, i demostrem-ho per a m . Suposem que $p(x)$ divideix $q_1(x) \cdot \dots \cdot q_m(x)$. Si $p(x) = q_m(x)$ ja hem acabat; si no, per l'apartat (a), $p(x)$ divideix $q_1(x) \cdot \dots \cdot q_{m-1}(x)$, i per hipòtesi d'inducció, existeix $i \in \{1, \dots, m - 1\}$ tal que $p(x) = q_i(x)$. ■

Teorema 4.3.4 (Teorema de factorització única) *Tot polinomi de grau positiu sobre K és producte de polinomis irreductibles. A més, si*

$$p_1(x) \cdot \dots \cdot p_n(x) = q_1(x) \cdot \dots \cdot q_m(x)$$

i $p_1(x), \dots, p_n(x), q_1(x), \dots, q_m(x) \in K[x]$ són polinomis irreductibles mòncics, llavors $n = m$ i els polinomis $p_1(x), \dots, p_n(x)$ són els mateixos que $q_1(x), \dots, q_n(x)$ tret de l'ordre.

DEMOSTRACIÓ. Demostrarem la primera part del teorema per reducció a l'absurd. Suposem que hi ha polinomis de grau positiu sobre K que no són producte de polinomis irreductibles. Sigui $a(x) \in K[x]$ un d'aquests amb grau mínim. En particular, $a(x)$ no és irreductible. Per tant existeixen $b(x), c(x) \in K[x]$ de grau menor que el de $a(x)$ tals que

$$a(x) = b(x)c(x).$$

Però $b(x)$ i $c(x)$ són producte de polinomis irreductibles, i per tant $a(x)$ també, i això contradiu l'elecció de $a(x)$. Per tant, tot polinomi de grau positiu sobre K és producte de polinomis irreductibles.

Demostrem ara la segona part. Podem suposar que $n \leq m$. Farem la demostració per inducció sobre n . Suposem que $n = 1$, és a dir, que $p_1(x) = q_1(x) \cdot \dots \cdot q_m(x)$. Com que $p_1(x)$ és irreductible, $m = 1$. Suposem que $n > 1$ i que l'enunciat és cert per a $n - 1$. Demostrem-ho per a n .

Si $p_1(x) \cdot \dots \cdot p_n(x) = q_1(x) \cdot \dots \cdot q_m(x)$ llavors, pel Lema 4.3.3 (b), existeix $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $p_n(x) = q_i(x)$. Reordenant, si cal, podem suposar que $i = m$. Llavors

$$(p_1(x) \cdot \dots \cdot p_{n-1}(x) - q_1(x) \cdot \dots \cdot q_{m-1}(x))p_n(x) = 0$$

Com que $K[x]$ és domini d'integritat i $p_n(x) \neq 0$, tenim que

$$p_1(x) \cdot \dots \cdot p_{n-1}(x) - q_1(x) \cdot \dots \cdot q_{m-1}(x) = 0,$$

és a dir,

$$p_1(x) \cdot \dots \cdot p_{n-1}(x) = q_1(x) \cdot \dots \cdot q_{m-1}(x).$$

Ara, per hipòtesi d'inducció, podem concloure que $n = m$ i que $p_1(x), \dots, p_n(x)$ són els mateixos que $q_1(x), \dots, q_n(x)$ tret de l'ordre. ■

La descomposició en factors irreductibles també permet calcular el màxim comú divisor i el mínim comú múltiple de dos polinomis. Si $a(x)$ i $b(x)$ són dos polinomis de grau més gran o igual que 1, el màxim comú divisor $d(x)$ d'aquests polinomis té com a factors irreductibles mòncics els que són comuns a les descomposicions de $a(x)$ i de $b(x)$. Els factors irreductibles mòncics del mínim comú múltiple de $a(x)$ i de $b(x)$ són els que apareixen a la descomposició d'algun dels dos.

Veiem-ho amb un exemple.

Exemple 4.3.5 Si a $\mathbb{R}[x]$ considerem els polinomis

$$a(x) = 2(x-1)^2(x-\frac{2}{3})^3(x+3)(x^2+x+1)^2 \text{ i } b(x) = 76(x-1)^3(x^2+x+1),$$

llavors el seu màxim comú divisor és $d(x) = (x-1)^2(x^2+x+1)$ i el mínim comú múltiple és $m(x) = (x-1)^3(x-\frac{2}{3})^3(x+3)(x^2+x+1)^2$. $\diamond$

Per calcular el màxim comú divisor i el mínim comú múltiple de dos polinomis amb aquest mètode, s'ha de menester la descomposició en factors irreductibles dels polinomis. En general, és molt difícil trobar aquesta descomposició, mentre que l'algorisme d'Euclides només ha de menester la divisió de polinomis. De fet, quan s'estudia més profundament el problema de la descomposició en factors irreductibles, s'utilitzen simplificacions del polinomi basades en l'algorisme d'Euclides. Per exemple, si $0 \neq a(x) \in \mathbb{R}[x]$ i $a'(x)$ denota la seva derivada, llavors el polinomi

$$b(x) = \frac{a(x)}{\text{m.c.d.}(a(x), a'(x))},$$

és un polinomi que té els mateixos factors irreductibles que $a(x)$ però sense repeticions (per què?).

Nota: Com hem dit abans, a $\mathbb{Z}$, l'anell dels nombres enters, també hi tenim la divisió entera. Per tant, es pot fer un estudi de la divisibilitat d'enters de manera anàloga a com hem fet la dels polinomis. En particular, l'algorisme d'Euclides serveix també per calcular el màxim comú divisor de dos enters no nuls. Els enters primers, és a dir els enters p amb valor absolut més gran que 1 que només són divisibles per ± 1 i $\pm p$, juguen el mateix paper a $\mathbb{Z}$ que els polinomis irreductibles a $K[x]$. La versió a $\mathbb{Z}$ del teorema de factorització única es diu *Teorema fonamental de l'Aritmètica*. $\diamond$

4.4 Arrels de polinomis

El teorema següent és un cas particular del Teorema 3.2.2, i dóna la relació bàsica entre el fet de tenir λ com arrel i el de ser divisible per $x - \lambda$.

Teorema 4.4.1 (Teorema de la resta) $\lambda \in K$ és una arrel de $a(x) \in K[x]$ si i només si $a(x)$ és divisible per $x - \lambda$. ■

Per veure la potència que té l'existència de la divisió entera, donem una altra demostració del Teorema de la resta.

DEMOSTRACIÓ. Fem la divisió entera de $a(x)$ per $x - \lambda$:

$$a(x) = q(x)(x - \lambda) + r(x).$$

Com que $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(x - \lambda) = 1$, tenim que $r(x) = r_0 \in K$. Així

$$a(\lambda) = q(\lambda)(\lambda - \lambda) + r_0 = r_0.$$

Per tant, λ és una arrel de $a(x)$ si i només si $r_0 = 0$, és a dir, si i només si $a(x)$ és divisible per $x - \lambda$. ■

Corol·lari 4.4.2 *Siguin $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ elements diferents de K i $a(x)$ un polinomi diferent de zero de $K[x]$. Llavors $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ són arrels de $a(x)$ si i només si existeix $b(x) \in K[x]$ tal que*

$$a(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n) b(x).$$

DEMOSTRACIÓ. És clar que si

$$a(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n) b(x),$$

llavors $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ són arrels de $a(x)$. Demostrarem el recíproc per inducció sobre n . El cas $n = 1$ és el Teorema 4.4.1. Suposem que $n > 1$ i que el resultat és cert per $n - 1$. Siguin doncs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ arrels diferents de $a(x)$. Per hipòtesi d'inducció, existeix $0 \neq b_1(x) \in K[x]$ tal que

$$a(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_{n-1}) b_1(x).$$

Llavors

$$0 = a(\lambda_n) = (\lambda_n - \lambda_1) \dots (\lambda_n - \lambda_{n-1}) b_1(\lambda_n).$$

Com que

$$(\lambda_n - \lambda_1) \dots (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \neq 0,$$

podem deduir que $b_1(\lambda_n) = 0$. Si apliquem el Teorema 4.4.1 a $b_1(x)$, obtenim que $b_1(x) = (x - \lambda_n) b(x)$. Per tant

$$a(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_{n-1}) b_1(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_{n-1}) (x - \lambda_n) b(x),$$

tal com volíem veure. ■

Es diu que $\lambda \in K$ és una arrel d'un polinomi $a(x) \in K[x]$ amb *multiplicitat* $m \geq 1$, si existeix $b(x) \in K[x]$ tal que

$$a(x) = (x - \lambda)^m b(x) \quad \text{i} \quad b(\lambda) \neq 0.$$

Corol·lari 4.4.3 *La suma de les multiplicitats de totes les arrels diferents d'un polinomi $a(x) \in K[x]$ de grau $n \geq 0$ és menor o igual a n .*

En particular, un polinomi de grau n té com a molt n arrels diferents.

DEMOSTRACIÓ. Siguin $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ les arrels diferents de $a(x)$ amb multiplicitats $m_1, \dots, m_r$ respectivament. Llavors pel Teorema de factorització única, existeix $b(x) \in K[x]$ tal que

$$a(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_r)^{m_r} b(x).$$

Per tant

$$n = \text{gr}(a(x)) = m_1 + \dots + m_r + \text{gr}(b(x)) \geq m_1 + \dots + m_r. \blacksquare$$

En general, no és una tasca fàcil trobar totes les arrels d'un polinomi. En el cas de grau 2, coneixem una fórmula en termes dels coeficients del polinomi. Existeixen fórmules similars per trobar arrels de polinomis de grau 3 i de grau 4; però es pot demostrar que, en general, no existeixen fórmules per trobar arrels de polinomis de grau més gran o igual que 5.

En el cas de $\mathbb{Q}[x]$, la proposició següent dóna un mètode per trobar totes les arrels racionals d'un polinomi.

Proposició 4.4.4 *Siguin $a, b \in \mathbb{Z}$, amb $b \neq 0$ i $\text{m.c.d.}(a, b) = 1$. Sigui*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x],$$

amb $a_n \neq 0$. Si $\frac{a}{b}$ és una arrel de $f(x)$ llavors a és un divisor de a_0 i b és un divisor de a_n .

DEMOSTRACIÓ. Tenim que

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = a_0 + a_1\frac{a}{b} + \dots + a_n\left(\frac{a}{b}\right)^n = 0.$$

Multiplicant per b^n , obtenim

$$a_0b^n + a_1ab^{n-1} + \dots + a_na^n = 0.$$

Per tant

$$b(a_0b^{n-1} + a_1ab^{n-2} + \dots + a_{n-1}a^{n-1}) = -a_na^n.$$

Com que b és un divisor de a_na^n i $\text{m.c.d.}(a, b) = 1$, tenim que b és un divisor de a_n . També tenim que

$$a_0b^n = -a(a_1b^{n-1} + \dots + a_na^{n-1}).$$

Com que a és un divisor de a_0b^n i $\text{m.c.d.}(a, b) = 1$, tenim que a és un divisor de a_0 .

■

Si $a(x)$ és un polinomi irreductible de grau més gran o igual que dos, llavors $a(x)$ no té arrels. En general, no és cert que un polinomi sense arrels sigui irreductible. Per exemple, el polinomi $(x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$ no té arrels a $\mathbb{R}[x]$ però no és irreductible.

Per a polinomis de grau 2 o 3 tenim el resultat següent.

Proposició 4.4.5 *Si $a(x) \in K[x]$. Si el grau de $a(x)$ és 2 o 3, $a(x)$ és irreductible si i només si $a(x)$ no té arrels.*

DEMOSTRACIÓ. Si $a(x)$ és un polinomi irreductible de grau més gran o igual que 2 llavors, pel Teorema 4.4.1, $a(x)$ no té arrels.

Per demostrar el recíproc, suposem que $a(x)$ és un polinomi de grau 2 o 3 sense arrels. Per la Proposició 4.1.1, si tenim una descomposició $a(x) = p_1(x)p_2(x)$, on $\text{gr}(p_i(x)) > 0$ per a $i = 1, 2$, llavors o bé $\text{gr}(p_1(x)) = 1$ o bé $\text{gr}(p_2(x)) = 1$; en qualsevol dels dos casos, pel Teorema 4.4.1, podem concloure que $a(x)$ té una arrel. Però estem suposant que $a(x)$ no té arrels, per tant, si $a(x) = p_1(x)p_2(x)$, o bé $\text{gr}(p_1(x)) = 0$ o bé $\text{gr}(p_2(x)) = 0$. És a dir, $a(x)$ és irreductible. ■

4.5 Polinomis irreductibles de $\mathbb{C}[x]$ i de $\mathbb{R}[x]$

Es pot veure, encara que no és fàcil, que a $\mathbb{Q}[x]$ hi han polinomis irreductibles de qualsevol grau positiu. A $\mathbb{R}[x]$ i a $\mathbb{C}[x]$ la situació no és tan complicada.

La demostració del teorema següent s'escapa de l'abast d'aquest llibre.

Teorema 4.5.1 (Teorema fonamental de l'Àlgebra) *Tot polinomi sobre $\mathbb{C}$ de grau positiu té alguna arrel a $\mathbb{C}$. ■*

Com a conseqüència tenim els resultats següents.

Corol·lari 4.5.2 *Els polinomis irreductibles de $\mathbb{C}[x]$ són els de grau 1.*

DEMOSTRACIÓ. Ja sabem que els polinomis de grau 1 són irreductibles. Sigui $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ tal que $\text{gr}(a(x)) > 1$. Llavors, pel Teorema fonamental de l'Àlgebra, $a(x)$ té una arrel i, pel Teorema 4.4.1, $a(x)$ no és irreductible. ■

Proposició 4.5.3 *Si $0 \neq p(x) \in \mathbb{R}[x]$. Llavors:*

- (i) *Si z és una arrel complexa de $p(x)$ llavors la seva conjugada $\bar{z}$ també ho és.*
- (ii) *Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ llavors $(x - z)(x - \bar{z})$ és un polinomi de $\mathbb{R}[x]$ irreductible.*

(iii) Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ és una arrel de $p(x)$ llavors $(x - z)(x - \bar{z})$ divideix $p(x)$.

DEMOSTRACIÓ. Per demostrar (i) suposem que $z \in \mathbb{C}$ satisfà $p(z) = 0$. Llavors, fent servir la Proposició 3.4.1 i que $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, tenim que

$$0 = \overline{p(z)} = p(\bar{z}).$$

Per tant $\bar{z}$ és arrel de $p(x)$.

Demostrem (ii). Si $z = a + bi$ llavors

$$(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[x].$$

Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, llavors $(x - z)(x - \bar{z})$ és un polinomi de grau dos amb dues arrels complexes, pel Corol·lari 4.4.3, no té més arrels a $\mathbb{C}$. En particular, no té cap arrel real, i per tant, com que és de grau 2, per la Proposició 4.4.5, és irreductible sobre $\mathbb{R}$.

Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ és una arrel de $p(x)$ llavors, per (i), també ho és $\bar{z}$. Com que $z \neq \bar{z}$, pel Corol·lari 4.4.2, $(x - z)(x - \bar{z})$ divideix $p(x)$. ■

Corol·lari 4.5.4 Els polinomis irreductibles de $\mathbb{R}[x]$ són els de grau 1 i els de grau 2 de la forma

$$ax^2 + bx + c,$$

amb $b^2 - 4ac < 0$.

DEMOSTRACIÓ. Sigui $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomi irreductible de grau més gran o igual que dos. Llavors, pel Teorema 4.4.1, $p(x)$ no té arrels reals, però, pel Teorema fonamental de l'Àlgebra, $p(x)$ té una arrel z a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Per la Proposició 4.5.3, tenim que $(x - z)(x - \bar{z}) \in \mathbb{R}[x]$ i que $p(x) = [(x - z)(x - \bar{z})]q(x)$, per a cert $q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Com que $p(x)$ és irreductible, el grau de $q(x)$ ha de ser zero. Per tant el grau de $p(x)$ és dos. Com que $p(x) = ax^2 + bx + c$ no té arrels reals, el seu discriminant és més petit que zero, és a dir, $b^2 - 4ac < 0$.

Si $p(x) = ax^2 + bx + c$ i $b^2 - 4ac < 0$ llavors, fent servir la fórmula de l'equació de segon grau, veiem que $p(x)$ no té arrels reals. Per la Proposició 4.4.5, $p(x)$ és irreductible. ■

Exemple 4.5.5 Busquem la descomposició en factors irreductibles del polinomi $x^4 + 1$ a $\mathbb{R}[x]$ i a $\mathbb{C}[x]$. A l'exemple 3.4.3 hem calculat les arrels complexes d'aquest

polinomi que són

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_3 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_4 &= \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Llavors la descomposició en factors irreductibles de $x^4 + 1$ a $\mathbb{C}[x]$ és: $(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)(x - z_4)$. Observem que $\bar{z}_1 = z_4$ i que $\bar{z}_2 = z_3$. Per tant $(x - z_1)(x - z_4) = x^2 - \sqrt{2}x + 1$ i $(x - z_2)(x - z_3) = x^2 + \sqrt{2}x + 1$ són dos factors irreductibles de $x^4 + 1$ a $\mathbb{R}[x]$. Per tant la descomposició a $\mathbb{R}[x]$ és: $x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$.

Considerem ara el polinomi $p(x) = 2x^5 + 3x^4 + 2x + 3$. Mirem primer si $p(x)$ té arrels racionals. Per la Proposició 4.4.4, els candidats a ser arrels racionals de $p(x)$ són $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 3$ i $\pm \frac{3}{2}$. D'aquestes només és arrel $-\frac{3}{2}$, i trobem que

$$p(x) = (x + \frac{3}{2})2(x^4 + 1) = (2x + 3)(x^4 + 1).$$

Per tant la descomposició en factors irreductibles a $\mathbb{R}[x]$ és:

$$p(x) = (2x + 3)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1),$$

i a $\mathbb{C}[x]$ s:

$$p(x) = (2x + 3)(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)(x - z_4). \quad \diamond$$

4.6 Exercicis

Exercici 1 Calculeu el màxim comú divisor i mínim comú múltiple dels parells de polinomis de $\mathbb{R}[x]$ següents:

- (a) $x^5 - 2x^3 + 5x + 1$ i $x^4 + 3x + 1$.
- (b) $3x^2 - 2$ i $2x^6 - x + 5$,
- (c) $x^3 + 1$ i $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$,
- (d) $3x^4 - 4x^3 + 1$ i $x^3 - 3x + 2$.

Exercici 2 Siguin $a(x) = x^4 - 2x^3 - x - 2$ i $b(x) = x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ polinomis de $\mathbb{Q}[x]$. Calculeu $d(x) = \text{m.c.d.}(a(x), b(x))$ i dos polinomis $\alpha(x), \beta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tals que $d(x) = \alpha(x)a(x) + \beta(x)b(x)$.

Exercici 3 Trobeu les arrels a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ dels polinomis següents:

- (a) $x^4 - 5x^2 + 6$,

- (b) $x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$,
- (c) $4x^6 - 8x^5 + 3x^4 - 4x^2 + 8x - 3$,
- (d) $81x^4 - 108x^3 + 54x^2 - 12x + 1$.

Exercici 4 La derivada d'un polinomi ens pot ajudar a factoritzar-lo.

- (a) Sigui m un enter positiu i $p(x), a(x) \in \mathbb{R}[x]$ tals que $p(x)$ és irreductible i $p(x)^m$ divideix $a(x)$. Demostreu que $p(x)^{m-1}$ divideix $a'(x)$, la derivada de $a(x)$.
- (b) Sigui $a(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomi no nul. Proveu que $\text{m.c.d.}(a(x), a'(x)) = 1$ si i només si $a(x) = \lambda p_1(x) \cdots p_r(x)$, on $p_1(x), \dots, p_r(x) \in \mathbb{R}[x]$ són irreductibles mòncics diferents i λ és un real no nul.
- (c) Donat $a(x) \in \mathbb{R}[x]$, doneu un mètode general que, sense factoritzar $a(x)$, calculi un polinomi amb els mateixos factors irreductibles mòncics que $a(x)$, però sense repeticions.
- (d) Apliqueu-ho per factoritzar: $2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x - 3$, $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$, $x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ i $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$.

Exercici 5 Factoritzeu completament sobre $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ els polinomis: $x^4 + 1$, $x^4 - 1$, $x^4 + 4$, $x^5 - 1$, $x^7 - 1$.

Exercici 6 Sigui $a(x) = x^4 - (5 + 2i)x^3 + (8 + 9i)x^2 - (1 + 14i)x + 5i - 5$ i $b(x) = x^3 - (1 + 3i)x^2 + (2i - 3)x + 1 + i$ polinomis amb coeficients complexos. Calculeu el $\text{m.c.d.}(a(x), b(x))$. Calculeu les arrels de $a(x)$ i $b(x)$.

Capítol 5

Espais Vectorials

En aquest capítol ens introduïm en la part de les matemàtiques anomenada *Àlgebra lineal*. Aquesta estudia només una estructura algebraica, la d'espai vectorial, que és molt rica i modela parts importants d'objectes d'estudi de moltes ciències, i en particular de la física.

En tot aquest capítol, K és un cos.

Un *espai vectorial* sobre K o K -espai vectorial és un grup abelià $(V, +)$ junt amb un producte per elements de K ,

$$\begin{aligned} \cdot : K \times V &\rightarrow V \\ (\alpha, u) &\mapsto \alpha u \end{aligned}$$

que compleix les propietats següents:

$$(1) \quad \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \quad \forall \alpha \in K, \forall u, v \in V.$$

$$(2) \quad (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in V.$$

$$(3) \quad (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u), \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in V.$$

$$(4) \quad 1 \cdot u = u, \quad \forall u \in V.$$

Els elements de V es diuen *vectors* i els de K , *escalars*.

Notació: En un espai vectorial arbitrari, seguirem el conveni de denotar els escalars per lletres de l'alfabet grec i els vectors per lletres de l'alfabet llatí. D'aquesta manera sempre podrem distingir els elements que són vectors dels que són escalars.

Moltes vegades, per denotar els vectors, es fa servir la notació $\vec{v}$. Nosaltres només la farem servir quan hi pugui haver confusió entre vectors i escalars, com és el cas de la proposició següent. $\diamond$

Proposició 5.0.1 *Sigui V un K -espai vectorial. Llavors*

$$(i) \quad 0 \cdot u = \vec{0}, \quad \forall u \in V.$$

$$(ii) \quad \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}, \quad \forall \alpha \in K.$$

$$(iii) \quad \alpha \cdot u = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0 \text{ o } u = \vec{0}.$$

$$(iv) \quad (-1) \cdot u = -u, \quad \forall u \in V.$$

DEMOSTRACIÓ. (i) $0 \cdot u = (0 + 0) \cdot u = 0 \cdot u + 0 \cdot u$. Per tant $\vec{0} = 0 \cdot u$.

$$(ii) \quad \alpha \cdot \vec{0} = \alpha \cdot (\vec{0} + \vec{0}) = \alpha \cdot \vec{0} + \alpha \cdot \vec{0}. \text{ Per tant } \vec{0} = \alpha \cdot \vec{0}.$$

(iii) Suposem que $\alpha \cdot u = \vec{0}$ i $\alpha \neq 0$. Hem de veure que $u = \vec{0}$. Ara $u = 1 \cdot u = (\alpha^{-1}\alpha)u = \alpha^{-1}(\alpha u) = \alpha^{-1} \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

$$(iv) \quad u + (-1) \cdot u = 1 \cdot u + (-1) \cdot u = (1 - 1)u = 0 \cdot u = \vec{0}. \text{ Per tant } (-1) \cdot u = -u. \blacksquare$$

Exemples 5.0.2

(1) El conjunt $V = \{0\}$ amb la suma $0 + 0 = 0$ i el producte per escalars definit per $\alpha 0 = 0$, per a tot $\alpha \in K$, és un K -espai vectorial que es diu espai vectorial zero o nul. Per abús de notació i comoditat, a vegades s'escriu $V = 0$ en comptes de $V = \{0\}$.

(2) K^n amb les operacions

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) &= (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n), \\ \alpha(a_1, \dots, a_n) &= (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n) \end{aligned}$$

és un K -espai vectorial.

(3) $M_{m \times n}(K)$ amb la suma de matrius i el producte per elements de K

$$\alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$$

és un K -espai vectorial.

(4) Si V és un K -espai vectorial i $X \neq \emptyset$, llavors el conjunt $\mathcal{F}(X, V)$ de totes les aplicacions de X a V amb la suma d'aplicacions

$$\begin{aligned} f + g: \quad X &\rightarrow V \\ x &\mapsto f(x) + g(x) \end{aligned}$$

per a tot $f, g \in \mathcal{F}(X, V)$, i el producte

$$\begin{aligned} \alpha f: \quad X &\rightarrow V \\ x &\mapsto \alpha f(x) \end{aligned}$$

per a tot $\alpha \in K$ i tot $f \in \mathcal{F}(X, V)$, és un K -espai vectorial.

- (5) $K[x]$ amb la suma i el producte per elements de K és un K -espai vectorial.
- (6) Sigui $\{V_i\}_{i \in I}$ una família no buida de K -espais vectorials. Llavors $\prod_{i \in I} V_i$ amb la suma i el producte per elements de K definits per

$$(v_i)_{i \in I} + (u_i)_{i \in I} = (v_i + u_i)_{i \in I} \quad \text{i}$$

$$\alpha(v_i)_{i \in I} = (\alpha v_i)_{i \in I}$$

és un K -espai vectorial.

- (7) Pensem $\mathbb{R}^3$ com un model de l'espai on vivim. Suposem que en un punt $P \in \mathbb{R}^3$ hi ha una partícula puntual. El conjunt de forces, que podem aplicar sobre aquesta partícula, el podem modelar com el conjunt de segments dirigits, amb origen P i final a qualsevol altre punt de $\mathbb{R}^3$, o també, com el conjunt

$$F_P = \{(P, Q) \mid Q \in \mathbb{R}^3\}.$$

El resultat d'aplicar dues forces $(P, Q_1), (P, Q_2)$ sobre la partícula és el mateix que el d'aplicar una força (P, Q) de manera que P, Q_1, Q, Q_2 són els vèrtexs d'un paral·lelogram de costats PQ_1, Q_1Q, QQ_2 i Q_2P . Es pot calcular el punt Q usant la suma de $\mathbb{R}^3$:

$$Q = P + (Q_1 - P) + (Q_2 - P) = Q_1 + Q_2 - P.$$

Això ens permet definir la suma de forces $(P, Q_1), (P, Q_2)$, sobre la partícula situada a P , com

$$(P, Q_1) + (P, Q_2) = (P, Q_1 + Q_2 - P).$$

Observem que aquesta suma és associativa:

$$((P, Q_1) + (P, Q_2)) + (P, Q_3) = (P, Q_1 + Q_2 - P) + (P, Q_3) = (P, Q_1 + Q_2 + Q_3 - 2P)$$

i

$$(P, Q_1) + ((P, Q_2) + (P, Q_3)) = (P, Q_1) + (P, Q_2 + Q_3 - P) = (P, Q_1 + Q_2 + Q_3 - 2P).$$

Clarament, la suma de forces és commutativa. L'element neutre d'aquesta suma és la força nul·la (P, P) :

$$(P, Q) + (P, P) = (P, Q + P - P) = (P, Q).$$

La força oposada de (P, Q) és $(P, -Q + 2P)$:

$$(P, Q) + (P, -Q + 2P) = (P, Q - Q + 2P - P) = (P, P).$$

Per tant F_P amb la suma de forces és un grup abelià. El mòdul de la força (P, Q) és la llargada del segment PQ . Quan multipliquem una força per un real positiu α , obtenim una força que té la mateixa direcció, el mateix sentit i el mòdul queda multiplicat per α . Per garantir aquesta propietat de les forces, hem de definir el producte d'una força (P, Q) per un real arbitrari α per

$$\alpha(P, Q) = (P, \alpha(Q - P) + P).$$

Veiem que F_P amb la suma de forces i aquest producte és un $\mathbb{R}$ -espai vectorial. Siguin $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Comprovem les quatre propietats que falten de la definició d'espai vectorial:

$$\alpha((P, Q_1) + (P, Q_2)) = \alpha(P, Q_1 + Q_2 - P) = (P, \alpha(Q_1 + Q_2 - P) + P)$$

i

$$\begin{aligned} \alpha(P, Q_1) + \alpha(P, Q_2) &= (P, \alpha(Q_1 - P) + P) + (P, \alpha(Q_2 - P) + P) \\ &= (P, \alpha(Q_1 + Q_2 - 2P) + P). \end{aligned}$$

Per tant $\alpha((P, Q_1) + (P, Q_2)) = \alpha(P, Q_1) + \alpha(P, Q_2)$. Ara

$$(\alpha + \beta)(P, Q) = (P, (\alpha + \beta)(Q - P) + P) = (P, \alpha(Q - P) + \beta(Q - P) + P)$$

i

$$\begin{aligned} \alpha(P, Q) + \beta(P, Q) &= (P, \alpha(Q - P) + P) + (P, \beta(Q - P) + P) \\ &= (P, \alpha(Q - P) + \beta(Q - P) + P). \end{aligned}$$

Per tant $(\alpha + \beta)(P, Q) = \alpha(P, Q) + \beta(P, Q)$. També tenim que

$$(\alpha\beta)(P, Q) = (P, \alpha\beta(Q - P) + P)$$

i

$$\alpha(\beta(P, Q)) = \alpha(P, \beta(Q - P) + P) = (P, \alpha\beta(Q - P) + P).$$

Per tant $(\alpha\beta)(P, Q) = \alpha(\beta(P, Q))$. Finalment,

$$1 \cdot (P, Q) = (P, 1 \cdot (Q - P) + P) = (P, Q - P + P) = (P, Q).$$

Amb tot això, hem vist que les forces es poden modelar per vectors. I hi ha molts altres objectes de la Física que es modelen per vectors. De fet, normalment, diem “la força és un vector...” $\diamond$

Un subconjunt W d'un K -espai vectorial V es diu que és un *subespai vectorial* de V si W és un espai vectorial amb les operacions heretades de V . És a dir, W és un subespai vectorial si i només si

- (1) W és un subgrup de V i
- (2) $\alpha u \in W, \quad \forall \alpha \in K, \forall u \in W.$

Proposició 5.0.3 *Un subconjunt $W \neq \emptyset$ d'un K -espai vectorial V és un subespai vectorial de V si i només si*

$$\alpha u + \beta v \in W, \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall u, v \in W.$$

DEMOSTRACIÓ. Suposem que

$$\alpha u + \beta v \in W, \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall u, v \in W.$$

Agafant $\alpha = 1$ i $\beta = -1$, obtenim

$$u - v \in W, \quad \forall u, v \in W.$$

Per tant, per la Proposició 2.1.1, W és un subgrup de V . Ara, agafant $\beta = 0$, tenim

$$\alpha u \in W, \quad \forall \alpha \in K, \forall u \in W.$$

Per tant W és un subespai vectorial de V .

L'altra implicació és evident. ■

Exemples 5.0.4

- (1) Si V és un K -espai vectorial llavors $\{\vec{0}\}$ és un subespai vectorial de V .
- (2) Considerem el conjunt,

$$W = \{A \in M_2(K) \mid A = A^t\}.$$

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i $A = A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, llavors $c = b$. Per tant W es pot descriure com el conjunt de les matrius $A \in M_2(K)$ de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$. Aquestes matrius es diuen *matrius simètriques*. Ara demostrarem que W és un subespai vectorial de $M_2(K)$.

W és no buit perquè $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$. Siguin $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ i $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ elements de W , i siguin α, β elements de K . Llavors

$$\alpha A + \beta A' = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \\ \alpha b + \beta b' & \alpha d + \beta d' \end{pmatrix},$$

que és simètrica. Per la Proposició 5.0.3, podem concloure que W és un subespai vectorial de $M_2(K)$.

(3) Sigui $A = (a_{ij})$ una matriu de $M_{m \times n}(K)$. Considerem el sistema d'equacions lineals homogeni sobre K , $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, que escrit en forma estesa és

$$\left. \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \dots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + \dots + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right\}$$

El conjunt S de les solucions del sistema, és a dir

$$S = \left\{ b = (b_1, \dots, b_n) \in K^n \mid A \cdot b^t = A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

és un subespai vectorial de K^n . Per demostrar-ho notem primer que $(0, \dots, 0)$ és sempre solució, per tant $S \neq \emptyset$. Si b i c són solucions, llavors per a qualssevol α i β de K tenim

$$A(\alpha b + \beta c)^t = A(\alpha b^t + \beta c^t) = \alpha A b^t + \beta A c^t = 0.$$

Per la Proposició 5.0.3, tenim que S és un subespai vectorial de K^n .

(4) Sigui n un nombre natural fixat. Aplicant les propietats del grau dels polinomis, es pot veure fàcilment que $K_n[x] = \{p(x) \in K[x] \mid \text{gr}(p(x)) \leq n\}$ és un subespai vectorial de $K[x]$. $\diamond$

5.1 Dependència i independència lineal

Es diu que un vector u d'un K -espai vectorial V és una *combinació lineal* de $u_1, \dots, u_n \in V$, si existeixen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tals que

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n.$$

Si A és un subconjunt no buit d'un K -espai vectorial V , denotem per $\langle A \rangle$ el conjunt de totes les combinacions lineals de vectors de A . Si A és el conjunt buit posem, per conveni, que $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$.

Lema 5.1.1 $\langle A \rangle$ és un subespai vectorial de V . A més, $\langle A \rangle$ és el subespai vectorial més petit de V que conté A .

DEMOSTRACIÓ. Observeu que $\langle A \rangle$ sempre és diferent del conjunt buit; perquè si $A = \emptyset$ llavors $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$ i si $A \neq \emptyset$ llavors $A \subseteq \langle A \rangle$. Siguin u i v elements de $\langle A \rangle$, i

siguin α i β elements de K . Llavors

$$u = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i u_i \text{ i } v = \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j v_j,$$

on α_i, β_j són elements de K , i u_i, v_j són elements de A . Llavors

$$\alpha u + \beta v = \left(\sum_{i=1}^{n_1} \alpha \alpha_i u_i \right) + \left(\sum_{j=1}^{n_2} \beta \beta_j v_j \right),$$

que és una combinació lineal d'elements de A . Per la Proposició 5.0.3, podem concloure que $\langle A \rangle$ és un subespai vectorial de V .

Si W és un subespai vectorial de V tal que $A \subseteq W$, llavors W conté totes les combinacions lineals d'elements de A . Per tant, W conté $\langle A \rangle$. ■

Sigui A un subconjunt d'un K -espai vectorial V . Definim el subespai vectorial generat per A com $\langle A \rangle$. Si W és un subespai vectorial de V i $W = \langle A \rangle$, llavors diem que A genera W o també que A és un *conjunt de generadors* de W .

Si existeix un subconjunt finit A de V tal que $V = \langle A \rangle$, llavors diem que V és un espai vectorial *finitament generat*.

Per comoditat, si $u_1, \dots, u_n$ són vectors de V , escriurem $\langle u_1, \dots, u_n \rangle$ en comptes de $\langle \{u_1, \dots, u_n\} \rangle$.

Exemple 5.1.2 A $\mathbb{R}^3$, el vector $(1, 1, 1)$ és combinació lineal de $(1, 1, 0)$ i $(2, 2, -1)$, ja que

$$(1, 1, 1) = 3(1, 1, 0) + (-1)(2, 2, -1).$$

Per tant $(1, 1, 1) \in \langle (1, 1, 0), (2, 2, -1) \rangle$. En canvi, $(1, 0, 0) \notin \langle (1, 1, 0), (2, 2, -1) \rangle$, perquè, en cas contrari, existirien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tals que $(1, 0, 0) = \alpha_1(1, 1, 0) + \alpha_2(2, 2, -1)$. Així, α_1 i α_2 serien solució del sistema d'equacions lineals

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Però aquest sistema és incompatible. ◇

Observació 5.1.3 Una conseqüència immediata del Lema 5.1.1 és que, si A i B són subconjunts d'un K -espai vectorial V , llavors $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$ si i només si $A \subseteq \langle B \rangle$. Per tant, $\langle A \rangle = \langle B \rangle$ si i només si $A \subseteq \langle B \rangle$ i $B \subseteq \langle A \rangle$. ◇

Entre totes les famílies de generadors d'un espai vectorial volem trobar les que tinguin el mínim nombre d'elements possible. Per fer això hem de menester el concepte d'independència lineal.

Direm que els vectors $u_1, \dots, u_n$ d'un K -espai vectorial V són *linealment independents* (o simplement l.i.) si

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0 \\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

En cas contrari, direm que $u_1, \dots, u_n$ són *linealment dependents* (o simplement l.d.)

En general, es diu que una família infinita de vectors és l.i. si cada subfamília finita és l.i.

Per conveni, direm que $\emptyset$ és l.i.

Exemples 5.1.4

- (1) Sigui V un K -espai vectorial. Llavors $\vec{0}$ no és linealment independent, perquè $\lambda \vec{0} = \vec{0}$ per qualsevol $\lambda \in K$. De fet,

$$v \in V \text{ és l.i.} \Leftrightarrow v \neq \vec{0}.$$

- (2) A l'espai vectorial K^n , considerem els vectors

$$e_i = (0, \dots, 0, \overset{i)}{1}, 0, \dots, 0).$$

Llavors $e_1, e_2, \dots, e_n$ són l.i. A més, si $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$, llavors

$$(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i e_i.$$

Per tant $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = K^n$.

- (3) A $K[x]$, els polinomis $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ són l.i. i tot polinomi és una combinació lineal d'aquests elements. Per tant $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ generen $K[x]$.
- (4) A $M_{m \times n}(K)$ les matrius e_{ij} , que tenen un 1 al lloc (i, j) i la resta d'entrades nul·les, són l.i. i també generen tot l'espai vectorial $M_{m \times n}(K)$. $\diamond$

Proposició 5.1.5 *Sigui V un K -espai vectorial. Els vectors $u_1, \dots, u_n \in V$, amb $n \geq 2$, són l.d. si i només si un d'ells és combinació lineal dels altres. En aquest cas, si u_j és combinació lineal de la resta de vectors, llavors*

$$\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \langle u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_n \rangle.$$

DEMOSTRACIÓ. Els vectors $u_1, \dots, u_n$ són l.d. si i només si existeixen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ no tots nuls tals que

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0.$$

Això passa si i només si existeix $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\alpha_j \neq 0$ i

$$u_j = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \alpha_j^{-1} \alpha_i u_i,$$

és a dir, si i només si un d'ells és combinació lineal dels altres. En aquest cas, per l'observació 5.1.3, tenim que $\langle u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_n \rangle \subseteq \langle u_1, \dots, u_n \rangle$, i com que $u_n \in \langle u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_n \rangle$, també tenim que

$$\langle u_1, \dots, u_n \rangle \subseteq \langle u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_n \rangle.$$

Per tant $\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \langle u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_n \rangle$. ■

Corollari 5.1.6 *Sigui V un K -espai vectorial i siguin $u_1, \dots, u_n$ generadors de V . Llavors existeix $A \subseteq \{u_1, \dots, u_n\}$ tal que A també genera tot V i, a més, els elements de A són linealment independents.*

DEMOSTRACIÓ. Si $V = 0$ llavors posem $A = \emptyset$. Suposem doncs que $V \neq 0$. En aquest cas, com que $u_1, \dots, u_n$ generen V , segur que $n \geq 1$.

Ara farem la demostració per inducció sobre n . Suposem primer que $n = 1$; llavors, com que $V \neq 0$, $u_1 \neq 0$, i prenem $A = \{u_1\}$. Suposem que $n > 1$ i que l'enunciat és cert per a $n - 1$. Si $u_1, \dots, u_n$ són linealment independents, prenem $A = \{u_1, \dots, u_n\}$, si no, per la Proposició 5.1.5, existeix $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_n$ generen V . Però aquesta família té $n - 1$ elements per tant, per hipòtesi d'inducció, conté un subconjunt A que genera tot V i és linealment independent. ■

Proposició 5.1.7 *Sigui V un K -espai vectorial i siguin $u, u_1, \dots, u_n$ vectors de V tals que existeixen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ que compleixen que*

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \text{ amb } \alpha_1 \neq 0. \quad (5.1)$$

Llavors,

(i) $u_1, \dots, u_n$ són linealment independents si i només si ho són $u, u_2, \dots, u_n$.

$$(ii) \langle u_1, \dots, u_n \rangle = \langle u, u_2, \dots, u_n \rangle.$$

DEMOSTRACIÓ. Observem primer que, com que $\alpha_1 \neq 0$, tenim que

$$u_1 = \alpha_1^{-1}u - \alpha_2\alpha_1^{-1}u_2 - \dots - \alpha_n\alpha_1^{-1}u_n. \quad (5.2)$$

Per tant u_1 és combinació lineal de $u, u_2, \dots, u_n$ i el coeficient de u a (5.2) és diferent de zero.

(i) Suposem que $u_1, \dots, u_n$ són linealment independents. Llavors, si $0 = \lambda_1 u + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$, fent servir la igualtat (5.1), obtenim que

$$0 = \lambda_1 \alpha_1 u_1 + (\lambda_2 + \lambda_1 \alpha_2) u_2 + \dots + (\lambda_n + \lambda_1 \alpha_n) u_n.$$

Com que $u_1, \dots, u_n$ són l.i.,

$$\lambda_1 \alpha_1 = \lambda_2 + \lambda_1 \alpha_2 = \dots = \lambda_n + \lambda_1 \alpha_n = 0.$$

Però $\alpha_1 \neq 0$, per tant $\lambda_1 = 0$ i, en conseqüència, $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Un argument similar demostra que si $u, u_2, \dots, u_n$ són linealment independents, llavors també ho són $u_1, \dots, u_n$; en aquest cas, cal fer servir la igualtat (5.2).

(ii) Per les igualtats (5.1) i (5.2), tenim que $\{u, u_2, \dots, u_n\} \subseteq \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ i que $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq \langle u, u_2, \dots, u_n \rangle$. Per tant $\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \langle u, u_2, \dots, u_n \rangle$ (recordem l'observació 5.1.3). ■

5.2 Bases i dimensió

Una *base* d'un K -espai vectorial V és una família de vectors de V , $\{v_i\}_{i \in I}$, tal que

$$(1) \quad V = \langle \{v_i \mid i \in I\} \rangle.$$

$$(2) \quad \{v_i\}_{i \in I} \text{ és l.i.}$$

Si una base de V és finita, l'escriurem en la forma $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, és a dir, una base finita de V és un conjunt finit totalment ordenat de vectors de V que generen V i són l.i.

Exemples 5.2.1

(1) El conjunt ordenat $((1, 2), (-1, 1))$ és una base de $\mathbb{R}^2$. Comprovem-ho. Veiem primer que els vectors $(1, 2), (-1, 1)$ són l.i. Siguin $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tals que

$$\alpha(1, 2) + \beta(-1, 1) = (0, 0).$$

Llavors

$$\left. \begin{array}{rcl} \alpha - \beta & = & 0 \\ 2\alpha + \beta & = & 0 \end{array} \right\}$$

Sumant les equacions, obtenim $3\alpha = 0$, i així $\alpha = 0$ i també $\beta = 0$. Per tant $(1, 2), (-1, 1)$ són l.i.

Veiem ara que $(1, 2), (-1, 1)$ generen $\mathbb{R}^2$. Sigui $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Hem de trobar $x, y \in \mathbb{R}$ tals que

$$x(1, 2) + y(-1, 1) = (a, b),$$

és a dir,

$$\left. \begin{array}{rcl} x - y & = & a \\ 2x + y & = & b \end{array} \right\}$$

Sumant les equacions, obtenim $3x = a + b$, i així

$$x = \frac{a + b}{3}$$

i

$$y = b - 2x = b - \frac{2a + 2b}{3} = \frac{b - 2a}{3}.$$

Això demostra que $\mathbb{R}^2 = \langle (1, 2), (-1, 1) \rangle$. Per tant $((1, 2), (-1, 1))$ és una base de $\mathbb{R}^2$.

Notem que, com que les bases finites són conjunts ordenats, les bases

$$((1, 2), (-1, 1)) \quad \text{i} \quad ((-1, 1), (1, 2))$$

de $\mathbb{R}^2$ són diferents.

(2) Els exemples 5.1.4 (2), (3) i (4) mostren que

$$(e_1, \dots, e_n)$$

és una base de K^n ,

$$(1, x, x^2, \dots, x^n, \dots)$$

és una base de $K[x]$ i

$$(e_{11}, \dots, e_{1n}, e_{21}, \dots, e_{2n}, \dots, e_{m1}, \dots, e_{mn})$$

és una base de $M_{m \times n}(K)$. $\diamond$

La base $(e_1, \dots, e_n)$ de K^n es diu *base canònica* de K^n .

La demostració del resultat següent està fora de l'abast d'aquest llibre.

Teorema 5.2.2 *Tot K -espai vectorial té base.* ■

Notem però que si V té un nombre finit de generadors, el fet que V tingui base és conseqüència del Corol·lari 5.1.6.

Nota: Per conveni, $\emptyset$ és una base de l'espai vectorial $\{0\}$.

Teorema 5.2.3 (Teorema de Steinitz) *Si $(u_1, \dots, u_n)$ una base d'un K -espai vectorial V i siguin $v_1, \dots, v_m$ vectors de V l.i. Llavors:*

(i) $m \leq n$,

(ii) *es poden substituir m vectors de la base $(u_1, \dots, u_n)$ per $v_1, \dots, v_m$ obtenint una nova base.*

DEMOSTRACIÓ. Ho demostrarem per inducció sobre m . Per a $m = 0$ no hi ha res a demostrar. Suposem que $m > 0$ i que el teorema és cert per a $m - 1$. Per hipòtesi d'inducció, es poden substituir $m - 1$ vectors de la base $(u_1, \dots, u_n)$ per $v_1, \dots, v_{m-1}$ obtenint una nova base. Reordenant la base $(u_1, \dots, u_n)$, podem suposar que

$$(v_1, \dots, v_{m-1}, u_m, \dots, u_n)$$

és la nova base. Per tant existeixen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tals que

$$v_m = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{m-1} v_{m-1} + \alpha_m u_m + \dots + \alpha_n u_n.$$

Com que $v_1, \dots, v_m$ són l.i., algun dels coeficients de les u_i és diferent de zero i, en particular, obtenim que $m \leq n$. Si a la base $(v_1, \dots, v_{m-1}, u_m, \dots, u_n)$ substituïm el vector u_i , amb coeficient diferent de zero, per v_m , per la Proposició 5.1.7, el resultat de fer aquesta substitució també és una base. ■

Teorema 5.2.4 (Teorema de la base) *Si V és un K -espai vectorial que té una base amb un nombre finit d'elements llavors totes les bases de V tenen el mateix nombre d'elements.*

DEMOSTRACIÓ. Si $B_1 = (u_1, \dots, u_n)$ és una base de V i $v_1, \dots, v_m$ són vectors linealment independents de V llavors, pel Teorema de Steinitz, $n \geq m$. Per tant tota família de vectors linealment independents de V té com a molt n elements i, en particular, és finita.

Així també veiem que si $B_2 = (v_1, \dots, v_m)$ és una altra base de V , llavors $m \leq n$. Si apliquem el Teorema de Steinitz a la base B_2 i al conjunt de vectors linealment independents B_1 obtenim que $n \leq m$. Per tant $n = m$. ■

El Teorema de la base ens permet definir la *dimensió* d'un K -espai vectorial V com el nombre de vectors d'alguna de les seves bases. Denotem la dimensió de V per $\dim_K V$ o per $\dim V$ si queda clar, pel context, sobre quin cos és espai vectorial V .

Exemples 5.2.5 A partir de les bases que hem donat als exemples 5.2.1, tenim que $\dim K^n = n$ i que $\dim M_{m \times n}(K) = mn$. En el cas de $K[x]$, hem donat una base amb un nombre infinit d'elements; pel Teorema de la base, totes les bases de $K[x]$ tindran un nombre infinit d'elements, per tant $\dim K[x] = \infty$.

El cos dels nombres complexos es pot veure com un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ i també com un espai vectorial sobre ell mateix. Tenim que $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, i que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ perquè $(1, i)$ és una base de $\mathbb{C}$ com a $\mathbb{R}$ -espai vectorial. $\diamond$

Corol·lari 5.2.6 *Si V un K -espai vectorial de dimensió n . Llavors,*

- (i) *n vectors linealment independents formen una base de V .*
- (ii) *Una família generadora de V amb n vectors és una base.*

DEMOSTRACIÓ. (i) Sigui $B = (v_1, \dots, v_n)$ una base de V . Si tenim una família de n vectors linealment independents, pel Teorema de Steinitz, els podem substituir tots a B de tal manera que el resultat sigui una base. Com que el resultat de fer aquesta substitució serà la família de vectors linealment independents, aquesta és una base.

(ii) Pel Corol·lari 5.1.6, una família generadora de V de n elements conté una base que, per ser la dimensió n , ha de tenir n elements. Això vol dir que aquesta família ja és una base. ■

Corol·lari 5.2.7 *Siguin V un K -espai vectorial de dimensió finita i W un subespai vectorial de V . Llavors:*

- (i) *La dimensió de V és el nombre màxim de vectors l.i. de V .*
- (ii) *La dimensió de V és el nombre mínim de generadors de V .*
- (iii) *Tota base de W es pot ampliar a una base de V . Així*

$$\dim W \leq \dim V.$$

- (iv) *$\dim W = \dim V$ si i només si $W = V$.*

DEMOSTRACIÓ. (i) Això és clar pel Teorema de Steinitz.

(ii) És conseqüència del Corol·lari 5.1.6 i de que totes les bases tinguin el mateix nombre d'elements.

(iii) Fixem $B = (v_1, \dots, v_n)$ una base de V i sigui $B' = (w_1, \dots, w_r)$ una base de W . Pel Teorema de Steinitz, $n \geq r$ i podem substituir r vectors de B pels de B' obtenint una nova base de V . Per tant existeixen $v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-r}} \in B$, tals que $(w_1, \dots, w_r, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-r}})$ formen una base de V .

(iv) Si $(w_1, \dots, w_n)$ és una base de W i $n = \dim(V)$, llavors, pel Corol·lari 5.2.6 (i), $(w_1, \dots, w_n)$ és també una base de V . ■

Exemple 5.2.8 Considerem l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $M_2(\mathbb{R})$. Com hem vist abans, aquest espai vectorial té dimensió 4 i $B = ((\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}))$ és una base. Siguin

$$W_1 = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = A^t \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\},$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + d = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

i

$$W_3 = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = -A^t \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es pot veure que W_1 , W_2 i W_3 són subespais vectorials de $M_2(\mathbb{R})$. Volem calcular la seva dimensió. És clar que cap W_i és tot $M_2(\mathbb{R})$ i que tots els W_i són diferents de zero. Per tant, pel Corol·lari 5.2.7, les possibilitats per a les dimensions dels W_i són 1, 2 i 3. Tenim la igualtat

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant el subconjunt de W_1 ,

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

és generador i linealment independent. D'aquí podem concloure que $\dim W_1 = 3$.

De la mateixa manera, les igualtats

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

i

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

ens permeten concloure que $((\frac{1}{0} \frac{0}{-1}), (\frac{0}{0} \frac{1}{0}), (\frac{0}{1} \frac{0}{0}))$ és una base de W_2 i que $(\frac{0}{-1} \frac{1}{0})$ és una base de W_3 . Així doncs, $\dim W_2 = 3$ i $\dim W_3 = 1$.

Pel Teorema de Steinitz, els tres vectors de la base de W_1 es poden substituir a la base B de tal manera que el resultat sigui una base. Anem a fer-ho. En aquest cas, només cal que busquem un vector de B que sigui linealment independent amb v_1, v_2 i v_3 , ja que llavors tindrem 4 vectors linealment independents de $M_2(\mathbb{R})$ que, pel Corol·lari 5.2.6, formaran una base. Tenim que $v = (\frac{0}{0} \frac{1}{0}) \notin W_1$, per tant v no és combinació lineal de v_1, v_2, v_3 . Per tant (v, v_1, v_2, v_3) és una base de $M_2(\mathbb{R})$. $\diamond$

5.3 Suma i intersecció de subespais vectorials

Anem a veure ara com construir subespais vectorials d'un espai vectorial a partir d'altres subespais vectorials.

Siguin $W_1, \dots, W_n$ subespais vectorials d'un K -espai vectorial V . Definim la seva suma per

$$W_1 + \dots + W_n = \{w_1 + \dots + w_n \mid w_i \in W_i \text{ per a } i = 1, \dots, n\}.$$

Es veu fàcilment que la suma de subespais vectorials és un subespai vectorial. A més, si $W_1 = \langle w_{1,1}, \dots, w_{1,r_1} \rangle, \dots, W_n = \langle w_{n,1}, \dots, w_{n,r_n} \rangle$, llavors

$$W_1 + \dots + W_n = \langle w_{1,1}, \dots, w_{1,r_1}, \dots, w_{n,1}, \dots, w_{n,r_n} \rangle.$$

Observem també que

$$\langle w_1, \dots, w_r \rangle = \langle w_1 \rangle + \dots + \langle w_r \rangle$$

Direm que una suma de subespais vectorials $W_1 + \dots + W_n$ és *directa* si

$$W_j \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n W_i = \{0\}, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

En particular, la suma de dos subespais vectorials W_1, W_2 de V és directa si i només si $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Escriurem $W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ per denotar que la suma $W_1 + \dots + W_n$ és directa. També direm, en aquest cas, que els subespais vectorials $W_1, \dots, W_n$ estan en suma directa.

Direm que W' és un *complement* del subespai vectorial W de V si $V = W \oplus W'$.

Lema 5.3.1 *Sigui V un K -espai vectorial amb base $B = (v_1, \dots, v_n)$, i sigui W un subespai vectorial de V . Llavors*

$$(i) \quad V = \langle v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n \rangle.$$

(ii) *Existeix $A \subseteq \{v_1, \dots, v_n\}$ tal que $V = W \oplus \langle A \rangle$. En particular, tot subespai vectorial de V té un complement.*

DEMOSTRACIÓ. (i) Com que $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, $V = \langle v_1 \rangle + \dots + \langle v_n \rangle$. Si $w \in \langle v_i \rangle \cap \sum_{j \neq i} \langle v_j \rangle$ llavors $w = \lambda v_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j v_j$, per a certs $\lambda, \alpha_j \in K$. Com que $v_1, \dots, v_n$ són linealment independents, els escalars λ i α_j són zero i per tant $w = 0$. (ii) Sigui B' una base de W . Pel Teorema de Steinitz, existeix $A \subseteq \{v_1, \dots, v_n\}$ tal que, si ordenem el conjunt $B' \cup A$, obtenim una base de V . Com que $B' \cup A$ genera V , tenim que $V = W + \langle A \rangle$. Com que $B' \cup A$ són linealment independents, $W \cap \langle A \rangle = \{0\}$. Tenim doncs que $V = W \oplus \langle A \rangle$. ■

La proposició següent ens mostra altres caracteritzacions de quan una suma de subespais vectorials és directa.

Proposició 5.3.2 *Siguin $W_1, \dots, W_n$ subespais vectorials d'un K -espai vectorial V . Llavors les condicions següents són equivalents.*

$$(i) \quad W_1 \oplus \dots \oplus W_n.$$

$$(ii) \quad W_{j+1} \cap \sum_{i=1}^j W_i = \{0\} \quad \forall j = 1, \dots, n-1.$$

(iii) *Tot vector de $W_1 + \dots + W_n$ s'expressa de manera única com a suma de vectors de $W_1, \dots, W_n$, és a dir, si $u_i, v_i \in W_i$, per a $i = 1, \dots, n$, i $u_1 + \dots + u_n = v_1 + \dots + v_n$, llavors $u_i = v_i$, per a tot $i = 1, \dots, n$.*

(iv) *El vector 0 s'expressa de manera única com a suma de vectors de $W_1, \dots, W_n$.*

DEMOSTRACIÓ. (i) $\Rightarrow$ (ii) És clar.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sigui $u_i, v_i \in W_i$, per a $i = 1, \dots, n$, tals que

$$u_1 + \dots + u_n = v_1 + \dots + v_n.$$

Llavors $(u_1 - v_1) + \dots + (u_n - v_n) = 0$. Per tant

$$v_n - u_n \in W_n \cap \sum_{i=1}^{n-1} W_i = \{0\},$$

i així $u_n = v_n$. I per inducció sobre n , tenim

$$u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) És clar.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Sigui $u_j \in W_j \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n W_i$. Llavors existeixen $u_i \in W_i$ tals que

$$u_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n u_i.$$

Per tant

$$0 = u_1 + \dots + u_{j-1} + (-u_j) + u_{j+1} + \dots + u_n,$$

i per (iv), tenim que $u_i = 0$, per a tot $i = 1, \dots, n$. Això demostra que

$$W_j \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n W_i = \{0\}, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Per tant $W_1 \oplus \dots \oplus W_n$. ■

És fàcil comprovar que la intersecció de subespais vectorials d'un K -espai vectorial V és un subespai vectorial de V .

La fórmula següent relaciona les dimensions de dos subespais vectorials amb la de la seva suma i la de la seva intersecció.

Teorema 5.3.3 (Fórmula de Grassmann) *Siguin W_1, W_2 subespais vectorials de dimensió finita d'un K -espai vectorial V . Llavors*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

DEMOSTRACIÓ. Sigui $B = (u_1, \dots, u_r)$ una base de $W_1 \cap W_2$. Pel Corol·lari 5.2.7, podem ampliar B a una base

$$(u_1, \dots, u_r, v_{r+1}, \dots, v_s)$$

de W_1 , i a una base

$$(u_1, \dots, u_r, w_{r+1}, \dots, w_t)$$

de W_2 . Observem que tot vector de $W_1 + W_2$ és combinació lineal de

$$u_1, \dots, u_r, v_{r+1}, \dots, v_s, w_{r+1}, \dots, w_t.$$

Per tant

$$W_1 + W_2 = \langle u_1, \dots, u_r, v_{r+1}, \dots, v_s, w_{r+1}, \dots, w_t \rangle.$$

Veiem que $u_1, \dots, u_r, v_{r+1}, \dots, v_s, w_{r+1}, \dots, w_t$ són l.i. Siguin

$$\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_{r+1}, \dots, \beta_t \in K$$

tals que

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i u_i + \sum_{i=r+1}^s \alpha_i v_i + \sum_{j=r+1}^t \beta_j w_j = 0.$$

Llavors

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i u_i + \sum_{i=r+1}^s \alpha_i v_i = - \sum_{j=r+1}^t \beta_j w_j \in W_1 \cap W_2.$$

Com que B és una base de $W_1 \cap W_2$, existeixen $\beta_1, \dots, \beta_r \in K$ tals que

$$- \sum_{j=r+1}^t \beta_j w_j = \sum_{j=1}^r \beta_j u_j.$$

Així

$$\sum_{j=1}^r \beta_j u_j + \sum_{j=r+1}^t \beta_j w_j = 0,$$

i com que $u_1, \dots, u_r, w_{r+1}, \dots, w_t$ són l.i., tenim que

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_t = 0.$$

Ara tenim que

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i u_i + \sum_{i=r+1}^s \alpha_i v_i = 0,$$

i com que $u_1, \dots, u_r, v_{r+1}, \dots, v_s$ són l.i., tenim que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = 0.$$

Per tant

$$u_1, \dots, u_r, v_{r+1}, \dots, v_s, w_{r+1}, \dots, w_t$$

són l.i., i així

$$(u_1, \dots, u_r, v_{r+1}, \dots, v_s, w_{r+1}, \dots, w_t)$$

és una base de $W_1 + W_2$. Podem concloure doncs que

$$\dim(W_1 + W_2) = s + t - r = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2). \blacksquare$$

Exemple 5.3.4 Continuem amb l'exemple 5.2.8. Considerem els subespais vectorials W_1 i W_2 d'aquest exemple. Calculem una base i la dimensió de $W_1 \cap W_2$. Si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W_1 \cap W_2$, llavors $b = c$ i $a = -d$. Com que tenim la igualtat

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

i $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ són linealment independents, deduïm que $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$, i que una base d'aquest subespai vectorial és $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Ara, per la Fórmula de Grassmann, obtenim que $\dim(W_1 + W_2) = 4$. Pel Corol·lari 5.2.7, podem concloure que $W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$. Però els subespais vectorials W_1 i W_2 no estan en suma directa perquè la seva intersecció no és zero.

Tenim que $W_3 \subseteq W_2$, per tant $W_2 \cap W_3 = W_3$ i $W_2 + W_3 = W_2$. D'altra banda, $W_3 \cap W_1 = \{0\}$, per tant els dos subespais vectorials estan en suma directa, i com que, per la Fórmula de Grassmann, $\dim(W_1 + W_3) = 4$, tenim que $M_2(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_3$. Tenim doncs que W_3 és un complement de W_1 dins de $M_2(\mathbb{R})$.

Notem que W_1 té molts complements dins de $M_2(\mathbb{R})$. Qualsevol vector $v \in M_2(\mathbb{R}) \setminus W_1$ satisfà que $\langle v \rangle$ és un complement de W_1 . Perquè, com que $\dim W_1 = 3$ i $W_1 \subset W_1 + \langle v \rangle$, tenim que $\dim(W_1 + \langle v \rangle) = 4$, i per tant $W_1 + \langle v \rangle = M_2(\mathbb{R})$. Si $w \in W_1 \cap \langle v \rangle$, llavors $w = \lambda v \in M_2(\mathbb{R})$. Si $\lambda \neq 0$ llavors $v = \frac{1}{\lambda}w \in W_1$, cosa que contradiu la manera com hem triat v , per tant $\lambda = 0$ i, en conseqüència, $w = 0$. $\diamond$

5.4 Exercicis

Exercici 1 Considerem l'espai vectorial $\mathbb{R}[x]$. Decidiu si els subconjunts següents són subespais vectorials:

- (a) $E = \mathbb{R}_2[x] = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{grau}(p(x)) \leq 2\}$.
- (b) $F = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{grau}(p(x)) = 3\}$.
- (c) $G = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(a) = 0\}$, per a cert $a \in \mathbb{R}$ fixat.
- (d) $H = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) \in \mathbb{Z}\}$.

Exercici 2 Sigui $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}\}$, on X és un conjunt diferent del buit.

- (a) Demostreu que amb les operacions:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x),\end{aligned}$$

$\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ és un $\mathbb{R}$ -espai vectorial.

- (b) Decidiu si els subconjunts de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ següents són subespais vectorials:

- (i) $E_1 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$.
- (ii) $E_2 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$.
- (iii) $E_3 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ és contínua}\}$.

- (iv) $E_4 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ és polinòmica}\}.$
- (v) $E_5 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x^2) = f(x)^2\}.$
- (vi) $E_6 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ és dos cops derivable i } f'' - f' - f = 0\}.$
- (vii) $E_7 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \neq 3, \forall x \in \mathbb{R}\}.$
- (viii) $E_8 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(a) = 0\}, \text{ per a un } a \in \mathbb{R} \text{ fixat}.$
- (ix) $E_9 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(a) = f(b)\}, \text{ per a } a, b \in \mathbb{R} \text{ fixats}.$
- (x) $E_{10} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(a) = f(b) + k\}, \text{ per a } a, b, k \in \mathbb{R} \text{ fixats}.$

Exercici 3 Quins dels conjunts següents són subespais vectorials sobre $\mathbb{R}$?

- (a) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy + z = x\}.$
- (b) $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + \pi y = 0\}.$
- (c) $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}.$
- (d) $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}\}.$
- (e) $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = \sqrt{3}z\}.$
- (f) $E_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2xy + y^2 = 0\}.$
- (g) $E_7 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z + t = -1\}.$
- (h) $E_8 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$
- (i) $E_9 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 x_2 = 0\}.$
- (j) $E_{10} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}.$

És subespai vectorial E_4 si el pensem dins $\mathbb{R}^2$ com a $\mathbb{Q}$ -espai vectorial?

Exercici 4 Determineu quins dels subconjunts següents són $\mathbb{R}$ -subespais vectorials i quins són $\mathbb{C}$ -subespais vectorials:

$$E_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z}\},$$

$$E_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{z+\bar{z}}{2} = 0\},$$

$$E_3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z + 3iw = 0\}.$$

Exercici 5 Considerem l'espai vectorial $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Decidiu si els subconjunts següents són subespais vectorials:

- (a) $E_1 = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^2 = 0\}.$

- (b) $E_2 = \{A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \mid a_{1j} = 0, \forall j\}$.
- (c) $E_3 = \{A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \mid a_{1j} = 1, \forall j\}$.
- (d) $E_4 = \{A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \mid \sum_{i,j} a_{ij} = 0\}$.
- (e) $E_5 = \{A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \mid AB = 0\}$ per a $B \in M_n(\mathbb{R})$ fixada.

Exercici 6 Quines de les famílies de vectors següents són $\mathbb{R}$ -linealment independents?

- (a) $\{(1, 0), (-1, 1), (0, \sqrt{2})\}$ de $\mathbb{R}^2$.
- (b) $\{(1, 0, 0), (1, -1, 1), (2, -1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
- (c) $\{x^3, x^2, x^3 - x^2 + 2\}$ de $\mathbb{R}[x]$.
- (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$ de $M_2(\mathbb{R})$.
- (e) $\{\sin x, \cos x, 1\}, \{e^x, e^{x+2}\}$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Per a les famílies que no són linealment independents, expresseu un vector com a combinació lineal dels altres. Trobeu una base del subespai vectorial que genera cada família.

Exercici 7 Considerem $(1, 0, -1, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 1, 2, 0) \in \mathbb{R}^4$. Proveu que el vector $(0, 3, 5, 1)$ es pot escriure com a combinació lineal dels vectors d'aquesta família de dues formes diferents. Què podem dir d'aquesta família de vectors?

Trobeu una subfamília linealment independent maximal.

Exercici 8 Sigui $F = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 8, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (2, 1, 0, 5) \rangle$, subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$. Proveu que $F = \mathbb{R}^4$.

Exercici 9 Siguin $F = \langle (1, -1, 1), (0, 1, -1) \rangle$ i $G = \langle (1, 0, 0), (1, -2, 2) \rangle$ subespais vectorials de $\mathbb{R}^3$.

- (a) Proveu que $F = G$.
- (b) Sigui $v = (9, \sqrt{2} - 1, 1 - \sqrt{2})$. Proveu que $v \in F$ i expresseu-lo com a combinació lineal de les dues famílies de vectors que generen F donades al principi.

Exercici 10 Trobeu la dimensió i una base de cadascun dels següents subespais vectorials sobre $\mathbb{R}$:

- (a) $E_1 = \langle (1, 0, -1), (-2, 0, 3), (3, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$,
- (b) $E_2 = \langle (1, 0, 2, 3), (2, 0, 4, 1), (1, -1, 0, 0) \rangle$,
- (c) $E_3 = \langle (1, -1, 0, 1), (2, 0, -1, 1), (3, -1, -1, 2), (0, 2, -1, -1) \rangle$,
- (d) $E_4 = \{(x, y, z, t) \mid x = y - 3z, z = t\}$,
- (e) $E_5 = \{(x, y, z) \mid x = y = z\}$,
- (f) $E_6 = \{(x, y, z, t, u) \mid x + y = 3u, y - 3u = t, z = 3t, x = -t\}$.

Exercici 11 Completeu a una base de $\mathbb{R}^3$ cadascuna de les famílies de vectors següents:

$$\{(1, 1, 1), (7, 0, 0)\}, \{(5, 1, 4)\}, \{(1, 2, 3), (-1, 0, 0), (2, 0, 3)\}.$$

Exercici 12 Completeu el subconjunt $\{(1 + i, i)\}$ de $\mathbb{C}^2$ a una base de $\mathbb{C}^2$ com a $\mathbb{C}$ -espai vectorial i com a $\mathbb{R}$ -espai vectorial.

Exercici 13 Siguin E un espai vectorial i $e_1, \dots, e_n$ i v vectors de E . Demostreu o doneu un contraexemple de les afirmacions següents, segons siguin certes o falses:

- (a) $e_1, \dots, e_n$ linealment independents i $v \neq e_i \implies e_1, \dots, e_n, v$ són linealment independents.
- (b) $e_1, \dots, e_n$ linealment independents i $v \notin \langle e_1, \dots, e_n \rangle \implies e_1, \dots, e_n, v$ són linealment independents.
- (c) $e_1, \dots, e_n$ generen $V \implies e_1, \dots, e_{n-1}$ generen V .
- (d) $e_1, \dots, e_n$ generen V i $e_n \in \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle \implies e_1, \dots, e_{n-1}$ generen V .
- (e) $e_i = e_j$ per a algun $i \neq j \implies e_1, \dots, e_n$ són linealment dependents.
- (f) Tota família de vectors que contingui el vector 0 és linealment dependent.
- (g) v és linealment dependent $\iff v = 0$.

Exercici 14 Proveu que $\mathbb{R}^2 = \langle (0, 1) \rangle \oplus \langle (1, 1) \rangle = \langle (0, 1) \rangle \oplus \langle (2, 1) \rangle$. Trobeu tots els vectors (a, b) tals que $\mathbb{R}^2 = \langle (0, 1) \rangle \oplus \langle (a, b) \rangle$. Observeu que d'això es dedueix que la manera de completar un vector fins a una base no és única.

Exercici 15 Considerem el conjunt de successions de nombres reals amb les operacions:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) + (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots),$$

$$k(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n, \dots).$$

Proveu que és un $\mathbb{R}$ -espai vectorial. Quina dimensió té?

Considerem el subconjunt $c_0(\mathbb{R})$ de totes les successions de nombres reals amb límit 0. Demostreu que és un subespai vectorial. Quina dimensió té?

Exercici 16 Sigui F el subconjunt de les successions $\{a_n\}$ de nombres reals tals que:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \forall n \geq 3.$$

- (a) Demostreu que F és un subespai vectorial de l'espai de totes les successions. Trobeu-ne la dimensió i una base.
- (b) Trobeu les progressions geomètriques contingudes a F i proveu que existeix una base de F formada per progressions geomètriques.
- (c) Trobeu el terme general a_n de la successió de Fibonacci:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots,$$

$$\text{on } a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \text{ per a tot } n \geq 1.$$

Exercici 17 Doneu la dimensió i una base dels subespais de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} F &= \langle (1, 0, -1, 1), (1, 1, 0, 9), (2, 1, -1, 10) \rangle, \\ G &= \langle (0, 0, 0, 1), (1, -11, 0, 1), (-1, 1, 0, 3), (0, 0, 1, 7) \rangle. \end{aligned}$$

Trobeu també una base i la dimensió de $F \cap G$ i $F + G$. És cert que $F + G = \mathbb{R}^4$?

Exercici 18 Doneu la dimensió i una base de E , F , $E + F$ i $E \cap F$ en els casos següents:

$$(a) \quad E = \langle (1, 1, -1), (2, 0, -1), (0, 2, -1) \rangle,$$

$$F = \langle (1, 0, -1), (2, 3, 0), (4, 3, -2) \rangle, \text{ subespais vectorials de } \mathbb{R}^3.$$

$$(b) \quad E = \langle (2, -i, 0, 0), (0, \frac{i}{6}, -1, 0), (1, 0, -3, 0) \rangle,$$

$$F = \langle (i, 0, 0, 1), (1, -i, 1, 0), (1, 1, i, 1) \rangle, \text{ subespais vectorials de } \mathbb{C}^4.$$

$$(c) \ E = \{(x, y, z, t) \mid x + y + 2z = 0, 3y + 3z + t = 0, 2x - y - t = 0\},$$

$$F = \{(0, y, z, t) \mid y + z + t = 0\}, \text{ subespais vectorials de } \mathbb{R}^4.$$

$$(d) \ E = \{(x, y, z) \mid 2x = 2y = z\},$$

$$F = \{(x, y, z) \mid x + y = z, 3x + y + z = 0\}, \text{ subespais vectorials de } \mathbb{R}^3.$$

$$(e) \ E = \{(x, y, z, t) \mid x + y - z - t = 0, x = t\},$$

$$F = \{(x, y, z, t) \mid x + z = 2y\}, \text{ subespais vectorials de } \mathbb{R}^4.$$

$$(f) \ E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = z\},$$

$$F = \langle (1, 1, 2, 1), (2, 0, -1, 1) \rangle, \text{ subespais vectorials de } \mathbb{R}^4.$$

Discutiui, en cada cas, si E i F estan en suma directa.

Exercici 19 Considerem dins l'espai de les matrius quadrades $n \times n$, $M_n(\mathbb{R})$, els subconjunts de les matrius simètriques i antisimètriques:

$$S = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}, \quad H = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}.$$

(a) Proveu que són subespais vectorials de $M_n(\mathbb{R})$.

(b) Calculeu la dimensió i una base de S i H .

(c) Proveu que $S \oplus H = M_n(\mathbb{R})$.

Capítol 6

Matrius

Una eina imprescindible per a l'àlgebra lineal és el càlcul matricial. Amb aquest es poden resoldre sistemes d'equacions lineals, donar criteris per saber si un sistema té solució, calcular inverses d'una matriu, donar criteris per saber si una matriu és invertible...

Dins del càlcul matricial hi han dues tècniques de treball diferents i complementàries: les transformacions elementals i els determinants. Totes dues donen algorismes de càlcul; acostumen a ser més eficients els donats pels canvis elementals, però el determinant, apart de tenir un sentit geomètric molt important, té l'avantatge de donar fórmules en termes dels coeficients de la matriu. En aquest capítol estudiarem les transformacions elementals i les seves aplicacions. En un altre capítol estudiarem els determinants.

En tot aquest capítol, K és un cos.

6.1 Transformacions elementals. Matrius elementals

Notació: Sigui $A \in M_{m \times n}(K)$, llavors A té n columnes, $C_1, C_2, \dots, C_n$, i m files, $F_1, F_2, \dots, F_m$. A partir d'ara, quan vulguem descriure la matriu A per les seves columnes, escriurem $A = (C_1, C_2, \dots, C_n)$, i si la volem descriure per les seves files, escriurem $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$. $\diamond$

Sigui $A \in M_{m \times n}(K)$. Les *transformacions elementals* per columnes de la matriu A són d'un dels 3 tipus següents:

Tipus I. Fixats $1 \leq i < j \leq n$, intercanviar les columnes i i j , $C_i \leftrightarrow C_j$:

$$(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) \rightarrow (C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n).$$

Tipus II. Fixats $1 \leq i, j \leq n$ diferents i $\mu \in K$, sumar a la columna j la columna i multiplicada per μ , $C_j \rightarrow C_j + \mu C_i$:

$$(C_1, \dots, C_j, \dots, C_n) \rightarrow (C_1, \dots, C_j + \mu C_i, \dots, C_n).$$

Tipus III. Fixats $1 \leq i \leq n$ i $\lambda \in K \setminus \{0\}$, multiplicar la columna i per λ , $C_i \rightarrow \lambda C_i$:

$$(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) \rightarrow (C_1, \dots, \lambda C_i, \dots, C_n).$$

De manera anàloga es defineixen els tres tipus de transformacions elementals per files de A :

$$F_i \leftrightarrow F_j, \quad F_j \rightarrow F_j + \mu F_i, \quad F_i \rightarrow \lambda F_i.$$

Les matrius obtingudes a partir de la matriu identitat $n \times n$ fent una transformació elemental per columnes (o per files) es diuen *matrius elementals* $n \times n$.

Hi ha tres tipus de matrius elementals:

Tipus I. Fixats $1 \leq i < j \leq n$, la matriu que obtenim en intercanviar les columnes i i j de la matriu identitat és:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & \dots & & 1 \\ & & & & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & 1 & \dots & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

on els uns fora de la diagonal estan a les posicions (i, j) i (j, i) . Observem que aquesta matriu també s'obté com a resultat d'intercanviar les files i i j de la matriu identitat.

Tipus II. Fixats $1 \leq i, j \leq n$ diferents i $\mu \in K$, si a la columna j de la matriu identitat li sumem la columna i multiplicada per μ , obtenim:

$$E_{ij}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on μ està a la posició (i, j) . Notem que aquesta matriu també és el resultat de sumar la fila j multiplicada per μ a la fila i de la matriu identitat.

Tipus III. Fixats $1 \leq i \leq n$ i $\lambda \in K \setminus \{0\}$, en multiplicar la columna i de la matriu identitat per λ obtenim:

$$P_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

on λ està a la posició (i, i) . Observem que aquesta matriu també és el resultat de multiplicar per λ la fila i de la matriu identitat.

El resultat següent relaciona les matrius elementals i les transformacions elementals.

Proposició 6.1.1 *Si sigui $A \in M_{m \times n}(K)$. Llavors, fer una transformació elemental per columnes a la matriu A és el resultat de multiplicar la matriu A per la dreta per la matriu elemental corresponent a la transformació, i fer una transformació elemental per files a la matriu A és el resultat de multiplicar la matriu A per l'esquerra per la matriu elemental corresponent a la transformació. Més concretament:*

CI. Fixats $1 \leq i < j \leq n$, tenim

$$A \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} AT_{ij}$$

CII. Fixats $1 \leq i, j \leq n$ diferents i $\mu \in K$, tenim

$$A \xrightarrow{C_j \rightarrow C_j + \mu C_i} AE_{ij}(\mu)$$

CIII. Fixats $1 \leq i \leq n$ i $\lambda \in K \setminus \{0\}$, tenim

$$A \xrightarrow{C_i \rightarrow \lambda C_i} AP_i(\lambda)$$

FI. Fixats $1 \leq i < j \leq n$, tenim

$$A \xrightarrow{F_i \leftrightarrow F_j} T_{ij}A$$

FII. Fixats $1 \leq i, j \leq n$ diferents i $\mu \in K$, tenim

$$A \xrightarrow{F_i \rightarrow F_i + \mu F_j} E_{ij}(\mu)A$$

FIII. Fixats $1 \leq i \leq n$ i $\lambda \in K \setminus \{0\}$, tenim

$$A \xrightarrow{F_i \rightarrow \lambda F_i} P_i(\lambda)A$$

DEMOSTRACIÓ. La demostració d'aquestes afirmacions no és complicada, però és llarg comprovar directament que cadascun dels productes de matrius dóna el que volem. En el capítol següent podrem donar una demostració més conceptual utilitzant el concepte d'aplicació lineal i el de matriu associada a una aplicació lineal. Ara farem una demostració directa de **CI**, **CII** i **CIII**, els altres productes es calculen de manera similar.

CI. Volem veure que les matrius AT_{ij} i $(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n)$ són iguals. Per demostrar-ho, cal veure que tenen els mateixos components. Per la definició de la matriu $T_{ij} = (t_{kl}) \in M_n(K)$, tenim que

$$t_{kl} = \begin{cases} 1 & \begin{cases} \text{si } k = l, k \neq i \text{ i } k \neq j, \\ \text{o si } k = i \text{ i } l = j, \\ \text{o si } k = j \text{ i } l = i. \end{cases} \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas.} \end{cases}$$

Si $A = (a_{rk})$ i $AT_{ij} = (c_{rl})$, llavors

$$c_{rl} = \sum_{k=1}^n a_{rk} t_{kl} = \begin{cases} a_{ri} t_{ij} = a_{ri} & \text{si } l = j \\ a_{rj} t_{ji} = a_{rj} & \text{si } l = i \\ a_{rl} t_{ll} = a_{rl} & \text{en qualsevol altres cas.} \end{cases}$$

Veiem que, efectivament, la columna j del producte AT_{ij} és la columna i de A , la columna i del producte AT_{ij} és la columna j de A i que la resta de les columnes del producte AT_{ij} són les mateixes que les de A .

CII. Volem veure que les matrius $AE_{ij}(\mu)$ i $(C_1, \dots, C_j + \mu C_i, \dots, C_n)$ coincideixen.

La matriu $E_{ij}(\mu) = (q_{kl}) \in M_n(K)$ amb

$$q_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ \mu & \text{si } k = i \text{ i } l = j \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas.} \end{cases}$$

Si $A = (a_{rk})$ i $AE_{ij}(\mu) = (c_{rl})$, llavors

$$c_{rl} = \sum_{k=1}^n a_{rk} q_{kl} = \begin{cases} a_{rl} q_{ll} = a_{rl} & \text{si } l \neq j \\ a_{rj} q_{jj} + a_{ri} q_{ij} = a_{rj} + \mu a_{ri} & \text{si } l = j. \end{cases}$$

Tenim que, al producte $AE_{ij}(\mu)$, l'única columna que varia respecte de la matriu A és la j , i aquesta queda substituïda per $C_j + \mu C_i$.

CIII. Finalment hem de veure que $AP_i(\lambda) = (C_1, \dots, \lambda C_i, \dots, C_n)$. Si posem $P_i(\lambda) = (p_{kl})$, llavors

$$p_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \neq i \\ \lambda & \text{si } k = l = i \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas.} \end{cases}$$

Si $A = (a_{rk})$ i $AP_i(\lambda) = (c_{rl})$, tenim que

$$c_{rl} = \sum_{k=1}^n a_{rk} p_{kl} = \begin{cases} a_{rl} p_{ll} = a_{rl} & \text{si } l \neq i \\ a_{ri} p_{ii} = \lambda a_{ri} & \text{si } l = i. \end{cases}$$

Per tant, la columna i del producte $AP_i(\lambda)$ és la columna i de A multiplicada per λ . ■

Lema 6.1.2 *Les matrius elementals són invertibles, i la inversa i la transposada d'una matriu elemental són matrius elementals. Més concretament:*

$$(i) \quad T_{ij}^{-1} = T_{ij} \text{ i } T_{ij} = T_{ij}^t.$$

$$(ii) \quad E_{ij}(\mu)^{-1} = E_{ij}(-\mu) \text{ i } E_{ij}(\mu)^t = E_{ji}(\mu).$$

$$(iii) \quad \text{Si } \lambda \in K \setminus \{0\}, P_i(\lambda)^{-1} = P_i(\lambda^{-1}) \text{ i } P_i(\lambda)^t = P_i(\lambda).$$

DEMOSTRACIÓ. Deixem el càlcul de les transposades com a exercici per al lector. Calculem les inverses.

(i) Recordem primer que T_{ij} és la matriu que resulta d'intercanviar les columnes i i j de la matriu identitat. Per la Proposició 6.1.1, el resultat de multiplicar $T_{ij}T_{ij}$ és intercanviar les columnes i i j de la matriu T_{ij} , és a dir, tornem a recuperar la matriu identitat. Per tant $T_{ij}^{-1} = T_{ij}$.

(ii) Recordem que $E_{ij}(\mu)$ és el resultat de sumar la columna i multiplicada per μ a la columna j de la matriu identitat. Per la Proposició 6.1.1, el resultat de multiplicar $E_{ij}(\mu)E_{ij}(-\mu)$ és restar la columna i de $E_{ij}(\mu)$ multiplicada per μ a la columna j de la mateixa matriu, és a dir, recuperem la matriu identitat. De manera similar tenim que $E_{ij}(-\mu)E_{ij}(\mu)$ és la matriu identitat. Per tant $E_{ij}(\mu)^{-1} = E_{ij}(-\mu)$.

(iii) Recordem que $P_i(\lambda)$ és el resultat de multiplicar per λ la columna i de la matriu identitat. Per la Proposició 6.1.1, el resultat de multiplicar $P_i(\lambda)P_i(\lambda^{-1})$ és multiplicar la columna i de $P_i(\lambda)$ per λ^{-1} , per tant aquest producte és la identitat. De manera similar veiem que $P_i(\lambda^{-1})P_i(\lambda)$ és la matriu identitat. Per tant $P_i(\lambda)^{-1} = P_i(\lambda^{-1})$. ■

Exemples 6.1.3 La matriu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ és la matriu elemental 2×2 de tipus I que denotem per T_{12} . Si A és una matriu amb dues columnes, $A = (C_1, C_2)$, llavors, per la Proposició 6.1.1, $AT_{12} = (C_2, C_1)$. Si B és una matriu amb dues files, $B = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$, llavors, per la Proposició 6.1.1, $T_{12}B = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix}$.

Per exemple, si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 2+5i & 7 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{C})$ llavors $AT_{12} = \begin{pmatrix} 1+i & 3 \\ 7 & 2+5i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$. Si $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$, llavors $T_{12}B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu elemental 3×3 de tipus II que denotem per $E_{13}(3)$. Notem que s'obté a partir de la matriu identitat 3×3 fent la transformació elemental que consisteix en sumar la primera columna multiplicada per 3 a la tercera columna. Pel Lema 6.1.2, la inversa d'aquesta matriu és $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{13}(-3)$. La seva transposada és $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{31}(3)$.

Si A és una matriu amb tres columnes, $A = (C_1, C_2, C_3)$, llavors, per la Proposició 6.1.1, $AE_{13}(3) = (C_1, C_2, C_3 + 3C_1)$. Si B és una matriu amb tres files $B = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$, llavors, per la Proposició 6.1.1, $E_{13}(3)B = \begin{pmatrix} F_1 + 3F_3 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$.

Per exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -7 & 10 \\ -5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, llavors $AE_{13}(3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -7 & 16 \\ -5 & 0 & -9 \end{pmatrix}$ i $E_{13}(3)A = \begin{pmatrix} -14 & -1 & 18 \\ 2 & -7 & 10 \\ -5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

La matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és una matriu elemental de tipus III sobre els complexos, que, segons la notació que hem introduït, és la matriu $P_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. La inversa d'aquesta matriu és, pel Lema 6.1.2,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Si A és una matriu amb tres columnes la matriu $AP_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ s'obté multiplicant per $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ la segona columna de A . Si B és una matriu amb tres files, la matriu $P_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)B$ s'obté multiplicant per $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ la segona fila de B . $\diamond$

6.2 Matrius esglaonades.

Es diu que una matriu $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$ està *esglaonada* per columnes si a partir de la primera columna nul·la de A , la resta de columnes són nul·les, i si $a_{i_1 1}, a_{i_2 2}, \dots, a_{i_r r}$ són els primers termes no nuls de les columnes no nul·les de A , llavors

$$i_1 < i_2 < \dots < i_r$$

i $a_{i_1 1} = a_{i_2 2} = \dots = a_{i_r r} = 1$.

Una matriu està esglaonada per files si la seva transposada està esglaonada per columnes.

Exemples 6.2.1

(1) Les matrius

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ -1 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

estan esglaonades per columnes.

(2) Les matrius

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 \\ 3 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

no estan esglaonades per columnes. $\diamond$

Proposició 6.2.2 *Sigui $A \in M_{m \times n}(K)$. Llavors existeix una matriu $Q \in M_n(K)$, producte de matrius elementals, tal que AQ està esglaonada per columnes.*

També existeix una matriu $P \in M_m(K)$, producte de matrius elementals, tal que PA està esglaonada per files.

DEMOSTRACIÓ. Només demostrarem la primera afirmació. Per la Proposició 6.1.1, només cal veure que fent transformacions elementals per columnes a la matriu A , podem obtenir una matriu esglaonada per columnes. Demostrarem el resultat per inducció sobre $m \cdot n$.

Observem que si $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \dots & * \end{pmatrix}$, llavors podem esglaonar per inducció la submatriu $\begin{pmatrix} * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \dots & * \end{pmatrix}$ i per tant també A . Per tant, podem suposar que la primera fila de A és no nul·la.

Sigui $A = (a_{ij})$ i sigui $a_{1j_0} \neq 0$. Multipliquem la columna j_0 de A per $a_{1j_0}^{-1}$ i obtenim

$$A_1 = \begin{pmatrix} * \dots * & 1 & * \dots * \\ & * & \end{pmatrix},$$

amb l'1 a la posició $(1, j_0)$. Ara, sumem la columna C_{j_0} multiplicada per $-a_{1j}$ a la resta de columnes C_j ($j \neq j_0$) de A_1 . Així obtenim $A_2 = \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ & * & \end{pmatrix}$ amb l'1 a la posició $(1, j_0)$.

Si $j_0 \neq 1$, intercanviem les columnes 1 i j_0 de A_2 i obtenim la matriu

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline * & & & A' \end{array} \right).$$

Per inducció podem esglaonar A' i per tant també la matriu A . ■

Aprofitant una mica més les tècniques de la proposició anterior, obtenim el resultat següent.

Teorema 6.2.3 *Donada $A \in M_{m \times n}(K)$ existeixen P, Q matrius invertibles, que són producte de matrius elementals, tals que $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on $I_r \in M_r(K)$ és la matriu identitat.*

DEMOSTRACIÓ. Per la Proposició 6.2.2, existeix una matriu Q , producte de matrius elementals, tal que

$$AQ = A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & * & & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & \vdots & & \vdots \\ * & * & \dots & * & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

on els uns estan a les posicions $(i_1, 1), (i_2, 2), \dots, (i_r, r)$, és una matriu esglaonada per columnes.

Considerem les files $F_{i_r+1}, \dots, F_n$, restant a cadascuna d'aquestes files un múltiple adequat de la fila F_{i_r} , podem aconseguir transformar en zero els components que queden sota l'1 de la fila F_{i_r} . Repetint aquest procediment per als components que queden sota l'1 de la fila $F_{i_{r-1}}$, $F_{i_{r-2}}$ i així successivament fins a F_{i_1} , obtenim una matriu de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

on els uns continuen estan a les posicions $(i_1, 1), (i_2, 2), \dots, (i_r, r)$. Reordenant les

files d'aquesta matriu obtenim una matriu de la forma

$$A_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ & & r) & \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right).$$

Per obtenir la matriu A_2 a partir de la matriu A_1 , hem fet servir transformacions elementals per files. Per la Proposició 6.1.1, existeix una matriu P , producte de matrius elementals, tal que $PA_1 = A_2$.

Com que $A_1 = AQ$, tenim

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right). \blacksquare$$

Observació 6.2.4 Sigui $A \in M_{m \times n}(K)$. Si considerem la matriu $(I_m | A)$ i li fem una transformació elemental per files, és a dir, multipliquem $(I_m | A)$ per l'esquerra per una matriu elemental E_1 , obtenim la matriu $E_1(I_m | A) = (E_1 | E_1A)$. Notem que E_1A és el resultat de fer la mateixa transformació elemental per files, però només a la matriu A .

Si a la matriu A li volem fer una successió de r transformacions elementals per files, i cadascuna d'aquestes correspon a multiplicar per una matriu elemental E_i , $i = 1, \dots, r$, llavors el resultat d'aquestes transformacions serà el producte de matrius $E_r \dots E_1A$. Si fem aquestes mateixes transformacions a la matriu $(I_m | A)$, dóna com a resultat $(E_r \dots E_1 | E_r \dots E_1A)$.

Si el que volem fer són r transformacions elementals per columnes, i cadascuna d'aquestes correspon a multiplicar per una matriu elemental E_i , $i = 1, \dots, r$, llavors la matriu que queda és $AE_1 \dots E_r$. Si fem aquestes mateixes transformacions elementals a la matriu $\left(\begin{array}{c} A \\ I_n \end{array} \right)$, el resultat és la matriu

$$\left(\begin{array}{c} AE_1 \dots E_r \\ E_1 \dots E_r \end{array} \right). \diamond$$

Tal com veurem en l'exemple següent, aquestes observacions són molt útils per “guardar” les transformacions elementals que es fan a una matriu.

Exemple 6.2.5 Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Fem transformacions elementals per columnes per esglaonar-la i guardem els canvis

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 \rightarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \rightarrow C_3 - 2C_1 \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} C_3 \rightarrow C_3 + C_2 \\ C_2 \rightarrow \frac{1}{3}C_2 \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{2}{3} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{A_1}{Q} \right).$$

A_1 és una matriu esglaonada per columnes. Per l'observació 6.2.4, $AQ = A_1$ i Q és producte de les matrius elementals corresponents als canvis elementals que hem fet. Escrivint les matrius elementals corresponents a les transformacions que hem fet i multiplicant-les seguint l'ordre en que les hem fet, tenim que

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Continuem fent canvis per files a A_1 , guardant els canvis,

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
F_3 \rightarrow F_3 - \frac{2}{3}F_2 \\
F_4 \rightarrow F_4 - F_2 \\
\longrightarrow
\end{array}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & \\
0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 &
\end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1 \\
F_4 \rightarrow F_4 + F_1 \\
\longrightarrow
\end{array}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
-3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 &
\end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cccc}
P & 1 & 0 & 0 & \\
& 0 & 1 & 0 & \\
& 0 & 0 & 0 & \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{array} \right)$$

Per l'observació 6.2.4, $PA_1 = PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i la matriu P és producte de matrius elementals. De fet, P és igual al producte de matrius

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \diamond$$

6.3 Rang d'una matriu. Matrius invertibles

Lema 6.3.1 *Sigui A una matriu de $M_{m \times n}(K)$. Sigui $P \in M_m(K)$, i sigui $Q \in M_n(K)$. Llavors:*

- (i) *La dimensió del subespai vectorial de $M_{m \times 1}(K)$ generat per les columnes de A és més gran o igual que la dimensió del subespai vectorial de $M_{m \times 1}(K)$ generat per les columnes de PA . Si P és invertible, les dues dimensions coincideixen.*
- (ii) *La dimensió del subespai vectorial de K^n generat per les files de A és més gran o igual que la dimensió del subespai vectorial de K^n generat per les files de AQ . Si Q és invertible, les dues dimensions coincideixen.*

DEMOSTRACIÓ. Demostrarem només (i) perquè l'enunciat per a files és demostra de manera anàloga.

Siguin $C_1, \dots, C_n$ les columnes de A . Llavors $PC_1, \dots, PC_n$ són les columnes de PA . Sigui $W = \langle C_1, \dots, C_n \rangle$, i sigui $W' = \langle PC_1, \dots, PC_n \rangle$. Pel Corol·lari 5.1.6, existeix $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ tal que $B = (C_{i_1}, \dots, C_{i_r})$ és una base de W . Demostrarem que $B' = (PC_{i_1}, \dots, PC_{i_r})$ genera W' , per tant, pel Corol·lari 5.2.7, $\dim(W') \leq r$.

Pel l'observació 5.1.3, només cal veure que, per a tot $j \in \{1, \dots, n\}$, PC_j s'escriu com a combinació lineal dels vectors de B' . Sigui $j \in \{1, \dots, n\}$. Com que B és

una base de W , existeixen escalars $\beta_1, \dots, \beta_r$ tals que $C_j = \beta_1 C_{i_1} + \dots + \beta_r C_{i_r}$. Si multipliquem aquesta igualtat per l'esquerra per P obtenim,

$$PC_j = \beta_1 PC_{i_1} + \dots + \beta_r PC_{i_r},$$

i per tant PC_j és combinació lineal dels elements de B' .

Suposem ara que P és invertible i que tenim una combinació lineal $\alpha_1 PC_{i_1} + \dots + \alpha_r PC_{i_r} = 0$. Multiplicant per P^{-1} , obtenim

$$\begin{aligned} 0 &= P^{-1}(\alpha_1 PC_{i_1} + \dots + \alpha_r PC_{i_r}) = \\ &= \alpha_1 P^{-1}PC_{i_1} + \dots + \alpha_r P^{-1}PC_{i_r} = \alpha_1 C_{i_1} + \dots + \alpha_r C_{i_r}. \end{aligned}$$

Com que els vectors de B són linealment independents, $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$ i, en conseqüència, els vectors de B' també són linealment independents. Com que, en aquest cas, B' és una família de generadors de W' i linealment independent, és una base de W' . Per tant $\dim(W') = r = \dim(W)$. ■

Lema 6.3.2 *Sigui A una matriu de $M_{m \times n}(K)$. Sigui $P \in M_m(K)$ producte de matrius elementals, i sigui $Q \in M_n(K)$ producte de matrius elementals. Llavors:*

- (i) *El subespai vectorial de $M_{m \times 1}(K)$ generat per les columnes de A és el mateix que el subespai vectorial de $M_{m \times 1}(K)$ generat per les columnes de AQ .*
- (ii) *El subespai vectorial de K^n generat per les files de A és el mateix que el subespai vectorial de K^n generat per les files de PA .*

DEMOSTRACIÓ. Veurem només (i) perquè l'enunciat per a files es demostra de manera similar. Siguin $C_1, \dots, C_n$ les columnes de A , i sigui $W = \langle C_1, \dots, C_n \rangle$. Com que Q és producte de matrius elementals, només cal demostrar que, quan multipliquem A per la dreta per una matriu elemental, el subespai vectorial que generen les columnes és el mateix W . Per la Proposició 6.1.1, només cal veure que si fem una transformació elemental a les columnes de A , el subespai vectorial que generen continua essent W .

Això és clar per a les transformacions del tipus I i III, per veure-ho per a les transformacions del tipus II, només cal aplicar la Proposició 5.1.7. ■

Teorema 6.3.3 *Sigui A una matriu de $M_{m \times n}(K)$. La dimensió del subespai vectorial de K^n que generen les files de A és la mateixa que la dimensió del subespai vectorial de $M_{m \times 1}(K)$ que generen les columnes de A .*

DEMOSTRACIÓ. Pel Teorema 6.2.3, existeixen matrius P i Q producte de matrius elementals tals que $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on $I_r \in M_r(K)$ és la matriu identitat. És clar que la dimensió del subespai vectorial generat per les files de la matriu $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és r i que aquesta és la mateixa que la dimensió del subespai vectorial generat per les columnes d'aquesta matriu. Pels lemes 6.3.1 i 6.3.2, la dimensió del subespai vectorial generat per les files de A és r i la dimensió del subespai vectorial generat per les columnes de A és també r . ■

Sigui A una matriu de $M_{m \times n}(K)$. Definim el *rang* de A com la dimensió del subespai vectorial generat per les columnes de A , o també, a la vista del Teorema 6.3.3, com la dimensió del subespai vectorial generat per les files de A .

Ara podem caracteritzar les matrius invertibles.

Teorema 6.3.4 *Sigui $A \in M_n(K)$. Les condicions següents són equivalents:*

- (i) A és invertible.
- (ii) El rang de A és n .
- (iii) Les columnes de A formen una base de $M_{n \times 1}(K)$.
- (iv) Les files de A formen una base de K^n .
- (v) A és producte de matrius elementals.
- (vi) Existeix $B \in M_n(K)$ tal que $AB = I_n$.
- (vii) Existeix $B \in M_n(K)$ tal que $BA = I_n$.

DEMOSTRACIÓ. Si A és una matriu invertible, llavors A^{-1} també ho és. Com que $A^{-1}A = I_n$ i les columnes de la matriu identitat generen tot l'espai vectorial $M_{n \times 1}(K)$, pel Lema 6.3.1, A té rang n . Pel Teorema 6.3.3, (ii), (iii) i (iv) són equivalents.

Suposem ara que A és una matriu de rang n . Pel Teorema 6.2.3, existeixen matrius P i Q , productes de matrius elementals, tals que $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pels lemes 6.3.1 i 6.3.2, $r = n$, llavors $PAQ = I_n$. Com que P i Q són productes de matrius elementals, i pel Lema 6.1.2, les matrius elementals són invertibles, i un producte de matrius invertibles és una matriu invertible, aleshores $A = P^{-1}Q^{-1}$. Pel Lema 6.1.2, la inversa d'una matriu elemental és també una matriu elemental, per tant P^{-1} i Q^{-1} són producte de matrius elementals. D'aquí deduïm que A és producte de matrius elementals.

És clar que (v) implica (i) perquè, pel Lema 6.1.2, les matrius elementals són invertibles, i un producte de matrius invertibles és una matriu invertible.

Si A és una matriu invertible, és clar que se satisfan (vi) i (vii), prenent com a B la inversa de A . Si tenim una matriu B tal que $BA = I_n$ llavors, pel Lema 6.3.1, la dimensió del subespai vectorial generat per les columnes de A és més gran o igual que n . Com que aquest és un subespai vectorial de $M_{n \times 1}(K)$ que té dimensió n , tenim que les columnes de A formen una base de $M_{n \times 1}(K)$. Això demostra que (vii) implica (iii). De manera anàloga podem veure que (vi) implica (iv). ■

Ara podem reescriure el Teorema 6.2.3 de la manera següent.

Corol·lari 6.3.5 *Donada $A \in M_{m \times n}(K)$ existeixen P, Q matrius invertibles tals que $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on $I_r \in M_r(K)$ és la matriu identitat i r és el rang de A . ■*

Observació 6.3.6 Si una matriu $A \in M_{m \times n}(K)$ està esglaonada per columnes, llavors el rang de A és igual al nombre de columnes no nul·les de A . Anàlogament per files. ◇

Aquesta observació i el Teorema 6.3.4 ens permeten decidir si una matriu és invertible i, en cas afirmatiu, calcular la seva inversa.

Si esglaonem per columnes una matriu A $n \times n$, llavors aquesta matriu és invertible si i només si totes les columnes de la matriu esglaonada són no nul·les. Això vol dir que A és invertible si i només si la matriu esglaonada és una matriu de la forma

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \dots & * & 1 \end{pmatrix}.$$

Sumant a cada columna un múltiple adequat de l'última columna, podem aconseguir una matriu tal que la seva última fila és $(0, \dots, 0, 1)$. Sumant a les altres columnes un múltiple adequat de la penúltima columna, podem obtenir una matriu tal que les seves dues últimes files són $(0, \dots, 0, 1, 0)$ i $(0, \dots, 0, 1)$. Si repetim aquest procediment amb les altres files, obtenim la matriu identitat.

Per la Proposició 6.2.2, existeix una matriu Q invertible tal que $AQ = A_1$, com que, per obtenir la matriu identitat, hem continuat fent canvis elementals per columnes, existeix una matriu Q' invertible tal que $AQQ' = A_1Q' = I_n$. Pel Teorema 6.3.4, podem concloure que A és invertible i que $A^{-1} = QQ'$.

En aquest argument, per determinar la inversa, només hem utilitzat canvis elementals per columnes, i com que, per l'observació 6.2.4, sabem com guardar el

producte d'aquests canvis, de fet, tenim un algorisme per calcular la inversa d'una matriu. Veiem un exemple.

Exemple 6.3.7 Considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} -1+i & 2i \\ -i & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Esglaonem primer la matriu i guardem els canvis elementals que fem,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -1+i & 2i \\ -i & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i & 4 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i & 5+i \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & -1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i & 1 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & -\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i \\ 0 & \frac{5}{26} - \frac{1}{26}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ Q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Com que A_1 té rang 2, pel Lema 6.3.2, A té rang 2. Pel Teorema 6.3.4, A és invertible.

Continuem fent canvis elementals per columnes,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i & 1 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & -\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i \\ 0 & \frac{5}{26} - \frac{1}{26}i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{6}{13} - \frac{4}{13}i & -\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i \\ \frac{1}{13} - \frac{3}{26}i & \frac{5}{26} - \frac{1}{26}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 \\ QQ' \end{pmatrix}.$$

Com que, per l'observació 6.2.4, $AQQ' = I_2$, tenim que

$$A^{-1} = QQ' = \begin{pmatrix} -\frac{6}{13} - \frac{4}{13}i & -\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i \\ \frac{1}{13} - \frac{3}{26}i & \frac{5}{26} - \frac{1}{26}i \end{pmatrix}. \quad \diamond$$

El Lema 6.3.2 combinat amb la Proposició 6.2.2 donen un mètode per calcular la base i la dimensió d'un subespai vectorial de K^n a partir d'una família generadora del subespai vectorial. Veiem-ne un exemple.

Exemple 6.3.8 Considerem el subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$,

$$W = \langle (1, 3, 2, 2), (-1, 0, 0, 1), (2, 3, 2, 1) \rangle.$$

Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pels càlculs que hem fet a l'exemple 6.2.5, sabem que, fent transformacions elementals per columnes a la matriu A , obtenim la matriu

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{2}{3} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pel Lema 6.3.2, el subespai vectorial generat per les columnes de A és el mateix que el subespai vectorial generat per les columnes de A_1 . Per tant tenim que W és pot generat per $v_1 = (1, 3, 2, 2)$ i $v_2 = (0, 1, \frac{2}{3}, 1)$, que són dos vectors linealment independents. Podem concloure doncs que (v_1, v_2) és una base de W i que W té dimensió 2. $\diamond$

6.4 Sistemes d'equacions lineals.

Considerem un *sistema d'equacions lineals*

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\}$$

on $a_{ij} \in K$, $b_i \in K$ i $x_1, \dots, x_n$ són les incògnites. Podem escriure aquest sistema en forma matricial

$$AX = b,$$

on $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ i $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Un sistema de la forma $AX = 0$ es diu que és *homogeni*.

Donat un sistema $AX = b$, el sistema $AX = 0$ es diu que és el seu sistema homogeni associat. La matriu A és la *matriu del sistema* i la matriu $(A \mid b)$ és la *matriu ampliada del sistema*.

Resoldre un sistema és determinar el conjunt S de totes les seves solucions, és a dir,

$$S = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \right\}.$$

Diem que un sistema és compatible si té alguna solució.

Els sistemes homogenis sempre són compatibles perquè sempre tenen la solució $X = 0$. De fet, el conjunt de solucions d'un sistema homogeni sobre K amb n incògnites és un subespai vectorial de K^n .

Siguin $C_1, \dots, C_n$ les columnes de la matriu A . Dir que el sistema $AX = b$ té solució és equivalent a dir que b és combinació lineal de $C_1, \dots, C_n$. Per tant, el sistema té solució si i només si $W_1 = \langle C_1, \dots, C_n \rangle$ és igual a $W_2 = \langle C_1, \dots, C_n, b \rangle$. Com que sempre és cert que $W_1 \subseteq W_2$, el sistema té solució si i només si $\dim W_1 = \dim W_2$. Com que $\dim W_1$ és el rang de A i $\dim W_2$ és el rang de $(A \mid b)$, tenim demostrat el resultat següent.

Teorema 6.4.1 *Sigui $A \in M_{m \times n}(K)$, sigui $b \in M_{m \times 1}(K)$. El sistema $AX = b$ és compatible si i només si el rang de la matriu A coincideix amb el rang de la matriu ampliada $(A \mid b)$. ■*

Un cop vist que un sistema és compatible, volem determinar totes les seves solucions. El lema següent és un primer pas en aquesta direcció.

Lema 6.4.2 *Siguin $A \in M_{m \times n}(K)$, $b \in M_{m \times 1}(K)$ i P una matriu invertible $n \times n$ sobre K . Llavors les solucions del sistema $AX = b$ són les mateixes que les solucions del sistema $PAX = Pb$.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui S_1 el conjunt de solucions de $AX = b$ i S_2 el conjunt de solucions de $PAX = Pb$, volem veure que $S_1 = S_2$.

Si $(x_1, \dots, x_n) \in S_1$ llavors $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$. Si multipliquem aquesta igualtat per l'esquerra per P , obtenim $PA \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Pb$, i per tant $(x_1, \dots, x_n) \in S_2$.

Si $(x_1, \dots, x_n) \in S_2$ llavors $PA \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Pb$. Si multipliquem aquesta igualtat per l'esquerra per P^{-1} , obtenim $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$, i per tant $(x_1, \dots, x_n) \in S_1$. Això demostra que $S_1 = S_2$. ■

Per la Proposició 6.2.2, fent transformacions elementals per files podem esglaonar la matriu $(A \mid b)$ per files. Llavors obtenim una matriu $(A' \mid b')$ i una matriu invertible P tals que $(A' \mid b') = P(A \mid b) = (PA \mid Pb)$. Pel Lema 6.4.2, les solucions del sistema que té per matriu ampliada $(A \mid b)$ són les mateixes que les del sistema amb matriu ampliada $(A' \mid b')$.

Si el sistema té solució llavors el rang de A coincideix amb el rang de $(A \mid b)$. Pel Lema 6.3.1, el rang de A coincideix amb el de A' i el de $(A \mid b)$ coincideix amb el de

$(A'|b')$. Per tant, el sistema $A'X = b'$ que volem resoldre és de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & * & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \boxed{1} & * & \dots & * \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \boxed{1} & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

on els uns estan a les posicions $(1, s_1), (2, s_2), \dots, (r, s_r)$, amb $s_1 < \dots < s_r$.

O, en notació d'equacions,

$$\left. \begin{aligned} x_{s_1} + a'_{1s_1+1}x_{s_1+1} + \dots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ x_{s_2} + a'_{2s_2+1}x_{s_2+1} + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ &\dots \\ x_{s_r} + a'_{rs_r+1}x_{s_r+1} + \dots + a'_{rn}x_n &= b'_r \end{aligned} \right\}$$

Per tant

$$\begin{aligned} x_{s_1} &= b'_1 - a'_{1s_1+1}x_{s_1+1} - \dots - a'_{1n}x_n \\ x_{s_2} &= b'_2 - a'_{2s_2+1}x_{s_2+1} - \dots - a'_{2n}x_n \\ &\dots \\ x_{s_r} &= b'_r - a'_{rs_r+1}x_{s_r+1} - \dots - a'_{rn}x_n. \end{aligned}$$

D'aquestes fórmules veiem que els valors de $x_{s_1}, \dots, x_{s_r}$ estan determinats pels valors que tinguin les incògnites x_i , amb $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{s_1, s_2, \dots, s_r\}$. Així la solució general del sistema es pot posar en funció dels valors arbitraris que donem a les incògnites x_i , amb $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{s_1, s_2, \dots, s_r\}$, que podem agafar com a paràmetres lliures.

Tal com hem resolt el sistema, veiem que la solució depèn de $n - r$ paràmetres, on n és el nombre d'incògnites i r és el rang de la matriu associada al sistema. Tot seguit veurem que aquest nombre de paràmetres del qual depèn la solució general del sistema és el més petit possible. Comencem pels sistemes homogenis.

Proposició 6.4.3 *Sigui $A \in M_{m \times n}(K)$ una matriu de rang r . La dimensió del espai vectorial de les solucions del sistema homogeni $AX = 0$ és $n - r$.*

DEMOSTRACIÓ. Pel Corol·lari 6.3.5, existeixen matrius invertibles P i Q tals que $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on r és el rang de la matriu A . Pel Lema 6.4.2, el sistema homogeni $AX = 0$ té les mateixes solucions que el sistema $PAX = 0$. Siguin $C_1, \dots, C_n$ les columnes de Q . Com que $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, tenim que $PAC_i = 0$, per a $i = r+1, \dots, n$.

Per tant les $n - r$ últimes columnes de Q donen solucions del sistema $AX = 0$. A més, aquestes columnes són linealment independents perquè, pel Teorema 6.3.4, $(C_1, \dots, C_n)$ és una base de $M_{n \times 1}(K)$. Això demostra que l'espai vectorial de les solucions de $AX = 0$ té com a mínim dimensió $n - r$.

Sigui $C \in M_{n \times 1}(K)$ tal que $AC = 0$. Suposem que

$$C \notin \langle C_{r+1}, \dots, C_n \rangle.$$

Llavors $C, C_{r+1}, \dots, C_n$ són l.i. i podem ampliar aquesta família de vectors a una base $(C'_1, \dots, C'_{r-1}, C, C_{r+1}, \dots, C_n)$ de $M_{n \times 1}(K)$. Sigui $Q' \in M_n(K)$ la matriu que té per columnes $C'_1, \dots, C'_{r-1}, C, C_{r+1}, \dots, C_n$. Com que Q' té rang n , pel Teorema 6.3.4, Q' és invertible. Pels lemes 6.3.1 i 6.3.2, PAQ' té rang r , però

$$PAQ' = (PAC'_1, \dots, PAC'_{r-1}, 0, \dots, 0),$$

que té rang $< r$, una contradicció. Per tant la columna C és combinació lineal de les columnes $C_{r+1}, \dots, C_n$. Podem concloure doncs que la dimensió de l'espai vectorial de les solucions de $AX = 0$ és $n - r$. ■

Observem que si X_1 és una solució del sistema $AX = b$ (és a dir $AX_1^t = b$), i Y és una solució del sistema homogeni associat (és a dir $AY^t = 0$), llavors $X_2 = X_1 + Y$ també és solució del sistema $AX = b$. En general, si X_1 i X_2 són dues solucions diferents del sistema $AX = b$, llavors $A(X_2 - X_1)^t = 0$, és a dir, $X_2 - X_1$ és solució del sistema homogeni associat. Això vol dir que si X_1 és una solució del sistema $AX = b$, llavors tota altra solució $X_2 = X_1 + (X_2 - X_1)$ és un element de $X_1 + \{\text{solucions del sistema homogeni associat}\}$. Per tant totes les solucions del sistema són de la forma una solució particular més una solució del sistema homogeni associat. Si $(Y_1, \dots, Y_{n-r})$ és una base de les solucions del sistema homogeni associat, i X_1 és una solució del sistema $AX = b$, llavors el conjunt de totes les solucions del sistema és

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid (x_1, \dots, x_n) = X_1 + \lambda_1 Y_1 + \dots + \lambda_{n-r} Y_{n-r}, \\ \lambda_i \in K, i = 1, \dots, n - r\}.$$

El nombre $n - r$ és el nombre de graus de llibertat del sistema. Aquest és el nombre mínim de paràmetres del qual depenen les solucions del sistema.

La demostració de la Proposició 6.4.3 dóna un mètode per solucionar sistemes d'equacions lineals homogenis fent servir canvis elementals per columnes. Veiem-ho en un exemple.

Exemple 6.4.4 Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R}).$$

Volem resoldre el sistema $AX = 0$. Per fer-ho esglaonem la matriu per columnes i guardem els canvis que fem

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -5 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} A_1 \\ Q \end{array} \right).$$

Veiem que el rang de A_1 és dos, per tant, per la Proposició 6.3.1, A també té rang 2. Per la Proposició 6.4.3, la dimensió de les solucions d'aquest sistema homogeni és $4 - 2 = 2$. Com que $AQ = A_1$, tenim que $A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i que $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per tant $(-2, 1, 1, 0)$ i $(0, 0, 0, 1)$ són solucions del sistema, a més són linealment independents perquè provenen de columnes d'una matriu invertible. Com que l'espai vectorial de les solucions té dimensió 2, veiem que el conjunt de solucions del sistema és $\langle (-2, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$, és a dir, són els vectors de la forma $\lambda_1(-2, 1, 1, 0) + \lambda_2(0, 0, 0, 1)$ on λ_1 i λ_2 són elements qualssevol de $\mathbb{R}$. $\diamond$

6.5 Exercicis

Exercici 1 Fixem la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- Doneu una matriu elemental E tal que en calcular el producte EA intercanviem la segona i la tercera fila de la matriu A .
- Doneu una matriu elemental E tal que el producte EA sigui el resultat de fer l'operació elemental de sumar a la primera fila de A quatre vegades la segona fila.
- Doneu una matriu elemental E tal que el producte AE sigui el resultat d'intercanviar la segona i la tercera columna de la matriu A .
- Doneu una matriu elemental E tal que el producte EA sigui el resultat de multiplicar per $\frac{-2}{3}$ la segona fila de A .

- (e) Doneu una matriu elemental E tal que el producte AE sigui el resultat de sumar la primera columna de A multiplicada per $\frac{1}{4}$ a la tercera columna de A .
- (f) Doneu una matriu elemental E tal que el producte AE sigui el resultat de multiplicar la tercera columna de la matriu A per -17 .
- (g) Calculeu la inversa de cadascuna les matrius elementals anteriors. Quines operacions elementals fan aquestes matrius que heu trobat?

Exercici 2 Esclaoneu per files les matrius següents:

$$A_1 = \begin{pmatrix} i & 5 & -i & 1 \\ 2 & 4i & 1 & 0 \\ 1 & 9i & 2 & i \\ 2 & 0 & i & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quin rang tenen? Trobeu matrius invertibles P_j i Q_j tals que

$$P_j A_j Q_j = \begin{pmatrix} I_{r_j} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on I_{r_j} denota una matriu identitat $r_j \times r_j$, i r_j és el rang de A_j , per a $j = 1, 2$.

Exercici 3 Usant transformacions elementals per files, decideu si les matrius següents són o no invertibles, i en cas afirmatiu, calculeu les seves inverses.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 11 & 6 & 5 \\ -1 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & -i & i & -1 \\ i & 0 & -1 & 0 \\ i & 2 & -i & 0 \\ i & i & i & i \end{pmatrix}.$$

Exercici 4 Sigui K un cos. Demostreu que una matriu $A \in M_n(K)$ no és invertible si i només si existeix una matriu $0 \neq B \in M_n(K)$ tal que $AB = 0$.

Exercici 5 Resoleu els sistemes d'equacions sobre $\mathbb{C}$ següents:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 5y - z + 3t = -1 \\ 2x + 4y + z = 0 \\ -3x + 2y + 6z + 2t = 1 \\ 2x + 11y + 6z + 5t = 0 \\ -x + 6y + 7z + 2t = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} ix + y - z = 3 + i \\ 2x + 4y - iz = 14 \\ -3ix + 2y + 6z = 6 - 3i \end{array} \right\}$$

Exercici 6 Decidiu en funció dels paràmetres a i b si els sistemes d'equacions sobre $\mathbb{R}$ següents són o no compatibles. En cas afirmatiu, trobeu la solució i els graus de llibertat en funció dels paràmetres.

$$\left. \begin{array}{rcl} ax + y + z & = & 1 \\ x + ay + z & = & 0 \\ x + y + az & = & 2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{rcl} x + ay + az + bt & = & 3 \\ -x - y + bz + t & = & 0 \\ -x - ay - bz & = & a \\ -2x - (1+a)y + (1+a)t & = & 1 \end{array} \right\}$$

Exercici 7 Sigui $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Decidiu si existeix una matriu $A \in M_3(\mathbb{C})$ tal que

(a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

En cas afirmatiu determineu A . És única?

Exercici 8 Sigui K un cos i sigui $A \in M_n(K)$. Diem que $X \in M_n(K)$ és una quasi-inversa de A si $AXA = A$.

(a) Proveu que si A és invertible llavors A només té una quasi-inversa i aquesta és A^{-1} .

(b) Considerem una matriu de la forma $A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(K)$. Proveu que $A^2 = A$. Podeu donar una quasi-inversa de la matriu A ? N'hi han d'altres?

(c) Demostreu que tota matriu $A \in M_n(K)$ té quasi-inversa.

Exercici 9 Calculeu dues quasi-inverses diferents de cadascuna de les matrius següents.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercici 10 Sigui $n > 1$ i K un cos. Fixem $A \in M_n(K)$. Demostreu que el conjunt

$$W = \{B \in M_n(K) \mid AB = BA\}$$

és un subespai vectorial de $M_n(K)$. Proveu que $W \neq 0$. Pot ser que $W = M_n(K)$?

Capítol 7

Aplicacions lineals

En el capítol 2, déiem que, per comparar dues estructures algebraïques del mateix tipus, s'estudien els seus homomorfismes. Aquí introduïrem els homomorfismes d'espais vectorials, que habitualment es diuen aplicacions lineals.

En tot aquest capítol, K és un cos.

Siguin V_1 i V_2 dos K -espais vectorials. Una *aplicació lineal* de V_1 a V_2 és una aplicació $f: V_1 \rightarrow V_2$ tal que

- (1) $f(u+v) = f(u) + f(v)$, per a tot $u, v \in V_1$, és a dir, f és un morfisme de grups,
- (2) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$, per a tot $u \in V_1$ i tot $\alpha \in K$.

Proposició 7.0.1 *Siguin V_1, V_2 K -espais vectorials. Una aplicació $f: V_1 \rightarrow V_2$ és lineal si i només si*

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v),$$

per a tot $u, v \in V_1$ i tot $\alpha, \beta \in K$.

DEMOSTRACIÓ. Si f és una aplicació lineal, $u, v \in V_1$ i $\alpha, \beta \in K$, llavors, per la propietat (1) de la definició, $f(\alpha u + \beta v) = f(\alpha u) + f(\beta v)$ i, per la propietat (2), $f(\alpha u) + f(\beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$.

Per demostrar el recíproc, suposem que f és una aplicació tal que

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v),$$

per a tot $u, v \in V_1$ i tot $\alpha, \beta \in K$. Si prenem $\alpha = \beta = 1$, veiem que f satisfà la propietat (1); si posem $\beta = 0$, obtenim que f satisfà la propietat (2). ■

Exemples 7.0.2

(1) Sigui $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$. L'aplicació $f: K^n \rightarrow K^m$, definida per

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)^t = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \right).$$

Fent servir les propietats del producte, de la suma i de la transposició de matrius, es comprova fàcilment que f és lineal. Veurem que totes les aplicacions lineals de K^n a K^m són d'aquesta forma.

(2) Sigui $g: M_n(K) \rightarrow M_n(K)$ l'aplicació definida per $f(A) = A^t$. Per les propietats de la transposició de matrius, g és una aplicació lineal.

(3) Sigui $V = \{p(x) \in K[x] \mid \text{gr}(p(x)) \leq n\}$. Fixat $a \in K$, l'aplicació $h: V \rightarrow K$ definida per $h(p(x)) = p(a)$ és lineal (comproveu-ho!). $\diamond$

Una aplicació lineal injectiva es diu *monomorfisme*; una exhaustiva, *epimorfisme*, i una bijectiva, *isomorfisme*.

Una aplicació lineal d'un K -espai vectorial V en ell mateix es diu *endomorfisme* de V . Un endomorfisme de V bijectiu es diu *automorfisme* de V .

Direm que dos K -espais vectorials V_1 i V_2 són *isomorfs* si existeix un isomorfisme entre ells. Escriurem $V_1 \cong V_2$ per denotar que V_1 i V_2 són isomorfs.

En el capítol 2, déiem que el problema de classificar els grups mòdul la relació d'isomorfia és molt difícil. Més endavant veurem que el problema de classificar K -espais vectorials mòdul la relació d'isomorfia és bastant més fàcil, i, de fet, donarem la solució en el cas de dimensió finita.

7.1 L'espai vectorial de totes les aplicacions lineals

En tota aquesta secció, V_1 , V_2 i V_3 són K -espais vectorials.

Sigui $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ el conjunt de totes les aplicacions lineals de V_1 a V_2 . Com hem vist a l'exemple 5.0.2(4), el conjunt $\mathcal{F}(V_1, V_2)$ de totes les aplicacions de V_1 a V_2 amb la suma d'aplicacions i el producte per escalars és un K -espai vectorial. Ara veurem que $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ és un subespai vectorial de $\mathcal{F}(V_1, V_2)$.

Lema 7.1.1 *Siguin $f, g \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ i $\lambda \in K$. Llavors $f + g$ i λf són aplicacions lineals.*

DEMOSTRACIÓ. Siguin $u, v \in V_1$ i $\alpha, \beta \in K$. Ara tenim

$$\begin{aligned}(f + g)(\alpha u + \beta v) &= f(\alpha u + \beta v) + g(\alpha u + \beta v) \quad (\text{per la definició de } f + g) \\ &= \alpha f(u) + \beta f(v) + \alpha g(u) + \beta g(v) \quad (\text{ja que } f \text{ i } g \text{ són lineals}) \\ &= \alpha(f + g)(u) + \beta(f + g)(v).\end{aligned}$$

Per la Proposició 7.0.1, $f + g$ és lineal. També tenim que

$$\begin{aligned}(\lambda f)(\alpha u + \beta v) &= \lambda(f(\alpha u + \beta v)) \quad (\text{per la definició de } \lambda f) \\ &= \lambda(\alpha f(u) + \beta f(v)) \quad (\text{ja que } f \text{ és lineal}) \\ &= \alpha(\lambda f)(u) + \beta(\lambda f)(v).\end{aligned}$$

Per la Proposició 7.0.1, λf és lineal. ■

L'aplicació $0: V_1 \rightarrow V_2$, definida per $0(v) = 0$, per tot $v \in V_1$, és lineal (comproveu-ho!). Aquesta aplicació satisfà que $0 + f = f + 0 = f$, per tota $f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, per tant l'aplicació 0 és l'element neutre de la suma de $\mathcal{L}(V_1, V_2)$.

Com a conseqüència de la Proposició 5.0.3, obtenim el resultat següent.

Proposició 7.1.2 $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ és un subespai vectorial de $\mathcal{F}(V_1, V_2)$. ■

Proposició 7.1.3 Siguin $f: V_1 \rightarrow V_2$ i $g: V_2 \rightarrow V_3$ aplicacions lineals. Llavors:

(i) Si f és bijectiva, f^{-1} és lineal i bijectiva.

(ii) $g \circ f$ és lineal.

DEMOSTRACIÓ. (i) Suposem que f és bijectiva. Com que la inversa d'una aplicació bijectiva sempre és bijectiva, només cal que demostrem que f^{-1} és lineal. Siguin $u, v \in V_2$ i $\alpha, \beta \in K$. Com que f és lineal, tenim

$$f(\alpha f^{-1}(u) + \beta f^{-1}(v)) = \alpha f(f^{-1}(u)) + \beta f(f^{-1}(v)) = \alpha u + \beta v.$$

Per tant $f^{-1}(\alpha u + \beta v) = \alpha f^{-1}(u) + \beta f^{-1}(v)$. Per la Proposició 7.0.1, f^{-1} és lineal.

(ii) Siguin $u, v \in V_1$ i $\alpha, \beta \in K$. Ara tenim

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\alpha u + \beta v) &= g(f(\alpha u + \beta v)) \\ &= g(\alpha f(u) + \beta f(v)) \quad (\text{ja que } f \text{ és lineal}) \\ &= \alpha g(f(u)) + \beta g(f(v)) \quad (\text{ja que } g \text{ és lineal}) \\ &= \alpha(g \circ f)(u) + \beta(g \circ f)(v).\end{aligned}$$

Per la Proposició 7.0.1, $g \circ f$ és lineal. ■

Sigui V un K -espai vectorial. Llavors, per la Proposició 7.1.2, el conjunt dels endomorfismes de V ,

$$\text{End}_K(V) = \{f: V \rightarrow V \mid f \text{ és lineal}\},$$

és un K -espai vectorial. A més, per la Proposició 7.1.3, sobre $\text{End}_K(V)$ tenim l'operació composició d'aplicacions. No és difícil veure que $\text{End}_K(V)$ amb la suma i la composició d'aplicacions és un anell.

El grup dels elements invertibles de $\text{End}_K(V)$ (recordem la Secció 3.3) es denota per $\text{Aut}_K(V)$ o també per $\text{GL}(V)$. Aquest grup es diu *grup lineal general* de V . Notem que, per la Proposició 7.1.3, els elements invertibles de $\text{End}_K(V)$ són les aplicacions lineals bijectives.

7.2 Nucli i imatge d'una aplicació lineal

En tota aquesta secció, V_1 i V_2 són K -espais vectorials.

Una aplicació lineal $f: V_1 \rightarrow V_2$ és, en particular, un morfisme entre els grups additius de V_1 i V_2 . Per la Proposició 2.1.5, $\text{Ker}(f)$ és un subgrup de V_1 i $\text{Im}(f)$ és un subgrup de V_2 .

Si $v \in \text{Ker}(f)$ llavors, com que $f(\lambda v) = \lambda f(v) = 0$, $\lambda v \in \text{Ker}(f)$, per a qualsevol $\lambda \in K$. Això demostra que el nucli d'una aplicació lineal és un subespai vectorial de l'espai vectorial de sortida.

Si $w \in \text{Im}(f)$ llavors existeix $v \in V_1$ tal que $f(v) = w$. Si $\lambda \in K$, $f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda w \in \text{Im}(f)$. Això demostra que $\text{Im}(f)$ és un subespai vectorial de l'espai vectorial d'arribada.

Així obtenim el resultat següent.

Proposició 7.2.1 *Sigui $f: V_1 \rightarrow V_2$ una aplicació lineal. Llavors $\text{Ker}(f)$ és un subespai vectorial de V_1 , i $\text{Im}(f)$ és un subespai vectorial de V_2 . ■*

Proposició 7.2.2 *Sigui $f: V_1 \rightarrow V_2$ una aplicació lineal. Llavors*

- (i) *f és monomorfisme si i només si $\text{Ker}(f) = \{0\}$.*
- (ii) *Si $u_1, \dots, u_n$ són vectors que generen V_1 , llavors $f(u_1), \dots, f(u_n)$ generen $\text{Im}(f)$.*

DEMOSTRACIÓ. (i) És conseqüència de la Proposició 2.1.6.

(ii) Sigui $v \in \text{Im}(f)$. Llavors existeix $u \in V_1$ tal que $f(u) = v$. Com que $u_1, \dots, u_n$ generen V_1 , existeixen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tals que $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$. Llavors

$v = f(u) = f(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 f(u_1) + \dots + \alpha_n f(u_n)$, per ser f lineal. Veiem doncs que v és una combinació lineal de $f(u_1), \dots, f(u_n)$. D'aquí deduïm que $f(u_1), \dots, f(u_n)$ generen $\text{Im}(f)$. ■

Proposició 7.2.3 *Sigui $f: V_1 \rightarrow V_2$ una aplicació lineal. Sigui $(u_1, \dots, u_n)$ una base de V_1 . Llavors*

(i) *f és injectiva si i només si $f(u_1), \dots, f(u_n)$ són vectors linealment independents de V_2 .*

(ii) *f és exhaustiva si i només si $f(u_1), \dots, f(u_n)$ generen V_2 .*

(iii) *f és bijectiva si i només si $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ és una base de V_2 .*

DEMOSTRACIÓ. (i) Suposem que f és injectiva. Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i f(u_i) = 0$ llavors, per ser f lineal, $f(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i) = 0$; com que f és injectiva, $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0$ i, per ser $u_1, \dots, u_n$ vectors l.i., $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Això demostra que $f(u_1), \dots, f(u_n)$ són l.i.

Per demostrar el recíproc, suposem que $f(u_1), \dots, f(u_n)$ són linealment independents. Sigui $u \in \text{Ker}(f)$. Llavors $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$, per a certs $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Ara tenim

$$0 = f(u) = \alpha_1 f(u_1) + \dots + \alpha_n f(u_n),$$

per ser f lineal. Com que, per hipòtesi, $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ són linealment independents, tenim que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Això implica que $u = 0$ i, per tant, $\text{Ker}(f) = \{0\}$. Per la Proposició 7.2.2, f és injectiva.

(ii) Sabem que f és exhaustiva si i només si $\text{Im}(f) = V_2$, i per la Proposició 7.2.2 (ii), això és cert si i només si $f(u_1), \dots, f(u_n)$ generen V_2 .

(iii) És una conseqüència de (i) i (ii). ■

El Teorema següent demostra que una aplicació lineal queda determinada unívocament per la imatge d'una base.

Teorema 7.2.4 *Sigui $(u_1, \dots, u_n)$ una base de V_1 . Siguin $v_1, \dots, v_n$ vectors de V_2 . Llavors existeix una única aplicació lineal $f: V_1 \rightarrow V_2$ tal que*

$$f(u_i) = v_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

DEMOSTRACIÓ. Tot vector de V_1 és de la forma

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n,$$

amb $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Definim $f: V_1 \rightarrow V_2$ per

$$f(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Comprovem que està ben definida. Siguin $\beta_1, \dots, \beta_n \in K$ tals que

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n.$$

Llavors

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) u_i = 0.$$

Com que $u_1, \dots, u_n$ són l.i., tenim que

$$\alpha_i - \beta_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Per tant

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$$

i f està ben definida.

Comprovem que f és lineal. Siguin $u, v \in V_1$ i $\alpha, \beta \in K$. Llavors existeixen $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in K$ tals que $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ i $v = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n$. Ara tenim

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= f(\alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i + \beta \sum_{i=1}^n \beta_i u_i) \\ &= f(\sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i + \beta \beta_i) u_i) = \sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i + \beta \beta_i) v_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \beta \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \\ &= \alpha f(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i) + \beta f(\sum_{i=1}^n \beta_i u_i) = \alpha f(u) + \beta f(v). \end{aligned}$$

Per la Proposició 7.0.1, f és lineal.

Suposem que $g: V_1 \rightarrow V_2$ és una aplicació lineal tal que $g(u_i) = v_i$, per a tot $i = 1, \dots, n$. Volem veure que $f = g$. Pel Lema 7.1.1, l'aplicació $f - g: V_1 \rightarrow V_2$ és lineal i satisfà que $(f - g)(u_i) = f(u_i) - g(u_i) = 0$. Sigui $v \in V_1$. Llavors $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$, amb $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Llavors

$$(f - g)(v) = (f - g)(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 (f - g)(u_1) + \dots + \alpha_n (f - g)(u_n) = 0.$$

Per tant $f - g = 0$, i llavors $f = g$. ■

El Teorema 7.2.4 ens diu que si dues aplicacions lineals coincideixen sobre una base llavors són iguals. En particular, si una aplicació lineal val zero sobre una base llavors val zero sobre tot l'espai vectorial.

Una altra conseqüència del Teorema 7.2.4 és que tots els K -espais vectorials de dimensió finita de la mateixa dimensió són “essencialment” el mateix.

Corol·lari 7.2.5 *Dos K -espais vectorials de dimensió finita són isomorfs si i només si tenen la mateixa dimensió. En particular, si V és un K -espai vectorial de dimensió n , llavors V és isomorf a K^n .*

DEMOSTRACIÓ. Suposem que V_1 i V_2 tenen dimensió n . Sigui $(u_1, \dots, u_n)$ una base de V_1 , i sigui $(v_1, \dots, v_n)$ una base de V_2 . Pel Teorema 7.2.4, existeix una única aplicació lineal $f: V_1 \rightarrow V_2$ tal que $f(u_i) = v_i$, $i = 1, \dots, n$. Per la Proposició 7.2.3, f és un isomorfisme i, en conseqüència, V_1 i V_2 són isomorfs.

Demostrem ara el recíproc. Suposem que V_1 i V_2 són isomorfs. Llavors existeix un isomorfisme $g: V_1 \rightarrow V_2$. Sigui $(u_1, \dots, u_n)$ una base de V_1 . Per la Proposició 7.2.3, $(g(u_1), \dots, g(u_n))$ és una base de V_2 . Per tant, $\dim V_2 = n = \dim V_1$. ■

Observem que això resol el problema de classificació de K -espais vectorials de dimensió finita.

Teorema 7.2.6 *Sigui $f: V_1 \rightarrow V_2$ una aplicació lineal. Si V_1 té dimensió finita llavors*

$$\dim V_1 = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f).$$

DEMOSTRACIÓ. Sigui $(u_1, \dots, u_m)$ una base de $\operatorname{Ker}(f)$. Ampliem aquesta família de vectors l.i. a una base

$$(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n)$$

de V_1 . Ara veurem que $(f(u_{m+1}), \dots, f(u_n))$ és una base de $\operatorname{Im}(f)$, i així

$$n = \dim V_1 = m + (n - m) = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f).$$

Sigui $v \in \operatorname{Im}(f)$. Existeix $u \in V_1$ tal que $f(u) = v$. Com que $(u_1, \dots, u_n)$ és una base de V_1 , existeixen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tals que

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n.$$

Ara

$$\begin{aligned} v &= f(u) = \alpha_1 f(u_1) + \dots + \alpha_n f(u_n) \\ &= \alpha_{m+1} f(u_{m+1}) + \dots + \alpha_n f(u_n), \end{aligned}$$

ja que $f(u_1) = \dots = f(u_m) = 0$. Per tant

$$\operatorname{Im}(f) = \langle f(u_{m+1}), \dots, f(u_n) \rangle.$$

Veiem que $f(u_{m+1}), \dots, f(u_n)$ són l.i. Siguin $\beta_{m+1}, \dots, \beta_n \in K$ tals que

$$\beta_{m+1} f(u_{m+1}) + \dots + \beta_n f(u_n) = 0.$$

Com que f és lineal, tenim que

$$f(\beta_{m+1}u_{m+1} + \dots + \beta_n u_n) = 0,$$

és a dir, $\beta_{m+1}u_{m+1} + \dots + \beta_n u_n \in \text{Ker}(f)$. Com que $(u_1, \dots, u_m)$ és una base de $\text{Ker}(f)$, existeixen $\beta_1, \dots, \beta_m \in K$ tals que

$$\beta_{m+1}u_{m+1} + \dots + \beta_n u_n = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m,$$

és a dir,

$$\beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m - \beta_{m+1}u_{m+1} - \dots - \beta_n u_n = 0.$$

Com que $u_1, \dots, u_n$ són l.i., $\beta_1 = \dots = \beta_n = 0$. Per tant $f(u_{m+1}), \dots, f(u_n)$ són l.i., i així

$$(f(u_{m+1}), \dots, f(u_n))$$

és una base de $\text{Im}(f)$. ■

Una conseqüència immediata del Teorema 7.2.6 és el resultat següent.

Corol·lari 7.2.7 *Suposem que V_1 i V_2 tenen dimensió finita, i sigui $f: V_1 \rightarrow V_2$ una aplicació lineal.*

(i) *Si f és injectiva, $\dim(V_1) \leq \dim(V_2)$.*

(ii) *Si f és exhaustiva, $\dim(V_1) \geq \dim(V_2)$. ■*

Exemple 7.2.8 Sigui V l'espai vectorial sobre $\mathbb{C}$ dels polinomis amb coeficients complexos de grau més petit o igual que 2. Aquest és un espai vectorial de dimensió 3 perquè $(1, x, x^2)$ és una base. Pel Teorema 7.2.4, sabem que existeix una única aplicació lineal $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(1) = -i$, $f(x) = -1 + 2i$ i $f(x^2) = 4$. Llavors

$$f(a + bx + cx^2) = af(1) + bf(x) + cf(x^2) = a(-i) + b(-1 + 2i) + c4.$$

Per tant, en aquest cas, l'aplicació f que dona el Teorema 7.2.4 és $f(a + bx + cx^2) = -b + 4c + (-a + 2b)i$.

La imatge d'aquesta aplicació és diferent de zero i, com que és un subespai vectorial no nul d'un espai vectorial de dimensió 1, tenim que $\dim(\text{Im}(f)) = 1$. Per tant f és exhaustiva. Per la fórmula donada pel Teorema 7.2.6, $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim V - \dim(\text{Im}(f)) = 3 - 1 = 2$.

De fet, $p(x) = a + bx + cx^2 \in \text{Ker}(f)$ si i només si $-b + 4c + (-a + 2b)i = 0$. Si agafem $c = 0$ i $b = 1$, obtenim que $-1 + (-a + 2)i = 0$, per tant $a = \frac{-1+2i}{i} = (-1 + 2i)(-i) = 2 + i$. Si agafem $c = 1$ i $b = 0$, obtenim que $a = -4i$. Així obtenim dos vectors del nucli, $p_1(x) = 2 + i + x$ i $p_2(x) = -4i + x^2$, que són linealment independents (comproveu-ho!), i per tant formen una base de $\text{Ker}(f)$. ◇

Ara estudiarem amb detall el tipus d'aplicacions lineals que hem donat als exemples 7.0.2 (i). Veurem que el Teorema 7.2.6 té com a conseqüència la Proposició 6.4.3.

Observació 7.2.9 Sigui $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$, i sigui $f: K^n \rightarrow K^m$ l'aplicació lineal donada per $f(x_1, \dots, x_n) = \left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)^t$.

Si posem $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, llavors les solucions del sistema d'equacions lineals $AX = 0$ són exactament els elements del nucli de f .

Suposem que A és una matriu de rang r . Siguin $C_1, \dots, C_n$ les columnes de A , i sigui $(e_1, \dots, e_n)$ la base canònica de K^n . Llavors $f(e_i) = (Ae_i^t)^t = C_i^t$, per a $i = 1, \dots, n$. Per la Proposició 7.2.2, $C_1^t, \dots, C_n^t$ generen $\text{Im}(f)$, per tant la dimensió de la imatge de f coincideix amb el rang de la matriu A .

Pel Teorema 7.2.6, $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(K^n) - \dim(\text{Im}(f)) = n - r$. Per tant, la dimensió l'espai vectorial de les solucions de $AX = 0$ és $n - r$. $\diamond$

Exemple 7.2.10 Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Sigui $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'aplicació definida per $f(x, y, z) = \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right)^t$.

Pels càlculs que vam fer a l'Exemple 6.2.5,

$$AQ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{2}{3} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on Q és una matriu invertible. D'aquí veiem que A té rang 2 i per tant la dimensió del nucli de f és 1. Com que l'última columna de AQ és zero, veiem que A multiplicada per l'última columna de Q és zero. Per tant $(-1, 1, 1)$ forma una base del nucli de f .

Per l'observació 7.2.9,

$$\text{Im}(f) = \langle (1, 3, 2, 2), (-1, 0, 0, 1), (2, 3, 2, 1) \rangle.$$

Pel Lema 6.3.2, aquest subespai vectorial és el mateix que el generat per les columnes de AQ transposades. Com que les dues columnes no nul·les de AQ són linealment independents, $(1, 3, 2, 2)$ i $(0, 1, \frac{2}{3}, 1)$ formen una base de $\text{Im}(f)$. $\diamond$

7.3 Coordenades respecte d'una base

Siguin n un enter positiu i $B = (u_1, \dots, u_n)$ una base d'un K -espai vectorial V . Donat $u \in V$, sabem que existeixen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tals que

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i.$$

Siguin $\beta_1, \dots, \beta_n \in K$ tals que

$$u = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i.$$

Llavors

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) u_i = 0.$$

Com que $u_1, \dots, u_n$ són l.i., tenim que $\alpha_i = \beta_i$, per a tot $i = 1, \dots, n$. Per tant l'expressió de u com a combinació lineal dels vectors de la base B és única.

Els escalars $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ es diu que són les *coordenades* de u respecte de la base B .

Notació: Si $B = (u_1, \dots, u_n)$ és una base d'un K -espai vectorial V i $u \in V$, escriurem $C(u, B) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ per denotar que u té coordenades $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ respecte de la base B . $\diamond$

Donada la base $B = (u_1, \dots, u_n)$ de V . Definim l'aplicació $\varphi_B: V \rightarrow K^n$ que assigna a cada $v \in V$ les seves coordenades respecte la base B , és a dir $\varphi_B(v) = C(v, B)^t$.

Lema 7.3.1 φ_B és un isomorfisme de K -espais vectorials.

DEMOSTRACIÓ. Siguin v_1 i v_2 vectors de V . Si $v_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ i $v_2 = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i$ llavors $v_1 + v_2 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) u_i$. Això demostra que $\varphi_B(v_1 + v_2) = \varphi_B(v_1) + \varphi_B(v_2)$. Si $v \in V$ és tal que $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ llavors, per a qualsevol $\lambda \in K$, $\lambda v = \sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i) u_i$. Per tant $\varphi_B(\lambda v) = \lambda \varphi_B(v)$. Això demostra que φ_B és una aplicació lineal.

Sigui $(e_1, \dots, e_n)$ la base canònica de K^n . Notem que

$$\varphi_B(u_i) = (0, \dots, 1^i, \dots, 0) = e_i,$$

per a tot $i = 1, \dots, n$. Per la Proposició 7.2.3, φ_B és un isomorfisme. ■

Notem que l'isomorfisme φ_B depèn de la base B fixada.

El fet de que prendre coordenades respecte d'una base fixada sigui un isomorfisme entre l'espai vectorial i K^n és molt important, ens permet passar un problema plantejat en un espai vectorial qualsevol a un problema de K^n .

Exemple 7.3.2 Considerem l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $V = M_2(\mathbb{R})$. V és un espai vectorial de dimensió 4, una base és

$$B = (u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

Llavors $\varphi_B \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a, b, c, d)$.

Considerem el subespai vectorial $W = \langle \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rangle$, llavors

$$\varphi_B(W) = \langle (1, 3, 2, 2), (-1, 0, 0, 1), (2, 3, 2, 1) \rangle.$$

Per l'exemple 6.3.8, sabem que $(v_1 = (1, 3, 2, 2), v_2 = (0, 1, \frac{2}{3}, 1))$ és una base de $\varphi_B(W)$. Com que $\varphi_B \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = v_1$ i $\varphi_B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = v_2$ i φ_B és isomorfisme, tenim que $\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right)$ és una base de W .

$B' = (u'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, u'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, u'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$ també és una base de V (comproveu-ho!). Com que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = au'_1 + du'_2 + \frac{b+c}{2}u'_3 + \frac{b-c}{2}u'_4,$$

$$\varphi_{B'} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a, d, \frac{b+c}{2}, \frac{b-c}{2}). \quad \diamond$$

7.4 Matriu d'una aplicació lineal

Sigui $f: V_1 \rightarrow V_2$ una aplicació lineal entre K -espais vectorials de dimensió finita no nuls. Siguin $B_1 = (v_1, \dots, v_n)$ una base de V_1 i $B_2 = (u_1, \dots, u_m)$ una base de V_2 . Llavors existeixen $\alpha_{ij} \in K$, per a $i = 1, \dots, m$ i $j = 1, \dots, n$, tals que

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} u_i.$$

La matriu $(\alpha_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$ es diu que és la matriu de f respecte de les bases B_1 (de sortida) i B_2 (d'arribada). Escriurem

$$M(f, B_1, B_2) = (\alpha_{ij}).$$

Notem que la columna j -ésima de la matriu $M(f, B_1, B_2)$ és la columna de les coordenades de $f(v_j)$ respecte de B_2 , és a dir $C(f(v_j), B_2)$.

Observem que si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ són les coordenades de $v \in V_1$ respecte de B_1 , llavors

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} u_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \alpha_j u_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \alpha_j\right) u_i \end{aligned}$$

Per tant

$$M(f, B_1, B_2)C(v, B_1) = C(f(v), B_2).$$

Aquesta és la **propietat fonamental de la matriu d'una aplicació lineal**.

Per la Proposició 7.1.2, el conjunt $\mathcal{L}(V_1, V_2)$, format per totes les aplicacions lineals entre dos K -espais vectorials V_1 i V_2 , és un espai vectorial. Sigui B_1 una base de V_1 i sigui B_2 una base de V_2 . Suposem que V_1 té dimensió n i que V_2 té dimensió m .

El fet d'associar a cada aplicació lineal $f: V_1 \rightarrow V_2$ la matriu $M(f, B_1, B_2)$, el podem pensar com una aplicació,

$$\begin{aligned} \varphi_{B_1 B_2}: \mathcal{L}(V_1, V_2) &\rightarrow M_{m \times n}(K) \\ f &\mapsto \varphi_{B_1 B_2}(f) = M(f, B_1, B_2). \end{aligned}$$

És fàcil comprovar que $\varphi_{B_1 B_2}$ és una aplicació lineal, és a dir

$$\begin{aligned} M(f + g, B_1, B_2) &= M(f, B_1, B_2) + M(g, B_1, B_2) \\ \text{i } M(\lambda f, B_1, B_2) &= \lambda M(f, B_1, B_2), \end{aligned}$$

per a tot $f, g \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ i tot $\lambda \in K$.

Si $\varphi_{B_1 B_2}(f) = 0$, llavors $f(B_1) = 0$. Com que, per la Proposició 7.2.4, tota aplicació lineal que és nul·la sobre una base és l'aplicació zero, tenim que $f = 0$, i això demostra que $\varphi_{B_1 B_2}$ és injectiva.

L'aplicació $\varphi_{B_1 B_2}$ també és exhaustiva, perquè, si $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$, llavors, pel Teorema 7.2.4, existeix una aplicació lineal $f: V_1 \rightarrow V_2$ tal que

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} u_i,$$

per a tot $j = 1, \dots, n$. Llavors $\varphi_{B_1 B_2}(f) = A$, i per tant $A \in \text{Im}(f)$.

Així hem demostrar el resultat següent.

Proposició 7.4.1 *L'aplicació $\varphi_{B_1 B_2}: \mathcal{L}(V_1, V_2) \rightarrow M_{m \times n}(K)$ és un isomorfisme d'espais vectorials. En particular, la dimensió de l'espai vectorial $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ és $n \times m$.*

■

La proposició següent demostra que els isomorfismes que hem definit es comporten bé respecte de la composició. Demostrem que a la composició d'aplicacions li correspon el producte de matrius associades.

Proposició 7.4.2 *Siguin V_1, V_2, V_3 tres K -espais vectorials de dimensió finita no nuls. Siguin $f: V_1 \rightarrow V_2$ i $g: V_2 \rightarrow V_3$ aplicacions lineals. Si B_1, B_2, B_3 són bases de V_1, V_2, V_3 respectivament, llavors*

$$M(g \circ f, B_1, B_3) = M(g, B_2, B_3)M(f, B_1, B_2).$$

DEMOSTRACIÓ. Sigui $B_1 = (u_1, \dots, u_n)$. Llavors

$$\begin{aligned} M(g, B_2, B_3) M(f, B_1, B_2) &= \\ &= M(g, B_2, B_3)(C(f(u_1), B_2), \dots, C(f(u_n), B_2)) \\ &= (M(g, B_2, B_3)C(f(u_1), B_2), \dots, M(g, B_2, B_3)C(f(u_n), B_2)) \\ &= (C(g(f(u_1)), B_3), \dots, C(g(f(u_n)), B_3)) \\ &= M(g \circ f, B_1, B_3). \blacksquare \end{aligned}$$

Exemples 7.4.3

(1) Considerem $B_0 = ((1, 0), (0, 1))$, la base canònica de $\mathbb{R}^2$, i la base

$$B_1 = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$$

de $\mathbb{R}^3$. Sigui $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal tal que

$$M(f, B_0, B_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculem $f(x, y)$.

$$\begin{aligned} C(f(x, y), B_1) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} C((x, y), B_0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x - y \\ 3x - y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per tant

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x - y)(1, 0, 0) + (2x - y)(1, 1, 0) + (3x - y)(1, 1, 1) \\ &= (6x - 3y, 5x - 2y, 3x - y) \end{aligned}$$

(2) Considerem l'aplicació lineal $f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ definida per $A \mapsto A^t$. Considerem les bases de $M_2(\mathbb{R})$, $B = (u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ i $B' = (u'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, u'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, u'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$. Llavors $f(u_1) = u_1$, $f(u_2) = u_3$, $f(u_3) = u_2$ i $f(u_4) = u_4$, per tant

$$M(f, B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com que $f(u_1) = u'_1$, $f(u_2) = \frac{u'_3}{2} - \frac{u'_4}{2}$, $f(u_3) = \frac{u'_3}{2} + \frac{u'_4}{2}$ i $f(u_4) = u'_2$,

$$M(f, B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad \diamond$$

7.5 Canvi de coordenades. Canvi de Base

Sigui V un K -espai vectorial de dimensió $n > 0$, i considerem l'aplicació identitat $\text{id}_V: V \rightarrow V$.

Siguin $B = (u_1, \dots, u_n)$ i $B' = (v_1, \dots, v_n)$ bases de V . Sabem que si

$$C(v_j, B) = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix},$$

per a $j = 1, \dots, n$, llavors

$$M(\text{id}_V, B', B) = (\alpha_{ij}).$$

En particular, si $B' = B$ llavors $M(\text{id}_V, B', B) = I_n$.

A més, per la propietat fonamental de la matriu d'una aplicació lineal, tenim que si $u \in V$ llavors

$$M(\text{id}_V, B', B)C(u, B') = C(\text{id}_V(u), B) = C(u, B).$$

Per tant la matriu $M(\text{id}_V, B', B)$ transforma les coordenades de u respecte de B' en les coordenades del mateix vector respecte de B . Per això es diu que la matriu $M(\text{id}_V, B', B)$, que denotarem també simplement per $M(B', B)$, és la *matriu del canvi de coordenades de B' a B* .

Observem que tenim que

$$v_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} u_i,$$

per a tot $j = 1, \dots, n$. Això ho podem escriure també en forma matricial:

$$(v_1, \dots, v_n) = (u_1, \dots, u_n)M(B', B),$$

és a dir,

$$B' = BM(B', B).$$

Per això, també es diu que $M(B', B)$ és la *matriu del canvi de base* de B a B' .

Proposició 7.5.1 *Sigui V un K -espai vectorial de dimensió finita no nul. Siguin $B = (u_1, \dots, u_n)$, $B' = (v_1, \dots, v_n)$ bases de V . Llavors*

$$M(B', B)M(B, B') = I_n \quad i \quad M(B, B')M(B', B) = I_n.$$

Per tant $M(B', B) = M(B, B')^{-1}$.

DEMOSTRACIÓ. $M(B, B')$ és la matriu associada a la identitat, prenent B com a base de l'espai vectorial de sortida i B' com a base de l'espai vectorial d'arribada. $M(B', B)$ és la matriu associada a la identitat, prenent B' com a base de l'espai vectorial de sortida i B com a base de l'espai vectorial d'arribada. Per la Proposició 7.4.2,

$$M(B', B)M(B, B') = M(\text{id}, B', B'),$$

que és la matriu identitat. Per la Proposició 7.4.2,

$$M(B, B')M(B', B) = M(\text{id}, B, B),$$

que és la matriu identitat. ■

Observem que si V_1, V_2 són K -espais vectorials de dimensió finita no nuls, B_1, B'_1 són bases de V_1 i B_2, B'_2 són bases de V_2 , i tenim una aplicació lineal $f: V_1 \rightarrow V_2$, llavors $f = \text{id}_{V_2} \circ f \circ \text{id}_{V_1}$. Fixem-nos en el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} f: & V_1 & \xrightarrow{\text{id}} & V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 & \xrightarrow{\text{id}} & V_2 \\ & B'_1 & & B_1 & & B_2 & & B'_2 \end{array}$$

on hem escrit sota de cada espai vectorial la base que considerem.

Aplicant la Proposició 7.4.2, obtenim,

$$\begin{aligned} M(f, B'_1, B'_2) &= M(\text{id}_{V_2}, B_2, B'_2)M(f, B_1, B_2)M(\text{id}_{V_1}, B'_1, B_1) \\ &= M(B_2, B'_2)M(f, B_1, B_2)M(B'_1, B_1). \end{aligned}$$

Així obtenim la **fórmula del canvi de bases**:

$$M(f, B'_1, B'_2) = M(B_2, B'_2)M(f, B_1, B_2)M(B'_1, B_1).$$

Exemple 7.5.2 Sigui $\mathbb{R}_2[x] = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{gr}(p(x)) \leq 2\}$. Considerem l'aplicació lineal $f: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ definida per

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_0 + 2a_1 & a_0 - a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 & 2a_0 - a_2 \end{pmatrix}.$$

Observem que $B_1 = (1, x, x^2)$ i $B'_1 = (1 - x, x - x^2, x^2)$ són bases de $\mathbb{R}_2[x]$ i que

$$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$B'_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

són bases de $M_2(\mathbb{R})$. Calculem la matriu de f respecte de les bases B_1, B_2 . Tenim

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per tant

$$M(f, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculem ara la matriu de f respecte de les bases B'_1, B'_2 . Sabem que

$$M(f, B'_1, B'_2) = M(B_2, B'_2)M(f, B_1, B_2)M(B'_1, B_1).$$

Com que

$$M(B'_2, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tenim que

$$\begin{aligned} M(B_2, B'_2) &= M(B'_2, B_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ara, com que

$$M(B'_1, B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

ja podem calcular $M(f, B'_1, B'_2) =$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \\ -3 & 5/2 & -1/2 \end{pmatrix}. \quad \diamond \end{aligned}$$

7.6 Exercicis

Exercici 1 Quines de les següents aplicacions entre $\mathbb{R}$ -espais vectorials són lineals?

- (a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida per $f(x) = ax$, on $a \in \mathbb{R}$ fixat.
- (b) $f, g, h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definides per $f(x, y, z) = xy + xz + yz$, $g(x, y, z) = x + 1 - y$ i $h(x, y, z) = e^{x+y}$.
- (c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, definida per $f(x, y) = (x - y, 2x, y - 3x, y)$.

Exercici 2 Sigui f i g les aplicacions de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ següents:

$$f(x, y) = (x - y, 2x + y) \quad \text{i} \quad g(x, y) = (y - 2x, x + y).$$

- (a) Proveu que són endomorfismes.
- (b) Calculeu $(f \circ g)(1, 0)$, $(g \circ f)(1, 0)$, $(f + g)(1, 0)$, $(2f + g)(1, 0)$ i $f^2(1, 0)$.
- (c) Obteniu l'expressió general de $(f \circ g)(x, y)$ i de $(g \circ f)(x, y)$.
- (d) Calculeu $f^{-1}(\{(1, 0)\})$.

Exercici 3 Escriuiu la matriu associada a l'aplicació lineal següent, respecte de les bases canòniques. Utilitzant aquesta matriu, trobeu la dimensió i una base de $\text{Ker}(f)$ i de $\text{Im}(f)$. Trobeu $f^{-1}(W)$, essent $W = \langle (1, 0, 4, 0) \rangle$ subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) &\rightarrow (x, x - z, 4z, 0) \end{aligned}$$

Exercici 4 Determineu si existeixen aplicacions lineals de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ que compleixin les condicions següents i, en cas afirmatiu, si n'hi ha una o més d'una:

- (a) f tal que $f(1, 2, -1) = (-1, 5)$, $f(1, 1, -1) = (2, -10)$, $f(0, -1, 0) = (3, 4)$.
- (b) g tal que $g(1, 2, -1) = (-1, 5)$, $g(1, 1, -1) = (2, -10)$, $g(0, -1, 0) = (3, -15)$.
- (c) h tal que $h(1, 2, -1) = (-1, 5)$, $h(1, 1, -1) = (2, -10)$, $h(1, 0, 1) = (3, 4)$.

Exercici 5 Sigui $E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid c = a + b \right\}$. Considereu l'aplicació de E en E donada per:

$$f \left(\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 3c + 3a \\ -2a - b & a - b + 3c \end{pmatrix}$$

- (a) Proveu que f és una aplicació lineal.
- (b) Trobeu una base de E i la matriu de f respecte d'aquesta base.
- (c) Trobeu bases del nucli i de la imatge de f .

Exercici 6 Considereu l'aplicació lineal següent:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (2x - y, z) \end{aligned}$$

Sigui B_1 la base canònica de $\mathbb{R}^2$, B_2 la base canònica de $\mathbb{R}^3$, i siguin $B_3 = ((1, 2), (-1, 1))$ i $B_4 = ((1, 0, -1), (4, 0, 3), (1, 1, 0))$.

- (a) Proveu que B_3 i B_4 són bases de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ respectivament.

- (b) Calculeu les matrius del canvi de base de B_1 a B_3 , de B_3 a B_1 , de B_2 a B_4 i de B_4 a B_2 .
- (c) Trobeu la matriu associada a f en les bases B_2 de sortida i B_1 d'arribada.
- (d) Trobeu la matriu associada a f en les bases B_4 de sortida i B_1 d'arribada.
- (e) Trobeu la matriu associada a f en les bases B_4 de sortida i B_3 d'arribada.

Exercici 7 Trobeu una aplicació lineal que transformi el triangle T de vèrtexs $(0,0), (1,3), (4,2)$ en el triangle T' de vèrtexs $(0,0), (2,1), (1,1)$ i la seva inversa (que transforma T' en T).

Exercici 8 Sigui $\mathbb{R}_k[x]$ l'espai vectorial dels polinomis reals de grau menor o igual a k . Es defineix

$$\begin{aligned}\tau : \mathbb{R}_2[x] &\rightarrow \mathbb{R}_4[x] \\ p(x) &\rightarrow \int_0^x tp(t)dt\end{aligned}$$

Demostreu que τ és una aplicació lineal injectiva. Calculeu la seva imatge i demostreu que aquesta imatge és isomorfa a $\mathbb{R}_2[x]$. Calculeu la matriu associada a τ en les bases $(1, x-1, (x-1)^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$ i $(1, x, x^2, x^3, x^4)$ de $\mathbb{R}_4[x]$. Existeix alguna aplicació lineal exhaustiva de $\mathbb{R}_2[x]$ a $\mathbb{R}_4[x]$?

Exercici 9 Considereu les aplicacions:

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}[x] &\longrightarrow \mathbb{R}[x] & g : \mathbb{R}[x] &\longrightarrow \mathbb{R}[x] \\ p(x) &\mapsto p'(x) & p(x) &\mapsto \int_0^x p(s)ds\end{aligned}$$

- (a) Proveu que són aplicacions lineals.
- (b) Proveu que f és exhaustiva i no injectiva. Calculeu $\text{Ker}(f)$.
- (c) Proveu que g és injectiva però no exhaustiva.
- (d) Proveu que $f \circ g = \text{id}$ i que $g \circ f \neq \text{id}$.
- (e) Quina dimensió té $\mathbb{R}[x]$?
- (f) Proveu que aquesta situació no és possible en espais de dimensió finita: un endomorfisme $f \in \text{End}(V)$, on V és un espai vectorial de dimensió finita n , és injectiu si i només si és exhaustiu.

Exercici 10 Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal i $e_1, \dots, e_n$ vectors de E . Discutiu les afirmacions següents (demostreu les certes i doneu contraexemples per a les falses):

- (a) $e_1, \dots, e_n$ linealment independents $\implies f(e_1), \dots, f(e_n)$ linealment independents.
- (b) $f(e_1), \dots, f(e_n)$ linealment independents $\implies e_1, \dots, e_n$ linealment independents.
- (c) $e_1, \dots, e_n$ sistema de generadors de $E \implies f(e_1), \dots, f(e_n)$ sistema de generadors de F .
- (d) $f(e_1), \dots, f(e_n)$ sistema de generadors de $F \implies e_1, \dots, e_n$ sistema de generadors de E .
- (e) $e_1, \dots, e_n$ sistema de generadors de $E \implies f(e_1), \dots, f(e_n)$ sistema de generadors de $\text{Im}(f)$.

Què canvia si f és monomorfisme? I si f és epimorfisme?

Exercici 11 Sigui $f : M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$ l'endomorfisme determinat per:

$$f \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trobeu la dimensió i una base de $\text{Ker}(f)$ i $\text{Im}(f)$. Calculeu $f \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercici 12 Siguin $f, g : E \longrightarrow E$ endomorfismes que compleixin $f^3 - f^2 + 11f - \sqrt{2}\text{id} = 0$ i $g^2 - 2g + 3\text{id} = 0$. Proveu que f i g són isomorfismes i trobeu les inverses f^{-1} i g^{-1} .

Exercici 13 Sigui E un $\mathbb{R}$ -espai vectorial de dimensió finita. Sigui $J : E \rightarrow E$ un endomorfisme tal que $J^2 = -\text{id}$.

- (a) Demostreu que J és isomorfisme.
- (b) Definim $(a + bi)v = av + bJ(v)$ per a tot $v \in E$ i $a, b \in \mathbb{R}$. Demostreu que E amb la suma i aquest producte per nombres complexos és un $\mathbb{C}$ -espai vectorial de dimensió finita.
- (c) Demostreu que la dimensió de E sobre $\mathbb{R}$ és parell.

Capítol 8

Determinants

Una de les eines bàsiques de l'àlgebra lineal és el determinant d'una matriu quadrada. Els determinants permeten fer el mateix tipus de càlculs que ja hem fet amb canvis elementals, hi ha però una diferència conceptual important: mentre les transformacions elementals ens donen algorismes per solucionar sistemes d'equacions lineals, per calcular inverses de matrius, etc., els determinants ens donen fórmules per fer els mateixos processos. Aquest punt de vista ens serà imprescindible en el capítol 9.

Un aspecte important dels determinants, que no tractarem aquí, és el seu significat geomètric. Sigui $n > 1$. Una família de n vectors $v_1, \dots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$ és linealment independent si i només si el conjunt $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \text{ amb } 0 \leq \alpha_i \leq 1 \text{ per a tot } i = 1, \dots, n\}$ és un paral·lelepípede n -dimensional, amb un volum n -dimensional no nul. Els vectors són linealment dependents si i només si C té dimensió més petita que n ; en aquest cas, el seu volum n -dimensional és zero. Tenir una manera de calcular aquest volum és doncs tenir una manera de determinar si els vectors són linealment independent o no. Aquesta manera de calcular el volum és, llevat d'un signe, el determinant.

En tot aquest capítol, K és un cos. Seguirem la notació introduïda al capítol 6, és a dir, si A és una matriu de $M_n(K)$, i escrivim $A = (C_1, \dots, C_n)$, volem dir que C_i , $i = 1, \dots, n$, són les columnes de A . Si escrivim $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$, volem dir que F_i , $i = 1, \dots, n$, són les files de A .

8.1 Definició i propietats

Definirem un determinant com una manera d'associar un escalar a una matriu quadrada que satisfaci unes certes propietats respecte de les columnes de la matriu.

Una tal definició no assegura l'existència del determinant, de fet part de la feina del capítol és veure que el determinant no només existeix sinó que, a més, és l'única aplicació que satisfà aquestes propietats.

Sigui n un enter positiu. Una aplicació $\det : M_n(K) \rightarrow K$ es diu que és un *determinant* si satisfà les propietats següents.

(1) Per a tot $i = 1, \dots, n$,

$$\det(C_1, \dots, C_i + C'_i, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) + \det(C_1, \dots, C'_i, \dots, C_n).$$

(2) Per a tot $i = 1, \dots, n$, i tot $\alpha \in K$

$$\det(C_1, \dots, \alpha C_i, \dots, C_n) = \alpha \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n).$$

(3) Si A té dues columnes iguals llavors $\det(A) = 0$.

(4) $\det(I_n) = 1$.

Les propietats (1) i (2) ens diuen que una aplicació determinant és lineal respecte de les columnes de la matriu. Ara demostrarem que les propietats (1) i (3) impliquen que quan intercanviem dues columnes el determinant canvia de signe.

Lema 8.1.1 *Sigui $1 \leq i < j \leq n$. Llavors*

$$\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n)$$

DEMOSTRACIÓ. Per la propietat (3), $\det(C_1, \dots, C_i + C_j, \dots, C_i + C_j, \dots, C_n) = 0$, on les columnes $C_i + C_j$ estan a les posicions i i j . Aplicant la propietat (1) a aquesta igualtat obtenim

$$\begin{aligned} 0 &= \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_i + C_j, \dots, C_n) + \det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i + C_j, \dots, C_n) \\ &= \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_i, \dots, C_n) + \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) \\ &\quad + \det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n) + \det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_j, \dots, C_n). \end{aligned}$$

Tornant a aplicar la propietat (3) obtenim

$$0 = \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) + \det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n),$$

tal com volíem veure. ■

Veiem, en uns quants exemples, com les propietats que hem imposat determinen el valor de $\det(A)$.

Exemples 8.1.2

- (1) Si (a) és una matriu 1×1 llavors, per les propietats (2) i (4), $\det(a) = a \det(1) = a$. És fàcil comprovar que aquesta aplicació satisfà les propietats del determinant. Així doncs obtenim, com a mínim, que el determinant d'una matriu 1×1 existeix.
- (2) Calculem el valor del determinant d'una matriu 2×2 . Si apliquem la linealitat del determinant respecte de la primera columna, obtenim:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a+0 & b \\ 0+c & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \det \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + c \det \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}.$$

Aplicant la linealitat respecte de la segona columna, tenim

$$\det \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & b+0 \\ 0 & 0+d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = b \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 + d.$$

De manera similar veiem que

$$\det \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix} = b \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -b.$$

Si combinem tots els càlculs que hem fet, obtenim que

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

- (3) Les propietats del determinant impliquen que el determinant d'una matriu no invertible ha de ser zero. Efectivament, si $A = (C_1, \dots, C_n)$ no és invertible llavors les columnes de A són linealment dependents i, per tant, n'existeix una que és combinació lineal de les altres. Com que, pel Lema 8.1.1, intercanviar columnes només canvia el signe del determinant, podem suposar que C_n és la columna que és combinació lineal de les altres. Llavors existeixen $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ tals que $C_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i C_i$. Per la linealitat del determinant,

$$\det(A) = \det(C_1, \dots, C_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i C_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \det(C_1, \dots, C_{n-1}, C_i).$$

Com que cadascun d'aquests determinants és el determinant d'una matriu amb dues columnes iguals han de ser zero. Així $\det(A) = 0$.

- (4) Les propietats dels determinants també ens permeten calcular fàcilment el valor que ha de tenir el determinant de les matrius elementals.

En el cas de Tipus I,

$$\det(T_{ij}) = \det \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & 0 & \dots & 1 & & \\ & & & 1 & & & \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 1 & \\ 1 & & \dots & & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Com que T_{ij} és el resultat d'intercanviar les columnes i i j a la matriu identitat, per la Proposició 8.1.1, veiem que $\det(T_{ij}) = -\det(I_n) = -1$.

En el cas de Tipus II,

$$\det(E_{ij}(\mu)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \mu & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(C_1, \dots, C_j + \mu C_i, \dots, C_n),$$

on $C_1, \dots, C_n$ són les columnes de la matriu identitat. Per les propietats del determinant, tenim

$$\begin{aligned} \det(E_{ij}(\mu)) &= \det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_n) + \mu \det(C_1, \dots, C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, \dots, C_n) \\ &= \det(I_n) + \mu \cdot 0 = 1. \end{aligned}$$

En el cas de Tipus III,

$$\det(P_i(\lambda)) = \det \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = \det(C_1, \dots, \lambda C_i, \dots, C_n),$$

on $C_1, \dots, C_n$ són les columnes de la matriu identitat. Com que la matriu $P_i(\lambda)$ és el resultat de multiplicar per λ la columna i d'una matriu identitat, per les propietats (2) i (4) del determinant, obtenim

$$\det(P_i(\lambda)) = \lambda \det(I_n) = \lambda. \quad \diamond$$

Proposició 8.1.3 *Siguin $E, E_1, \dots, E_r \in M_n(K)$ matrius elementals.*

(i) *Si $A \in M_n(K)$, llavors $\det(AE) = \det(A)\det(E)$.*

(ii) Si $A \in M_n(K)$, llavors $\det(AE_1 \dots E_r) = \det(A) \det(E_1) \dots \det(E_r)$.

(iii) $\det(E) = \det(E^t)$.

DEMOSTRACIÓ. (i) Ho demostrarem per a cadascun dels tipus de les matriu elementals. En el cas de Tipus I, per la Proposició 6.1.1, el resultat de fer AT_{ij} és intercanviar les columnes i i j de A i, pel Lema 8.1.1, $\det(AT_{ij}) = -\det(A)$. Per l'exemple 8.1.2, $\det(T_{ij}) = -1$. Per tant $\det(AT_{ij}) = \det(A) \det(T_{ij})$ tal com volíem veure.

Per a les matriu elementals de Tipus II, com que, per la Proposició 6.1.1, el resultat de fer $AE_{ij}(\mu)$ és sumar a la columna j la columna i multiplicada per μ , tenim que, per la definició del determinant, $\det(AE_{ij}(\mu)) = \det(A)$. Per l'exemple 8.1.2, $\det(E_{ij}(\mu)) = 1$. Per tant $\det(AE_{ij}(\mu)) = \det(A) \det(E_{ij}(\mu))$ tal com volíem veure.

Finalment, per a les matrius elementals de Tipus III, tenim que el resultat de $AP_i(\lambda)$ és multiplicar la columna i per l'escalar λ . Per la definició del determinant, $\det(AP_i(\lambda)) = \lambda \det(A)$. Per l'exemple 8.1.2, $\det(P_i(\lambda)) = \lambda$. Per tant $\det(AP_i(\lambda)) = \det(A) \det(P_i(\lambda))$ tal com volíem veure.

(ii) Ho demostrarem per inducció sobre r . El cas $r = 1$ l'hem vist a l'apartat (i). Suposem que $r > 1$, i que l'enunciat és cert per a $r - 1$. Demostrem-ho per a r . Per (i), sabem que $\det(AE_1 \dots E_{r-1} E_r) = \det(AE_1 \dots E_{r-1}) \det(E_r)$, i per hipòtesi d'inducció, $\det(AE_1 \dots E_{r-1}) \det(E_r) = \det(A) \det(E_1) \dots \det(E_{r-1}) \det(E_r)$.

(iii) Les matriu elementals dels tipus I i III són simètriques i per tant, en aquests casos, $\det(E) = \det(E^t)$. Pel Lema 6.1.2, la transposada d'una matriu elemental de tipus II és una matriu elemental del mateix tipus. Per l'exemple 8.1.2, el determinant d'aquestes matrius sempre és 1. Per tant, també en aquest cas, $\det(E) = \det(E^t)$. ■

Teorema 8.1.4 *Siguin $A, B \in M_{n \times n}(K)$. Llavors*

(i) $\det(A) \neq 0$ si i només si A és invertible.

(ii) $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

(iii) $\det(A) = \det(A^t)$.

DEMOSTRACIÓ. La demostració de totes aquestes afirmacions seguirà la mateixa línia. Primer sempre veurem que en el cas d'una matriu no invertible l'afirmació és certa perquè el determinant és zero (exemples 8.1.2). Si la matriu és invertible farem servir que tota matriu invertible és producte de matrius elementals (Teorema 6.3.4) per reduir-nos al cas de matrius elementals, llavors l'afirmació serà conseqüència de la proposició anterior.

(i) Per l'exemple 8.1.2, ja sabem que una matriu no invertible té determinant zero. També per l'exemple 8.1.2, sabem que tota matriu elemental té determinant no nul. Com que, pel Teorema 6.3.4, tota matriu invertible és producte de matrius elementals, la Proposició 8.1.3 (ii) ens permet concloure que el determinant d'una matriu invertible és no nul.

(ii) Si B no és una matriu invertible llavors tampoc ho és AB . Llavors $0 = \det(AB) = \det(A) \cdot 0 = \det(A) \det(B)$.

Si B és invertible llavors, pel Teorema 6.3.4, $B = E_1 \dots E_r$, on E_i són matrius elementals, $i = 1, \dots, r$. Aplicant la Proposició 8.1.3 (ii), obtenim

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(AE_1 \dots E_r) = \det(A) \det(E_1) \dots \det(E_r) = \\ &= \det(A) \det(E_1 \dots E_r) = \det(A) \det(B). \end{aligned}$$

(iii) Com que una matriu és invertible si i només si el seu rang és n (recordeu el Teorema 6.3.4), tenim que A és invertible si i només si ho és A^t . A més, si A no és invertible llavors $\det(A) = 0$, en conseqüència $\det(A) = \det(A^t) = 0$.

Si A és una matriu invertible llavors, pel Teorema 6.3.4, $A = E_1 \dots E_r$, on E_i són matrius elementals, per a $i = 1, \dots, r$. Transposant la igualtat anterior obtenim $A^t = E_r^t \dots E_1^t$. Si apliquem l'apartat anterior (o fem servir que la transposada d'una matriu elemental és també elemental i l'apartat (ii) de la Proposició 8.1.3) veiem que $\det(A^t) = \det(E_r^t) \dots \det(E_1^t) = \det(E_1^t) \dots \det(E_r^t)$. Per l'apartat (iii) de la Proposició 8.1.3, el determinat d'una matriu elemental i la seva transposada coincideixen, llavors tenim

$$\det(A^t) = \det(E_1^t) \dots \det(E_r^t) = \det(E_1) \dots \det(E_r) = \det(E_1 \dots E_r) = \det(A). \quad \blacksquare$$

Corol·lari 8.1.5 (i) *Sobre $M_n(K)$ només hi pot haver una aplicació determinant.*

(ii) *L'aplicació determinant té les mateixes propietats per files que per columnes.*

DEMOSTRACIÓ. (i) Si A no és invertible llavors $\det(A) = 0$. Si A és invertible, pel Teorema 6.3.4, $A = E_1 \dots E_r$, on cada E_i és una matriu elemental. Ara $\det(A) = \det(E_1) \dots \det(E_r)$ i, com ja hem vist a l'exemple 8.1.2, el determinant d'una matriu elemental està determinat per les propietats de la definició de l'aplicació determinant.

L'afirmació (ii) és conseqüència immediata del fet que $\det(A) = \det(A^t)$. $\blacksquare$

8.2 Existència del determinant.

Hem definit el determinant com una aplicació que satisfà unes certes propietats, i hem demostrat que, en cas d'existir, aquesta aplicació és única i la denotem per $\det$. També denotem el determinant d'una matriu quadrada A per $|A|$. Per exemple, $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = |a \ b / c \ d|$ és el determinant de la matriu $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. En aquesta secció veurem que el determinant existeix, tot donant un mètode per calcular-lo.

Un *menor* d'ordre p d'una matriu $A \in M_{m \times n}(K)$ és el determinant d'una matriu $p \times p$ formada pels elements de A situats en p files i p columnes prefixades.

Exemple 8.2.1 Els menors d'ordre 2 de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ són $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$. $\diamond$

Sigui $n > 1$. Sigui $A \in M_n(K)$, i sigui A'_{ij} la matriu $(n-1) \times (n-1)$ obtinguda de A en eliminar la fila i i la columna j . Definim l'*adjunt* a la posició (i, j) de A com $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A'_{ij})$.

Definim la matriu *adjunta* de A com la matriu

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

La proposició següent dóna un mètode per calcular el determinant de manera inductiva.

Proposició 8.2.2 *Sigui $n > 1$. Supposem que tenim l'aplicació determinat definida per matrius de $M_{n-1}(K)$.*

- (i) *Sigui $i \in \{1, \dots, n\}$. Considerem l'aplicació $\text{DF}_i: M_n(K) \rightarrow K$ definida per $\text{DF}_i(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$, on $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Llavors DF_i satisfà les propietats del determinat, i així $\text{DF}_i(A) = \det(A)$.*
- (ii) *Sigui $j \in \{1, \dots, n\}$. Considerem l'aplicació $\text{DC}_j: M_n(K) \rightarrow K$ definida per $\text{DC}_j(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$, on $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Llavors DC_j satisfà les propietats del determinat, i així $\text{DC}_j(A) = \det(A)$.*

DEMOSTRACIÓ. Noteu que si demostrem (i), llavors tindrem que $\text{DC}_j(A) = \text{DF}_j(A^t) = \det(A^t)$. Com que el determinant d'una matriu i la seva transposada és el mateix, podem concloure que $\text{DC}_j(A) = \det(A)$. Així doncs només cal demostrar l'afirmació (i).

Propietat (1). Hem de veure, per a tot $k = 1, \dots, n$, que

$$\text{DF}_i(C_1, \dots, C_k + C'_k, \dots, C_n) = \text{DF}_i(C_1, \dots, C_k, \dots, C_n) + \text{DF}_i(C_1, \dots, C'_k, \dots, C_n).$$

Siguin $A = (C_1, \dots, C_k + C'_k, \dots, C_n)$, $B = (C_1, \dots, C_n)$ i $B' = (C_1, \dots, C'_k, \dots, C_n)$, amb $C_j = (a_{ij}) \in M_{n \times 1}(K)$ i $C'_k = (a'_{ik}) \in M_{n \times 1}(K)$. Per $i, j = 1, \dots, n$, denotem per A_{ij} , B_{ij} i B'_{ij} els adjunts a la posició (i, j) de A , B i B' respectivament. Noteu que $A_{ik} = B_{ik} = B'_{ik}$, per a $i = 1, \dots, n$. Si $j \neq k$, llavors A_{ij} és, tret del signe, el determinant d'una matriu $(n-1) \times (n-1)$ i es compleix que $A_{ij} = B_{ij} + B'_{ij}$. Així obtenim que

$$\begin{aligned} \text{DF}_i(A) &= \sum_{1 \leq j < k} a_{ij} A_{ij} + (a_{ik} + a'_{ik}) A_{ik} + \sum_{k < j \leq n} a_{ij} A_{ij} \\ &= \sum_{1 \leq j < k} a_{ij} (B_{ij} + B'_{ij}) + a_{ik} B_{ik} + a'_{ik} B'_{ik} \\ &\quad + \sum_{k < j \leq n} a_{ij} (B_{ij} + B'_{ij}) \\ &= \text{DF}_i(B) + \text{DF}_i(B'). \end{aligned}$$

Propietat (2). Hem de demostrar, per a tot $k = 1, \dots, n$, que

$$\text{DF}_i(C_1, \dots, \lambda C_k, \dots, C_n) = \lambda \text{DF}_i(C_1, \dots, C_k, \dots, C_n).$$

Siguin $A = (C_1, \dots, \lambda C_k, \dots, C_n)$ i $B = (C_1, \dots, C_n) = (a_{ij})$. Siguin A_{ij} i B_{ij} els adjunts a la posició (i, j) de A i B respectivament. Llavors $B_{ik} = A_{ik}$, per a tot $i = 1, \dots, n$. Si $j \neq k$, com que A_{ij} és, tret del signe, el determinant d'una matriu $(n-1) \times (n-1)$, llavors $A_{ij} = \lambda B_{ij}$. Així obtenim que

$$\begin{aligned} \text{DF}_i(A) &= \sum_{1 \leq j < k} a_{ij} A_{ij} + \lambda a_{ik} A_{ik} + \sum_{k < j \leq n} a_{ij} A_{ij} \\ &= \sum_{1 \leq j < k} \lambda a_{ij} B_{ij} + \lambda a_{ik} B_{ik} + \sum_{k < j \leq n} \lambda a_{ij} B_{ij} \\ &= \lambda \text{DF}_i(B). \end{aligned}$$

Propietat (3). Hem de veure que si $k < k'$ i A té les columnes k i k' iguals llavors $\text{DF}_i(A) = 0$.

Sigui $A = (a_{ij})$ i denotem per A_{ij} l'adjunt a la posició (i, j) de A . Observem que si j és diferent de k i k' llavors A_{ij} és, tret del signe, el determinant d'una matriu $(n-1) \times (n-1)$ amb dues columnes iguals, i així $A_{ij} = 0$. Ara tenim que

$$\text{DF}_i(A) = a_{ik} A_{ik} + a_{ik'} A_{ik'}.$$

A més,

$$A_{ik'} = (-1)^{i+k'} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1,k'-1} & a_{1,k'+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,k} & \dots & a_{i-1,k'-1} & a_{i-1,k'+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,k} & \dots & a_{i+1,k'-1} & a_{i+1,k'+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{n,k'-1} & a_{n,k'+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

i aplicant la permutació $\sigma = (k' - 1, k' - 2, \dots, k)$ a les columnes $k, k + 1, \dots, k' - 1$ d'aquest últim determinant, i tenint en compte que les columnes k i k' de A són iguals, tenim que

$$A_{ik'} = (-1)^{i+k'} \varepsilon(\sigma) \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

on $\varepsilon(\sigma)$ és el signe de la permutació σ . Com que

$$(-1)^{i+k'} \varepsilon(\sigma) = (-1)^{i+k'} (-1)^{k'-1-k} = -(-1)^{i+k},$$

tenim que

$$A_{ik'} = -A_{ik}.$$

Per tant $\text{DF}_i(A) = a_{ik}A_{ik} + a_{ik'}A_{ik'} = a_{ik}A_{ik} - a_{ik}A_{ik} = 0$.

Propietat (4). Hem de veure que $\text{DF}_i(I_n) = 1$.

Per demostrar això cal observar que si eliminen la fila i i la columna i de la matriu identitat $n \times n$, obtenim una matriu identitat $(n-1) \times (n-1)$, i llavors l'adjunt a la posició (i, i) de la matriu identitat I_n és $(-1)^{i+i} \det(I_{n-1}) = 1$. Com que l'única posició no nul·la de la fila i de I_n és la (i, i) , obtenim que $\text{DF}_i(I_n) = 1$. ■

Com ja hem vist als exemples 8.1.2, el determinant de matrius 1×1 existeix. La proposició anterior demostra que si existeix el determinant de matrius $(n-1) \times (n-1)$ llavors també existeix el determinant de matrius $n \times n$. Així, per inducció, hem demostrat el resultat següent.

Teorema 8.2.3 *Per a tot enter positiu n existeix una única aplicació*

$$\det: M_n(K) \rightarrow K$$

que satisfà les propietats del determinant. ■

El mètode per calcular el determinant que dóna l'apartat (i) de la Proposició 8.2.2 es diu *desenvolupament del determinant per la fila i -ésima*; el que dóna l'apartat (ii) es diu *desenvolupament del determinant per la columna j -ésima*.

Aquest mètode de càlcul del determinant també dóna una manera de calcular inverses de matrius.

Proposició 8.2.4 *Si sigui $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, i sigui $\text{Adj}(A)$ la seva matriu adjunta. Llavors $A \cdot \text{Adj}(A)^t = \text{Adj}(A)^t \cdot A = \det(A)I_n$.*

En particular, si A és una matriu invertible $A^{-1} = (\det(A))^{-1} \text{Adj}(A)^t$.

DEMOSTRACIÓ. Calculem el producte $A \cdot \text{Adj}(A)^t = (c_{ij})$. Per la definició del producte de matrius,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk}.$$

En el cas $i = j$, aquesta fórmula correspon a fer el càlcul del determinant de A desenvolupant per la fila i . Així doncs, per a tot $i = 1, \dots, n$, $c_{ii} = \text{DF}_i(A) = \det(A)$.

Si $i \neq j$, i $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$ llavors

$$c_{ij} = \text{DF}_i \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix},$$

on la fila F_i està a les posicions i i j . Per tant, en aquest cas, $c_{ij} = 0$. Així,

$$A \cdot \text{Adj}(A)^t = \det(A)I_n.$$

Calculem ara $\text{Adj}(A)^t \cdot A = (d_{ij})$. Per la definició del producte de matrius,

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ki} a_{kj}.$$

En el cas $i = j$, aquesta fórmula correspon a fer el càlcul del determinant de A desenvolupant per la columna i . Així doncs, per a tot $i = 1, \dots, n$, $c_{ii} = \text{DC}_i(A) = \det(A)$.

Si $i \neq j$, i $A = (C_1, \dots, C_n)$ llavors

$$c_{ij} = \text{DC}_i(C_1, \dots, C_i, \dots, C_i, \dots, C_n),$$

on la columna C_i està a les posicions i i j . Per tant, en aquest cas, $c_{ij} = 0$. Així,

$$A \cdot \text{Adj}(A)^t = \det(A)I_n. \quad \blacksquare$$

Observació 8.2.5 Els mètodes de desenvolupament del determinant per una fila o per una columna donen mètodes inductius per calcular determinants de la mida que es vulgui. També es pot escriure una fórmula explícita del determinant en funció dels coeficients de la matriu. Si $A = (a_{ij})$ llavors

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

on S_n denota el grup de permutacions de n elements i $\varepsilon(\sigma)$ és el signe de la permutació σ .

Demostrar que la fórmula anterior és efectivament el determinant de la matriu no és difícil, però porta una certa feina.

Anem a veure la fórmula del determinant que obtenim per a $n = 3$. $S_3 = \{\text{id}, \sigma = (1, 2, 3), \sigma^2 = (1, 3, 2), \tau_1 = (1, 2), \tau_2 = (1, 3), \tau_3 = (2, 3)\}$.

Llavors

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)} + a_{1\sigma^2(1)}a_{2\sigma^2(2)}a_{3\sigma^2(3)} \\ &\quad - a_{1\tau_1(1)}a_{2\tau_1(2)}a_{3\tau_1(3)} - a_{1\tau_2(1)}a_{2\tau_2(2)}a_{3\tau_2(3)} \\ &\quad - a_{1\tau_3(1)}a_{2\tau_3(2)}a_{3\tau_3(3)} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad \diamond \end{aligned}$$

Exemples 8.2.6

- (1) Per calcular el determinant d'una matriu podem fer servir transformacions elementals, el desenvolupament per una fila o una columna i la fórmula directa donada a l'observació 8.2.5. Anem a calcular el determinant de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 & 7 \\ 7 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

fent servir una combinació dels tres mètodes.

Simplifiquem primer A utilitzant les propietats generals del determinant. Sumem a la tercera fila la segona multiplicada per -2 (el determinant no varia):

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Si sumem a la segona columna la quarta multiplicada per 5, el determinant continua essent el mateix i obtenim

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 27 & -3 & 4 \\ 3 & 20 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 13 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Desenvolupant el determinant respecte de la tercera fila obtenim:

$$\det(A) = (-1)^{3+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 27 & -3 \\ 3 & 20 & 2 \\ 7 & 13 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 27 & -3 \\ 3 & 20 & 2 \\ 7 & 13 & 5 \end{vmatrix}.$$

Al determinant que queda, restem la primera fila a la segona:

$$\det(A) = - \begin{vmatrix} 2 & 27 & -3 \\ 1 & -7 & 5 \\ 7 & 13 & 5 \end{vmatrix}.$$

Sumem, a la primera i a la tercera fila, la segona multiplicada respectivament per -2 i -7 per obtenir

$$\det(A) = - \begin{vmatrix} 0 & 41 & -13 \\ 1 & -7 & 5 \\ 0 & 62 & -30 \end{vmatrix}.$$

Desenvolupem respecte de la primera columna:

$$\det(A) = -(-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 41 & -13 \\ 62 & -30 \end{vmatrix}.$$

Ara,

$$\det(A) = 41 \cdot (-30) - (-13) \cdot 62 = -424.$$

- (2) La Proposició 8.2.4 dóna la fórmula per calcular la inversa d'una matriu. Per exemple, sigui $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Pel Teorema 8.1.4, A és invertible si i només si $\det(A) = ad - cb \neq 0$. Tenint en compte que els adjunts de A són

$$A_{11} = (-1)^{1+1}d = d \quad A_{12} = (-1)^{1+2}c = -c$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}b = -b \quad A_{22} = (-1)^{2+2}a = a,$$

obtenim que la matriu adjunta de A és $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. Llavors

$$A^{-1} = (\det(A))^{-1} \text{Adj}(A)^t = (ad - cb)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(3) Sigui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Tenim que $\det(A) = 1 \cdot (-3) \cdot (-5) + 1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \cdot 4 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot (-5) = 42 \neq 0$.

Llavors la matriu A és invertible. Calculem la inversa fent servir la Proposició 8.2.4.

Calculem primer els adjunts dels elements de A .

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 14, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 14,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5.$$

Segons aquest resultat la matriu adjunta de A és

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 14 & 14 & 14 \\ 6 & -9 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Així, aplicant la fórmula de la Proposició 8.2.4 obtenim que

$$A^{-1} = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 14 & 6 & 4 \\ 14 & -9 & 1 \\ 14 & 3 & -5 \end{pmatrix}. \quad \diamond$$

Acabarem fent un càlcul general del determinant que ens serà útil per al capítol següent.

Proposició 8.2.7 (i) *Sigui $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ una matriu tal que $a_{ij} = 0$ si $i > j$ (es diu que A és una matriu triangular superior ja que tots els elements de sota de la diagonal principal són zero). Llavors $\det(A) = a_{11} \dots a_{nn}$.*

(ii) *Sigui $A \in M_n(K)$ una matriu de la forma $A = \begin{pmatrix} \lambda I_r & B \\ 0 & A' \end{pmatrix}$, on $\lambda \in K$ i B i A' són matrius de mides adequades. Llavors $\det(A) = \lambda^r \det(A')$.*

DEMOSTRACIÓ. Demostrarem (i) per inducció sobre n . El cas $n = 1$ és clar. Suposem que $n > 1$ i que el resultat és cert per a $n - 1$. Llavors la primera columna de A té tots els elements nuls llevat potser de a_{11} . Desenvolupant el determinant de A per la primera columna obtenim $\det(A) = a_{11}A_{11}$. Com que A_{11} és el determinant d'una matriu $(n - 1) \times (n - 1)$ tal que les components de sota de la diagonal són zero llavors, per hipòtesi d'inducció, $A_{11} = a_{22} \dots a_{nn}$. Així obtenim que $\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$, tal com volíem veure.

Demostrarem (ii) per inducció sobre r . Si $r = 1$, desenvolupant per la primera columna ja obtenim que $\det(A) = \lambda A_{11} = \lambda \det(A')$. Suposem $r > 1$ i que l'enunciat és cert per a $r - 1$. Si $A = \begin{pmatrix} \lambda I_r & B \\ 0 & A' \end{pmatrix}$, llavors, desenvolupant per la primera columna, obtenim que $\det(A) = \lambda A_{11}$. Com que $A_{11} = \begin{vmatrix} \lambda I_{r-1} & B' \\ 0 & A' \end{vmatrix}$, per a certa matriu B' , per hipòtesi d'inducció, $A_{11} = \lambda^{r-1} \det(A')$. Així obtenim que $\det(A) = \lambda \cdot \lambda^{r-1} \det(A') = \lambda^r \det(A')$. ■

8.3 Exercicis

Exercici 1 *Calculeu els determinats següents (practiqueu diferents mètodes de càlcul).*

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1+i & 1 & -2 & 0 \\ 2+i & 3 & -4 & 3 \\ 4+i & 2 & -3 & 2 \\ 1-i & 2 & -4 & 6 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Exercici 2 Siguin A i B dues matrius quadrades $n \times n$ sobre un cos K . Digueu si són certes o falses les igualtats següents.

(a) $\det(A + B) = \det A + \det B$.

(b) $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.

(c)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(d) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

(e) $\det(-A) = -\det A$.

(f) $\det(-A) = \begin{cases} \det A & \text{si } n \text{ és parell,} \\ -\det A & \text{si } n \text{ és senar.} \end{cases}$

Exercici 3 (a) Calculeu els determinants següents.

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & b & b & a \\ c & c & b & a \\ d & c & b & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$$

(b) Demostreu que
$$\begin{vmatrix} 1 & a_0 & (a_0)^2 & \cdots & (a_0)^n \\ 1 & a_1 & (a_1)^2 & \cdots & (a_1)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & (a_n)^2 & \cdots & (a_n)^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

(Determinant de Vandermonde)

Exercici 4 Calculeu els determinants de matrius $n \times n$ següents.

$$\begin{vmatrix} 1 & n & \cdots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ -1 & -2 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}.$$

Exercici 5 Demostreu que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & \dots & 3n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & \dots & n^2 \end{vmatrix} = 0,$$

per a tot $n > 2$.

Exercici 6 Demostreu la fórmula del determinant de la matriu $n \times n$ següent.

$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b).$$

Exercici 7 Siguin A i B matrius quadrades $n \times n$. Demostreu que

$$\text{rang}(AB) = n \iff \text{rang}A = n \text{ i } \text{rang}B = n.$$

Exercici 8 Una matriu $A \in M_n(\mathbb{R})$ es diu ortogonal quan la seva inversa coincideix amb la seva transposada, $A^{-1} = A^t$.

- (a) Proveu que si A és ortogonal, aleshores $\det A = \pm 1$.
- (b) Proveu que si A i B són ortogonals, aleshores AB també ho és.
- (c) Trobeu totes les matrius ortogonals 2×2 .

Exercici 9 Siqui $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisimètrica, és a dir, tal que $A = -A^t$. Demostreu que

$$\det(A) = (-1)^n \det(A).$$

Deduïu que les matrius antisimètriques d'ordre senar tenen determinant zero.

Exercici 10 Trobeu la inversa de la matriu MN , on

$$M = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} \cos y & 0 & \sin y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin y & 0 & \cos y \end{pmatrix}$$

Exercici 11 Demostreu que si A és invertible, llavors $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

Capítol 9

Diagonalització de Matrius i d'Endomorfismes

En tot aquest capítol, K és un cos i V és un K -espai vectorial de dimensió finita $n > 0$.

Si $A \in M_{n \times m}(K)$ llavors, pel Teorema 6.2.3, existeixen matrius P i Q invertibles tals que $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Aquest resultat és molt útil per simplificar alguns càlculs amb matrius i reduir-los a càlculs en matrius del tipus $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Per segons quin tipus de problemes de càlcul matricial cal veure si, donada una matriu $A \in M_n(K)$, existeix una matriu P invertible tal que $P^{-1}AP$ té una forma senzilla. En aquest capítol, estudiarem quan existeix $P \in GL_n(K)$ tal que $P^{-1}AP$ és diagonal. Quan això passi, direm que la matriu A és diagonalitzable.

El Teorema 6.2.3 el vam demostrar fent servir només eines del càlcul matricial. Desenvolupar la teoria de la diagonalització des del punt de vista del càlcul matricial és molt artificial, els conceptes esdevenen molt més clars agafant un punt de vista més abstracte: pensant la matriu A com a matriu associada a un endomorfisme d'un espai vectorial V . Això ens portarà a definir què vol dir que un endomorfisme sigui diagonalitzable, i a desenvolupar la teoria per a endomorfismes.

9.1 Conceptes bàsics

Comencem donant una demostració diferent del Teorema 6.2.3, i així il·lustrem com pot portar a simplificar molt les idees, agafar el punt de vista abstracte de les aplicacions lineals.

Teorema 9.1.1 *Donada $A \in M_{m \times n}(K)$, existeixen P, Q matrius invertibles tals que $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on $I_r \in M_r(K)$ és la matriu identitat.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $V_1 = K^n$ i $V_2 = K^m$. Considerem l'aplicació lineal $f: V_1 \rightarrow V_2$ donada per $f(x_1, \dots, x_n) = \left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)^t$. Sigui B_1 i B_2 les bases canòniques de V_1 i de V_2 respectivament. Llavors $M(f, B_1, B_2) = A$.

Sigui $(v_1, \dots, v_s)$ una base de $\text{Ker } f$. Triem $w_1, \dots, w_r$ vectors de V_1 tals que $B'_1 = (w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s)$ sigui una base de V_1 . Llavors $f(w_1), \dots, f(w_r)$ formen una base de $\text{Im } f$ (vegeu el Teorema 7.2.6). Triem ara $u_1, \dots, u_t$ vectors de V_2 tals que $B'_2 = (f(w_1), \dots, f(w_r), u_1, \dots, u_t)$ sigui una base de V_2 . Com que, per a $i = 1, \dots, r$, $f(w_i) = 1 \cdot f(w_i)$ i, per $j = 1, \dots, s$, $f(v_j) = 0$, tenim que

$$M(f, B'_1, B'_2) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per la Fórmula del Canvi de Bases,

$$M(B_2, B'_2)M(f, B_1, B_2)M(B'_1, B_1) = M(f, B'_1, B'_2),$$

és a dir, agafant $P = M(B_2, B'_2)$ i $Q = M(B'_1, B_1)$, tenim

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

En aquesta demostració les matrius P i Q s'interpreten com matrius de canvis de base, a l'espai vectorial d'arribada i al de sortida respectivament, de l'aplicació lineal induïda per la matriu A .

En el cas d'una matriu quadrada $A \in M_n(K)$, podem pensar que A induïx un endomorfisme $f: K^n \rightarrow K^n$, donat per $f(x_1, \dots, x_n) = \left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)^t$. Si B denota la base canònica de K^n , llavors $M(f, B, B) = A$.

Notació: Per simplificar la notació, si $f: V \rightarrow V$ és un endomorfisme, i fixem una mateixa base B a la sortida i a l'arribada denotarem la matriu associada per $M(f, B)$. Parlarem de la matriu de l'endomorfisme f en la base B . $\diamond$

Proposició 9.1.2 *Sigui $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme. Sigui B una base de V i $A = M(f, B) \in M_n(K)$. Llavors, $A' \in M_n(K)$ és la matriu de f en una certa base si i només si existeix una matriu $P \in M_n(K)$ invertible tal que $P^{-1}AP = A'$.*

DEMOSTRACIÓ. Suposem que existeix la base B' tal que $A' = M(f, B')$. La Fórmula del Canvi de Bases ens diu que

$$A' = M(f, B') = M(B, B')M(f, B)M(B', B) = P^{-1}AP,$$

on $P = M(B', B)$.

Recíprocament, suposem que $P = (p_{ij})$ és una matriu invertible tal que

$$P^{-1}AP = A'.$$

Si $B = (v_1, \dots, v_n)$, per a $j = 1, \dots, n$, definim $u_j = \sum_{i=1}^n p_{ij}v_i$. Llavors, com que les columnes de P formen una base de $M_{n \times 1}(K)$ (vegeu el Teorema 6.3.4), $B' = (u_1, \dots, u_n)$ és una base de V i, a més, $P = M(B', B)$. Per la Fórmula del Canvi de Base,

$$A' = P^{-1}AP = M(B, B')M(f, B)M(B', B) = M(f, B'). \blacksquare$$

Diem que una matriu $A \in M_n(K)$ és *diagonalitzable* si existeix una matriu invertible $P \in M_n(K)$ tal que $P^{-1}AP$ és diagonal, és a dir

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

per a certs $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

Un endomorfisme f de V és diagonalitzable si existeix una base B de V tal que la matriu de f en aquesta base és diagonal.

Noteu que, per la Proposició 9.1.2, un endomorfisme f de V és diagonalitzable si i només si ho és la matriu de f en qualsevol base de V .

Observació 9.1.3 Sigui $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme. Suposem que

$$B = (v_1, \dots, v_n)$$

és una base de V tal que $M(f, B)$ és la matriu diagonal $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Això vol dir que, per a $i = 1, \dots, n$, $f(v_i) = \lambda_i v_i$, és a dir B és una base tal que tots els seus elements satisfan que la seva imatge per f és un múltiple d'ell mateix. Aquest tipus de vectors es diuen vectors propis de f . $\diamond$

9.2 Vectors propis

Sigui $f \in \text{End}_K(V)$. Un *valor propi* de f és un escalar $\lambda \in K$ tal que existeix $u \in V \setminus \{0\}$ que compleix

$$f(u) = \lambda u.$$

Un *vector propi* de f és un vector no nul $v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$, per a algun escalar $\lambda \in K$, i en aquest cas, diem que v és un vector propi de f amb valor propi λ . Si λ és un valor propi de f , es diu que $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$ és el *subespai propi* de f de valor propi λ .

L'observació 9.1.3 ens diu que un endomorfisme f de V diagonalitza si i només si V té una base formada per vectors propis de f .

Proposició 9.2.1 *Sigui $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme. Per a un vector $v \in V$ les afirmacions següents són equivalents.*

- (i) v és un vector propi de f .
- (ii) Existeix $\lambda \in K$ tal que v és un vector no nul de $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$.
- (iii) v és un vector no nul tal que $f(\langle v \rangle) \subseteq \langle v \rangle$

En el cas de l'apartat (ii), diem que v és un vector propi de f de valor propi λ .

DEMOSTRACIÓ. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Per definició, v és un vector propi si i només si és un vector no nul i existeix $\lambda \in K$ tal que $f(v) = \lambda v = \lambda \text{Id}(v)$. És a dir, v és un vector propi si i només si v és un vector no nul tal que $(f - \lambda \text{Id})(v) = 0$. Això és el mateix que dir que v és un vector no nul de $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) $f(\langle v \rangle) \subseteq \langle v \rangle$ si i només si, per tot $\alpha \in K$, $f(\alpha v) \in \langle v \rangle$. Com que $f(\alpha v) = \alpha f(v)$, això és cert si i només si $f(v) \in \langle v \rangle$, és a dir si existeix $\lambda \in K$ tal que $f(v) = \lambda v$. ■

Observació 9.2.2 Per calcular els valors propis, en general, farem servir l'apartat (ii) de la Proposició anterior. Si $f: V \rightarrow V$ és un endomorfisme i, en una certa base B de V , $M(f, B) = A$, llavors $f - \lambda \text{Id}$ també és un endomorfisme de V i, a més, $M(f - \lambda \text{Id}, B) = A - \lambda I_n$.

L'apartat (iii) de la Proposició anterior dóna una descripció geomètrica dels vectors propis d'un endomorfisme f .

A la vista de l'afirmació (ii) de la Proposició 9.2.1, els vectors propis de valor propi 0 són exactament els vectors no nuls de $\text{Ker}(f)$. Noteu que si v és un vector propi de valor propi 0 llavors $f(\langle v \rangle) = \{0\} \subset \langle v \rangle$. En canvi, v és un vector propi de f de valor propi $\lambda \neq 0$ si i només si $f(\langle v \rangle) = \langle v \rangle$. ◇

Lema 9.2.3 *Sigui $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme. Per a $i = 1, \dots, r$, sigui $v_i \in \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$, on $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ són elements diferents de K . Llavors $v_1 + \dots + v_r = 0$ si i només si $v_1 = \dots = v_r = 0$.*

DEMOSTRACIÓ. Ho demostrarem per inducció sobre r . Si $r = 1$, no hi ha res a dir. Suposem que $r > 1$ i que l'enunciat és cert per a $r-1$. Suposem que $v_1 + \dots + v_r = 0$, on $v_i \in \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$, per a tot $i = 1, \dots, r$. Aplicant $f - \lambda_r \text{Id}$ a aquesta igualtat, obtenim

$$0 = (f - \lambda_r \text{Id})(v_1 + \dots + v_r) = (f - \lambda_r \text{Id})(v_1) + \dots + (f - \lambda_r \text{Id})(v_r).$$

Com que $v_i \in \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$, $(f - \lambda_i \text{Id})(v_i) = 0$. Llavors $f(v_i) = \lambda_i v_i$. Aleshores, per tot $i = 1, \dots, r$,

$$(f - \lambda_r \text{Id})(v_i) = f(v_i) - \lambda_r v_i = (\lambda_i - \lambda_r)v_i.$$

Així doncs

$$\begin{aligned} 0 &= (f - \lambda_r \text{Id})(v_1 + \dots + v_r) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_r)v_1 + \dots + (\lambda_{r-1} - \lambda_r)v_{r-1} + (\lambda_r - \lambda_r)v_r \\ &= (\lambda_1 - \lambda_r)v_1 + \dots + (\lambda_{r-1} - \lambda_r)v_{r-1}. \end{aligned}$$

Per a tot $i = 1, \dots, r-1$, $(\lambda_i - \lambda_r)v_i \in \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$ i, per hipòtesi d'inducció, $(\lambda_i - \lambda_r)v_i = 0$. Com que $\lambda_i - \lambda_r \neq 0$, podem concloure que, per a tot $i = 1, \dots, r-1$, $v_i = 0$, i llavors també $v_r = 0$. ■

Teorema 9.2.4 *Sigui $f \in \text{End}_K(V)$. Siguin $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ elements diferents de K . Per a $i = 1, \dots, r$, sigui $A_i = \{v_{i1}, \dots, v_{in_i}\}$ un conjunt de vectors propis de valor propi λ_i linealment independents. Llavors $A_1 \cup \dots \cup A_r$ és un conjunt de vectors linealment independents.*

DEMOSTRACIÓ. Hem de veure que, en una combinació lineal del tipus

$$\sum_{i=1}^r (\alpha_{i1}v_{i1} + \dots + \alpha_{in_i}v_{in_i}) = 0,$$

tots els escalars són zero. Per a $i = 1, \dots, r$, sigui

$$w_i = \alpha_{i1}v_{i1} + \dots + \alpha_{in_i}v_{in_i} \in \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}).$$

Pel Lema 9.2.3, tenim que $w_i = 0$, per a tot $i = 1, \dots, r$. Com que cada w_i és combinació lineal de vectors linealment independents, podem concloure que, per a tot $i = 1, \dots, r$, $\alpha_{i1} = \dots = \alpha_{in_i} = 0$. ■

9.3 Polinomi característic d'un endomorfisme.

Sigui $A \in M_n(K)$. Definim el *polinomi característic* de A com $p_A(x) = \det(A - xI_n)$.

Observació 9.3.1 Sigui $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Fent servir al fórmula del determinant que vam donar a l'observació 8.2.5, podem veure que

$$p_A(x) = (a_{11} - x) \dots (a_{nn} - x) + q(x),$$

on $q(x)$ és un polinomi de $K[x]$ de grau com a molt $n - 2$. Així doncs, $p_A(x)$ és un polinomi de grau n de $K[x]$ tal que el coeficient de x^n és $(-1)^n$ i el de x^{n-1} és $(-1)^{n-1}(a_{11} + \dots + a_{nn})$. Es poden donar fórmules per a tots els coeficients del polinomi característic en funció dels coeficients de la matriu. És útil i fàcil de recordar que el terme independent del polinomi característic de A és precisament $\det(A)$.

Així el polinomi característic d'una matriu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(K)$ és $p_A(x) = x^2 - (a_{11} + a_{22})x + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. $\diamond$

Proposició 9.3.2 *Sigui f un endomorfisme de V . Siguin B_1, B_2 dues bases de V . Llavors $p_{M(f, B_1)}(x) = p_{M(f, B_2)}(x)$.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $P = M(B_2, B_1)$ llavors, per la Fórmula del canvi de Base, $M(f, B_2) = P^{-1}M(f, B_1)P$. Fem el càlcul següent,

$$\begin{aligned} p_{M(f, B_2)}(x) &= \det(M(f, B_2) - xI_n) \\ &= \det(P^{-1}M(f, B_1)P - xP^{-1}P) \\ &= \det(P^{-1}(M(f, B_1) - xI_n)P) \\ &= \det(P^{-1})p_{M(f, B_1)}(x)\det(P) \\ &= p_{M(f, B_1)}(x). \blacksquare \end{aligned}$$

Sigui f un endomorfisme de V i sigui B una base de V . Definim el polinomi característic de f com el polinomi característic de la matriu de f en la base B , és a dir

$$p_f(x) = p_{M(f, B)}(x).$$

La Proposició 9.3.2 demostra que el polinomi característic d'un endomorfisme no depèn de la base que triem.

La importància de $p_f(x)$ en la teoria de la diagonalització es deu al fet següent.

Proposició 9.3.3 *Sigui f un endomorfisme de V i sigui $\lambda \in K$. Llavors λ és un valor propi de f si i només si λ és una arrel de $p_f(x)$.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $v \in V$. Llavors v és un vector propi de valor propi λ si i només si v és un vector no nul de $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$. Si B és una base de V i $M(f, B) = A$, llavors la matriu de $f - \lambda \text{Id}$ en la base B és $A - \lambda I_n$, i $f - \lambda \text{Id}$ té nucli no trivial si i només si la matriu $A - \lambda I_n$ no és invertible. Llavors f té un vector propi de valor propi λ si i només si $A - \lambda I_n$ no és invertible, és a dir, si i només si $p_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$. ■

Observacions 9.3.4

- (1) Hi ha autors que defineixen el polinomi característic d'una matriu $A \in M_n(K)$ com $\det(xI_n - A)$. Com que $A - xI_n = -(xI_n - A)$, $\det(A - xI_n) = (-1)^n \det(xI_n - A)$. Això ens diu que, si n és parell, no hi ha diferència entre la definició que hem donat i aquesta altra, i si n és senar, difereixen en el signe.
- (2) En el capítol 8, hem estudiat el determinant d'una matriu sobre un cos. Així, què vol dir $\det(A - x\text{Id})$? $K[x]$ és un domini d'integritat i, de la mateixa manera que $\mathbb{Z}$ es pot incloure a $\mathbb{Q}$, tot domini d'integritat s'inclou en un cos. En el cas particular de $K[x]$ tenim

$$K[x] \subseteq K(x) = \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \mid p(x), q(x) \in K[x], q(x) \neq 0 \right\},$$

on

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{c(x)}{d(x)} \iff a(x)d(x) = b(x)c(x),$$

i definim la suma i el producte per

$$\frac{a(x)}{b(x)} + \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)d(x) + b(x)c(x)}{b(x)d(x)} \quad \text{i} \quad \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)c(x)}{b(x)d(x)}.$$

$K(x)$ és un cos que es diu cos de fraccions de $K[x]$.

Així podem pensar $A - x\text{Id} \in M_n(K(x))$, i per tant té sentit calcular el seu determinant.

- (3) Donada una matriu $A \in M_n(K)$, sabem que la matriu de l'endomorfisme f de K^n , definit per

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)^t,$$

en la base canònica de K^n és A . Doncs bé! Es diu que $u \in K^n$ és un vector propi de A si u és un vector propi de f , és a dir, si $u \neq 0$ i

$$Au^t = \lambda u^t,$$

per a cert $\lambda \in K$. Es diu que $\mu \in K$ és un valor propi de A si μ és un valor propi de f . A més, sabem que això passa si i només si $p_A(\mu) = 0$. $\diamond$

Proposició 9.3.5 *Segui f un endomorfisme de V . Supposem que $p_f(x) = (x - \lambda)^r q(x)$, $q(\lambda) \neq 0$ i $r \geq 1$. Llavors $1 \leq \dim (\text{Ker} (f - \lambda \text{Id})) \leq r$.*

DEMOSTRACIÓ. Segui $s = \dim (\text{Ker} (f - \lambda \text{Id}))$. Com que λ és una arrel del polinomi característic, per la Proposició 9.3.3, sabem que hi ha vectors propis de valor propi λ llavors $s \geq 1$. Segui $v_1, \dots, v_s$ una base de $\text{Ker} (f - \lambda \text{Id})$, i siguin $w_1, \dots, w_{n-s}$ tals que $B = (v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_{n-s})$ sigui una base de V . Com que els primers s vectors de la base són vectors propis de f de valor propi λ , obtenim que $M(f, B)$ és una matriu del tipus $A = \begin{pmatrix} \lambda I_s & B \\ 0 & A' \end{pmatrix}$. Per la Proposició 8.2.7, $p_f(x) = \begin{vmatrix} (\lambda - x)I_s & B \\ 0 & A' - xI_{n-s} \end{vmatrix} = (\lambda - x)^s t(x)$. Com que λ és una arrel de multiplicitat r de $p_f(x)$, $s \leq r$. ■

Teorema 9.3.6 *Un endomorfisme f de V és diagonalitzable si i només si existeixen $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ diferents i enters positius $n_1, \dots, n_r$ tals que*

$$p_f(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_r)^{n_r}$$

i $\dim (\text{Ker} (f - \lambda_i \text{Id})) = n_i$, per a tot $i = 1, \dots, r$.

DEMOSTRACIÓ. Supposem que f és diagonalitzable. Llavors existeix una base $B = (v_1, \dots, v_n)$ de V i existeixen $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ diferents i $n_1, \dots, n_r$ enters positius tals que

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & 0 & \\ & & & \ddots & & \\ & & 0 & & \lambda_r & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}.$$

Ara $p_f(x) = p_{M(f, B)}(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_r)^{n_r}$.

Ara $v \in \text{Ker} (f - \lambda_i \text{Id}_V)$ si i només si

$$(M(f, B) - \lambda_i I_n)M(v, B) = 0,$$

és a dir:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_i & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_1 - \lambda_i & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & 0 & & & \lambda_r - \lambda_i & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_r - \lambda_i \end{pmatrix} M(v, B) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si pensem aquesta igualtat com un sistema d'equacions lineals amb incògnites les coordenades de v respecte de B , tenim que la solució del sistema forma un subespai vectorial de dimensió igual a n menys el rang de la matriu del sistema. En aquest cas, com que la matriu és diagonal i té exactament n_i zeros a la diagonal, tenim que el seu rang és $n - n_i$. Per tant

$$\dim(\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_V)) = n - (n - n_i) = n_i.$$

Suposem ara que

$$p_f(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_r)^{n_r},$$

amb $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ diferents, i

$$\dim(\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_V)) = n_i \quad \forall i = 1, \dots, r.$$

Veiem que $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id}_V) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(f - \lambda_r \text{Id}_V)$.

Sigui B_i una base de $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_V)$. Per hipòtesi, B_i té n_i elements. Llavors

$$B = B_1 \cup \dots \cup B_r$$

és un conjunt de $n_1 + \dots + n_r = n = \text{gr}(p_f(x))$ vectors que són linealment independents pel Teorema 9.2.4. Llavors B és una base de V formada per vectors propis, per tant f és diagonalitzable. De fet

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_1 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & 0 & & & \lambda_r & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix} \cdot \blacksquare$$

Corol·lari 9.3.7 *Tot endomorfisme f de V tal que*

$$p_f(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n),$$

amb $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ diferents, és diagonalitzable. ■

Exemples 9.3.8

- (1) Sigui $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorfisme definit per $f(x, y) = (x + y, y)$. La matriu de f respecte de la base canònica de $\mathbb{R}^2$ és

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomi característic de f és

$$p_f(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = (x-1)^2.$$

Calculem els vectors propis de valor propi 1 de f . Tenim que

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per trobar els vectors de $\text{Ker}(f - \text{Id})$ hem de resoldre el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

és a dir

$$\text{Ker}(f - \text{id}) = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Clarament $\dim(\text{Ker}(f - \text{Id})) = 1 < 2$, i per tant f no diagonalitza.

- (2) Sigui $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorfisme definit per $g(x, y) = (x - y, -x + y)$. La matriu de g respecte de la base canònica de $\mathbb{R}^2$ és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomi característic de g és

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ -1 & 1-x \end{vmatrix} = (x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x = (x-2)x.$$

Per tant g diagonalitza.

$(1, 1)$ és un vector propi de g de valor propi 0,

$(1, -1)$ és un vector propi de g de valor propi 2.

Si

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

i

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(3) Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Estudiem si A diagonalitza sobre $\mathbb{R}$. Per això podem pensar que la matriu A és la matriu d'un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ respecte de la base canònica, i sabem que A diagonalitza si i només si f diagonalitza. Calculem el polinomi característic de f :

$$p_f(x) = p_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & -x & -1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = -(x-1)(x^2+1).$$

Com que $p_A(x)$ no descompon en producte de factors de grau 1 sobre els reals, A no diagonalitza sobre $\mathbb{R}$.

Estudiem si A diagonalitza sobre $\mathbb{C}$. Igual que en l'estudi anterior, podem pensar que A és la matriu d'un endomorfisme g de $\mathbb{C}^3$ respecte de la base canònica. El polinomi característic de g és:

$$p_g(x) = p_A(x) = -(x-1)(x-i)(x+i).$$

Per tant A diagonalitza. Calculem una base de vectors propis de A . Per això hem de resoldre els sistemes d'equacions lineals següents:

$$(A - I_3)X = 0, \quad (A - iI_3)X = 0 \quad \text{i} \quad (A + iI_3)X = 0.$$

El vector $(1, 0, 0)$ és solució del primer sistema i, per tant, és un vector propi de A de valor propi 1. El vector $(0, i, 1)$ és solució del segon sistema i, per tant, és un vector propi de A de valor propi i . El vector $(0, -i, 1)$ és solució del tercer i, per

tant, és un vector propi de A de valor propi $-i$. Posant aquests vectors en forma de columna obtenim la matriu

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La seva inversa és

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i/2 & 1/2 \\ 0 & i/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ara tenim que

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i/2 & 1/2 \\ 0 & i/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i/2 & 1/2 \\ 0 & i/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}. \diamond \end{aligned}$$

9.4 Exercicis

Exercici 1 *Sigui* $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \longrightarrow (x, 3x - y - 2z, -6x + 6y + 6z)$$

- Demostreu que f és una aplicació lineal, i trobeu la seva matriu en la base canònica (diguem-n'hi A).*
- Trobeu el polinomi característic de f i factoritzeu-lo. Quins són els valors propis de f ?*
- Calculeu els subespais propis corresponents a cada valor propi de f .*
- Existeix alguna base de $\mathbb{R}^3$ formada exclusivament per vectors propis de f ? Diagonalitza f ?*
- Calculeu la matriu de f en la base de vectors propis de l'apartat anterior i relacioneu-la amb la matriu A del primer apartat.*

Exercici 2 *Donada*

$$A = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

calculeu A^{1438} i $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$.

Exercici 3 Estudieu la diagonalització sobre $\mathbb{R}$ i sobre $\mathbb{C}$, dels endomorfismes representats per les matrius següents, referides a la base canònica:

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 17 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -7 & -20 \\ 0 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+i & -i & i \\ -2i & 2 & -2i \\ -i & -i & 2-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercici 4 Sigui $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Demostreu que l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ donat per $f(x, y, z) = (-x - 3y, -3x - y + 2z, 2z)$ deixa E invariant, és a dir $f(E) \subseteq E$. Calculeu una base de E i la matriu de la restricció $f|_E$ de f a E en aquesta base. Calculeu tots els endomorfismes de $\mathbb{R}^3$ que siguin diagonalitzables, que deixin E invariant i que coincideixin amb f sobre E .

Exercici 5 Sigui $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme. Siguin B_1, B_2 bases de V . Demostreu que $\det M(f, B_1) = \det M(f, B_2)$. (Això permet definir el determinant d'un endomorfisme com $\det f = \det M(f, B_1)$).

Exercici 6 Siguin E un $\mathbb{R}$ -espai vectorial i $f: E \rightarrow E$ un endomorfisme. Proveu que:

- (a) $\dim E$ senar $\implies f$ té almenys un valor propi.
- (b) $\dim E$ parell i $\det f < 0 \implies f$ té almenys dos valors propis diferents.
- (c) Hi ha exemples en què $\dim E$ és parell i f no té valors propis.

Exercici 7 Estudieu segons els valors dels paràmetres a i b la diagonalització dels endomorfismes de $\mathbb{R}^3$ que, en la base canònica, tenen les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a-b & b & -1 \\ -b & a-b & -1 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Exercici 8 Quins valors poden prendre a i d per tal que les matrius següents representin el mateix endomorfisme de $\mathbb{C}^2$?

$$\begin{pmatrix} a & -8 \\ 5 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}.$$

Exercici 9 Considerem l'endomorfisme $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ donat per

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + y - z - t, x - y + z - t, x - y - z + t).$$

Calculeu $f^{100}(1, 0, -1, -1)$.

Exercici 10 Sigui $f: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ l'endomorfisme definit per

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) = a + b + (a + b)x + (a - b + 2c + d)x^2 + (2a + b + c + 2d)x^3.$$

- (a) Calculeu la matriu de f respecte de la base $(1, x, x^2, x^3)$.
- (b) Trobeu el polinomi característic de f i factoritzeu-lo. Quins són els valors propis de f ?
- (c) Calculeu els subespais propis corresponents a cada valor propi de f .
- (d) És f diagonalitzable?
- (e) Calculeu $f^{1000}(x^2)$.

Capítol 10

Espai Dual

En el capítol 7, hem vist que el conjunt de totes les aplicacions lineals entre dos espais vectorials sobre el mateix cos K , amb la suma d'aplicacions i el producte per escalars, és un K -espai vectorial (vegeu la Proposició 7.1.2). Aquí estudiarem un cas particular d'aquest tipus d'espais vectorials: l'espai dual.

En aquest capítol, K és un cos i V és un K -espai vectorial de dimensió finita $n > 0$.

10.1 Definició i propietats

L'*espai dual* de V és $V^* = \mathcal{L}(V, K)$, el K -espai vectorial de totes les aplicacions lineals de V a K . Cada element de V^* es diu *forma lineal* sobre V .

Per la Proposició 7.4.1, $\dim V^* = n = \dim V$. Sigui $B = (u_1, \dots, u_n)$ una base de V . Siguin $u_1^*, \dots, u_n^*$ les formes lineals sobre V tals que

$$u_i^*(u_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

Llavors $M(u_i^*, B, (1)) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, amb l'1 a la posició i .

Per la Proposició 7.4.1, $B^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ és una base de V^* . Aquesta base de V^* es diu *base dual* de B .

La Proposició següent ens diu com calcular les coordenades d'una forma lineal $\omega \in V^*$ respecte la base dual B^* .

Proposició 10.1.1 *Siguin $B = (u_1, \dots, u_n)$ una base de V i $B^* = (u_i^*, \dots, u_n^*)$ la*

seva base dual. Llavors

$$C(\omega, B^*) = \begin{pmatrix} \omega(u_1) \\ \vdots \\ \omega(u_n) \end{pmatrix} = M(\omega, B, (1))^t, \quad \forall \omega \in V^*.$$

DEMOSTRACIÓ. Sigui $C(\omega, B^*) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Llavors

$$\omega = \sum_{j=1}^n a_j u_j^*$$

$$\text{i } \omega(u_i) = \left(\sum_{j=1}^n a_j u_j^* \right) (u_i) = \sum_{j=1}^n a_j u_j^*(u_i) = a_i. \blacksquare$$

Exemple 10.1.2 Calculem la base dual de la base

$$B = ((1, 2, 3), (-1, 0, 1), (1, 1, 2))$$

de $\mathbb{R}^3$. Sigui

$$B_0 = (e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1))$$

la base canònica de $\mathbb{R}^3$. Observem que la base dual de la base canònica és

$$B_0^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*),$$

amb $e_1^*(x, y, z) = x$, $e_2^*(x, y, z) = y$ i $e_3^*(x, y, z) = z$. Sabem que

$$M(B_0^*, B^*) = (C(e_1^*, B^*), C(e_2^*, B^*), C(e_3^*, B^*)).$$

Per la Proposició 10.1.1, tenim que

$$M(B_0^*, B^*) = \begin{pmatrix} e_1^*(1, 2, 3) & e_2^*(1, 2, 3) & e_3^*(1, 2, 3) \\ e_1^*(-1, 0, 1) & e_2^*(-1, 0, 1) & e_3^*(-1, 0, 1) \\ e_1^*(1, 1, 2) & e_2^*(1, 1, 2) & e_3^*(1, 1, 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Com que $M(B^*, B_0^*) = M(B_0^*, B^*)^{-1}$, tenim que

$$M(B^*, B_0^*) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 & -2 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Així $B^* = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, on

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{1}{2}e_1^* + \frac{3}{2}e_2^* - \frac{1}{2}e_3^* \\ \omega_2 &= -\frac{1}{2}e_1^* - \frac{1}{2}e_2^* + \frac{1}{2}e_3^* \\ \omega_3 &= e_1^* - 2e_2^* + e_3^* \end{aligned}$$

Per tant

$$\begin{aligned}\omega_1(x, y, z) &= -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z \\ \omega_2(x, y, z) &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ \omega_3(x, y, z) &= x - 2y + z\end{aligned}$$

◇

Sigui $f : V_1 \rightarrow V_2$ una aplicació lineal entre dos K -espais vectorials V_1 i V_2 . Definim l'*aplicació dual* de f per

$$\begin{aligned}f^* : V_2^* &\longrightarrow V_1^* \\ \omega &\longmapsto \omega \circ f\end{aligned}$$

Veiem les propietats de les aplicacions duals.

Proposició 10.1.3 *Siguin V_1, V_2 i V_3 K -espais vectorials. Siguin $g, f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, $h \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$. Llavors*

$$(i) \quad f^* \in \mathcal{L}(V_2^*, V_1^*).$$

$$(ii) \quad (f + g)^* = f^* + g^*.$$

$$(iii) \quad (\alpha f)^* = \alpha f^*, \quad \forall \alpha \in K.$$

$$(iv) \quad (h \circ f)^* = f^* \circ h^*.$$

DEMOSTRACIÓ. Per demostrar (i), hem de veure que f^* és lineal. Siguin $\omega_1, \omega_2 \in V_2^*$, $u \in V_1$ i $\alpha \in K$. Ara tenim que

$$\begin{aligned}(f^*(\omega_1 + \omega_2))(u) &= ((\omega_1 + \omega_2) \circ f)(u) \\ &= (\omega_1 + \omega_2)(f(u)) \\ &= \omega_1(f(u)) + \omega_2(f(u)) \\ &= (f^*(\omega_1))(u) + (f^*(\omega_2))(u) \\ &= (f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2))(u).\end{aligned}$$

Per tant $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2)$. També tenim que

$$\begin{aligned}(f^*(\alpha\omega_1))(u) &= ((\alpha\omega_1) \circ f)(u) \\ &= (\alpha\omega_1)(f(u)) \\ &= \alpha\omega_1(f(u)) \\ &= \alpha(f^*(\omega_1))(u) \\ &= (\alpha f^*(\omega_1))(u).\end{aligned}$$

Per tant $f^*(\alpha\omega_1) = \alpha f^*(\omega_1)$. Així, f^* és lineal.

Demostrem ara (ii). Siguin $\omega \in V_2^*$ i $u \in V_1$. Llavors

$$\begin{aligned}
 ((f+g)^*(\omega))(u) &= (\omega \circ (f+g))(u) \\
 &= \omega((f+g)(u)) \\
 &= \omega(f(u) + g(u)) \\
 &= \omega(f(u)) + \omega(g(u)) \\
 &= (f^*(\omega))(u) + (g^*(\omega))(u) \\
 &= (f^*(\omega) + g^*(\omega))(u) \\
 &= ((f^* + g^*)(\omega))(u).
 \end{aligned}$$

Per tant $(f+g)^*(\omega) = (f^* + g^*)(\omega)$, i així obtenim que $(f+g)^* = f^* + g^*$.

També tenim que si $\alpha \in K$ llavors

$$\begin{aligned}
 ((\alpha f)^*(\omega))(u) &= (\omega \circ (\alpha f))(u) \\
 &= \omega((\alpha f)(u)) \\
 &= \omega(\alpha f(u)) \\
 &= \alpha \omega(f(u)) \\
 &= \alpha(f^*(\omega))(u) \\
 &= (\alpha f^*(\omega))(u) \\
 &= ((\alpha f^*)(\omega))(u).
 \end{aligned}$$

Per tant $(\alpha f)^*(\omega) = (\alpha f^*)(\omega)$, i així obtenim que $(\alpha f)^* = \alpha f^*$, cosa que demostra (iii).

Finalment, demostrem (iv). Sigui $\omega_3 \in V_3^*$. Llavors

$$(h \circ f)^*(\omega_3) = \omega_3 \circ (h \circ f) = (\omega_3 \circ h) \circ f = f^*(\omega_3 \circ h) = f^*(h^*(\omega_3)) = (f^* \circ h^*)(\omega_3).$$

Per tant $(h \circ f)^* = f^* \circ h^*$. ■

Proposició 10.1.4 *Siguin V_1 i V_2 K -espais vectorials no nuls de dimensió finita. Siguin B_1 i B_2 bases de V_1 i V_2 respectivament. Llavors*

$$M(f^*, B_2^*, B_1^*) = M(f, B_1, B_2)^t, \quad \forall f \in \mathcal{L}(V_1, V_2).$$

DEMOSTRACIÓ. Siguin $B_1 = (u_1, \dots, u_n)$ i $B_2 = (v_1, \dots, v_m)$. Llavors

$$\begin{aligned}
 M(f^*, B_2^*, B_1^*) &= (C(f^*(v_1^*), B_1^*), \dots, C(f^*(v_m^*), B_1^*)) \\
 &= (C(v_1^* \circ f, B_1^*), \dots, C(v_m^* \circ f, B_1^*)) \\
 &= \begin{pmatrix} v_1^*(f(u_1)) & \dots & v_m^*(f(u_1)) \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^*(f(u_n)) & \dots & v_m^*(f(u_n)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(f(u_1), B_2)^t \\ \vdots \\ C(f(u_n), B_2)^t \end{pmatrix} \\
 &= (C(f(u_1), B_2), \dots, C(f(u_n), B_2))^t = M(f, B_1, B_2)^t.
 \end{aligned}$$

La quarta igualtat és perquè si $f(u_1) = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$, llavors $v_i^*(f(u_1)) = \alpha_i$. ■

Com a conseqüència tenim el resultat següent.

Corol·lari 10.1.5 *Siguin B_1, B_2 dues bases d'un K -e.v. V de dimensió finita. Llavors*

$$M(B_2^*, B_1^*) = M(B_1, B_2)^t.$$

DEMOSTRACIÓ. Només cal observar que l'aplicació dual de l'aplicació identitat de V és l'aplicació identitat de V^* , i aplicar la Proposició anterior, agafant $f = \text{id}_V$. ■

Exemple 10.1.6 Sigui $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'aplicació lineal definida per $f(x, y, z) = (x - y, y - z)$. Calculem la dimensió i una base de $\text{Ker}(f^*)$ i de $\text{Im}(f^*)$.

Siguin B_1, B_2 les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ respectivament. Llavors

$$M(f, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sabem, per la Proposició 10.1.4, que

$$M(f^*, B_2^*, B_1^*) = M(f, B_1, B_2)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Com que l'última matriu té rang 2, tenim que $\dim \text{Im}(f^*) = 2$. Ara

$$\dim \text{Ker}(f^*) = \dim (\mathbb{R}^2)^* - \dim \text{Im}(f^*) = 2 - 2 = 0.$$

A més, les columnes de l'última matriu són les coordenades dels vectors ω_1, ω_2 d'una base de $\text{Im}(f^*)$ respecte de B_1^* . Per tant, si $B_1^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$, tenim que

$$\omega_1 = e_1^* - e_2^* \quad \text{i} \quad \omega_2 = e_2^* - e_3^*$$

formen una base de $\text{Im}(f^*)$. I les formes lineals ω_1, ω_2 estan definides per

$$\omega_1(x, y, z) = x - y \quad \text{i} \quad \omega_2(x, y, z) = y - z.$$

Com que $\text{Ker}(f^*) = \{0\}$, $\emptyset$ és una base de $\text{Ker}(f^*)$. ◇

10.2 L'espai bidual

L'espai bidual de V és $V^{**} = (V^*)^*$.

Com hem vist, per la Proposició 7.4.1, $\dim V^* = n = \dim V$. Per tant, V i V^* són espais vectorials isomorfs, i també tenim que V^* i V^{**} són isomorfs, és a dir que els tres espais vectorials V , V^* i V^{**} són isomorfs.

Sabem que per definir un isomorfisme entre V i V^{**} només cal agafar una base $B = (u_1, \dots, u_n)$ de V i una base $(v_1, \dots, v_n)$ de V^{**} i considerar l'únic isomorfisme $f: V \rightarrow V^{**}$ tal que $f(u_i) = v_i$, per a tot $i = 1, \dots, n$.

Doncs bé! Ara veurem que podem definir un isomorfisme de V a V^{**} sense usar cap base. Aquests tipus d'isomorfismes es diuen naturals i ens permeten identificar les estructures algebraiques entre les quals estan definits.

Proposició 10.2.1 *L'aplicació*

$$\begin{array}{llll} \varphi: V & \longrightarrow & V^{**} & \\ u & \longmapsto & \varphi(u): V^* & \longrightarrow K \\ & & \omega & \longmapsto \omega(u) \end{array}$$

és un isomorfisme.

DEMOSTRACIÓ. Veiem que φ és lineal. Siguin $u, v \in V$, $\lambda \in K$ i $\omega \in V^*$. Hem de veure que

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$$

i

$$\varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u).$$

Ara tenim que $\varphi(u + v)(\omega) = \omega(u + v) = \omega(u) + \omega(v) = \varphi(u)(\omega) + \varphi(v)(\omega) = (\varphi(u) + \varphi(v))(\omega)$.

Per tant $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$.

També tenim que

$$\varphi(\lambda u)(\omega) = \omega(\lambda u) = \lambda \omega(u) = \lambda \varphi(u)(\omega) = (\lambda \varphi(u))(\omega).$$

Per tant $\varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u)$.

Veiem ara que φ és injectiva. Sigui $u \in \text{Ker}(\varphi)$. Llavors $\forall \omega \in V^*$, $\omega(u) = 0$. Però això només pot passar si $u = 0$. Per tant φ és injectiva.

Com que $\dim V = \dim V^{**}$, tenim que φ és isomorfisme. ■

Proposició 10.2.2 *Siguin V_1, V_2 K -espais vectorials de dimensió finita. Sigui $f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Llavors el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ V_1^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & V_2^{**} \end{array}$$

*és commutatiu, és a dir $\varphi_2 \circ f = f^{**} \circ \varphi_1$, on φ_1, φ_2 són els isomorfismes definits a la proposició anterior.*

DEMOSTRACIÓ. Siguin $u \in V_1$ i $\omega \in V_2^*$. Hem de veure que

$$\varphi_2(f(u))(\omega) = f^{**}(\varphi_1(u))(\omega).$$

Ara $\varphi_2(f(u))(\omega) = \omega(f(u))$ i $f^{**}(\varphi_1(u))(\omega) = (\varphi_1(u) \circ f^*)(\omega) = \varphi_1(u)(\omega \circ f) = \omega(f(u))$. Per tant el diagrama és commutatiu. ■

Observació 10.2.3 Aquestes dues últimes proposicions ens permeten identificar cada espai vectorial de dimensió finita V amb el seu bidual V^{**} de manera que $u = \varphi(u)$ i cada aplicació lineal entre espais vectorials de dimensió finita amb la seva bidual.

Observem que si $B = (u_1, \dots, u_n)$ és una base de V i $B^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ és la seva base dual, llavors $\varphi(u_i) \in V^{**}$ compleix que

$$(\varphi(u_i))(u_j^*) = u_j^*(u_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

Per tant la base dual de B^* és $B^{**} = (\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n))$. Així, mitjançant la identificació que hem fet, com que $\varphi(u_i) = u_i$, tenim que $B^{**} = B$. ◇

Exemple 10.2.4 Sigui $V = \mathbb{R}_2[x]$ l'espai vectorial dels polinomis de grau ≤ 2 sobre $\mathbb{R}$. Siguin $I_0^1: V \rightarrow \mathbb{R}$, $D_0: V \rightarrow \mathbb{R}$ i $D_1: V \rightarrow \mathbb{R}$ definides per

$$\begin{aligned} I_0^1(p(x)) &= \int_0^1 p(x) dx, \\ D_0(p(x)) &= p'(0), \\ D_1(p(x)) &= p'(1). \end{aligned}$$

Veiem que $B_1 = (I_0^1, D_0, D_1)$ és una base de V^* . Com que V^* té dimensió 3, només cal veure que I_0^1, D_0 i D_1 són l.i. Siguin $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tals que

$$\alpha_1 I_0^1 + \alpha_2 D_0 + \alpha_3 D_1 = 0.$$

Llavors

$$\begin{aligned}(\alpha_1 I_0^1 + \alpha_2 D_0 + \alpha_3 D_1)(1) &= \alpha_1 = 0, \\(\alpha_2 D_0 + \alpha_3 D_1)(x^2) &= 2\alpha_3 = 0, \\(\alpha_2 D_0)(x) &= \alpha_2 = 0.\end{aligned}$$

Per tant B_1 és una base de V^* .

Calculem ara una base B de V tal que $B^* = B_1$.

Usant la identificació de V amb V^{**} , tenim que la base B que busquem és $B = B^{**} = B_1^*$.

Sigui $B_0 = (1, x, x^2)$ la base canònica de V . Llavors $B_0^* = (1^*, x^*, (x^2)^*)$, on

$$\begin{aligned}1^*(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= a_0, \\x^*(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= a_1, \\(x^2)^*(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= a_2.\end{aligned}$$

Com que

$$\begin{aligned}I_0^1(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3}, \\D_0(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= a_1, \\D_1(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= a_1 + 2a_2,\end{aligned}$$

tenim que

$$M(B_1, B_0^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pel Corol·lari 10.1.5,

$$M(B_0, B_1^*) = M(B_1, B_0^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Llavors,

$$M(B_1^*, B_0) = M(B_0, B_1^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Per tant $B = B_1^* = (1, -\frac{1}{3} + x - \frac{1}{2}x^2, -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}x^2)$. $\diamond$

10.3 Subespai incident

Sigui A un subconjunt de V . Definim l'*incident* de A com

$$A^{\text{inc}} = \{\omega \in V^* \mid \omega(u) = 0 \quad \forall u \in A\}.$$

Exemple 10.3.1 Siguin $A = \{(1, -1, 2), (1, 0, 1)\} \in \mathbb{R}^3$ i $\omega_1 \in (\mathbb{R}^3)^*$ tal que

$$\omega_1(x, y, z) = x - y + z.$$

Calculem A^{inc} i $\{\omega_1\}^{\text{inc}}$.

Busquem $\omega \in (\mathbb{R}^3)^*$ tal que $\omega(1, -1, 2) = \omega(1, 0, 1) = 0$. Sabem que $\omega(x, y, z) = ax + by + cz$, per a certs $a, b, c \in \mathbb{R}$. Llavors s'ha de complir que

$$\left. \begin{array}{rrcr} a & -b & +2c & = & 0 \\ a & & c & = & 0 \end{array} \right\}$$

Per tant $a = -c$ i $b = c$. Així

$$A^{\text{inc}} = \{\omega \in (\mathbb{R}^3)^* \mid \omega(x, y, z) = -cx + cy + cz \text{ amb } c \in \mathbb{R}\}.$$

Per calcular $\{\omega_1\}^{\text{inc}}$ usarem la identificació de $\mathbb{R}^3$ amb el seu bidual. Així, hem de buscar els vectors $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tals que $\omega_1(x, y, z) = 0$, és a dir, tals que $x - y + z = 0$. Per tant

$$\{\omega_1\}^{\text{inc}} = \{(y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}. \quad \diamond$$

Proposició 10.3.2 Siguin $A \subseteq B \subseteq V$ i siguin W, W_1, W_2 subespais vectorials de V . Llavors

- (i) A^{inc} és subespai vectorial de V^* .
- (ii) $B^{\text{inc}} \subseteq A^{\text{inc}}$.
- (iii) $V^{\text{inc}} = \{0\}$.
- (iv) $\dim W^{\text{inc}} = \dim V - \dim W$.
- (v) $(W^{\text{inc}})^{\text{inc}} = W$.
- (vi) $(W_1 + W_2)^{\text{inc}} = W_1^{\text{inc}} \cap W_2^{\text{inc}}$, $(W_1 \cap W_2)^{\text{inc}} = W_1^{\text{inc}} + W_2^{\text{inc}}$.
- (vii) $V = W_1 \oplus W_2 \Rightarrow V^* = W_1^{\text{inc}} \oplus W_2^{\text{inc}}$.

DEMOSTRACIÓ. Demostrar (i), (ii) i (iii) és un exercici fàcil que es deixa al lector.

(iv) Sigui $(u_1, \dots, u_m)$ una base de W . Ampliem aquesta base de W a una base $(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n)$ de V . Considerem la base dual d'aquesta última: $(u_1^*, \dots, u_n^*)$. Llavors $u_{m+1}^*, \dots, u_n^* \in W^{\text{inc}}$. Ara veurem que $W^{\text{inc}} = \langle u_{m+1}^*, \dots, u_n^* \rangle$. Sigui $\omega \in W^{\text{inc}}$. Llavors existeixen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tals que

$$\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i^*.$$

Ara $\omega(u_j) = \alpha_j$ i, com que $\omega \in W^{\text{inc}}$, tenim que $\alpha_j = 0$, $\forall u_j \in W$, és a dir, per a $j = 1, \dots, m$. Per tant

$$\omega = \sum_{i=m+1}^n \alpha_i u_i^* \in \langle u_{m+1}^*, \dots, u_n^* \rangle.$$

Això demostra que $W^{\text{inc}} = \langle u_{m+1}^*, \dots, u_n^* \rangle$. Per tant $(u_{m+1}^*, \dots, u_n^*)$ és una base de W^{inc} i $\dim W^{\text{inc}} = n - m = \dim V - \dim W$.

(v) És fàcil veure que $W \subseteq (W^{\text{inc}})^{\text{inc}}$, (usant que $V = V^{**}$).

Com que $\dim (W^{\text{inc}})^{\text{inc}} = \dim V^* - \dim W^{\text{inc}} = \dim V - (\dim V - \dim W) = \dim W$, tenim que $W = (W^{\text{inc}})^{\text{inc}}$.

(vi) Per (ii), com que $W_1 \subseteq W_1 + W_2$, tenim que $(W_1 + W_2)^{\text{inc}} \subseteq W_1^{\text{inc}}$; i anàlogament $(W_1 + W_2)^{\text{inc}} \subseteq W_2^{\text{inc}}$. Per tant

$$(W_1 + W_2)^{\text{inc}} \subseteq W_1^{\text{inc}} \cap W_2^{\text{inc}}. \quad (10.1)$$

També per (ii), com que $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1$, tenim que $W_1^{\text{inc}} \subseteq (W_1 \cap W_2)^{\text{inc}}$, i anàlogament $W_2^{\text{inc}} \subseteq (W_1 \cap W_2)^{\text{inc}}$. Per tant

$$W_1^{\text{inc}} + W_2^{\text{inc}} \subseteq (W_1 \cap W_2)^{\text{inc}}. \quad (10.2)$$

Observem que, per (10.1), tenim que

$$(W_1^{\text{inc}} + W_2^{\text{inc}})^{\text{inc}} \subseteq (W_1^{\text{inc}})^{\text{inc}} \cap (W_2^{\text{inc}})^{\text{inc}},$$

i per (v),

$$(W_1^{\text{inc}} + W_2^{\text{inc}})^{\text{inc}} \subseteq W_1 \cap W_2.$$

Ara per (ii),

$$(W_1 \cap W_2)^{\text{inc}} \subseteq ((W_1^{\text{inc}} + W_2^{\text{inc}})^{\text{inc}})^{\text{inc}},$$

i per (v),

$$(W_1 \cap W_2)^{\text{inc}} \subseteq W_1^{\text{inc}} + W_2^{\text{inc}}.$$

Per tant, tenint en compte la inclusió (10.2),

$$(W_1 \cap W_2)^{\text{inc}} = W_1^{\text{inc}} + W_2^{\text{inc}}.$$

Ara usant aquesta igualtat i (v), obtenim

$$\begin{aligned} (W_1 + W_2)^{\text{inc}} &= ((W_1^{\text{inc}})^{\text{inc}} + (W_2^{\text{inc}})^{\text{inc}})^{\text{inc}} \\ &= ((W_1^{\text{inc}} \cap W_2^{\text{inc}})^{\text{inc}})^{\text{inc}} \\ &= W_1^{\text{inc}} \cap W_2^{\text{inc}}. \end{aligned}$$

(vii) Suposem que $V = W_1 \oplus W_2$. Com que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, per (vi), tenim que

$$W_1^{\text{inc}} + W_2^{\text{inc}} = \{0\}^{\text{inc}} = V^*.$$

Com que $W_1 + W_2 = V$, per (vi), tenim que

$$W_1^{\text{inc}} \cap W_2^{\text{inc}} = V^{\text{inc}} = \{0\}.$$

Per tant $V^* = W_1^{\text{inc}} \oplus W_2^{\text{inc}}$. ■

10.4 Exercicis

Exercici 1 Proveu que $w_1(x, y, z) = x - iy - iz$, $w_2(x, y, z) = 2x - z$, $w_3(x, y, z) = iz - x$ formen una base de $(\mathbb{C}^3)^*$. Expresseu $w(x, y, z) = x$ en coordenades respecte d'aquesta base.

Exercici 2 Expresseu $w(x, y, z, t) = 2x - y - t$ en coordenades respecte de la base dual de la base canònica de $\mathbb{R}^4$. Trobeu la base dual de $((1, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 2), (1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0))$ i les coordenades de w en aquesta base.

Exercici 3 Sigui f l'automorfisme de $\mathbb{R}^2$ que té com a matriu associada en la base canònica la matriu

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Sigui $w \in (\mathbb{R}^2)^*$ definida per $w(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Trobeu les coordenades de w en la base dual de $(f(e_1), f(e_2))$, on (e_1, e_2) és la base canònica de $\mathbb{R}^2$.

Exercici 4 Sigui $V = \mathbb{R}_2[x]$ l'espai vectorial dels polinomis amb coeficients reals de grau més petit o igual que 2, $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$. Es defineixen les aplicacions lineals sobre V següents:

$$f_1(p(x)) = \int_0^1 p(s)ds, \quad f_2(p(x)) = \int_0^2 p(s)ds, \quad f_3(p(x)) = \int_0^{-1} p(s)ds$$

- (a) Demostreu que (f_1, f_2, f_3) és una base de V^* . Doneu la base de V respecte de la qual aquesta és la seva dual.
- (b) Demostreu que, donada $a \in \mathbb{R}$ qualsevol, els polinomis $1, x - a, (x - a)^2$ formen una base de $\mathbb{R}_2[x]$. Calculeu les coordenades de f_1, f_2, f_3 en la base dual de $(1, x - a, (x - a)^2)$.

(c) Siguin r_1, r_2, r_3 tres nombres reals diferents i definim $w_1, w_2, w_3 \in (\mathbb{R}_2[x])^*$ per $w_i(p(x)) = p(r_i)$, per a $i = 1, 2, 3$. Demostreu que formen una base de $(\mathbb{R}_2[x])^*$ i trobeu la base de $\mathbb{R}_2[x]$ de la qual és base dual.

Exercici 5 Proveu que les aplicacions lineals

$$\begin{aligned}\phi_i : \mathbb{R}_n[x] &\rightarrow \mathbb{R} \\ p(x) &\rightarrow p^{(i)}(a)\end{aligned}$$

per a $a \in \mathbb{R}$ fixat, variant $0 \leq i \leq n$, formen una base de $(\mathbb{R}_n[x])^*$. De quina base de $\mathbb{R}_n[x]$ és base dual?

Exercici 6 Definim les aplicacions de $\mathbb{R}_2[x]$ en $\mathbb{R}$ següents:

$$\Omega_1(p(x)) = 3 \int_{-1}^1 p(s) ds, \quad \Omega_2(p(x)) = 3 \int_{-1}^1 sp(s) ds, \quad \Omega_3(p(x)) = -15 \int_{-1}^1 s^2 p(s) ds.$$

Calculeu la dimensió de $\langle \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \rangle$. És $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ base de $\mathbb{R}_2[x]^*$?

Sigui

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}_2[x] &\rightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ p(x) &\rightarrow \Omega_1(p(x)) + \Omega_2(p(x))x + \Omega_3(p(x))x^2.\end{aligned}$$

Demostreu que φ és una aplicació lineal bijectiva. Diagonalitza φ^n per a tot $n \geq 1$? Trobeu l'expressió de l'aplicació φ^n .

Exercici 7 Sigui $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. Demostreu que

$$S^{\text{inc}} = \{w \in (\mathbb{R}^4)^* \mid w(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \text{ per a cert } \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Capítol 11

Formes bilineals

Sigui K un cos, i sigui V un K -espai vectorial. Una aplicació

$$\langle - \mid - \rangle : V \times V \rightarrow K$$

es diu que és una *forma bilineal* sobre V si es compleixen les propietats següents:

- (1) $\langle u_1 + u_2 \mid v \rangle = \langle u_1 \mid v \rangle + \langle u_2 \mid v \rangle, \quad \forall u_1, u_2, v \in V,$
 $\langle \lambda u \mid v \rangle = \lambda \langle u \mid v \rangle, \quad \forall u, v \in V, \quad \forall \lambda \in K.$
- (2) $\langle u \mid v_1 + v_2 \rangle = \langle u \mid v_1 \rangle + \langle u \mid v_2 \rangle, \quad \forall u, v_1, v_2 \in V,$
 $\langle u \mid \lambda v \rangle = \lambda \langle u \mid v \rangle, \quad \forall u, v \in V, \quad \forall \lambda \in K.$

La condició (1) de la definició de forma bilineal és equivalent a dir que, per a qualsevol $v \in V$, l'aplicació

$$\langle - \mid v \rangle : V \rightarrow K,$$

definida per $\langle - \mid v \rangle(u) = \langle u \mid v \rangle$, per a tot $u \in V$, és lineal. La condició (2) de la definició de forma bilineal és equivalent a dir que, per a qualsevol $v \in V$, l'aplicació

$$\langle v \mid - \rangle : V \rightarrow K,$$

definida per $\langle v \mid - \rangle(u) = \langle v \mid u \rangle$, per tot $u \in V$, és lineal.

La forma bilineal $\langle - \mid - \rangle$ es diu que és *simètrica* si $\langle u \mid v \rangle = \langle v \mid u \rangle$ per a tot $u, v \in V$.

Exemples 11.0.1

- (1) El *producte escalar estàndard* de $\mathbb{R}^n$ és l'aplicació $\langle - \mid - \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$\langle (x_1, \dots, x_n) \mid (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

El producte escalar estàndard és una forma bilineal simètrica sobre $\mathbb{R}^n$.

(2) Sigui $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Fent servir les propietats del producte de matrius és fàcil veure que l'aplicació

$$\begin{aligned} \langle - | - \rangle: \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto uAv^t \end{aligned}$$

és una forma bilineal.

Ara demostrarem que $\langle - | - \rangle$ és una forma bilineal simètrica si i només si A és una matriu simètrica.

Si la matriu A satisfà que $A = A^t$ llavors la forma bilineal és simètrica perquè, per les propietats de transposar matrius, tenim que

$$\langle u | v \rangle = uAv^t = uA^t v^t = (vAu^t)^t = vAu^t = \langle v | u \rangle.$$

La penúltima igualtat és deguda a que vAu^t és una matriu 1×1 .

Recíprocament, suposem que $\langle - | - \rangle$ és una forma bilineal simètrica. Sigui $(e_1, \dots, e_n)$ la base canònica de $\mathbb{R}^n$. Com que la forma bilineal és simètrica, per a tot $n \geq i, j \geq 1$, $\langle e_i | e_j \rangle = \langle e_j | e_i \rangle$. Com que $\langle e_i | e_j \rangle = a_{ij}$, obtenim que $a_{ij} = a_{ji}$ per a tot $n \geq i, j \geq 1$. Per tant A és una matriu simètrica.

Aquest tipus d'exemple generalitza l'exemple (1), perquè, quan prenem $A = I_n$, obtenim $\langle (x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, que és el producte escalar estàndard de $\mathbb{R}^n$.

(3) Considerem l'aplicació $\langle - | - \rangle: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definida per

$$\langle (z_1, \dots, z_n) | (w_1, \dots, w_n) \rangle = z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n.$$

Es pot comprovar que, per a tot $w \in \mathbb{C}^n$, $\langle - | w \rangle$ satisfà la propietat (1) de la definició de forma bilineal. També és cert que per a tot $z \in \mathbb{C}^n$ i per a tot $w_1, w_2 \in \mathbb{C}^n$, $\langle z | w_1 + w_2 \rangle = \langle z | w_1 \rangle + \langle z | w_2 \rangle$, però si $\lambda \in \mathbb{C}$ llavors $\langle z | \lambda w \rangle = \bar{\lambda} \langle z | w \rangle$. Per tant aquesta aplicació no és una forma bilineal. Noteu que $\langle z | w \rangle = \overline{\langle w | z \rangle}$.

En general, una aplicació sobre un espai vectorial complex que satisfà aquestes propietats es diu que és una *forma hermítica*.

Alguns llibres defineixen forma hermítica com una aplicació de

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$$

que és aditiva respecte de cada variable, $\langle z | w \rangle = \overline{\langle w | z \rangle}$, $\langle \lambda z | w \rangle = \bar{\lambda} \langle z | w \rangle$, i $\langle z | \lambda w \rangle = \lambda \langle z | w \rangle$. $\diamond$

11.1 Matriu associada a una forma bilineal

En aquesta secció, V és un espai vectorial de dimensió finita $n > 0$ sobre un cos K .

Sigui $\langle - | - \rangle: V \times V \rightarrow K$ una forma bilineal, i sigui $B = (v_1, \dots, v_n)$ una base de V . Considerem la matriu $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, definida per $a_{ij} = \langle v_i | v_j \rangle$. La matriu A es diu que és la matriu associada a la forma bilineal $\langle - | - \rangle$ en la base B i la denotem per $A = M(\langle - | - \rangle, B)$. Amb aquesta matriu podem calcular la forma bilineal sobre qualsevol parell de vectors.

Siguin u i v dos vectors de V . Suposem que $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ i que $v = \sum_{j=1}^n \beta_j v_j$. Llavors

$$\langle u | v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid v \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i | v \rangle,$$

Aquesta igualtat, en notació matricial, es pot escriure com

$$\langle u | v \rangle = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \langle v_1 | v \rangle \\ \vdots \\ \langle v_n | v \rangle \end{pmatrix}. \quad (11.1)$$

Per $i = 1, \dots, n$, tenim que

$$\langle v_i | v \rangle = \langle v_i | \sum_{j=1}^n \beta_j v_j \rangle = \sum_{j=1}^n \beta_j \langle v_i | v_j \rangle,$$

que, en notació matricial, s'escriu com

$$\langle v_i | v \rangle = \left(\langle v_i | v_1 \rangle \quad \dots \quad \langle v_i | v_n \rangle \right) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \quad (11.2)$$

De les igualtats (11.1) i (11.2) obtenim

$$\begin{aligned} \langle u | v \rangle &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \langle v_1 | v_1 \rangle & \dots & \langle v_1 | v_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_n | v_1 \rangle & \dots & \langle v_n | v_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \\ &= C(u, B)^t M(\langle - | - \rangle, B) C(v, B). \end{aligned}$$

Observació 11.1.1 Si $A \in M_n(K)$ és una matriu tal que, per a tot parell de vectors u, v de V , se satisfà que $\langle u | v \rangle = C(u, B)^t A C(v, B)$, llavors A coincideix amb

$M(\langle - | - \rangle, B)$. Per veure això, només cal adonar-se'n de que, per a $i, j = 1, \dots, n$,

$$\langle v_i | v_j \rangle = C(v_i, B)^t A C(v_j, B) = (0, \dots, 1^i, \dots, 0) A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1^j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{ij}.$$

Per tant, per a $i, j = 1, \dots, n$, el component (i, j) de la matriu A coincideix amb el component (i, j) de la matriu associada a la forma bilineal en la base B . Això vol dir que les dues matrius són iguals. $\diamond$

El resultat següent explica com determinar si una forma bilineal és simètrica a partir de la seva matriu associada.

Proposició 11.1.2 *Si $B = (u_1, \dots, u_n)$ una base de V . Una forma bilineal $\langle - | - \rangle$ sobre V és simètrica si i només si $M(\langle - | - \rangle, B)$ és una matriu simètrica.*

DEMOSTRACIÓ. Si $\langle - | - \rangle$ és una forma bilineal simètrica llavors $\langle u_i | u_j \rangle = \langle u_j | u_i \rangle$ i per tant $M(\langle - | - \rangle, B) = M(\langle - | - \rangle, B)^t$.

Si $M(\langle - | - \rangle, B)$ és simètrica llavors

$$\begin{aligned} \langle u | v \rangle &= \langle u | v \rangle^t = (C(u, B)^t M(\langle - | - \rangle, B) C(v, B))^t \\ &= C(v, B)^t M(\langle - | - \rangle, B)^t C(u, B) \\ &= C(v, B)^t M(\langle - | - \rangle, B) C(u, B) = \langle v | u \rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Siguin $B_1 = (u_1, \dots, u_n)$ i $B_2 = (v_1, \dots, v_n)$ dues bases de V . Considerem una forma bilineal $\langle - | - \rangle$ sobre V tal que $A_1 = M(\langle - | - \rangle, B_1)$ i $A_2 = M(\langle - | - \rangle, B_2)$ són les matrius associades a $\langle - | - \rangle$ en les bases B_1 i B_2 , respectivament. Volem veure quina relació hi ha entre aquestes dues matrius.

Per la definició de matriu associada a una forma bilineal, tenim que, per a qualsevol parell de vectors u, v de V ,

$$\langle u | v \rangle = C(u, B_1)^t A_1 C(v, B_1) = C(u, B_2)^t A_2 C(v, B_2). \quad (11.3)$$

Com que $C(u, B_1) = M(B_2, B_1) C(u, B_2)$ i $C(v, B_1) = M(B_2, B_1) C(v, B_2)$, tenim

$$\begin{aligned} \langle u | v \rangle &= (M(B_2, B_1) C(u, B_2))^t A_1 M(B_2, B_1) C(v, B_2) \\ &= C(u, B_2)^t (M(B_2, B_1)^t A_1 M(B_2, B_1)) C(v, B_2). \end{aligned} \quad (11.4)$$

Per l'observació 11.1.1 i usant les identitats (11.3) i (11.4), obtenim que

$$A_2 = M(B_2, B_1)^t A_1 M(B_2, B_1).$$

Així obtenim la **fórmula del canvi de base** per a formes bilineals:

$$M(\langle - | - \rangle, B_2) = M(B_2, B_1)^t M(\langle - | - \rangle, B_1) M(B_2, B_1).$$

11.2 L'espai vectorial de les formes bilineals

En aquesta secció, V és un espai vectorial de dimensió finita $n > 0$ sobre un cos K .

Considerem el conjunt

$$\text{Bil}(V) = \{ \langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow K \mid \langle - | - \rangle \text{ és una forma bilineal} \}.$$

Sobre aquest conjunt, definim una suma i un producte per escalars de K de la manera següent.

Siguin $\langle - | - \rangle_1$ i $\langle - | - \rangle_2$ dos elements de $\text{Bil}(V)$. Llavors definim

$$\begin{aligned} \langle - | - \rangle_1 + \langle - | - \rangle_2 : V \times V &\longrightarrow K \\ (v, w) &\mapsto \langle v | w \rangle_1 + \langle v | w \rangle_2 \end{aligned}$$

Sigui $\langle - | - \rangle \in \text{Bil}(V)$, i sigui $\lambda \in K$. Definim la forma bilineal $\lambda \langle - | - \rangle$ com

$$\begin{aligned} \lambda \langle - | - \rangle : V \times V &\longrightarrow K \\ (v, w) &\mapsto \lambda \langle v | w \rangle \end{aligned}$$

No és difícil comprovar que $\text{Bil}(V)$ amb aquesta suma i aquest producte per escalars té estructura de K -espai vectorial. També es pot comprovar que el conjunt de les formes bilineals simètriques és un subespai vectorial de $\text{Bil}(V)$. Denotarem aquest subespai vectorial per $\text{SBil}(V)$.

Proposició 11.2.1 *Sigui $B = (v_1, \dots, v_n)$ una base de V . Llavors l'aplicació*

$$\begin{aligned} M(-, B) : \text{Bil}(V) &\longrightarrow M_n(K) \\ \langle - | - \rangle &\longmapsto M(\langle - | - \rangle, B) = (\langle v_i | v_j \rangle) \end{aligned}$$

és un isomorfisme d'espais vectorials. A més, la forma bilineal $\langle - | - \rangle$ és simètrica si i només si $M(\langle - | - \rangle, B)$ és simètrica. En particular, el subespai vectorial $\text{SBil}(V)$ és isomorf al subespai vectorial de $M_n(K)$ format per les matrius simètriques.

DEMOSTRACIÓ. Siguin $\langle - | - \rangle_1$ i $\langle - | - \rangle_2$ dos elements de $\text{Bil}(V)$, i sigui $\langle - | - \rangle = \langle - | - \rangle_1 + \langle - | - \rangle_2$. Per la definició de la suma de formes bilineals, per a tot $i, j = 1, \dots, n$, $\langle v_i | v_j \rangle = \langle v_i | v_j \rangle_1 + \langle v_i | v_j \rangle_2$. Això implica que

$$M(\langle - | - \rangle, B) = M(\langle - | - \rangle_1, B) + M(\langle - | - \rangle_2, B).$$

Per la definició del producte per escalars a $\text{Bil}(V)$, tenim que

$$M(\lambda \langle - | - \rangle, B) = \lambda M(\langle - | - \rangle, B).$$

Per tant $M(-, B)$ és una aplicació lineal.

L'observació 11.1.1 implica que $M(-, B)$ és injectiva. Queda per veure que és exhaustiva. Sigui $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Considerem la forma bilineal definida per

$$\langle u | v \rangle = M(u, B)^t A M(v, B), \quad \text{per a tot } u, v \in V.$$

Per l'observació 11.1.1, $M(\langle - | - \rangle, B) = A$. Això acaba la demostració de que $M(-, B)$ és un isomorfisme d'espais vectorials.

Com que, per la Proposició 11.1.2, una forma bilineal és simètrica si i només si la imatge per $M(-, B)$ és una matriu simètrica, tenim que $M(-, B)$ dóna un isomorfisme entre aquests dos subespais vectorials. ■

La dimensió de $\text{Bil}(V)$ és n^2 perquè és un K -espai vectorial isomorf a $M_n(K)$. Per calcular la dimensió de $\text{SBil}(V)$ cal determinar la dimensió del subespai vectorial de les matrius simètriques de $M_n(K)$.

Per a $i, j = 1, \dots, n$, sigui $e_{ij} \in M_n(K)$ la matriu que té tots els components zero llevat del component (i, j) que val 1. Considerem la família de matrius

$$S_1 = e_{11}, \dots, S_n = e_{nn}$$

i, per a $n \geq i > j \geq 1$,

$$S_{ij} = e_{ij} + e_{ji}.$$

Si $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ és una matriu simètrica, llavors

$$A = a_{11}S_1 + \dots + a_{nn}S_n + \sum_{n \geq i > j \geq 1} a_{ij}S_{ij} \quad (11.5)$$

Per tant veiem que $S_1, \dots, S_n$ juntament amb S_{ij} , $n \geq i > j \geq 1$, són una família generadora del subespai vectorial de les matrius simètriques. La igualtat (11.5) també ens diu que és una família linealment independent, perquè si

$$0 = \lambda_1 S_1 + \dots + \lambda_n S_n + \sum_{n \geq i > j \geq 1} \lambda_{ij} S_{ij},$$

llavors

$$0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_{21} & \dots & \lambda_{n1} \\ \lambda_{21} & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_{n,n-1} \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{n,n-1} & \lambda_n \end{pmatrix},$$

per tant tots els escalars són zero, i podem concloure, efectivament, que tenim una família linealment independent.

Així, $S_1, \dots, S_n, S_{ij}$, $n \geq i > j \geq 1$, formen una base del subespai vectorial de les matrius simètriques. Com que en aquesta base hi han $n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ elements, la dimensió del subespai vectorial de les matrius simètriques de $M_n(K)$ és $\frac{n(n+1)}{2}$. O sigui que la dimensió de $\text{SBil}(V)$ és també $\frac{n(n+1)}{2}$.

Exemple 11.2.2 Les matrius e_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, formen una base de $M_3(\mathbb{R})$. Les matrius

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

formen una base de les matrius simètriques 3×3 amb coeficients reals. $\diamond$

11.3 Bases Ortogonals

En aquesta secció, V és un $\mathbb{R}$ -espai vectorial de dimensió finita $n > 0$.

Sigui $\langle - | - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simètrica. Es diu que $u, v \in V$ són *ortogonals* si $\langle u | v \rangle = 0$.

Un vector no nul $v \in V$ és *isòtrop* si és ortogonal a ell mateix, és a dir, si $\langle v | v \rangle = 0$.

Sigui $B = (v_1, \dots, v_n)$ una base de V . Es diu que B és una *base ortogonal* respecte de $\langle - | - \rangle$ si $\langle v_i | v_j \rangle = 0$, per a tot $i \neq j$.

Cal observar que la matriu associada a una forma bilineal simètrica en una base ortogonal és una matriu diagonal.

Teorema 11.3.1 *Sigui $\langle - | - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simètrica. Llavors V té una base ortogonal respecte $\langle - | - \rangle$.*

DEMOSTRACIÓ. Farem la demostració per inducció sobre $\dim V = n$. Si $n = 1$ no hi ha res a demostrar. Suposem que $n > 1$ i que l'enunciat és cert per a espais

vectorials de dimensió $n - 1$. Demostrem-ho per a n . Fixem $B_1 = (u_1, \dots, u_n)$ una base de V .

Cas 1: Suposem que existeix $u_i \in B$ tal que $\langle u_i | u_i \rangle \neq 0$. Reordenant la base si cal, podem suposar que $\langle u_1 | u_1 \rangle \neq 0$. Per a $i = 2, \dots, n$, considerem $u'_i = u_i - \frac{\langle u_i | u_1 \rangle}{\langle u_1 | u_1 \rangle} u_1$. Noteu que llavors

$$\langle u'_i | u_1 \rangle = \langle u_i - \frac{\langle u_i | u_1 \rangle}{\langle u_1 | u_1 \rangle} u_1 | u_1 \rangle = \langle u_i | u_1 \rangle - \frac{\langle u_i | u_1 \rangle}{\langle u_1 | u_1 \rangle} \langle u_1 | u_1 \rangle = 0.$$

Sigui $W = \langle u'_2, \dots, u'_n \rangle$. Si $v \in W$, llavors $v = \sum_{i=2}^n \alpha_i u'_i$ i

$$\langle v | u_1 \rangle = \langle \sum_{i=2}^n \alpha_i u'_i | u_1 \rangle = \sum_{i=2}^n \alpha_i \langle u'_i | u_1 \rangle = 0.$$

Això vol dir que tots els vectors de W són ortogonals a u_1 .

Per la Proposició 5.1.7, $B_2 = (u_1, u'_2, \dots, u'_n)$ és una base de V . Per tant $(u'_2, \dots, u'_n)$ és base de W i podem deduir que $\dim W = n - 1$. Per hipòtesi d'inducció, W té una base ortogonal $(v_2, \dots, v_n)$. Posem $v_1 = u_1$, llavors, per a $i, j = 1, \dots, n$, amb $i \neq j$, tenim que $\langle v_i | v_j \rangle = 0$. Per tant $v_1, \dots, v_n$ és una família de vectors ortogonals dos a dos de V . Afirmem que $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ és una base (ortogonal) de V . Per demostrar-ho només cal veure que els vectors de B són linealment independents.

Suposem que tenim $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$, llavors

$$0 = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i | v_1 \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i | v_1 \rangle = \alpha_1 \langle v_1 | v_1 \rangle.$$

Com que $\langle v_1 | v_1 \rangle \neq 0$, podem concloure que $\alpha_1 = 0$. Com que $v_2, \dots, v_n$ formen una base de W , són linealment independents. Podem concloure doncs, que $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Per tant B és base de V .

Cas 2: Suposem que, per a tot $i = 1, \dots, n$, $\langle u_i | u_i \rangle = 0$. Suposem que existeixen $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, tals que $\langle u_i | u_j \rangle \neq 0$. Reordenant la base si cal, podem suposar que $i = 1$ i $j = 2$. Considerem el vector $v = u_1 + u_2$. Llavors

$$\begin{aligned} \langle v | v \rangle &= \langle u_1 + u_2 | u_1 + u_2 \rangle \\ &= \langle u_1 | u_1 \rangle + \langle u_2 | u_2 \rangle + 2\langle u_1 | u_2 \rangle \\ &= 0 + 0 + 2\langle u_1 | u_2 \rangle \neq 0. \end{aligned}$$

Per la Proposició 5.1.7, $B_2 = (v, u_2, \dots, u_n)$ és una base de V . Com que $\langle v | v \rangle \neq 0$, estem a la situació del cas 1, per tant podem concloure que V té una base ortogonal.

Cas 3: Si $\langle u_i | u_j \rangle = 0$, per a tot $i, j = 1, \dots, n$, llavors la forma bilineal és zero. Per tant B (o qualsevol altra base) és una base ortogonal. ■

Teorema 11.3.2 (Teorema de Sylvester o Llei d'inèrcia) *Sigui $\langle - | - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simètrica. Llavors V té una base ortogonal respecte $\langle - | - \rangle$ tal que la matriu associada respecte d'aquesta base és de la forma*

$$M(\langle - | - \rangle, B) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & r) & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & r+) & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & & r-) \\ & & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

on r, r_+ i r_- no depenen de la base B .

DEMOSTRACIÓ. Pel Teorema 11.3.1, sabem que existeix una base ortogonal $B_1 = (u_1, \dots, u_n)$ de V . Reodenant la base, si cal, podem suposar que existeixen enters no negatius r, r_+ i r_- tals que

- (i) per a $i = 1, \dots, r$, $\langle u_i | u_i \rangle = 0$;
- (ii) per a $i = 1, \dots, r_+$, $\langle u_{r+i} | u_{r+i} \rangle > 0$;
- (iii) per a $i = 1, \dots, r_-$, $\langle u_{r+r_++i} | u_{r+r_++i} \rangle < 0$;
- (iv) $\dim V = r + r_+ + r_-$.

Considerem la base $B = (v_1, \dots, v_n)$ definida per

$$v_i = \begin{cases} u_i, & \text{per a } i = 1, \dots, r, \\ \frac{1}{\sqrt{\langle u_i | u_i \rangle}} u_i, & \text{per a } i = r + 1, \dots, r + r_+, \\ \frac{1}{\sqrt{|\langle u_i | u_i \rangle|}} u_i, & \text{per a } i = r + r_+ + 1, \dots, n. \end{cases}$$

És fàcil comprovar que la base B satisfà les propietats que volem.

Veiem ara que r, r_+ i r_- no depenen de la base B . Sigui $B' = (u'_1, \dots, u'_n)$ una altra base de V . Siguin A i A' les matrius associades a $\langle - | - \rangle$ en les bases B i B' respectivament. Llavors existeix una matriu P invertible tal que $P^t A' P = A$. Com que el rang d'una matriu A' no varia en multiplicar-la per una matriu invertible (vegeu la Secció 6.3), veiem que $r_+ + r_-$ és el rang de A' . Això demostra que

$r_+ + r_-$ és un invariànt de la forma bilineal i, per tant, també ho és $r = n - (r_+ + r_-)$. Suposem ara que B' és ortogonal i que

$$\langle u'_i | u'_i \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq i \leq r' \\ 1 & \text{si } r' + 1 \leq i \leq r' + r'_+ \\ -1 & \text{si } r' + r'_+ + 1 \leq i \leq r' + r'_+ + r'_- \end{cases}$$

on r' , r'_+ i r'_- són enters no negatius tals que $r' + r'_+ + r'_- = n$. Acabem de veure que $r' = r$.

Siguin $W = \langle u_{r+1}, \dots, u_{r+r_+} \rangle$ i $W' = \langle u'_{r+1}, \dots, u'_{r+r'_+} \rangle$. Observem que si $u \in W$ llavors existeixen $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+r_+} \in \mathbb{R}$ tals que

$$u = \alpha_{r+1}u_{r+1} + \dots + \alpha_{r+r_+}u_{r+r_+}$$

i

$$\langle u | u \rangle = \alpha_{r+1}^2 + \dots + \alpha_{r+r_+}^2 \geq 0.$$

A més, si $u \neq 0$, llavors $\langle u | u \rangle > 0$. Definim $f: W \rightarrow W'$ per

$$f(u) = \langle u | u'_r + 1 \rangle u'_{r+1} + \dots + \langle u | u'_r + r'_+ \rangle u'_{r+r'_+}.$$

És fàcil comprovar que f és lineal. Sigui $u \in \text{Ker}(f)$. Com que B' és una base de V , existeixen $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tals que

$$u = \beta_1 u'_1 + \dots + \beta_n u'_n.$$

Com que $\langle u | u'_i \rangle = \beta_i \langle u'_i | u'_i \rangle$ i $u \in \text{Ker}(f)$, tenim que

$$u = \beta_1 u'_1 + \dots + \beta_r u'_r + \beta_{r+r'_++1} u'_{r+r'_++1} + \dots + \beta_n u'_n.$$

Ara tenim que

$$\langle u | u \rangle = -\beta_{r+r'_++1}^2 - \dots - \beta_n^2 \leq 0.$$

Com que $u \in W$, $\langle u | u \rangle \geq 0$. Per tant $\langle u | u \rangle = 0$ i llavors $u = 0$. Això demostra que f és injectiva, i per tant,

$$r_+ = \dim W \leq \dim W' = r'_+.$$

Per simetria, tenim que $r'_+ \leq r_+$, i així $r'_+ = r_+$. En conseqüència, també tenim que $r'_- = r_-$. ■

Sigui $\langle - | - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simètrica. Es diu que $\langle - | - \rangle$ és *definida positiva* si, per a tot $0 \neq v \in V$, $\langle v | v \rangle > 0$. Es diu que $\langle - | - \rangle$ és *definida negativa* si, per a tot $0 \neq v \in V$, $\langle v | v \rangle < 0$.

Una forma bilineal simètrica definida positiva també es diu *producte escalar*.

Corol·lari 11.3.3 *Sigui $\langle - | - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simètrica.*

- (i) $\langle - | - \rangle$ és definida positiva si i només si existeix una base B de V tal que $M(\langle - | - \rangle, V) = I_n$.
- (ii) $\langle - | - \rangle$ és definida negativa si i només si existeix una base B de V tal que $M(\langle - | - \rangle, B) = -I_n$.

DEMOSTRACIÓ. Suposem que $\langle - | - \rangle$ és definida positiva. Si $B = (v_1, \dots, v_n)$ és una base de V llavors, per $i = 1, \dots, n$, $\langle v_i | v_i \rangle > 0$. En particular, si prenem la base que dóna el Teorema de Sylvester, la matriu associada que ha de sortir ha de ser la identitat. De manera anàloga podem veure que si $\langle - | - \rangle$ és definida negativa, llavors, en la base que dóna el Teorema de Sylvester, la matriu associada que ha de sortir ha de ser menys la identitat.

Sigui $\langle - | - \rangle$ una forma bilineal i sigui $B = (v_1, \dots, v_n)$ una base de V tal que $M(\langle - | - \rangle, B) = I_n$. Si $v \in V$ és tal que $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, llavors

$$\langle v | v \rangle = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) I_n \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \geq 0.$$

Per tant $\langle v | v \rangle = 0$ si i només si $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 0$, i això passa si i només si $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, cosa que vol dir que $v = 0$. Per tant, $\langle - | - \rangle$ és definida positiva. Això acaba la demostració de (i). De manera anàloga, podem veure que una forma bilineal simètrica tal que, en una certa base, la matriu associada és $-I_n$ ha de ser definida negativa. ■

Sigui $\langle - | - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simètrica. El Teorema de Sylvester ens diu que V té una base ortogonal

$$B = (u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_{r_+}, w_1, \dots, w_{r_-}),$$

tal que,

$$\begin{aligned} \langle u_i | u_i \rangle &= 0, \quad \text{per a } i = 1, \dots, r, \\ \langle v_j | v_j \rangle &= 1, \quad \text{per a } j = 1, \dots, r_+, \\ \langle w_k | w_k \rangle &= 0, \quad \text{per a } k = 1, \dots, r_-. \end{aligned}$$

Sigui $V_0 = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$, $V_+ = \langle v_1, \dots, v_{r_+} \rangle$ i $V_- = \langle w_1, \dots, w_{r_-} \rangle$. Sobre V_0 , la forma bilineal és zero. Pel Corol·lari 11.3.3, sobre V_+ , la forma bilineal és definida positiva i, sobre V_- , la forma bilineal és definida negativa. Per la definició de

cadascun dels subespais vectorials, tenim que $V = V_0 \oplus V_+ \oplus V_-$. Així doncs, el Teorema de Sylvester ens diu que podem posar l'espai vectorial com a suma de “tres trossos” i sobre cadascun d'ells la forma bilineal és d'una forma “senzilla”.

Com veurem més endavant en un exemple, en general, per a una mateixa forma bilineal, hi han moltes possibilitats per a V_+ i per a V_- (tot i que sempre han de ser espais vectorials de dimensió r_+ i r_- , respectivament). En canvi el subespai vectorial V_0 està unívocament determinat. Podeu comprovar que

$$V_0 = \{u \in V \mid \langle u \mid w \rangle = 0 \text{ per a tot } w \in V\}.$$

A aquest subespai vectorial es diu que és el *radical* de la forma bilineal.

Exemple 11.3.4 Sigui $E = \mathbb{R}_2[x]$ l'espai vectorial dels polinomis a coeficients reals de grau com a molt dos. Definim

$$\begin{aligned} \langle - \mid - \rangle : \quad E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p(x), q(x)) &\mapsto \int_0^1 p(x)q(x)dx \end{aligned}$$

Com que

$$\int_0^1 (\alpha p_1(x) + \beta p_2(x))q(x)dx = \alpha \int_0^1 p_1(x)q(x)dx + \beta \int_0^1 p_2(x)q(x)dx$$

i

$$\int_0^1 p(x)q(x)dx = \int_0^1 q(x)p(x)dx,$$

$\langle - \mid - \rangle$ és una forma bilineal simètrica. A més, si $p(x) \neq 0$ a $[0, 1]$ llavors $\int_0^1 p(x)^2 dx > 0$, perquè $p(x)^2$ és no nul·la, contínua i $p(x)^2 \geq 0$, per a tot $x \in [0, 1]$. Així doncs, aquesta forma bilineal és un producte escalar.

Fixem una base de E , triem $B = (u_1 = 1, u_2 = x, u_3 = x^2)$. Com que, per a $i, j \in \{0, 1, 2\}$, $\langle x^i \mid x^j \rangle = \frac{1}{i+j+1}$ la matriu associada a $\langle - \mid - \rangle$ en aquesta base és

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Anem a buscar una base ortogonal de E . Per fer-ho no farem res més que seguir el procés que descriu la demostració del Teorema 11.3.1. Com que $\langle u_1 \mid u_1 \rangle = 1 \neq 0$ estem en el cas 1 de la demostració. Prenem

$$u'_2 = u_2 - \frac{\langle u_2 \mid u_1 \rangle}{\langle u_1 \mid u_1 \rangle} u_1 = x - \frac{1}{2}$$

i

$$u'_3 = u_3 - \frac{\langle u_3 \mid u_1 \rangle}{\langle u_1 \mid u_1 \rangle} u_1 = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Així tenim que (u_1, u'_2, u'_3) és una base de E tal que u_1 és ortogonal a u'_2 i a u'_3 .

Segons la fórmula del canvi de base la matriu associada a $\langle - | - \rangle$ en la base (u_1, u'_2, u'_3) és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} \end{pmatrix}.$$

Segons la demostració del Teorema 11.3.1, ara cal trobar una base ortogonal del subespai vectorial $W = \langle u'_2, u'_3 \rangle$. Tenim que

$$\begin{aligned} \langle u'_2 | u'_2 \rangle &= (-\frac{1}{2}, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (0, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \neq 0. \end{aligned}$$

Tornem a estar en el cas 1 de la demostració del Teorema 11.3.1. Prenem

$$u''_3 = u'_3 - \frac{\langle u'_3 | u'_2 \rangle}{\langle u'_2 | u'_2 \rangle} u'_2 = x^2 - \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}} (x - \frac{1}{2}) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Sigui $v_1 = u_1$, $v_2 = u'_2$ i $v_3 = u''_3$, llavors $B_1 = (v_1, v_2, v_3)$ és una base ortogonal de E . Com que

$$\langle v_3 | v_3 \rangle = (\frac{1}{6}, -1, 1) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{180},$$

la matriu associada a $\langle - | - \rangle$ en la base B_1 és

$$M(\langle - | - \rangle, B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} \end{pmatrix}.$$

Segons el Teorema de Sylvester, i com que $\langle - | - \rangle$ és un producte escalar, existeix una base B_2 tal que $M(\langle - | - \rangle, B_1) = I_3$. Si mirem la demostració d'aquest Teorema veiem que una tal base la formen els vectors

$$v'_1 = v_1, \quad v'_2 = \sqrt{12} v_2, \quad v'_3 = \sqrt{180} v_3. \quad \diamond$$

A l'exemple que acabem de veure no hi han vectors isòtrops perquè es un producte escalar. Veiem un exemple en què sí que n'hi han.

Exemple 11.3.5 Sigui $V = \mathbb{R}^2$, i sigui $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Considerem la forma bilineal simètrica

$$\begin{aligned} \langle - | - \rangle: \quad V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) &\mapsto (x, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xy' + yx'. \end{aligned}$$

Fixem la base $B = (e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$. Llavors $M(\langle - | - \rangle, B) = A$. Per tant B és una base de vectors isòtrops. Si volem trobar una base ortogonal, hem de procedir com en el cas 2 de la demostració del Teorema 11.3.1.

Com que $\langle e_1 | e_2 \rangle \neq 0$, prenem $v_1 = e_1 + e_2 = (1, 1)$. Llavors (v_1, e_2) és una base de V i el vector v_1 no és isòtrop perquè $\langle v_1 | v_1 \rangle = 2$. Sigui

$$v_2 = e_2 - \frac{\langle e_2 | v_1 \rangle}{\langle v_1 | v_1 \rangle} v_1 = (0, 1) - \frac{1}{2}(1, 1) = \frac{1}{2}(-1, 1).$$

Ara $B_1 = (v_1, v_2)$ és una base ortogonal de V i $M(\langle - | - \rangle, B_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Si considerem ara la base $B_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}v_1, v_2)$, llavors $M(\langle - | - \rangle, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

En aquest cas, $r_+ = r_- = 1$. En la base que hem trobat, $V_+ = \langle (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle = \langle (1, 1) \rangle$ i $V_- = \langle (-1, 1) \rangle$. Anem a veure que hi han altres possibilitats per a V_+ i per a V_- .

Tenim que $(x, y) \in V$ és isòtrop si i només si $\langle (x, y) | (x, y) \rangle = 2xy = 0$. Això vol dir que els vectors isòtrops són o bé de la forma $(x, 0)$ o bé de la forma $(0, y)$. Per qualsevol $x \in (-1, \infty)$ considerem l'espai vectorial $V_x = \langle (1, 1) + (x, 0) \rangle$. Si $0 \neq v = \lambda((1, 1) + (x, 0)) \in V_x$, llavors $\langle v | v \rangle = \lambda^2 2(x+1) > 0$. Per tant sobre V_x la forma bilineal és definida positiva. Sigui $W_x = \langle (-1, 1) + (-x, 0) \rangle$. Llavors

$$\langle (1+x, 1) | (-1-x, 1) \rangle = 0$$

i

$$\langle (-1-x, 1) | (-1-x, 1) \rangle = -2(1+x) < 0 \quad \text{si } x \in (-1, \infty).$$

Per tant per qualsevol $x \in (-1, \infty)$, $B_x = ((1+x, 1), (-1-x, 1))$ és una base ortogonal, sobre V_x la forma bilineal és definida positiva i sobre W_x és definida negativa. Noteu que $V_{x_1} = V_{x_2}$ implica $x_1 = x_2$. Així veiem que la descomposició en suma de subespais vectorials que dona el Teorema de Sylvester no és única. $\diamond$

11.4 Productes escalars

Aquesta secció la dedicarem a l'estudi dels $\mathbb{R}$ -espais vectorials de dimensió finita amb un producte escalar. Aquests espais vectorials també es diuen espais vectorials euclidiàns. Veurem que, formalment, són molt similars a $\mathbb{R}^n$ amb el producte escalar estàndard.

Proposició 11.4.1 (Desigualtat de Cauchy-Schwartz) *Sigui $\langle - | - \rangle$ un producte escalar sobre un $\mathbb{R}$ -espai vectorial V . Llavors*

$$\langle u | v \rangle^2 \leq \langle u | u \rangle \langle v | v \rangle, \quad \forall u, v \in V.$$

DEMOSTRACIÓ. Siguin $\lambda \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$. Si u o v són nuls llavors la igualtat és certa. Suposem doncs que u i v són vectors no nuls de V . Llavors

$$0 \leq \langle u + \lambda v | u + \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v | v \rangle + 2\lambda \langle u | v \rangle + \langle u | u \rangle.$$

Per tant la funció $f(x) = x^2 \langle v | v \rangle + 2x \langle u | v \rangle + \langle u | u \rangle$ és no negativa, això implica que l'equació

$$f(x) = x^2 \langle v | v \rangle + 2x \langle u | v \rangle + \langle u | u \rangle = 0$$

té com a molt una solució real. Com que $f(x)$ és un polinomi de grau dos, tenim que el seu discriminant ha de ser més petit o igual que zero. És a dir,

$$4\langle u | v \rangle^2 - 4\langle u | u \rangle \langle v | v \rangle \leq 0.$$

Això implica que $\langle u | v \rangle^2 \leq \langle u | u \rangle \langle v | v \rangle$ tal com volíem veure. ■

Sigui V un $\mathbb{R}$ -espai vectorial. Una *norma* sobre V és una aplicació

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \|u\| \end{aligned}$$

tal que

- (1) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
- (2) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u \in V$.
- (3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $\forall u, v \in V$, (*Desigualtat triangular*).

Observem que llavors, si $u \in V$, tenim que $\|u\| \geq 0$, perquè $0 \stackrel{(1)}{=} \|u - u\| \stackrel{(3)}{\leq} \|u\| + \|-u\| \stackrel{(2)}{=} 2\|u\|$.

Proposició 11.4.2 *Sigui $\langle - | - \rangle$ un producte escalar sobre un $\mathbb{R}$ -espai vectorial V . Llavors l'aplicació*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\langle - | - \rangle} : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \|u\|_{\langle - | - \rangle} = \sqrt{\langle u | u \rangle} \end{aligned}$$

és una norma, que es diu norma associada a $\langle - | - \rangle$.

DEMOSTRACIÓ. És clar que $\|u\|_{\langle - | - \rangle} = 0 \Leftrightarrow u = 0$, i que

$$\|\lambda u\|_{\langle - | - \rangle} = |\lambda| \|u\|_{\langle - | - \rangle}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in V.$$

Siguin $u, v \in V$. Llavors

$$\|u + v\|_{\langle - | - \rangle}^2 = \langle u + v | u + v \rangle = \langle u | u \rangle + 2\langle u | v \rangle + \langle v | v \rangle,$$

i, aplicant la desigualtat de Cauchy-Schwartz, tenim

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{\langle - | - \rangle}^2 &\leq \langle u | u \rangle + 2\|u\|_{\langle - | - \rangle}\|v\|_{\langle - | - \rangle} + \langle v | v \rangle = \\ &= (\|u\|_{\langle - | - \rangle} + \|v\|_{\langle - | - \rangle})^2. \end{aligned}$$

Per tant $\|u + v\|_{\langle - | - \rangle} \leq \|u\|_{\langle - | - \rangle} + \|v\|_{\langle - | - \rangle}$. ■

Sigui $\langle - | - \rangle$ un producte escalar sobre un $\mathbb{R}$ -espai vectorial V de dimensió finita. Diem que una base ortogonal $B = (v_1, \dots, v_n)$ és *ortonormal* respecte $\langle - | - \rangle$ si $\|v_i\|_{\langle - | - \rangle} = 1$ per a $i = 1, \dots, n$.

Com a conseqüència del Corol·lari 11.3.3, tenim el resultat següent.

Corol·lari 11.4.3 *Sigui $\langle - | - \rangle$ un producte escalar sobre un $\mathbb{R}$ -espai vectorial V de dimensió finita. Llavors V té una base ortonormal respecte $\langle - | - \rangle$. ■*

Sigui $\langle - | - \rangle$ un producte escalar sobre un $\mathbb{R}$ -espai vectorial V . Observem que si $u, v \in V \setminus \{0\}$ llavors, per la desigualtat de Cauchy-Schwartz,

$$-1 \leq \frac{\langle u | v \rangle}{\|u\|_{\langle - | - \rangle}\|v\|_{\langle - | - \rangle}} \leq 1.$$

Definim l'*angle* respecte de $\langle - | - \rangle$ entre u i v com l'únic $\alpha \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos \alpha = \frac{\langle u | v \rangle}{\|u\|_{\langle - | - \rangle}\|v\|_{\langle - | - \rangle}}$$

Segons la definició d'angle que hem donat, que dos vectors siguin ortogonals vol dir que l'angle entre els dos vectors és de $\frac{\pi}{2}$. Cal tenir present que el concepte d'ortogonalitat, d'angle i el de norma és relatiu al producte escalar que tinguem. Donat un $\mathbb{R}$ -espai vectorial V i una base B qualsevol, podem definir un producte escalar sobre V de tal manera que B sigui una base ortonormal. Veiem un exemple on fem això.

Exemple 11.4.4 Fixem la base $B = (v_1 = (1, 2), v_2 = (1, 1))$ de $\mathbb{R}^2$. Volem definir un producte escalar sobre $\mathbb{R}^2$ de tal manera que B sigui una base ortonormal, és a dir, volem construir $\langle - | - \rangle$ tal que $M(\langle - | - \rangle, B) = I_2$. Sigui $B' = (e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$ la base canònica de $\mathbb{R}^2$. Segons la fórmula del canvi de base,

$$M(\langle - | - \rangle, B') = M(B', B)^t M(\langle - | - \rangle, B) M(B', B) = M(B', B)^t M(B', B).$$

Com que $M(B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$M(B', B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Així,

$$M(\langle - | - \rangle, B') = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Llavors tenim

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\langle - | - \rangle} & \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) & \mapsto & (x, y) \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 5xx' - 3yx' - 3xy' + 2yy'. \end{array}$$

Noteu que, amb aquest producte escalar, la “circumferència de radi 1” és el conjunt de punts (x, y) de $\mathbb{R}^2$ que satisfan $\|(x, y)\|_{\langle - | - \rangle} = 1$. Aquest és el conjunt de punts (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tals que $5x^2 + 2y^2 - 6xy = 1$, que és una el·lipse (respecte del producte escalar estàndard). $\diamond$

Observació 11.4.5 Quant prenem una forma bilineal que no és ni definida positiva ni definida negativa, s’obtenen models geomètrics molt interessants. Prenem l’exemple 11.3.5, és a dir $V = \mathbb{R}^2$ amb la forma bilineal

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{\langle - | - \rangle} & \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) & \mapsto & (x, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xy' + yx'. \end{array}$$

En aquest cas, $r_+ = 1$ i $r_- = 1$.

Si busquem l’anàleg a la circumferència de radi 1, obtenim

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (x, y) \mid (x, y) \rangle = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = \frac{1}{2}\}.$$

Aquests punts corresponen a la gràfica d’una hipèrbola, per això l’espai vectorial $\mathbb{R}^2$ amb aquesta forma bilineal es diu *pla hiperbòlic*.

Un exemple molt important de espai vectorial amb una forma bilineal que no és ni definida positiva ni definida negativa és $\mathbb{R}^4$ amb la forma bilineal donada per la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix},$$

on c denota la velocitat de la llum. $\mathbb{R}^4$ amb aquesta forma bilineal es diu *espai de Minkowski* i s'usa com a model en relativitat especial. $\diamond$

11.5 El Teorema Espectral

En aquesta secció demostrarem un resultat de diagonalització de matrius amb coeficients reals força espectacular anomenat el Teorema Espectral. La versió més senzilla d'aquest teorema diu el següent.

Teorema 11.5.1 *Tota matriu simètrica de $M_n(\mathbb{R})$ diagonalitza en una base ortonormal respecte el producte escalar estàndard de $\mathbb{R}^n$.*

D'aquest teorema s'en poden donar moltes demostracions, però cap d'elles utilitzant només eines de la teoria de diagonalització d'endomorfismes. Sempre s'han de menester idees de productes escalars. Es pot fer una demostració molt elemental fent servir només el producte escalar estàndard de $\mathbb{R}^n$, també se'n pot fer una, més curta però més conceptual, pensant en productes escalars generals. Hem escollit fer una demostració conceptual, per la qual farem servir el concepte d'adjunt d'un endomorfisme.

Comencem amb un càlcul interessant.

Lema 11.5.2 *Sigui A una matriu simètrica amb coeficients reals. Llavors tots els valors propis complexos de A són reals.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propi de A i $v = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ un vector propi de A de valor propi λ . Llavors

$$(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)A \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)\lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda \left(\sum_{i=1}^n \bar{z}_i z_i \right) = \lambda \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right).$$

Si conjuguem i transposem aquesta igualtat obtenim que

$$\begin{aligned}\overline{\lambda} \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) &= \overline{\left(\lambda \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) \right)}^t = \left(\overline{\left(\overline{z_1}, \dots, \overline{z_n} \right) A \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}} \right)^t \\ &= \left(\overline{z_1}, \dots, \overline{z_n} \right) A \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right).\end{aligned}$$

Com que un vector propi és diferent de zero, tenim que $\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \neq 0$. Això implica que $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$. ■

Sigui $\langle - | - \rangle$ un producte escalar sobre un $\mathbb{R}$ -espai vectorial V . Sigui $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme de V . Fixem B una base de V . Llavors

$$\begin{aligned}\langle f(v) | w \rangle &= (M(f, B)C(v, B))^t M(\langle - | - \rangle, B)C(w, B) \\ &= C(v, B)^t M(f, B)^t M(\langle - | - \rangle, B)C(w, B).\end{aligned}$$

Sigui $g: V \rightarrow V$ un altre endomorfisme de V , llavors

$$\langle v | g(w) \rangle = C(v, B)^t M(\langle - | - \rangle, B)M(g, B)C(w, B).$$

Ens preguntem, com ha de ser g per complir que

$$\langle f(v) | w \rangle = \langle v | g(w) \rangle$$

per a tot parell de vectors $v, w \in V$?

Per les igualtats anteriors,

$$M(f, B)^t M(\langle - | - \rangle, B) = M(\langle - | - \rangle, B)M(g, B),$$

i com que $\langle - | - \rangle$ és un producte escalar, $M(\langle - | - \rangle, B)$ és invertible i

$$M(g, B) = M(\langle - | - \rangle, B)^{-1} M(f, B)^t M(\langle - | - \rangle, B).$$

És a dir, g ha de ser l'únic endomorfisme de V que en la base B té per matriu associada $M(\langle - | - \rangle, B)^{-1} M(f, B)^t M(\langle - | - \rangle, B)$.

Noteu que si la base B que fixem és ortonormal llavors $M(\langle - | - \rangle, B) = I_n$ i, per tant, $M(g, B) = M(f, B)^t$.

Definim l'endomorfisme *adjunt* de f per $\langle - | - \rangle$ com l'únic endomorfisme $f^\dagger: V \rightarrow V$ tal que, per a tot $v, w \in V$,

$$\langle f(v) | w \rangle = \langle v | f^\dagger(w) \rangle.$$

Diem que f és autoadjunt si $f = f^\dagger$.

Noteu que, com que $\langle - | - \rangle$ és una forma bilineal simètrica, llavors $(f^\dagger)^\dagger = f$.

Podem pensar que assignar a un endomorfisme el seu adjunt és la versió abstracta d'assignar a cada matriu la seva transposada. Així el concepte d'endomorfisme autoadjunt és la versió abstracta de matriu simètrica.

Del Lema 11.5.2 obtenim el resultat següent per a endomorfismes autoadjunts.

Lema 11.5.3 *Sigui $\langle - | - \rangle$ un producte escalar sobre un $\mathbb{R}$ -espai vectorial V de dimensió finita $n > 0$. Sigui $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme autoadjunt de V . Llavors existeixen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tals que*

$$p_f(x) = (-1)^n(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n).$$

DEMOSTRACIÓ. Sigui $B = (u_1, \dots, u_n)$ una base ortonormal de V i sigui $A = M(f, B)$. Com que f és autoadjunt i hem triat una base ortonormal, pel que acabem de veure, $A = A^t$ és una matriu simètrica. Pel Lema 11.5.2, existeixen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tals que

$$p_A(x) = (-1)^n(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n).$$

Com que $p_f(x) = p_A(x)$, obtenim el resultat. ■

La versió del Teorema Espectral que demostrarem és la següent:

Teorema 11.5.4 *Sigui $\langle - | - \rangle$ un producte escalar sobre un $\mathbb{R}$ -espai vectorial V de dimensió finita $n > 0$. Sigui $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme autoadjunt de V . Llavors V té una base ortonormal de vectors propis de f . En particular, l'endomorfisme f diagonalitza.*

DEMOSTRACIÓ. Demonstrarem l'enunciat per inducció sobre n . En el cas $n = 1$, no hi ha res a demostrar perquè qualsevol vector de V no nul i de norma 1 forma una base ortonormal i és un vector propi. Suposem que $n > 1$ i que el resultat cert per a espais vectorials de dimensió $n - 1$. Demostrem-ho per a espais vectorials de dimensió n .

Pel Lema 11.5.3, existeix $\lambda \in \mathbb{R}$ que és un valor propi de f . Llavors existeix $v \in V$ vector propi de f de valor propi λ . Siguin $u_2, \dots, u_n$ vectors de V tals que $(v, u_2, \dots, u_n)$ és una base de V . Per a tot $i = 2, \dots, n$, sigui $u'_i = u_i - \frac{\langle u_i | v \rangle}{\langle v | v \rangle} v$. Llavors, per a tot $i = 2, \dots, n$, $\langle v | u'_i \rangle = 0$ i $(v, u'_2, \dots, u'_n)$ és una base de V . Considerem ara $W = \langle u'_2, \dots, u'_n \rangle$ amb el producte escalar donat per la restricció de $\langle - | - \rangle$ a W .

Fixem $i \in \{2, \dots, n\}$. Si $f(u'_i) = \alpha v + \sum_{j=2}^n \alpha_j u'_j$ llavors

$$\langle f(u'_i) | v \rangle = \langle \alpha v + \sum_{j=2}^n \alpha_j u'_j | v \rangle = \alpha \langle v | v \rangle + \sum_{j=2}^n \alpha_j \langle u'_j | v \rangle = \alpha \langle v | v \rangle.$$

Per ser f autoadjunt, tenim que

$$\alpha \langle v | v \rangle = \langle f(u'_i) | v \rangle = \langle u'_i | f(v) \rangle,$$

i per ser v vector propi de valor propi λ ,

$$\alpha \langle v | v \rangle = \langle u'_i | \lambda v \rangle = \lambda \langle u'_i | v \rangle = 0.$$

Com que $\langle - | - \rangle$ és un producte escalar i $v \neq 0$, $\alpha = 0$. Això demostra que per a tot $i = 2, \dots, n$, $f(u'_i) \in W$, per tant $f(W) \subseteq W$.

Estem en la situació d'un espai vectorial W de dimensió $n - 1$. Sobre W tenim definit un producte escalar i la restricció de f a W és un endomorfisme autoadjunt. Aplicant la hipòtesi d'inducció, tenim que existeix $(v_2, \dots, v_n)$ una base ortonormal de W tal que tots els v_i 's són vectors propis de f . Prenent $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$ obtenim una base ortonormal $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de V formada per vectors propis de f . ■

El Teorema 11.5.1 s'obté com a corol·lari del que hem demostrat, prenent $V = \mathbb{R}^n$ amb el producte escalar estàndard.

11.6 Exercicis

Exercici 1 Siguin $u = (3, 1, 2)$, $v = (0, 1, 1)$ i $w = (-1, -1, 0)$ vectors de $\mathbb{R}^3$.

- (a) Comproveu que formen una base de $\mathbb{R}^3$.
- (b) Trobeu la matriu del producte escalar en la base canònica de $\mathbb{R}^3$ pel que els vectors u , v i w formen una base ortonormal.
- (c) Expliqueu com es calcula aquest producte escalar per a dos vectors expressats en coordenades respecte de la base canònica.
- (d) Trobeu una base del subespai ortogonal a $(1, 0, 0)$ per a aquest producte escalar.

Exercici 2 Considereu el producte escalar de $\mathbb{R}^4$ definit per la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Descomponeu el vector $v = (1, 3, -1, 4)$ com a suma de dos vectors, un pertanyent al subespai F , generat per $w_1 = (2, 1, 0, 1)$ i $w_2 = (0, 3, 1, 1)$, i l'altre ortogonal a F .

Exercici 3 Sigui E l'espai vectorial real dels polinomis de grau inferior a 2. Definim, per a tot $p(x), q(x) \in E$:

$$\phi(p(x), q(x)) = \int_0^2 p(s)q(s)ds.$$

- (a) Demostreu que ϕ és una forma bilineal simètrica sobre E .
- (b) Quina és la matriu de ϕ respecte de la base canònica de E ?
- (c) Defineix ϕ un producte escalar?
- (d) Trobeu una base ortonormal respecte de ϕ .
- (e) Trobeu una base del subespai ortogonal a $2x + 1$ respecte de ϕ .

Exercici 4 Sigui (e_1, e_2, e_3) una base arbitrària d'un $\mathbb{R}$ -espai vectorial E . Proveu que existeix un únic producte escalar de E que fa que aquesta base sigui ortonormal. Quin és aquest producte en el cas en que $E = \mathbb{R}^3$ i $e_1 = (1, 1, 2)$, $e_2 = (2, 3, 0)$ i $e_3 = (1, 0, -1)$?

Exercici 5 Sigui $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'aplicació definida per $\varphi((x, y), (z, t)) = xz - yt$.

- (a) És φ una forma bilineal sobre $\mathbb{R}$? És simètrica?
- (b) Quin és el conjunt de vectors isòtrops?
- (c) Si existeix una base de vectors isòtrops, doneu la matriu de φ en aquesta base.

Exercici 6 Considerem les formes bilineals φ_1 i φ_2 sobre $\mathbb{R}$ donades per les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Classifiqueu, segons la llei d'inèrcia, aquestes formes bilineals i digueu si són definides positives.
- (b) Hi ha vectors isòtrops? Quins són?

Capítol 12

Geometria Euclidiana

En aquest capítol estudiarem les geometries euclidianes de $\mathbb{R}^n$. Així, considerarem $\mathbb{R}^n$ com el conjunt de punts d'un espai “ n -dimensional”, on hi tindrem rectes, plans o, en general, “varietats lineals” (ja definirem què és això).

Observem que $\mathbb{R}^n$ com a $\mathbb{R}$ -espai vectorial té un element privilegiat, el vector zero. En canvi, si pensem $\mathbb{R}^n$ com a model d'un espai de punts, on hi tenim certs subconjunts de punts que formen figures geomètriques, com ara rectes, triangles, quadrats, circumferències, plans, cons, esferes, etc., no podem tenir cap element de $\mathbb{R}^n$ que sigui privilegiat, ja que els elements de $\mathbb{R}^n$ representen els punts de l'espai que volem modelar i en aquest espai pensem que tots els punts tenen les mateixes propietats. A l'espai que volem modelar hi tenim una certa manera de mesurar distàncies entre els diversos objectes i sembla que, per fer mesuraments concrets, va bé fixar a l'espai un sistema de coordenades. Això, en particular, significa triar un punt com a origen de coordenades, i aquest origen de coordenades el triem lliurement entre tots els punts de l'espai (el que ens convingui pels mesuraments concrets que volem fer). Doncs bé! El model més senzill d'aquest tipus d'espai és l'espai afí euclidià, que consisteix en un conjunt de punts, $\mathbb{R}^n$, i, per a cada punt $P \in \mathbb{R}^n$, una aplicació bijectiva

$$\alpha_P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

del conjunt de punts $\mathbb{R}^n$ a l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$, on hi tenim un producte escalar fixat $\langle - | - \rangle$ (que ens permetrà definir una distància). Cada aplicació α_P es pot pensar com l'elecció del punt P com a origen de coordenades. Cada elecció d'una base ortonormal de l'espai vectorial euclidià $(\mathbb{R}^n, \langle - | - \rangle)$ es pot pensar com l'elecció de les direccions dels eixos de coordenades amb el semieix positiu marcat. És natural pensar que per poder definir una distància entre els punts de $\mathbb{R}^n$ farà falta alguna mena de “compatibilitat” entre les aplicacions α_P en variar el punt P . Però tot això

ho definirem amb rigor a continuació.

12.1 Espai afí euclidià i varietats lineals

Un *espai vectorial euclidià* és un $\mathbb{R}$ -espai vectorial junt amb un producte escalar.

Un *espai afí euclidià* és un conjunt $E \neq \emptyset$ junt amb un espai vectorial euclidià $(V, \langle - | - \rangle)$ i una aplicació

$$\begin{aligned} \alpha : E \times E &\longrightarrow V \\ (P, Q) &\longmapsto \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

que compleix:

- (1) per a cada $P \in E$, l'aplicació

$$\begin{aligned} \alpha_P : E &\longrightarrow V \\ Q &\longmapsto \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

és bijectiva, i

- (2) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$, $\forall P, Q, R \in E$.

Els elements de E es diuen *punts* de l'espai, V és l'espai vectorial associat a E . Definim la dimensió de l'espai afí euclidià E com

$$\dim E = \dim V.$$

Diem que un subconjunt L de E és una *varietat lineal* de E si

- (1) $\alpha(L \times L)$ és un subespai vectorial de V , i

- (2) $\forall P \in L$,

$$\begin{aligned} \alpha_P : L &\longrightarrow \alpha(L \times L) \\ Q &\longmapsto \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

és bijectiva.

Observem que si β és la restricció de α a L sobre $\alpha(L \times L)$, és a dir

$$\begin{aligned} \beta : L \times L &\longrightarrow \alpha(L \times L) \\ (P, Q) &\longmapsto \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

llavors L junt amb β és un espai afí euclidià amb espai vectorial associat, $\alpha(L \times L)$. Es diu que $\alpha(L \times L)$ és la *direcció* de la varietat lineal L .

Exemple 12.1.1 Siguin $E = \mathbb{R}^n$ i $V = \mathbb{R}^n$ l'espai vectorial euclidià amb el producte escalar estàndard. Sigui

$$\begin{aligned} \alpha : E \times E &\longrightarrow V \\ (u, v) &\longmapsto v - u \end{aligned}$$

Llavors E junt amb α és l'espai afí euclidià estàndard.

Les varietats lineals d'aquest espai són les de la forma $P + W$, on $P \in V$ i W és un subespai vectorial de V , és a dir

$$P + W = \{P + w \mid w \in W\}.$$

Llavors tenim que

$$\alpha(P + w_1, P + w_2) = w_2 - w_1 \in W \quad \text{i} \quad \alpha((P + W) \times (P + W)) = W.$$

Observem que, fixat $P + w_0 \in P + W$, l'aplicació

$$\begin{aligned} P + W &\longrightarrow W \\ P + w &\longmapsto P + w - (P + w_0) \end{aligned}$$

és bijectiva. Aquí W és la direcció de $P + W$, i diem que $P + W$ és la varietat lineal que passa pel punt P amb direcció W . $\diamond$

Observació 12.1.2 A partir d'aquí els espais afins euclidians que considerarem seran com l'exemple anterior, però agafant a V un producte escalar $\langle - \mid - \rangle$ arbitrari, i les seves varietats lineals. $\diamond$

Un espai afí euclidià de dimensió 0 es diu *punt*. Un espai afí euclidià de dimensió 1 es diu *recta*. Un espai afí euclidià de dimensió 2 es diu *pla*. Una varietat lineal de dimensió $n - 1$ en un espai afí euclidià E de dimensió n es diu *hiperplà* de E .

La varietat lineal determinada o generada pels punts $P_1, \dots, P_n$ d'un espai afí euclidià E és la varietat lineal més petita de E que conté aquests punts. És clar que aquesta varietat lineal és

$$P_1 + \langle P_2 - P_1, \dots, P_n - P_1 \rangle.$$

Es diu que dues varietats lineals $P_1 + W_1$, $P_2 + W_2$ d'un espai afí euclidià són *paral·leles* si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

Dues varietats lineals $P_1 + W_1$, $P_2 + W_2$ d'un espai afí euclidià es tallen si $(a + W_1) \cap (b + W_2) \neq \emptyset$.

Proposició 12.1.3 Dues varietats lineals $P_1 + W_1$, $P_2 + W_2$ d'un espai afí euclidià es tallen si i només si $P_1 - P_2 \in W_1 + W_2$.

DEMOSTRACIÓ.

$$\begin{aligned}
 (P_1 + W_1) \cap (P_2 + W_2) \neq \emptyset &\iff \exists P \in (P_1 + W_1) \cap (P_2 + W_2) \iff \\
 &\iff \exists w_1 \in W_1, \exists w_2 \in W_2 \\
 &\quad \text{tals que } P_1 + w_1 = P_2 + w_2 \iff \\
 &\iff P_1 - P_2 \in W_1 + W_2. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Una conseqüència immediata d'aquesta Proposició és el resultat següent.

Corol·lari 12.1.4 *Si $P_1 + W_1$, $P_2 + W_2$ són varietats lineals paral·leles llavors o bé no es tallen o bé una està continguda en l'altra. ■*

Ara que ja sabem quan es tallen dues varietats, anem a veure com es tallen.

Proposició 12.1.5 *La intersecció de dues varietats lineals d'un espai afí euclidià és o bé buida o bé una varietat lineal.*

DEMOSTRACIÓ. Siguin $P_1 + W_1$, $P_2 + W_2$ dues varietats lineals d'un espai afí euclidià que es tallin. Sigui $P \in (P_1 + W_1) \cap (P_2 + W_2)$. Veiem que

$$(P_1 + W_1) \cap (P_2 + W_2) = P + (W_1 \cap W_2).$$

La inclusió $P + (W_1 \cap W_2) \subseteq (P_1 + W_1) \cap (P_2 + W_2)$ és clara.

Sigui $Q \in (P_1 + W_1) \cap (P_2 + W_2)$. Siguin $w_1, w'_1 \in W_1$ i $w_2, w'_2 \in W_2$ tals que

$$\begin{aligned}
 P &= P_1 + w_1 = P_2 + w_2 \\
 Q &= P_1 + w'_1 = P_2 + w'_2
 \end{aligned}$$

Llavors

$$Q = P - w_1 + w'_1 = P - w_2 + w'_2.$$

Per tant $w'_1 - w_1 = w'_2 - w_2 \in W_1 \cap W_2$ i $Q \in P + (W_1 \cap W_2)$. ■

12.2 Coordenades

Un *sistema de coordenades cartesianes ortonormal* d'un espai afí euclidià E de dimensió finita n és

$$\mathcal{B} = \{P, (v_1, \dots, v_n)\}$$

on $P \in E$ es diu *origen* de coordenades i $(v_1, \dots, v_n)$ és una base ortonormal de l'espai vectorial associat V ; $\langle v_1 \rangle, \dots, \langle v_n \rangle$ són els *eixos* de coordenades del sistema.

Les coordenades d'un punt $X \in E$ respecte de $\mathcal{B}$ són per definició les coordenades del vector $X - P$ respecte de la base $(v_1, \dots, v_n)$. Escriurem $C(X, \mathcal{B}) = C(X - P, (v_1, \dots, v_n))$.

Siguin $\mathcal{B} = \{P, (v_1, \dots, v_n)\}$, $\mathcal{B}' = \{Q, (u_1, \dots, u_n)\}$ dos sistemes de coordenades ortonormals d'un espai afí euclidià E .

Sigui $X \in E$. Llavors

$$X - P = X - Q + Q - P.$$

Per tant, si $B = (v_1, \dots, v_n)$ i $B' = (u_1, \dots, u_n)$, tenim que

$$\begin{aligned} C(X - P, B) &= C(X - Q, B) + C(Q - P, B) \\ &= M(B', B)C(X - Q, B') + C(Q - P, B). \end{aligned}$$

Així

$$C(X, \mathcal{B}) = C(Q, \mathcal{B}) + M(B', B)C(X, \mathcal{B}').$$

Aquesta és la **fórmula del canvi de coordenades**.

Anem a veure ara com es descriuen en coordenades les varietats lineals.

Sigui $\mathcal{B} = \{P, (v_1, \dots, v_n)\}$ una referència cartesiana ortonormal d'un espai afí euclidià E . Sigui $L = P + \langle w_1, \dots, w_r \rangle$ una varietat lineal de E . Sigui $B = (v_1, \dots, v_n)$ i

$$\begin{aligned} C(w_j, B) &= \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \\ C(P, B) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sigui X un punt amb $C(X, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Llavors

$$\begin{aligned} X \in L &\iff \overrightarrow{PX} \in \langle w_1, \dots, w_r \rangle \iff \\ &\iff \text{rang} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - a_n & a_{n1} & \cdots & a_{nr} \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si $\dim L = r$ llavors $w_1, \dots, w_r$ són l.i. i

$$\text{rang} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} \end{pmatrix} = r.$$

Així aquesta matriu té r files $i_1, \dots, i_r$ l.i. En aquest cas,

$$X \in L \iff \begin{vmatrix} x_{i_1} - a_{i_1} & a_{i_1 1} & \dots & a_{i_1 r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{i_r} - a_{i_r} & a_{i_r 1} & \dots & a_{i_r r} \\ x_i - a_i & a_{i 1} & \dots & a_{i r} \end{vmatrix} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_r\}.$$

Aquest és un sistema d'equacions lineals de la varietat lineal L respecte del sistema de coordenades $\mathcal{B}$. Les solucions d'aquest sistema són les coordenades respecte de $\mathcal{B}$ de tots els punts de L .

Exemple 12.2.1 El sistema d'equacions lineals del pla de $\mathbb{R}^4$ que passa pel punt $(1, -1, 2, 5)$ amb direcció $\langle (1, 1, 1, 1), (1, -1, 0, 2) \rangle$ respecte de la referència $\{(0, \dots, 0), B\}$, on B és la base canònica, és

$$\left. \begin{array}{l} \begin{vmatrix} x_1 - 1 & 1 & 1 \\ x_2 + 1 & 1 & -1 \\ x_3 - 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_1 - 1 & 1 & 1 \\ x_2 + 1 & 1 & -1 \\ x_4 - 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right\}$$

és a dir,

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 = -4 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_4 = -6 \end{array} \right\} \quad \diamond$$

12.3 Distància i perpendicularitat

Definim la *distància* en un espai afí euclidià E com

$$\begin{aligned} d: E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longmapsto d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ} | \overrightarrow{PQ} \rangle} \end{aligned}$$

Observem que d compleix les propietats següents:

- (1) $d(P, Q) \geq 0$ per a tot $P, Q \in E$.
- (2) $d(P, Q) = 0$ si i només si $P = Q$.
- (3) $d(P, Q) = d(Q, P)$ per a tot $P, Q \in E$.
- (4) $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$ per a tot $P, Q, R \in E$.

Aquesta última propietat es diu *desigualtat triangular* i és una conseqüència de la desigualtat triangular de la norma. En efecte,

$$d(P, Q) + d(Q, R) = \|Q - P\| + \|R - Q\| \geq \|Q - P + R - Q\| = \|R - P\| = d(P, R).$$

Teorema 12.3.1 (Teorema de Pitàgores) *Sigui E un espai afí euclidià. Siguin $P, Q, R \in E$ tals que $\langle \overrightarrow{PQ} | \overrightarrow{PR} \rangle = 0$. Llavors*

$$d(P, Q)^2 + d(P, R)^2 = d(Q, R)^2.$$

DEMOSTRACIÓ.

$$\begin{aligned} d(Q, R)^2 &= \|\overrightarrow{QR}\|^2 = \langle \overrightarrow{QR} | \overrightarrow{QR} \rangle = \langle \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ} | \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{PR} | \overrightarrow{PR} \rangle + \langle \overrightarrow{PQ} | \overrightarrow{PQ} \rangle - 2\langle \overrightarrow{PR} | \overrightarrow{PQ} \rangle \\ &= \|\overrightarrow{PR}\|^2 + \|\overrightarrow{PQ}\|^2 = d(P, R)^2 + d(P, Q)^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Si W és un subespai vectorial d'un espai vectorial euclidià V , denotem per $W^\perp$ el conjunt dels vectors que són ortogonals a tots els de W , és a dir

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle v | w \rangle = 0, \quad \forall w \in W\}.$$

No costa gens comprovar que $W^\perp$ és un subespai vectorial de V , i es diu *subespai ortogonal* a W .

Proposició 12.3.2 *Sigui W un subespai vectorial d'un espai vectorial euclidià V de dimensió finita n . Llavors*

$$V = W \oplus W^\perp.$$

DEMOSTRACIÓ. Observem que si $v \in W \cap W^\perp$ llavors $\langle v | v \rangle = 0$, i per tant $v = 0$. Això demostra que $W \cap W^\perp = \{0\}$.

Sabem que W té bases ortonormals. Sigui $(u_1, \dots, u_r)$ una base ortonormal de W . Sigui $v \in V$. Sigui

$$w' = v - \langle u_1 | v \rangle u_1 - \dots - \langle u_r | v \rangle u_r.$$

Observem que

$$\langle u_i | w' \rangle = \langle u_i | v \rangle - \langle u_i | v \rangle = 0.$$

Per tant $w' \in W^\perp$, i

$$v = (\langle u_1 | v \rangle u_1 + \dots + \langle u_r | v \rangle u_r) + w' \in W + W^\perp.$$

Això demostra que $V = W + W^\perp$, i per tant $V = W \oplus W^\perp$. $\blacksquare$

Diem que dues varietats lineals $P_1 + W_1$, $P_2 + W_2$ en un espai afí euclidià són *ortogonals* o *perpendiculars* si $W_1 \subseteq W_2^\perp$ o $W_1^\perp \subseteq W_2$.

Sigui E un espai afí euclidià de dimensió finita. Sigui V l'espai vectorial associat i $\langle - | - \rangle$ el seu producte escalar. Sigui L una varietat lineal de E amb direcció W . Definim la *projecció ortogonal* de E sobre L per

$$\begin{aligned} \pi_L : E &\longrightarrow E \\ Q &\longmapsto P + w_1 \end{aligned}$$

on P és un punt fixat de L i $\overrightarrow{PQ} = w_1 + w_2$ amb $w_1 \in W$ i $w_2 \in W^\perp$.

Observem que si P' és un altre punt de L llavors

$$\overrightarrow{P'Q} = \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'P} + w_1 + w_2,$$

i $\overrightarrow{P'P} + w_1 \in W$ i $w_2 \in W^\perp$. Ara

$$P' + \overrightarrow{P'P} + w_1 = P' + P - P' + w_1 = P + w_1.$$

Per tant la definició de π_L no depèn del punt $P \in L$ que fixem.

Observem que $\pi_L(Q)Q = w_2 \in W^\perp$.

12.4 Distància entre dues varietats lineals

Siguin $L_1 = P_1 + W_1$, $L_2 = P_2 + W_2$ dues varietats lineals d'un espai afí euclidià E de dimensió finita. Definim la distància entre L_1 i L_2 com

$$d(L_1, L_2) = \inf\{d(P, Q) \mid P \in L_1, Q \in L_2\}.$$

Observem que si $P \in L_1$ i $Q \in L_2$ llavors

$$d(P, Q) = d(P_1 + \overrightarrow{P_1P}, P_2 + \overrightarrow{P_2Q}) = \|\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{P_2Q}\|,$$

i $\overrightarrow{PP_1} \in W_1$ i $\overrightarrow{P_2Q} \in W_2$. Per tant

$$d(L_1, L_2) = \inf\{\|\overrightarrow{P_1P_2} + w_1 + w_2\| \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}.$$

La Proposició següent ens dona un mètode per calcular aquesta distància.

Proposició 12.4.1 *Siguin $L_1 = P_1 + W_1$, $L_2 = P_2 + W_2$ dues varietats lineals d'un espai afí euclidià E de dimensió finita. Sigui $\pi : E \rightarrow E$ la projecció ortogonal sobre $P_1 + (W_1 + W_2)$. Llavors*

$$d(L_1, L_2) = d(P_2, \pi(P_2)).$$

DEMOSTRACIÓ. Siguin $w_1 \in W_1$ i $w_2 \in W_2$. Llavors

$$\|\overrightarrow{P_1 P_2} + w_1 + w_2\|^2 = \|\overrightarrow{P_1 P_2} - \overrightarrow{P_1 \pi(P_2)} + \overrightarrow{P_1 \pi(P_2)} + w_1 + w_2\|^2,$$

i pel Teorema de Pitàgores,

$$\|\overrightarrow{P_1 P_2} - \overrightarrow{P_1 \pi(P_2)} + \overrightarrow{P_1 \pi(P_2)} + w_1 + w_2\|^2 = \|\overrightarrow{P_1 P_2} - \overrightarrow{P_1 \pi(P_2)}\|^2 + \|\overrightarrow{P_1 \pi(P_2)} + w_1 + w_2\|^2,$$

i així

$$\|\overrightarrow{P_1 P_2} + w_1 + w_2\|^2 \geq \|\overrightarrow{P_1 P_2} - \overrightarrow{P_1 \pi(P_2)}\|^2 = \|\overrightarrow{P_2 \pi(P_2)}\|^2.$$

Per tant $\|\overrightarrow{P_1 P_2} + w_1 + w_2\| \geq \|\overrightarrow{P_2 \pi(P_2)}\|$. Això demostra que $d(L_1, L_2) \geq \|\overrightarrow{P_2 \pi(P_2)}\| = d(P_2, \pi(P_2))$.

Siguin $u_1 \in W_1$ i $u_2 \in W_2$ tals que

$$\pi(P_2) = P_1 + u_1 + u_2.$$

Llavors $P'_1 = P_1 + u_1 \in L_1$ i $P'_2 = P_2 - u_2 \in L_2$. I tenim que

$$d(P'_1, P'_2) = \|\overrightarrow{P_1 P_2} - u_1 - u_2\| = d(P_2, \pi(P_2)).$$

Per tant $d(L_1, L_2) = d(P_2, \pi(P_2))$. ■

12.5 Isometries i desplaçaments

Una aplicació $f : E_1 \rightarrow E_2$ entre dos espais afins euclidians es diu *isometria* si

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q) \quad \forall P, Q \in E_1.$$

Observem que f és injectiva.

Proposició 12.5.1 *Siguin E_1, E_2 espais afins euclidians amb espais vectorials associats V_1, V_2 i productes escalars $\langle - | - \rangle_1, \langle - | - \rangle_2$ respectivament. Sigui $f : E_1 \rightarrow E_2$ una isometria. Llavors l'aplicació*

$$\tilde{f} : V_1 \longrightarrow V_2$$

definida per $\tilde{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$ està ben definida, és lineal i

$$\langle \tilde{f}(u_1) | \tilde{f}(u_2) \rangle_2 = \langle u_1 | u_2 \rangle_1 \quad \forall u_1, u_2 \in V_1.$$

A més, si $g : V_1 \rightarrow V_2$ és una aplicació lineal que conserva el producte escalar, $P_1 \in E_1$ i $P_2 \in E_2$ llavors l'aplicació

$$\begin{aligned} \bar{g} : E_1 &\longrightarrow E_2 \\ P_1 + u_1 &\longmapsto P_2 + g(u_1) \end{aligned}$$

és una isometria i $\tilde{\bar{g}} = g$.

DEMOSTRACIÓ. Fixem $P_0 \in E_1$. Definim $\tilde{f}_0(\overrightarrow{P_0Q}) = \overrightarrow{f(P_0)f(Q)}$. Llavors $\tilde{f}_0 : V_1 \rightarrow V_2$ està ben definida. Siguin $u_1 = \overrightarrow{P_0Q_1}$, $u_2 = \overrightarrow{P_0Q_2}$ vectors de V_1 . Llavors $u_2 - u_1 = \overrightarrow{Q_1Q_2}$. Per tant

$$\begin{aligned} d(Q_1, Q_2)^2 &= \langle u_2 - u_1 \mid u_2 - u_1 \rangle_1 \\ &= \langle u_2 \mid u_2 \rangle_1 + \langle u_1 \mid u_1 \rangle_1 - 2\langle u_1 \mid u_2 \rangle_1 \\ &= d(P_0, Q_2)^2 + d(P_0, Q_1)^2 - 2\langle u \mid v \rangle_1 \end{aligned}$$

Anàlogament,

$$\begin{aligned} d(f(Q_1), f(Q_2))^2 &= d(f(P_0), f(Q_2))^2 + d(f(P_0), f(Q_1))^2 - 2\langle \overrightarrow{f(P_0)f(Q_1)} \mid \overrightarrow{f(P_0)f(Q_2)} \rangle_2 \\ &= d(f(P_0), f(Q_2))^2 + d(f(P_0), f(Q_1))^2 - 2\langle \tilde{f}_0(u_1) \mid \tilde{f}_0(u_2) \rangle_2. \end{aligned}$$

Com que f és una isometria, tenim que

$$\langle \tilde{f}_0(u_1) \mid \tilde{f}_0(u_2) \rangle_2 = \langle u_1 \mid u_2 \rangle_1 \quad \forall u_1, u_2 \in V_1.$$

Veiem que $\tilde{f}_0$ és lineal. Siguin $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} &\langle \tilde{f}_0(\alpha u_1 + \beta u_2) - \alpha \tilde{f}_0(u_1) - \beta \tilde{f}_0(u_2) \mid \tilde{f}_0(\alpha u_1 + \beta u_2) - \alpha \tilde{f}_0(u_1) - \beta \tilde{f}_0(u_2) \rangle_2 = \\ &= \langle \tilde{f}_0(\alpha u_1 + \beta u_2) \mid \tilde{f}_0(\alpha u_1 + \beta u_2) \rangle_2 + \alpha^2 \langle \tilde{f}_0(u_1) \mid \tilde{f}_0(u_1) \rangle_2 + \\ &\quad + \beta^2 \langle \tilde{f}_0(u_2) \mid \tilde{f}_0(u_2) \rangle_2 - 2\alpha \langle \tilde{f}_0(\alpha u_1 + \beta u_2) \mid \tilde{f}_0(u_1) \rangle_2 - \\ &\quad - 2\beta \langle \tilde{f}_0(\alpha u_1 + \beta u_2) \mid \tilde{f}_0(u_2) \rangle_2 + 2\alpha\beta \langle \tilde{f}_0(u_1) \mid \tilde{f}_0(u_2) \rangle_2 = \\ &= \langle \alpha u_1 + \beta u_2 \mid \alpha u_1 + \beta u_2 \rangle_1 + \alpha^2 \langle u_1 \mid u_1 \rangle_1 + \\ &\quad + \beta^2 \langle u_2 \mid u_2 \rangle_1 - 2\alpha \langle \alpha u_1 + \beta u_2 \mid u_1 \rangle_1 - \\ &\quad - 2\beta \langle \alpha u_1 + \beta u_2 \mid u_2 \rangle_1 + 2\alpha\beta \langle u_1 \mid u_2 \rangle_1 = \\ &= \alpha^2 \langle u_1 \mid u_1 \rangle_1 + \beta^2 \langle u_2 \mid u_2 \rangle_1 + 2\alpha\beta \langle u_1 \mid u_1 \rangle_1 + \alpha^2 \langle u_1 \mid u_1 \rangle_1 + \\ &\quad + \beta^2 \langle u_2 \mid u_2 \rangle_1 - 2\alpha^2 \langle u_1 \mid u_1 \rangle_1 - 2\alpha\beta \langle u_1 \mid u_2 \rangle_1 - \\ &\quad - 2\alpha\beta \langle u_1 \mid u_2 \rangle_1 - 2\beta^2 \langle u_2 \mid u_2 \rangle_1 + 2\alpha\beta \langle u_1 \mid u_2 \rangle_1 = 0. \end{aligned}$$

Per tant

$$\tilde{f}_0(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha \tilde{f}_0(u_1) + \beta \tilde{f}_0(u_2).$$

Així $\tilde{f}_0$ és lineal.

Ara siguin $P, Q, Q' \in E_1$ tals que $\overrightarrow{P_0Q} = \overrightarrow{PQ'}$. Tenim que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(P)f(Q')} &= \overrightarrow{f(P_0)f(Q')} - \overrightarrow{f(P_0)f(P)} = \tilde{f}_0(\overrightarrow{P_0Q'}) - \tilde{f}_0(\overrightarrow{P_0P}) \\ &= \tilde{f}_0(\overrightarrow{P_0Q'} - \overrightarrow{P_0P}) = \tilde{f}_0(\overrightarrow{PQ'}) = \overrightarrow{f(P_0)f(Q)}. \end{aligned}$$

Per tant $\tilde{f}$ està ben definida i $\tilde{f} = \tilde{f}_0$, i per tant $\tilde{f}$ és lineal.

La segona part de la proposició té una demostració fàcil que es deixa al lector com a exercici. ■

L'aplicació $\tilde{f}$ de la proposició es diu aplicació lineal associada a f .

EXERCICI. Demostreu que una isometria envia varietats lineals a varietats lineals, conserva el paral·lelisme i envia varietats ortogonals a varietats ortogonals.

Sigui E un espai afí euclidià de dimensió finita. Un *desplaçament* o *moviment* en E és una isometria de E en ell mateix.

Observació 12.5.2 Considerem l'espai afí euclidià (estàndard) $\mathbb{R}^n$. Sigui

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

un desplaçament. Sigui $u_0 = f(0)$. Si $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és l'aplicació lineal associada a f tenim

$$f(u) = u_0 + \tilde{f}(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Si $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$ és la base canònica de $\mathbb{R}^n$, com que $\tilde{f}$ conserva el producte escalar i B_0 és ortonormal, tenim que $\tilde{f}(B_0)$ és una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ i

$$M(\tilde{f}, B_0, B_0) = M(\tilde{f}(B_0), B_0)$$

és una matriu de canvi de base entre dues bases ortonormals. Llavors, per la fórmula del canvi de base per a formes bilineals, tenim que

$$M(\langle - | - \rangle, \tilde{f}(B_0)) = M(\tilde{f}(B_0), B_0)^t M(\langle - | - \rangle, B_0) M(\tilde{f}(B_0), B_0),$$

i com que $f(B_0)$ i B_0 són ortonormals, tenim que

$$M(\langle - | - \rangle, \tilde{f}(B_0)) = M(\langle - | - \rangle, B_0) = I_n,$$

i per tant

$$I_n = M(\tilde{f}(B_0), B_0)^t M(\tilde{f}(B_0), B_0),$$

és a dir,

$$M(\tilde{f}(B_0), B_0)^{-1} = M(\tilde{f}(B_0), B_0)^t.$$

Les matrius invertibles tals que la seva inversa és la seva transposada es diuen *ortogonals*. O sigui que la matriu de l'aplicació lineal associada a un desplaçament de $\mathbb{R}^n$ respecte de B_0 (o de qualsevol altra base ortonormal) és una matriu ortogonal. Els endomorfismes de $\mathbb{R}^n$ que envien bases ortonormals a bases ortonormals es diuen *transformacions ortogonals* de $\mathbb{R}^n$. $\diamond$

Exemples 12.5.3

(1) Les matrius de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

on $\alpha \in \mathbb{R}$, són ortogonals.

(2) La simetria axial respecte de la recta $\langle(1, 0, 0)\rangle$ de $\mathbb{R}^3$ és el desplaçament

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, -y, -z) \end{aligned}$$

(3) La simetria especular respecte del pla $\langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle$ de $\mathbb{R}^3$ és el desplaçament

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, -z) \end{aligned}$$

(4) La simetria central respecte del punt $(0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ és el desplaçament

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (-x, -y, -z) \end{aligned}$$

(5) La translació de $\mathbb{R}^3$ de vector (a, b, c) és el desplaçament

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + a, y + b, z + c) \end{aligned}$$

(6) La rotació amb eix $\langle(1, 0, 0)\rangle$ i angle α de $\mathbb{R}^3$ és el desplaçament

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y \cos \alpha - z \sin \alpha, y \sin \alpha + z \cos \alpha) \end{aligned}$$

(7) La composició de desplaçaments és un desplaçament. $\diamond$

12.6 Exercicis

Exercici 1 *Discutiu en funció del valor dels paràmetres la posició relativa de les dues rectes següents:*

$$\left. \begin{aligned} 2x + ay + z &= 1 \\ 2x - 2y - z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} bx + 2y - 4z &= 2 \\ 4x + 2y + 7z &= -1 \end{aligned} \right\}$$

Exercici 2 Trobeu les equacions paramètriques i cartesianes de les varietats lineals de $\mathbb{R}^4$ següents.

- (a) La generada pels punts $(1, -1, 2, 2), (3, -2, 2, 1), (0, 1, 3, 2)$ i $(-1, 1, 1, 0)$.
- (b) L'hiperplà que passa per $(2, 1, 0, 0)$ i és paral·lel a $x - y - z - t = 0$.
- (c) El pla que conté la recta $x = y = z = 1$ i és paral·lel a la recta $x - y - z = 1, x - t = -1, y - t = 2$.

Exercici 3 Sigui $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida per $\varphi(x, y, z) = (x + 2y + z, y - z, x + 9z)$. És bijectiva? Calculeu la imatge i la antiimatge de la recta $(x, y, z) = (0, 2, -1) + a(1, -1, 0)$, i del pla $2x + y - z = 1$.

Exercici 4 Calculeu les altures del tetràedre de $\mathbb{R}^4$ que té per vèrtexs els punts $(2, 0, 1, 1), (1, 0, 3, -\frac{1}{2}), (0, 0, 1, 1)$, i $(-1, 1, 0, 1)$.

Exercici 5 Sigui V el pla de $\mathbb{R}^4$ definit per les equacions $x - z - t = 1, x - y - z = 1$. Calculeu la distància del punt $(-3, 1, 2, 0)$ a V i la distància entre V i la recta definida per les equacions $x = y = 1, t = 0$.

Capítol 13

Tensors

En aquest capítol, introduïm el concepte de tensor, que és el concepte bàsic de l'Àlgebra multilineal. Els tensors apareixen de forma natural com a models de conceptes de la física, per exemple, el tensor d'inèrcia, i també en l'estudi de la Geometria Diferencial, que és el llenguatge matemàtic per la Teoria de la Relativitat General.

En tot el capítol, K és un cos i V és un K -espai vectorial de dimensió finita $n > 0$.

Notació: Si en un signe de sumatori no es fa referència a cap índex i dins del sumatori surt un índex repetit, un cop com a subíndex i un altre cop com a superíndex, llavors la suma s'ha de fer per a tots els valors possibles d'aquest índex. Per exemple, el sumatori $\sum a_i b^i$ significa el mateix que $\sum_i a_i b^i$, és a dir, la suma dels termes $a_i b^i$ per a tots els possibles valors de i . El sumatori $\sum a_i b^i c^j d_j$ significa $\sum_i \sum_j a_i b^i c^j d_j$.

La delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

també es denotarà per δ_i^j o per δ^{ij} .

L'accent ^ posat sobre un símbol en una fórmula significarà que aquest símbol no apareix a la fórmula. Per exemple

$$v_1 + \dots + \hat{v}_i + \dots + v_n = v_1 + \dots + v_{i-1} + v_{i+1} + \dots + v_n.$$

En aquest capítol, si $B = (v_1, \dots, v_n)$ és una base de V , denotarem la seva base dual per

$$B^* = (v^1, \dots, v^n).$$

13.1 Definicions i propietats

Siguin r i s enters no negatius. Un *tensor* r vegades *covariant* i s vegades *contravariant* sobre V és una aplicació multilinear

$$t : V \times \cdots \times V \times V^* \times \cdots \times V^* \rightarrow K,$$

és a dir, per a tot $u_1, \dots, u_i, \dots, u_r, v_i \in V$, tot $\omega_1, \dots, \omega_j, \dots, \omega_s, \omega'_j \in V^*$, i tot $\lambda \in K$ es compleix:

- (1) $t(u_1, \dots, u_i + v_i, \dots, u_r, \omega_1, \dots, \omega_s) = t(u_1, \dots, u_i, \dots, u_r, \omega_1, \dots, \omega_s) + t(u_1, \dots, v_i, \dots, u_r, \omega_1, \dots, \omega_s),$
- (2) $t(u_1, \dots, u_r, \omega_1, \dots, \omega_j + \omega'_j, \dots, \omega_s) = t(u_1, \dots, u_r, \omega_1, \dots, \omega_j, \dots, \omega_s) + t(u_1, \dots, u_r, \omega_1, \dots, \omega'_j, \dots, \omega_s),$
- (3) $t(u_1, \dots, \lambda u_i, \dots, u_r, \omega_1, \dots, \omega_s) = \lambda t(u_1, \dots, u_i, \dots, u_r, \omega_1, \dots, \omega_s),$
- (4) $t(u_1, \dots, u_r, \omega_1, \dots, \lambda \omega_j, \dots, \omega_s) = \lambda t(u_1, \dots, u_r, \omega_1, \dots, \omega_j, \dots, \omega_s).$

Denotem per $\mathcal{T}_r^s(V)$ el conjunt de tots els tensors r vegades covariants i s vegades contravariants sobre V .

$\mathcal{T}_r^s(V)$ amb la suma d'aplicacions i el producte per escalars és un K -espai vectorial.

Per conveni, $\mathcal{T}_0^0(V) = K$.

Exemples 13.1.1

- (1) $\mathcal{T}_1^0(V) = V^*$.
- (2) $\mathcal{T}_0^1(V) = V^{**} = V$, per la identificació que hi ha entre un espai vectorial de dimensió finita i el seu bidual.
- (3) $\mathcal{T}_2^0(V) = \text{Bil}(V)$ és l'espai vectorial de les formes bilineals sobre V .
- (4) Si $V = M_{n \times 1}(K)$ llavors $\det \in \mathcal{T}_n^0(V)$. $\diamond$

Teorema 13.1.2

$$\dim \mathcal{T}_r^s(V) = n^{r+s}.$$

DEMOSTRACIÓ. Sigui $B = (v_1, \dots, v_n)$ una base de V . Definim $\varphi_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \in \mathcal{T}_r^s(V)$ per

$$\varphi_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}(u_1, \dots, u_r, \omega_1, \dots, \omega_s) = \prod_{k=1}^r v^{i_k}(u_k) \cdot \prod_{l=1}^s \omega_l(v_{j_l})$$

per a tot $u_1, \dots, u_r \in V$ i tot $\omega_1, \dots, \omega_s \in V^*$.

Sigui $t \in \mathcal{T}_r^s(V)$. Siguin $u_1, \dots, u_r \in V$ i $\omega_1, \dots, \omega_s \in V^*$. Llavors

$$u_l = \sum \alpha_l^{i_l} v_{i_l} \quad \text{i} \quad \omega_k = \sum \beta_{j_k}^k v^{j_k}.$$

Ara $t(u_1, \dots, u_r, \omega_1, \dots, \omega_s) =$

$$\begin{aligned} &= t\left(\sum \alpha_1^{i_1} v_{i_1}, \dots, \sum \alpha_r^{i_r} v_{i_r}, \sum \beta_{j_1}^1 v^{j_1}, \dots, \sum \beta_{j_s}^s v^{j_s}\right) \\ &= \sum \alpha_1^{i_1} \cdot \dots \cdot \alpha_r^{i_r} \beta_{j_1}^1 \cdot \dots \cdot \beta_{j_s}^s t(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}, v^{j_1}, \dots, v^{j_s}). \end{aligned}$$

Com que

$$\varphi_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}(u_1, \dots, u_r, \omega_1, \dots, \omega_s) = \alpha_1^{i_1} \cdot \dots \cdot \alpha_r^{i_r} \beta_{j_1}^1 \cdot \dots \cdot \beta_{j_s}^s,$$

tenim que

$$t = \sum t(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}, v^{j_1}, \dots, v^{j_s}) \varphi_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}.$$

Ara es veu fàcilment que $\{\varphi_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}\}_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \in \{1, 2, \dots, n\}}$ és una base de $\mathcal{T}_r^s(V)$.

Per tant $\dim \mathcal{T}_r^s(V) = n^{r+s}$. ■

Els escalars $t(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}, v^{j_1}, \dots, v^{j_s})$ que apareixen en aquesta demostració es diu que són els components del tensor t respecte de la base $(v_1, \dots, v_n)$.

Siguin $t \in \mathcal{T}_r^s(V)$ i $t' \in \mathcal{T}_{r'}^{s'}(V)$. Definim el *producte tensorial* d'aquests tensors com el tensor

$$t \otimes t' \in \mathcal{T}_{r+r'}^{s+s'}(V),$$

tal que

$$\begin{aligned} t \otimes t'(u_1, \dots, u_r, u'_1, \dots, u'_{r'}, \omega_1, \dots, \omega_s, \omega'_1, \dots, \omega'_{s'}) &= \\ &= t(u_1, \dots, u_r, \omega_1, \dots, \omega_s) \cdot t'(u'_1, \dots, u'_{r'}, \omega'_1, \dots, \omega'_{s'}). \end{aligned}$$

La demostració de la Proposició següent és un exercici fàcil que es deixa al lector.

Proposició 13.1.3 Siguin $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_r^s(V)$, $t'_1, t'_2 \in \mathcal{T}_{r'}^{s'}(V)$ i $t'' \in \mathcal{T}_{r''}^{s''}(V)$. Llavors

$$(i) \quad (t_1 \otimes t'_1) \otimes t'' = t_1 \otimes (t'_1 \otimes t'').$$

$$(ii) \quad (t_1 + t_2) \otimes t'_1 = t_1 \otimes t'_1 + t_2 \otimes t'_1.$$

$$(iii) \quad t_1 \otimes (t'_1 + t'_2) = t_1 \otimes t'_1 + t_1 \otimes t'_2. \quad \blacksquare$$

O sigui que el producte tensorial és associatiu i distributiu respecte de la suma. En canvi, el producte tensorial no és commutatiu. Per exemple, considerem $\mathbb{R}^2$, i siguin $\omega_1, \omega_2 \in (\mathbb{R}^2)^*$ definides per $\omega_1(x, y) = x$ i $\omega_2(x, y) = x + y$, per a tot $x, y \in \mathbb{R}$; llavors $\omega_1 \otimes \omega_2((x, y), (z, t)) = x(z + t)$ i $\omega_2 \otimes \omega_1((x, y), (z, t)) = (x + y)z$, en particular,

$$\omega_1 \otimes \omega_2((1, 1), (0, 1)) = 1 \neq 0 = \omega_2 \otimes \omega_1((1, 1), (0, 1)),$$

cosa que demostra que

$$\omega_1 \otimes \omega_2 \neq \omega_2 \otimes \omega_1.$$

Observem que si $B = (v_1, \dots, v_n)$ és una base de V i $t \in \mathcal{T}_r^s(V)$ llavors els components de t en la base B són els escalars $t(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}, v^{j_1}, \dots, v^{j_s})$ i es compleix que

$$t = \sum t(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}, v^{j_1}, \dots, v^{j_s}) v^{i_1} \otimes \dots \otimes v^{i_r} \otimes v_{j_1} \otimes \dots \otimes v_{j_s}.$$

13.2 Canvi de base

En aquesta secció estudiarem com canvien els components d'un tensor en canviar de base.

Siguin $B_1 = (u_1, \dots, u_n)$, $B_2 = (v_1, \dots, v_n)$ bases de V i $B_1^* = (u^1, \dots, u^n)$, $B_2^* = (v^1, \dots, v^n)$ les seves bases duals. Sigui $t \in \mathcal{T}_r^s(V)$. Siguin $\lambda_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s}$ i $\mu_{l_1, \dots, l_r}^{k_1, \dots, k_s}$ els components de t respecte B_1 i B_2 respectivament, és a dir

$$t = \sum \lambda_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} u^{i_1} \otimes \dots \otimes u^{i_r} \otimes u_{j_1} \otimes \dots \otimes u_{j_s}$$

i

$$t = \sum \mu_{l_1, \dots, l_r}^{k_1, \dots, k_s} v^{l_1} \otimes \dots \otimes v^{l_r} \otimes v_{k_1} \otimes \dots \otimes v_{k_s}.$$

Sigui

$$M(B_2, B_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^n & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix}.$$

Pel Corollari 10.1.5, tenim que

$$M(B_2^*, B_1^*)^t = M(B_1, B_2).$$

Sigui

$$M(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \dots & \beta_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_1^n & \dots & \beta_n^n \end{pmatrix}.$$

Llavors

$$M(B_2^*, B_1^*) = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \dots & \beta_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_n^1 & \dots & \beta_n^n \end{pmatrix}.$$

Ara tenim

$$\begin{aligned} \mu_{l_1, \dots, l_r}^{k_1, \dots, k_s} &= t(v_{l_1}, \dots, v_{l_r}, v^{k_1}, \dots, v^{k_s}) \\ &= t(\sum \alpha_{l_1}^{i_1} u_{i_1}, \dots, \sum \alpha_{l_r}^{i_r} u_{i_r}, \sum \beta_{j_1}^{k_1} u^{j_1}, \dots, \sum \beta_{j_s}^{k_s} u^{j_s}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s} \alpha_{l_1}^{i_1} \dots \alpha_{l_r}^{i_r} \beta_{j_1}^{k_1} \dots \beta_{j_s}^{k_s} t(u_{i_1}, \dots, u_{i_r}, u^{j_1}, \dots, u^{j_s}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s} \alpha_{l_1}^{i_1} \dots \alpha_{l_r}^{i_r} \beta_{j_1}^{k_1} \dots \beta_{j_s}^{k_s} \lambda_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s}. \end{aligned}$$

Exemples 13.2.1

(1) Si $t \in \mathcal{T}_0^1(V) = V$

$$\begin{aligned} t &= \sum \lambda^j u_j = \sum \mu^k v_k \\ \text{i} \quad \mu^k &= \sum_j \beta_j^k \lambda^j. \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$C(t, B_2) = M(B_1, B_2)C(t, B_1).$$

Aquí els components del tensor t són les coordenades del vector t .

(2) Si $t \in \mathcal{T}_1^0(V) = V^*$

$$\begin{aligned} t &= \sum \lambda_i u^i = \sum \mu_l v^l \\ \text{i} \quad \mu_l &= \sum_i \alpha_l^i \lambda_i. \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$C(t, B_2^*) = M(B_1^*, B_2^*)C(t, B_1^*).$$

Igual que a l'exemple anterior els components del tensor t són les coordenades de la forma t .

(3) Si $t \in \mathcal{T}_2^0(V)$

$$t = \sum \lambda_{ij} u^i \otimes u^j = \sum \mu_{lk} v^l \otimes v^k.$$

Si $u, v \in V$ llavors

$$\begin{aligned} u &= \sum \alpha^i u_i, \quad v = \sum \beta^j u_j \\ \text{i} \quad t(u, v) &= \sum_{i,j} \lambda_{ij} \alpha^i \beta^j. \end{aligned}$$

En forma matricial

$$t(u, v) = M(u, B_1)^t M(t, B_1) M(v, B_1),$$

on $M(t, B_1)$ és la matriu de la forma bilineal t respecte de B_1 .

A més tenim que

$$\mu_{lk} = \sum_{i,j} \alpha_l^i \alpha_k^j \lambda_{ij},$$

que en forma matricial és

$$M(t, B_2) = M(B_2, B_1)^t M(t, B_1) M(B_2, B_1). \quad \diamond$$

13.3 Contraccions tensorials

Sigui $B = (u_1, \dots, u_n)$ una base de V . Sigui $t \in \mathcal{T}_r^s(V)$ i siguin $1 \leq \alpha \leq r$ i $1 \leq \beta \leq s$. Sabem que

$$t = \sum \lambda_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} u^{i_1} \otimes \dots \otimes u^{i_r} \otimes u_{j_1} \otimes \dots \otimes u_{j_s},$$

on $\lambda_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} = t(u_{i_1}, \dots, u_{i_r}, u^{j_1}, \dots, u^{j_s})$.

La *contracció* dels índexs (α, β) del tensor t és el tensor

$$c_\alpha^\beta(t) = \sum \delta_{j_\beta}^{i_\alpha} \lambda_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} u^{i_1} \otimes \dots \otimes \hat{u}^{i_\alpha} \otimes \dots \otimes u^{i_r} \otimes u_{j_1} \otimes \dots \otimes \hat{u}_{j_\beta} \otimes \dots \otimes u_{j_s}.$$

Teorema 13.3.1 *La definició de $c_\alpha^\beta(t)$ no depèn de la base B .*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $B' = (v_1, \dots, v_n)$ una altra base de V . Llavors

$$\begin{aligned} v_j &= \sum \alpha_j^i u_i, & v^j &= \sum \beta_j^i u^i, \\ u_i &= \sum \beta_i^j v_j, & u^i &= \sum \alpha_j^i v^j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= \sum \lambda_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} u^{i_1} \otimes \dots \otimes u^{i_r} \otimes u_{j_1} \otimes \dots \otimes u_{j_s} \\ &= \sum \mu_{l_1, \dots, l_r}^{k_1, \dots, k_s} v^{l_1} \otimes \dots \otimes v^{l_r} \otimes v_{k_1} \otimes \dots \otimes v_{k_s} \end{aligned}$$

i sabem que $\mu_{l_1, \dots, l_r}^{k_1, \dots, k_s} = \sum_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s} \alpha_{l_1}^{i_1} \dots \alpha_{l_r}^{i_r} \beta_{j_1}^{k_1} \dots \beta_{j_s}^{k_s} \lambda_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s}$.

Hem de veure que

$$\begin{aligned} &\sum \delta_{j_\beta}^{i_\alpha} \lambda_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} u^{i_1} \otimes \dots \otimes \hat{u}^{i_\alpha} \otimes \dots \otimes u^{i_r} \otimes u_{j_1} \otimes \dots \otimes \hat{u}_{j_\beta} \otimes \dots \otimes u_{j_s} = \\ &= \sum \delta_{k_\beta}^{l_\alpha} \mu_{l_1, \dots, l_r}^{k_1, \dots, k_s} v^{l_1} \otimes \dots \otimes \hat{v}^{l_\alpha} \otimes \dots \otimes v^{l_r} \otimes v_{k_1} \otimes \dots \otimes \hat{v}_{k_\beta} \otimes \dots \otimes v_{k_s}. \end{aligned}$$

Ara $\sum \delta_{k_\beta}^{l_\alpha} \mu_{l_1, \dots, l_r}^{k_1, \dots, k_s} v^{l_1} \otimes \dots \otimes \hat{v}^{l_\alpha} \otimes \dots \otimes v^{l_r} \otimes v_{k_1} \otimes \dots \otimes \hat{v}_{k_\beta} \otimes \dots \otimes v_{k_s} =$

$$\begin{aligned} &= \sum \delta_{k_\beta}^{l_\alpha} \left(\sum \alpha_{l_1}^{i_1} \dots \alpha_{l_r}^{i_r} \beta_{j_1}^{k_1} \dots \beta_{j_s}^{k_s} \lambda_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} \right) v^{l_1} \otimes \dots \otimes \hat{v}^{l_\alpha} \otimes \dots \otimes v^{l_r} \\ &\quad \otimes v_{k_1} \otimes \dots \otimes \hat{v}_{k_\beta} \otimes \dots \otimes v_{k_s} \\ &= \sum \delta_{k_\beta}^{l_\alpha} \alpha_{l_\alpha}^{i_\alpha} \beta_{j_\beta}^{k_\beta} \lambda_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} (\alpha_{l_1}^{i_1} v^{l_1}) \otimes \dots \otimes \hat{v}^{l_\alpha} \otimes \dots \otimes (\alpha_{l_r}^{i_r} v^{l_r}) \\ &\quad \otimes (\beta_{j_1}^{k_1} v_{k_1}) \otimes \dots \otimes \hat{v}_{k_\beta} \otimes \dots \otimes (\beta_{j_s}^{k_s} v_{k_s}) \\ &= \sum \delta_{k_\beta}^{l_\alpha} \alpha_{l_\alpha}^{i_\alpha} \beta_{j_\beta}^{k_\beta} \lambda_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} u^{i_1} \otimes \dots \otimes \hat{u}^{i_\alpha} \otimes \dots \otimes u^{i_r} \\ &\quad \otimes u_{j_1} \otimes \dots \otimes \hat{u}_{j_\beta} \otimes \dots \otimes u_{j_s} \\ &= \sum \delta_{j_\beta}^{i_\alpha} \lambda_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} u^{i_1} \otimes \dots \otimes \hat{u}^{i_\alpha} \otimes \dots \otimes u^{i_r} \otimes u_{j_1} \otimes \dots \otimes \hat{u}_{j_\beta} \otimes \dots \otimes u_{j_s}, \end{aligned}$$

ja que $\sum \delta_{k\beta}^{l\alpha} \alpha_{l\alpha}^{i\alpha} \beta_{j\beta}^{k\beta} = \sum \alpha_{l\alpha}^{i\alpha} \beta_{j\beta}^l = \delta_{j\beta}^{i\alpha}$ i aquesta igualtat última és deguda a que:

$$\begin{pmatrix} \beta_1^1 & \cdots & \beta_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_1^n & \cdots & \beta_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Exemple 13.3.2 Sigui φ una forma bilineal sobre V i $B = (u_1, \dots, u_n)$ una base de V . Sigui $v = \sum_{i=1}^n \alpha^i u_i \in V$. Definim

$$\begin{aligned} \varphi(v, -) : V &\longrightarrow K \\ u &\longmapsto \varphi(v, u) \end{aligned}$$

Observem que $\varphi(v, -)$ és una forma lineal sobre V . Sabem que $\varphi \in \mathcal{T}_2^0(V)$. Per tant

$$\varphi = \sum \lambda_{ij} u^i \otimes u^j$$

on $\lambda_{ij} = \varphi(u_i, u_j)$. Ara

$$\varphi(v, u_k) = \sum_{i,j} \lambda_{ij} u^i(v) u^j(u_k) = \sum_i \lambda_{ik} \alpha^i.$$

Per tant $\varphi(v, -) = \sum_{i,j} \lambda_{ij} \alpha^i u^j$.

Ara observem que

$$\begin{aligned} c_1^1(v \otimes \varphi) &= c_1^1 \left(\sum \alpha^{i_1} \lambda_{j_1, j_2} u^{j_1} \otimes u^{j_2} \otimes u_{i_1} \right) = \\ &= \sum \delta_{i_1 j_1} \alpha^{i_1} \lambda_{j_1, j_2} u^{j_2} = \sum \alpha^{i_1} \lambda_{i_1, j_2} u^{j_2} = \varphi(v, -). \end{aligned}$$

O sigui que la forma lineal $\varphi(v, -)$ és una contracció de $v \otimes \varphi$. També es diu que és una contracció del vector v i la forma bilineal φ . $\diamond$

13.4 Exercicis

Exercici 1 Sigui E un $\mathbb{R}$ -espai vectorial i sigui $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ un producte escalar, és a dir un tensor covariant d'ordre 2 simètric i definit positiu. Sigui v i $w \in E$ tals que $|v| = |w|$. Demostreu que $v + w$ i $v - w$ sn ortogonals. Com s'interpreta això geomètricament?

Exercici 2 Sigui $E_2 = \{a_0 + a_1 t \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ (polinomis reals de grau com a molt 1). Definim:

$$\begin{aligned} T_2 : E_2 \times E_2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p(t), q(t)) &\longmapsto T_2(p(t), q(t)) = \int_1^2 p(s)q(s)ds \end{aligned}$$

- (a) Demostreu que T_2 és un tensor euclidià sobre E_2 .
- (b) Ortonormalitzeu la base $(1, t)$ de E_2 .
- (c) Calculeu els components de T_2 respecte de la base $(1, t)$.

Exercici 3 Sigui $V = \mathbb{R}^2$. Definim $t : V \times V \times V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$ per $t(v_1, v_2, \omega_1, \omega_2) = \omega_1(v_1)\omega_2(v_2)$.

- (a) Demostreu que t és un tensor dues vegades covariant i dues vegades contravariant.
- (b) Vegeu que $t = t_1 \otimes t_1$ on t_1 és el tensor una vegada covariant i una vegada contravariant donat per $t_1(v, \omega) = \omega(v)$.
- (c) Trobeu els components de t respecte d'una base qualsevol de V .
- (d) Calculeu les contraccions $C_\alpha^\beta(t)$ per a qualsevol parell d'índexs α i β .

Índex alfabètic

- Adjunt, 149
- Algorisme d'Euclides, 62
- Anell, 41
 - amb unitat, 41
 - commutatiu, 41
 - de matrius, 45
 - de polinomis, 47
 - zero, 42
- Angle, 200
- Antiimatge, 15
- Aplicació, 12
 - bijectiva, 13
 - dual, 175
 - exhaustiva, 13
 - injectiva, 13
 - inversa, 16
 - lineal, 123
- Argument d'un nombre complex, 53
- Arrel d'un polinomi, 48
- Automorfisme, 30, 124
- Base, 86
 - canònica, 87
 - dual, 173
 - ortogonal, 191
 - ortonormal, 200
- Cicle, 34
- Classe d'equivalència, 11
- Coefficient dominant, 46
- Combinació lineal, 82
- Complement d'un subespai vectorial, 91
- Complementari d'un conjunt, 9
- Composició d'aplicacions, 15
- Conjugat d'un nombre complex, 51
- Conjunt, 7
 - buit, 8
 - d'arribada, 13
 - de generadors, 83
 - de les parts, 8
 - de sortida, 13
 - dels nombres complexos, 50
 - dels nombres enters, 8
 - dels nombres naturals, 8, 16
 - dels nombres racionals, 8
 - dels nombres reals, 8
 - ordenat, 11
 - totalment ordenat, 11
- Contracció, 226
- Coordenades, 132
 - polars, 53
- Cos, 49
- Desenvolupament del determinant
 - per una columna, 151
 - per una fila, 151
- Desigualtat
 - de Cauchy-Schwartz, 199
 - triangular, 199, 213
- Desplaçament, 217
- Determinant, 144
 - de Vandermonde, 157
- Diferència de conjunts, 9

- Dimensió, 89
- Distància, 212
- Divisió entera, 60
- Divisor de zero, 49
- Domini
 - d'integritat, 49
 - d'una aplicació, 13
- Eixos de coordenades, 210
- Element, 7
 - invers, 26
 - invertible, 49
 - neutre, 25
 - oposat, 26
 - simètric, 25
 - unitat, 26
 - zero, 26
- Endomorfisme, 30, 124
 - adjunt, 203
 - diagonalitzable, 161
- Epimorfisme, 30, 124
- Escalar, 77
- Espai afí euclidià, 208
- Espai bidual, 178
- Espai de Minkowski, 202
- Espai dual, 173
- Espai vectorial, 77
 - euclidià, 208
 - finitament generat, 83
- Forma bilineal, 185
 - definida negativa, 194
 - definida positiva, 194
 - simètrica, 185
- Forma hermítica, 186
- Forma lineal, 173
- Funció polinòmica, 48
- Fórmula
 - de Grassmann, 93
 - del canvi de base per a formes bilineals, 189
 - del canvi de base, 138
 - del canvi de coordenades, 211
- Grau d'un polinomi, 46
- Grup, 25
 - abelià, 25
 - de les unitats d'un anell, 49
 - lineal general, 126
 - simètric, 27, 28
- Gràfica d'una aplicació, 13
- Hiperplà, 209
- Homomorfisme, 30
- Imatge d'un subconjunt, 14
- Imatge d'una aplicació, 15
- Intersecció, 9
- Isometria, 215
- Isomorfisme, 30 124
- Llei d'inèrcia, 193
- Matriu, 43
 - adjunta, 149
 - ampliada del sistema, 116
 - antisimètrica, 100
 - d'una aplicació lineal, 133
 - d'una forma bilineal, 187
 - del canvi de base, 137
 - del canvi de coordenades, 136
 - del sistema, 116
 - diagonalitzable, 161
 - elemental, 102
 - esglaonada, 106
 - identitat, 45
 - ortogonal, 158, 217
 - quadrada, 43

- quasi-inversa, 122
- simètrica, 81, 100
- Menor d'una matriu, 149
- Monomorfisme, 30, 124
- Morfisme de grups, 30
- Multiplicitat, 71
- Mòdul d'un nombre complex, 53
- Norma, 199
- Nucli, 31
- Operació, 25
 - associativa, 25
 - commutativa, 25
- Ordre d'una permutació, 33
- Origen de coordenades, 210
- Paradoxa de Bertrand Russell, 7
- Permutació, 28
- Pla, 209
 - hiperbòlic, 201
- Polinomi, 46
 - característic, 164
 - irreductible, 67
 - mònic, 67
- Principi d'inducció, 16
 - completa, 17
- Producte
 - cartesià, 10
 - de matrius, 43
 - de nombres complexos, 50
 - de polinomis, 47
 - escalar, 194
 - escalar estàndard, 185
 - tensorial, 223
- Projecció ortogonal, 214
- Punt, 209
- Radical, 196
- Rang d'una matriu, 113
- Recta, 209
- Relació
 - antisimètrica, 10
 - binària, 10
 - d'equivalència, 11
 - d'ordre, 11
 - d'ordre total, 11
 - reflexiva, 10
 - simètrica, 10
 - transitiva, 10
- Relativitat especial, 26
- Signatura, 37
- Signe, 37
- Sistema de coordenades, 210
- Sistema d'equacions lineals, 116
- Sistema homogeni d'equacions lineals, 116
- Subanell, 42
- Subconjunt, 8
- Subespai incident, 180
- Subespai propi, 162
- Subespai vectorial, 81
- Subespai ortogonal, 213
- Subgrup, 29
- Successió de Fibonacci, 18, 99
- Suma
 - de matrius, 43
 - de nombres complexos, 50
 - de polinomis, 47
 - de subespais vectorials, 91
 - directa, 91
- Tensor, 222
 - covariant, 222
 - contravariant, 222
- Teorema de Pitàgores, 213
- Teorema de Sylvester, 193

- Transformació elemental, 101
- Transformació ortogonal, 217
- Transposició, 34
 - de matrius, 46
- Unió, 9
- Valor propi, 161
- Varietat lineal, 208
 - direcció, 208
 - ortogonals, 214
 - paraleles, 209
- Vector, 77
 - isòtrop, 191
 - propi, 162
- Vectors
 - linealment dependents, 84
 - linealment independents, 84
 - ortogonals, 191
- Zero d'una funció polinòmica, 48