Francesc Bars Cortina

Uns apunts de números complexos.

Enginyeria Química
UAB, 15 de juliol de 2011

Contingut

1 Nombres complexos **1**

1.1 Definició i primeres propietats de nombres complexos 1

1.2 Factorització de polinomis 8

1.2.1 L'exponencial complexa. Arrels d'un nombre complex . . 8

1.2.2 Factorització de polinomis a $\mathbb{R}[x]$ i a $\mathbb{C}[x]$ 13

Bibliografia **21**

Capítol 1

Nombres complexos

1.1 Definició i primeres propietats de nombres complexos

Anem a introduir els nombres complexos, igual que els nombres enters i racionals, s'obtenen d'afegir números que són solucions de certs polinomis, en aquest cas els nombres complexos s'obtenen d'afegir a $\mathbb{R}$ les solucions de tots els polinomis a coeficients reals (aquest fet el podreu deduir després de llegir la §1.2 d'aquests apunts). Aquí definim-los de la següent manera més pràctica per fer-ne càlculs. Anem primer a definir un número "nou",

Definició 1.1.1. *Considerem el polinomi*

$$x^2 + 1$$

Denotem per i una de les arrels d'aquest polinomi que fixem (pensem amb $i := +\sqrt{-1}$). Fixeu-vos que les arrels del polinomi son $\pm i$, i que aquest nou nombre i compleix

$$i^2 = i \cdot i = -1.$$

(i és un nombre imaginari).

Observació 1.1.2. *Aquest nombre s'introdueix al s. XVIII, i veureu la seva utilitat en facilitar càlculs i idees en els vostres estudis.*$\star$

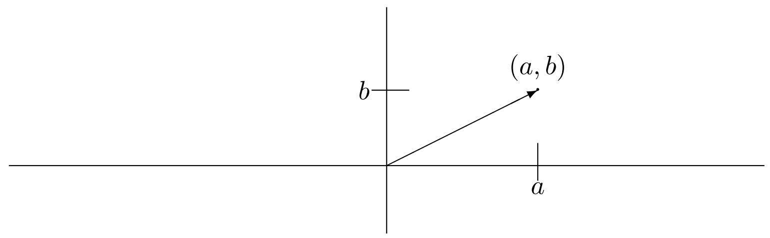
Anem ara a definir els nombres complexos.

Definició 1.1.3. *Un número complex és un parell ordenat(!) de nombres reals a, b, denotat per (a, b) o també per $a + bi$. El conjunt de tots els nombres complexos el denotem per $\mathbb{C}$.(Fixeu-vos que posant $b = 0$ els nombres reals estan dins dels nombres complexos, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).*$\star$

Dos nombres complexos (a, b) i (c, d) són iguals si i nomes si $a = c$ i $b = d$.

Exemple 1.1.4. $(2, 3)$ *o* $2 + 3i$ *és un nombre complex.* $(3, 2)$ *o* $3 + 2i$ *és un altre nombre complex, diferent a* $2 + 3i$.

Observació 1.1.5. *Un nombre complex es pot considerar com un punt (a,b) en el plà OX-0Y o com un vector de centre (0,0) al punt (a,b).*



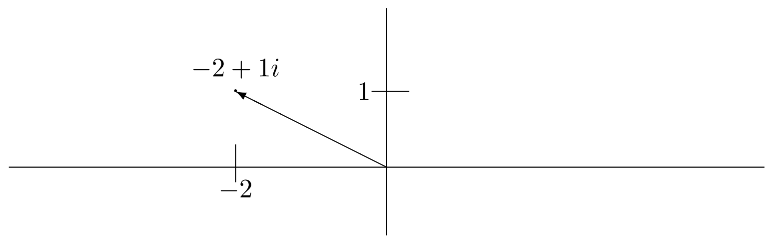
Definició 1.1.6. *Sigui $z := a + bi$ un numero complex ($a, b \in \mathbb{R}$), es defineix la part real del nombre z per el nombre real a i s'anota,* $\mathrm{Re}(z)$, és a dir

$$\mathrm{Re}(z) = a.$$

Anomenem la part imaginària de z al nombre real b i ho denotem per $\mathrm{Im}(z)$, és a dir tenim

$$\mathrm{Im}(z) = b.$$

Exemple 1.1.7. $\mathrm{Re}(-2 + i) = -2$, $\mathrm{Im}(-2 + i) = 1$.



Fixeu-vos que la part real és la projecció del vector amb l'eix de les absisses. La part imaginaria s'obté via la projecció amb l'eix OY (ordenades).$\star$

Els nombres complexos també tenen una operació + i ·. Anem a definir-les i veurem que tenen les propietats que tenien els nombres racionals o reals (li havíem dit "cos", als números amb dues operacions + i · amb certes propietats que també tenen els nombres complexos amb les operacions $+, \cdot$ que definirem tot seguit).

Operació +:
sigui $z = a + bi$ i $w = c + di$ dos nombres complexos ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) definim la suma per,

$$z + w = (a + bi) + (c + di) := (a + c) + i(b + d).$$

Observació 1.1.8. *Observeu que pensant el nombre complex com un vector, la suma de dos nombres complexos és la suma de dos vectors en el plà.*

Operació $\cdot$:

$$z \cdot w = (a+bi)\cdot(c+di) = ac + bdi^2 + adi + bci = (ac-bd) + i(ad+bc).$$

(Observeu que utilitzem $i^2 = -1$ en l'última igualtat.

Exemple 1.1.9. *1. Sumeu* $2+3i$ *amb* $2-3i$.

$$(2+3i)+(2-3i) = (2+2)+i(3-3) = 4+0i = 4$$

2. Multipliqueu $2+3i$ *amb* $2-3i$.

$$(2+3i)(2-3i) = 4-6i+6i-9i^2 = 4-9i^2 = 4+9 = 13.$$

Exercici 1.1.10. *Feu els següents càlculs en nombres complexos*

1. $(1+\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}+\pi i)$,

2. $(e+\log(2)i)(\log(2)+ie)$,

3. $(\sqrt{3}+i)^3$.$\star$

Anem a llistar les propietats (que són les mateixes que tenen la suma i el producte en els nombres racionals i reals però explicitades ara per als nombres $\mathbb{C}$) d'aquestes dues operacions en el cas de nombres complexos. Únicament farem atenció especial com trobar l'invers en el producte d'un nombre complex (diferent del 0=0+0i, és clar).
Propietats + i $\cdot$:

1. Associativa (+): $\forall\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tenim $(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$.
2. Commutativa (+): $z_1+z_2 = z_2+z_1\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
3. Element neutre per (+): existeix $0 := 0+0i = (0,0) \in \mathbb{C}$ complint $0+z = z+0 = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
4. Element oposat amb (+): donat $z = a+bi \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ existeix $z_- := -z := -a-bi \in \mathbb{C}$ complint $z+z_- = 0$.
5. Associativa ($\cdot$): $\forall\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tenim $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3 = z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$.
6. Commutativa ($\cdot$): $z_1\cdot z_2 = z_2\cdot z_1$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
7. Element neutre per ($\cdot$): existeix $1 = 1+0i = (1,0)$ que compleix $1\cdot z = z\cdot 1 = z\ \forall z \in \mathbb{C}$.
8. Distributiva: $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tenim $z_1\cdot(z_2+z_3) = z_1\cdot z_2 + z_1\cdot z_3$.
9. Element invers amb ($\cdot$): per cada $z \in \mathbb{C}$ diferent de zero $(z \neq 0)$ existeix un element $w \in \mathbb{C}$ que compleix $z\cdot w = 1$, escriurem w per z^{-1}.$\star$

Anem a veure com construir l'invers amb el producte d'un nombre complex $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Sigui $z = a + bi$ no zero, denotem per $\overline{z} = a - bi$. Fixeu-vos llavors que

$$z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$$

que es un número real diferent de zero per tant l'invers és,

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2},$$

recalquem-ho posant-hi l'enunciat,

Fórmula 1.1.11 (invers d'un nombre complex)**.** *Donat $z = a + bi \in \mathbb{C}$ no zero $(a, b \in \mathbb{R})$, llavors*

$$z^{-1} := (\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}) = \frac{a}{a^2 + b^2} + (\frac{-b}{a^2 + b^2})i \tag{1.1}$$

Exemple 1.1.12. *Calculem l'invers en el producte del nombre complex* $2 + 3i$*.*

Una resolució. Utilitzant la fórmula 1.1 tenim que l'invers és

$$(2 + 3i)^{-1} = \frac{2 - 3i}{13}.$$

Comproveu vosaltres que efectivament $(2 + 3i)(\frac{2-3i}{13}) = 1$. □

Observació 1.1.13. *Observeu que tenir un invers en el producte (sabent que l'operació producte és commutativa), vol dir que podem dividir, és a dir si $z_1 \in \mathbb{C}$ i $z_2 \in \mathbb{C}$ és un nombre complex no nul, llavors tenim $\frac{z_1}{z_2}$ té sentit i és realment,*

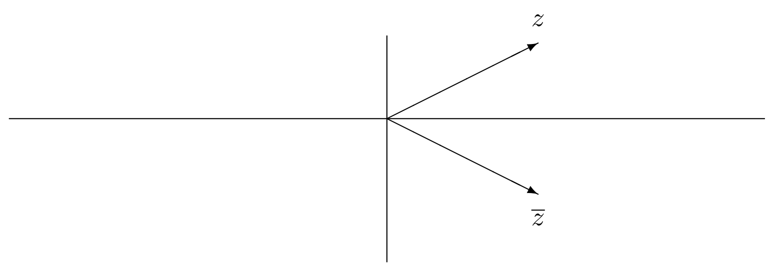
$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = z_2^{-1} \cdot z_1 \star$$

La fórmula del producte de dos nombres complexos és realment entretinguda per a fer-ne càlculs. Hi ha una manera simple per calcular el producte que és escrivint els nombres complexos en forma polar. Nosaltres presentarem aquest fet utilitzant l'exponencial complexa en la §1.3 d'aquest capítol. Anem però ara a introduir totes les eines per a escriure un nombre complex en forma polar, que és descrivint aquest nombre complex via la seva distància al (0,0)=0+0i i l'angle que forma respecte al semieix OX.

Definició 1.1.14. *Si $z = a+bi$ número complex $(a, b \in \mathbb{R})$ qualsevol, s'anomena el conjugat de z, i es denota per $\overline{z}$ al nombre complex*

$$\overline{z} = a - bi.$$

Observació 1.1.15. *Donat z el conjugat és el vector simètric de z respecte l'eix OX, és a dir gràficament és,*



Propietats 1.1.16 (de la conjugació respecte les operacions)**.** *Siguin* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *tenim,*

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
2. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.
3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.
4. $\overline{(z_1/z_2)} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$.
5. $\overline{(z)^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$.
6. $\overline{\overline{z}} = z$.

Definició 1.1.17. *El mòdul d'un nombre complex* $z = a + bi$*, denotat per* $|z|$ *es defineix per*

$$|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

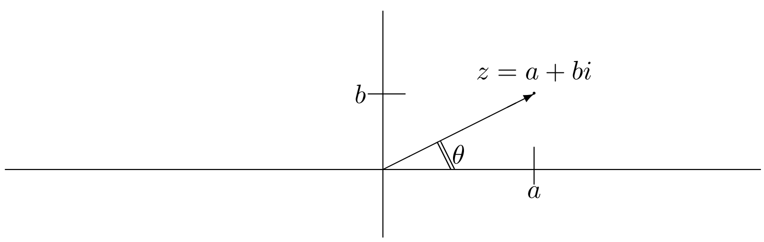
que és un numero real positiu.
Observeu que és la distància del punt complex $z = a + bi$ *a l'origen 0+0i.*

Exercici 1.1.18. *Proveu que si z és real llavors el mòdul de z coincideix amb el valor absolut.*$\star$*(Un comentari: fixeu-vos que en nombres complexos no té sentit dir quin és mes gran que l'altre, és a dir la relació* $\leq$ *en nombres reals no s'estén als nombres complexos).*

Propietats 1.1.19. *Fixeu-vos que tenim les següents igualtats:*

1. *donat* $z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} = |z|^2$.
2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$ *amb* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *amb* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Forma polar d'un nombre complex.
Donat un nombre complex $z = a + bi$:



la distància a l'origen és $|z|$, denotem per $r := |z|$ i sigui θ l'angle que forma el vector amb l'eix OX (aquest angle θ es calcula utilitzant arctang de b/a i coneixent el seu quadrant, mireu la següent observació 1.1.23 per precisar-ho), prenem-ho $0 \leq \theta \leq 2\pi$, tenim llavors que podem escriure a i b de la forma

$$a = r\cos(\theta),\ b = r\sin(\theta).$$

Definició 1.1.20. *Amb la notació anterior per $z = a + bi, r$ i θ, la forma polar del nombre z és donada per r i θ, i ho anotarem per*

$$z = re^{i\theta}.$$

Observació 1.1.21. *Fixeu-vos que hem anotat*

$$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

amb $\theta \in \mathbb{R}$. Com el cosinus i sinus són funcions periòdiques de període 2π, obtenim que

$$e^{i(\theta + k2\pi)} = e^{i\theta},$$

per tot k enter, és a dir podem canviar l'angle en aquesta manera d'escriure el nombre complex sumant a l'angle qualsevol un múltiple de 2π (i per tant podem en la definició de forma polar d'un nombre complex triar $\theta \in \mathbb{R}$ per denotar $z = re^{i\theta}$ el mateix nombre complex sense la restricció de triar θ entre 0 i 2π rad).$\star$

El nombre e i aquesta notació del nombre en forma polar via aquest nombre e la justifiquem en la secció §1.3 d'aquest capítol.
En la notació polar és molt fàcil descriure el producte de dos nombres complexos com veurem mes endavant 1.2.9, però podríeu intentar esbrinar-ho vosaltres mateixos en aquest moments (busqueu-ne la fórmula: $re^{i\theta}se^{i\psi} =?$).

Exercici 1.1.22. *Intenteu fer aquest exercici. Calculeu $(1 + i)^3$, $(1 + i)^7$, $(1 + i)^{78978997878}$.*

Observació 1.1.23 (Important a tenir molt present)**.** *El plà el podem dividir en 4 quadrants,*
1er quadrant: angles entre 0 i 90 graus (0 i $\pi/2$ radiants).
2on quadrant: angles entre $\pi/2$ i π radiants.
3er quadrant: angles entre π i $3\pi/2$ radiants.
4art quadrant: angles entre $3\pi/2$ i 2π radiants.
És molt important posar correctament l'angle θ. El podem calcular a partir d'un nombre complex $z = a + bi$ via,

$$\theta := \arctan(b/a)$$

però aquest arctan *té dos valors entre* 0 *i* 2π *radiants, quin dels dos fem servir per θ?*
Per a això cal mirar en quin quadrant està el nostre nombre complex i si no és del quadrant que ens surt a la calculadora caldrà sumar-hi π radiants a l'angle que ens dona la calculadora.

Observació 1.1.24. *Recordem altre cop que les funcions trigonomètriques* sin *i* cos *son periòdiques de període 2π radiants. Per tant en la forma polar d'un nombre complex $z = re^{i\theta}$ és el mateix triar com angle θ que el $\theta + 2\pi$ que $\theta + 8989089 \cdot 2\pi$.*

Exemple 1.1.25. *Escriu en forma polar els següents nombres complexos*

1. $z = 1 + i$.

Una resolució. Calculem primer el mòdul. $|z| = +\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.
Calculem θ. Fixem-nos que $1+1i$ està al 1er quadrant! per tant θ estarà entre 0 i $\pi/2$ radiants. Fixeu-vos que $b/a = 1$ i tenim

$$\theta = \arctan(1) = \begin{cases} \pi/4 \\ \pi/4 + \pi = 5\pi/4 \end{cases}$$

(si ens restringim que θ està entre 0 i 2π radiants). Com estem en el primer quadrant és $\pi/4$, per tant la forma polar de $1+i$ és

$$z = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = \sqrt{2}\cos(\pi/4) + i\sqrt{2}\sin(\pi/4).$$

□

2. $z = -\sqrt{3} - i$.

Una resolució. Calculem primer el mòdul. $|z| = +\sqrt{3+1} = 2$.
Calculem θ. Fixem-nos que z està al 3er quadrant! per tant θ estarà entre π i $3\pi/2$ radiants. Fixeu-vos que $b/a = 1/\sqrt{3}$ tenim

$$\theta = \arctan(1/\sqrt{3}) = \begin{cases} \pi/6 \\ \pi/6 + \pi = 7\pi/6 \end{cases}$$

(si ens restringim que θ està entre 0 i 2π radiants). Com estem en el tercer quadrant és $7\pi/6$, per tant la forma polar de $\sqrt{3} - i$ és

$$z = 2e^{i7\pi/6} = 2\cos(7\pi/6) + i2\sin(7\pi/6).$$

□

Exemple 1.1.26. *Escriviu en forma $z = a + bi$ (s'anomena aquesta forma, forma cartesiana) el nombre complex escrit en forma polar*

$$z = 34e^{i\pi}.$$

Una resolució. Escrivim $z = 34\cos(\pi) + i34\sin(\pi) = 34(-1) + 34(0) = -34$. □

Definició 1.1.27. *Donat un nombre complex z, anomenarem argument de z i ho anotarem per $arg(z)$ a un valor θ que correspon a l'angle que forma el nombre complex amb l'eix OX.(Fixeu-vos que $arg(z) + 2\pi$ també és un argument).*
Anomenarem l'argument principal de z, denotat per $Arg(z)$ quan aquest valor de θ està comprès entre $-\pi < \theta \leq \pi$ (sol hi ha un! d'argument principal).
En aquesta notació tot nombre complex s'escriu de la forma

$$z = |z|e^{iArg(z)}$$

Exercici 1.1.28. *Veieu que $|z|e^{iarg(z)} = |z|e^{iArg(z)} = |z|e^{i(arg(z)+2\pi)}$ és el mateix nombre complex.*

1.2 Factorització de polinomis

1.2.1 L'exponencial complexa. Arrels d'un nombre complex

Heu definit a batxillerat el nombre irracional e i igualment el nombre real e^r amb $r \in \mathbb{R}$, també hem vist en definir nombres complexos el valor $e^{ir} = cos(r) + isin(r)$ amb $r \in \mathbb{R}$, on aquesta era una notació en forma polar en la secció 1.1 (bé no és realment una notació però no entrarem en la justificació en aquest curs).

Definició 1.2.1. *S'anomena funció exponencial complexa a la funció* $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*;* $z \mapsto e^z$*, que satisfà les tres propietats següents:*
(i) $r \mapsto e^r$ *si* $r \in \mathbb{R}$*(és l'exponencial real si* $z = r + 0i$*,* $r \in \mathbb{R}$ *)*
(ii) $i\theta \mapsto e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ *si* $z = 0 + i\theta$ *amb* $\theta \in \mathbb{R}$
(iii) Té la propietat que donats $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$*,*

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Fixem-nos que l'exponencial complexa del nombre complex $z = a + bi$ és definida per (utilitzant (i)+(ii)+(iii) anteriors):

$$e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a(\cos(b) + i\sin(b)) = e^a\cos(b) + ie^a\sin(b) \in \mathbb{C}.$$

Observació 1.2.2 (*). *Perquè s'anota per* e^z *on* e *és el nombre real definit en la secció anterior? Això bé de l'expressió de l'exponencial* e^x *en sèrie de potències que no entrarem a discutir en aquest curs.*

Exemple 1.2.3. *Quin nombre complex és* $e^{2+\pi i}$*?*

Una resolució. Fixem-nos

$$e^{2+\pi i} = e^2 e^{\pi i} = e^2(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -e^2.$$

□

Exemple 1.2.4. *Quin nombre complex és l'exponencial del nombre complex* $2 + 3e^{2+\frac{\pi}{2}i}$*?*

Una resolució. Volem calcular $e^{2+3e^{2+\frac{\pi}{2}i}}$. Calculem primer el nombre complex $e^{2+\frac{\pi}{2}i} = e^2(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)) = ie^2$, per tant

$$e^{2+3e^{2+\frac{\pi}{2}i}} = e^2 e^{3e^2 i} = e^2(\cos(3e^2) + i\sin(3e^2)) = e^2\cos(3e^2) + ie^2\sin(3e^2).$$

□

Propietats 1.2.5 (de l'exponencial complexa)**.**

1. *Les tres de la definició.*
2. $|e^z| = e^{Re(z)}$*,*
3. $|e^{z+w}| = |e^z||e^w|$ *del fet que* $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$*,*

4. $|e^{i\theta}| = 1$ *si* $\theta \in \mathbb{R}$,

5. $z = re^{i\theta} = e^{\log(r)+i\theta}$ *on* $r > 0$ *real i* $\theta \in \mathbb{R}$,

6. $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow \{\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ i $\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2) = 2\pi k$ amb k cert nombre enter$\}$
$\Leftrightarrow \{z_1 = z_2 + i2\pi k$ per cert $k \in \mathbb{Z}\}$.

7. $z \in \mathbb{C}$. Per tot $k \in \mathbb{Z}$ considerem $z + ik2\pi$ (nombre complex diferent de z si $k \neq 0$) obtenim que
$$e^z = e^{z+ik2\pi}.$$

Observació 1.2.6 (*)**.** *Una pregunta natural és si a $\mathbb{C}$ hi ha un logaritme de l'exponencial com passa en nombres reals. (La resposta és NO). De la propietat 7 de 1.2.5, obtenim que el logaritme no està determinat ja que podem tenir molts valors $z, z + i2\pi, ...$ diferents que tenen la mateixa exponencial i si pensem com la seva propietat de ser log l'invers de l'exp a $\mathbb{R}$ obtenim $z = log(e^z) = log(e^{z+i2\pi}) = z + i2\pi$ cosa impossible ja que no són iguals aquests dos nombres complexos.*
*(*** Com solucionar-ho? Restringint-nos en una regió del plà de $\mathbb{C}$ on sol pugui haver-hi un valor, determinació del logaritme (hi ha moltes determinacions del logaritme, i es parla llavors del logaritme); però no hi ha un logaritme a $\mathbb{C}$ global com hi és a $\mathbb{R}$).*

Exemple 1.2.7. *Resoleu l'equació $e^z = i$.*

Una resolució. Escrivim $i = e^{i\pi/2}$ aplicant les propietats 6 i 7 de 1.2.5, obtenim de $e^z = e^{i\pi/2}$ que,
$$z = \frac{\pi}{2}i + i2\pi k$$
amb $k \in \mathbb{Z}$ (és a dir tenim infinites solucions, una per cada enter). □

Exemple 1.2.8. *Resoleu l'equació $3e^{z+3} = i$.*

Una resolució. Primer posem cada cantó de l'expressió com exponencial d'un nombre complex, d'on obtenim
$$3e^{z+3} = e^{log(3)+z+3} = e^{i\pi/2} = i,$$
usant 6 i 7 en 1.2.5 obtenim que
$$log(3) + z + 3 = i\pi/2 + i2\pi k$$
per tot $k \in \mathbb{Z}$, obtenim que
$$z = -3 - log(3) + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$$
amb $k \in \mathbb{Z}$. □

Proposició 1.2.9 (Fórmula del producte a $\mathbb{C}$ en forma polar)**.** *Donats dos nombres complexos escrits en forma polar $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ i $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, (r_1, r_2 nombres reals positius, i $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$), llavors*
$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

Observació 1.2.10. *Fixeu-vos que si $z = re^{i\theta} \neq 0$ nombre complex escrit en forma polar, llavors,*

$$z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}, \text{ i } \overline{z} = re^{-i\theta}.$$

Utilitzant aquesta fórmula de l'invers en forma polar també obtenim, si $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ i $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ són dos nombres complexos escrits en forma polar no nuls,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

Fórmula 1.2.11 (de Moivre)**.** *Sigui $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ nombre complex escrit en forma polar, llavors*

$$z^n = r^n e^{in\theta},$$

és a dir,

$$(r\cos(\theta) + ir\sin(\theta))^n = r^n\cos(n\theta) + ir^n\sin(n\theta).$$

Exemple 1.2.12. *Calculeu* $(1+i)^{2004}$.

Una resolució. Escrivim primer $1+i$ en forma polar (exercici) i obteniu $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, aplicant la fórmula de Moivre obtenim,

$$(1+i)^{2004} = (\sqrt{2})^{2004}e^{i2004\pi/4} = 2^{1002}e^{i\pi} = -2^{1002}.$$

□

Exemple 1.2.13. *Digueu-me les fórmules de* $\cos(\theta+\varphi)$ *i* $\sin(\theta+\varphi)$ *en funció del* $\sin(\theta)$,$\cos(\theta)$, $\sin(\varphi)$ *i* $\cos(\varphi)$.

Una resolució. Considereu la igualtat

$$(\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)) = e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi} = (\cos(\theta)+i\sin(\theta))(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$$

obtenim mirant les igualtats als extrems,

$$(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)) =$$

$$\cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) + i(\cos(\theta)\sin(\varphi) + \sin(\theta)\cos(\varphi))$$

igualant les parts reals i imaginària d'aquesta igualtat obtenim les fórmules demanades,

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)$$

$$\sin(\theta+\varphi) = \cos(\theta)\sin(\varphi) + \sin(\theta)\cos(\varphi).$$

□

Exemple 1.2.14 (Arrels n-èssimes d'un nombres complex $z = re^{i\theta}$)**.**

Definició 1.2.15. *$w \in \mathbb{C}$ s'anomena arrel n-èssima ($n \in \mathbb{N}$) d'un nombre complex $z \neq 0$ si $w^n = z$.*

Anem a trobar la fórmula que ens permet trobar les arrels n-èssimes d'un nombre complex $z = re^{i\theta}$ (sabeu que a $\mathbb{R}$ per exemple les arrels 2-essimes=arrels quadrades d'un nombre real no zero n'hi ha dues si és un nombre real positiu i cap si és negatiu, a $\mathbb{C}$ donat un nombre $z \neq 0$ hi ha exactament n nombres *complexos diferents que són arrels n-èssimes de z!).*

Sigui $z = re^{i\theta} = e^{\log(r)+i\theta} \neq 0$ *i busquem* $w = se^{i\psi}$ *complint* $w^n = z$ *escrivint-ho de la següent manera aquesta última igualtat,*

$$e^{\log(r)+i\theta} = z = w^n = s^n e^{in\psi} = e^{\log(s^n)+in\psi},$$

utilitzant les propietats 6 i 7 de 1.2.5 obtenim que s'ha de complir

$$\begin{cases} \log(s^n) = \log(r) \\ n\psi = \theta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases},$$

per tant obtenim que $r = s^n$ *i com* $s > 0$ *real i sol hi ha una arrel n-èssima positiva d'un nombre real (proposició* **??***), tenim* $s = \sqrt[n]{r}$*. En quan* $\psi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}$ *i per tant les arrels n-essimes de* $z = re^{i\theta}$ *són,*

$$\sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi k}{n})}, k \in \mathbb{Z},$$

com sabem que $e^{i\alpha} = e^{i(\alpha+2\pi k)}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ *com nombres complexos, obtenim que a* $\mathbb{C}$ *de les arrels anteriors ens donen números complexos diferents per* $k = 0, ..., n-1$*, obtenint així n nombres complexos diferents que son les arrels n-èssimes de* $z = re^{i\theta}$*,*

Fórmula 1.2.16 (arrels n-èssimes)**.** *Donat un nombre complex no-zero* $z = re^{i\theta}$*, i* $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$*, tenim exactament n arrels n-èssimes diferents per z donades per,*

$$\sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi k}{n})},$$

amb $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Exemple 1.2.17. *Calculeu les arrels cúbiques de -2.*

Una resolució. Busquem w complint $w^3 = -2$. Escrivim -2 en forma polar, $-2 = 2e^{\pi i}$, llavors podem aplicar la fórmula anterior per dir que

$$w = \begin{cases} \sqrt[3]{2}e^{i\pi/3} = w_1 \\ \sqrt[3]{2}e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3})} = \sqrt[3]{2}e^{\pi i} = -\sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{2}e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3})} = \sqrt[3]{2}e^{-i\frac{\pi}{3}} = \overline{w_1} \end{cases}$$

□

Exemple 1.2.18. *Calculeu les arrels 6-èssimes de* $1 + i$*.*

Una resolució. Escrivim primer $z = 1+i$ en forma polar (exercici), $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, podem aplicar la fórmula anterior per obtenir que les 6 arrels buscades són,

$$w = \begin{cases} \sqrt[12]{2}e^{i\pi/24} \\ \sqrt[12]{2}e^{i(\frac{\pi}{24}+\frac{2\pi}{6})} \\ \sqrt[12]{2}e^{i(\frac{\pi}{24}+\frac{4\pi}{6})} \\ \sqrt[12]{2}e^{i(\frac{\pi}{24}+\frac{6\pi}{6})} \\ \sqrt[12]{2}e^{i(\frac{\pi}{24}+\frac{8\pi}{6})} \\ \sqrt[12]{2}e^{i(\frac{\pi}{24}+\frac{10\pi}{6})} \end{cases}$$

□

Exemple 1.2.19. *Calculeu les arrels 6-essimes de* 2.

Una resolució. Escrivim primer $z = 2$ en forma polar (exercici), $z = 2e^{i0}$, podem aplicar la fórmula anterior per obtenir que les 6 arrels buscades són,

$$w = \begin{cases} \sqrt[6]{2}e^{i0} = \sqrt[6]{2} \\ \sqrt[6]{2}e^{i\frac{2\pi}{6}} = w_2 \\ \sqrt[6]{2}e^{i\frac{4\pi}{6}} = w_3 \\ \sqrt[6]{2}e^{i\frac{6\pi}{6}} = -\sqrt[6]{2} \\ \sqrt[6]{2}e^{i\frac{8\pi}{6}} = \overline{w_3} \\ \sqrt[6]{2}e^{i\frac{10\pi}{6}} = \overline{w_2} \end{cases}$$

□

Exemple 1.2.20. *Calculeu les arrels quadrades de* $1+2\sqrt{2}i$*, és a dir* $\pm\sqrt{1+2\sqrt{2}i}$.

Una resolució. Escrivim primer $z = 1 + 2\sqrt{2}i$ en forma polar, $z = 3e^{i\theta}$, i $\theta = \arctan(2\sqrt{2})$ i es troba en el primem quadrant, en la calculadora obtenim θ és aproximadament 1,23095941734 radiant i per tant les solucions aproximades són:

$$w = \begin{cases} \sqrt{3}e^{i\frac{1,23095941734}{2}} \\ \sqrt{3}e^{i\frac{1,23095941734}{2}+\pi i} \end{cases}$$

Podem trobar les arrels exactament mitjançant expressions algebraiques: arrels, quebrats,... ? Si, en aquest cas.
Fixem-nos que $\tan\theta = 2\sqrt{2}$ i de ser $1 + 2\sqrt{2}i = 3e^{i\theta}$ obtenim que $\cos\theta = \frac{1}{3}$ i $\sin(\theta) = 2\sqrt{2}/3$. Busquem arrels $\sqrt{3}e^{i\beta}$ on

$$(\sqrt{3}e^{i\beta})^2 = 3e^{i2\beta} = 3e^{i\theta},$$

hem de calcular β complint

$$\cos(2\beta) = \cos(\theta) = 1/3 \ i \ \sin(2\beta) = \sin(\theta) = 2\sqrt{2}/3,$$

restringim-nos a buscar la β del primer quadrant, i l'altra serà sumant-hi π a l'angle (que correspon a multiplicar el nombre complex pel número -1).
Utilitzem les fórmules de l'angle doble per intentar obtenir el $\cos(\beta)$ i $\sin(\beta)$ que és l'únic que necessitem per calcular-ne les arrels quadrades de $1 + 2\sqrt{2}i$, doncs obtenim

$$\cos(\beta)\sin(\beta) = \frac{\sin(\theta)}{2} = \sqrt{2}/3$$
$$\cos^2(\beta) - \sin^2(\beta) = \cos(\theta) = 1/3,$$

aillant a la primera obtenim $\sin(\beta) = \frac{\sqrt{2}}{3\cos(\beta)}$ i substituint a la segona igualtat obtenim

$$\cos^2(\beta) - \frac{2}{9\cos^2(\beta)} = 1/3,$$

escrivim $x = \cos^2(\beta)$ i la igualtat anterior correspon a resoldre l'equació de segon grau

$$x - \frac{2}{9x} = 1/3,$$

que té per solucions $\{\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\}$ prenent arrels quadrades i considerant que $\cos(\beta)$ és real i ens hem restringit que β fos el primer quadrant obtenim

$$\cos(\beta) = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

i per tant $\sin(\beta) = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, obtenim així que les dues solucions buscades (exactes!) són:

$$w = \begin{cases} \sqrt{3}(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) = \sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + i\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{2} + i, \\ \sqrt{3}(\cos(\beta+\pi) + i\sin(\beta+\pi)) = -\sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - i\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{2} - i \end{cases}$$

Observació: Resoleu aquest exemple imposant que es compleix $a^2 - b^2 + 2abi = (a+bi)^2 = 1 + 2\sqrt{2}i$ on $w = a + bi$ amb a, b incògnites reals. □

1.2.2 Factorització de polinomis a $\mathbb{R}[x]$ i a $\mathbb{C}[x]$

Definició 1.2.21. *Un polinomi a coeficients a K (K és un símbol per a "cos", per a nosaltres K vol dir en aquesta secció §1.3.2, $\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{R}$ ó bé $\mathbb{C}$), és una expressió de la forma,*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

amb $a_i \in K$. Es defineix el grau de $p(x)$ al j més gran on $a_j \neq 0$, i a_0 s'anomena el terme independent del polinomi. Diem que $p(x)$ és mònic si $a_n = 1$ amb $n = grau(p(x))$.

Definició 1.2.22. *Un zero o una arrel $\alpha \in K$ d'un polinomi $p(x)$, és un número α de K satisfent que $p(\alpha) = 0$.*

Exemple 1.2.23. 1. *Troba les arrels del polinomi $ax^2 + bx + c$ a $\mathbb{C}$, amb $a \neq 0$, $(a, b, c \in \mathbb{C})$.*

Una resolució. Recordem aquí que tenim una fórmula que ens dóna les arrels dels polinomis de grau 2 donada per

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A $\mathbb{C}$ tindrem sempre dues solucions, recordeu que a $\mathbb{R}$ podia passar que no tingués solucions, per exemple $x^2 + 1$ no té arrels a $\mathbb{R}$. □

Observació 1.2.24. *És important saber el cos K on busquem les arrels d'un polinomi, .*

2. *Troba les arrels a $\mathbb{R}$ de $x^6 - 1$. Troba les arrels a $\mathbb{C}$ del polinomi $x^6 - 1$.*

Una resolució. Sabem que tenim dues arrels 6-enes de 1 a $\mathbb{R}$ que són $\{\pm 1\}$. Anem a buscar les arrels a $\mathbb{C}$, fixeu-vos que són tots els nombres complexos

ξ, complint $\xi^6 = 1$, es dir busquem les arrels 6-enes de 1, per la fórmula 1.2.16 són,

$$\begin{cases} e^{i0} = 1 \\ e^{i\frac{2\pi}{6}} = w_2 \\ e^{i\frac{4\pi}{6}} = w_3 \\ e^{i\frac{6\pi}{6}} = -1 \\ e^{i\frac{8\pi}{6}} = \overline{w_3} \\ e^{i\frac{10\pi}{6}} = \overline{w_2} \end{cases}$$

□

Observació 1.2.25. *Heu vist que per a un polinomi de grau 2 tenim una fórmula per a trobar arrels i llavors trobar arrels d'aquests polinomis (=polinomis de grau 2) és trivial. Heu de conèixer que per polinomis de grau 3 i 4 també hi ha una fórmula, però per polinomis de grau ≥ 5 no existeixen fórmules generals i únicament certes equacions es poden trobar les arrels de manera precisa i utilitzant "trucos". Usualment en equacions de grau gran buscareu solucions aproximades via mètode Newton, i altres, però no trobeu la solució exacta (veureu aquests mètodes numèrics en cursos posteriors). En aquest curs busquem les solucions exactes i sol treballarem en polinomis que es poden calcular exactament (curs d'àlgebra).*

Exemple 1.2.26. *Calculeu les arrels de $x^n + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$.(Cas concret $x^3 + (\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$).*

Una resolució. Fixeu-vos que les arrels de $x^n + \alpha$ és trobar els $x \in \mathbb{C}$ que satisfan $x^n = -\alpha$, que son les arrels n-èssimes del nombre $-\alpha$, aplicant la fórmula 1.2.16 trobem les n-arrels a $\mathbb{C}$, en particular trobem n arrels del polinomi.
En el cas concret $x^3 + (\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$ resolem $x^3 = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = e^{-i\pi/3}$ aplicant la fórmula arrels 3-èssimes per a $e^{-i\pi/3}$ obtenim les arrels,

$$= \begin{cases} e^{-i\pi/9} \\ e^{i(-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3})} \\ e^{i(-\frac{\pi}{9}+\frac{4\pi}{3})} \end{cases}$$

□

Exemple 1.2.27. *Calculeu les arrels a $\mathbb{C}$ del polinomi $x^6 + x^3 + 1$.*

Una resolució. Fem el "truco" dient-li $x^3 = t$ i transformem el polinomi $x^6 + x^3 + 1 = t^2 + t + 1$ aquest últim polinomi en t el podem resoldre utilitzant la fórmula de grau 2 de polinomis

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

tenim dues solucions, anem a calcular $x^3 = t$ amb els dos valors de t anteriors, usant com l'exemple anterior obtenim per $t = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi - i\pi/3} = e^{i2\pi/3}$ obtenim 3 arrels donades per

$$\begin{cases} e^{i2\pi/9} \\ e^{i(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3})} \\ e^{i(\frac{2\pi}{9}+\frac{4\pi}{3})} \end{cases}$$

i per $t = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i2\pi/3}$ obtenim 3 arrels més donades per,

$$\begin{cases} e^{-i2\pi/9} \\ e^{i(-\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3})} \\ e^{i(-\frac{2\pi}{9}+\frac{4\pi}{3})} \end{cases}$$

□

Observació 1.2.28. *Hem calculat arrels de polinomis i sempre ens donàvem menys que el grau. Hem calculat totes les arrels?*
Observem que com a molt, a coeficients en K, hi ha tantes arrels en un polinomi com el grau del polinomi i per a $K = \mathbb{C}$ n'hi ha exactament tantes com el grau del polinomi (contant multiplicitat).

Observació 1.2.29. *Donat un polinomi qualsevol, i com $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, si podem calcular les arrels a $\mathbb{C}$, mirant aquestes podem dir les arrels que té el polinomi a $\mathbb{Q}$ i a $\mathbb{R}$ exactament, per exemple hem calculat les (acceptem aquí que un polinomi de grau n té exactament n arrels a $\mathbb{C}$) 6 arrels a $\mathbb{C}$ de $x^6 - 1$, com hi ha sol dues que es troben en l'eix OX (la recta real dins $\mathbb{C}$) podem dir que sol hi ha dues reals, que són $1, -1$ a més com son racionals també podem dir que a $\mathbb{Q}$ tenim dues arrels i sol té aquestes el polinomi en $\mathbb{Q}$.*

Sabem de col.legi que en els polinomis tenim un algorisme de divisió, és a dir, donats dos polinomis podem dividir-los obtenint un polinomi quocient i un polinomi reste.

$$x^3 + 2x^2 + x + 3 | \underline{x^2 + 1},$$

Diem que un polinomi $p(x)$ és divisible per $h(x)$ si el dividir-los el seu reste ens dóna zero, és a dir, existeix un polinomi $q(x)$ (quocient) on $p(x) = h(x)q(x)$ i dèiem que $h(x)$ era un divisor de $p(x)$.

Teorema 1.2.30 (divisibilitat per arrels)**.** *Sigui $\alpha \in K$ una arrel del polinomi $p(x)$ a coeficients en K, llavors $(x-\alpha)$ divideix el polinomi $p(x)$, és a dir existeix un polinomi $q(x)$ a coeficients en K de grau més petit que $p(x)$ (exactament de grau el grau de $p(x)$-1) complint,*

$$p(x) = (x - \alpha)q(x).$$

Recordeu que la regla de Ruffini us permet algoritmitzar aquesta divisió per factors $(x - \alpha)$.

Teorema 1.2.31 (fonamental de l'Àlgebra)**.** *Tot polinomi de grau $n \neq 0$ a coeficients a $\mathbb{C}$ té una arrel a $\mathbb{C}$.*

Tenim com a conseqüència el següent resultat a recordar,

Corol.lari 1.2.32. Factorització a $\mathbb{C}[x]$. *Donat un polinomi $p(x)$ de grau n a coeficients a $\mathbb{C}$ factoritza de la forma,*

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 = a_n(x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n)$$

amb $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ són les arrels del polinomi $p(x)$.

Observació 1.2.33. *Fixem-nos que l'anterior corol.lari ens afirma que a coeficients en $\mathbb{C}$, un polinomi té exactament n arrels.*

Demostració. [del corol.lari] Fem per inducció pel grau, per $n = 1$ és clar (expliciteu si no ho veieu).
Veiem el cas $k+1$, sigui $p(x)$ polinomi de grau $k+1$ pel teorema fonamental de l'àlgebra té una arrel, diem-la α_1 tenim per (1.2.30) que

$$p(x) = (x - \alpha_1)q(x)$$

ara $q(x)$ té grau k aplicant l'hipòtesi d'inducció a $q(x)$ tenim el resultat. $\square$

Observació 1.2.34. *En l'anterior corol.lari 1.2.32 entre les arrels α_i, n'hi poden haver de repetides, és a dir pot ser que α_1 sigui igual a α_2. Quantes vegades es repeteix una arrel α en aquesta factorització?*

Definició 1.2.35. *Sigui α una arrel d'un polinomi $p(x)$, es defineix la multiplicitat de α, com el natural $k \in \mathbb{N}$ més gran que complint*

$$(x - \alpha)^k \text{ divideix } p(x),$$

(és a dir $(x-\alpha)^k$ divideix $p(x)$ i $(x-\alpha)^{k+1}$ no divideix $p(x)$, (hi ha reste)).

És a dir en un polinomi a coeficients en $\mathbb{C}$ hi ha tantes arrels com el grau però contant cada arrel tantes vegades com la seva multiplicitat.

Exemple 1.2.36. *Factoritzeu a $\mathbb{C}[x]$ el polinomi $3x^3 + 6$.*

Una resolució. Primer busquem les arrels del polinomi $3x^3+6$ (n'hem d'obtenir 3).
Primer es busquen els zeros, tenim $3x^3 + 6 = 0$ que és igual a $x^3 = -2$, cal trobar concs les arrels 3-èssimes de $-2 = 2e^{i\pi}$. Aplicant la fórmula 1.2.16 de les arrels n-èssimes obtenim tres arrels del polinomi:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sqrt[3]{2}e^{i\pi/3} \\ \sqrt[3]{2}e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3})} = -\sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{2}e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3})} \end{array} \right. ,$$

per tant aplicant el corol.lari anterior obtenim que la factorització és

$$3x^3 + 6 = 3(x - \sqrt[3]{2}e^{i\pi/3})(x + \sqrt[3]{2})(x - \sqrt[3]{2}e^{i(5\frac{\pi}{3})}).$$

$\square$

Exemple 1.2.37. *Factoritzeu a $\mathbb{C}[x]$ el polinomi $(x^3+2)(x^2+1)^2$*

Una resolució. Factoritzem factor a factor, fixeu-vos $3(x^3 + 2) = 3x^3 + 6$ i l'exemple anterior hem factoritzat, usant-la obtenim,

$$x^3 + 2 = (x - \sqrt[3]{2}e^{i\pi/3})(x + \sqrt[3]{2})(x - \sqrt[3]{2}e^{i(5\frac{\pi}{3})})$$

busquem ara les arrels de (x^2+1) són $\pm i$, obtenim que la factorització és $(x-i)(x+i)$, com està elevat al quadrat cada factor estarà elevat al quadrat, obtenim així que la factorització és:

$$(x - \sqrt[3]{2}e^{i\pi/3})(x + \sqrt[3]{2})(x - \sqrt[3]{2}e^{i(5\frac{\pi}{3})})(x-i)^2(x+i)^2.$$

$\square$

Anem a estudiar la factorització a $\mathbb{R}[x]$ per a un polinomi a coeficients a $\mathbb{R}$, ja sabem trobar la factorització del polinomi a $\mathbb{C}[x]$, corol.lari 1.2.32.
Recordem el següent exercici,

Lema 1.2.38. *Sigui $p(x)$ un polinomi a coeficients reals, i $\alpha \in \mathbb{C}$ una arrel de $p(x)$. Llavors $\overline{\alpha}$ és també una arrel de $p(x)$.*

Demostració. Exercici 1 de la llista 5, curs 2002/03. Únicament cal observar les igualtats

$$p(\overline{\alpha}) = \overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0.$$

□

Fixem-nos que donat un polinomi $p(x)$ a coeficients a $\mathbb{R}$ de grau n, tenim n arrels a $\mathbb{C}$, si α és una arrel a $\mathbb{R}$ per (1.2.30) $p(x) = (x-\alpha)q(x)$ amb $q(x)$ a coeficients en $\mathbb{R}$. Si α una arrel de $p(x)$ és a $\mathbb{C}$ però no és real, podriem fer 1.2.30, però llavors $q(x)$ no té coeficients a $\mathbb{R}$ i nosaltres volem que tingui coeficients a $\mathbb{R}$ (per factoritzar-ho com a polinomis a coeficients a $\mathbb{R}$ anomenada igualment factorització a $\mathbb{R}[x]$), llavors usant el lema anterior sabem $\overline{\alpha}$ és arrel també de $p(x)$ i

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2$$

que és un polinomi a coeficients a $\mathbb{R}$, i de 1.2.30 obtenim que divideix $p(x)$, és a dir tenim

$$p(x) = (x^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2)q(x),$$

amb $q(x)$ a coeficients reals.

Teorema 1.2.39. Factorització d'un polinomi a $\mathbb{R}[x]$.
Sigui $p(x)$ un polinomi a coeficients en $\mathbb{R}$ de grau $n \geq 1$. Siguin $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ les n arrels del polinomi en $\mathbb{C}$ i ordenem-les de manera que $\alpha_1, \ldots, \alpha_i \in \mathbb{R}$ i $\alpha_{i+1}, \overline{\alpha_{i+1}}, \ldots, \alpha_{i+k}, \overline{\alpha_{i+k}} \in \mathbb{C}$ (i no en $\mathbb{R}$) (on $i + 2k = n$). Llavors tenim la factorització a $\mathbb{R}[x]$ pel polinomi $p(x)$ de la forma següent,

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 =$$

$$a_n(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_i)(x^2-2\mathrm{Re}(\alpha_{i+1})x+|\alpha_i|^2)\ldots(x^2-2\mathrm{Re}(\alpha_{i+k})x+|\alpha_{i+k}|^2).$$

Exemple 1.2.40. *Factoritzeu a $\mathbb{R}[x]$ el polinomi $p(x) = x^3 + 8$.*

Una resolució. Fixeu-vos que primer cal trobar les arrels a $\mathbb{C}$. Un cop trobades, separar les reals i les complexes i ajuntar de dos en dos les complexes (ajuntant l'arrel complexa i la seva conjugada), anem a fer-ho.
Busquem primer les arrels de $x^3 + 8$. Són,

$$\left\{ \begin{array}{c} 2e^{i\pi/3} = w \\ 2e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3})} = -2 \\ 2e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3})} = \overline{w} \end{array} \right. ,$$

tenim que ordenant les arrels són $\{-2, w, \overline{w}\}$ i per tant la factorització és

$$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2\mathrm{Re}(w)x + |w|^2) =$$

$$(x+2)(x^2 - 4cos(\pi/3)x + 4) = (x+2)(x^2 - 2x + 4).$$

□

Exemple 1.2.41. *Factoritza a $\mathbb{R}[x]$ el polinomi $p(x) = x^6 - 1$.*

Una resolució. Busquem primer les 6 arrels a $\mathbb{C}$ del polinomi $p(x)$ són,

$$\begin{cases} 1 \\ e^{i\pi/3} = w_1 \\ e^{i(\frac{2\pi}{3})} = w_2 \\ -1 \\ e^{i(\frac{4\pi}{3})} = \overline{w_2} \\ e^{i(\frac{5\pi}{3})} = \overline{w_1} \end{cases},$$

tenim que ordenant les arrels són $\{1, -1, w_1, \overline{w_1}, w_2, \overline{w_2}\}$ i per tant la factorització és

$$x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2 - 2\mathrm{Re}(w_1)x + |w_1|^2)(x^2 - 2\mathrm{Re}(w_2)x + |w_2|^2) =$$

$$(x-1)(x+1)(x^2 - 2cos(\pi/3)x + 1)(x^2 - 2cos(2\pi/3)x + 1).$$

$\square$

Anem per a acabar a explicar les anteriors factoritzacions en un llenguatge més general sobre un cos K arbitrari (*) (penseu per vosaltres com exemples de K teniu $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$).

Definició 1.2.42 (*). *Un polinomi a coeficients a K de grau ≥ 1 s'anomena irreductible o primer si els seus únics divisors són els polinomis de grau 0 o $kp(x)$ amb $k \in K$.*
Un polinomi $p(x)$ s'anomena K-reductible si existeix $q_1(x), q_2(x)$ polinomis de grau estrictament més petit que $p(x)$ a coeficients en K, que satisfan la igualtat,

$$p(x) = q_1(x)q_2(x).$$

Els polinomis irreductibles serien els mes "petits" que no els podem posar com a producte de dos, i el resultat de "factorització" ens afirma que tot polinomi s'expressa de manera única com a producte de polinomis irreductibles, aquest és l'anàleg per a polinomis del fet (que tots coneixeu de bàsica): tot nombre natural és producte de nombres primers i aquesta factorització és única (llevat d'ordre).

Exemple 1.2.43 (*).

1. *Els polinomis de grau 1 a $K[x]$ són K-irreductibles.*
2. *El polinomi $x^2 - 2$ és irreductible a $\mathbb{Q}[x]$, però és $\mathbb{R}$-reductible, és $\mathbb{C}$-reductible.*
3. *El polinomi $x^2 + 2$ és $\mathbb{Q}$-irreductible, $\mathbb{R}$-irreductible però és $\mathbb{C}$-reductible.*
4. *(***)El polinomi $x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ és $\mathbb{Q}$-irreductible, però és $\mathbb{R}$-reductible (tot i que no té arrels a $\mathbb{R}$).(Observeu si té arrels a K és K-reductible, no tenir arrels no ens diu res sobre irreductibilitat).*

Teorema 1.2.44 (*). **Factorització a $K[x]$**
Donat un polinomi $p(x)$ a coeficients en K no constant(té grau ≥ 1 aquest polinomi), llavors existeix una factorització,

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 = a_n(p_1(x) \ldots p_j(x)),$$

amb $p_j(x)$ polinomis mònics (recordeu definició 1.2.21) irreductibles a $K[x]$. A més aquesta descomposició en irreductibles és única llevat ordre dels $p_j's$. És dir donades dos factoritzacions en polinomis irreductibles,

$$p_1(x) \ldots p_j(x) = q_1(x) \ldots q_m(x)$$

amb p_i, q_i mònics irreductibles llavors $j = m$ i $\{p_i\} = \{q_l\}$.

Lema 1.2.45 (*). *Els polinomis irreductibles a $\mathbb{C}[x]$ són únicament els polinomis de grau 1.*

Corol.lari 1.2.46 (*). *S'obté el teorema de factorització d'un polinomi a coeficients a $\mathbb{C}[x]$ escrit anteriorment (1.2.32).*

Demostració. Ajuntar el lema 1.2.45 i el teorema 1.2.44. □

Lema 1.2.47 (*). *Els polinomis mònics irreductibles a coeficients en $\mathbb{R}$ són els de la forma:*

$$(x - a), \text{ amb } a \in \mathbb{R},$$

o bé $(x^2 + bx + c)$ $c, b \in \mathbb{R}$ complint $b^2 - 4c < 0$(es dir sense arrels en $\mathbb{R}$).

Corol.lari 1.2.48 (*). *Obtenim el teorema de factorització d'un polinomi a coeficients en $\mathbb{R}[x]$ escrit anteriorment (1.2.39).*

Demostració. Ajuntar el lema 1.2.47 i el teorema 1.2.44. □

Observació 1.2.49 (*). *Què succeeix amb $\mathbb{Q}[x]$? Bé, a coeficients a $\mathbb{Q}$ hi ha polinomis irreductibles de qualsevol grau i la factorització a coeficients a $\mathbb{Q}$ és molt més difícil de calcular-la explícitament.*

Bibliografia

[1] *B.P.Demidóvich*: 5000 Problemas de análisis matemático. (N'hi ha còpies a la biblioteca de Ciències-Enginyeries).

[2] *Pestana, Domingo y otros*: Curso práctico de cálculo y precálculo. Ed. Ariel. Colecció: Ariel Ciencia, 2000.