Francesc Bars Cortina

Propietats bàsiques dels números.

Apunts de classe:
Enginyeria Química
UAB, 15 de juliol de 2011

Contingut

Introducció **v**

1 Nombres i convergència **1**
1.1 Propietats bàsiques dels nombres. 1
1.1.1 Nombres naturals i principi d'inducció. 1
1.1.2 Nombres enters, racionals, reals i complexos. 5
1.2 Propietats dels nombres reals. 20
1.2.1 Funció distància, completesa dels nombres reals. 20
1.2.2 Successions de nombres reals. Primeres nocions de límit a un nombre real. 22
1.2.3 Successions creixents i decreixents. Exponencial. 29
1.2.4 Límits de successions a $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Indeterminacions i criteris per al càlcul de límits. 36
1.2.5 Sèries numèriques: primeres propietats.Criteris. 44
1.3 Factorització de polinomis 55
1.3.1 L'exponencial complexa. Arrels d'un nombre complex . . 55
1.3.2 Factorització de polinomis a $\mathbb{R}[x]$ i a $\mathbb{C}[x]$ 60

Bibliografia **67**

Introducció

Aquestes notes volen ser únicament un complement pel nou estudiant universitari en facilitar el seu aprenentatge en el llenguatge matemàtic utilitzat a la universitat.

Les notes són els apunts de classe de teoria del primer capítol del curs d'Àlgebra Lineal per a Enginyeria Química en l'any acadèmic 2002/03. El contingut d'aquests apunts, usualment s'inclou en llibres de càlcul amb una estructura una mica diferent a la que es segueix en aquest curs, tan referent al nivell i a l'ordre, per això he trobat convenient deixar-vos per escrit aquestes notes. La idea de passar-vos aquestes notes és sobre tot perquè no estigueu prenent apunts a classe sinó que intenteu entendre els conceptes que vagin sortint a la pissarra (aquestes notes segueixen en bona part l'ordre i el contingut del primer capítol del curs), i l'esforç a classe és intentar entendre què vol dir aquell concepte (llegir en matemàtiques) i què ens permet calcular, com s'opera, s'utilitza per...
En llegir aquests apunts, us trobareu que apareix un asterix (*). Aquest símbol l'he utilitzat per donar-vos més informació sobre el tema o l'estructura del capítol que crec que us pot ser útil per entendre-ho millor, tot i que es surt del contingut del temari del curs. Igualment trobareu el signe $\star$, utilitzat per a denotar més explícitament l'acabament d'alguns resultats, propietats, comentaris, ...

En quan als capítols següents de l'assignatura Àlgebra Lineal per a enginyers químics a la UAB, un llibre qualsevol d'Àlgebra Lineal segueix bàsicament l'estructura que seguirem en el curs, per això aquestes notes únicament es restringeixen al primer capítol del curs. A més, deixeu-me recomanar els apunts del Professor Enric Nart d'Algebra Lineal per als enginyers informàtics [8] que és justament una ampliació dels capítols 2 al 4 d'aquest curs d'Àlgebra Lineal (si llegiu aquest llibre del professor Enric Nart, penseu que K és per a vosaltres: $\mathbb{R}$ (és a dir els nombres reals) o $\mathbb{Q}$ (els nombres racionals) o $\mathbb{C}$ (els nombres complexos)).

És per a mi un plaer poder agrair al professor Joan Josep Carmona per les seves suggerències i indicacions en la redacció d'aquests apunts.
Igualment agrair les preguntes i dificultats portant a aclariments dels alumnes en llegir aquest text, els quals ajuden a que aquest manuscrit es millori.

Capítol 1

Nombres i convergència

1.1 Propietats bàsiques dels nombres.

En aquesta secció presentarem els nombres naturals, junt amb el principi d'inducció. Aquest principi ens permet demostrar igualtats o enunciats els quals estan expressats respecte els nombres naturals (un exemple s'aquest tipus d'enunciat és: "$n^2 + n^4$ és parell". Fixeu-vos que l'anterior enunciat, ens afirma un fet per a cada nombre natural n, per exemple per a $n = 3$ ens afirma que $3^2 + 3^4$ és parell).

Presentarem els nombres enters i quebrats (o racionals) des d'un punt de vista algebraic, veurem que no són tots i mirem d'entendre que n'hi ha "pocs". Tot seguit presentem els nombres reals que ens permeten mesurar totes les distàncies i introduïm els nombres complexos, nombres que ens permeten sempre trobar arrels d'un polinomi arbitrari (§1.3).

1.1.1 Nombres naturals i principi d'inducció.

Definim els nombres naturals en aquest curs via,

Definició 1.1.1. *Un nombre s'anomena natural si correspon a un nombre utilitzat per a comptar objectes, és a dir si és un nombre de la llista*

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 1098476655, 1098476656, \ldots\}$$

A tots els nombres naturals els designem per $\mathbb{N}$.

Observació 1.1.2. *(*) Fixeu-vos que nosaltres considerem que quan no tenim cap objecte li associem el valor 0 i el considerem un nombre natural.(Hi ha autors que consideren el zero com no natural i denoten per* $\mathbb{N}_0$ *el conjunt que jo he definit anteriorment dels nombres naturals).*

Recordeu que si teniu un conjunt, diem-lo A (a aquest conjunt), (un exemple de conjunt és $\mathbb{N}$), un element a es diu que és de A si és un element del conjunt (per exemple en el cas $A = \mathbb{N}$, diem que 3 és de A, 0 és de A, 4097080 és de A) i ho anotarem per

$$a \in A.$$

Recordem que en els nombres naturals hi tenim una suma + i un producte $\cdot$, és a dir $2+689898$ té sentit i $123\cdot 8987$ també té sentit, ja que ens donen nombres naturals (fixeu-vos que no té sentit (dins els naturals) la resta ni la divisió ja que no sempre ens donaran nombres naturals si ho fem per qualsevol parella de nombres naturals(2-3=-1 no és natural)). Aquestes operacions + (suma) i $\cdot$ (producte) tenen les següents propietats:

Propietats 1.1.3 ($+,\cdot$ en $\mathbb{N}$)**.**

1. *Associativa:* $(a+b)+c = a+(b+c)$ *per a tot*($:=\forall$) *nombres* $a,b,c\in\mathbb{N}$.
2. *Commutativa:* $a+b=b+a$ $\forall a,b\in\mathbb{N}$.
3. *Neutre amb +: existeix* ($:=\exists$) $0\in\mathbb{N}$ *amb la propietat* $a+0=a$, $\forall a\in\mathbb{N}$.
4. *Neutre amb* $\cdot$: $\exists 1\in\mathbb{N}$ *complint* $1\cdot a = a\cdot 1 = a$ $\forall a\in\mathbb{N}$.
5. *Associativa* ($\cdot$): $\forall\ a,b,c\in\mathbb{N}$ *tenim* $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$.
6. *Commutativa* ($\cdot$): $a\cdot b = b\cdot a$, $\forall a,b\in\mathbb{N}$.
7. *Distributiva producte respecte la suma:* $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$, $\forall a,b,c\in\mathbb{N}$.$\star$

Un altre fet dels nombres naturals és la seva ordenació, és a dir tenim

$$0\le 1\le 2\le 3\le \ldots \le 408985\le 408986\le \ldots.$$

Propietats 1.1.4 ($\le$ en $\mathbb{N}$)**.** *Aquesta ordenació compleix,*
si a,b,c *nombres naturals, llavors:*

$$a\le b \text{ si i nomes si } (:=\Leftrightarrow) a+c\le b+c$$

i si $c\neq 0$ *(recordeu* $c\in\mathbb{N}$*) tenim:*

$$a\le b\Leftrightarrow a\cdot c\le b\cdot c,\ \ (c\neq 0) \tag{1.1}$$

Exercici 1.1.5. *Mireu de veure que si* $c=0$ *l'anterior resultat (1.1) no és veritat. (Recordeu que* $P1\Leftrightarrow P2$ *vol dir que es compleixen dues coses:*
-primera: que si passa "P1" llavors passa "P2"(això s'anota per $P1\Rightarrow P2$ *o bé* $P2\Leftarrow P1$*),*
-segona: si "P2" es compleix implica que "P1" es compleix (aquesta segona condició s'anota $P1\Leftarrow P2$ *o bé* $P2\Rightarrow P1$*).).*

Anem a presentar **el principi d'inducció**. Aquest principi ens permet demostrar enunciats presentats per proposicions indexades pels nombres naturals. Què és una demostració? En matemàtiques demostrar vol dir donar una justificació lògica consistent a un cert enunciat. Fem-ho en un exemple. Primer cal formular un enunciat a demostrar, imagineu-vos que voleu demostrar que en *la vostra classe no hi ha ningú amb 17 anys*
(hem formulat un enunciat: no hi ha ningú amb 17 anys en la classe), i després (segon) cal intentar donar una argumentació lògica per decidir si l'enunciat és correcte o no ho és, com ho faríeu? (és a dir, busquem una manera de resoldre el nostre enunciat).
Podríeu dir que tots els que tenen encara 17 anys els ha tocat alguna cosa i

han de marxar un moment de la classe (hem de posar un al.licient, no? per tal que algú s'aixequi i perdi l'anonimat en la classe, veritat?), si no s'aixeca ningú diríem que hem demostrat el nostre enunciat(suposant que els alumnes fan el que s'els hi ha demanat), si s'aixeca algú (SOL AMB UNA PERSONA N'HI HAURIA PROU) diríem que el nostre enunciat era mentida. Fixeu-vos tenim el següent procès:
-Formular un enunciat.
-Intentar acceptar l'enunciat com a correcte o rebutjar-lo.
En aquest segon pas si volem acceptar el resultat com a correcte l'hem de demostrar!, i si volem rebutjar-ho hem de trobar algun cas que vagi en contra de l'enunciat formulat, fixeu-vos que per rebutjar un enunciat sol necessitem un exemple que no es compleixi l'enunciat formulat!!!.
Anem ara a formular un enunciat que ens doni un enunciat per cada nombre natural a partir d'un nombre natural M concret, per exemple, sigui $P(n)$ la proposició pel nombre natural n que ens afirma la igualtat següent,

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

per cada nombre natural n amb $n \geq 1$(1 aquí és el M).
Què fem: intentem provar-la o rebutjar-la?
Anem a fer-ne casos concrets,(fixeu-vos el cas n=0 no està formulat dins la formulació de l'enunciat de $P(n)$).
Per a $n = 1$ tenim que

$$1 = 1^2$$

que es veritat la igualtat, per tant $P(1)$ és veritat.
Fem-ho per a $n = 2$, tenim

$$1 + 3 = 2^2?$$

Sí, també és veritat, per tant $P(2)$ és veritat.
Anem a estudiar el cas $n = 3$, tenim

$$1 + 3 + 5 = 3^2?$$

també és veritat.
Sembla que $P(n)$ pugui ser veritat, però no sabem com demostrar-ho ja que ho hauríem de provar per cada n i tenim infinits nombres naturals, què podem fer? El mètode d'inducció ens hi ajudarà, aquest mètode ens permet demostrar enunciats d'aquest estil. Anem doncs a explicar aquest mètode.

Problema: volem provar una propietat P que fa referència a tots els nombres naturals a partir d'un de concret:M.
(Per exemple P la propietat "$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$" per a $n \geq 1$, aquí $M = 1$).$\star$

Per demostrar la propietat P en un nombre natural concret es tracta únicament de substituir l'enunciat per aquest nombre i comprovar-la directament (hem fet això en l'exemple "$1+3+\ldots+(2n-1) = n^2$" pels naturals 1,2 i 3). El problema és intentar-la provar per tot nombre natural a partir d'un M concret. Com ho fem? El procès és el següent:

Mètode 1.1.6 (d'Inducció.). *1. Provem el cas concret P en el natural M, es a dir $P(M)$*
2. Suposem llavors que P en un enter k arbitrari($\geq M$) és veritat, (aquesta suposició s'anomena hipòtesi d'inducció), i provem llavors que P és veritat per l'enter $k+1$.

Llavors si 1. i 2. es compleixen tenim $P(n)$ és veritat per tot n més gran o igual que M. $\star$

Observació 1.1.7. *NECESSITEU PROVAR 1. i 2. TOTS DOS, PER PODER DEMOSTRAR L'ENUNCIAT "$P(n)$ és veritat $\forall n \geq M$"; NO N'HI HA PROU AMB SOL UN DELS DOS.(Veieu els exercicis 4 i 6 de la llista 1 de problemes [4]).*

Observació 1.1.8. *(sobre la demostració del mètode d'inducció). El fet que utilitzant el mètode d'inducció proveu que $P(n)$ és veritat $\forall n \geq M$ prové del següent fet d'iterar els passos 1. i 2., intentem entendre-ho.*
De 1. obtenim que $P(M)$ és veritat, utilitzant 2. amb $k = M$ obtenim que $P(M+1)$ és veritat, altre cop utilitzant 2. ara amb $k = M+1$(que acabem d'observar que és veritat) obtenim que $P(M+2)$ és veritat, iterant el pas 2. augmentant la k d'un amb un obtenim que $P(n)$ és veritat per tot natural més gran o igual que M.

Exemple 1.1.9 (mètode d'inducció). *Provem que és veritat:*

$$P(n) = \{1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2\}$$

per a tot $n \geq 1$.

Una resolució. Cal provar 1. i 2.
1. Provem que $P(1)$ és veritat. Efectivament, $1 = 1^2$ per tant tenim que $P(1)$ és veritat.
2. Suposem ara que P es veritat a k, es a dir tenim l'igualtat

$$1 + 3 + \ldots + (2k-1) = k^2$$

volem demostrar que

$$1 + 3 + \ldots + (2k-1) + (2(k+1)-1) = (k+1)^2???$$

utilitzant l'hipòtesi d'inducció obtenim que $1+3+\ldots+(2k-1)+(2(k+1)-1)$ és igual a $k^2 + (2(k+1)-1)$, volem veure que és $(k+1)^2$, fixeu-vos,

$$= k^2 + (2(k+1)-1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

per tant provem 2.
Per tant pel mètode d'inducció obtenim que $P(n)$ és veritat per tot natural $n \geq 1$. $\square$

Exercici 1.1.10. *Una versió literària d'una anècdota del gran matemàtic Gauß diu el següent: Gauß , tenia 10 anys i no deixava de xerrar a la classe de matemàtiques. El professor, molt enfadat, es va dirigir a ell i li va dir:"Et castigo, et poso el següent exercici i fins que no l'acabis no tornaràs a obrir* *la boca a la meva classe de matemàtiques", i l'exercici va ser: suma tots els nombres naturals del 1 al 1000 i dona'm el resultat exacte,*

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 999 + 1000 =?.$$

Al cap de menys d'un minutet Gauß tornava a xerrar, el professor visiblement empipat li va dir perquè xerrava si segur que no havia fet aquesta suma, no obstant Gauß li va donar la resposta correcta.
Feu vosaltres aquest exercici.
Proveu també de donar el resultat de la suma dels primers n nombres naturals estrictament mes grans que el zero (via la seva ordenació), és a dir la suma dels nombres naturals del 1 fins al n.
(En aquest exercici necessiteu formular un enunciat per tot natural i després demostrar-lo per inducció).$\star$

És aconsellable que practiqueu el mètode d'inducció. Us poso alguns exercicis més "algoritmitzats" que l'anterior exercici (ja que us poso l'enunciat a demostrar) per tal que practiqueu.

Exercici 1.1.11. *Proveu mitjançant el mètode d'inducció els següents enunciats:*

1. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
2. *Sigui* $r \neq 1$ *proveu* $1 + r + \ldots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$
3. *Exercicis 1, 2 de la llista 1 de problemes [4].*

1.1.2 Nombres enters, racionals, reals i complexos.

Nombres enters

Anem primer a definir els nombres enters. Considerem dos nombres naturals arbitraris $a, b \in N$, i considerem l'equació amb una incògnita en x,

$$a + x = b$$

Definició 1.1.12. *Els nombres enters són tots els nombres que són sol.lució d'alguna equació del tipus $a + x = b$ amb certs a, b nombres naturals. El conjunt de nombres enters els denotem per $\mathbb{Z}$.*$\star$

Fixeu-vos que aquesta definició coincideix amb la vostra idea de nombres enters, és a dir els nombres:

$$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

Igualment tenim que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (recordeu $\subset$ vol dir inclòs).

Observació 1.1.13. *En els nombres enters també hi tenim la suma i el producte. No parlem de resta, ja que entre nombres enters l'expressió $2345 - 346$ s'escriu per $2345 + (-346)$, és a dir és la suma de dos nombres enters.*

Observació 1.1.14. *L'operació suma i producte té les mateixes propietats 1.1.3 però aquí tenim a més un "invers" en la suma, és a dir:*
-Element oposat per la +:
donat $a \in \mathbb{Z}$ *qualsevol llavors existeix un* $b \in \mathbb{Z}$ *amb* $a + b = b + a = 0$ *(0 és l'element neutre en la +), aquest b és el nombre enter* $-a$*.*
Fixeu-vos que no tenim aquest invers en l'operació producte!(aquesta frase vol dir que donat $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *qualsevol no tenim un* $b \in \mathbb{Z}$ *complint* $ab = 1$*).*

Exercici 1.1.15. *També a* $\mathbb{Z}$ *tenim una ordenació, és a dir donats dos nombres enters podem dir quin d'ells és més gran. Generalitzeu les propietats de* $\geq$*(de l'ordenació) 1.1.4 en* $\mathbb{N}$ *per l'ordenació en* $\mathbb{Z}$*.*

Nombres racionals

Considerem ara les expressions $ax = b$ amb $a, b \in \mathbb{Z}$ $a \neq 0$. El conjunt de totes les solucions x de les equacions anteriors s'anomenen els nombres quebrats o racionals (fixeu-vos amb $a = 1$ tenim que $\mathbb{Z}$ està dins dels nombres racionals), una definició equivalent a l'anterior és la següent:

Definició 1.1.16. *Els nombres p que els podem expressar per* $p = b/a$ *amb b i a enters amb* $a \neq 0$ *s'anomenen racionals. El conjunt de tots aquests nombres el denotem per* $\mathbb{Q}$*.*$\star$

A $\mathbb{Q}$ tenim també l'operació + i $\cdot$, el fet de posar les solucions anteriors tenim el següent fet clau:
-tenim invers en el producte, és a dir, donat $a \in \mathbb{Q}$, no zero, tenim un element $b \in \mathbb{Q}$ complint $ab = 1$. Denotem $b = (a)^{-1}$. A més $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Observació 1.1.17. *En la definició (1.1.16) hem utilitzat la notació de divisió. Usant que tenim invers amb el producte, observem que* $1/a = a^{-1}$*, i per tant podeu llavors escriure tot nombre racional de la forma* $a^{-1}b$*. (Fixeu-vos doncs que les operacions - i / són únicament notacions útils, però en cap cas operacions noves).*$\star$

Anem a llistar les propietats de $\mathbb{Q}$ amb les operacions + i $\cdot$ (en general un objecte amb dues operacions que compleixin el següents propietats s'anomena cos, cossos són $\mathbb{Q}$, els nombres reals i els nombres complexos):

Propietats 1.1.18.

1. *Associativa (+):* $\forall\ a, b, c \in \mathbb{Q}$ *tenim* $(a + b) + c = a + (b + c)$*.*
2. *Commutativa (+):* $a + b = b + a\ \forall a, b \in \mathbb{Q}$*.*
3. *Element neutre per (+): existeix* $0 \in \mathbb{Q}$ *complint* $0 + a = a$*,* $\forall a \in \mathbb{Q}$*.*
4. *Element invers amb (+): donat* $a \in \mathbb{Q}$ *existeix* $b := -a \in \mathbb{Q}$ *complint* $a + b = 0$*.*
5. *Associativa (·):* $\forall\ a, b, c \in \mathbb{Q}$ *tenim* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$*.*
6. *Commutativa (·):* $a \cdot b = b \cdot a$*,* $\forall a, b \in \mathbb{Q}$*.*
7. *Element neutre per (·): existeix* 1 *que compleix* $1 \cdot a = a \cdot 1 = a\ \forall a \in \mathbb{Q}$*.*

8. *Element invers amb $(\cdot)$: per cada $a \in \mathbb{Q}$ diferent de zero ($a \neq 0$) existeix un element $b \in \mathbb{Q}$ que compleix $a \cdot b = 1$, escriurem b per a^{-1}.*

9. *Distributiva: $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ tenim $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.*$\star$

Aquestes són les propietats operacionals dels nombres racionals. A $\mathbb{Q}$ també tenim la relació d'ordre "a més petit que b" (a, b nombres racionals), del fet que poder definir que és un nombre positiu i negatiu, i diem que a és més petit o igual que b si i nomes si $a - b$ és un nombre negatiu o zero. Aquesta relació té propietats que coneixeu:

Propietats 1.1.19.

1. *Ordre total: donats $a, b \in \mathbb{Q}$ tenim $a \leq b$ o bé $b \leq a$.*

2. *Antisimètrica: $a \leq b$ i $b \leq a$ llavors $a = b$*

3. *Transitiva: $a \leq b$ i $b \leq c$ llavors $a \leq c$.*

4. *Si $a \leq b$ llavors per tot c tenim $a + c \leq b + c$. Igualment si $c \leq d$ tenim $a + c \leq b + d$.*

5. *Si $a, b \geq 0$ llavors $a \cdot b \geq 0$*

6. *Si $a \leq b$ i $c \geq 0$ tenim $a \cdot c \leq b \cdot c$. Si $a \leq b$ i $c \leq 0$ llavors $a \cdot c \geq b \cdot c$.*

Exercici 1.1.20. *Centreu-vos en les dues últimes propietats. Estudieu que succeeix i quins canvis heu de fer si en lloc de posar $\leq$ o $\geq$ voleu posar-hi $<$ o $>$(no acceptem igualtat).*

Definició 1.1.21. *Donat un nombre racional a, el valor absolut de a que s'anota per $|a|$ és:*

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{sinó} \end{cases} \quad \star$$

Podem pensar el valor absolut de a com la distància del punt a a 0. Quins valors són aquestes distàncies, són tots els valors que podem dibuixar en una recta marcant un punt a arbitrari en aquesta recta? Veurem tot seguit que la resposta és no. Per aconseguir tots aquests valors necessitem els nombres reals. Els nombres reals els obtindrem a partir dels nombres racionals, no afegint arrels d'equacions (com passava en el cas $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$), sinó d'introduir-hi els "elements limit" (distància no és un fenomen algebraic (és un fenomen topològic) i vosaltres ho incloíeu dins càlcul en l'institut). Anem doncs a justificar aquesta resposta negativa.

Nombres reals.

Recordem de col.legi la regla de divisió en nombres racionals (pensem en positius pensant aquest nombre racional positiu com la distància al 0) on per cada nombre racional p/q, fèiem la divisió entera de p entre q, i obteníem una expressió

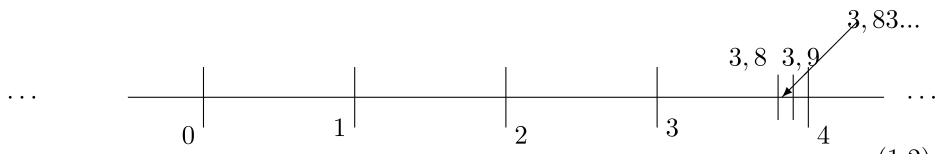
$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_m b_1 \ldots b_q b_1 \ldots b_q \ldots$$

(per exemple: $2/5 = 0,4$, $1/3 = 0,3333333...$) on a_0 era un nombre enter a_i son entre 0 i 9 (amb $i \geq 1$) i els b_i son també entre 0 i 9 i que s'anaven repetint a partir d'un lloc en endavant (“ el període”).

Fixem-nos que una distància qualsevol és una expressió de la forma

$$a_0, a_1 \dots$$

($a_0 \in \mathbb{N}, a_i \in \{0, \dots, 9\}$) però sense tenir a partir d'un lloc necessàriament un període ($a_0 \in \mathbb{N}$).
Dibuixem sobre la recta $3,83...$



(1.2)

pensant com a distàncies (o com a punts sobre la recta, i dibuixant-los com en l'exemple anterior) tots els nombres $a_0, a_1 \dots$ són possibles i també hi tenim una ordenació $\leq$ (els nombres que queden a l'esquerra del 0 els pensem - el valor de la distància que tenen al zero). Considerant tots aquests nombres obtenim els nombres que anomenem nombres reals.

Definició 1.1.22. *Un nombre a s'anomena real positiu si té una expressió del tipus*

$$a = a_0, a_1 a_2 \dots \tag{1.3}$$

amb a_0 un nombre natural qualsevol i els a_i son nombres naturals entre 0 i 9. Un nombre real a s'anomena real negatiu si $-a$ és un nombre real positiu. Els nombres reals són els nombres reals positius i negatius. Fixeu-vos que tot nombre racional és un nombre real. (S'anomena expressió decimal del nombre real a a l'expressió 1.3 si és positiu i per - l'expressió decimal de $-a$ sinó). Anomenarem els nombres reals que no són racionals per nombres irracionals. Al conjunt dels nombres reals els denotem per $\mathbb{R}$.

Observació 1.1.23. *En l'anterior definició (1.1.22) identifiquen l'expressió decimal $a_0, a_1 \dots$ on hi hagi un i complint que $a_i = a_{i+1} = ... = 9$ amb l'expressió decimal $a_0, a_1 ... a_{i-1} a_i + \frac{1}{10^i}$.*
Per exemple $0,9999999999999999...$ s'identifica amb $0,9 + 0,1 = 1$.
$12,7899999999999999999...$ s'identifica amb $12,789 + 0,001 = 12,79$. Per justificar aquesta identificació observeu per exemple $\frac{1}{3}3 = 1$ usant l'expressió decimal per $\frac{1}{3} = 0,3333333333...$ tenim $3(0,3333333...) = 0,999.....$ i aquest valor ha de ser 1!.

Un cop feta aquesta identificació l'expressió d'un nombre real via l'expressió decimal és única. (Si el nombre a és negatiu, la seva expressió decimal és la que correspondria al nombre $-a$ amb un signe - davant i observeu que la identificació anterior per un nombre real negatiu correspondria amb $-a_0, a_1 ... a_{i-1} a_i - \frac{1}{10^i}$.)

Observació 1.1.24. *Anem a definir nombre real sense fer la particularitat pels nombres negatius. Volem definir els nombres reals com tot número damunt una recta. En aquesta recta 1.2 i tenim els nombres enters i un nombre és més gran* *que un altre si es troba més a la dreta que l'altre. Definim, per a un nombre a damunt d'aquesta recta, la part entera de a que denotarem per $[a]$, per a l'enter més gran n complint $n \leq a$. Fixem-nos que la distància entre a i $[a]$ és un nombre positiu entre 0 i 1, i com $a > [a]$ tenim $Dec(a) := a - [a]$ és positiu i entre 0 i 1 (nombre que s'escriu sobre la recta 1.2 en la part dreta del zero i té un valor entre 0 i 1) i per tant té una expressió decimal com hem fet anteriorment:*

$$Dec(a) = 0, a_1 a_2 \dots$$

amb a_i entre 0 i 9. Així podem fer la següent definició de nombre real.

Definició 1.1.25. *Es defineix un nombre real, per un nombre que s'expressa per,*

$$n + 0, a_1 a_2 \dots$$

on n és un nombre enter i els a_i estan entre 0 i 9. El n s'anomena la part entera del nombre real, i $0, a_1 a_2 \dots$ la part decimal del nombre real.

(Aquí és fa també l'identificació en la part decimal si a partir d'un lloc en endavant únicament apareixen 9's; amb la particularitat aquí que

$$n + 0, 99999999999... = (n + 1) + 0 = n + 1.)\star$$

Exercici 1.1.26. *Amb la definició anterior de nombre real (1.1.25) definiu la relació de ser més gran o igual en els nombres reals, és a dir com decidiu donats dos números reals a, b que $a \geq b$ en funció de les expressions decimals i les parts enteres, definiu també l'operació suma. Feu la resta de dos números utilitzant aquesta expressió en part entera i part decimal i l'algorisme trobat per la suma. Intenteu fer la mateixa pregunta anterior amb la definició 1.1.22.$\star$*

Com demostrar que un nombre és real i no racional?
Això és més teòric, ja que fixeu-vos que el resultat de les calculadores i ordenadors sempre són nombres racionals! i per exemple sabeu (o a partir d'ara heu de saber) que π no és un nombre racional i l'aproximeu per un nombre racional en la calculadora o en els càlculs que en feu utilitzant aquest nombre.

Exercici 1.1.27. *Justifiqueu el fet que els resultats de les calculadores no els podem acceptar sempre per exactes. Proveu que tot resultat de la calculadora i de l'ordenador és un nombre racional i per tant no ens apareixen mai nombres irracionals.$\star$*

Anem a fer una prova que un nombre com $\sqrt{2}$ és un nombre real que no és racional, és a dir provem que és un nombre irracional.

Lema 1.1.28. $\sqrt{2}$ *és irracional.*

Observació 1.1.29. *Què vol dir lemma? Bé en matemàtiques els resultats necessiten una prova lògica a partir de les definicions. Quins noms hi posem amb aquests "enunciats" que són demostrables? Són bàsicament els següents (i en donem una primera aproximació del seu significat): lema (un enunciat que intenta complementar una idea, sense tenir però ell sol una importància gran en el tema), proposició (un resultat important que té interès per ell sol), teorema (un resultat important amb interès per ell sol i és un punt important a* *recordar en el context que es presenta), corol.lari (resultats que per certs casos són interessants i que la seva prova és conseqüència fàcil d'una proposició o d'un teorema).*

Demostració. Com demostrar l'enunciat? Aquest curs hem vist el mètode d'inducció. Un altre mètode a conèixer, és el de reducció a l'absurd. Consisteix en el següent: per a demostrar un resultat, suposem que no es compleixi i s'arriba a una contradicció, PENSEU QUE AQUEST ARGUMENT LOGIC US DONA QUE EL RESULTAT A DEMOSTRAR ÉS CORRECTE. Anem a fer-ho en el nostre cas.
Suposem que no es compleixi l'enunciat és a dir, que $\sqrt{2}$ fos un nombre racional. Si és racional existeixen p, q enters que els podem pensar amb fracció simplificada, és a dir no tenen cap primer que divideixi simultàniament p i q, i escrivim

$$\sqrt{2} = p/q.$$

Elevant al quadrat la igualtat anterior obtenim

$$2q^2 = p^2$$

d'aquí tenim que p^2 és un nombre parell per tant 2 divideix p. Podem escriure $p = 2p'$ substituint a $2q^2 = p^2$ tenim (tot tatxant un 2) $q^2 = 2(p')^2$. D'aquesta última igualtat obtenim que q és també parell; per tant 2 divideix p i q, però p, q tenien fracció simplificada, això fa arribar-nos a una contradicció,(i via l'argumentació a l'absurd) d'on obtenim el resultat. $\square$

Anem a preguntar-nos com de grans són els nombres que hem definit, d'enters em tenim infinits, de racionals també i també de reals, però: com són aquests tamanys?
Deixeu-me informar-vos que no tots els conjunts amb infinits elements tenen el mateix tamany, en aquest curs no hi entrarem i sol farem un comentari intuïtiu perquè hi observeu la gran diferència entre racionals i reals, realment hi ha molts molts i molts i molts d'irracionals!! i cap d'ells els podem escriure utilitzant calculadores i ordenadors !!!!!!!!

Imaginem que tenim una corda infinita

$$\ldots \quad \overline{\hspace{4cm}} \ldots$$

i que damunt d'ella hi marquem els nombres enters, fixeu-vos que ens queden molts forats. Si marquem tots els nombres racionals en la corda semblaria que hi ha pocs forats, però si agafem un interval, per exemple el $[0, 1]$ i posem una mesura de longitud que tingui el valor 1 en l'interval $[0, 1]$, llavors es prova que la mesura del conjunt de tots els nombres racionals entre 0 i 1 és zero!, com la mesura ens estudia la grandària, això ens indica que hi ha molts més nombres irracionals que de racionals. Aquesta idea sense justificació es pot corroborar matemàticament d'una manera més fàcil en provar que hi ha molts més nombres irracionals que racionals, via observar que dels infinits nombres racionals, aquest infinit és un infinit que es pot enumerar, podem posar en ordre els racionals: primer aquest, segon aquest altre i així successivament, i arribem d'aquesta manera a recórrer tots els nombres racionals. Aquest fenomen no passa amb els nombres reals. Els conjunts que és poden enumerar (és dir posar en ordre com primer aquest, segon aquest altre i successivament) s'anomenen numerables (i

són els conjunts infinits més petits, petits en quan a nombre d'elements dins els conjunts amb infinits elements). Per tant obtenim,
els racionals són numerables, i en canvi els reals són no numerables (n'hi ha molts més de reals que de racionals tot i que tots dos conjunts tinguin infinits elements).

Després d'aquest comentari un pot pensar que sobre la corda, els racionals són pocs, però recordeu que en tenim infinits també. El que un no té dins els nombres racionals són "tots els límits de successions convergents", intentarem entendre aquest comentari en la secció següent.
Tenim el següent resultat,

Proposició 1.1.30. *Entre dos nombres reals diferents, sempre hi ha un nombre racional i un d'irracional entre ells.*

Exercici 1.1.31. *Intenteu provar l'anterior resultat escrivint dos nombres reals arbitraris diferents, un serà més gran que l'altre i mireu de construir nombres entremig, un que sigui racional i un altre d'irracional (indicant-ho aquest últim).*$\star$

En els nombres reals també hi tenim definit el valor absolut (estenent la definició donada per als racionals),

$$|a| = màxim\{a, -a\}.$$

Exercici 1.1.32. *Comproveu que el valor absolut per als nombres reals coincideix si* $a \in \mathbb{Q}$ *amb la definició de valor absolut donada en 1.1.21.*

Escrivim certes propietats del valor absolut.

Teorema 1.1.33 (Propietats del valor absolut)**.** *Per a qualsevol* $a, b \in \mathbb{R}$ *(o bé* $a, b \in \mathbb{Q}$*) es té*

1. $|a| = 0$ *si i nomes si* $a = 0$.
2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
3. $|a| \leq b$, *si i nomes si* $-b \leq a \leq b$.
4. *(Desigualtat triangular)* $|a + b| \leq |a| + |b|$.
   A més,
5. $|a - b| \geq ||a| - |b|| \geq |a| - |b|$.
6. $|x_1 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + \ldots + |x_n|$ *amb* $x_i \in \mathbb{R}$.$\star$

Exemple 1.1.34. *Trobeu els punts reals complint,*

1. $|x^2 - 3| \leq 1$

   Una resolució. (Penseu també gràficament l'exercici).
   Estudiem primer quan $x^2 - 3 \geq 0$. Cal resoldre aquesta inequació, obtenim que $x^2 \geq 3$ i per tant obtenim que $x \in (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$, per tant distingim dos casos,
   Cas $x \in (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$, tenim que resoldre,

   $$|x^2 - 3| \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 3 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq 4$$

on l'última inequació té solució per $-2 \leq x \leq 2$, per tant com la x estava en un interval concret obtenim en aquest apartat que la solució demanada és

$$x \in [-2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2]$$

Cas $x \notin (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$, llavors hem de resoldre,

$$|x^2 - 3| \leq 1 \Leftrightarrow -x^2 + 3 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq x^2$$

on l'última inequació té solució $x \geq \sqrt{2}$ o $x \leq -\sqrt{2}$, per tant com la x estava en un interval concret obtenim en aquest apartat que la solució demanada és

$$x \in (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

Ajuntant ambdos casos obtenim que la solució demanada és

$$x \in [-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2].$$

$\square$

Una altra manera de fer aquest exercici és utilitzant la propietat 1.1.33.3, i resoldriem les inequacions

$$-1 \leq x^2 - 3 \leq 1.$$

El exemple següent, podríem resoldre usant $|\alpha| < b$ *és equivalent a* $-b < \alpha < b$ *(aquesta propietat del valor absolut és semblant a la propietat 1.1.33.3 però amb desigualtats estrictes).*

2. $|x^2| < 3$

Una resolució. (Penseu també gràficament l'exercici). Estudiem primer quan $x^2 \geq 0$. Cal resoldre aquesta inequació obtenim que sempre és veritat per tant no cal distingir casos. Com és positiu $|x^2| = x^2$ on tenim que resoldre,

$$|x^2| < 3 \Leftrightarrow x^2 < 3$$

on l'última inequació té solució $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, i per tant la solució demanada és

$$x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}).$$

$\square$

3. $|x - 3| < |x + 1|$

Una resolució. Observeu que $x - 3 \geq 0$ per $x \geq 3$ i $x + 1 \geq 0$ quan $x \geq -1$, estudiem l'exemple fent-ne tres casos,
cas $x \in (-\infty, -1)$ tenim que

$$|x - 3| < |x + 1| \Leftrightarrow -x + 3 < -x - 1 \Leftrightarrow 3 < -1$$

on l'última desigualtat és mentida, per tant els $x \in (-\infty, -1)$ no satisfan la desigualtat.
Cas $x \in [-1, 3]$, tenim que

$$|x - 3| < |x + 1| \Leftrightarrow -x + 3 < x + 1 \Leftrightarrow 2 < 2x$$

on l'última desigualtat és veritat pels $x > 1$ per tant obtenim(recordeu que esteu en l'interval [-1,3]) són solució de la inequació els

$$x \in (1, 3].$$

Cas $x \in (3, +\infty)$ tenim que

$$|x - 3| < |x + 1| \Leftrightarrow x - 3 < x + 1 \Leftrightarrow -3 < 1$$

on l'última desigualtat és veritat sempre (recordeu que esteu en l'interval $(3, +\infty)$) on

$$x \in (3, +\infty),$$

és també solució de la inequació.
Ajuntant tos els casos obtenim que la solució demanada és,

$$x \in (1, +\infty).$$

□

Recordeu-vos que en els nombres reals hi tenim dues operacions $+, \cdot$ junt amb un seguit de propietats 1.1.18, i junt amb un relació de més gran o igual que ens permet també distingir elements. Igualment tota distància entre dos punts qualsevol sobre una mateixa recta és un nombre real.

Nombres complexos

Anem a introduir els nombres complexos, igual que els nombres enters i racionals, s'obtenen d'afegir números que són solucions de certs polinomis, en aquest cas els nombres complexos s'obtenen d'afegir a $\mathbb{R}$ les solucions de tots els polinomis a coeficients reals (aquest fet el podreu deduir després de llegir la §1.3 d'aquest capitol). Aquí definim-los de la següent manera més pràctica per fer-ne càlculs. Anem primer a definir un número "nou",

Definició 1.1.35. *Considerem el polinomi*

$$x^2 + 1$$

Denotem per i una de les arrels d'aquest polinomi que fixem (pensem amb $i := +\sqrt{-1}$). Fixeu-vos que les arrels del polinomi son $\pm i$, i que aquest nou nombre i compleix

$$i^2 = i \cdot i = -1.$$

(i és un nombre imaginari).

Observació 1.1.36. *Aquest nombre s'introdueix al s. XVIII, i veureu la seva utilitat en facilitar càlculs i idees en els vostres estudis.*$\star$

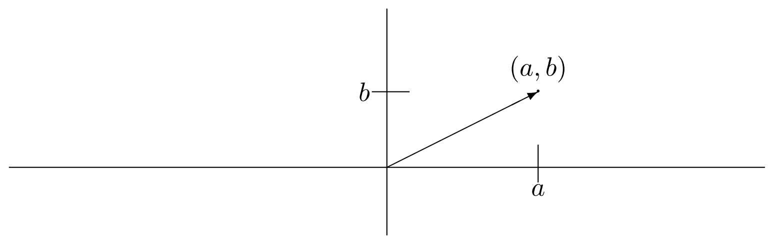
Anem ara a definir els nombres complexos.

Definició 1.1.37. *Un número complex és un parell ordenat(!) de nombres reals a, b, denotat per (a, b) o també per $a + bi$. El conjunt de tots els nombres complexos el denotem per $\mathbb{C}$.(Fixeu-vos que posant $b = 0$ els nombres reals estan dins dels nombres complexos, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).*$\star$

Dos nombres complexos (a, b) i (c, d) són iguals si i nomes si $a = c$ i $b = d$.

Exemple 1.1.38. $(2, 3)$ *o* $2 + 3i$ *és un nombre complex.* $(3, 2)$ *o* $3 + 2i$ *és un altre nombre complex, diferent a* $2 + 3i$.

Observació 1.1.39. *Un nombre complex es pot considerar com un punt (a,b) en el plà OX-0Y o com un vector de centre (0,0) al punt (a,b).*



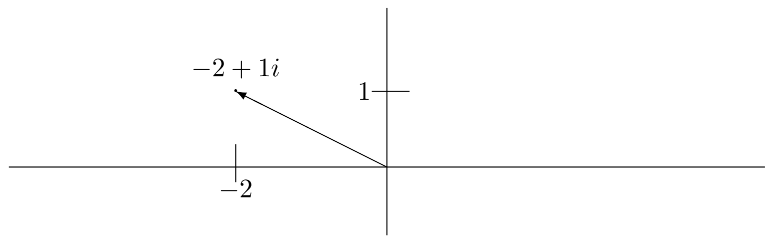
Definició 1.1.40. *Sigui* $z := a + bi$ *un numero complex (*$a, b \in \mathbb{R}$*), es defineix la part real del nombre* z *per el nombre real* a *i s'anota,* $\mathrm{Re}(z)$, és a dir

$$\mathrm{Re}(z) = a.$$

Anomenem la part imaginària de z al nombre real b i ho denotem per $\mathrm{Im}(z)$, és a dir tenim

$$\mathrm{Im}(z) = b.$$

Exemple 1.1.41. $\mathrm{Re}(-2 + i) = -2$, $\mathrm{Im}(-2 + i) = 1$.



Fixeu-vos que la part real és la projecció del vector amb l'eix de les absisses. La part imaginaria s'obté via la projecció amb l'eix OY (ordenades).$\star$

Els nombres complexos també tenen una operació + i $\cdot$. Anem a definir-les i veurem que tenen les propietats que tenien els nombres racionals o reals (li havíem dit "cos", als números amb dues operacions amb les propietats 1.1.18 que també tenen els nombres complexos amb les operacions $+, \cdot$ que definirem tot seguit).

Operació +:
sigui $z = a + bi$ i $w = c + di$ dos nombres complexos ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) definim la suma per,

$$z + w = (a + bi) + (c + di) := (a + c) + i(b + d).$$

Observació 1.1.42. *Observeu que pensant el nombre complex com un vector, la suma de dos nombres complexos és la suma de dos vectors en el plà.*

Operació $\cdot$:

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + bdi^2 + adi + bci = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

(Observeu que utilitzem $i^2 = -1$ en l'última igualtat.

Exemple 1.1.43. *1. Sumeu $2 + 3i$ amb $2 - 3i$.*

$$(2 + 3i) + (2 - 3i) = (2 + 2) + i(3 - 3) = 4 + 0i = 4$$

2. Multipliqueu $2 + 3i$ amb $2 - 3i$.

$$(2 + 3i)(2 - 3i) = 4 - 6i + 6i - 9i^2 = 4 - 9i^2 = 4 + 9 = 13.$$

Exercici 1.1.44. *Feu els següents càlculs en nombres complexos*

1. $(1 + \sqrt{3}i)(2 + \sqrt{3} + \pi i)$,

2. $(e + \log(2)i)(\log(2) + ie)$,

3. $(\sqrt{3} + i)^3$.$\star$

Anem a llistar les propietats (que són les mateixes que 1.1.18 però explicitades per nombres $\mathbb{C}$) d'aquestes dues operacions en el cas de nombres complexos. Únicament farem atenció especial com trobar l'invers en el producte d'un nombre complex (diferent del 0=0+0i, és clar).
Propietats + i $\cdot$:

1. Associativa (+): $\forall\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tenim $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

2. Commutativa (+): $z_1 + z_2 = z_2 + z_1\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

3. Element neutre per (+): existeix $0 := 0 + 0i = (0, 0) \in \mathbb{C}$ complint $0 + z = z + 0 = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

4. Element oposat amb (+): donat $z = a + bi \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ existeix $z_- := -z := -a - bi \in \mathbb{C}$ complint $z + z_- = 0$.

5. Associativa $(\cdot)$: $\forall\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tenim $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

6. Commutativa $(\cdot)$: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

7. Element neutre per $(\cdot)$: existeix $1 = 1 + 0i = (1, 0)$ que compleix $1 \cdot z = z \cdot 1 = z\ \forall z \in \mathbb{C}$.

8. Distributiva: $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tenim $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

9. Element invers amb $(\cdot)$: per cada $z \in \mathbb{C}$ diferent de zero $(z \neq 0)$ existeix un element $w \in \mathbb{C}$ que compleix $z \cdot w = 1$, escriurem w per z^{-1}.$\star$

Anem a veure com construir l'invers amb el producte d'un nombre complex $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Sigui $z = a + bi$ no zero, denotem per $\overline{z} = a - bi$. Fixeu-vos llavors que

$$z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$$

que es un número real diferent de zero per tant l'invers és,

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2},$$

recalquem-ho posant-hi l'enunciat,

Fórmula 1.1.45 (invers d'un nombre complex)**.** *Donat $z = a + bi \in \mathbb{C}$ no zero $(a, b \in \mathbb{R})$, llavors*

$$z^{-1} := \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = \frac{a}{a^2 + b^2} + \left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)i \tag{1.4}$$

Exemple 1.1.46. *Calculem l'invers en el producte del nombre complex* $2 + 3i$.

Una resolució. Utilitzant la fórmula 1.4 tenim que l'invers és

$$(2 + 3i)^{-1} = \frac{2 - 3i}{13}.$$

Comproveu vosaltres que efectivament $(2 + 3i)(\frac{2-3i}{13}) = 1$. □

Observació 1.1.47. *Observeu que tenir un invers en el producte (sabent que l'operació producte és commutativa), vol dir que podem dividir, és a dir si $z_1 \in \mathbb{C}$ i $z_2 \in \mathbb{C}$ és un nombre complex no nul, llavors tenim $\frac{z_1}{z_2}$ té sentit i és realment,*

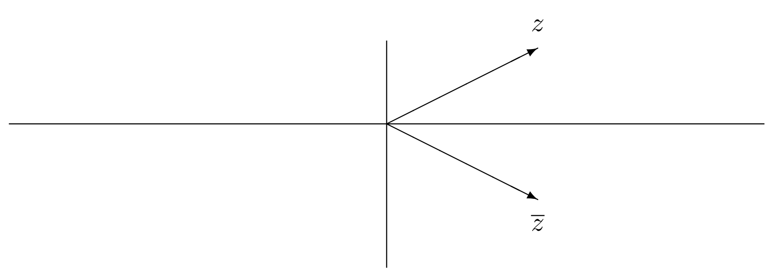
$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = z_2^{-1} \cdot z_1 \star$$

La fórmula del producte de dos nombres complexos és realment entretinguda per a fer-ne càlculs. Hi ha una manera simple per calcular el producte que és escrivint els nombres complexos en forma polar. Nosaltres presentarem aquest fet utilitzant l'exponencial complexa en la §1.3 d'aquest capítol. Anem però ara a introduir totes les eines per a escriure un nombre complex en forma polar, que és descrivint aquest nombre complex via la seva distància al (0,0)=0+0i i l'angle que forma respecte al semieix OX.

Definició 1.1.48. *Si $z = a+bi$ número complex $(a, b \in \mathbb{R})$ qualsevol, s'anomena el conjugat de z, i es denota per $\overline{z}$ al nombre complex*

$$\overline{z} = a - bi.$$

Observació 1.1.49. *Donat z el conjugat és el vector simètric de z respecte l'eix OX, és a dir gràficament és,*



Propietats 1.1.50 (de la conjugació respecte les operacions)**.** *Siguin* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *tenim,*

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
2. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.
3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.
4. $\overline{(z_1/z_2)} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$.
5. $\overline{(z)^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$.
6. $\overline{\overline{z}} = z$.

Definició 1.1.51. *El mòdul d'un nombre complex $z = a + bi$, denotat per $|z|$ es defineix per*

$$|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

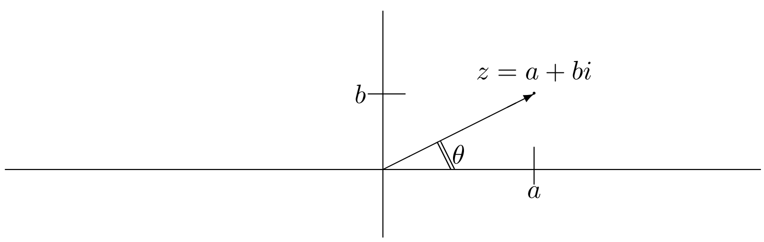
que és un numero real positiu.
Observeu que és la distància del punt complex $z = a + bi$ a l'origen 0+0i.

Exercici 1.1.52. *Proveu que si z és real llavors el mòdul de z coincideix amb el valor absolut.⋆(Un comentari: fixeu-vos que en nombres complexos no té sentit dir quin és mes gran que l'altre, és a dir la relació $\leq$ en nombres reals no s'estén als nombres complexos).*

Propietats 1.1.53. *Fixeu-vos que tenim les següents igualtats:*

1. *donat* $z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} = |z|^2$.
2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$ *amb* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *amb* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Forma polar d'un nombre complex.
Donat un nombre complex $z = a + bi$:



la distància a l'origen és $|z|$, denotem per $r := |z|$ i sigui θ l'angle que forma el vector amb l'eix OX (aquest angle θ es calcula utilitzant arctang de b/a i coneixent el seu quadrant, mireu la següent observació 1.1.57 per precisar-ho), prenem-ho $0 \leq \theta \leq 2\pi$, tenim llavors que podem escriure a i b de la forma

$$a = r\cos(\theta),\ b = r\sin(\theta).$$

Definició 1.1.54. *Amb la notació anterior per $z = a + bi, r$ i θ, la forma polar del nombre z és donada per r i θ, i ho anotarem per*

$$z = re^{i\theta}.$$

Observació 1.1.55. *Fixeu-vos que hem anotat*

$$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

amb $\theta \in \mathbb{R}$. Com el cosinus i sinus són funcions periòdiques de període 2π, obtenim que

$$e^{i(\theta+k2\pi)} = e^{i\theta},$$

per tot k enter, és a dir podem canviar l'angle en aquesta manera d'escriure el nombre complex sumant a l'angle qualsevol un múltiple de 2π (i per tant podem en la definició de forma polar d'un nombre complex triar $\theta \in \mathbb{R}$ per denotar $z = re^{i\theta}$ el mateix nombre complex sense la restricció de triar θ entre 0 i 2π rad).$\star$

El nombre e i aquesta notació del nombre en forma polar via aquest nombre e la justifiquem en la secció §1.3 d'aquest capítol.
En la notació polar és molt fàcil descriure el producte de dos nombres complexos com veurem mes endavant 1.3.9, però podríeu intentar esbrinar-ho vosaltres mateixos en aquest moments (busqueu-ne la fórmula: $re^{i\theta}se^{i\psi} =?$).

Exercici 1.1.56. *Intenteu fer aquest exercici. Calculeu $(1+i)^3$, $(1+i)^7$, $(1+i)^{78978997878}$.*

Observació 1.1.57 (Important a tenir molt present)**.** *El plà el podem dividir en 4 quadrants,*
1er quadrant: angles entre 0 i 90 graus (0 i $\pi/2$ radiants).
2on quadrant: angles entre $\pi/2$ i π radiants.
3er quadrant: angles entre π i $3\pi/2$ radiants.
4art quadrant: angles entre $3\pi/2$ i 2π radiants.
És molt important posar correctament l'angle θ. El podem calcular a partir d'un nombre complex $z = a + bi$ via,

$$\theta := \arctan(b/a)$$

però aquest arctan *té dos valors entre 0 i 2π radiants, quin dels dos fem servir per θ?*
Per a això cal mirar en quin quadrant està el nostre nombre complex i si no és del quadrant que ens surt a la calculadora caldrà sumar-hi π radiants a l'angle que ens dona la calculadora.

Observació 1.1.58. *Recordem altre cop que les funcions trigonomètriques* sin *i* cos *son periòdiques de període 2π radiants. Per tant en la forma polar d'un nombre complex $z = re^{i\theta}$ és el mateix triar com angle θ que el $\theta + 2\pi$ que $\theta + 8989089 \cdot 2\pi$.*

Exemple 1.1.59. *Escriu en forma polar els següents nombres complexos*

1. $z = 1 + i$.

Una resolució. Calculem primer el mòdul. $|z| = +\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Calculem θ. Fixem-nos que $1 + 1i$ està al 1er quadrant! per tant θ estarà entre 0 i $\pi/2$ radiants. Fixeu-vos que $b/a = 1$ i tenim

$$\theta = \arctan(1) = \left\{ \begin{array}{c} \pi/4 \\ \pi/4 + \pi = 5\pi/4 \end{array} \right.$$

(si ens restringim que θ està entre 0 i 2π radiants). Com estem en el primer quadrant és $\pi/4$, per tant la forma polar de $1 + i$ és

$$z = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = \sqrt{2}\cos(\pi/4) + i\sqrt{2}\sin(\pi/4).$$

□

2. $z = -\sqrt{3} - i$.

Una resolució. Calculem primer el mòdul. $|z| = +\sqrt{3 + 1} = 2$. Calculem θ. Fixem-nos que z està al 3er quadrant! per tant θ estarà entre π i $3\pi/2$ radiants. Fixeu-vos que $b/a = 1/\sqrt{3}$ tenim

$$\theta = \arctan(1/\sqrt{3}) = \left\{ \begin{array}{c} \pi/6 \\ \pi/6 + \pi = 7\pi/6 \end{array} \right.$$

(si ens restringim que θ està entre 0 i 2π radiants). Com estem en el tercer quadrant és $7\pi/6$, per tant la forma polar de $\sqrt{3} - i$ és

$$z = 2e^{i7\pi/6} = 2\cos(7\pi/6) + i2\sin(7\pi/6).$$

□

Exemple 1.1.60. *Escriviu en forma $z = a + bi$ (s'anomena aquesta forma, forma cartesiana) el nombre complex escrit en forma polar*

$$z = 34e^{i\pi}.$$

Una resolució. Escrivim $z = 34\cos(\pi) + i34\sin(\pi) = 34(-1) + 34(0) = -34$. □

Definició 1.1.61. *Donat un nombre complex z, anomenarem argument de z i ho anotarem per $arg(z)$ a un valor θ que correspon a l'angle que forma el nombre complex amb l'eix OX.(Fixeu-vos que $arg(z) + 2\pi$ també és un argument).*
Anomenarem l'argument principal de z, denotat per $Arg(z)$ quan aquest valor de θ està comprès entre $-\pi < \theta \leq \pi$ (sol hi ha un! d'argument principal).
En aquesta notació tot nombre complex s'escriu de la forma

$$z = |z|e^{iArg(z)}$$

Exercici 1.1.62. *Veieu que $|z|e^{iarg(z)} = |z|e^{iArg(z)} = |z|e^{i(arg(z)+2\pi)}$ és el mateix nombre complex.*

1.2 Propietats dels nombres reals.

Aquesta secció tractarà de la noció de convergència. Aquest fet és particular dels nombres reals ((*)també dels complexos, però si $\mathbb{R}$ no tingués aquesta propietat, $\mathbb{C}$ no tindria aquesta propietat). Per parlar de convergir, pensem primerament que vol dir:"a la llarga va cap a un lloc" on aquest lloc ha d'existir. La formalització d'aquesta idea en números donarà el concepte de límit d'una successió de nombres.
En aquest capítol donem pautes i criteris pel càlcul de límits de successions i estudiem si successions creixents tenen límit o no (convergència o no de sèries de termes positius), estudi de successions recurrents i també estudi de convergència de sèries.

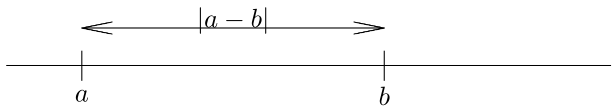
1.2.1 Funció distància, completesa dels nombres reals.

En els nombres $\mathbb{R}$ tenim la funció distància entre dos punts $a, b \in \mathbb{R}$,

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

$$d(a,b) = +\sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$$

(on $\mathbb{R}^+ := \{r \in \mathbb{R} | r \geq 0\}$),



podem, gràcies a aquesta funció, saber com estan o no de separats dos punts, si estan molt propers o lluny.

Vers la Propietat clau dels nombres reals(completesa).

Introduïm primer alguns conceptes.

Definició 1.2.1. *Sigui S un conjunt de nombres dins dels nombres $\mathcal{M}$ (on $\mathcal{M}$ són números que tenen una relació $\leq$, per nosaltres pot ser $\mathcal{M}$ $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, o bé $\mathbb{R}$).*

Diem que el conjunt S té una **cota superior** *si existeix un nombre $b \in \mathcal{M}$ on*

$$x \leq b$$

per a tot $x \in S$. Diem que aquest b és una cota superior del conjunt S.
Tenim també la noció de **cota inferior** *de S, definim-la tot seguit. Diem que el conjunt S té una* **cota inferior** *si existeix un nombre a ($\in \mathcal{M}$) on*

$$a \leq x$$

$\forall x \in S$. Diem que aquest a és una cota inferior del conjunt S.

Observació 1.2.2. *Observeu si S té una cota superior, en té moltes, per exemple si $S = [-1, \sqrt{2}]$ amb $\mathcal{M} = \mathbb{R}$, obtenim que $\sqrt{2}$ és cota superior, 4 també, 12 també,$\sqrt{17}$ també..., qualsevol nombre més gran o igual que $\sqrt{2}$ es cota superior*

d'aquest conjunt S. En quan a cotes inferiors, també en tenim moltes, fixeu-vos que qualsevol nombre real mes petit o igual a -1 és una cota inferior: -2 és una cota inferior de S, -886.6898978 és una cota inferior de S,...
Fem el mateix exemple que abans però sigui $S = \{x \in \mathbb{Q} | x \in [-1, \sqrt{2}]\}$ i triem $\mathcal{M} = \mathbb{Q}$.(Si $\mathcal{M} = \mathbb{R}$ les cotes superiors i inferiors són exactament com en l'exemple anterior). Anem a trobar cotes superiors en $\mathcal{M}$. Fixeu-vos que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ per tant no pot ser una cota superior de S amb $\mathcal{M} = \mathbb{Q}$. En canvi si que tenim que 4, 12, 1.45 són cotes superiors i en tenim moltes. Pregunta: tenim ara (cas $\mathcal{M} = \mathbb{Q}$) una cota superior que sigui la mes petita de totes i que sigui a $\mathbb{Q}$? La resposta és NO.
Per cotes inferiors tenim que qualsevol nombre(aquí nombre=nombre racional) més petit o igual a -1 és cota inferior de S.

Definició 1.2.3. *1. Donat un conjunt S de nombres dins $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ denota els racionals o reals o enters o naturals) acotat superiorment. Diem que el número b és el* **suprem** *de S si compleix les dues condicions següents simultàniament,*

(a) b és una cota superior de S,

(b) b és la més petita de les cotes superiors.

En cas d'existir, és únic i l'anotarem aquest valor per $\sup(S)$.
*Donat un conjunt S de nombres dins $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ indica o els nombres racionals o bé reals o bé naturals o enters) acotat inferiorment. Diem que el número a és l'***ínfim** *de S si compleix les dues condicions següents simultàniament,*

(a) a és una cota inferior de S,

(b) a és la més gran de les cotes inferiors.

En cas d'existir l'ínfim, és únic i l'anotarem aquest valor per $\inf(S)$.

Exemple 1.2.4. *1. Sigui $S = \{x \in \mathbb{R} : |x| < \sqrt{3}\} \subset \mathbb{R}$. Tenim que el $sup(S)$ existeix i és $\sqrt{3}$, i $inf(S)$ també existeix i és $-\sqrt{3}$. (Veurem tot seguit que per $\mathcal{M} = \mathbb{R}$ sempre existeixen els suprems i ínfims en conjunts acotats).*

2. Sigui $S = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$. Afirmem que no té suprem ni ínfim si ho mirem com números a $\mathbb{Q}$ (és a dir $\mathcal{M} = \mathbb{Q}$).
Per justificar aquesta afirmació (ho fem sol pel suprem, per l'ínfim l'argument és semblant [Exercici]) argumentem via reducció a l'absurd, és dir suposem que existís el suprem a $\mathbb{Q}$ i arribem a una contradicció, provant que no pot existir aquest suprem.
Sigui $b \in \mathbb{Q}$ aquest suposat suprem de S, $\sqrt{2}$ que és la cota superior més petita de S si els nostres nombres fossin els reals (en el cas $\mathcal{M} = \mathbb{R}$) i per tant tot suprem de S a $\mathbb{Q}$ ha de ser més gran que aquest nombre (és a dir que $\sqrt{2}$) tenim $\sqrt{2} < b$, sabem que entre dos nombres reals sempre hi ha un nombre racional per tant trobem que existeix $b' \in \mathbb{Q}$ complint $\sqrt{2} \leq b' < b$, cosa que implica que b no pot ser la cota superior més petita (b' és una cota superior més petita que b!), i per tant no és el suprem, en contradicció a la nostra suposició.

Teorema 1.2.5 (Axioma de completitut)**.** *Tot conjunt no buit S de nombres reals acotat superiorment, té suprem a $\mathbb{R}$.*
Tot conjunt no buit S de nombres reals acotat inferiorment, té ínfim a $\mathbb{R}$.

Observació 1.2.6. *L'anterior axioma ens afirma que per $\mathcal{M} = \mathbb{R}$ existeix sempre el suprem i/o l' ínfim de conjunts acotats superiorment i/o inferiorment.*

Observació 1.2.7 (*)**.** *Per què s'anomena complet? Bé, fixeu-vos que a $\mathbb{Q}$ no tenim sempre suprem o ínfim, heu vist abans(1.2.4) l'exemple $S = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. No obstant podem trobar cotes superiors de S a $\mathbb{Q}$ aproximant $\sqrt{2}$, fixeu-vos*

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097...$$

d'aquí podem trobar una primera cota superior a $\mathbb{Q}$ de S, $b_1 = 2$, una segona $b_2 = 1,5$, una tercera $b_3 = 1,42$, $b_4 = 1,415$, $b_5 = 1,4143$,... fixeu-vos que construïm números a $\mathbb{Q}$ que s'aproximen a $\sqrt{2}$, si poguessin fer el "límit" obtindríem $\sqrt{2}$, però fixeu-vos que aquesta noció de "límit" el nombre que dona aquest "límit" no queda dins a $\mathbb{Q}$, realment complet ve de posar en els nombres racionals els "limits" que s'obtenen de successions de nombres racionals que convergeixen cap a una longitud, i aquest conjunt (la unió dels racionals junt amb els límits de successions de nombres racionals que van a un nombre) són els nombres reals. Anem a definir "límit" en la §1.2.2 tot seguit.

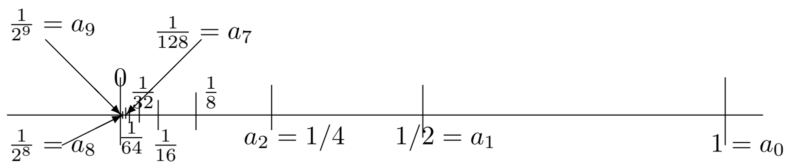
1.2.2 Successions de nombres reals. Primeres nocions de límit a un nombre real.

Hem vist en la secció anterior que donats $a, b \in \mathbb{R}$ tenim definida la distància entre ells i fixeu-vos si $d(a, b) = 0$ obtenim que els dos punts a, b són el mateix punt!, és a dir $a = b$!; pert tant de saber la distància obtenim certa informació d'aquests punts reals com està o no un allunyat de l'altre.

Anem cap el concepte de convergir, entenem primer en un exemple concret abans de fer la definició en abstracte de "convergir" que serà el concepte de límit per una successió . Fem un exemple concret, per això triem ara $b = 0$ i anem variant a de la forma següent via la taula,

a=1	d(1,0)=1
a=1/2	d(1/2,0)=1/2
a=1/4	d(1/4,0)=1/4
a=1/8	d(1/8,0)=1/8
a=1/16=$1/2^4$	d(1/16,0)=1/16
$a = 1/2^5$	d(1/32,0)=1/32
...	...
$a = 1/2^{2003}$	$d(1/2^{2003}, 0) = 1/2^{2003}$
...	...

fixeu-vos que cada cop de dalt a baix la distància es fa més petita, si denotem per $a_i = 1/2^i$, $i \in \mathbb{N}$(a_0 és el valor de a en la primera fila, a_1 és el valor de a en la segona fila de la taula anterior, a_2 el de la tercera fila ,...), obtenim que la $distància(a_i, 0 = b)$ és fa cada cop més petita i si i es fa més i més gran cada cop és la distància més a prop del 0,



intuïtivament diríem que aquest a_i quan la i vagi creixent s'anirà atansant a 0 on voldríem afirmar que 0 seria el "límit" dels a_i, posem aquest fet en el llenguatge matemàtic. (Fixeu-vos també que el conjunt de nombres $\{1/2^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ els hem ordenat, primer és 1, segon 1/2,... això correspon a un cas concret del que anomenem una successió de nombres, i com en aquest cas tots són racionals ($a_i = 1/2^i \in \mathbb{Q}$) podríem dir que és una successió de nombres racionals).

Definició 1.2.8. *Una* **successió de nombres reals** *és donar un valor real per a cada nombre natural n, anotem aquest valor a_n (o donar una aplicació de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$). Escriurem per $\{a_n\}$ la successió formada. L'expressió a_n s'anomena terme general i usualment per poder-hi treballar té una expressió en funció de n.*

Exemple 1.2.9 (de successions)**.**

1. *$a_0 = 1$, $a_1 = 1/2$, $a_2 = 1/4$, $a_3 = 1/8,\ldots,a_n = 1/2^n,\ldots$ (també pensar $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ donat per $n \mapsto 1/2^n$).*
2. *Successió constant. $\sqrt{3} = a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = \ldots$ (pensar $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $n \mapsto \sqrt{3}$).*
3. *$a_1 = (1+\frac{1}{1})^1$, $a_2 = (1+\frac{1}{2})^2$, $a_3 = (1+\frac{1}{3})^3,\ldots$, $a_n = (1+\frac{1}{n})^n, \ldots$ successió definida per $n \geq 1$.*
   (Per tal que aquesta "successió" fos exactament com en la definició de successió anterior, trieu $a_0 = 1$(per exemple), o penseu $b_n = a_{n-1}$ per tot $n \in \mathbb{N}$. Aquests matisos son irrellevants si el que ens interessa és el càlcul del "límit" de la successió: canviar un número finit de termes en una successió no influeix en decidir si convergeix o no la successió i en cas de convergir no influeix en el valor on convergeix).

Definició 1.2.10 (concepte teòric de límit(a un número de $\mathbb{R}$))**.** *Una successió $\{a_n\}$ (de números reals) diem que té límit $l \in \mathbb{R}$ si per cada $\epsilon > 0$, hi ha un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|a_n - l| < \epsilon$$

per tot $n \geq n_0$ (aquest n_0 depèn del ϵ). En aquest cas escriurem,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \text{ ó } a_n \to l$$

Observació 1.2.11. *$+\infty$ o $-\infty$ denota dos elements nous("com dos números") que no són reals, amb la propietat per exemple per $+\infty$ és el nombre més gran que qualsevol nombre real, seria si pensem la recta real, seria el "nombre" que hi hagués més a la dreta (que no existeix a reals ja que no es pot obtenir). Definim més endavant relacions de la + amb aquests dos nous elements. Abans però sol la notació $n \to +\infty$ diu que anem triant naturals més i més grans atansant-se a aquest "nombre" fictici $+\infty$ que no s'hi arriba mai.*

Exemple 1.2.12 (Càlcul limits via la definició).

1. *Una successió constant, per exemple* $\{a_n\} = \sqrt{3}$ *té límit el valor de la constant, en el cas concret nostre* $l = \sqrt{3}$.
   Efectivament això és directe via la definició, ja que triat $\epsilon > 0$ *tenim que*
   $$|a_n - l| = 0 < \epsilon$$
   per tot $n \geq 0 = n_0$ *(fins i tot aquí* n_0 *no depèn de* ϵ*), per tant obtenim el resultat.*
   Important: fixeu-vos que per provar via la definició heu de tenir una idea de qui pot ser el límit i llavors provar que realment ho és via la definició.

2. *Sigui la successió donada pel terme general* $a_n = 1/n^m$ *definida per* $n \geq 1$ *amb* $m > 0$ *un natural. Anem a provar* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   Una resolució. Fixem $\epsilon > 0$ tenim $|a_n - 0| = \frac{1}{n^m}$, i volem que sigui $(\frac{1}{n})^m < \epsilon$.
   Com són nombres reals positius prenent l'arrel m-èssima positiva de l'última desigualtat i obtenim $n > (\frac{1}{\epsilon})^{1/m}$, triem n_0 com el natural més petit complint $n_0 > (\frac{1}{\epsilon})^{1/m}$($n_0$ és (la part entera del nombre real $(\frac{1}{\epsilon})^{1/m}$)+1) □

3. $\{a_n = (-1)^n\}$. *Provem que no té límit aquesta successió.*

   Una resolució. Suposem que tingués límit, l, per força alguna de les $d(l,-1)$ o $d(l,1)$ és ≥ 1, triem $\epsilon = 0.25$ tenim que no hi ha cap natural n_0 on
   $$|a_n - l| < 0,25$$
   per tot $n \geq n_0$ ja que com n_0 és fix(un cop fixat ϵ) hi ha n's parell i senars (més grans o iguals a n_0) i la desigualtat $|a_n - l| < 0,25$ és converteix en les desigualtats $|1-l| = d(1,l) < 0,25$ i $|-1-l| = d(-1,l) < 0,25$ cosa que no pot passar alhora. Per tant no existeix el límit. □

Abans de fer més exemples de càlcul de límits enunciem certes propietats útils per al càlcul de límits, i també desigualtats que ens ajuden en aquest càlcul.

Propietats 1.2.13 (de límits.I).

1. *Si* $\{a_n\}$ *una successió té límit, llavors el límit és únic.*
2. *Si* $\{a_n\} \to l$, $\{b_n\} \to l'$ *i* $c \in \mathbb{R}$ *un número, llavors*
   (a) $\{a_n + b_n\} \to l + l'$,
   (b) $\{a_n b_n\} \to l \cdot l'$,
   (c) $\{c \cdot a_n\} \to c \cdot l$,
   (d) $\{c + a_n\} \to c + l$,

(e) $\{b_n/a_n\} \to l'/l$ *si* $l \neq 0$ *i* $\forall n\ a_n \neq 0$,

(f) $\sqrt[m]{a_n} \to \sqrt[m]{l}$ *si* a_n *són tots positius, i* $\sqrt[m]{}$ *denota l'arrel positiva* ($m \in \mathbb{N} \setminus 0$).

3. *(Criteri del sandwich) Siguin* $\{a_n\}$ *una successió i dos successions més que sabem el seu límit i que aquest sigui el mateix per ambdues, és a dir* $\{b_n\} \to l$, $\{c_n\} \to l$ *i suposem que a més per tot* $n \geq M$ *(*M *natural fix) tenim*

$$b_n \leq a_n \leq c_n.$$

Llavors existeix el límit de $\{a_n\}$ *i el seu límit és* l,

$$a_n \to l.$$

4. *Si* $\{a_n\}$ *una successió té límit, i sigui* $k \in \mathbb{Z}$. *Considerem la successió* $b_n = a_{n+k}$ *(on triem* $b_n = 0$ *si* $n + k < 0$*). Llavors* $\{b_n\}$ *té límit i a més:*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+k}.$$

(Aquesta propietat és més general, veieu teorema 1.2.48)

Observació 1.2.14. *Ja veiem que pel càlcul de límits és molt important saber treballar molt bé en inequacions, anem a donar tot seguit algunes desigualtats que en alguns casos molt teòrics per a vosaltres ens permeten calcular alguns límits a conèixer, el recurs via desigualtats és l'últim per a calcular un límit per a un enginyer i potser el primer per a un matemàtic.*

Unes desigualtats útils

En la llista 1 [4], provàveu algunes desigualtats.

Explicitem aquí altres desigualtats útils a conèixer. Recordeu primer la fórmula binomial del binomi de Newton,

$$(a+b)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}, \tag{1.5}$$

on el símbol $\binom{n}{j}$ *denota el nombre natural*

$$\frac{n!}{j!(n-j)!}$$

on $k! = k(k-1)(k-2)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, *per a* $k \in \mathbb{N}$ ($0! = 1$).

Si $a, b \geq 0$ *obtenim que* $\binom{n}{j} a^j b^{n-j} \geq 0$ *per tot* j, *pet tant tenim la desigualtat*

$$(a+b)^m \geq \binom{n}{j} a^j b^{n-j}, \tag{1.6}$$

per cada j *amb* $a, b \geq 0$.

En particular $a = 1$, $b \geq 0$ *i* $j = n - 1$ *obtenim:*

$$(1+b)^n \geq \binom{n}{n-1} 1^{n-1} b^1 = nb. \tag{1.7}$$

Exemple 1.2.15 (Càlcul de límits,via definició, II)**.**

1. *Trobeu el límit de* $\{\frac{2n+1}{3n}\}$.

   Una resolució. Per això escriurem la successió de la següent forma,

$$\frac{\frac{2n+1}{n}}{\frac{3n}{n}}$$

   i considerem les successions, $a_n = \frac{2n+1}{n}$ i $b_n = \frac{3n}{n} = 3$, el límit que volem calcular es a_n/b_n. Fixem-nos que b_n és la successió constant $= 3$ i per tant té límit 3, $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ que és suma de dues successions on la primera va a 2 i la segona a 0 com havíem vist en els exemples de càlcul de límits anterior (exemple 1.2.12,2) obtenim que el limit de a_n és 2 i per tant

$$\{\frac{2n+1}{3n}\} \to 2/3.$$

$\square$

2. *Sigui* $r > 0$ *un número real fixat, llavors*

$$\sqrt[n]{r} \to 1.$$

   Una resolució. Distingim tres casos, (cas 0, $r = 1$ és clar que el límit és 1).
   Cas 1: $r > 1$, tenim llavors $\sqrt[n]{r} \geq 1$ d'on $x_n = \sqrt[n]{r} - 1 \geq 0$, utilitzant la desigualtat anterior(1.7) tenim

$$1 + nx_n \leq (1 + x_n)^n = r$$

   restant 1 i passant a dividir per n obtenim les desigualtats

$$0 \leq x_n \leq \frac{r-1}{n}$$

   sabem que $\frac{r-1}{n} \to 0$ (per veure aquest límit utilitzeu l'exemple 1.2.12.2 i la propietat 1.2.13.2c), utilitzant llavors el criteri del Sandwich obtenim

$$x_n \to 0$$

   i per tant que

$$\sqrt[n]{r} \to 1$$

   per $r > 1$.
   Cas 2: $0 < r < 1$, utilitzeu $x_n = 1 - \sqrt[n]{r}$, [exercici]. $\square$

3. *Proveu que* $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Una resolució. Considerem $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$, tenim usant la desigualtat 1.6 amb $j = 2$,$a = 1$ i $b = x_n$:

$$n = (1 + x_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

com $x_n \geq 0$ obtenim les desigualtats,

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \tag{1.8}$$

usant la propietat de les arrels positives (1.2.15.2f) el límit de la successió de la dreta en les desigualtats 1.8 és zero, pel criteri del Sandwich obtenim llavors que $x_n \to 0$ i d'aquí el resultat. $\square$

4. *Si $|r| < 1$ llavors $\{r^n\}$ té límit i és zero.*

Una resolució. Distingim dos casos,
cas 1: $1 > r \geq 0$ tenim la desigualtat $0 \leq r \leq \frac{1}{1+h}$ amb cert $h > 0$ elevant a n la desigualtat obtenim

$$0 \leq r^n \leq (\frac{1}{(1+h)^n}) < \frac{1}{nh}$$

on l'ultima desigualtat ve de la desigualtat (1.7). El límit de la successió $1/nh$ va a zero, llavors pel criteri del Sandwich obtenim el resultat.
Cas 2: $-1 < r < 0$, [exercici]. $\square$

5. *Calculeu el límit de la successió $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.*

Una resolució. Tenim les següents desigualtats,

$$0 \leq a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

com sabem que $lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, obtenim utilitzant el criteri del sandwich

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

$\square$

Observació 1.2.16. *Tot nombre real es pot obtenir com un límit d'una successió formada per nombres racionals. Per exemple, considerem*

$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168872420 97...$$

i considerem la successió a_n que sigui l'expressió decimal de $\sqrt{2}$ amb n-xifres decimals exactes. Tenim $a_n \in \mathbb{Q}$ i que el límit d'aquesta successió a_n és $\sqrt{2}$.$\star$

Introduïm ara dos nous elements $\pm\infty$, (pensem-los com "números") relacionant-los amb la $+, \cdot$ dels nombres reals, que ens permeten resoldre directament alguns límits. $\pm\infty$ són els "números" que obtindríem si poguéssim arribar al final de la recta real.
Els símbols $\pm\infty$ tenen les següents propietats (molt útil aquest fet pels càlcul de límits ja que substituirem n en un límit per $+\infty$ i això ens permetrà resoldre molts límits sense passar per la definició, com hem fet fins ara en els exemples de límits).

Propietats 1.2.17 (de $\mathbb{R} \cup \pm\infty$,I)**.**

$$\begin{array}{ccc}
(+\infty)+(+\infty)=+\infty & (-\infty)+(-\infty)=-\infty & (+\infty)+a=+\infty \\
(-\infty)+a=-\infty & a-(+\infty)=-\infty & a-(-\infty)=+\infty \\
a/(+\infty)=0 & a/(-\infty)=0 & (+\infty)(+\infty)=+\infty \\
(+\infty)(-\infty)=-\infty & (-\infty)(-\infty)=+\infty & \\
a\cdot(+\infty)=+\infty \textit{ si } a>0 & a\cdot(+\infty)=-\infty \textit{ si } a<0 & \\
a\cdot(-\infty)=-\infty \textit{ si } a>0 & a\cdot(-\infty)=+\infty \textit{ si } a<0 & \\
\textit{on } a \textit{ és un número real.} & &
\end{array}$$

Observació 1.2.18 (càlcul de límit)**.** *Usualment no utilitzem la definició de límit, pel càlcul pràctic d'un límit, podem substituir n per $+\infty$ en l'expressió d'a_n i utilitzar les propietats dels nombres $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (les primeres propietats les tenim llistades anteriorment 1.2.17), tot i així hi haurà molts límits que no podrem resoldre ja que no les tenim com a propietats de $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ("indeterminacions") i no sabem quin número ens dóna; per a resoldre aquests casos tindrem alguns criteris i "trucos" per fer-ho, però no sempre ens permetrant resoldre'ls tots, i potser en algun cas cal estudiar-ho via desigualtats molt precises i que hem de trobar nosaltres mateixos en el cas particular que estiguéssim estudiant, fent el càlcul de límits no del tot fàcil.*

Exemple 1.2.19 (Aplicació càlcul del límit)**.** *Calculeu límit $a_n = \frac{3n+1}{2n}$.*

Una resolució. Dividint a d'alt i a baix per n obtenim que $a_n = \frac{3+1/n}{2}$ substituint la n per $+\infty$ en l'expressió de a_n obtenim que dona $3/2$ usant les propietats d'aquest nombre $+\infty$ (1.2.17), com aquesta expressió l'hem poguda calcular, resulta que aquest valor és el límit.
Tornem a escriure que pot passar que al substituir no podem concloure el valor, s'anomenara indeterminacions i llavors per fer els càlculs dels limits cal estudiar-ho via criteris, usar la definició i propietats, ... En el nostre exemple $\frac{3n+1}{2n}$ si substituïm primer la n per ∞ tenim que ens surt $\frac{\infty}{\infty}$ que no sabem que és ("indeterminació"), en aquest cas fem el "truco" dividir al numerador i denominador de l'expressió d'a_n per una potència en n, en el nostre cas dividim per n, fent aquest "truco" obteníem que $a_n = \frac{3+\frac{1}{n}}{2}$ i aquí si que substituint la n per $+\infty$ obtenim el resultat. $\square$

Observació 1.2.20 (Successions de nombres complexos)**.** *Podem considerar successions de nombres complexos $\{z_n\}$ és a dir una successió de nombres z_n però enlloc de ser aquests z_n nombres reals com fins ara, que siguin nombres complexos. Per exemple la successió $\{a_n = n+n^2 i\}$ és una successió de nombres complexos. Podem parlar del límit de la següent manera: diem que existeix el* *límit de* z_n *si existeix el límit de* $\mathrm{Re}(z_n)$ i el límit de $\mathrm{Im}(z_n)$ com dos nombres reals i llavors:

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(z_n).$$

1.2.3 Successions creixents i decreixents. Exponencial.

Definició 1.2.21. *1. Una successió* $\{a_n\}$ *de números reals s'anomena (monòtona) creixent si* $a_{n+1} \geq a_n$ *per a tot natural* n.

2. *Una successió* $\{a_n\}$ *de números reals s'anomena (monòtona) decreixent si* $a_{n+1} \leq a_n$ *per a tot natural* n.

Definició 1.2.22. *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió de números reals. Considerem el conjunt* $S = \{a_n | n \in \mathbb{N}\} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}$.

1. *Diem que* $\{a_n\}$ *és acotada superiorment si* S *té una cota superior, és a dir existeix* $t \in \mathbb{R}$ *on* $a_n \leq t$ *per tot* $n \in \mathbb{N}$.
2. *Diem que* $\{a_n\}$ *és acotada inferiorment si* S *té una cota inferior, és a dir existeix* $s \in \mathbb{R}$ *on* $a_n \geq s$ *per tot* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Diem que* $\{a_n\}$ *és acotada si és acotada superiorment i inferiorment.*

Teorema 1.2.23 (Existència de límit per successions monòtones.)**.**

1. *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió monòtona creixent de nombres reals* a_n *acotada superiorment, llavors la successió* $\{a_n\}$ *té límit* $l \in \mathbb{R}$ *i aquest* $l = \sup(S)$.
2. *Sigui* $\{b_n\}$ *una successió monòtona decreixent de nombres reals* b_n *acotada inferiorment, llavors la successió* $\{b_n\}$ *té límit* $l \in \mathbb{R}$ *i aquest* $l = \inf(\{b_n | n \in \mathbb{N}\})$.

Observació 1.2.24. L'anterior teorema ens dóna condicions per tal que existeixi el límit, però no ens ajuda en rés de com trobar el límit.

Observació 1.2.25. L'anterior teorema és demostra utilitzant l'axioma de completitut (teorema 1.2.5) dels nombres reals, prenent com conjunt $S = \{a_n\}$ o $= \{b_n\}$, concloent que el suprem o ínfim segons correspongui és el límit buscat.

Exemple 1.2.26.

1. *Considerem* $a_n = 1/r^n$ *amb* $r > 1$. *Proveu que té límit. Quin és aquest límit?*

   Una resolució. Observeu que $1/r^{n+1} \leq 1/r^n$ per a tot n per ser $r > 1$, per tant és una successió decreixent. A més per tot n tenim $1/r^n$ és acotada inferiorment per 0, aplicant el teorema anterior podem dir que té límit. Com calculem aquest límit? Bé més endavant (1.2.35) veurem que de les propietats dels nombres $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ que "$1/r^{+\infty}$"=0 i per tant obtenim que el límit és 0. Si volem fer-ho utilitzant el que sabem fins ara, observeu $0 < (\frac{1}{r}) < 1$ i utilitzant 1.2.15.4 tenim $\lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{r})^n = 0$ obtenint el resultat. Una altra manera d'obtenir aquest límit: anotem $l \in \mathbb{R}$ al límit de la successió $1/r^n$, de la desigualtat

$$0 \leq \frac{1}{r^{n+1}} = \frac{1}{r}\frac{1}{r^n} \leq \frac{1}{r^n}$$

i prenent límit amb $n \to +\infty$ obtenim

$$0 \leq l = \frac{l}{r} \leq l$$

i com $r > 1$ obtenim $l = 0$. □

2. *Considerem la successió $a_0 = 1$ i $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2^n}$ per $n \geq 1$. Té límit? En cas afirmatiu, intenteu calcular-lo.*

Una resolució. Fixeu-vos que aquesta successió és la primera donada no en funció de n els termes de la successió, si no en termes dels anteriors, aquestes successions son molt usuals a la natura, per exemple a_0 podria indicar el nombre d'una espècie en l'any inicial d'estudi i a_n seria la població en l'any n, llavors un model de l'espècie podria ser relacionant a_n amb la població d'anys anteriors.

Definició 1.2.27. *Una successió $\{a_n\}$ s'anomena recurrent si*

$$a_n = f(a_0, \ldots, a_{n-1}, n), \forall n \geq n_0$$

(amb f depèn almenys d'algun a_{n-k} per $k \geq 1$), en altres paraules, que cada a_n s'expressa en relació als elements de la successió anteriors al a_n, és a dir a_0, a_1,...a_{n-1}(d'algun d'ells). Per estar definida una successió recurrent, necessitarem saber uns primers valors de la successió $a_0, \ldots, a_{n_0}$.⋆

Fixeu-vos que la successió d'aquest exemple ($a_0 = 1$ i $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2^n}$) és una successió recurrent on a_n s'expressa únicament en relació amb a_{n-1} i n . Anem a intentar saber si té límit o no en té, i en cas de tenir-ne, mirarem de calcular-lo.
Agafeu un paper, i aneu partint-lo en dos trossos. Un tros penseu que és 1 i l'altre és també 1, partiu en dos trossos, un d'aquest, teniu 1/2 i 1/2. Agafeu un d'aquest i partiu-lo en dos, itereu... Intuïtivament es veu que té límit i quin és. (Ho veieu?).
Anem a fer-ho matemàticament i indicar com calculem el límit, que és 2. Veiem que a_n és una successió monòtona creixent i que és acotada, llavors gràcies a tenir el teorema anterior, podem afirmar que existeix el límit. Anem a provar que existeix doncs aquest límit.
Creixent: és evident ja que $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2^n} > a_{n-1}$ sempre per tot $n \geq 1$, per tant és monòtona creixent.

Acotada superiorment i té límit 2:
Observem que

$$|a_n| = |a_{n-1} + \frac{1}{2^n}| = |1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}| = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-(1/2)} \leq 2$$

on l'última igualtat és usant la igualtat de l'exercici 1 de la llista 1 ([4]) i la desigualtat és d'esser $(1/2)^n$ una successió decreixent(exemple anterior).
Per tant obtenim que a_n té límit (teorema 1.2.23)!
En aquest exemple podem acabar calculant-ho.
Com tenim que la successió $(1/2)^n$ és decreixent i té límit 0 (exemple anterior amb $r = 2$) tenim que utilitzant la igualtat $a_n = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-(1/2)}$ obtenim;

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-(1/2)} = 1/(1/2) = 2.$$

□

3. *(Exemple "típic" de càlcul límit de successions recurrents.) Sigui* $a_0 = +\sqrt{2}$ *i* $a_n = +\sqrt{2a_{n-1}}$ *per tot* $n \geq 1$. *Proveu que la successió* a_n *té límit i calculeu-lo.*

Una resolució. Per provar que té límit, utilitzarem el teorema anterior 1.2.23, provant que és monòtona i que és acotada.
Acotada per 2:
Provem per inducció $P(n) = \{a_n \leq 2\}$. El cas $P(0)$ és clar, $\sqrt{2} \leq 2$. Suposem que $P(N)$ és veritat, veiem llavors que $P(N+1)$ és veritat.
Elevant al quadrat;

$$a_{N+1}^2 = +2a_N \leq 4$$

prenent arrels quadrades positives (FET: $\sqrt{}$ manté desigualtats de nombres reals positius), (on la desigualtat prové de suposar cert que $P(N)$ és veritat, hipòtesi d'inducció), obtenim llavors que $+\sqrt{a_{N+1}} \leq 2$, és a dir que $P(N+1)$ és veritat.
Monòtona creixent: calculem $a_1 = \sqrt{2a_0} = \sqrt{2\sqrt{2}}$ i és més gran que $\sqrt{2} = a_0$, per tant mirem de provar si la successió és creixent. Anem a provar-ho per inducció, és a dir provar que $P(n) = \{a_{n+1} \geq a_n\}$. El cas $P(0)$ és el que acabem de veure per decidir que creiem que pot ser creixent. Suposem que $P(K)$ és veritat i mirem de provar que $P(K+1)$ és veritat; provant així pel principi d'inducció que la successió a_n és creixent.
Elevem al quadrat,

$$a_{K+2}^2 = 2a_{K+1} \geq a_{K+1}a_{K+1} = a_{K+1}^2,$$

la desigualtat s'obté d'utilitzar que a_n està acotada superiorment per 2. Prenem arrels quadrades positives de la desigualtat anterior obtenim

$$a_{K+2} \geq a_{K+1}$$

provant que $P(K+1)$ és veritat, on tenim que a_n és monòtona creixent. D'aquí concloem que a_n té límit utilitzant el teorema 1.2.23. Anem a

calcular-ho.
Càlcul del límit: Escrivim $l = \lim_{n\to+\infty} a_n$. De l'expressió

$$a_n = \sqrt{2a_{n-1}}, \tag{1.9}$$

substituïm a_n per l prenent la igualtat (1.9) al límit, obtenim

$$l = +\sqrt{2l}, \tag{1.10}$$

elevant al quadrat l'anterior igualtat (1.10) obtenim $l^2 = 2l$ i resolent aquesta equació de segon grau en l obtenim que $l = 0$ ó bé 2. Com tenim que a_n és creixent i de nombres més grans que 0 el límit no pot ser zero, per tant

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 2.$$

$\square$

4. *Considerem la successió $a_0 = 2$ i $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}})$ per $n \geq 1$. Proveu que té límit i calculeu-lo.*

Una resolució. Primer veurem que està acotada inferiorment i després que és monòtona decreixent per a provar que té límit. Segons com obtenim desigualtats en provar-ho a vegades interessa canviar l'ordre.
Acotada inferiorment per $\sqrt{2}$: $a_0 > \sqrt{2}$, per tant el primer valor és més gran. Anem a suposar que $a_K \geq \sqrt{2}$, anem a demostrar que $a_{K+1} \geq \sqrt{2}$ i per tant $\sqrt{2}$ és una cota inferior.

$$a_{K+1} = \frac{1}{2}(a_K + \frac{2}{a_K}) \geq \sqrt{2}? \Leftrightarrow a_K^2 + 2 \geq 2\sqrt{2}a_K? \Leftrightarrow a_K^2 - 2\sqrt{2}a_K + 2 \geq 0? \tag{1.11}$$

anem a estudiar aquesta última expressió on és una inequasió de segon grau amb incognita a_K i estudiar quan és més gran que zero, resolent-ho veiem que té arrel doble $\sqrt{2}$ el polinomi $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$ i per $x \geq +\sqrt{2}$ és positiu i com $a_K \geq \sqrt{2}$ obtenim que la resposta a ? (1.11) és positiva, per tant a_{K+1} està acotat inferiorment per $\sqrt{2}$.
Monòtona decreixent: fixem-nos que $a_1 < a_0$. Anem a veure en general.

$$a_{n+1} < a_n? \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1? \Leftrightarrow$$

on l'equivalència es que podem dividir per a_n ja que tots són positius i diferents de zero (hem vist que acotats inferiorment per $+\sqrt{2}$), usant la definició de a_{n+1} en funció de a_n obtenim,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{a_n^2} < 1? \Leftrightarrow \frac{1}{a_n^2} < \frac{1}{2}? \Leftrightarrow$$

$$a_n^2 > 2? \Leftrightarrow a_n > \sqrt{2}?$$

on l'última pregunta sabem que la resposta és Si, per tant l'interrogant inicial té resposta positiva, obtenint llavors que és monòtona decreixent.

Usant el teorema 1.2.23 obtenim que la successió a_n té límit, diem-lo l.
Càlcul del límit l: fent tendir n a $+\infty$ en l'expressió recurrent de a_n obtenim la igualtat

$$l = \frac{1}{2}(l + \frac{2}{l}),$$

resolent aquesta equació de grau 2 en l obtenim els valors $\pm\sqrt{2}$ com és $a_n \geq 0$ tenim que el límit no pot ser $-\sqrt{2}$ per tant

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\sqrt{2}.$$

□

5. *Considerem $x_0 = 1$ i $x_{n+1} = \frac{-3}{8} + x_n$. Té límit un nombre real?*

   Una resolució. Fixeu-vos que és clar que és decreixent la successió:

$$x_{n+1} = \frac{-3}{8} + x_n < x_n, \tag{1.12}$$

   expressió vàlida per tot n.
   És acotada inferiorment? Fixeu-vos que a cada pas restem $-3/8$ (un número fix), la sensació és que no està acotada. Si fos acotada podríem aplicar el teorema 1.2.23 i tindríem que té límit l llavors passant al límit la igualtat (1.12) obtenim $l = -\frac{3}{8} + l$ i no hi ha cap nombre real que satisfà aquesta igualtat, per tant segur que no està acotada (els únics "nombres" que satisfan això és $\pm\infty$).
   Una altra manera és adonar-se que

$$a_n = 1 - \frac{n3}{8},$$

   i es clar que aquesta successió no està acotada. Veurem en §1.2.4 que té límit $-\infty$ aquesta successió, (realment ampliant el concepte de límit a $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ teniu que tota successió monòtona creixent té límit, i que tota successió monòtona decreixent té límit, i aquest límit és un nombre real si està la successió acotada(és això el que hem vist en aquesta secció)). □

Exemple 1.2.28 (El nombre real e.)**.** *Considerem la successió $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Veiem que la successió a_n és monòtona creixent i acotada superiorment i per tant té límit.*

Una resolució. Monòtona creixent: utilitzant el binomi Newton (1.5) tenim la igualtat següent,

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + n\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\ldots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n}), \tag{1.13}$$

on per a_{n+1} obtenim que cada sumand d'aquesta última expressió creix ja que cada $(1 - \frac{r}{n})$ creix en créixer n.

Acotada superiorment: tenim de l'última expressió de a_n (1.13) tenim

$$a_n \leq 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!} \leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

provant que està acotada superiorment, on la segona desigualtat es prova via inducció ($n! \geq 2^{n-1}$).
Així provem que té límit (per afirmar això utilitzem el teorema 1.2.23). Quin és aquest límit?

Definició 1.2.29 (Nombre e)**.** *Anomenem nombre e al nombre real*

$$e := \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n.$$

Observació 1.2.30 (*)**.** *El nombre e (també el π) és un nombre real molt especial. Com estem en un curs d'àlgebra, per un algebrista diria que e (com π) és un nombre real (és irracional) que compleix que NO hi ha cap polinomi amb coeficients racionals on e sigui una arrel del polinomi.(Veieu §1.31,1.3.2 per definició de polinomis a coeficients en un conjunt de números i arrels de polinomis). (Més nombres amb aquesta propietat algebraica són $sin(1), cos(1), \ldots$ mireu a la meva pàgina web http://mat.uab.es/∼francesc/ la lliçó divulgativa sobre nombres transcendents)⋆*

□

Anem a repassar l'exponenciació d'un nombre real positiu i a recordar-ne les principals propietats.

Proposició 1.2.31 (Propietat dels nombres reals)**.** *Sigui m un natural. Tot nombre real positiu r té una única arrel m-èssima real positiva.*

Observació 1.2.32. *Recordeu que, donat un nombre r, una arrel m-èssima de r és un nombre z complint $z^m = r$.*

Demostració. [Fem un esboç] tot nombre real té una expressió decimal, obtenint una desigualtat de l'estil

$$(\frac{p_n}{10^n})^m \leq r < (\frac{p_n+1}{10^n})^m$$

on p_n és un nombre natural amb $p_n/10^n$ una successió monòtona creixent($p_n/10^n$ correspondria a l'expressió decimal fins al lloc n del nombre real que volem provar-ne l'existència, és a dir el nombre " $\sqrt[m]{r}$") i acotada superiorment per r, el límit l ($\frac{p_n}{10^n} \to l$) satisfà $l^m = r$.(Intenteu veure la unicitat). □

Exercici 1.2.33. *Feu un enunciat semblant a la proposició anterior per nombres reals negatius i intenteu argumentar com demostraríeu el que afirmeu.*

Repàs de l'exponencial en base real.
Sigui $a \in \mathbb{R}$ amb $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ m, n denoten naturals positius. Recordeu que definim

$$a^{m/n} := \sqrt[n]{a^m}$$

aquesta definició té sentit per la proposició 1.2.31 i està ben determinada ja que si $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ es té $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m'}{n'}}$. Definim,

$$a^{-m/n} := (a^{m/n})^{-1}$$

$$a^0 := 1$$

Definim ara a^x, de la forma següent. Triem una successió $\{q_n\}$ de nombres racionals amb límit x (existeix aquesta successió, 1.2.16),

$$a^x := \lim_{n\to+\infty} a^{q_n},$$

i es prova que no depèn de la successió q_n triada amb la propietat $\{q_n\} \to x$.

Propietats 1.2.34 (de l'exponencial)**.** *Siguin $a, b \in \mathbb{R}$ ambdos estrictament positius, i $x, y \in \mathbb{R}$, llavors:*

1. $a^x > 0$
2. $a^x a^y = a^{x+y}$,
3. $(a^x)^y = a^{xy}$,
4. $(ab)^x = a^x b^x$.
5. *Si* $a > 1$ *i* $x < y \Rightarrow a^x < a^y$.
6. *Si* $a < 1$ *i* $x < y \Rightarrow a^x > a^y$.
7. *Si* $\{x_n\} \to x$, *llavors* $\{a^{x_n}\} \to a^x$,
8. *Si* $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}$ *i* $\{a_n\} \to a$ *amb* a_i, a *nombres reals positius, llavors*

$$\{a_n^{x_n}\} \to a^x.$$

Propietats 1.2.35 (de $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,II)**.**
Sigui a un nombre real positiu, es dir $a \in \mathbb{R}$ $a > 0$; i $b \in \mathbb{R}$,

1. $(+\infty)^b = \begin{cases} +\infty, & si\ b > 0 \\ 0, & si\ b < 0 \end{cases}$
2. $a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & si\ a > 1 \\ 0, & si\ 0 < a < 1 \end{cases}$
3. $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$, *i* $(+\infty)^{-\infty} = 0$.

Observació 1.2.36. *Si $-1 < b < 0$ i definim $b^{+\infty}$ en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ com $\lim b^{q_n}$ amb $q_n \to +\infty$ successió de nombres naturals ($q_n \in \mathbb{N}$)(* Ho triem als naturals ja que sinó l'expressió b^{q_n} no està determinada per a q_n un nombre racional arbitrari).*
Tenim les desigualtats,

$$-|b|^{q_n} \le b^{q_n} \le |b|^{q_n}$$

com els extrems tendeixen a 0 també ho fa el del mig.

Observació 1.2.37 (logaritme)**.** *Recordeu que a* $\mathbb{R}$ *tenim fixat* $a > 0$ *real tenim definit* $\log_a$ *on* $\log_a(x)$ *està definit per* $x > 0$ *i té la propietat* $\log_a(a^x) = x$ *i* $a^{\log_a(x)} = x$. *Recordeu-vos de* $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ *si* $x, y > 0$.
Denotarem per $\log$ *al logaritme en base e (en algun textos s'anotà per* $\ln$ *logaritme neperià).*
De la definició de l'exponencial i de les propietats del logaritme obtenim la següent propietat de la exponencial real

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y.$$

1.2.4 Límits de successions a $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Indeterminacions i criteris per al càlcul de límits.

Definició 1.2.38 (concepte de límit a $\pm\infty$)**.**
(1)Diem que una successió $\{a_n\}$ *té límit* $+\infty$ *i escriurem* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *si per cada* $r \in \mathbb{R}$ *existeix* n_0 *tal que* $a_n > r$ $\forall n \geq n_0$.
(2)Diem que una successió $\{a_n\}$ *té límit* $-\infty$ *i escriurem* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *si per cada* $r \in \mathbb{R}$ *existeix* n_0 *tal que* $a_n < r$ $\forall n \geq n_0$.

Exemple 1.2.39 (límits de successions a $\pm\infty$)**.** *Calculeu el límit en cas de tenir-ne de les successions,*

1. $a_n = n$.

   Una resolució. Via definició: triem $r \in \mathbb{R}$ i sigui $[r] + 1$ el enter entre $r < [r] + 1 \leq r + 1$; tenim llavors que per $n_0 = [r] + 1$ tenim $a_n > r$ per tot $n \geq n_0$, això prova que el límit és $+\infty$.
   Una altra manera és substituir en a_n la n per $+\infty$ tenim que dona $+\infty$ i per tant és un "nombre" a $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, i per tant aquest és el valor del límit. □

2. $a_n = -n$

   Una resolució. Substituïm la n per $+\infty$ i per les propietats de $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ obtenim que el límit és $-\infty$. □

3. $a_n = (n^3 + 2n)/(n^2 + 1)$.

   Una resolució. Substituïm la n per $+\infty$ i tenim $\frac{\infty}{\infty}$ que no sabem resoldre. Per això dividim en a_n numerador i denominador per n^2 obtenim llavors que podem escriure

   $$a_n = \frac{n + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}}$$

   substituint ara la n per $+\infty$ obtenim que dona

   $$+\infty/1$$

   i per tant el límit és $+\infty$. □

Observació 1.2.40. *Una successió de nombres reals pot tenir límit o no tenir-ne; i si en té (de límit) pot ser aquest valor un nombre real o $+\infty$ o $-\infty$.*

Propietats 1.2.41 (de límits.II.)**.** *Diem que una successió té límit si té límit un element de $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

1. *Si $\{a_n\}$ una successió té límit, llavors el límit és únic.*
2. *Si $\{a_n\} \to l$, $\{b_n\} \to l'$ i $c \in \mathbb{R}$ un número, llavors*
   (a) *$\{a_n+b_n\} \to l+l'$, sempre i quan $l+l'$ estigui determinat a $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.*
   (b) *$\{a_n b_n\} \to l \cdot l'$, sempre i quan $l \cdot l'$ estigui determinat a $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*
   (c) *$\{c \cdot a_n\} \to c \cdot l$, sempre i quan $c \cdot l$ estigui determinat a $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*
   (d) *$\{c + a_n\} \to c + l$,*
   (e) *$\{b_n/a_n\} \to l'/l$ si $l \neq 0$ i $\forall n$ $a_n \neq 0$,sempre i quan l'/l estigui determinat a $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*
   (f) *$\sqrt[m]{a_n} \to \sqrt[m]{l}$ si a_n són tots positius, arrel positiva ($m \in \mathbb{N} \setminus 0$).*
   (g) *suposem que podem definir $a_n^{b_n}$, llavors*
   $$\{a_n^{b_n}\} \to l^{l'},$$
   sempre i quan $l^{l'}$ estigui determinat a $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
3. *(Criteri del sandwich) Siguin $\{a_n\}$ una successió i dos successions més que sabem el límit i que aquest límit sigui el mateix $\{b_n\} \to l$, $\{c_n\} \to l$. Imposem a més*
   $$b_n \leq a_n \leq c_n.$$
   Llavors existeix el límit de $\{a_n\}$ i aquest límit és l,
   $$a_n \to l.$$
4. *Tota successió creixent té límit. Si a més la successió està acotada superiorment el límit $\in \mathbb{R}$. Tota successió decreixent té límit. Si a més està acotada inferiorment el límit $\in \mathbb{R}$.*
5. *Si $\{a_n\}$ una successió té límit, i sigui $k \in \mathbb{Z}$. Considerem la successió $b_n = a_{n+k}$ (on triem $b_n = 0$ si $n + k < 0$). Llavors $\{b_n\}$ té límit i a més:*
   $$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+k}.$$
   (Aquesta propietat és més general, veieu teorema 1.2.48)
6. *(Comparació) Sigui b_n una successió de termes no nuls que té límit i sigui a_n una altra successió on $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ llavors*
   $$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Exemple 1.2.42. *$a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ amb P, Q dos polinomis no nuls.*

Una resolució. Escrivim $P(x) = d_m x^m + \ldots + d_0$ amb $d_m \neq 0$ i $Q(x) = c_k x^k + \ldots + c_0$ amb $c_k \neq 0$. Distingim tres casos:
Cas $m = k$: Dividim numerador i denominador per n^k,

$$\lim \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim \frac{P(n)/n^k}{Q(n)/n^k}.$$

Observem

$$\lim \frac{Q(n)}{n^k} = \lim(c_k + c_{k-1}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{c_0}{n^k}) = c_k,$$

on l'última igualtat és del fet que $\frac{c_i}{n^i} \to 0$ per $i > 0$ i utilitzar la propietat 1.2.41.2c.
Pel mateix argument,

$$\lim \frac{P(n)}{n^k} = \lim(d_k + d_{k-1}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{d_0}{n^k}) = d_k,$$

per tant el límit demanat és

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{d_k}{c_k}.$$

Cas $m > k$: Dividim numerador i denominador per n^k, i estudiem

$$\lim \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim \frac{P(n)/n^k}{Q(n)/n^k}.$$

Observem primer (argumentant de manera semblant que el cas anterior)

$$\lim \frac{Q(n)}{n^k} = \lim(c_k + c_{k-1}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{c_0}{n^k}) = c_k.$$

Anem a estudiar $\lim \frac{P(n)}{n^k} = \lim\Big((d_m n^{m-k} + \cdots + d_k) + (\frac{d_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{d_0}{n^k})\Big)$. Observeu que $\frac{d_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{d_0}{n^k} \to 0$, i com $\{d_m n^{m-k} + \cdots + d_k\}$ es pot comparar amb $d_m n^{m-k}$ que té límit $+\infty$ si $d_m > 0$ i $-\infty$ si $d_m < 0$ (utilitzem la propietat 1.2.41,6). Per tant (usant la propietat 1.2.41.2e) obtenim:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} +\infty, & si\ d_m > 0 \\ -\infty, & si\ d_m < 0. \end{cases}$$

Cas $m < k$: Observem que $\lim Q(n)/P(n)$ és calcula com el cas anterior per tant és o $+\infty$ o $-\infty$ com $\lim P(n)/Q(n) = \frac{1}{\lim Q(n)/P(n)}$ obtenim que aquest límit és 0, és a dir,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0.$$

□

Observació 1.2.43. *Hi ha però moltes situacions que no estan determinats els valors a $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, "indeterminacions" i llavors no ens és útil les propietats anteriors 1.2.41 per a calcular-ne el límit (si és que té límit). Llistem algunes expressions que no sabem dir res i que no estan definits com a elements a $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$("indeterminacions")(no es troben dins les propietats 1.2.35 i 1.2.17):*

$$\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \frac{0}{0}, 1^{\infty}, (+\infty)^0, 0^{\infty}, 0^0, \ldots\star$$

Anem a donar certs resultats i criteris que ens permeten resoldre algunes indeterminacions. Si cap ens va bé, sempre un pot intentar usar la definició i desigualtats.
Intentem calcular el següent límit (en cas que en tingui),

$$\sqrt[n!]{n!} \to ?$$

Què fem? si substituïm la n per $+\infty$ obteniu l'expressió ∞^0 que no sabem dir-ne res. Anem a fer una mica mes de teoria i l'aplicarem en resoldre l'anterior límit.

Successions parcials.

Definició 1.2.44. *Sigui $\{a_n\}$ una successió de nombres reals. Sigui*

$$m_0 < m_1 < m_2 < \dots$$

successió de naturals estrictament creixent, considerem la successió $\{b_n := a_{m_n}\}_n$ aquesta successió $\{b_n\}$ s'anomena una successió parcial de la successió $\{a_n\}$ (fixeu-vos que $b_0 = a_{m_0}, b_1 = a_{m_1}, \dots$ anem triant números de la successió a_n per formar la successió b_n per això el nom de successió parcial de a_n).

Exemple 1.2.45. *Considerem $a_n = (-1)^n$. Triem la successió de naturals dels nombres parells,*

$$0 < 2 < 4 < 6 < \dots$$

triem $b_n = a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$, tenim que la successió constant $\{1\}_n$ és una successió parcial de $a_n = (-1)^n$

Observació 1.2.46. *Donada una successió parcial, tenim moltíssimes successions parcials, tantes com successions de naturals estrictament creixent que podem construir.*

Exercici 1.2.47. *Proveu que la successió $\{\sqrt[n!]{n!}\}$ és una successió parcial de la successió $\sqrt[n]{n}$.*

Anem a entendre com es relaciona els límits entre la successió i les successions parcials.

Teorema 1.2.48. *Sigui $\{a_n\} \to l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Llavors tota successió parcial $\{a_{m_n}\}$ de $\{a_n\}$ té també límit i és l*

Observació 1.2.49. *Fixeu-vos que el recíproc de l'anterior teorema no és veritat, veieu l'exemple següent.*

Anem a utilitzar aquest resultat per calcular limits.

Exemple 1.2.50.

1. *Proveu que la successió $a_n = (-1)^n$ no té límit.*

   Una resolució. Considerem la successió parcial $b_n = a_{2n} = 1$ tenim que $b_n \to 1$, considerem la successió parcial $c_n = a_{2n+1} = -1$ que té límit -1, tenim dues successions parcials que tenen límit diferent, per tant l'anterior teorema (1.2.48) ens ajuda a dir que a_n no té límit, ja que si en tingués tota successió parcial tindria el mateix límit, i tenim dues successions parcials de a_n amb límit diferent. $\square$

2. *Calculeu el límit de* $\{\sqrt[n!]{n!}\}$.

Una resolució. Sabem que és una successió parcial de $\sqrt[n]{n}$ (1.2.47) i heu vist a l'exemple (1.2.15,3) que aquest límit és 1, per tant

$$\sqrt[n!]{n!} \to 1.$$

$\square$

Observació 1.2.51. *Fixeu-vos que el teorema 1.2.48 ens ha estat útil per a provar que una successió no té límit (cap aquesta idea llegiu el teorema 1.2.52) i per a trobar límits de successions.*

El següent resultat no l'aplicarem però us l'escric perquè us pot ajudar a entendre millor la teoria de successions,

Teorema 1.2.52 (Bolzano-Weierstrass*)**.** *Tota successió acotada de nombres reals (és a dir* $|a_n| \leq \mu$ *per tot* n *amb* $\mu \in \mathbb{R}$ *fix) té una successió parcial convergent.*

Exemple 1.2.53 (*)**.** *L'anterior resultat ens afirma que la successió* $\{(-1)^n\}$ *(que és acotada per 1) té una successió parcial convergent. Dieu-me'n una [exercici].*

Criteris per a resoldre indeterminacions

Anem a donar alguns criteris de convergència per a resoldre indeterminacions.

Criteri 1.2.54 (1er Stolz)**.** *Sigui* $\{a_n\}$ *successió de nombres reals amb*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R},$$

i una altra successió $\{b_n\}$ *amb* $b_n \geq 0$ *per tot* n *complint que* $\{(c_n := b_1 + \ldots + b_n)\}_n$ *no està acotada superiorment(és a dir la successió* c_n *té límit* $+\infty$*).*

Llavors,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n}{b_1 + \ldots + b_n} = \alpha.$$

Criteri 1.2.55 (2on Stolz)**.**

1. *Siguin* $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$ *successions de nombres reals amb* b_n *estrictament decreixent (és a dir* $b_{n+1} < b_n$ $\forall n$*), complint que* $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ *i a més* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

   Llavors,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha.$$

2. *Siguin $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ successions de nombres reals amb b_n estrictament creixent (és a dir $b_{n+1} > b_n$ $\forall n$) (o estrictament decreixent) i no acotada superiorment (respectivament no acotada inferiorment), i $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

   Llavors,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha.$$

Exemple 1.2.56 (Aplicació a la resolució de límits)**.**

1. *Calculeu* $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n)}{n}$.

   Una resolució. Fixeu-vos que substituir la n per $+\infty$ tenim ∞/∞ que no sabem dir-ne res. El segon criteri Stolz.2 ens dona un criteri per resoldre en algun cas la indeterminació ∞/∞.
   Triem $b_n = n$, és una successió estrictament creixent i no acotada superiorment (i.e. no existeix $M \in \mathbb{R}$ on $b_n \leq M$ per tot n). Triem $a_n = ln(n)$ i intentem calcular $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n+1)-\log(n)}{n+1-n} = \lim_{n\to+\infty} \log(\frac{n+1}{n}) = \log(1) = 0,$$

   ara apliquem el segon criteri de Stolz, apartat 2, per concloure que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n)}{n} = 0.$$

□

2. *Calculeu* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\ldots+n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}$.

   Una resolució. Triem $b_n = n^2\sqrt{n}$ que és una successió estrictament creixent no acotada superiorment, i $a_n = 1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\ldots+n\sqrt{n}$, calculem $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} =$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{(n+1)^2\sqrt{n+1}-n^2\sqrt{n}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\sqrt{n+1}((n+1)^2\sqrt{n+1}+n^2\sqrt{n})}{(n+1)^4(n+1)-n^4n} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^4+n^2(n+1)\sqrt{n(n+1)}}{(n+1)^5-n^5} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^4+n^2(n+1)\sqrt{n(n+1)}}{n^4}}{\frac{(n+1)^5-n^5}{n^4}} = 2/5$$

via el 2on criteri d'Stolz obtenim,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\ldots+n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}} = 2/5.$$

□

Criteri 1.2.57 (de l'arrel)**.**
Sigui $\{a_n\}$ *una successió de nombres reals positius* ($a_n > 0$ *per tot* n) *i suposem* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. *Llavors sabem calcular el limit següent:*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha.$$

Exemple 1.2.58 (Aplicació a la resolució de límits)**.**

1. *Calculeu* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$.

   Una resolució. Considerem $a_n = \frac{(2n)!}{n^n n!}$, fixeu-vos que volem calcular el límit $\sqrt[n]{a_n}$. Calculem,

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 4/e,$$

   on en l'última igualtat utilitzem $\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4$ (dividint per n^2 numerador i denominador) i que $\lim_{n\to+\infty} (\frac{n}{n+1})^n = \lim_{n\to+\infty} ((1+\frac{1}{n})^n)^{-1} = e^{-1}$. Pel criteri de l'arrel obtenim que el límit buscat és $4/e$, és a dir,

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = 4/e.$$

   □

2. *Calculeu* $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$.

   Una resolució. Considerem $a_n = \frac{n!}{n^n}$, obtenim que

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1},$$

   per tant pel criteri de l'arrel obtenim

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}.$$

   □

Criteri 1.2.59 (mitjana aritmètica)**.**
Sigui $\{a_n\}$ *una successió de nombres reals tal que* $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, *llavors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} = \alpha.$$

Criteri 1.2.60 (mitjana geomètrica).
Sigui $\{a_n\}$ *successió de nombres reals estrictament positius i* $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *llavors*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} = \alpha.$$

Observació 1.2.61. *(*) Únicament per caire informatiu, recordeu que entre la mitja aritmètica i geomètrica de nombres positius* $a_i \geq 0$ *es té la desigualtat següent,*

$$(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n},$$

amb igualtat si i nomes si $a_1 = \ldots = a_n$.

Exemple 1.2.62. *Calculeu* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}$.

Una resolució. Considerem $a_n = n$ fixeu-vos que $n! = a_n \cdot \ldots \cdot a_1$ com $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ obtenim utilitzant el criteri de la mitja geomètrica,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

□

Criteri 1.2.63 (del número e).

1. *(1er criteri) Siguin* $\{a_n\}$ *una successió de nombres reals amb* $\lim_{n\to+\infty} a_n \in \{\pm\infty\}$. *Suposem que la successió* $(1+\frac{1}{a_n})^{a_n}$ *té sentit en* $\mathbb{R}$, *llavors:*

$$\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{a_n})^{a_n} = e.$$

2. *(2n criteri) Siguin* $\{a_n\}, \{b_n\}$ *dues successions de nombres reals complint que* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$, $\lim_{n\to+\infty} b_n \in \{\pm\infty\}$, *que* $a_n^{b_n}$ *és definit a* $\mathbb{R}$ *i existeix* $\lim_{n\to+\infty} (a_n - 1)b_n = h \in \mathbb{R}$. *Llavors,*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = e^h.$$

Exemple 1.2.64. *Calculeu* $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+n}\right)^{2n}$.

Una resolució. Escrivim,

$$\left(\frac{n^2+1}{n^2+n}\right)^{2n} = \left(1 + \frac{1-n}{n^2+n}\right)^{2n} =$$

$$\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{n^2+n}{1-n}\right)}\right)^{2n} = \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{n^2+n}{1-n}\right)}\right)^{\left(\frac{n^2+n}{1-n}\right)2n\left(\frac{1-n}{n^2+n}\right)},$$

(fixem-nos que pel 1er criteri del nombre e tenim, $\left(1+\frac{1}{(\frac{n^2+n}{1-n})}\right)^{(\frac{n^2+n}{1-n})} \to e$, i) fixem-nos que $(a_n-1)b_n = 2n(\frac{1-n}{n^2+n}) \to -2$ per tant pel segon criteri del nombre e obtenim

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+n}\right)^{2n} = e^{-2}.$$

□

El següent resultat ens afirma que podem substituir en el càlcul de límits el factorial per funcions,

Fórmula 1.2.65 (de Stirling(*))**.**

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

1.2.5 Sèries numèriques: primeres propietats.Criteris.

En aquesta subsecció intentarem estudiar la suma d'infinits nombres reals, realment no intentarem dir-ne el resultat, problema molt difícil, sinó en dir-ne si la suma és un nombre real(convergent) o bé no ho és (no existeix o és infinit).
Problema: tenim una successió de nombres reals $a_0, a_1, a_2, \ldots$ i volem saber quin nombre és si els sumem tots $a_0+a_1+a_2+\ldots$. Aquest problema és extremament difícil com hem dit, restringim-nos en únicament en poder dir si $a_0+a_1+\ldots$ és un nombre real o és ∞ ó no es pot decidir.
Considerem una nova successió, $\{A_n\}$ que definim de la manera següent:

$$A_n = a_0+\ldots+a_n,$$

fixem-nos que el nostre problema es transforma en el càlcul del límit de A_n.

Definició 1.2.66. *Una* **sèrie** *és un parell de successions $\{a_n\}$ i $\{A_n\}$ de nombres relacionades mitjançant,*

$$A_n = a_0+\ldots+a_n.$$

Denotem la sèrie per $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
$\{a_n\}$ s'anomena la successió dels termes, i $\{A_n\}$ la successió de les sumes parcials.

Definició 1.2.67. *Diem que una sèrie és* **convergent** *si $A_n \to l$ amb $|l| < +\infty$. Realment tenim $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l$*
Diem que una sèrie és **divergent** *si no és convergent.*

Observació 1.2.68 (Sèries de termes positius)**.** *Si la sèrie és de termes positius (això vol dir que $a_n \geq 0$ per tot n, $a_n \in \mathbb{R}$) llavors $A_n = a_0+\ldots+a_n$ és una successió creixent, i té límit un nombre real si està acotada la successió $\{A_n\}$ o bé és aquesta suma $+\infty$.*
Denotarem si la sèrie $\sum a_n$ és convergent mitjançant $\sum a_n < \infty$, i si la sèrie és divergent per $\sum a_n = +\infty$.

Observació 1.2.69 (*)**.** *Una sèrie arbitrària de nombres reals pot convergir, o que $\lim |A_n| = +\infty$ (divergents a infinit) o bé que $\{A_n\}$ no té límit (en $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$) amb $|A_n|$ sense tenir límit $+\infty$ (s'anomenen divergents oscil.lants).*

Observació 1.2.70. *Per estudiar si una sèrie convergeix o divergeix o ..., és el mateix estudi si treiem un nombre finit dels nombres de la successió de termes de la successió.*
Escrivim

$$\sum_{n=k}^{\infty} c_n := c_k + c_{k+1} + ...$$

la suma a partir dels c_n amb $n \geq k$, té sentit parlar-ne, i podem estudiar-ne la convergència o divergència (pensant per exemple que $c_0 = \ldots = c_{k-1} = 0$ si $k \geq 0$, o bé que treiem els termes $c_k, \ldots, c_{-1}$ si $k < 0$).
Fixeu-vos

$$\sum_{n=k}^{+\infty} c_n = \sum_{n=k}^{k+m} c_n + \sum_{n=k+m+1}^{\infty} c_n,$$

amb $m \in \mathbb{N}$.

Observació 1.2.71 (Sèries en nombres complexos.(*))**.** *Podem considerar $a_n \in \mathbb{C}$, i formar igualment la successió $A_n \in \mathbb{C}$. Tenim definida tenir límit a un nombre a $\mathbb{C}$ (1.2.20), en cas de tenir aquest límit, (i.e.* $\mathrm{Re}(A_n) \to l' \in \mathbb{R}$ i $\mathrm{Im}(A_n) \to l'' \in \mathbb{R}$) diem que la sèrie de nombres complexos convergeix. Diem que és divergent en cas contrari.

Exemple 1.2.72.

1. *Estudieu la convergència o divergència de la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} 1$.*

   Una resolució. Tenim aquí que $a_n = 1$ per a tot n i $A_n = n + 1$ com $\lim_{n\to+\infty} A_n = +\infty$ tenim que

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

   □

   Proposició 1.2.73. *Si $\sum a_n$ és convergent llavors $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$*

   Observació 1.2.74. *Si únicament sabem que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ no podem dir res sobre la convergència o divergència de $\sum a_n$.!!!*

   Exercici 1.2.75. *Feu la demostració de la proposició 1.2.73.*

2. *Estudieu la convergència o divergència de la sèrie $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ amb $r \in \mathbb{R}^+$(nombres reals positius).*

   Una resolució. Cas $r = 1$: l'exemple anterior hem vist $\sum 1 = +\infty$.
   Cas $r > 1$: tenim $\lim_{n\to+\infty} r^n = +\infty \neq 0$ i com $a_n = r^n \geq 0$ obtenim de (1.2.68), i de la proposició anterior (1.2.73) (sabem que no convergeix),

   $$\sum r^n = +\infty, \text{ si } r > 1.$$

Cas $r<1$. Tenim $a_n=r^n$ i observem que $A_n=1+r+\ldots+r^n=\frac{r^{n+1}-r}{r-1}$ prenent el límit

$$A_n\to\frac{r}{1-r}\in\mathbb{R}$$

per tant aquí fins i tot podem calcular l, i obtenim que la sèrie és convergent,

$$\sum r^n<+\infty,\ \textit{si } r<1.$$

$\square$

Exercici 1.2.76. *Estudieu la convergència o no de la sèrie* $\sum_{n=0}^{+\infty}r^n$ *amb* $r\in\mathbb{R}$.

Observació 1.2.77. *L'anterior exemple (1.2.72.2) hem pogut calcular el límit dels* A_n*, aquest fet és molt particular de la sèrie treballada i en general molt difícil i en molts casos encara impossible.*
Com contestar si una sèrie és convergent o no sense calcular el valor del límit? Per això donarem criteris i algunes sèries que cal conèixer i jugant amb aquest fets junt amb desigualtats, ens permeten resoldre en molts casos preguntes sobre convergència i divergència de sèries.

3. *La sèrie* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *és divergent.(Cal conèixer aquest fet!)*

Una resolució. Com $a_n=\frac{1}{n}$ és de termes positius, és suficient veure que A_n tendeix a infinit (sabem per $a_n\geq 0$ que existeix el limit de A_n en $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ propietat 4,1.2.41). Fixeu-vos en la desigualtat següent;

$$A_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\geq$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\underbrace{\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^3}}_{2^2}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{2^n}+\ldots+\frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}}=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{n}=1+\frac{n}{2}$$

on A_n no és acotada i per tant té límit $+\infty$, obtenim

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty.$$

$\square$

Observació 1.2.78. *Fixeu-vos que la sèrie* $\sum\frac{1}{n}$ *compleix que* $a_n\to 0$ *i que no és convergent, compareu en la proposició anterior (1.2.73) i l'observació de després de la proposició (1.2.74).*$\star$

Anem a explicitar una "mena de recíproc" a la proposició anterior (1.2.73):

Criteri 1.2.79 (de Leibniz)**.** *Donada una successió* $\{b_n\}$ *amb* $b_n\geq 0$ *i que sigui decreixent amb límit 0; llavors*

$$\sum(-1)^n b_n\ \textit{és convergent.}$$

4. *Estudieu la convergència, o no convergència per la sèrie* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$.

Una resolució. Considerem $b_n = \frac{1}{n}$ que és una successió decreixent amb límit 0. Pel criteri de Leibnitz obtenim que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \text{ és convergent.}$$

□

5. *Podem considerar $r \in \mathbb{R}$ com una sèrie convergent, efectivament escrivint l'expressió decimal de r*

$$r = r_0, r_1 r_2 \ldots$$

i triant $a_n = r_n 10^{-n}$ obtenim A_n és l'expressió decimal fins els terme n del nombre real r, per tant passant al límit obtenim

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r_n 10^{-n} = r.$$

6. *Siguin $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dues successions relacionades per $a_n = b_{n+1} - b_n$ per tot $n \in \mathbb{N}$, llavors es té:*

$$\sum a_n \text{ és convergent} \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}.$$

Si tenim que l'anterior fet es compleix obtenim

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = (\lim_{n\to+\infty} b_n) - b_0.$$

Proposició 1.2.80. *Siguin $\sum a_n$ i $\sum b_n$ dues sèries convergents i denotem $a = \sum a_n$ i $b = \sum b_n$. Llavors per a cada parell de constants α, β la sèrie*

$$\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$$

convergeix a $\alpha a + \beta b$.

Observació 1.2.81. *Les sèries tenen les dues propietats següents: surten a fora les constants, és a dir $\sum \alpha a_n = \alpha \sum a_n$, i la segona que $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$ si $\sum a_n$ i $\sum b_n$ són convergents.$\star$*

Una pregunta natural és: donada una sèrie, podem canviar l'ordre de sumar els seus termes tal com vulguem i donarà el mateix resultat? La resposta general és que No, però la resposta és Si en el cas de sèries de termes positius, i més en general en sèries absolutament convergents.
Anem tot seguit a definir aquest concepte.

Definició 1.2.82 (*)**.** *Una sèrie $\sum a_n$ s'anomena absolutament convergent si la sèrie $\sum |a_n|$ és convergent (és dir si la sèrie, on la successió de termes és $\{|a_n|\}$, és convergent).*

Observació 1.2.83 (*)**.** *Si els termes de la sèrie $a_n \geq 0$ tenim $|a_n| = a_n$ i per tant els conceptes absolutament convergent i convergent coincideixen.*

Teorema 1.2.84 (*). *Si $\sum |a_n| < +\infty$ llavors $\sum a_n$ convergeix.*

Teorema 1.2.85 (*). *Sigui $\sum a_n$ una sèrie absolutament convergent i sigui $l = \sum a_n$. Llavors tota reordenada de $\sum a_n$ és també absolutament convergent i la seva suma és l.*

Anem a llistar una sèrie de criteris que junt amb les sèries que en sabem la seva convergència o no, ens ajuden a resoldre en molts casos la pregunta si una sèrie és o no és convergent.

Criteris de convergència per a sèries.

Criteri 1.2.86 (de comparació per desigualtats). *Siguin $\{a_n \geq 0\}$ i $\{b_n \geq 0\}$ dues successions de termes positius i suposem que $\exists c \in \mathbb{R}$ i $N \in \mathbb{N}$ complint $a_n < cb_n$ per tot $n \geq N$ llavors:*

$$(i) \sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty,$$

$$(ii) \sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = \infty.$$

Criteri 1.2.87 (de comparació per quocient). *Siguin $\{a_n > 0\}$ i $\{b_n > 0\}$ dues successions de termes positius i suposem que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*

-Si $c \neq 0$ i real, llavors:

$$(i) \sum b_n < +\infty \Leftrightarrow \sum a_n < +\infty,$$

$$(ii) \sum b_n = +\infty \Leftrightarrow \sum a_n = \infty.$$

-Si $c = 0$ llavors:

$$\sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty.$$

-Si $c = +\infty$ llavors:

$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = \infty.$$

Exemple 1.2.88. *Estudieu la convergència o divergència de la sèrie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(n+1)/n}}.$$

Una resolució. Comparem el termes $a_n = \frac{1}{n^{(n+1)/n}}$ amb $b_n = \frac{1}{n}$, calculem el límit de a_n/b_n que ens dóna 1. Utilitzant llavors, el 2on criteri de comparació i sabent que en un exemple anterior (exemple 1.2.72.3) hem vist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$ obtenim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(n+1)/n}} = +\infty.$$

$\square$

Escrivim un criteri molt útil pel càlcul de sèries de logaritmes i de $\sum n^{\alpha}$ amb $\alpha \in \mathbb{R}$.

Criteri 1.2.89 (de condensació de Cauchy). *Sigui $\{a_n\}$ una successió decreixent de nombres reals positius. Llavors:*

$$\sum_n a_n < +\infty \Leftrightarrow \sum_n 2^n a_{2^n} < +\infty.$$

Exemple 1.2.90. *La sèrie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$ *amb* $\epsilon > 0$ *és convergent (heu de conèixer aquest fet!!).*
D'aquí obtenim:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty, \ldots$$

Una resolució. És clar que la successió $1/n^{1+\epsilon}$ satisfà les hipòtesis del criteri 1.2.89, estudiem la convergència o no per la sèrie,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{n+n\epsilon}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n\epsilon}},$$

i fixeu-vos que és un cas particular de la sèrie de l'exemple 1.2.72.2 amb $r = \frac{1}{2^\epsilon} < 1$ si $\epsilon > 0$ i per tant obtenim que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n\epsilon}}$ és convergent i utilitzant el criteri de condensació de Cauchy obtenim que la sèrie,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} < \infty.$$

$\square$

Exercici 1.2.91. *Utilitzant el criteri de condensació de Cauchy proveu que* $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha < \infty$*, amb* $\alpha \in \mathbb{R}$ *número real fixat, si i només si* $\alpha < -1$*.*

Escrivim un criteri que no podrem utilitzar en aquest curs (el veureu possiblement a Càlcul I), però potser en algun moment us pot ser útil.

Criteri 1.2.92 (criteri de l'integral(*))**.** *Sigui* f *una funció contínua i integrable d'una variable real definida a* $[M, +\infty)$ *amb* $f(x) \geq 0$ *i* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$*. Sigui* $k_0 > M$ *un natural i* $t_n = \int_{k_0}^{n} f(x)dx$ *una successió definida per* $n \geq k_0$*. Llavors,*

$$\sum_{k_0}^{\infty} f(n) \text{ és convergent} \Leftrightarrow \{t_n\} \to \tilde{l} \in \mathbb{R}. \star$$

(Aquest valor $\tilde{l} \in \mathbb{R}$ *en cas d'existir, NO coincideix normalment amb* $l = \sum_{k_0}^{\infty} f(n)$*).*

Fins ara tots els criteris eren per a sèries de nombres reals positius, anem a enunciar-ne alguns altres que són per a sèries en general.

Criteri 1.2.93 (del quocient)**.** *Sigui* a_n *una successió de termes no nuls i suposem que existeix* $\lim_{n \to \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \rho \in \mathbb{R}$ *llavors,*

1. $\sum a_n$ *és convergent si* $\rho < 1$ *(realment és absolutament convergent),*
2. $\sum a_n$ *és divergent si* $\rho > 1$*.*

Criteri 1.2.94 (de Raabe(*))**.** *Suposem que ens trobem amb les hipòtesis del criteri del quocient i que hem trobat que* $\rho = 1$*, suposem que podem calcular* $\lim_{n \to \infty} n(1 - |\frac{a_{n+1}}{a_n}|) = s$*. Llavors,*

1. $\sum a_n$ *és convergent si* $s > 1$*,*

2. $\sum a_n$ *és divergent si* $s < 1$.

Criteri 1.2.95 (de l'arrel). *Sigui* $\sum a_n$ *una sèrie i suposem que existeix* $\rho = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}$. *Llavors,*

1. $\sum a_n$ *és convergent si* $\rho < 1$ *(realment és absolutament convergent),*

2. $\sum a_n$ *és divergent si* $\rho > 1$.$\star$

Escrivim un parell de resultats útils per al producte en alguns casos,

Proposició 1.2.96. *Siguin* $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$ *successions de nombres complexos, i* $A_n = a_0 + \ldots + a_n$. *Llavors,*

$$a_0b_0 + \ldots + a_nb_n = \sum_{k=0}^{n} a_kb_k = A_nb_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} A_k(b_{k+1} - b_k).$$

Per tant

$$\sum a_kb_k \text{ és convergent} \Leftrightarrow$$

$$\{\sum A_k(b_{k+1} - b_k) \text{ és convergent i } A_nb_{n+1} \text{ té límit (en } \mathbb{C})\}.$$

Observació 1.2.97 (*). *Els criteris del quocient i de l'arrel que hem donat anteriorment per* $\sum a_n$ *són vàlids per a l'estudi de convergència amb* $a_n \in \mathbb{C}$ *(és a dir per sèries en nombres complexos), on el valor absolut en els criteris quan es tracta de nombres complexos (*$a_n \in \mathbb{C}$*) cal substituir-lo pel mòdul del nombre complex.*

Criteri 1.2.98 (Abel). *Sigui* $\sum a_n$ *una sèrie convergent i suposem que tenim una successió de números reals* $\{b_n\}$ *monòtona amb límit;* $\{b_n\} \to l \in \mathbb{R}$.

Llavors,

$$\sum a_nb_n \text{ és convergent.}$$

Exemple 1.2.99. *Fem exemples d'aplicació dels criteris anteriors.*

1. Estudia la convergència per la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{1+n^2} - n).$$

Una resolució. Fixeu-vos que

$$a_n = \sqrt{1+n^2} - n = (\sqrt{1+n^2} - n)\frac{(\sqrt{1+n^2}+n)}{(\sqrt{1+n^2}+n)} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n},$$

i aquestes igualtats ens donen la idea de comparar a_n amb $1/n$ (sabem el comportament sobre convergència o no de la sèrie $\sum \frac{1}{n} = +\infty$, un dels exemples anteriors) i usant el criteri de comparació pel quocient podrem concloure. Efectivament, fixem-nos, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1/(\sqrt{1+n^2}+n)}{1/n} = 1/2 \neq 0$ pel segon criteri de comparació tenim

$$\sum(\sqrt{1+n^2} - n) \sim \sum \frac{1}{n}$$

on $\sim$ vol dir del mateix comportament respecte convergència o no entre les dues sèries, com $\sum \frac{1}{n}$ és divergent, tenim llavors

$$\sum(\sqrt{1+n^2}-n) = +\infty \textit{ és divergent.}$$

$\square$

2. *Estudia la convergència per la sèrie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n.$$

Una resolució. Tenim aquí $a_n = (\sqrt[n]{n}-1)^n$, fixem-nos que $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n}-1$ i en sabem calcular el límit, que dona 0, per tant el criteri de l'arrel ens serà útil,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{n}-1) = 1-1 = 0,$$

pel criteri de l'arrel obtenim com el límit anterior és més petit que 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n < +\infty, \textit{ és convergent.}$$

$\square$

3. *Estudia la convergència per la sèrie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n})^n.$$

Una resolució. Fixem-nos que $a_n = \sqrt[n]{n}^n = n$ és clarament molt i molt divergent la sèrie ($\lim a_n \neq 0$ i per la proposició 1.2.73 la sèrie no és convergent i com és de termes positius és divergent). Veieu (exercici) que si apliqueu el criteri de l'arrel no podríeu dir que és divergent la sèrie, el límit a calcular pel criteri de l'arrel us dona 1 i no podeu dir-ne res utilitzant aquest criteri , (tot i que la sèrie que estudieu ara és $\sum n$: clarament divergent). $\square$

4. *Estudia la convergència per la sèrie*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{logn}.$$

Una resolució. Utilitzem el criteri de comparació per desigualtats per a escriure l'expressió en funció de n i anar a una sèrie que podem decidir-ne més fàcilment.
Escrivim $b_n = 1/log(n)$.
Exercici: Proveu que per $n \geq M_0$ on M_0 és un natural fix, tenim $log(n) < n$ (comparant les gràfiques $log(x)$ i x la última és més gran a partir d'un lloc en endavant).

Un cop tenim aquesta desigualtat observeu llavors que a partir d'aquest M_0

$$a_n = 1/n < 1/log(n), \quad per\ tant \sum_{M_0}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum_{M_0}^{\infty} 1/log(n),$$

pel primer criteri de comparació, (segon apartat), com $\sum \frac{1}{n}$ és divergent obtenim que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{log(n)} = +\infty.$$

□

Una resolució. [Exercici] Resoleu l'estudi de la convergència anterior utilitzant el criteri de condensació de Cauchy. □

5. *Estudia la convergència per la sèrie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Una resolució. Considerem $a_n = 1/n!$ (quan surten factorials, usualment és útil el criteri del quocient per a decidir convergència de la sèrie) i observem

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

com $0 < 1$ pel criteri del quocient obtenim

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < +\infty.$$

□

6. *Estudieu respecte el valor de $r > 0$ real la convergència o no de la sèrie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n n^r.$$

Una resolució. Cas $r \geq 1$. Fixem-nos la desigualtat $r^n n^r \geq n^r \geq n$, utilitzem el primer criteri de comparació amb $b_n = r^n n^r$ i $a_n = n$, sabem que $\sum a_n = +\infty$(exemple 3 anterior), pel primer criteri de comparació obtenim,

$$\sum b_n = \sum r^n n^r = +\infty, \ si\ r \geq 1.$$

Cas $0 < r < 1$. Fixem-nos que tenim $n^r < n$ si $0 < r < 1$ (exercici) i per tant obtenim la desigualtat(volem aplicar 1er criteri comparació),

$$\sum r^n n^r \leq \sum r^n n.$$

Anem a estudiar la convergència de la sèrie $\sum r^n n$ (utilitzant Càlcul I via derivació i desenvolupament de sèries es fa més fàcil aquest estudi, nosaltres no sabem encara aquesta teoria en aquest moment). Apliquem la proposició anterior 1.2.96, amb $a_n = r^n$ i $b_n = n$ tenim llavors

$$\sum_{n=0}^{M} r^n n = \sum_{n=1}^{M} r^n n = \frac{1-r^{M+1}}{1-r}(M+1) - \sum_{k=0}^{M}(\frac{1-r^{k+1}}{1-r})$$

fixeu-vos que podem calcular l'expressió de la dreta, efectivament,

$$\sum_{k=0}^{M}(\frac{1-r^{k+1}}{1-r}) = \frac{1}{1-r}(\sum_{k=0}^{M} 1) - \frac{r}{1-r}(\sum_{k=0}^{M} r^k)$$

$$= \frac{M+1}{1-r} - \frac{r}{(1-r)}\frac{(1-r^{M+1})}{(1-r)},$$

on obtenim;

$$\sum_{n=1}^{M} r^n n = \frac{(1-r^{M+1})}{(1-r)}(M+1) - \sum_{k=0}^{M}(\frac{1-r^{k+1}}{1-r}) =$$

$$\frac{1-r^{M+1}}{1-r}(M+1) - \frac{M+1}{1-r} + \frac{r}{(1-r)}\frac{(1-r^{M+1})}{(1-r)} = c_M$$

i observem que $c_M \to l \in \mathbb{R}$, (fixeu-vos que simplificant tenim, $c_M = -\frac{(M+1)r^{M+1}}{1-r} + \frac{r(1-r^{M+1})}{(1-r)^2}$, que té límit un nombre real [Exercici]), per tant la sèrie $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n n < \infty$ i pel primer criteri de comparació podem concloure que

$$\sum r^n n^r < +\infty, \ si \ 0 < r < 1.$$

□

7. *Estudieu la convergència de la sèrie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(log(n))^{\beta}},$$

en funció dels valors reals α, i β.

Una resolució.
-Cas $\alpha > 1$ i β qualsevol. Escrivim $\alpha = 1 + \epsilon$. Comparem el terme de la sèrie amb la sèrie que té per termes $\frac{1}{n^{1+\frac{\epsilon}{2}}}$, on fixem-nos,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^{\alpha}(log(n))^{\beta}}}{\frac{1}{n^{1+\frac{\epsilon}{2}}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{\epsilon}{2}}(log(n))^{\beta}} = 0,$$

com sabem que $\sum n^{-(1+\frac{\epsilon}{2})} < +\infty$ pel criteri de comparació per quocient obtenim

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(log(n))^{\beta}} < \infty \ si \ \alpha > 1.$$

-Cas $\alpha < 1$ i β qualsevol. Escrivim $\alpha = 1 - \epsilon$ on $\epsilon > 0$. Comparem el terme de la sèrie amb la sèrie que té per termes $\frac{1}{n^{1-\frac{\epsilon}{2}}}$, on fixem-nos,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^\alpha (log(n))^\beta}}{\frac{1}{n^{1-\frac{\epsilon}{2}}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{-\epsilon}{2}} (log(n))^\beta} = +\infty,$$

com sabem que $\sum n^{-(1-\frac{\epsilon}{2})} = +\infty$ (veieu exercici 1.2.91) pel criteri de comparació per quocient obtenim

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (log(n))^\beta} = +\infty \ si \ \alpha < 1.$$

-Cas $\alpha = 1$ i $\beta \leq 0$. Observem la desigualtat, $\frac{1}{n(log(n))^\beta} \geq \frac{1}{n}$ i pel criteri de comparació per desigualtats i coneixent que $\sum \frac{1}{n} = +\infty$ obtenim

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(log(n))^\beta} = \infty \ si \ \beta \leq 0.$$

-Cas $\alpha = 1$ i $\beta > 0$.
Apliquem el criteri de condensació de Cauchy, obtenint que la convergència o divergència de la sèrie a estudiar és equivalent a la sèrie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\beta (log(2))^\beta} = \frac{1}{(log(2))^\beta} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\beta},$$

on aquesta última sèrie és convergent si i nomes si $\beta > 1$ obtenint així,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(log(n))^\beta} \begin{cases} < \infty \ si \ \beta > 1 \\ = \infty \ si \ \beta \leq 1. \end{cases}$$

□

Exercici 1.2.100. *Sigui a_n una successió de nombres reals amb $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Proveu que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^n < +\infty.$$

Per acabar el tema de sèries, anem a donar expressions en sèries que sabem el valor i us poden ser útils. La justificació teòrica la veureu en el curs de càlcul I;

Observació 1.2.101 (Fets útils, igualtats importants(*))**.** *Si substituïu la x per un valor obteniu que podeu calcular el valor de la sèrie que depèn d'aquest nombre real x en les igualtats següents respecte de les x que formulem en cada situació;*

1. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *expressió vàlida* $\forall x \in \mathbb{R}$ *complint* $|x| < 1$,
2. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, *vàlida* $\forall x \in \mathbb{R}$, *(igualtat també vàlida* $\forall x \in \mathbb{C}$, *veieu §1.3.1)*
   tenim en particular que $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

3. $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, *vàlida* $\forall x \in \mathbb{R}$ *(*$\sin(x)$ *és* x *radiants),*

4. $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, *vàlida* $\forall x \in \mathbb{R}$,

5. $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, *vàlida per* $|x| < 1$,

6. $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, *vàlida* $\forall x \in \mathbb{R}$,

7. $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, *vàlida* $\forall x \in \mathbb{R}$.

1.3 Factorització de polinomis

1.3.1 L'exponencial complexa. Arrels d'un nombre complex

Hem definit en la secció anterior el nombre e i igualment el valor e^r amb $r \in \mathbb{R}$ (a més per 1.2.101 $e^r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$), també hem vist en definir nombres complexos el valor $e^{ir} = cos(r) + isin(r)$ amb $r \in \mathbb{R}$, on aquesta era una notació en forma polar en la secció 1.1 (bé no és realment una notació, llegiu dins del parèntesi en l'observació 1.2.101.2).

Definició 1.3.1. *S'anomena funció exponencial complexa a la funció* $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*;* $z \mapsto e^z$*, que satisfà les tres propietats següents:*
(i) $r \mapsto e^r$ *si* $r \in \mathbb{R}$*(és l'exponencial real si* $z = r + 0i$*,* $r \in \mathbb{R}$ *)*
(ii) $i\theta \mapsto e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ *si* $z = 0 + i\theta$ *amb* $\theta \in \mathbb{R}$
(iii) Té la propietat que donats $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$*,*

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Fixem-nos que l'exponencial complexa del nombre complex $z = a + bi$ és definida per (utilitzant (i)+(ii)+(iii) anteriors):

$$e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a(\cos(b) + i\sin(b)) = e^a\cos(b) + ie^a\sin(b) \in \mathbb{C}.$$

Observació 1.3.2 (*). *Perquè s'anota per* e^z *on* e *és el nombre real definit en la secció anterior? Això bé de l'expressió de l'exponencial* e^x *en sèrie de potències en l'observació 1.2.101, si prenem la sèrie en nombres complexos la* x *acceptem que sigui complexos també té convergència la sèrie per tot nombre complex i s'obté l'anterior definició.*
Intenteu obtenir, substituint en l'expressió en sèrie de e^x *la* x *per* $i\theta$ *i sabent que* $i^{2+4k} = -1$ *i* $i^{4k} = 1$ *junt amb les expressions en sèrie del sinus i cosinus (de l'observació 1.2.101) obtenir la igualtat*

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)\star$$

Exemple 1.3.3. *Quin nombre complex és* $e^{2+\pi i}$*?*

Una resolució. Fixem-nos

$$e^{2+\pi i} = e^2 e^{\pi i} = e^2(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -e^2.$$

□

Exemple 1.3.4. *Quin nombre complex és l'exponencial del nombre complex* $2+3e^{2+\frac{\pi}{2}i}$*?*

Una resolució. Volem calcular $e^{2+3e^{2+\frac{\pi}{2}i}}$. Calculem primer el nombre complex $e^{2+\frac{\pi}{2}i}=e^2(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))=ie^2$, per tant

$$e^{2+3e^{2+\frac{\pi}{2}i}}=e^2e^{3e^2i}=e^2(\cos(3e^2)+i\sin(3e^2))=e^2\cos(3e^2)+ie^2\sin(3e^2).$$

$\square$

Propietats 1.3.5 (de l'exponencial complexa)**.**

1. *Les tres de la definició.*
2. $|e^z|=e^{Re(z)}$*,*
3. $|e^{z+w}|=|e^z||e^w|$ *del fet que* $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$*,*
4. $|e^{i\theta}|=1$ *si* $\theta\in\mathbb{R}$*,*
5. $z=re^{i\theta}=e^{\log(r)+i\theta}$ *on* $r>0$ *real i* $\theta\in\mathbb{R}$*,*
6. $e^{z_1}=e^{z_2}\Leftrightarrow\{\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)$ i $\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)=2\pi k$ amb k cert nombre enter$\}$
   $\Leftrightarrow\{z_1=z_2+i2\pi k$ per cert $k\in\mathbb{Z}\}$.
7. $z\in\mathbb{C}$. Per tot $k\in\mathbb{Z}$ considerem $z+ik2\pi$ (nombre complex diferent de z si $k\neq 0$) obtenim que
   $$e^z=e^{z+ik2\pi}.$$

Observació 1.3.6 (*)**.** *Una pregunta natural és si a* $\mathbb{C}$ *hi ha un logaritme de l'exponencial com passa en nombres reals. (La resposta és NO). De la propietat 7 de 1.3.5, obtenim que el logaritme no està determinat ja que podem tenir molts valors* $z,z+i2\pi,...$ *diferents que tenen la mateixa exponencial i si pensem com la seva propietat de ser log l'invers de l'exp a* $\mathbb{R}$ *obtenim* $z=log(e^z)=log(e^{z+i2\pi})=z+i2\pi$ *cosa impossible ja que no són iguals aquests dos nombres complexos.*
*(*** Com solucionar-ho? Restringint-nos en una regió del plà de* $\mathbb{C}$ *on sol pugui haver-hi un valor, determinació del logaritme (hi ha moltes determinacions del logaritme, i es parla llavors del logaritme); però no hi ha un logaritme a* $\mathbb{C}$ *global com hi és a* $\mathbb{R}$*).*

Exemple 1.3.7. *Resoleu l'equació* $e^z=i$*.*

Una resolució. Escrivim $i=e^{i\pi/2}$ aplicant les propietats 6 i 7 de 1.3.5, obtenim de $e^z=e^{i\pi/2}$ que,

$$z=\frac{\pi}{2}i+i2\pi k$$

amb $k\in\mathbb{Z}$ (és a dir tenim infinites solucions, una per cada enter). $\square$

Exemple 1.3.8. *Resoleu l'equació* $3e^{z+3}=i$*.*

Una resolució. Primer posem cada cantó de l'expressió com exponencial d'un nombre complex, d'on obtenim

$$3e^{z+3} = e^{log(3)+z+3} = e^{i\pi/2} = i,$$

usant 6 i 7 en 1.3.5 obtenim que

$$log(3) + z + 3 = i\pi/2 + i2\pi k$$

per tot $k \in \mathbb{Z}$, obtenim que

$$z = -3 - log(3) + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$$

amb $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Proposició 1.3.9 (Fórmula del producte a $\mathbb{C}$ en forma polar)**.** *Donats dos nombres complexos escrits en forma polar $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ i $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, (r_1, r_2 nombres reals positius, i $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$), llavors*

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

Observació 1.3.10. *Fixeu-vos que si $z = re^{i\theta} \neq 0$ nombre complex escrit en forma polar, llavors,*

$$z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}, \text{ i } \overline{z} = re^{-i\theta}.$$

Utilitzant aquesta fórmula de l'invers en forma polar també obtenim, si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ i $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ són dos nombres complexos escrits en forma polar no nuls,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

Fórmula 1.3.11 (de Moivre)**.** *Sigui $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ nombre complex escrit en forma polar, llavors*

$$z^n = r^n e^{in\theta},$$

és a dir,

$$(r\cos(\theta) + ir\sin(\theta))^n = r^n \cos(n\theta) + ir^n \sin(n\theta).$$

Exemple 1.3.12. *Calculeu* $(1+i)^{2004}$.

Una resolució. Escrivim primer $1+i$ en forma polar (exercici) i obteniu $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, aplicant la fórmula de Moivre obtenim,

$$(1+i)^{2004} = (\sqrt{2})^{2004} e^{i2004\pi/4} = 2^{1002} e^{i\pi} = -2^{1002}.$$

$\square$

Exemple 1.3.13. *Digueu-me les fórmules de* $\cos(\theta+\varphi)$ *i* $\sin(\theta+\varphi)$ *en funció del* $\sin(\theta)$,$\cos(\theta)$, $\sin(\varphi)$ *i* $\cos(\varphi)$.

Una resolució. Considereu la igualtat

$$(\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)) = e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi} = (\cos(\theta)+i\sin(\theta))(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$$

obtenim mirant les igualtats als extrems,

$$(\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)) =$$

$$\cos(\theta)\cos(\varphi)-\sin(\theta)\sin(\varphi)+i(\cos(\theta)\sin(\varphi)+\sin(\theta)\cos(\varphi))$$

igualant les parts reals i imaginària d'aquesta igualtat obtenim les fórmules demanades,

$$\cos(\theta+\varphi)=\cos(\theta)\cos(\varphi)-\sin(\theta)\sin(\varphi)$$

$$\sin(\theta+\varphi)=\cos(\theta)\sin(\varphi)+\sin(\theta)\cos(\varphi).$$

□

Exemple 1.3.14 (Arrels n-èssimes d'un nombres complex $z=re^{i\theta}$)**.**

Definició 1.3.15. *$w\in\mathbb{C}$ s'anomena arrel n-èssima ($n\in\mathbb{N}$) d'un nombre complex $z\neq 0$ si $w^n=z$.*

Anem a trobar la fórmula que ens permet trobar les arrels n-èssimes d'un nombre complex $z=re^{i\theta}$ (sabeu que a $\mathbb{R}$ per exemple les arrels 2-essimes=arrels quadrades d'un nombre real no zero n'hi ha dues si és un nombre real positiu i cap si és negatiu, a $\mathbb{C}$ donat un nombre $z\neq 0$ hi ha exactament n nombres complexos diferents que són arrels n-èssimes de z!).

Sigui $z=re^{i\theta}=e^{\log(r)+i\theta}\neq 0$ i busquem $w=se^{i\psi}$ complint $w^n=z$ escrivint-ho de la següent manera aquesta última igualtat,

$$e^{\log(r)+i\theta}=z=w^n=s^ne^{in\psi}=e^{\log(s^n)+in\psi},$$

utilitzant les propietats 6 i 7 de 1.3.5 obtenim que s'ha de complir

$$\begin{cases}\log(s^n)=\log(r)\\ n\psi=\theta+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\end{cases},$$

per tant obtenim que $r=s^n$ i com $s>0$ real i sol hi ha una arrel n-èssima positiva d'un nombre real (proposició 1.2.31), tenim $s=\sqrt[m]{r}$. En quan $\psi=\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi k}{n}$ i per tant les arrels n-essimes de $z=re^{i\theta}$ són,

$$\sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi k}{n})}, k\in\mathbb{Z},$$

com sabem que $e^{i\alpha}=e^{i(\alpha+2\pi k)}$ ($\alpha\in\mathbb{R}$) com nombres complexos, obtenim que a $\mathbb{C}$ de les arrels anteriors ens donen números complexos diferents per $k=0,...,n-1$, obtenint així n nombres complexos diferents que son les arrels n-èssimes de $z=re^{i\theta}$,

Fórmula 1.3.16 (arrels n-èssimes)**.** *Donat un nombre complex no-zero $z=re^{i\theta}$, i $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, tenim exactament n arrels n-èssimes diferents per z donades per,*

$$\sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi k}{n})},$$

amb $k=0,1,\ldots,n-1$.

Exemple 1.3.17. *Calculeu les arrels cúbiques de -2.*

Una resolució. Busquem w complint $w^3 = -2$. Escrivim -2 en forma polar, $-2 = 2e^{\pi i}$, llavors podem aplicar la fórmula anterior per dir que

$$w = \begin{cases} \sqrt[3]{2}e^{i\pi/3} = w_1 \\ \sqrt[3]{2}e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3})} = \sqrt[3]{2}e^{\pi i} = -\sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{2}e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3})} = \sqrt[3]{2}e^{-i\frac{\pi}{3}} = \overline{w_1} \end{cases}$$

□

Exemple 1.3.18. *Calculeu les arrels 6-èssimes de* $1+i$.

Una resolució. Escrivim primer $z = 1+i$ en forma polar (exercici), $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, podem aplicar la fórmula anterior per obtenir que les 6 arrels buscades són,

$$w = \begin{cases} \sqrt[12]{2}e^{i\pi/24} \\ \sqrt[12]{2}e^{i(\frac{\pi}{24}+\frac{2\pi}{6})} \\ \sqrt[12]{2}e^{i(\frac{\pi}{24}+\frac{4\pi}{6})} \\ \sqrt[12]{2}e^{i(\frac{\pi}{24}+\frac{6\pi}{6})} \\ \sqrt[12]{2}e^{i(\frac{\pi}{24}+\frac{8\pi}{6})} \\ \sqrt[12]{2}e^{i(\frac{\pi}{24}+\frac{10\pi}{6})} \end{cases}$$

□

Exemple 1.3.19. *Calculeu les arrels 6-essimes de* 2.

Una resolució. Escrivim primer $z = 2$ en forma polar (exercici), $z = 2e^{i0}$, podem aplicar la fórmula anterior per obtenir que les 6 arrels buscades són,

$$w = \begin{cases} \sqrt[6]{2}e^{i0} = \sqrt[6]{2} \\ \sqrt[6]{2}e^{i\frac{2\pi}{6}} = w_2 \\ \sqrt[6]{2}e^{i\frac{4\pi}{6}} = w_3 \\ \sqrt[6]{2}e^{i\frac{6\pi}{6}} = -\sqrt[6]{2} \\ \sqrt[6]{2}e^{i\frac{8\pi}{6}} = \overline{w_3} \\ \sqrt[6]{2}e^{i\frac{10\pi}{6}} = \overline{w_2} \end{cases}$$

□

Exemple 1.3.20. *Calculeu les arrels quadrades de* $1+2\sqrt{2}i$, *és a dir* $\pm\sqrt{1+2\sqrt{2}i}$.

Una resolució. Escrivim primer $z = 1+2\sqrt{2}i$ en forma polar, $z = 3e^{i\theta}$, i $\theta = \arctan(2\sqrt{2})$ i es troba en el primem quadrant, en la calculadora obtenim θ és aproximadament 1,23095941734 radiant i per tant les solucions aproximades són:

$$w = \begin{cases} \sqrt{3}e^{i\frac{1,23095941734}{2}} \\ \sqrt{3}e^{i\frac{1,23095941734}{2}+\pi i} \end{cases}$$

Podem trobar les arrels exactament mitjançant expressions algebraiques: arrels, quebrats,... ? Si, en aquest cas.
Fixem-nos que $\tan\theta = 2\sqrt{2}$ i de ser $1+2\sqrt{2}i = 3e^{i\theta}$ obtenim que $\cos\theta = \frac{1}{3}$ i $\sin(\theta) = 2\sqrt{2}/3$. Busquem arrels $\sqrt{3}e^{i\beta}$ on

$$(\sqrt{3}e^{i\beta})^2 = 3e^{i2\beta} = 3e^{i\theta},$$

hem de calcular β complint

$$\cos(2\beta) = \cos(\theta) = 1/3 \ i \ \sin(2\beta) = \sin(\theta) = 2\sqrt{2}/3,$$

restringim-nos a buscar la β del primer quadrant, i l'altra serà sumant-hi π a l'angle (que correspon a multiplicar el nombre complex pel número -1).
Utilitzem les fórmules de l'angle doble per intentar obtenir el $\cos(\beta)$ i $\sin(\beta)$ que és l'únic que necessitem per calcular-ne les arrels quadrades de $1+2\sqrt{2}i$, doncs obtenim

$$\cos(\beta)\sin(\beta) = \frac{\sin(\theta)}{2} = \sqrt{2}/3$$
$$\cos^2(\beta) - \sin^2(\beta) = \cos(\theta) = 1/3,$$

aillant a la primera obtenim $\sin(\beta) = \frac{\sqrt{2}}{3\cos(\beta)}$ i substituint a la segona igualtat obtenim

$$\cos^2(\beta) - \frac{2}{9\cos^2(\beta)} = 1/3,$$

escrivim $x = \cos^2(\beta)$ i la igualtat anterior correspon a resoldre l'equació de segon grau

$$x - \frac{2}{9x} = 1/3,$$

que té per solucions $\{\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\}$ prenent arrels quadrades i considerant que $\cos(\beta)$ és real i ens hem restringit que β fos el primer quadrant obtenim

$$\cos(\beta) = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

i per tant $\sin(\beta) = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, obtenim així que les dues solucions buscades (exactes!) són:

$$w = \begin{cases} \sqrt{3}(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) = \sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + i\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{2} + i, \\ \sqrt{3}(\cos(\beta+\pi) + i\sin(\beta+\pi)) = -\sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - i\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{2} - i \end{cases}$$

Observació: Resoleu aquest exemple imposant que es compleix $a^2 - b^2 + 2abi = (a+bi)^2 = 1 + 2\sqrt{2}i$ on $w = a + bi$ amb a, b incògnites reals. □

1.3.2 Factorització de polinomis a $\mathbb{R}[x]$ i a $\mathbb{C}[x]$

Definició 1.3.21. *Un polinomi a coeficients a K (K és un símbol per a "cos", per a nosaltres K vol dir en aquesta secció §1.3.2, $\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{R}$ ó bé $\mathbb{C}$), és una expressió de la forma,*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

amb $a_i \in K$. Es defineix el grau de $p(x)$ al j més gran on $a_j \neq 0$, i a_0 s'anomena el terme independent del polinomi. Diem que $p(x)$ és mònic si $a_n = 1$ amb $n = grau(p(x))$.

Definició 1.3.22. *Un zero o una arrel $\alpha \in K$ d'un polinomi $p(x)$, és un número α de K satisfent que $p(\alpha) = 0$.*

Exemple 1.3.23. *1. Troba les arrels del polinomi $ax^2 + bx + c$ a $\mathbb{C}$, amb $a \neq 0$, $(a, b, c \in \mathbb{C})$.*

Una resolució. Recordem aquí que tenim una fórmula que ens dóna les arrels dels polinomis de grau 2 donada per

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A $\mathbb{C}$ tindrem sempre dues solucions, recordeu que a $\mathbb{R}$ podia passar que no tingués solucions, per exemple $x^2 + 1$ no té arrels a $\mathbb{R}$. □

Observació 1.3.24. *És important saber el cos K on busquem les arrels d'un polinomi, .*

2. Troba les arrels a $\mathbb{R}$ de $x^6 - 1$. Troba les arrels a $\mathbb{C}$ del polinomi $x^6 - 1$.

Una resolució. Sabem que tenim dues arrels 6-enes de 1 a $\mathbb{R}$ que són $\{\pm 1\}$. Anem a buscar les arrels a $\mathbb{C}$, fixeu-vos que són tots els nombres complexos ξ, complint $\xi^6 = 1$, es dir busquem les arrels 6-enes de 1, per la fórmula 1.3.16 són,

$$\begin{cases} e^{i0} = 1 \\ e^{i\frac{2\pi}{6}} = w_2 \\ e^{i\frac{4\pi}{6}} = w_3 \\ e^{i\frac{6\pi}{6}} = -1 \\ e^{i\frac{8\pi}{6}} = \overline{w_3} \\ e^{i\frac{10\pi}{6}} = \overline{w_2} \end{cases}$$

□

Observació 1.3.25. *Heu vist que per a un polinomi de grau 2 tenim una fórmula per a trobar arrels i llavors trobar arrels d'aquests polinomis (=polinomis de grau 2) és trivial. Heu de conèixer que per polinomis de grau 3 i 4 també hi ha una fórmula, però per polinomis de grau ≥ 5 no existeixen fórmules generals i únicament certes equacions es poden trobar les arrels de manera precisa i utilitzant "trucos". Usualment en equacions de grau gran buscareu solucions aproximades via mètode Newton, i altres, però no trobeu la solució exacta (veureu aquests mètodes numèrics en cursos posteriors). En aquest curs busquem les solucions exactes i sol treballarem en polinomis que es poden calcular exactament (curs d'àlgebra).*

Exemple 1.3.26. *Calculeu les arrels de $x^n + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$.(Cas concret $x^3 + (\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$).*

Una resolució. Fixeu-vos que les arrels de $x^n + \alpha$ és trobar els $x \in \mathbb{C}$ que satisfan $x^n = -\alpha$, que son les arrels n-èssimes del nombre $-\alpha$, aplicant la fórmula 1.3.16 trobem les n-arrels a $\mathbb{C}$, en particular trobem n arrels del polinomi.
En el cas concret $x^3 + (\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$ resolem $x^3 = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = e^{-i\pi/3}$ aplicant la fórmula arrels 3-èssimes per a $e^{-i\pi/3}$ obtenim les arrels,

$$= \begin{cases} e^{-i\pi/9} \\ e^{i(-\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3})} \\ e^{i(-\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3})} \end{cases}$$

□

Exemple 1.3.27. *Calculeu les arrels a* $\mathbb{C}$ *del polinomi* $x^6 + x^3 + 1$.

Una resolució. Fem el "truco" dient-li $x^3 = t$ i transformem el polinomi $x^6 + x^3 + 1 = t^2 + t + 1$ aquest últim polinomi en t el podem resoldre utilitzant la fórmula de grau 2 de polinomis

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

tenim dues solucions, anem a calcular $x^3 = t$ amb els dos valors de t anteriors, usant com l'exemple anterior obtenim per $t = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi - i\pi/3} = e^{i2\pi/3}$ obtenim 3 arrels donades per

$$\begin{cases} e^{i2\pi/9} \\ e^{i(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3})} \\ e^{i(\frac{2\pi}{9}+\frac{4\pi}{3})} \end{cases}$$

i per $t = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i2\pi/3}$ obtenim 3 arrels més donades per,

$$\begin{cases} e^{-i2\pi/9} \\ e^{i(-\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3})} \\ e^{i(-\frac{2\pi}{9}+\frac{4\pi}{3})} \end{cases}$$

□

Observació 1.3.28. *Hem calculat arrels de polinomis i sempre ens donàvem menys que el grau. Hem calculat totes les arrels?*
Observem que com a molt, a coeficients en K*, hi ha tantes arrels en un polinomi com el grau del polinomi i per a* $K = \mathbb{C}$ *n'hi ha exactament tantes com el grau del polinomi (contant multiplicitat).*

Observació 1.3.29. *Donat un polinomi qualsevol, i com* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$*, si podem calcular les arrels a* $\mathbb{C}$*, mirant aquestes podem dir les arrels que té el polinomi a* $\mathbb{Q}$ *i a* $\mathbb{R}$ *exactament, per exemple hem calculat les (acceptem aquí que un polinomi de grau* n *té exactament* n *arrels a* $\mathbb{C}$*) 6 arrels a* $\mathbb{C}$ *de* $x^6 - 1$*, com hi ha sol dues que es troben en l'eix OX (la recta real dins* $\mathbb{C}$*) podem dir que sol hi ha dues reals, que són* $1, -1$ *a més com son racionals també podem dir que a* $\mathbb{Q}$ *tenim dues arrels i sol té aquestes el polinomi en* $\mathbb{Q}$.

Sabem de col.legi que en els polinomis tenim un algorisme de divisió, és a dir, donats dos polinomis podem dividir-los obtenint un polinomi quocient i un polinomi reste.

$$x^3 + 2x^2 + x + 3|\underline{x^2+1},$$

Diem que un polinomi $p(x)$ és divisible per $h(x)$ si el dividir-los el seu reste ens dóna zero, és a dir, existeix un polinomi $q(x)$ (quocient) on $p(x) = h(x)q(x)$ i dèiem que $h(x)$ era un divisor de $p(x)$.

Teorema 1.3.30 (divisibilitat per arrels)**.** *Sigui* $\alpha \in K$ *una arrel del polinomi* $p(x)$ *a coeficients en* K*, llavors* $(x-\alpha)$ *divideix el polinomi* $p(x)$*, és a dir existeix un polinomi* $q(x)$ *a coeficients en* K *de grau més petit que* $p(x)$ *(exactament de grau el grau de* $p(x)$*-1) complint,*

$$p(x) = (x-\alpha)q(x).$$

Recordeu que la regla de Ruffini us permet algoritmitzar aquesta divisió per factors $(x-\alpha)$.

Teorema 1.3.31 (fonamental de l'Àlgebra)**.** *Tot polinomi de grau $n \neq 0$ a coeficients a $\mathbb{C}$ té una arrel a $\mathbb{C}$.*

Tenim com a conseqüència el següent resultat a recordar,

Corol.lari 1.3.32. Factorització a $\mathbb{C}[x]$. *Donat un polinomi $p(x)$ de grau n a coeficients a $\mathbb{C}$ factoritza de la forma,*

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 = a_n(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)$$

amb $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ són les arrels del polinomi $p(x)$.

Observació 1.3.33. *Fixem-nos que l'anterior corol.lari ens afirma que a coeficients en $\mathbb{C}$, un polinomi té exactament n arrels.*

Demostració. [del corol.lari] Fem per inducció pel grau, per $n = 1$ és clar (expliciteu si no ho veieu).
Veiem el cas $k+1$, sigui $p(x)$ polinomi de grau $k+1$ pel teorema fonamental de l'àlgebra té una arrel, diem-la α_1 tenim per (1.3.30) que

$$p(x) = (x-\alpha_1)q(x)$$

ara $q(x)$ té grau k aplicant l'hipòtesi d'inducció a $q(x)$ tenim el resultat. □

Observació 1.3.34. *En l'anterior corol.lari 1.3.32 entre les arrels α_i, n'hi poden haver de repetides, és a dir pot ser que α_1 sigui igual a α_2. Quantes vegades es repeteix una arrel α en aquesta factorització?*

Definició 1.3.35. *Sigui α una arrel d'un polinomi $p(x)$, es defineix la multiplicitat de α, com el natural $k \in \mathbb{N}$ més gran que complint*

$$(x-\alpha)^k \text{ divideix } p(x),$$

(és a dir $(x-\alpha)^k$ divideix $p(x)$ i $(x-\alpha)^{k+1}$ no divideix $p(x)$, (hi ha reste)).

És a dir en un polinomi a coeficients en $\mathbb{C}$ hi ha tantes arrels com el grau però contant cada arrel tantes vegades com la seva multiplicitat.

Exemple 1.3.36. *Factoritzeu a $\mathbb{C}[x]$ el polinomi $3x^3+6$.*

Una resolució. Primer busquem les arrels del polinomi $3x^3+6$ (n'hem d'obtenir 3).
Primer es busquen els zeros, tenim $3x^3+6=0$ que és igual a $x^3=-2$, cal trobar concs les arrels 3-èssimes de $-2 = 2e^{i\pi}$. Aplicant la fórmula 1.3.16 de les arrels n-èssimes obtenim tres arrels del polinomi:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sqrt[3]{2}e^{i\pi/3} \\ \sqrt[3]{2}e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3})} = -\sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{2}e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3})} \end{array} \right. ,$$

per tant aplicant el corol.lari anterior obtenim que la factorització és

$$3x^3+6 = 3(x-\sqrt[3]{2}e^{i\pi/3})(x+\sqrt[3]{2})(x-\sqrt[3]{2}e^{i(5\frac{\pi}{3})}).$$

□

Exemple 1.3.37. *Factoritzeu a* $\mathbb{C}[x]$ *el polinomi* $(x^3+2)(x^2+1)^2$

Una resolució. Factoritzem factor a factor, fixeu-vos $3(x^3+2) = 3x^3+6$ i l'exemple anterior hem factoritzat, usant-la obtenim,

$$x^3+2 = (x-\sqrt[3]{2}e^{i\pi/3})(x+\sqrt[3]{2})(x-\sqrt[3]{2}e^{i(5\frac{\pi}{3})})$$

busquem ara les arrels de (x^2+1) són $\pm i$, obtenim que la factorització és $(x-i)(x+i)$, com està elevat al quadrat cada factor estarà elevat al quadrat, obtenim així que la factorització és:

$$(x-\sqrt[3]{2}e^{i\pi/3})(x+\sqrt[3]{2})(x-\sqrt[3]{2}e^{i(5\frac{\pi}{3})})(x-i)^2(x+i)^2.$$

□

Anem a estudiar la factorització a $\mathbb{R}[x]$ per a un polinomi a coeficients a $\mathbb{R}$, ja sabem trobar la factorització del polinomi a $\mathbb{C}[x]$, corol.lari 1.3.32.
Recordem el següent exercici,

Lema 1.3.38. *Sigui* $p(x)$ *un polinomi a coeficients reals, i* $\alpha \in \mathbb{C}$ *una arrel de* $p(x)$*. Llavors* $\overline{\alpha}$ *és també una arrel de* $p(x)$*.*

Demostració. Exercici 1 de la llista 5, curs 2002/03. Únicament cal observar les igualtats

$$p(\overline{\alpha}) = \overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0.$$

□

Fixem-nos que donat un polinomi $p(x)$ a coeficients a $\mathbb{R}$ de grau n, tenim n arrels a $\mathbb{C}$, si α és una arrel a $\mathbb{R}$ per (1.3.30) $p(x) = (x-\alpha)q(x)$ amb $q(x)$ a coeficients en $\mathbb{R}$. Si α una arrel de $p(x)$ és a $\mathbb{C}$ però no és real, podriem fer 1.3.30, però llavors $q(x)$ no té coeficients a $\mathbb{R}$ i nosaltres volem que tingui coeficients a $\mathbb{R}$ (per factoritzar-ho com a polinomis a coeficients a $\mathbb{R}$ anomenada igualment factorització a $\mathbb{R}[x]$), llavors usant el lema anterior sabem $\overline{\alpha}$ és arrel també de $p(x)$ i

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2$$

que és un polinomi a coeficients a $\mathbb{R}$, i de 1.3.30 obtenim que divideix $p(x)$, és a dir tenim

$$p(x) = (x^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2)q(x),$$

amb $q(x)$ a coeficients reals.

Teorema 1.3.39. Factorització d'un polinomi a $\mathbb{R}[x]$.
Sigui $p(x)$ *un polinomi a coeficients en* $\mathbb{R}$ *de grau* $n \geq 1$*. Siguin* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ *les* n *arrels del polinomi en* $\mathbb{C}$ *i ordenem-les de manera que* $\alpha_1, \ldots, \alpha_i \in \mathbb{R}$ *i* $\alpha_{i+1}, \overline{\alpha_{i+1}}, \ldots, \alpha_{i+k}, \overline{\alpha_{i+k}} \in \mathbb{C}$ *(i no en* $\mathbb{R}$*) (on* $i+2k=n$*). Llavors tenim la factorització a* $\mathbb{R}[x]$ *pel polinomi* $p(x)$ *de la forma següent,*

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 =$$

$$a_n(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_i)(x^2-2\mathrm{Re}(\alpha_{i+1})x+|\alpha_i|^2)\ldots(x^2-2\mathrm{Re}(\alpha_{i+k})x+|\alpha_{i+k}|^2).$$

Exemple 1.3.40. *Factoritzeu a* $\mathbb{R}[x]$ *el polinomi* $p(x) = x^3+8$*.*

Una resolució. Fixeu-vos que primer cal trobar les arrels a $\mathbb{C}$. Un cop trobades, separar les reals i les complexes i ajuntar de dos en dos les complexes (ajuntant l'arrel complexa i la seva conjugada), anem a fer-ho.
Busquem primer les arrels de x^3+8. Són,

$$\begin{cases} 2e^{i\pi/3} = w \\ 2e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3})} = -2 \\ 2e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3})} = \overline{w} \end{cases},$$

tenim que ordenant les arrels són $\{-2, w, \overline{w}\}$ i per tant la factorització és

$$x^3+8 = (x+2)(x^2 - 2\mathrm{Re}(w)x + |w|^2) =$$

$$(x+2)(x^2 - 4cos(\pi/3)x + 4) = (x+2)(x^2-2x+4).$$

□

Exemple 1.3.41. *Factoritza a* $\mathbb{R}[x]$ *el polinomi* $p(x) = x^6 - 1$.

Una resolució. Busquem primer les 6 arrels a $\mathbb{C}$ del polinomi $p(x)$ són,

$$\begin{cases} 1 \\ e^{i\pi/3} = w_1 \\ e^{i(\frac{2\pi}{3})} = w_2 \\ -1 \\ e^{i(\frac{4\pi}{3})} = \overline{w_2} \\ e^{i(\frac{5\pi}{3})} = \overline{w_1} \end{cases},$$

tenim que ordenant les arrels són $\{1, -1, w_1, \overline{w_1}, w_2, \overline{w_2}\}$ i per tant la factorització és

$$x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2 - 2\mathrm{Re}(w_1)x + |w_1|^2)(x^2 - 2\mathrm{Re}(w_2)x + |w_2|^2) =$$

$$(x-1)(x+1)(x^2 - 2cos(\pi/3)x + 1)(x^2 - 2cos(2\pi/3)x + 1).$$

□

Anem per a acabar a explicar les anteriors factoritzacions en un llenguatge més general (*).

Definició 1.3.42 (*). *Un polinomi a coeficients a* K *de grau* ≥ 1 *s'anomena irreductible o primer si els seus únics divisors són els polinomis de grau 0 o* $kp(x)$ *amb* $k \in K$.
Un polinomi $p(x)$ *s'anomena* K*-reductible si existeix* $q_1(x), q_2(x)$ *polinomis de grau estrictament més petit que* $p(x)$ *a coeficients en* K*, que satisfan la igualtat,*

$$p(x) = q_1(x)q_2(x).$$

Els polinomis irreductibles serien els mes "petits" que no els podem posar com a producte de dos, i el resultat de "factorització" ens afirma que tot polinomi s'expressa de manera única com a producte de polinomis irreductibles, aquest és l'anàleg per a polinomis del fet (que tots coneixeu de bàsica): tot nombre natural és producte de nombres primers i aquesta factorització és única (llevat d'ordre).

Exemple 1.3.43 (*). 1. *Els polinomis de grau 1 a $K[x]$ són K-irreductibles.*

2. *El polinomi $x^2 - 2$ és irreductible a $\mathbb{Q}[x]$, però és $\mathbb{R}$-reductible, és $\mathbb{C}$-reductible.*

3. *El polinomi $x^2 + 2$ és $\mathbb{Q}$-irreductible, $\mathbb{R}$-irreductible però és $\mathbb{C}$-reductible.*

4. *(***)El polinomi $x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ és $\mathbb{Q}$-irreductible, però és $\mathbb{R}$-reductible (tot i que no té arrels a $\mathbb{R}$).(Observeu si té arrels a K és K-reductible, no tenir arrels no ens diu res sobre irreductibilitat).*

Teorema 1.3.44 (*). **Factorització a $K[x]$**
Donat un polinomi $p(x)$ a coeficients en K no constant(té grau ≥ 1 aquest polinomi), llavors existeix una factorització,

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 = a_n(p_1(x) \ldots p_j(x)),$$

amb $p_j(x)$ polinomis mònics (recordeu definició 1.3.21) irreductibles a $K[x]$. A més aquesta descomposició en irreductibles és única llevat ordre dels p_j's. És dir donades dos factoritzacions en polinomis irreductibles,

$$p_1(x) \ldots p_j(x) = q_1(x) \ldots q_m(x)$$

amb p_i, q_i mònics irreductibles llavors $j = m$ i $\{p_i\} = \{q_l\}$.

Lema 1.3.45 (*). *Els polinomis irreductibles a $\mathbb{C}[x]$ són únicament els polinomis de grau 1.*

Corol.lari 1.3.46 (*). *S'obté el teorema de factorització d'un polinomi a coeficients a $\mathbb{C}[x]$ escrit anteriorment (1.3.32).*

Demostració. Ajuntar el lema 1.3.45 i el teorema 1.3.44. □

Lema 1.3.47 (*). *Els polinomis mònics irreductibles a coeficients en $\mathbb{R}$ són els de la forma:*

$$(x - a), \text{ amb } a \in \mathbb{R},$$

o bé $(x^2 + bx + c)$ $c, b \in \mathbb{R}$ complint $b^2 - 4c < 0$(es dir sense arrels en $\mathbb{R}$).

Corol.lari 1.3.48 (*). *Obtenim el teorema de factorització d'un polinomi a coeficients en $\mathbb{R}[x]$ escrit anteriorment (1.3.39).*

Demostració. Ajuntar el lema 1.3.47 i el teorema 1.3.44. □

Observació 1.3.49 (*). *Què succeeix amb $\mathbb{Q}[x]$? Bé, a coeficients a $\mathbb{Q}$ hi ha polinomis irreductibles de qualsevol grau i la factorització a coeficients a $\mathbb{Q}$ és molt més difícil de calcular-la explícitament.*

Bibliografia

[1] *L.Abellanos, A.Galindo*:Métodos de cálculo:teoria y 370 problemas resueltos. Mc Graw-Hill, 1990. Primera y segunda parte.

[2] *Apostol, T.M.*: Análisis matemático. Ed.Reverté 1988. Capítulos 1,2,4 i 8.

[3] *Avinyó, Elgueta, Perez-Casany, Rio, Sacristán*: Anàlisi matemàtica: problemes resolts i pràctiques amb l'ordinador. UPC. Primer capítol.

[4] *F.Bars, C.Infante,...*: Llistes de problemes d'Àlgebra Lineal per a Enginyeria Química. En trobeu còpia a:
http://mat.uab.es/~francesc/docencia2.html

[5] *Blank, Albert A.*:Problemas de cálculo y análisis matemático. Ed.Limusa 1971. Capítulo I.

[6] *B.P.Demidóvich*: 5000 Problemas de análisis matemático. (N'hi ha còpies a la biblioteca de Ciències-Enginyeries).

[7] *W.J.Kaczor, M.T.Nowak*: Problems in mathematical analysis: real numbers, sequences and series. American Mathematical Society, 2000-2001

[8] *Enric Nart*: Notes d'Àlgebra Lineal.
Materials de la UAB número 130.

[9] *Pestana, Domingo y otros*: Curso práctico de cálculo y precálculo. Ed. Ariel. Colecció: Ariel Ciencia, 2000.

[10] *Spivak, Michael*: Calculus. Ed. Reverté. Parte I:cap.1,2. Parte IV:cap 22,24.