LLIÇONS DE GEOMETRIA AFÍ

JOACHIM KOCK
Departament de Matemàtiques, UAB

Versió 2017-06-09

Aquestes *lliçons* cobreixen el material de la geometria afí corresponent a la primera meitat de l'assignatura Geometria Lineal del Grau en Matemàtiques de la UAB. Així els temes són *espais afins i afinitats, geometria afí de rectes, plans i altres varietats lineals, coordenades afins i equacions de varietats lineals i d'afinitats, classificació de les afinitats de la recta i del pla.*

Usualment[1] l'espai afí es defineix com un conjunt amb una acció simplement transitiva d'un espai vectorial V (és a dir, és un "V-torsor"). En aquestes *lliçons* prenem un altre punt de vista[2], definint els espais afins en termes de combinacions afins, i en deduïm l'espai vectorial V com l'espai de les translacions. Els mètodes vectorials tenen un paper d'eina important, però no pas de fonament. Aquest enfocament té uns quants avantatges conceptuals:

- És més geomètric: la formació de combinacions afins és una formalització natural de les construccions bàsiques de la geometria, com ara la recta determinada per dos punts, el centre de massa, o la formació de paral·lelograms. (La noció de V-torsor és cinemàtica més aviat que geomètrica.) Els vectors es *dedueixen* de la geometria intrínseca com a translacions, i així tenen una explicació per donar suport a la intuició.

- Físicament, és més natural: modelitza directament l'espai físic (mentre que la noció de V-torsor modelitza l'espai físic escollint primer un origen (d'on la noció d'espai vectorial) i després l'oblidant (la noció de torsor)).

- És més natural categòricament: les nocions de subespai afí i d'aplicació afí són evidents, i el "teorema fonamental" de la geometria afí esdevé una tautologia.[3]

- Emfatitza la diferència essencial entre espai afí i espai vectorial definint les nocions en paral·lel i no pas una subordinada a l'altra.

El preu a pagar és que hem d'establir que les translacions formin un espai vectorial. Aquest resultat requereix un cert nivell d'abstracció i pot representar un repte per als estudiants: objectes que són transformacions d'una estructura passen a ser considerats com elements d'una altra. Però ho fem poc a poc, amb confiança que vall la pena treballar una mica aquesta relació fonamental entre les dues categories centrals de l'assumpte.

[1] des de Weyl [8], 1918

[2] possiblement degut a Mac Lane i Birkhoff [5], 1967

[3] A més a més, si és permès un comentari avançat, la definició d'espai afí en termes de combinacions afins situa immediatament els espais afins com models d'una teoria de Lawvere, i molts dels resultats bàsics es poden reconèixer com casos particulars de resultats més abstractes i universals. Evidentment, el text no fa cap menció de tals conceptes i punts de vista avançats, però en alguns llocs, l'exposició, sempre elemental, se n'ha secretament guiat.

Índex

1 Introducció 3

2 Espais afins i aplicacions afins 6

3 Rectes 10

4 Més geometria de les combinacions afins 19

5 Subespais afins (varietats lineals) 26

6 Independència afí i bases 31

7 Parametritzacions i equacions de subespais 38

8 Raó simple; teoremes de Tales, de Menelao i de Ceva 45

9 Aplicacions afins 50

10 Translacions i vectors 54

11 Independència afí i independència lineal 60

12 Subespais afins i direcció 62

13 Intersecció, suma i les fórmules de Grassmann 67

14 Linealització: diferencials i coordenades cartesianes 71

15 Afinitats: alguns exemples i trets característics 78

16 Classificació de les afinitats del pla 89

A Apèndix: Axiomàtica de les combinacions afins 97

Bibliografia 103

Índex alfabètic 104

Agraïments. Vull agrair a Anders Kock, Dídac Martínez, Eduardo Gallego, Josep Elgueta, Manuel Castellet i Miriam Steinherr els seus comentaris, ajut i encoratjaments.

1 Introducció

Els espais afins, els objectes principals de la geometria afí, es poden veure com "espais vectorials sense origen especificat". Igual als espais vectorials, són objectes d'un aspecte molt lineal, i les figures que protagonitzen la geometria afí són rectes, plans i configuracions d'aquests. Els espais afins són de naturalesa més geomètric que els espais vectorials, i són una noció més propera a l'espai físic on vivim, mentre que els espais vectorials representen una algebrització de la geometria. La interacció entre la geometria i l'àlgebra lineal és un tema clau de la teoria.

Com que els espais afins no tenen origen, admeten més simetries que els espais vectorials: a més de les aplicacions lineals hi ha les translacions, que són un concepte clau de la geometria afí. Heus d'allí també la importància de la noció de paral·lelisme. En canvi no hi tenim nocions com angle, perpendicularitat o distància entre dos punts. (En particular, triangle és triangle — no en podem distingir triangles rectangles, isòsceles, etc.) Tenim només una noció de distància molt rudimentària: podem parlar de distàncies relatives (proporcions) dins de rectes paral·leles.

Abans de començar amb les definicions formals, vegem alguns exemples, per donar una idea intuïtiva de la noció d'espai afí i il·lustrar com apareixen naturalment.

1.1 Exemple: el temps. El temps el modelitzem habitualment com una recta real. Però no és naturalment un espai vectorial: no té sentit sumar "14:28 del 17/09/1967" amb "22:30 del 19/09/1969". Tampoc té sentit multiplicar per 5 un instant donat. En un sentit, els instants no representen quantitats de temps. Això no és pas una mera mancança del calendari gregorià; els ordinadors mesuren el temps en segons transcorreguts des d'algun instant de base escollit com a zero, típicament la mitjanit (UTC) del 01/01/1970 (convenció de unix) o del 01/01/1601 (convenció de Windows). Per exemple, segons la primera convenció, la mitjanit del 24/12/2009 es representa per 1261699200. Però encara no dóna molt de sentit a l'addició de dos instants — el resultat dependria de la convenció, i per tant no seria una operació natural del temps.

Sí que podem fer algunes altres operacions, com la diferència entre dos instants (la quantitat de temps transcorregut entre els dos instants), o l'instant mitjà de dos instants. Una altra cosa que té sentit és la translació: sempre té sentit dir "5 minuts abans", i sempre podem canviar de referència, com ho fem per exemple quan passem a l'horari d'estiu. Aquestes operacions les podem fer amb *time stamps* com 1031123784, i el resultat no depèn de l'escull de "zero".

Així doncs, hem argumentat que el temps és més aviat un espai afí que un espai vectorial. Observem també que les translacions de temps sí que les podem sumar i que hi ha una translació zero!

1.2 Energia. En mecànica newtoniana, només podem mesurar diferències d'energia, no pas les energies mateixes. Podem sumar qualsevol nombre real a la definició d'energia sense modificar el contingut físic. Així doncs, no té molt de sentit demanar quina és l'energia d'un sistema — podem respondre només després d'escollir alguna convenció arbitrària del què compta com "energia zero". Allò que té més sentit és parlar de diferències entre l'energia d'un sistema en un estat i l'energia d'aquest sistema en un altre estat — això té sentit independentment de la convenció d'origen.

Afirmem doncs que les energies d'un sistema físic formen una recta afí.

1.3 Exemple: l'espai físic. Habitualment modelitzem l'espai físic com $\mathbb{R}^3$, però no és naturalment un espai vectorial! Quan identifiquem una posició amb algun vector de coordenades, com ara $(1, 0, -2)$, ho fem relativament a algun origen escollit artificialment. No hi ha origen natural — seria el centre de la terra? o l'encreuament de les autopistes C-58 i AP-7? Quina seria la suma d'aquests dos punts? No té sentit, o dependria de l'origen escollit. No obstant això, altres operacions tenen sentit independentment de qualsevol origen triat, per exemple calcular el centre de massa de algun objecte, o la intersecció de dues rectes.

Afirmem que l'espai físic on vivim és un espai afí, no pas naturalment un espai vectorial.

1.4 Exemple: primitives de funcions. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció integrable, i sigui $\mathbb{A}$ l'espai de les primitives de f. Sabem que si F és una primitiva de f, llavors $F + c$ també ho és, per a qualsevol constant $c \in \mathbb{R}$, i que tota primitiva s'obté així. (Però la suma de dues primitives no és una primitiva.) Els dos exemples anteriors estan intimament relacionats amb aquest exemple: l'energia és una integral de força sobre distància, i les posicions són primitives de les velocitats.

1.5 Exemple fonamental: solucions de sistemes lineals. Sigui $\phi : V \to W$ una aplicació lineal entre espais vectorials, i sigui $\vec{b} \in W$ un vector. Llavors el conjunt

$$\mathbb{A} := \phi^{-1}(\vec{b}) = \{\vec{v} \in V \mid \phi(\vec{v}) = \vec{b}\}$$

és naturalment un espai afí, com ho veurem de seguida — n'és en un sentit l'exemple fonamental. Sabem que si $\vec{b} \neq \vec{0}$, la suma de dues solucions no és una solució. I si multipliquem una solució per un escalar $\lambda \neq 1$, el resultat tampoc és solució. Però, donades dues solucions, llur mitjà és una solució. També podem parlar de diferències de solucions, però el resultat no és pas una solució del sistema original, sinó una solució del sistema homogeni associat, que és un espai vectorial:

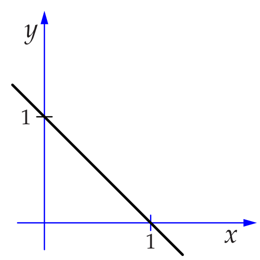
$$\mathrm{Ker}(\phi) = \{\vec{v} \in V \mid \phi(\vec{v}) = \vec{0}\}.$$

També podem fer translacions: la suma d'un punt de $\mathbb{A}$ i un vector de $\mathrm{Ker}(\phi)$ és novament un punt de $\mathbb{A}$.

Un exemple molt concret:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto x + y. \end{aligned}$$

Llavors $\phi^{-1}(1)$ és la recta



És un espai afí, però no pas naturalment un espai vectorial.

En conclusió, afirmem que conjunts de solucions d'equacions no homogènies són espais afins. (L'exemple anterior és un subexemple, on V és l'espai vectorial de totes les funcions reals diferenciables, W és l'espai de totes les funcions integrables, i $\phi : V \to W$ és diferenciació. Sigui $\vec{b}$ la funció fixada f. Llavors, l'espai de les anti-derivades de f és l'espai $\phi^{-1}(f)$. És un espai afí per l'espai vectorial de totes les primitives de la funció 0, és a dir, les funcions constants.)

1.6 Estructura de l'espai afí: geometria versus cinemàtica. Amb els exemples anteriors ens podem preguntar: quina estructura té l'espai afí, si és diferent de la noció d'espai vectorial? Hi ha dos punts de vista.

Un és el purament geomètric: formalitzem la idea de les operacions geomètriques que es poden fer amb punts i altres objectes geomètrics que són independents pel que fa a la referència, i en particular independents de qualsevol noció d'origen. Exemples fonamentals de tals operacions són

- formar la recta determinada per dos punts,
- formar el punt mitjà de dos punts, $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$,
- formar el centre de masses d'uns quants punts,
- formar el paral·lelogram generat per tres punts.

Són exemples de la noció de *combinació afí* la qual prenem com a noció bàsica; per tant:

$$\boxed{\text{un espai afí és un conjunt on es poden fer combinacions afins}}$$

L'altre punt de vista és el cinemàtic on tenim no tan sols punts sinó també vectors. Els punts representen posicions, els vectors representen velocitats o forces: on un punt P representa la posició d'una partícula, pensem un vector $\vec{v}$ com una força que actua sobre la partícula. Exemples de tals operacions són

- Donats un punt P i un vector $\vec{v}$, podem formar el punt $P + \vec{v}$. Si pensem P com la posició d'una partícula, i $\vec{v}$ una velocitat, llavors $P + \vec{v}$ és la posició de la partícula després d'una unitat de temps.
- Donats dos punts podem calcular-ne la diferència, que serà un vector. És l'operació recíproca: calculem la velocitat d'un moviment que porta la partícula d'una posició a l'altra.

Així doncs, des del punt de vista cinemàtic:

$$\boxed{\text{un espai afí és un conjunt on actua un espai vectorial}}$$

Els dos punts de vista són essencials.

2 Espais afins i aplicacions afins

2.1 CONVENCIÓ GLOBAL. Treballem sempre sobre $\mathbb{R}$, el cos dels nombres reals. Així, tot espai vectorial, i tot espai afí, seran sobre $\mathbb{R}$.

2.2 Espais vectorials i aplicacions lineals. Recordeu que un espai vectorial és un conjunt V on es poden fer combinacions lineals: donats vectors $\vec{v}_i \in V$ i escalars $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ($i = 0, \ldots, n$), podem formar el vector

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \vec{v}_i.$$

Una aplicació lineal és una aplicació f entre espais vectorials que respecta combinacions lineals. Vol dir que

$$f(\sum \lambda_i \vec{v}_i) = \sum \lambda_i f(\vec{v}_i).$$

2.3 Espais afins i aplicacions afins: definicions. Un *espai afí* és un conjunt $\mathbb{A}$ on s'hi poden fer *combinacions afins*: són combinacions lineals

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i$$

on $P_i \in \mathbb{A}$ i $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$ — amb la restricció que

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1.$$

Veurem que les combinacions afins formalitzen construccions geomètriques amb rectes.

Tals expressions estan subjectes a les relacions habituals de les combinacions lineals (les regles de distributivitat): l'ordre dels termes no importa; si apareix un terme amb coeficient 0 el podem eliminar de la suma; si un terme apareix dues vegades, podem agrupar els termes en una sola ocurrència sumant els coeficients: $\ldots + aP + bP + \ldots = \ldots + (a+b)P + \ldots$; i finalment, $1P = P$. (Un tractament més formal de les regles es troba a l'apèndix.)

Anomenem de *punts* els elements d'un espai afí.

Un *subespai afí* és un subconjunt $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ estable per combinacions afins. Això vol dir que si $P_0, \ldots, P_k$ pertanyen a $\mathbb{B}$, llavors $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i P_i$ també pertany a $\mathbb{B}$, sempre i quan $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$.

Una *aplicació afí* és una aplicació f que respecta combinacions afins. Vol dir que

$$f(\sum \alpha_i P_i) = \sum \alpha_i f(P_i),$$

sempre que $\sum \alpha_i = 1$. Anomenem *afinitat* a una aplicació afí d'un espai en ell mateix. (Advertència: altres autors utilitzen "afinitat" com a sinònim d'"aplicació afí", i a vegades és implícit que sigui a més invertible.)

Dedicarem lliçons senceres a les nocions de subespai i d'aplicació afí, i en veurem molts exemples. De moment observem només que són nocions molt naturals.

2.4 Exemple. El conjunt buit és un espai afí.

2.5 Exemple. Qualsevol espai vectorial es pot considerar també com un espai afí. Simplement oblidem totes les combinacions lineals que no tinguin suma de coeficients igual a 1.

Veurem més endavant que tot espai afí no buit es pot dotar d'estructura d'espai vectorial, i això serà crucial per a fer càlculs. No obstant això, aquesta estructura típicament no apareix de manera natural, com ho il·lustren els exemples de la introducció. Analitzem l'exemple clau més detalladament:

2.6 Exemple clau: solucions de sistemes d'equacions lineals. Considerem un sistema de n equacions lineals en k incògnites $x_1, \ldots, x_k$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nk}x_k & = & b_n \end{array} \right.$$

Sabem que si algun $b_i \neq 0$ (és un sistema no homogeni) llavors l'espai de les solucions no és un espai vectorial. Afirmem que és un espai afí. La verificació és més fàcil en una situació més abstracte, per disminuir la quantitat d'índexos. Escrivim el sistema de forma matricial:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

on $A = (a_{ij})$ és la matriu $n \times k$ dels coeficients, $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$ és el vector columna dels x_j, i $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ el vector columna dels termes constants. L'espai de les solucions és

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^k \mid A\vec{x} = \vec{b}\}.$$

Interpretem la matriu com una aplicació lineal

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^k & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \vec{x} & \longmapsto & A\vec{x}. \end{array}$$

Per tant, l'espai de les solucions és $\mathbb{A} := f^{-1}(\vec{b})$, i volem establir que aquest espai és un espai afí. Siguin $\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_m$ elements de $\mathbb{A}$ (és a dir, sabem $f(\vec{v}_i) = \vec{b}$), i siguin $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ nombres reals amb $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$. Volem establir que $\sum_{i=0}^m \alpha_i \vec{v}_i$ pertany a $\mathbb{A}$, és a dir, que $f(\sum \alpha_i \vec{v}_i) = \vec{b}$. Ho podem calcular directament, utilitzant la linealitat de f i les definicions:

$$\begin{aligned} f(\sum \alpha_i \vec{v}_i) &= \sum \alpha_i f(\vec{v}_i) \\ &= \sum \alpha_i \vec{b} \\ &= (\sum \alpha_i) \vec{b}. \end{aligned}$$

Aquest últim vector $(\sum \alpha_i)\vec{b}$ és igual a $\vec{b}$ com volíem si i només si $\sum \alpha_i = 1$. Recordem aquest resultat com un lema:

2.7 Lema. *Sigui $f : V \to W$ una aplicació lineal entre espais vectorials, i sigui $\mathbb{A} = f^{-1}(\vec{b})$ per algun vector $\vec{b} \neq \vec{0}$ de W. Aleshores, donats $\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{A}$ tenim*

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \vec{v}_i \in \mathbb{A} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1.$$

En particular, $\mathbb{A}$ és un espai afí. □

2.8 Sub-exemple: l'espai afí estàndard. El subconjunt

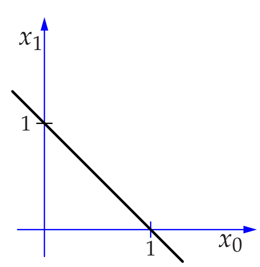
$$\mathrm{Aff}(n+1) := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 + \cdots + x_n = 1\}$$

és un espai afí, perquè es pot realitzar com $S^{-1}(1)$ per l'aplicació lineal

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_0, \ldots, x_n) &\longmapsto x_0 + \cdots + x_n. \end{aligned}$$

S'anomena l'*espai afí estàndard* de dimensió n. És important perquè és l'espai dels coeficients permessos en fer combinacions afins $(n+1)$-àries!

En el cas $n = 2$ tenim el dibuix



2.9 Observació. Pel lema 2.7 ja sabem que per a $\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_k \in \mathrm{Aff}(n+1)$, tenim

$$\sum \lambda_i \vec{v}_i \in \mathrm{Aff}(n+1) \overset{\text{per def.}}{\Leftrightarrow} S(\sum \lambda_i \vec{v}_i) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum \lambda_i = 1.$$

Serà útil saber també que

$$S(\sum \lambda_i \vec{v}_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum \lambda_i = 0,$$

com ho resulta directament de la linealitat de S.

2.10 Notació. A partir d'ara fem servir de preferència la lletra α per als coeficients de les combinacions afins, com ara $\sum_i \alpha_i P_i$ amb $\sum_i \alpha_i = 1$. Fem servir la lletra λ per als coeficients de les combinacions lineals o per a combinacions que encara no sabem si satisfan la condició $\sum_i \lambda_i = 1$.

3 Rectes

Especialment important és el cas de combinacions afins de dos punts:

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1, \qquad \text{amb } \alpha_0 + \alpha_1 = 1.$$

(Aquí estem treballant en qualsevol espai afí $\mathbb{A}$: podria ser el pla $\mathbb{R}^2$, o $\mathbb{R}^8$, o qualsevol espai afí que contingui dos punts.)

Moltes vegades és pràctic observar que com que $\alpha_0 = 1 - \alpha_1$, el paràmetre α_0 no és estrictament necessari. Per tant, podem escriure sempre les combinacions afins de dos punts de la forma

$$(1-t)P_0 + tP_1, \qquad \text{amb } t \in \mathbb{R}.$$

3.1 Exemple. Com que $\mathbb{R}$ és un espai vectorial, es pot considerar també com un espai afí. Siguin $x \neq y$ dos punts de $\mathbb{R}$ (és a dir, dos nombres reals). Llavors tot punt $z \in \mathbb{R}$ s'escriu, de manera única, com a combinació afí de x i y. En efecte, l'equació

$$z = (1-t)x + ty$$

que exhibeix z com a combinació afí de x i y és equivalent a l'equació

$$t = \frac{z-x}{y-x},$$

que determina t únicament en funció de x, y, z.

3.2 Rectes. La *recta* definida per dos punts $P_0 \neq P_1$ d'un espai afí $\mathbb{A}$ és el conjunt de totes les combinacions afins de P_0 i P_1:

$$\overline{P_0P_1} := \{\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 \mid \alpha_0 + \alpha_1 = 1\}.$$

Si posem $t = \alpha_1$ (i per tant $\alpha_0 = 1 - t$), llavors els punts de la recta $\overline{P_0P_1}$ definida per P_0 i P_1 són de la forma

$$(1-t)P_0 + tP_1.$$

La recta és el nostre primer exemple d'un subespai afí (de l'espai ambient $\mathbb{A}$):

3.3 Proposició. *La recta $\mathbb{L} = \overline{P_0P_1}$ generada per dos punts és un subespai afí. És a dir, si $Q_0, \ldots, Q_k \in \mathbb{L}$ i si $\sum \alpha_j = 1$, aleshores també $\sum \alpha_j Q_j \in \mathbb{L}$.*

Demostració. Si $Q_j \in \mathbb{L}$, llavors es pot escriure com $Q_j = (1-t_j)P_0 + t_j P_1$, per algun $t_j \in \mathbb{R}$. Ara calculem a $\mathbb{A}$:

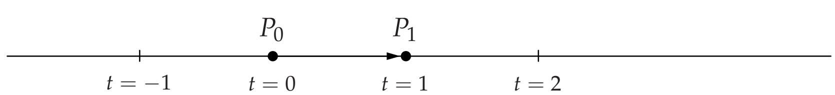
$$\begin{aligned} \sum \alpha_j Q_j &= \sum \alpha_j \big((1-t_j)P_0 + t_j P_1\big) \\ &= \big(\sum \alpha_j - \sum \alpha_j t_j\big)P_0 + \sum \alpha_j t_j P_1 \\ &= \big(1 - \sum \alpha_j t_j\big)P_0 + \big(\sum \alpha_j t_j\big)P_1 \end{aligned}$$

mostrant que és una combinació afí de P_0 i P_1, i per tant pertany a $\mathbb{L}$. $\square$

I ara veurem el nostre primer exemple d'una aplicació afí. Ja hem vist que $\mathbb{R}$ és un espai afí. Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{L} = \overline{P_0P_1} \\ t &\longmapsto (1-t)P_0 + tP_1. \end{aligned}$$

Al valor $t = 0$ li correspon el punt P_0, i al valor $t = 1$ li correspon P_1:



Diem que és una parametrització de la recta $\mathbb{L}$.

3.4 Proposició. *Amb la notació anterior, l'aplicació*

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{L} \\ t &\longmapsto (1-t)P_0 + tP_1 \end{aligned}$$

és una aplicació afí.

Demostració. Suposem $t = \sum \alpha_i x_i$, on els α_i són nombres reals amb $\sum \alpha_i = 1$, i on els x_i són punts de $\mathbb{R}$ (per tant també nombres reals). Volem establir que $\gamma(t) = \sum \alpha_i \gamma(x_i)$. Calculem

$$\begin{aligned}
\sum \alpha_i \gamma(x_i) &= \sum \alpha_i \big((1-x_i)P_0 + x_i P_1\big) \\
&= \sum \alpha_i P_0 - \sum \alpha_i x_i P_0 + \sum \alpha_i x_i P_1 \\
&= P_0 - tP_0 + tP_1 \\
&= (1-t)P_0 + tP_1 \\
&= \gamma(t).
\end{aligned}$$

□

3.5 Proposició. *L'aplicació γ és bijectiva si $P_0 \neq P_1$.*

Demostració. És exhaustiva per construcció. Per veure que γ és injectiva, suposem que $x \neq y \in \mathbb{R}$ tenen la mateixa imatge. Ara bé, sabem per l'exemple 3.1 que tot punt de $\mathbb{R}$ és combinació afí de x i y, i com que γ respecta combinacions afins, deduïm que tot $\mathbb{R}$ té la mateixa imatge. Però això és una contradicció: per construcció tenim $\gamma(0) = P_0 \neq P_1 = \gamma(1)$. □

3.6 Corol·lari. *Tot punt de $\mathbb{L} = \overline{P_0 P_1}$ s'escriu de manera* única *com a combinació afí de P_0 i P_1.*

3.7 Proposició. *L'aplicació inversa,*

$$\begin{aligned}
\gamma^{-1} : \mathbb{L} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
P_0 &\longmapsto 0 \\
P_1 &\longmapsto 1 \\
(1-t)P_0 + tP_1 &\longmapsto t
\end{aligned}$$

és una aplicació afí.

Demostració. L'aplicació preserva combinacions afins de P_0 i P_1 per construcció. Veure que preserva combinacions afins més generals és una mica de ioga de tipus "combinacions afins de combinacions afins", com en les demostracions de les proposicions anteriors. □

Per tant, hem demostrat que qualsevol recta és isomorfa (com a espai afí, és a dir hi ha una aplicació afí invertible) a $\mathbb{R}$. Aquest fet és molt important: ens permet transferir problemes geomètrics d'una recta afí abstracta a la recta específica $\mathbb{R}$, on podem fer càlculs algebraics, gaudint del fet que $\mathbb{R}$ és un cos. Si

$$Q = (1-t)P_0 + tP_1, \qquad t \in \mathbb{R},$$

pensem el paràmetre t com una coordenada de Q, relativament als punts de referència P_0 i P_1. La proposició ens diu que t és únic, donats P_0, P_1, i Q.

3.8 Raó simple — "distància relativa". La coordenada t de la recta $\mathbb{L} = \overline{P_0P_1}$ ens dóna una noció rudimentària de "distància relativa" que té sentit dins d'una recta (però no pas en tot l'espai): ens permet especificar la "distància" de P_0 a Q relativament a la "distància" de P_0 a P_1. Aquest nombre tradicionalment s'anomena *raó simple* de P_0, P_1 i Q; la denotem $\rho(P_0, P_1; Q)$. Així,

$$\rho(P_0, P_1; Q) = t \quad \Leftrightarrow \quad Q = (1-t)P_0 + tP_1.$$

En altres paraules informals: "Si escollim el segment de P_0 a P_1 com a 'metre', llavors la distància de P_0 a Q és de t 'metres'."

Tornarem a estudiar la raó simple més detalladament en la lliçó 8. De moment l'esmentem transeüntment, per a posar de manifest la utilitat de disposar de la parametrització de la recta.

3.9 Exercici. *Sigui $Q = (1-t)P_0 + tP_1$. Si $t \neq 0$ (és a dir $Q \neq P_0$), llavors P_1 és combinació afí de Q i P_0:*

$$P_1 = \tfrac{1}{t}Q + \tfrac{t-1}{t}P_0.$$

Si $t \neq 1$ (és a dir $Q \neq P_1$), llavors P_0 és combinació afí de Q i P_1:

$$P_0 = \tfrac{1}{1-t}Q + \tfrac{t}{1-t}P_1.$$

És temptador argumentar així (per a la primera asserció): "dividim la combinació original per t:

$$\tfrac{1}{t}Q = \tfrac{1-t}{t}P_0 + P_1$$

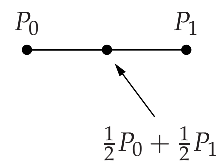
i passem el terme $\frac{1-t}{t}P_0$ a l'altre costat de l'equació per arribar a la conclusió desitjada." Però aquesta manipulació diu bestieses! No té sentit dividir una combinació afí per un nombre perquè el resultat involucra combinacions on els coeficients no tenen suma igual a 1. Això no obstant, la conclusió és correcta, com es pot verificar directament. Més endavant explicarem aquest fenomen mitjançant el càlcul vectorial.

3.10 Segments. La noció de segment d'una recta, que ara definim, és molt pràctica per formular moltes construccions, però no és una noció fonamental. (Per exemple, no té sentit sobre cossos no ordenats com $\mathbb{C}$ o els cossos finits.) Per definició, el *segment* entre P_0 i P_1 és el subconjunt de la recta definida per P_0 i P_1 format pels punts $(1-t)P_0 + tP_1$ amb $0 \le t \le 1$.

3.11 El punt mitjà d'un segment (o de dos punts). El *punt mitjà* de dos punts P_0 i P_1 és per definició la combinació afí

$$\tfrac{1}{2}P_0 + \tfrac{1}{2}P_1.$$

És el punt que divideix el segment P_0P_1 en dues parts iguals.

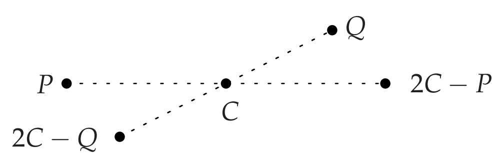


Per justificar el dibuix, fem referència a la recta $\mathbb{R}$, que sabem isomorfa a la recta en qüestió: el punt P_0 correspon a $t = 0$, el punt P_1 correspon a $t = 1$, i el punt mig $\frac{1}{2}P_0 + \frac{1}{2}P_1$ correspon a $t = \frac{1}{2}$, que clarament és el punt mig dels nombres reals 0 i 1.

3.12 Reflexió central. Sigui C un punt. La reflexió amb centre C és l'aplicació afí

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ P & \longmapsto & 2C - P. \end{array}$$

(És fàcil veure que és una aplicació afí.) Aquest és el dibuix:



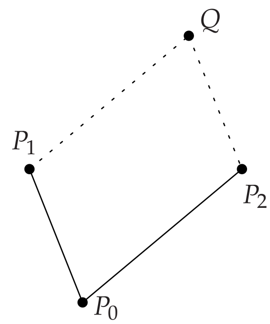
Exercici: justifiqueu la interpretació demostrant que C és el punt mig de P i $2C - P$.

Paral·lelograms i translacions

3.13 Paral·lelograms. Donats tres punts P_0, P_1, P_2, podem formar el punt

$$Q = P_1 - P_0 + P_2.$$

És una construcció fonamental: és el quart punt del paral·lelogram generat pels dos segments P_0P_1 i P_0P_2:

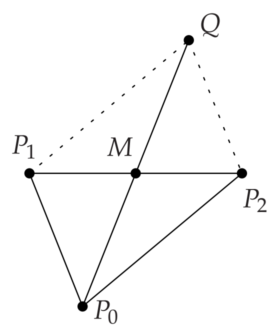


Per a justificar el dibuix, construïm el punt Q geomètricament. És una combinació afí de tres punts; la podem calcular en dos passos. Primer construïm el punt mitjà de P_1 i P_2: és el punt

$$M = \tfrac{1}{2}P_1 + \tfrac{1}{2}P_2.$$

Després calculem la reflexió central de P_0 respecte a M:

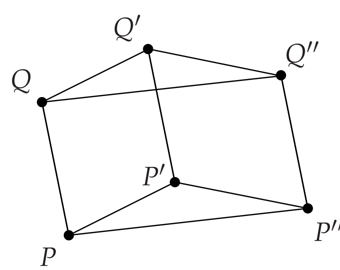
$$Q = 2M - P_0 = 2(\tfrac{1}{2}P_1 + \tfrac{1}{2}P_2) - P_0 = P_1 + P_2 - P_0.$$



3.14 Exercici. En la situació de 3.13, tenim també

$$\begin{aligned} P_0 &= P_1 - Q + P_2 \\ P_1 &= Q - P_2 + P_0 \\ P_2 &= P_0 - P_1 + Q. \end{aligned}$$

3.15 Exercici. Si P, Q, P', Q' formen un paral·lelogram, i si P', Q', P'', Q'' formen un paral·lelogram, tal com indicat al dibuix

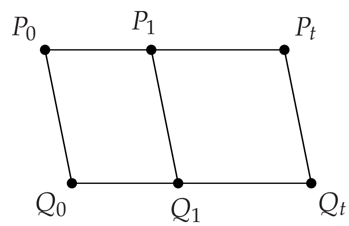


llavors P, Q, P'', Q'' també formen un paral·lelogram. (És un càlcul directe.)

3.16 Exercici. Donat un paral·lelogram format per P_0, P_1, Q_0, Q_1 tal que $Q_1 = P_1 - P_0 + Q_0$, per a $t \in \mathbb{R}$ fixat definim punts

$$P_t := (1-t)P_0 + tP_1$$
$$Q_t := (1-t)Q_0 + tQ_1.$$

Demostreu que P_0, P_t, Q_0, Q_t també formen un paral·lelogram (és a dir $Q_t = P_t - P_0 + Q_0$).



(És una verificació directa.)

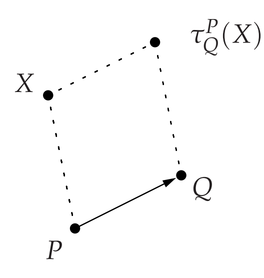
Recordeu que una aplicació f entre dos espais afins s'anomena *aplicació afí* si respecta combinacions afins. Vol dir que $f(\sum \alpha_i P_i) = \sum \alpha_i f(P_i)$ (sempre que $\sum \alpha_i = 1$). Anomenem *afinitat* les aplicacions afins d'un espai afí en ell mateix.

3.17 Translacions. Dos punts P i Q de $\mathbb{A}$ defineixen una aplicació

$$\begin{aligned} \tau_Q^P : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ X &\longmapsto X - P + Q \end{aligned}$$

que s'anomena *translació en la direcció de P a Q*.

Ja hem vist que $X - P + Q$ completa el paral·lelogram:



justificant la terminologia.

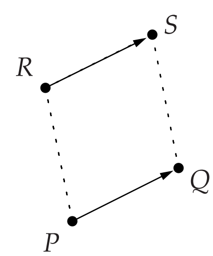
És fàcil veure que $\tau_Q^P : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ és una afinitat: per a una combinació afi $\sum \alpha_i X_i$ tenim

$$\begin{aligned}
\tau_Q^P(\sum \alpha_i X_i) &= \sum \alpha_i X_i - P + Q \\
&= \sum \alpha_i X_i - \sum \alpha_i P + \sum \alpha_i Q \\
&= \sum \alpha_i (X_i - P + Q) \\
&= \sum \alpha_i \tau_Q^P(X_i).
\end{aligned}$$

El punts P i Q que representen una translació τ_Q^P no són únics:

3.18 Lema. *Els següents enunciats són equivalents per a quatre punts P, Q, R, S.*

1. $\tau_Q^P = \tau_S^R$.
2. $\tau_R^P = \tau_S^Q$.
3. *Els punts formen un paral·lelogram, $S = R - P + Q$.*



(En (1) i (2) es tracta d'igualtats de translacions, és a dir, per a cada $X \in \mathbb{A}$ tenim $\tau_Q^P(X) = \tau_S^R(X)$ (respectivament, $\tau_R^P(X) = \tau_S^Q(X)$).)

Demostració. Si tenim un paral·lelogram $S = R - P + Q$, llavors per a tot X tenim

$$X - R + S = X - R + (R - P + Q) = X - P + Q,$$

i similarment $X - P + R = X - Q + S$. D'altra banda, si sabem que $\tau_Q^P = \tau_S^R$, llavors en particular si avaluem en R obtenim

$$S = \tau_S^R(R) = \tau_Q^P(R) = R - P + Q.$$

□

3.19 Observació. Si $\mathbb{A} = \emptyset$, llavors no hi ha punts per definir translacions. Per tant, segons la definició, l'espai buit no té translacions!

3.20 Exemple. En $\mathbb{A} = \mathbb{R}^2$, posem $P = (0,1)$, i $Q = (1,0)$. Llavors τ_Q^P és la translació

$$\begin{array}{rcl} \tau_Q^P : \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ (x,y) & \longmapsto & (x,y) - (0,1) + (1,0) \\ & = & (x+1, y-1). \end{array}$$

3.21 Lema. *(Identitat de Chasles.)*

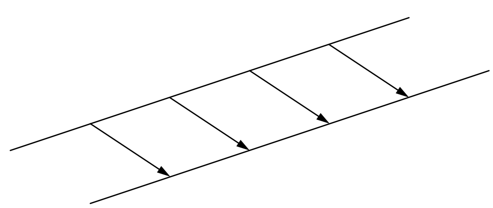
$$\tau_R^Q \circ \tau_Q^P = \tau_R^P.$$

Demostració. És una verificació directe: per a tot punt X tenim $\tau_R^Q \circ \tau_Q^P(X) = (X - P + Q) - Q + R = X - P + R = \tau_R^P(X)$. $\square$

3.22 Lema. *Si $L \subset \mathbb{A}$ és una recta, i si $P, Q \in L$, llavors la translació τ_Q^P porta L a L bijectivament. És a dir, si $X \in L$ llavors també $\tau_Q^P(X) \in L$.*

Demostració. Exercici. $\square$

3.23 Rectes paral·leles. Diem que dues rectes són paral·leles, si existeix una translació que porta una en l'altra, bijectivament.



Si existeix una tal translació, llavors en existeix infinites altres tals translacions. Això és una conseqüència del lema següent.

3.24 Lema. *Siguin L_0 i L_1 rectes paral·leles. Llavors per a qualssevol $P_0 \in L_0$ i $P_1 \in L_1$, la translació $\tau_{P_1}^{P_0}$ porta L_0 bijectivament a L_1.*

Demostració. Per definició de "paral·lel", existeix alguna translació τ que porta L_0 bijectivament a L_1. Diguem $\tau = \tau_{Q_1}^{P_0}$ amb $Q_1 \in L_1$. Ara la identitat de Chasles diu

$$\tau_{P_1}^{P_0} = \tau_{P_1}^{Q_1} \circ \tau_{Q_1}^{P_0}.$$

Per hipòtesi, $\tau_{Q_1}^{P_0}$ porta L_0 bijectivament a L_1. Pel lemma 3.22, $\tau_{P_1}^{Q_1}$ porta L_1 bijectivament a L_1, atés que ambdós punts Q_1 i P_1 pertanyen a L_1. Per tant la composició porta L_0 bijectivament a L_1. □

3.25 Exercici. Proveu el següents enunciats.

(a) Rectes oposades d'un paral·lelogram són paral·leles.

(b) Si $P_0 \neq Q_0$ són punts d'una recta L_0, i si P_1 és un punt d'una recta L_1, llavors la translació $\tau_{P_1}^{P_0}$ porta L_0 bijectivament a L_1 si i només si el punt $\tau_{P_1}^{P_0}(Q_0)$ pertany a L_1.

(c) Si dues rectes paral·leles tenen algun punt en comú, llavors són iguals.

(d) (Postulat d'Euclides.) Donada una recta L i un punt $P \notin L$, llavors existeix una única recta L' paral·lela a L i que contingui P.

4 Més geometria de les combinacions afins

4.1 Centroide — centre de masses. Donats $k > 0$ punts $P_1, \ldots, P_k$, llur *centroide* és el punt donat per la combinació afí

$$\frac{1}{k}P_1 + \cdots + \frac{1}{k}P_k.$$

Si pensem els k punts com partícules iguals, llavors el centroide és el centre de masses de les partícules. En el cas $k = 2$, recuperem la noció de punt mitjà.

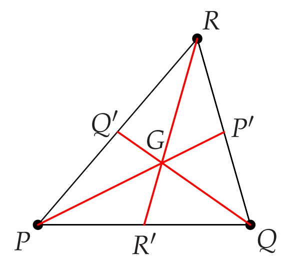
4.2 Exemple. El centroide de tres punts, $G = \frac{1}{3}P + \frac{1}{3}Q + \frac{1}{3}R$, es pot construir com

$$G = \tfrac{1}{3}P + \tfrac{2}{3}P'$$

on $P' = \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}R$ és el punt mitjà del segment QR. En efecte,

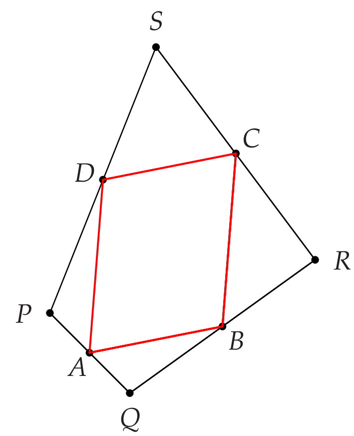
$$\tfrac{1}{3}P + \tfrac{2}{3}P' = \tfrac{1}{3}P + \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2}Q + \tfrac{1}{2}R\right) = \tfrac{1}{3}P + \tfrac{1}{3}Q + \tfrac{1}{3}R = G.$$

En particular, el punt G pertany a la recta $\overline{PP'}$. Però G es pot construir igualment, pel mateix argument, com un punt de la recta $\overline{QQ'}$ on Q' és el punt mitjà de PR, o encara com un punt de la recta $\overline{RR'}$ on R' és el punt mitjà de PQ. Concloem que cadascuna de les tres *medianes* $\overline{PP'}$, $\overline{QQ'}$, i $\overline{RR'}$ conté G — diem que les rectes medianes són *concurrents* al punt G — el qual és un resultat clàssic de la geometria plana.



Destaquem que aquest resultat, com molts altres que estipulen la igualtat de punts construïts de diferents maneres, apareix en considerar maneres diferents de construir geomètricament alguna combinació afí.

4.3 Exercici. Siguin P, Q, R, S quatre punts, formant un quadrilàter, i siguin A, B, C, D els punts mitjans dels costats, tal i com indicats a la figura:

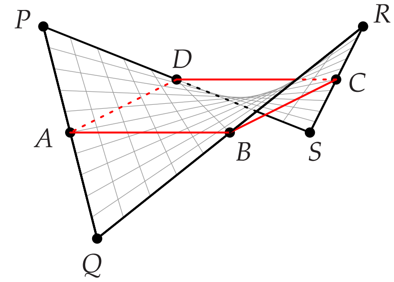


Demostreu els següents enunciats.

1. Els punts A, B, C, D formen un paral·lelogram (teorema de Varignon, 1791).

2. Els punts A, B, C, D tenen el mateix centre de masses que P, Q, R, S.

Observeu que P, Q, R, S no estan necessàriament continguts en un pla. Però automàticament A, B, C, D hi estan! Podem imaginar per exemple que P i R es troben per damunt del pla del paper, mentre que Q i S estan per sota:



Hem vist que el quart punt d'un paral·lelogram es pot construir en dues etapes, i que el mateix es passa amb el centroide d'un triangle. Això és general:

4.4 Lema. *Tota combinació afí $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i$ (amb $n \geq 1$) es pot escriure com a combinació afí de dos punts: un punt P_k que és un dels punts originals, i altre punt R que és combinació afí dels altres punts P_i, $i \neq k$.*

Demostració. Si tenim una combinació afí de $n+1$ punts, $Q = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i$ amb $n \geq 1$, llavors necessàriament per algun k tenim $\alpha_k \neq 1$. Ara posem

$$R := \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_k} P_i.$$

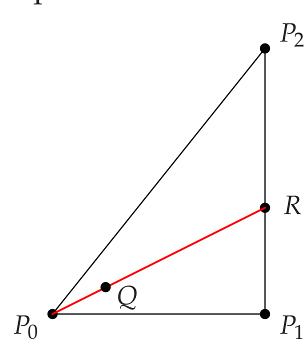
És una combinació afí (de n punts) atès que $1 - \alpha_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i$, i per tant

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_k} = 1.$$

Ara tenim

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i \\ &= \alpha_k P_k + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \alpha_i P_i \\ &= \alpha_k P_k + (1-\alpha_k) R. \end{aligned}$$

Com a il·lustració, a la figura es representa la situació quan $n = 2$:



$\square$

4.5 Importància de les rectes. El lema diu que tota combinació afí es pot expressar en termes de combinacions afins de dos punts, que és la geometria de rectes i llurs "distàncies internes relatives" (raons). Això vol dir que les combinacions afins corresponen a construccions geomètriques amb rectes. En el mateix sentit, les aplicacions afins, definides com les aplicacions que respecten combinacions afins, són exactament les aplicacions que respecten construccions amb rectes: si un punt $Q \in \mathbb{A}$ ve donat com una construcció amb rectes (és a dir: és una combinació afí), i si $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ és una aplicació afí, llavors la imatge de Q en $\mathbb{B}$ s'obté per la mateixa construcció amb les imatges dels punts. (Però atenció: pot arribar que f col·lapsi alguna recta a un punt. En aquest cas, la construcció a $\mathbb{B}$ esdevé degenerada.)

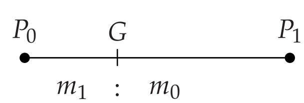
El centroide és la combinació afí on els coeficients són distribuïts homogèniament. Les combinacions afins generals es poden interpretar com centres de masses d'objectes amb pesos: la combinació afí $\sum \alpha_i P_i$ s'interpreta com el centre de masses de partícules P_i amb pesos α_i. (Com que una combinació afí naturalment pot incloure coeficients negatius, la interpretació en termes de masses no és la millor. Potser és millor parlar de càrregues elèctriques...)

4.6 El punt mitjà ponderat. Siguin P_0 i P_1 dos punts distints, i siguin m_0 i m_1 nombres reals positius que interpretem com a pesos. Llavors podem interpretar la combinació afí

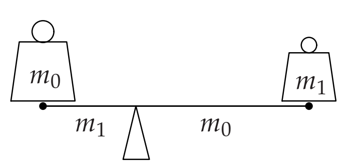
$$G = \tfrac{m_0}{m_0+m_1} P_0 + \tfrac{m_1}{m_0+m_1} P_1$$

com un *punt mitjà ponderat*. Si pensem m_0 i m_1 com les masses de partícules en les posicions P_0 i P_1 respectivament, llavors el punt mitjà ponderat és el centre de masses del sistema.

Observeu que els coeficients $\frac{m_0}{m_0+m_1}$ i $\frac{m_1}{m_0+m_1}$ pertanyen a l'interval $[0,1]$, per tant el punt mitjà ponderat pertany al segment P_0P_1. Geomètricament, és el punt que divideix el segment en dues parts segons la raó $m_1 : m_0$:



És la llei de la palanca d'Arquimedes:



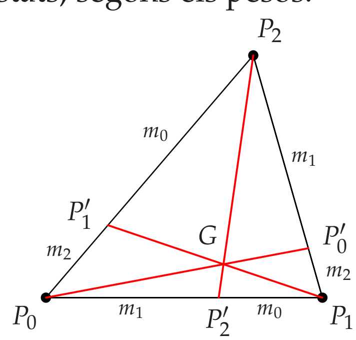
ATENCIÓ! Quan diem que el segment es divideix segons la raó $m_1 : m_0$, no volem dir que un sub-segment té mida m_1 i l'altre m_0 — i no en podem concloure que la distància entre P_0 i P_1 és $m_1 + m_0$. Les distàncies absolutes no tenen sentit en la geometria afí. El que afirmem és que la *raó* està ben definida — és una mesura relativa.

L'afirmació és que si agafem el segment GP_1 com a "metre", llavors el segment GP_0 té mida $-\frac{m_1}{m_0}$. Més formalment, si parametritzem la recta com

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{L} \\ t & \longmapsto & (1-t)G + tP_1, \end{array}$$

de manera que G correspon a $t = 0$, i P_1 correspon a $t = 1$, llavors P_0 correspon a $t = -\frac{m_1}{m_0}$. Veure això és un càlcul similar al de l'exercici 3.9. (El signe apareix perquè P_1 es troba al costat oposat de P_0, relativament a G.)

4.7 Exercici. És una generalització important de 4.2: siguin P_0, P_1, i P_2 tres punts no alineats, i suposem donats tres pesos positius m_0, m_1, m_2. Siguin P'_0, P'_1, P'_2 el punts mitjans ponderats dels tres costats, segons els pesos:



Demostreu que les tres rectes $\overline{P_0P'_0}$, $\overline{P_1P'_1}$, $\overline{P_2P'_2}$ són concurrents (en el punt G que és el centre de masses ponderat). (És una versió particular de teorema de Ceva que veurem més endavant 8.6.

Exemple il·lustratiu: corbes de Bézier

[Aquest subsecció no conté resultats utilitzats en la resta del curs. S'inclou només com a il·lustració de la importància de les combinacions afins a la indústria.]

4.8 "Bézier lineal". Si tenim dos punts P_0 i P_1 al pla afí $\mathbb{A}^2$, podem escriure qualsevol punt de la recta generada com a combinació afí

$$(1-t)P_0 + tP_1, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Si ens restringim a $t \in [0,1]$, descrivim només els punts del segment entre P_0 i P_1. Per tant, l'aplicació

$$\begin{aligned} Q : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{A}^2 \\ t &\longmapsto Q(t) = (1-t)P_0 + tP_1 \end{aligned}$$

parametritza la corba que és el segment entre P_0 i P_1. Diem informalment que Q és un punt que corre entre P_0 i P_1.

4.9 Bézier quadràtica. Ara analitzem la situació de tres punts P_0, P_1, P_2 (que suposem no alineats). Sigui Q_0 un punt que corre entre P_0 i P_1, i sigui Q_1 un punt que corre (al mateix temps) entre P_1 i P_2:

$$\begin{aligned} Q_0(t) &= (1-t)P_0 + tP_1 \\ Q_1(t) &= (1-t)P_1 + tP_2. \end{aligned}$$

Ara, considerem el segment entre Q_0 i Q_1 — aquest segment és variable! — i deixem B córrer entre Q_0 i Q_1:

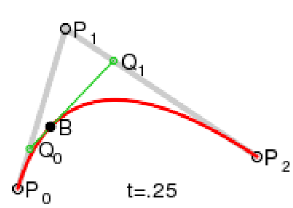
$$\begin{aligned} B(t) &= (1-t)Q_0(t) + tQ_1(t) \\ &= (1-t)\big((1-t)P_0 + tP_1\big) + t\big((1-t)P_1 + tP_2\big) \\ &= (1-t)^2 P_0 \ + \ 2t(1-t)P_1 \ + \ t^2 P_2. \end{aligned}$$

Així doncs, Q_0 és una combinació afí de P_0 i P_1; Q_1 és una combinació afí de P_1 i P_2; i B és una combinació afí de Q_0 i Q_1, i per tant, una combinació afí de P_0, P_1, P_2. (Observeu que

$$(1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2 = ((1-t)+t)^2 = 1,$$

per tant és realment una combinació afí.)

El resultat és una corba parametritzada que consisteix en punts que són combinacions afins dels tres punts P_0, P_1, P_2. És la definició d'una *corba de Bézier (quadràtica)*. Els punts P_0 i P_2 són punts anomenats *àncores*, el punt P_1 és un *punt de control*.

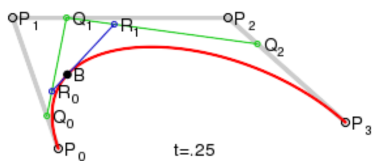


[Versió animada: http://mat.uab.cat/~kock/docencia/GL/Bezier_quadratica.html]

4.10 Bézier cúbica. Una *corba de Bézier cúbica* es defineix anàlogament: comencem amb quatre punts P_0, P_1, P_2, P_3, i definim una corba

$$t \mapsto (1-t)^3 P_0 \; + \; 3t(1-t)^2 P_1 \; + \; 3t^2(1-t)P_2 \; + \; t^3 P_3.$$

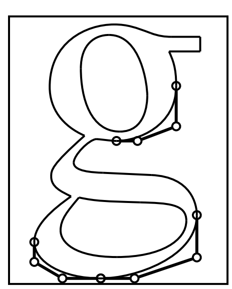
Es pot arribar a aquesta expressió de manera similar a la del cas quadràtic: fem moure tres punts auxiliars Q_0, Q_1, Q_2 als tres segments P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, i ara fem una construcció quadràtica d'aquests tres punts mòbils — que al seu torn es fa mitjançant dos punts mòbils auxiliars R_0 i R_1 que recorren els segments (mòbils) Q_0Q_1 i Q_1Q_2, i finalment un punt B que recorre el segment R_0R_1:



[Versió animada: http://mat.uab.cat/~kock/docencia/GL/Bezier_cubica.html]

4.11 Història i aplicacions. Les corbes de Bézier van ser inventades i estudiades per Paul de Casteljau l'any 1959 per a usar-les en el disseny de cotxes (de Casteljau era enginyer a Citroën). Pocs anys després, Pierre Bézier (enginyer a Renault!) va popularitzar i desenvolupar més enllà les tècniques. Avui dia és una eina central en disseny industrial, especialment amb la informatització: per exemple, els tipus (fonts) moderns són tots descrits amb corbes de Bézier. Les fonts TrueType fan servir la Bézier quadràtica, Type 1 i Type 3 (PostScript) fan servir Bézier cúbica. Tot allò que s'anomena gràfica vectorial (SVG = *scalable vector graphics*, com per exemple Illustrator, Freehand, CorelDraw, Flash, Shockwave, tot tipus de CAD, etc.) es basa en corbes (i superfícies) de Bézier. Per a dissenyar una lletra d'un tipus PostScript, típicament es fan servir uns 20–40 punts àncora, i potser uns 20–60 punts de control. Amb la informació codificada en aquests punts, la lletra es pot ampliar o disminuir lliurement sense perdre informació.

Aquí veiem una g minúscula amb alguns dels punts que la defineixen (Bézier cúbica):



Un aspecte de la utilitat de les corbes de Bézier és que es calculen eficientment: l'algorisme bàsic és la *interpolació afí*, que no és res més que la construcció ja explicada.

4.12 Exercicis. Sigui P_0, P_1, P_2 tres punts distints, és a dir, formant un triangle no degenerat. Hi ha tres corbes de Bézier (en realitat sis, però no volem comptar l'orientació de la parametrització). Sigui B_i la corba de Bézier que té P_i com punt de control, i els altres dos punts com àncores. Demostreu els següents fets:

1. La corba B_i intercepta la mediana de P_i al punt mig, és a dir, segons la raó 1 : 1.

2. Cada corba de Bézier intercepta les altres dues medianes segons la raó 1 : 8. En particular, dues corbes de Bézier tenen un punt d'intersecció sobre la mediana.

3. Sigui Q_i el punt d'intersecció de les dues corbes $B_j, j \neq i$. Aquest tres punts es troben a $t = \frac{1}{3}$ i $t = \frac{1}{3}$ de les tres corbes.

4. Els tres punts Q_0, Q_1, Q_2 formen un triangle de costats paral·lels als costats de P_0, P_1, P_2.

5. El triangle $Q_0Q_1Q_2$ té el mateix centre de massa que $P_0P_1P_2$

5 Subespais afins (varietats lineals)

5.1 Definició de subespai afí. Un *subespai afí* d'un espai afí $\mathbb{A}$ és un subconjunt de $\mathbb{A}$ tancat per combinacions afins. Utilitzem també la paraula *varietat lineal* com a sinònim de "subespai afí".

5.2 Exemple. El conjunt buit és un subespai afí. Un punt és un subespai afí. La recta $\overline{P_0P_1}$ definida per dos punts P_0 i P_1 és un subespai afí.

5.3 Lema. *Si $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ és una aplicació afí, i $Q \in \mathbb{B}$, llavors la imatge inversa de Q,*

$$f^{-1}(Q) := \{P \in \mathbb{A} \mid f(P) = Q\},$$

és un subespai afí.

Observeu que $f^{-1}(Q)$ pot ser buit.

Demostració. Suposem $P_0, \ldots, P_k \in f^{-1}(Q)$ i $\sum \alpha_i = 1$. Calculem, fent servir que f preserva combinacions afins:

$$f(\sum \alpha_i P_i) = \sum \alpha_i f(P_i) = \sum \alpha_i Q = Q.$$

Així, $\sum \alpha_i P_i$ també pertany a $f^{-1}(Q)$. $\square$

5.4 Exemple. Inicialment vam posar com a exemple fonamental de varietat afí el conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals, diguem

$$A\vec{v} = \vec{w}$$

on $\vec{v} \in V$ i $\vec{w} \in W$ són vectors, i $A : V \to W$ és una aplicació lineal. Aquest exemple és un subexemple del lema anterior.

Més generalment, pel mateix argument:

5.5 Proposició. *Si $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ és una aplicació afí, i si $\mathbb{L} \subset \mathbb{B}$ és una subespai afí, llavors la imatge inversa*

$$f^{-1}(\mathbb{L}) := \{P \in \mathbb{A} \mid f(P) \in \mathbb{L}\}$$

és un subespai afí.

Demostració. Suposem $P_0, \ldots, P_k \in f^{-1}(\mathbb{L})$ i $\sum \alpha_i = 1$. Calculem, fent servir que f preserva combinacions afins: $f(\sum \alpha_i P_i) = \sum \alpha_i f(P_i)$. Atès que cada $f(P_i) \in \mathbb{L}$, i com que $\mathbb{L}$ és tancat per combinacions afins, tenim $\sum \alpha_i f(P_i) \in \mathbb{L}$. $\square$

Observem que $f^{-1}(\mathbb{L})$ pot ser buit.

La noció de subespai afí també es comporta bé per imatges:

5.6 Lema. *Sigui $f : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ una aplicació afí, i sigui $L \subset \mathbb{B}$ un subespai afí. Llavors la imatge de $\mathbb{L}$ per f,*

$$f(\mathbb{L}) := \{P \in \mathbb{A} \mid \exists X \in \mathbb{L} \text{ amb } f(X) = P\}$$

és un subespai afí de $\mathbb{A}$.

Demostració. Hem d'agafar uns quants punts $P_0, \ldots, P_k$ de $f(\mathbb{L})$ i verificar que qualsevol combinació afí d'ells també és a $f(\mathbb{L})$. Que P_i pertany a $f(\mathbb{L})$ vol dir que existeix algun punt $X_i \in \mathbb{L}$ tal que $f(X_i) = P_i$. Volem veure que la combinació afí $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i P_i$ pertany a $f(\mathbb{L})$, per tant hem d'exibir un punt $Y \in \mathbb{L}$ tal que $f(Y) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i P_i$. Fem servir els X_i:

com que $\mathbb{L}$ és un subespai afí, sabem que qualsevol combinació afí de tots els X_i també pertany a $\mathbb{L}$. Posem doncs

$$Y := \sum_{i=0}^{k} \alpha_i X_i \quad \in \mathbb{L}$$

i verifiquem que funciona:

$$f(Y) = f\big(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i X_i\big) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f(X_i) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i P_i.$$

Així veiem que $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i P_i$ pertany a $F(\mathbb{L})$. □

El resultat és interessant també al cas on $\mathbb{L}$ és tot $\mathbb{B}$:

5.7 Corol·lari. *Sigui $f : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ una aplicació afí. Llavors el conjunt* $\mathrm{Im}(f)$ *és un subespai afí de $\mathbb{A}$.* □

5.8 Exemple. La parametrització d'una recta (donada per dos punts P_0 i P_1) és un cas particular: considerem l'aplicació afí

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ t &\longmapsto (1-t)P_0 + tP_1, \end{aligned}$$

llavors el corol·lari mostra que $\overline{P_0P_1} = \mathrm{Im}\,\Psi$ és un subespai afí.

La recta generada per dos punts també és un cas particular del concepte següent.

5.9 Lema. *Siguin $P_0, \dots, P_n$ punts de $\mathbb{A}$. Aleshores el conjunt de totes llurs combinacions afins $\sum \alpha_i P_i$ és un subespai afí denotat $\overline{P_0, \dots, P_n}$ que s'anomena subespai* generat *pels P_i.*

Demostració. Si $Q_j := \sum_i m_{ij} P_i$ són punts de $\overline{P_0, \dots, P_n}$, i $\sum \alpha_j = 1$, llavors el càlcul

$$\sum_j \alpha_j Q_j = \sum_j \alpha_j \big(\sum_i m_{ij} P_i\big) = \sum_i \big(\sum_j \alpha_j m_{ij}\big)\ P_i$$

mostra que $\sum_j \alpha_j Q_j$ pertany a $\overline{P_0, \dots, P_n}$, com volíem veure. □

5.10 Observació. La notació $\overline{P_0, \dots, P_n}$ per al subespai generat pels P_i està d'acord amb la notació $\overline{PQ}$ per a la recta generada per dos punts, excepte perquè ometem la coma. La notació també ha de recordar que $\overline{P_0, \dots, P_n}$ és el subespai afí més petit que conté totes les rectes generades pels parells de punts de $P_0, \dots, P_n$, la clausura afí.

Recordeu que $\mathrm{Aff}(n{+}1)$ denota l'espai afí estàndard:

$$\mathrm{Aff}(n{+}1) \ := \ \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \textstyle\sum x_i = 1\}.$$

Per conveni (d'aquestes *lliçons*), escrivim amb claudàtors tot vector en el qual els components tenen suma 1. Per tant, els punts de $\mathrm{Aff}(n{+}1)$ s'escriuen

$$[x_0, \dots, x_n].$$

5.11 Parametrització. El subespai $\overline{P_0, \dots, P_n}$ és pot considerar un exemple d'una imatge per una aplicació afí: sempre que tenim a $\mathbb{A}$ una llista de $n+1$ punts $(P_0, \dots, P_n)$, podem definir una aplicació afí $\Phi : \mathrm{Aff}(n{+}1) \to \mathbb{A}$ tal que

$$\overline{P_0, \dots, P_n} = \mathrm{Im}(\Phi),$$

segons el següent resultat.

5.12 Lema. *L'aplicació*

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathrm{Aff}(n{+}1) & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i P_i. \end{array}$$

és una aplicació afí.

Demostració. És una variació de la prova del Lema 5.9, i altre exemple del principi "una combinació afí de combinacions afí és una combinació afí":

Siguin

$$X_j := \begin{bmatrix} x_{0j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix}, \quad j = 0, \dots, k$$

$k+1$ punts de $\mathrm{Aff}(n{+}1)$. Tenim $\Phi(X_j) = \sum_{i=0}^{n} x_{ij} P_i$. Ara considerem a $\mathrm{Aff}(n{+}1)$ una combinació afí

$$\sum_j \alpha_j X_j = \sum_j \alpha_j \begin{bmatrix} x_{0j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 x_{00} + \cdots + \alpha_k x_{0k} \\ \vdots \\ \alpha_0 x_{n0} + \cdots + \alpha_k x_{nk} \end{bmatrix},$$

i tenim per tant

$$\Phi(\sum_j \alpha_j X_j) = \sum_i \left(\sum_j \alpha_j x_{ij}\right) P_i = \sum_j \alpha_j \left(\sum_i x_{ij} P_i\right) = \sum_j \alpha_j \Phi(X_j).$$

Això mostra que Φ preserva combinacions afins. □

A l'inrevés, sempre que tenim una aplicació afí $\Phi : \mathrm{Aff}(n{+}1) \to \mathbb{A}$, podem obtenir una llista de punts, en posant

$$P_0 := \Phi(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}), \qquad \dots, \qquad P_n := \Phi(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$$

És fàcil veure que això dóna una bijecció entre llistes de $n+1$ punts de $\mathbb{A}$ i aplicacions afins $\mathrm{Aff}(n{+}1) \to \mathbb{A}$.

5.13 Paral·lelisme. Diem que dos subespais L_0 i L_1 són *paral·lels* si existeix una translació τ_Q^P que porta L_0 a L_1 bijectivament. En aquest cas, la translació inversa τ_P^Q porta L_1 a L_0 bijectivament, és a dir, és la bijecció inversa.

5.14 Exemple. Un subespai afí és sempre paral·lel a ell mateix. En particular $\emptyset$ és paral·lel a $\emptyset$. A 3.23 ja hem vist exemples de rectes paral·leles.

5.15 Lema. *Si L_0 i L_1 són subespais afins paral·lels, i si $P_0 \in L_0$ i $P_1 \in L_1$, llavors la translació $\tau_{P_1}^{P_0}$ porta L_0 a L_1 bijectivament.*

Demostració. Fàcil. (Vegeu 3.24.) □

5.16 Corol·lari. *Si dos subespais afins paral·lels tenen un punt en comú, llavors són iguals.*

Demostració. Si P és un punt comú, llavors la translació $\mathrm{id} = \tau_P^P$ porta un subespai bijectivament en l'altre. Per tant són iguals. □

5.17 Lema. *Si $f : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ és una aplicació afí, i si L_0 i L_1 són subespais afins de $\mathbb{B}$, llavors les imatges $f(L_0)$ i $f(L_1)$ són paral·leles a $\mathbb{A}$.*

Demostració. Si τ_Q^P és una translació que porta L_0 a L_1 bijectivament, llavors és facil veure que la translació $\tau_{f(Q)}^{f(P)}$ és testemoni de que $f(L_0)$ i $f(L_1)$ són paral·lels. □

5.18 Lema. *Si $f : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ és una aplicació afí exhaustiva, i si L_0 i L_1 són subvarietats lineals de $\mathbb{A}$, llavors les anti-imatges $f^{-1}(L_0)$ i $f^{-1}(L_1)$ són paral·leles a $\mathbb{A}$.*

Demostració. Si τ_Q^P és una translació que porta L_0 a L_1 bijectivament, atés que f és exhaustiva podem escollir punts $X \in f^{-1}(P)$ i $Y \in f^{-1}(Q)$. Ara és facil veure que la translació τ_Y^X és testemoni de que $f^{-1}(L_0)$ i $f^{-1}(L_1)$ són paral·leles. □

5.19 Exemple. Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una aplicació lineal no constant, diguem $f(\vec{x}) = a_1x_1 + \dots a_nx_n$. Llavors són paral·lels tots els subespais afins $f^{-1}(b)$, per a $b \in \mathbb{R}$.

6 Independència afí i bases

6.1 Independència en espais vectorials. Recordeu que en un espai vectorial V, un conjunt de vectors $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ s'anomena linealment independent si

$$\sum_{i=1}^{n} r_i\vec{v}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad r_i = 0 \;\forall i.$$

Aquesta condició fa referència al vector zero, i per tant no la podem copiar directament als espais afins. No obstant això, el vector zero apareix només per conveniència de formulació: la propietat important dels vectors linealment independents és que qualsevol combinació lineal d'ells és única. En altres paraules,

$$\sum_{i=1}^{n} r_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} s_i\vec{v}_i \quad \Rightarrow \quad r_i = s_i \;\forall i. \tag{1}$$

Si V té dimensió n (és a dir, els $\vec{v}_i$ formen una base) això vol dir que qualsevol vector $\vec{w} \in V$ té coordenades ben definides respecte a $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$: l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & V \\ (r_1, \dots, r_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} r_i\vec{v}_i \end{array}$$

és bijectiva.

La condició (1) sí que la podem copiar al context dels espais afins, si utilitzem només combinacions afins. Així podem definir independència afí, bases i dimensió.

6.2 Independència afí. Un conjunt finit de punts $P_0, \dots, P_n$ es diu *afinment independent* si

$$\sum \alpha_i P_i = \sum \beta_i P_i \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = \beta_i \;\forall i, \tag{2}$$

sempre que $\sum \alpha_i = \sum \beta_i = 1$. És a dir, un punt Q no es pot escriure de dues maneres diferents com a combinació afí dels $P_0, \ldots, P_n$. Si un conjunt no és afinment independent, diem que és *afinment dependent*.

6.3 Parametrització. Recordem que per a tota llista de $n+1$ punts $(P_0, \ldots, P_n)$ tenim una aplicació afí

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{Aff}(n+1) &\longrightarrow \mathbb{A} \\ \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &\longmapsto \sum_{i=0}^{n} x_i P_i. \end{aligned}$$

La definició d'independència diu exactament que els punts $P_0, \ldots, P_n$ són independents quan aquesta aplicació és injectiva.

6.4 Lema. *Un conjunt finit de punts $P_0, \ldots, P_n$ és afinment dependent si i només si algun dels punts és combinació afí dels altres.*

Demostració. Suposem que algun punt, diguem P_0, es pot escriure com a combinació afí dels altres:

$$P_0 = \sum_{i \neq 0} \alpha_i P_i.$$

Això ja són dues maneres d'escriure P_0 com combinació afí dels punts del conjunt, per tant el conjunt és afinment dependent.

Suposem ara algun punt Q es pot escriure com a combinació afí dels punts del conjunt de dues maneres distintes:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i = Q = \sum_{i=0}^{n} \beta_i P_i.$$

És a dir, per algun k tenim $\alpha_k \neq \beta_k$. Sempre podem escriure

$$P_k = P_k - \tfrac{1}{\alpha_k - \beta_k} Q + \tfrac{1}{\alpha_k - \beta_k} Q.$$

L'escull de coeficient és fet per que s'eliminin les ocurències de P_k al costat dret, com ara veiem. Hi substituim les dues expressions de Q:

$$\begin{aligned}
&= P_k - \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_k - \beta_k} P_i + \sum_{i=0}^{n} \frac{\beta_i}{\alpha_k - \beta_k} P_i \\
&= \tfrac{\alpha_k - \beta_k}{\alpha_k - \beta_k} P_k - \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_k - \beta_k} P_i + \sum_{i=0}^{n} \frac{\beta_i}{\alpha_k - \beta_k} P_i \\
&= -\sum_{i \neq k} \frac{\alpha_i - \beta_i}{\alpha_k - \beta_k} P_i,
\end{aligned}$$

que és una expresió de P_k com a combinació afí dels altres punts. $\square$

6.5 Observació. Aquesta demonstració pot aparèixer com una màgica: com descobrir que a P_k hem de sumar-li i restar-li el punt $\frac{1}{\alpha_k - \beta_k} Q$? El següent càlcul "il·legal" ho suggereix: a l'equació $\sum \alpha_i P_i = \sum \beta_i P_i$ passem totes les ocurències de P_k cap a l'esquerra, i tots els altres punts cap a la dreta. Obtenim $(\alpha_k - \beta_k) P_k = -\sum_{i \neq k} (\alpha_i - \beta_i) P_i$. Però aquestes expressions ja no tenen sentit: ni a l'equerra ni a la dreta són combinacions afins! Però després de dividir per $\alpha_k - \beta_k$ obtenim novament combinacions afins,

$$P_k = -\sum_{i \neq k} \frac{\alpha_i - \beta_i}{\alpha_k - \beta_k} P_i,$$

i de fet el resultat és correcte, ja que coincideix amb el resultat obtingut legalment en la demonstració. La demonstració representa l'esforç necessari per legalitzar l'argument. Més endavant veurem com el càlcul amb vectors pot simplificar tals arguments.

6.6 Exemple. El conjunt buit és sempre afinment independent. Un sol punt P_0 és sempre afinment independent. Un conjunt de dos punts P_0 i P_1 és afinment independent exactament si $P_0 \neq P_1$. Si tres punts són dependents diem que són *alineats*.

6.7 Generació. Un conjunt de punts $P_0, \ldots, P_n$ *genera* $\mathbb{A}$ si tot punt de $\mathbb{A}$ es pot escriure com a combinació afí d'ells. O sigui, quan $\overline{P_0, \ldots, P_n} = \mathbb{A}$. Si ordenem els punts defineixen una aplicació afí

$$\begin{aligned}
\Phi : \mathrm{Aff}(n+1) &\longrightarrow \mathbb{A} \\
\begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &\longmapsto \sum_{i=0}^{n} x_i P_i,
\end{aligned}$$

i podem dir que els punts generan $\mathbb{A}$ exactament quan aquesta aplicació és exhaustiva.

6.8 Base afí. Un conjunt ordenat és una *base afí* de $\mathbb{A}$ si és independent i si genera $\mathbb{A}$. En termes de l'applicació Φ podem dir que els punts formen una base quan Φ és bijectiva.

Una base afí de $\mathbb{A}$ es diu també *sistema de referència* de $\mathbb{A}$ (o a vegades *sistema de referència baricèntric* de $\mathbb{A}$).

Observeu que $\emptyset$ és una base de $\mathbb{A} = \emptyset$.

6.9 Lema. *Si $P_0, \ldots, P_n$ és una base afí de $\mathbb{A}$, llavors tot conjunt amb més que $n+1$ elements és afinment dependent.*

Demostració. Sigui $m > n$, i siguin $Q_0, \ldots, Q_m$ un conjunt de punts. Suposem que tenim dues combinacions afins amb el mateix resultat:

$$\sum_{j=0}^{m} \alpha_j Q_j = \sum_{j=0}^{m} \beta_j Q_j. \tag{3}$$

Volem trobar per algun j que la diferència $\delta_j = \beta_j - \alpha_j$ és diferent de zero. Ara fem servir la base $P_0, \ldots, P_n$: podem escriure cada punt Q_j com a combinació afí dels P_i:

$$Q_j = \sum_{i=0}^{n} q_{ij} P_i.$$

Si substituim aquestes expression dins de de (3) obtenim

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} \alpha_j q_{ij} P_i = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} \beta_j q_{ij} P_i.$$

Atès que els punts P_i són afinment independents, per a cada i, els coeficients d'aquestes dues expressions han de ser iguals. És a dir, per a cada i tenim una equació

$$\sum_{j=0}^{m} \alpha_j q_{ij} = \sum_{j=0}^{m} \beta_j q_{ij},$$

o equivalentment

$$\sum_{j=0}^{m} \delta_j q_{ij} = 0.$$

En total tenim $n+1$ equacions lineals homogènies en les $m+1$ incògnites δ_j. Com que $m > n$, sabem de l'àlgebra lineal que existeix llavors una solució no trivial, és a dir algun $\delta_j \neq 0$, com volíem. En conclusió, els Q_j són afinment dependents. $\square$

6.10 Proposició. *Si un espai afí $\mathbb{A}$ posseeix una base afí amb $n+1$ elements, llavors tota base de $\mathbb{A}$ té $n+1$ elements.*

Demostració. Si una base tendria més elements que l'altre, el lema anterior implica que seria un conjunt dependent. Contradicció. Per tant han de tenir el mateix nombre d'elements. □

6.11 Dimensió. Si un espai afí $\mathbb{A}$ posseeix una base amb $n+1$ elements, diem que té *dimensió n*. Exemples: L'espai afí buit té dimensió -1. Un punt té dimensió 0. Una recta té dimensió 1.

Recordeu que $\mathrm{Aff}(n+1)$ denota l'espai afí estàndard:

$$\mathrm{Aff}(n+1) \ := \ \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \textstyle\sum x_i = 1\}.$$

Per conveni (d'aquestes *lliçons*), escrivim amb claudàtors tot vector en el qual els components tenen suma 1. Per tant, els punts de $\mathrm{Aff}(n+1)$ s'escriuen

$$[x_0, \ldots, x_n].$$

6.12 Coordenades afins (o baricèntriques). Que $P_0, \ldots, P_n$ constitueixin una base afí de $\mathbb{A}$, vol dir que qualsevol punt Q s'escriu de manera única com a combinació afí dels P_i. Això vol dir exactament que l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aff}(n+1) & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ [x_0, \ldots, x_n] & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i P_i \end{array}$$

és bijectiva. És fàcil veure que aquesta aplicació és una aplicació afí. Per tant, donar una base afí equival a donar una aplicació afí invertible

$$\mathrm{Aff}(n+1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}.$$

Per tant, una base ens permet d'escriure tot en coordenades, i fer tots els càlculs en aquest espai estàndard. El vector $[x_0, \ldots, x_n]$ que correspon a un punt Q s'anomena vector de *coordenades afins* de Q, respecte a la base $P_0, \ldots, P_n$. (És pràctic escriure sempre els vectors de coordenades afins amb claudàtors, per recordar que no és un vector qualsevol, sinó un vector on els components sumen 1.) Observeu que cap punt té coordenades $[0, \ldots, 0]$, com que la suma de les coordenades no és 1.

6.13 Exemple. Respecte a la base $P_0, \ldots, P_n$ el punt P_0 té coordenades $[1, 0, \ldots, 0]$, i el punt P_n té coordenades $[0, \ldots, 0, 1]$. Un punt $Q = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i$ té coordenades $[a_0, \ldots, a_n]$.

6.14 Exemple. Considereu l'espai afí $\mathbb{R}^3$, i un punt (x_1, x_2, x_3). Quines són les coordenades afins respecte a la base afí $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$? Són

$$[1 - x_1 - x_2 - x_3\,, x_1\,, x_2\,, x_3].$$

Això vol dir que l'aplicació

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Aff}(3{+}1) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ [x_0, x_1, x_2, x_3] & \longmapsto & x_0 \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + x_1 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + x_2 \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + x_3 \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \end{array}$$

és bijectiva.

El lema següent és molt útil:

6.15 Lema. *Siguin $P_0, \ldots, P_k$ punts de $\mathrm{Aff}(n{+}1) = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i = 1\}$, i siguin $\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_k$ els corresponents vectors de $\mathbb{R}^{n+1}$. (O sigui, $\vec{v}_i = P_i$, però denotant respectivament vectors a $\mathbb{R}^{n+1}$ i punts a $\mathrm{Aff}(n{+}1)$.) Llavors els punts $P_0, \ldots, P_k$ són afinment independents a $\mathrm{Aff}(n{+}1)$ si i només si els vectors $\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_k$ són linealment independents a $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Demostració. Suposem que els vectors $\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_k$ són linealment independents, i suposem que tenim una relació

$$\sum \alpha_i P_i = \sum \beta_i P_i,$$

amb $\sum \alpha_i = \sum \beta_i = 1$. Volem establir que $\alpha_i = \beta_i$, $\forall i$. Escrivim l'equació com a vectors a $\mathbb{R}^{n+1}$, és a dir $\sum \alpha_i \vec{v}_i = \sum \beta_i \vec{v}_i$. Per independència lineal concloem que $\alpha_i = \beta_i \, \forall i$. Per tant, els punts $P_0, \ldots, P_k$ són afinment independents.

Ara suposem que $P_0, \ldots, P_k$ són afinment independents, i suposem que tenim una relació $\sum \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$ com a vectors a $\mathbb{R}^{n+1}$. Volem veure que $\lambda_i = 0$, $\forall i$. Com hem vist (2.9), en aquesta situació necessàriament $\sum \lambda_i = 0$. Per tant, els dos costats de l'equació $\vec{v}_0 + \sum \lambda_i \vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{0}$ en realitat són combinacions afins, és a dir, pertanyen a $\mathrm{Aff}(n{+}1)$. Llavors si escrivim equivalentment $P_0 + \sum \lambda_i P_i = P_0$, la independència afí dels P_i implica $\lambda_i = 0 \, \forall i$, com volíem. $\square$

6.16 Independència en coordenades afins. Siguin $P_0, \ldots, P_n$ una base afí de $\mathbb{A}$, i siguin $Q_0, \ldots, Q_k$ punts de $\mathbb{A}$. Siguin

$$\begin{bmatrix} q_{0j} \\ \vdots \\ \vdots \\ q_{nj} \end{bmatrix}$$

les coordenades afins del punt Q_j. Formen les columnes d'una matriu $(n+1) \times (k+1)$:

$$(q_{ij}) = \begin{bmatrix} q_{00} & \cdots & q_{0k} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n0} & \cdots & q_{nk} \end{bmatrix}$$

on cada columne té suma igual a 1 (la qual cosa la indiquem posant la matriu en claudàtors).

Afirmem que els punts $Q_0, \ldots, Q_k$ són afinment independents si i només si el rang de la matriu és $k+1$. Això és una conseqüència del lema anterior i del resultat conegut de l'àlgebra lineal que caracteritza la independència en termes del rang de la matriu de coordenades.

6.17 Canvi de coordenades afins. Continuant la notació de l'apartat anterior, com un cas particular, suposem $k = n$. Llavors els punts $Q_0, \ldots, Q_k$ són afinment independents (i per tant formen una referència afí) si i només si la matriu de les coordenades és invertible. Sigui ara X un punt arbitrari. S'escriu com $X = \sum_j \alpha_j Q_j$. És a dir, té coordenades

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$$

respecte a la base dels Q_j. Però cada Q_j s'escriu $Q_j = \sum_i q_{ij} P_i$. Per tant,

$$X = \sum_{i,j} \alpha_j q_{ij} P_i.$$

Si escrivim les α_j com un vector columna, concloem que el producte matricial

$$\begin{bmatrix} q_{00} & \cdots & q_{0k} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n0} & \cdots & q_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$$

dóna exactament les coordenades de X respecte als P_i. O sigui, és l'expressió matricial del canvi de coordenades.

7 Parametritzacions i equacions de subespais

7.1 Observacions d'àlgebra lineal: equacions versus parametritzacions. — *Què vol dir resoldre un sistema d'equacions lineals?* Vol dir trobar una descripció paramètrica d'un cert subespai W definit per les equacions, i típicament fem servir l'esglaonament de Gauss. Per exemple, si les equacions són

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 & = & 0 \end{cases}$$

la solució es pot escriure com

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 26 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -19 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

— *Per què la descripció paramètrica és millor que la descripció per equacions?* La parametrització és millor si volem *construir* alguna solució particular: cal només assignar valors a s i t a la parametrització. Però, per a *verificar* si algun vector és solució, les equacions són molt més pràctiques! (Com a experiment, intenteu determinar si $(3, 6, 2, -1)$ és solució — veureu que la parametrització no té gaire utilitat.)

La moral és que tant les equacions com les parametritzacions són útils, i a vegades cal dur a terme el procediment contrari a l'habitual: reconstruir unes equacions a partir d'una parametrització.

En la situació homogènia, construir equacions a partir d'una parametrització és, de fet, el mateix procediment (per exemple esglaonament de Gauss, si transposem correctament). La idea és que si representem els vectors com a columnes,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

llavors una forma lineal $\ell(\vec{x}) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ es pot representar com un vector fila: $(a_1, \ldots, a_n)$. Així l'avaluació $\vec{v} \mapsto \ell(\vec{v})$ esdevé una multiplicació de matrius:

$$\ell(\vec{v}) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Si volem trobar les formes lineals que s'anul·lin en un vector donat $\vec{v}$, estem buscant els vectors fila $(a_1, \ldots, a_n)$ tals que $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$. Si tenim k vectors $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ (on $\vec{v}_j$ té coordenades (columna) $(v_{1j}, \ldots, v_{nj})$) i volem que ℓ s'anul·li en tots els vectors $\vec{v}_j$, estem buscant els vectors fila $(a_1, \ldots, a_n)$ tals que

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Si transposem aquesta equació obtenim una equació matricial de tota la vida, que podem resoldre fàcilment, amb eliminació de Gauss o com volguem.

7.2 Parametritzacions de subespais afins. Cada cop que descrivim un subespai afí $\mathbb{L}$ com generat per alguns punts $Q_0, \ldots, Q_k$, estem donant implícitament una descripció paramètrica

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Aff}(k+1) & \longrightarrow & \mathbb{L} \\ [x_0, \ldots, x_k] & \longmapsto & \sum x_j Q_j, \end{array}$$

i si els punts són afinment independents formen doncs una base afí per a $\mathbb{L}$ de manera que la parametrització esdevé una aplicació invertible. De qualsevol manera, aquesta descripció no depèn de l'espai ambient. La resta de la lliçó tracta de la qüestió de com trobar equacions que defineixin $\mathbb{L}$ dins de l'espai ambient $\mathbb{A}$. Per fer això, evidentment cal saber una mica més sobre la relació entre $\mathbb{L}$ i $\mathbb{A}$, com veurem.

7.3 Equacions afins d'un subespai. Fixem un espai afí $\mathbb{A}$ amb una base afí $P_0, \ldots, P_n$. Sigui $Q_0, \ldots, Q_k$ un conjunt de punts a $\mathbb{A}$. La qüestió que ens plantegem és: donat un punt $X = \sum_i x_i P_i$, com sabem si pertany a la varietat lineal $\mathbb{L} = \overline{Q_0, \ldots, Q_k}$? La resposta ha de passar per un sistema d'equacions amb les incògnites x_i, i naturalment els coeficients han de dependre, d'alguna manera, dels punts Q_j. Necessitem doncs de les coordenades dels Q_j. Escrivim cada punt Q_j com a combinació afí

$$Q_j = \sum_{i=0}^{n} q_{ij} P_i.$$

Observeu les convencions: $i = 0, \ldots, n$ són els índexos de les coordenades afins respecte a la base $P_0, \ldots, P_n$, i els vectors de coordenades són sempre vectors columnes:

$$X = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad Q_j = \begin{bmatrix} q_{0j} \\ \vdots \\ q_{nj} \end{bmatrix}$$

Si els Q_j són dependents, llavors hi ha algun d'ells que és combinació afí dels altres. Llavors descartem aquest punt per a simplificar. Podem suposar, doncs, a partir d'ara que els punts $Q_0, \ldots, Q_k$ són afinment independents, és a dir que formen una base de $\mathbb{L}$, que per tant té dimensió k. Això vol dir exactament que la matriu dels coeficients

$$[q_{ij}] = \begin{bmatrix} q_{00} & \cdots & q_{0k} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n0} & \cdots & q_{nk} \end{bmatrix}$$

té rang maximal, $\operatorname{rang}[q_{ij}] = k + 1$. (Observeu que $k \leq n$: la matriu té més files que columnes.)

Dir que X pertany a $\mathbb{L}$ vol dir que X és combinació afí dels Q_j, o equivalentment, que els punts $Q_0, \ldots, Q_k, X$ són afinment dependents. Equivalentment, els vectors de coordenades són linealment dependents a $\mathbb{R}^{n+1}$ (cf. lema 6.15). Això succeeix quan

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} q_{00} & \cdots & q_{0k} & x_0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ q_{n0} & \cdots & q_{nk} & x_n \end{bmatrix} = k + 1.$$

Això equival a un sistema d'equacions amb una equació per cada $(k+2)$-menor (que ha de ser igual a zero). Cada equació és lineal i homogènia perquè cada fila conté exactament una incògnita x_i. Obtenim així un sistema d'equacions lineals homogènies que defineix $\mathbb{L}$. Però hi ha una redundància entre totes aquestes equacions. Podem trobar un sistema més econòmic si esglaonem la matriu. Com que sabem que la matriu té rang $k+1$, arribem a

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & x_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & x_k \\ 0 & \cdots & 0 & f_{k+1}(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & f_n(\vec{x}) \end{bmatrix},$$

on els $f_i(\vec{x})$ són formes lineals dels $x_0, \ldots, x_n$ que apareixen en fer operacions amb les files de la matriu. Arribem així al següent sistema de $n-k$ equacions lineal homogènies:

$$\begin{cases} f_{k+1}(x_0, \ldots, x_n) &= 0 \\ & \vdots \\ f_n(x_0, \ldots x_n) &= 0 \end{cases}$$

que anomenem *equacions de* $\mathbb{L}$ respecte a la base $P_0, \ldots, P_n$. (Naturalment no podem esperar que aquest sistema sigui únic o canònic en algun sentit: depèn de la manera com esglaonem la matriu. Per exemple, podem arribar a un altre sistema (equivalent) si sumem alguna de les equacions a una altra.)

7.4 Exemple: equació d'una recta al pla. En el pla afí siguin P_0, P_1, P_2 tres punts de referència. Volem trobar l'equació de la recta generada pels dos punts distints

$$\begin{aligned} Q_0 &= q_{00}P_0 + q_{10}P_1 + q_{20}P_2 \\ Q_1 &= q_{01}P_0 + q_{11}P_1 + q_{21}P_2 \end{aligned}$$

(Observem que amb una equació n'hi ha prou, perquè el pla té dimensió 2 i una recta dimensió 1.) El sistema és

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & x_0 \\ q_{10} & q_{11} & x_1 \\ q_{20} & q_{21} & x_2 \end{bmatrix} = 2,$$

que equival a

$$\det \begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & x_0 \\ q_{10} & q_{11} & x_1 \\ q_{20} & q_{21} & x_2 \end{bmatrix} = 0,$$

que, expandit és

$$(q_{10}q_{21} - q_{20}q_{11})x_0 \;+\; (-q_{00}q_{21} + q_{20}q_{01})x_1 \;+\; (q_{00}q_{11} - q_{10}q_{01})x_2 \;=\; 0.$$

7.5 Equacions d'hiperplans — funcionals afins. Els mateixos arguments mostren que un hiperplà està definit per una sola equació. Exactament com en l'exemple anterior, aquesta equació apareix del procediment general com un determinant que ha de ser zero.

Quan descrivim un hiperplà per una equació, com ara

$$H := \{[x_0, \ldots, x_3] \in \mathrm{Aff}(3{+}1) \mid 3x_0 - 5x_1 + x_3 - 4 = 0\}$$

podem interpretar el polinomi $3x_0 - 5x_1 + x_3 - 4$ com una aplicació afí $f : \mathrm{Aff}(3{+}1) \to \mathbb{R}$, i l'hiperplà H es queda descrit com l'antiimatge per f del punt $0 \in \mathbb{R}$.

Si l'espai ambient és un espai afí general $\mathbb{A}$ (de dimensió n), hi podem posar coordenades i repetir l'argument. Arribem a la conclusió que qualsevol hiperplà H d'un espai afí $\mathbb{A}$ es descriu com l'antiimatge de $0 \in \mathbb{R}$ d'alguna aplicació afí $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$,

$$H = f^{-1}(0),$$

i de fet veiem que aquesta aplicació és únicament determinada per H llevat un factor constant no nul. Observeu que aquesta caracterització dels hiperplans no depèn de coordenades!

L'importància que tenen les aplicacions afin d'un espai afí $\mathbb{A}$ a la recta real $\mathbb{R}$ motiva a donar-les un nom: es diuen *funcionals afins*. Doncs tenim una corresponència entre hiperplans i funcionals afins (llevat un factor constant no nul).

7.6 Exemple: equació d'un punt del pla. Sigui $Q = q_0P_0 + q_1P_1 + q_2P_2$ un punt del pla. Com que un punt té dimensió 0 esperem ara que calguin dues equacions per descriure'l. Aquestes dues equacions apareixen com

$$\mathrm{rang}\begin{bmatrix} q_0 & x_0 \\ q_1 & x_1 \\ q_2 & x_2 \end{bmatrix} = 1.$$

Equival a tres(!) equacions:

$$\det\begin{pmatrix} q_1 & x_1 \\ q_2 & x_2 \end{pmatrix} = 0, \qquad \det\begin{pmatrix} q_0 & x_0 \\ q_2 & x_2 \end{pmatrix} = 0, \qquad \det\begin{pmatrix} q_0 & x_0 \\ q_1 & x_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Sabem que amb dues d'aquestes tres equacions n'hi ha prou, però quines dues? Bé, si algun $q_j \neq 0$, llavors podríem pivotar en aquesta entrada de la matriu i esglaonar-la ràpidament. Equival a dir que, si per exemple $q_0 \neq 0$, llavors amb les dues equacions

$$\det \begin{pmatrix} q_0 & x_0 \\ q_2 & x_2 \end{pmatrix} = 0, \qquad \det \begin{pmatrix} q_0 & x_0 \\ q_1 & x_1 \end{pmatrix} = 0.$$

n'hi ha prou. Geomètricament, $q_0 \neq 0$ vol dir que Q no pertany a la recta $\overline{P_1P_2}$. Per tant les rectes $\overline{QP_1}$ i $\overline{QP_2}$ no coincideixen (i no són paral·leles ja que Q pertany a les dues!). Per tant, Q queda caracteritzat també pel fet de ser el punt d'intersecció d'aquestes dues rectes. Com a sistema lineal definint Q podem agafar, doncs, les dues equacions d'aquestes rectes. És fàcil veure que del procediment de l'exemple anterior en resulten exactament les dues equacions corresponents als dos determinants. — Però amb aquests arguments ja estem anticipant el proper tema: la intersecció de varietats lineals.

7.7 Proposició. *La intersecció de dues rectes al pla consisteix en un únic punt, excepte si les rectes són paral·leles (en el qual cas sabem que la intersecció és buida si les rectes són distintes, i igual a tota la recta si les dues rectes coincideixen).*

Demostració. Suposem que les rectes no coincideixen. Llavors podem suposar que una recta és $\overline{P_1P_2}$ i que l'altra recta conté un punt $P_0 \notin \overline{P_1P_2}$. Per tant, P_0, P_1, P_2 constitueixen una base en la qual treballem. La segona recta és $\overline{P_0Q}$ per algun punt

$$Q = a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2,$$

diferent de P_0 (és a dir, no tenim $a_1 = a_2 = 0$). Utilitzem la lletra x per a les coordenades relatives a P_0, P_1, P_2. L'equació de la recta $\overline{P_1P_2}$ és doncs

$$x_0 = 0$$

i l'equació de la recta $\overline{P_0Q}$ és

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a_0 & x_0 \\ 0 & a_1 & x_1 \\ 0 & a_2 & x_2 \end{bmatrix} = 0,$$

o equivalentment,

$$a_1x_2 - a_2x_1 = 0.$$

Volem trobar les solucions simultànies de les dues equacions — recordant sempre que $x_0 + x_1 + x_2 = 1$. De $x_0 = 0$ se segueix $x_2 = 1 - x_1$.

Si suposem $a_1 + a_2 \neq 0$, la segona equació és doncs equivalent a

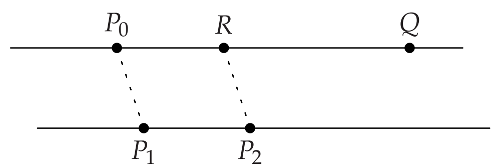
$$x_1 = \frac{a_1}{a_1 + a_2} \qquad x_2 = \frac{a_2}{a_1 + a_2},$$

que és l'única solució en aquest cas.

En el cas $a_1 + a_2 = 0$, la segona equació és equivalent a $x_1 + x_2 = 0$ que és impossible, ja que sabem que $x_0 = 0$ i s'ha de complir també $x_0 + x_1 + x_2 = 1$. Per tant, en aquest cas no hi ha solucions. En aquest cas tenim $a_0 = 1$, de manera que $Q = P_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2$. D'altra banda tenim el punt $R := P_0 - P_1 + P_2$, i els tres punts P_0, Q i R estan alineats, ja que la matriu de les seves coordenades té determinant

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_1 & -1 \\ 0 & a_2 & 1 \end{bmatrix} = a_1 + a_2 = 0.$$

Això vol dir que la recta $\overline{P_0 Q}$ coincideix amb la recta $\overline{P_0 R}$, però aquesta última clarament és paral·lela a $\overline{P_1 P_2}$, com que són costats d'un paral·lelogram (vegeu 3.25).



□

7.8 Lema. *Tres rectes són concurrents o paral·leles si i només si la matriu de les seves coeficients té determinant zero.*

Demostració. Suposem que les equacions de les rectes són

$$\begin{aligned} a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 &= 0 \\ b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 &= 0 \\ c_0 x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 &= 0, \end{aligned}$$

o en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si la matriu té determinant $\neq 0$, llavors sabem que $(0, 0, 0)$ és l'única solució en $\mathbb{R}^3$, però aquesta solució no pertany a $\mathrm{Aff}(2+1)$. Per tant no hi ha cap punt en comú entre les tres rectes en aquest cas. A contrari, si el determinant és igual a 0, llavors el conjunt de solucions forma un subespai vectorial $W \leq \mathbb{R}^3$ de dimensió ≥ 1. O bé aquest W intersecta $\mathrm{Aff}(2{+}1)$, i per tant les tres rectes tenen un punt en comú, o bé $W \leq \{(x_0, x_1, x_2) \mid x_0 + x_1 + x_2 = 0\}$, que és el cas on les tres rectes són paral·leles. $\square$

7.9 Equacions versus parametrització, bis. (Vegeu 7.1.) Hem observat que en realitat, una parametrització no és res més que una aplicació amb domini algun espai estàndard: és una aplicacío

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Aff}(k{+}1) & \longrightarrow & \mathbb{L} \\ [x_0, \dots, x_k] & \longmapsto & \sum x_j Q_j. \end{array}$$

Per tant es tracta de descriure un subespai afí com a imatge d'una aplicacío.

Volem observar que l'altra descripció que tenim, via equacions, en un sentit precís és dual: es tracta de descriure la varietat lineal com a *antiimatge*. De fet, quan escrivim una equació, com ara l'hiperplà

$$H := \{[x_0, \dots, x_3] \in \mathrm{Aff}(3{+}1) \mid 3x_0 - 5x_1 + x_3 - 4 = 0\}$$

podem interpretar el polinomi $3x_0 - 5x_1 + x_3 - 4$ com una aplicació afí $f : \mathrm{Aff}(3{+}1) \to \mathbb{R}$ (funcional afí), i l'hiperplà H es queda descrit com l'antiimatge per f del punt $0 \in \mathbb{R}$. Més generalment, si tenim una varietat lineal $\mathbb{L} \subset \mathbb{A}$ descrita per k equacions, les podem interpretar com k funcionals afins, i $\mathbb{L}$ s'interpreta llavors com la intersecció de les k antiimatges. Alternativament, podem interpretar les k equacions junts com un aplicació afí $g : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^k$, i arribem a la interpretació

$$\mathbb{L} = g^{-1}(0, \dots, 0).$$

Moral: parametritzacions són descripcions per imatge; equacions són descripcions per antiimatges.

8 Raó simple; teoremes de Tales, de Menelao i de Ceva

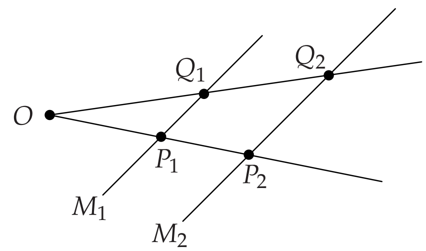
8.1 Raó simple. Siguin P_0 i P_1 punts distints d'un espai afí. Suposem que un tercer punt Q es troba en la recta generada per P_0 i P_1, és a dir, és combinació afí de P_0 i P_1. Això vol dir que per a un únic $r \in \mathbb{R}$ tenim

$$\boxed{Q = (1 - r)P_0 + rP_1} \tag{4}$$

Aquest nombre r es diu *raó simple* de Q i P_1 relativa a P_0. La denotem

$$\rho(P_0, P_1, Q).$$

8.2 Lema. *Dues rectes paral·leles M_1 i M_2 tallen dues rectes concurrents en proporcions iguals. Més exactament, amb la notació de la figura*



i suposant que el punt d'intersecció O no pertany a M_1 o a M_2, tenim

$$\rho(O, P_1, P_2) = \rho(O, Q_1, Q_2).$$

Demostració. Primerament escrivim la condició que M_2 és paral·lela a M_1: completem el paral·lelogram en posant $S = Q_1 - P_1 + P_2$. Ara el fet que Q_2 pertany a M_2 s'escriu

$$Q_2 = (1 - r)P_2 + rS,$$

per a algun $r \in \mathbb{R}$. D'altra, si escrivim

$$P_2 = (1 - t)O + tP_1, \qquad Q_2 = (1 - s)O + sQ_1,$$

l'afirmació és que $s = t$ (i de fet veurem que ambdos són iguals a r també). Calculem Q_2 com a combinació afí de O, P_1, Q_1 en dues maneres. La primera manera és simplement

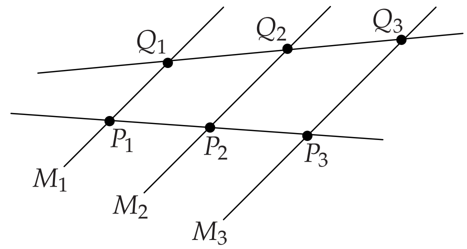
$$Q_2 = (1 - s)O + sQ_1.$$

La segona és

$$\begin{aligned} Q_2 &= (1 - r)P_2 + rS \\ &= (1 - r)((1 - t)O + tP_1) + r(Q_1 - P_1 + P_2) \\ &= (1 - r)((1 - t)O + tP_1) + r(Q_1 - P_1 + ((1 - t)O + tP_1)) \\ &= (1 - t)O + (t - r)P_1 + rQ_1. \end{aligned}$$

Si suposem que O, P_1, Q_1 són afinment independents com ho suggereix la figura, llavors concloem que $s = t = r$ per la unicitat de combinacions afins. Si O, P_1, Q_1 no són afinment independents llavors la configuració és degenerada: o bé $M_1 = M_2$ o bé les dues rectes concurrents coincideixen. En aquests casos l'asserció és evident. $\square$

8.3 Teorema de Tales. *Tres rectes paral·leles, M_1, M_2, i M_3, tallen dues rectes en proporcions iguals. Més exactament, amb la notació de la figura*



tenim

$$\rho(P_1, P_2, P_3) \;=\; \rho(Q_1, Q_2, Q_3).$$

Demostració. Dissenyeu la recta $\overline{P_1Q_3}$ i apliqueu dues vegades el lema anterior. $\square$

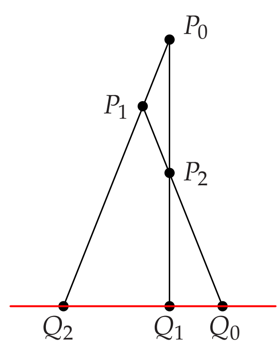
8.4 La configuració bàsica per als teoremes de Menelao i de Ceva. Siguin P_0, P_1, i P_2 punts distints, i siguin Q_0, Q_1, Q_2 tres punts pertanyents a les rectes així:

$$\begin{aligned} Q_0 &\in \overline{P_1P_2} \\ Q_1 &\in \overline{P_2P_0} \\ Q_2 &\in \overline{P_0P_1}\,, \end{aligned}$$

suposats diferents dels tres punts originals.

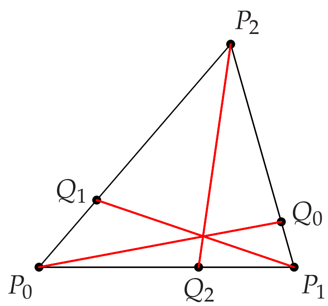
8.5 Teorema de Menelao. *Els punts Q_0, Q_1, Q_2 són alineats si i només si*

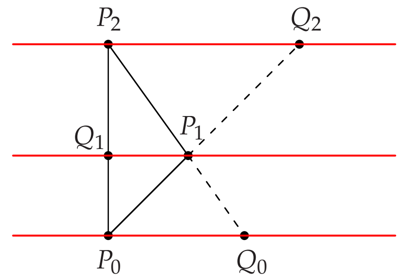
$$\rho(Q_0, P_1, P_2) \cdot \rho(Q_1, P_2, P_0) \cdot \rho(Q_2, P_0, P_1) = 1.$$



8.6 Teorema de Ceva. *Les tres rectes $\overline{P_0Q_0}$, $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_2Q_2}$ són concurrents o paral·leles si i només si*

$$\rho(Q_0, P_1, P_2) \cdot \rho(Q_1, P_2, P_0) \cdot \rho(Q_2, P_0, P_1) = -1.$$





8.7 Preparació per a les demostracions dels dos teoremes. Escrivim

$$\begin{aligned} Q_0 &= \lambda_{10}P_1 + \lambda_{20}P_2 \\ Q_1 &= \lambda_{01}P_0 + \lambda_{21}P_2 \\ Q_2 &= \lambda_{02}P_0 + \lambda_{12}P_1. \end{aligned}$$

És a dir, en coordenades afins respecte a P_0, P_1, P_2 tenim

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_{20} \\ \lambda_{10} \end{bmatrix} \quad Q_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{21} \\ 0 \\ \lambda_{01} \end{bmatrix} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{02} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(Naturalment, $\lambda_{10} + \lambda_{20} = \lambda_{01} + \lambda_{21} = \lambda_{02} + \lambda_{12} = 1$, però aquest fet no tindrà importància en els càlculs.) Llavors tenim

$$\begin{aligned} \rho(Q_0, P_1, P_2) &= -\frac{\lambda_{20}}{\lambda_{10}} \\ \rho(Q_1, P_2, P_0) &= -\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{21}} \\ \rho(Q_2, P_0, P_1) &= -\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{02}}, \end{aligned}$$

per tant,

$$\rho(Q_0, P_1, P_2) \cdot \rho(Q_1, P_2, P_0) \cdot \rho(Q_2, P_0, P_1) = -\frac{\lambda_{10}\lambda_{21}\lambda_{02}}{\lambda_{20}\lambda_{01}\lambda_{12}}.$$

Demostració del teorema de Menelao. Que els tres punts Q_0, Q_1, Q_2 estan alineats, és a dir són dependents, vol dir que

$$\det \begin{bmatrix} 0 & \lambda_{01} & \lambda_{02} \\ \lambda_{10} & 0 & \lambda_{12} \\ \lambda_{20} & \lambda_{21} & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Per tant, (fent el desenvolupament del determinant per la primera columna), $\lambda_{10}\lambda_{21}\lambda_{02} + \lambda_{20}\lambda_{01}\lambda_{12} = 0$, que és equivalent a

$$-\frac{\lambda_{10}\lambda_{21}\lambda_{02}}{\lambda_{20}\lambda_{01}\lambda_{12}} = 1$$

com calia veure. $\square$

Demostració del teorema de Ceva. L'equació que defineix $\overline{P_0Q_0}$ és

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & \lambda_{10} & x_1 \\ 0 & \lambda_{20} & x_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Anàlogament, escrivim les equacions de les rectes $\overline{P_1Q_1}$ i $\overline{P_2Q_2}$. Expandint els tres determinants, les equacions queden

$$\begin{cases} -\lambda_{20}x_1 + \lambda_{10}x_2 & = & 0 \\ \lambda_{21}x_0 - \lambda_{01}x_2 & = & 0 \\ -\lambda_{12}x_0 + \lambda_{02}x_1 & = & 0, \end{cases}$$

o, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\lambda_{20} & \lambda_{10} \\ \lambda_{21} & 0 & -\lambda_{01} \\ -\lambda_{12} & \lambda_{02} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les tres rectes són concurrents o paral·leles exactament quan les tres equacions són dependents (vegeu Lemma 7.8), és a dir quan

$$\det\begin{bmatrix} 0 & -\lambda_{20} & \lambda_{10} \\ \lambda_{21} & 0 & -\lambda_{01} \\ -\lambda_{12} & \lambda_{02} & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Per tant (fent el desenvolupament del determinant per la primera columna), $\lambda_{21}\lambda_{02}\lambda_{10} - \lambda_{12}\lambda_{20}\lambda_{01} = 0$, que és equivalent a

$$-\frac{\lambda_{21}\lambda_{02}\lambda_{10}}{\lambda_{12}\lambda_{20}\lambda_{01}} = -1$$

com calia veure. $\square$

9 Aplicacions afins

9.1 Aplicacions afins. Recordem que una aplicació $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ entre dos espais afins es diu que és una *aplicació afí* si preserva les combinacions afins. És a dir

$$f\Big(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i\Big) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(P_i),$$

sempre que $\sum \alpha_i = 1$. Reservem el terme *afinitat* per a les aplicacions afins d'un espai afí en ell mateix.

9.2 Lema. *La composició de dues aplicacions afins és una aplicació afí. Per a tot espai afí $\mathbb{A}$, l'aplicació identitat* $\mathrm{Id} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ *és una aplicació afí.*

Demostració. Exercici. $\square$

9.3 Observació. El lema diu, en llenguatje més culte, que els espais afins i les aplicacions afins formen una *categoria*. Altres exemples familiars de categories són
— espais vectorials i aplicacions lineals;
— grups i homomorfismes de grups;
— anels i homomorfismes d'anells;
— espais topològics i aplicacions contínues
L'exemple més fonamental és la categoria dels conjunts i totes les aplicacions.

9.4 Isomorfisme afí. Un *isomorfisme afí*, o simplement un *isomorfisme*, entre espais afins, és una aplicació afí $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ per a la qual existeix una altra aplicació afí $g : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}}$ i $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}}$. Diem també que f és *invertible*. Diem que dos espais afins són *isomorfs* si existeix un isomorfisme afí entre ells. Quan dos espais afins són isomorfs podem passar informació entre ells sense pèrdua. Per exemple, si tenim alguna construcció geomètrica en un espai (és a dir alguna construcció amb combinacions afins), la podem transferir a qualsevol espai afí isomorf, i les propietats de la construcció seran preservades. És clar, la nova construcció que en resulta depèn de l'escull de l'isomorfisme.

9.5 Lema. *Si $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ és una aplicació afí bijectiva, llavors la inversa $f^{-1} : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ també és una aplicació afí. En altres paraules: una aplicació afí és invertible si i només si és bijectiva.*

Demostració. Siguin $Q = \sum \alpha_i Q_i$ una combinació afí a $\mathbb{B}$. Com que f és exhaustiva, sabem que existeixen punts $P \mapsto Q$, $P_i \mapsto Q_i$, i de fet són únics, ja que f és bijectiva.

Volem veure que $P = \sum \alpha_i P_i$. Però, com que f és injectiva, és suficient veure que $f(P) = f(\sum \alpha_i P_i)$. Això és cert per construcció i perquè f és aplicació afí. □

9.6 Exemple. Una translació (cf. 3.17) és un exemple d'un isomorfisme afí (d'un espai afí a si mateix).

9.7 Lema. *Un isomorfisme afí preserva bases afins. És a dir, si $P_0, \ldots, P_n$ és una base de $\mathbb{A}$, i si $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ és un isomorfisme afí, llavors $f(P_0), \ldots, f(P_n)$ és una base de $\mathbb{B}$.*

Demostració. Es pot demostrar directament. Però, és més interessant deduïr el resultat dels dos lemes següents, que també són útils separadament: □

9.8 Lema. *Si $P_0, \ldots, P_n$ generen $\mathbb{A}$, i $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ és una aplicació afí exhaustiva, llavors $f(P_0), \ldots, f(P_n)$ generen $\mathbb{B}$.*

Demostració. Que $P_0, \ldots, P_n$ generen $\mathbb{A}$ vol dir que $\Phi_{P_0,\ldots,P_n}$ és exhaustiva. Clarament, romana exhaustiva la composada $f \circ \Phi_{P_0,\ldots,P_n}$, que no és res més que $\Phi_{f(P_0),\ldots,f(P_n)}$. □

9.9 Lema. *Si $P_0, \ldots, P_n$ són afinment independents a $\mathbb{A}$, i $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ és una aplicació afí injectiva, llavors $f(P_0), \ldots, f(P_n)$ són afinment independents a $\mathbb{B}$.*

Demostració. És com la demostració anterior, però amb "injectiva" en comptes de "exhaustiva". □

9.10 Proposició. *Siguin $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ espais afins, i sigui $P_0, \ldots, P_n$ una base afí de $\mathbb{A}$. Llavors especificar una aplicació afí $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ és equivalent a especificar els valors en cadascú dels $n + 1$ punts de la base.*

Demostració. Volem construir f a partir de seus valors en $P_0, \ldots, P_n$. Com que tot punt X és combinació afí dels P_i de manera única, diguem $X = \sum x_i P_i$, i com que una aplicació afí ha de preservar combinacions afins, hem de posar $f(X) = \sum x_i f(P_i)$. Això defineix l'apliació f en tots els punts. Falta verificar que l'aplicació definida és afí: és una rutina de tipus "combinacions afins de combinacions afins són novament combinacions afins". També és una conseqüència de l'observació següent. Dir que els $P_0, \ldots, P_n$ formen una base afí, és equivalent a dir que l'aplicació afí $\Phi_{P_0,\ldots,P_n}$ és bijectiva, és a dir un isomorfisme afí. Per tant, per a definir $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ és suficient definir una aplicació de $\mathrm{Aff}(n+1)$. Les assignacions $P_i \mapsto f(P_i)$ diuen que la f que hem definit correspon a $\Phi_{f(P_0),\ldots,f(P_n)}$ que és afí pel lema 5.12. □

9.11 Proposició. *Dos espais afins de dimensió finita són isomorfs si i només si tenen la mateixa dimensió.*

Demostració. El lema 9.7 implica que els isomorfismes preserven la dimensió. Recíprocament, si $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ tenen la mateixa dimensió n, llavors existeixen una base $P_0, \ldots, P_n$ de $\mathbb{A}$ i una base $Q_0, \ldots, Q_n$ de $\mathbb{B}$. Segons la proposició 9.10 podem construir una aplicació afí $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ especificant $f(P_i) = Q_i$, i una altra aplicació afí $g : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ posant $g(Q_i) = P_i$. És clar que aquestes dues aplicacions són inverses una de l'altra; per tant $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ són isomorfs. □

9.12 Proposició. *Una aplicació injectiva entre espais afins és un aplicació afí si i només si preserva rectes i raons simples.*

(La proposició es refereix només a aplicacions injectives, perquè podem només parlar de raóns respecte a punts distints. Així és necessari abans de tot que l'aplicació "preservi punts distints", és a dir, que sigui injectiva.)

Demostració. Sabem que tota combinació afí es pot escriure com a combinació iterativa de combinacions de dos punts. És a dir, és una construcció amb rectes i combinacions afins en rectes. Així, si f preserva rectes i raons simples aleshores preserva tota combinació afí. □

9.13 Equacions versus parametritzacions, bis-bis. (Vegeu 7.1 i 7.9.) Hem vist que subespais afins descrites per parametritzacions són en realitat imatges, i que subespais afins descrites per equacions són en realitat antiimatges. Les següents observacions banals són molt útils. Sigui $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ una aplicació afí.

Si un subespai afí $\mathbb{L} \subset \mathbb{A}$ ve donat per una parametrització, diguem $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{A}$, llavors és molt fàcil calcular la seva imatge per f: no és res més que la composició

$$\mathbb{R}^d \xrightarrow{p} \mathbb{A} \xrightarrow{f} \mathbb{B},$$

de nou una descripció per parametrització.

Si un subespai $\mathbb{M} \subset \mathbb{B}$ ve donat per c equacions, és a dir $\mathbb{M} = g^{-1}(0, \ldots, 0)$ per a alguna aplicació afí $g : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^c$, llavors és molt fàcil calcular la seva antiimatge per f: no és res més que calcular la composició

$$\mathbb{A} \xrightarrow{f} \mathbb{B} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^c,$$

llavors $f^{-1}(\mathbb{M}) = (g \circ f)^{-1}(0, \dots, 0)$, de nou una descripció per equacions. (Observeu no es tracta de resoldre equacions, només de substituir una en altra. Si escrivim tot en coordenades, estem simplement multiplicant dues matrius — no es tracta de invertir cap matriu.)

Aplicacions afins en coordenades (afins)

9.14 Coordenades afins d'una aplicació afí. Sigui $f : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ una aplicació afí. Fixem una base afí $Q_0, \dots, Q_k$ de $\mathbb{B}$ i una base afí $P_0, \dots, P_n$ de $\mathbb{A}$. Escrivim les imatges dels Q_j en termes dels P_i:

$$f(Q_j) = \sum_i a_{ij} P_i$$

Aquests nombres a_{ij} formen una matriu $(n+1) \times (k+1)$

$$(a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

on cada columna té suma igual a 1.

Donat un punt $X = \sum_j x_j Q_j$ de $\mathbb{B}$, podem calcular $f(X)$ en termes dels a_{ij}:

$$\begin{aligned} f(X) &= f\big(\sum_j x_j Q_j\big) \\ &= \sum_j x_j f(Q_j) \\ &= \sum_j x_j \sum_i a_{ij} P_i \\ &= \sum_{i,j} x_j a_{ij} P_i. \end{aligned}$$

Els x_j són les coordenades de X, de manera que podem escriure l'aplicació en coordenades com

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

Conclusió: en coordenades afins, els dos espais són $\mathrm{Aff}(k+1) \subset \mathbb{R}^{k+1}$ i $\mathrm{Aff}(n+1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, i l'aplicació afí ve donada per la multiplicació per una matriu (on la suma de cada columna és 1): és la restricció d'una aplicació lineal

$$\mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$$

als espais afins estàndards $\mathrm{Aff}(k+1) \to \mathrm{Aff}(n+1)$. És fàcil veure que la composició de dues aplicacions afins ve donada exactament per la composició de les matrius, és a dir llur producte.

De fet tenim:

9.15 Lema. *Una aplicació lineal $A : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ envia $\mathrm{Aff}(k+1)$ a $\mathrm{Aff}(n+1)$ si i només si cada columna de la matriu A té suma igual a* 1.

Demostració. Si A és una matriu $(n+1) \times (k+1)$ amb sumes de columnes igual a 1, i si $\underline{x} \in \mathrm{Aff}(k+1)$, llavors el producte $A \cdot \underline{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ és res més que la combinació afí de les columnes de A amb $\underline{x}$ com a coeficients. Com que les columnes pertanyen a $\mathrm{Aff}(n+1)$, aquesta combinació també. A l'inrevés, suposem que A envia tot vector de $\mathrm{Aff}(k+1)$ a $\mathrm{Aff}(n+1)$. En particular envia cada element de la base (lineal) $\vec{e}_i$ a $\mathrm{Aff}(n+1)$. És a dir $A \cdot \vec{e}_i \in \mathrm{Aff}(n+1)$. Però això és exactament la columna i de A, que per tant té suma igual a 1. $\square$

9.16 Canvi de coordenades (afins). En el cas particular que $\mathbb{B} = \mathbb{A}$ i f és l'aplicació identitat, l'única cosa no trivial que resta és el fet que tenim dues bases: una donada pels $Q_0, \ldots, Q_n$, i l'altra donada pels $P_0, \ldots, P_n$. En aquest cas la matriu (a_{ij}) expressa el canvi de coordenades: si $\vec{x}$ és el vector de coordenades afins d'un punt X respecte a la base $Q_0, \ldots, Q_n$, llavors $A\vec{x}$ és el vector de coordenades afins del mateix punt X respecte a la base $P_0, \ldots, P_n$.

10 Translacions i vectors

10.1 Translacions. Recordeu de 3.17 que dos punts P i Q de $\mathbb{A} \neq \emptyset$ defineixen una aplicació afí

$$\begin{aligned} \tau_Q^P : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ X &\longmapsto X - P + Q \end{aligned}$$

que s'anomena *translació en la direcció de P a Q*.

Ara fem un estudi més a fons de les translacions, i en particular provarem que formen naturalment un espai vectorial. Això és molt important per a importar resultats i tècniques de l'àlgebra lineal. Antecedint aquest resultat, ja canviem de notació i escrivim

$$\overrightarrow{PQ}$$

en comptes de τ_Q^P. A més, per a denotar l'avaluació d'una translació $\overrightarrow{PQ}$ en algun punt X, escriurem

$$X + \overrightarrow{PQ} \ := \ X - P + Q.$$

Recordeu que el punts P i Q que representen una translació $\overrightarrow{PQ}$ no són únics: Tenim $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ si i només si $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$, si i només si els punts formen un paral·lelogram, $S = R - P + Q$. Recordeu també la identitat de Chasles:

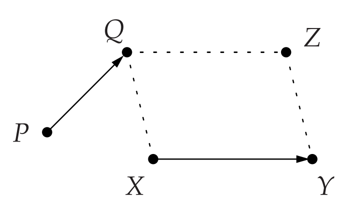
$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

10.2 Proposició. *Les translacions de $\mathbb{A} \neq \emptyset$ formen un grup abelià. És a dir:*

1. *La identitat és una translació (donada per $\overrightarrow{PP}$).*
2. *La composició de dues translacions (denotada $+$) és novament una translació.*
3. *La composició és associativa.*
4. *La inversa de $\overrightarrow{PQ}$ és $\overrightarrow{QP}$.*
5. *Per a tots P, Q, R, S tenim $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{PQ}$.*

Demostració. (1) Evident.

(2) Volem veure que $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{XY}$ és una translació. Formem el paral·lelogram $Z = Q - X + Y$:



Per tant, $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{QZ}$. Ara podem escriure

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QZ} = \overrightarrow{PZ}.$$

(3) Que la composició és associativa és automàtic, ja que es tracta de composició d'aplicacions.

(4) i (5) Evidents. $\square$

10.3 Acció de les translacions en l'espai. Denotem per $T(\mathbb{A})$ el grup de les translacions de $\mathbb{A} \neq \emptyset$, i fem servir símbols com $\vec{v}$, $\vec{w}$ per denotar els elements de $T(\mathbb{A})$. (Veiem tot seguit que $T(\mathbb{A})$ és un espai vectorial.) Com a subgrup del grup dels automorfismes de $\mathbb{A}$ tenim que actua sobre $\mathbb{A}$. Recordeu que això vol dir que tenim una aplicació

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A} \times T(\mathbb{A}) & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ (P, \vec{v}) & \longmapsto & P + \vec{v} \end{array}$$

que satisfà els axiomes:

1. $P + \vec{0} = P$
2. $P + (\vec{v} + \vec{w}) = (P + \vec{v}) + \vec{w}$.

(Observeu que el símbol "+" té dos sentits: en l'expressió $(\vec{v} + \vec{w})$ designa composició de translacions, mentre les altres ocurrències designen l'acció. La confusió de símbols es justifica pel fet que, a final de comptes, es tracta d'una suma en el sentit de combinació afí.)

10.4 Proposició. *L'acció de $T(\mathbb{A})$ en $\mathbb{A} \neq \emptyset$ és simplement transitiva. Vol dir que donats dos punts P i Q, existeix una única translació que porta P a Q.*

Demostració. Evidentment, la translació $\overrightarrow{PQ}$ porta P a Q. Si $\overrightarrow{XY}$ és una altra translació tal que $P + \overrightarrow{XY} = Q$, això vol dir $P - X + Y = Q$. Però això diu exactament que els quatre punts formen un paral·lelogram, i per tant $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{XY}$, d'on la unicitat. $\square$

10.5 Corol·lari. *Tenim $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ'}$ si i només si $Q = Q'$.* $\square$

10.6 Corol·lari. *Si $X + \overrightarrow{PQ} = X$ per a algun punt X, llavors $P = Q$. És a dir, les translacions no trivials no tenen punts fixos.* $\square$

10.7 Lema. *El grup de translacions de $\mathbb{A} \neq \emptyset$ és naturalment un espai vectorial. La multiplicació d'una translació $\overrightarrow{PQ}$ per un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ es defineix com*

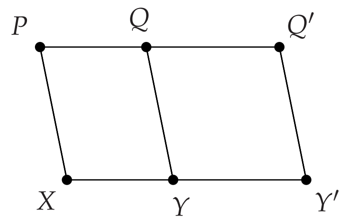
$$\begin{array}{rcl} \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} : \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ X & \longmapsto & X - \lambda P + \lambda Q \\ & = & X - P + \big((1-\lambda)P + \lambda Q\big). \end{array}$$

L'última expressió mostra que és una translació (de P a $(1-\lambda)P+\lambda Q$).

Demostració. La primera cosa a verificar és que la multiplicació per escalars està ben definida, és a dir que no depèn dels representants de la translació: hem de veure que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{XY}$ implica $\lambda \cdot \overrightarrow{PQ} = \lambda \cdot \overrightarrow{XY}$. Suposem doncs $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{XY}$. Això vol dir que $Y = X - P + Q$. Per a λ fixat, posem

$$Q' = (1-\lambda)P + \lambda Q$$
$$Y' = (1-\lambda)X + \lambda Y.$$

Llavors per construcció tenim $\lambda \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ'}$ i $\lambda \cdot \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XY'}$. Així, per provar que aquestes dues translacions coincideixen, hem de veure que els punts P, Q', X, Y' formen un paral·lelogram. Més precisament, $Y' = X - P + Q'$:



És una verificació directa (que ja varem fer en l'exercici 3.16): d'una banda

$$X - P + Q' = X - P + (1-\lambda)P + \lambda Q = X - \lambda P + \lambda Q,$$

i d'altra banda

$$Y' = (1-\lambda)X + \lambda Y = X - \lambda X + \lambda(X - P + Q) = X - \lambda P + \lambda Q.$$

Una prova alternativa de $Q' + \overrightarrow{PX} = Y'$ usa el caràcter afí de les translacions:

$$Q' + \overrightarrow{PX} = \big((1-\lambda)P + \lambda Q)\big) + \overrightarrow{PX} = (1-\lambda)(P + \overrightarrow{PX}) + \lambda(Q + \overrightarrow{PX}) = (1-\lambda)X + \lambda Y.$$

És rutina verificar els axiomes de multiplicació per escalars… $\square$

10.8 Combinació vectorial. L'operació fonamental que tenim és la combinació afí, caracteritzada per la condició $\sum \lambda_i = 1$. Introduïm un nou tipus d'operació, ara amb $\sum \lambda_i = 0$, que anomenem *combinació vectorial*: el resultat no és pas un punt, sinó un vector: per a $\sum \lambda_i = 0$ formem el vector

$$\sum \lambda_i P_i \in T(\mathbb{A}).$$

El lema següent afirma que això està ben definit.

10.9 Lema. *Si $\sum \lambda_i = 0$, llavors l'aplicació*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ X & \longmapsto & X + \sum \lambda_i P_i \end{array}$$

és una translació.

Demostració. L'aplicació té la forma $X \mapsto X - O + P$ on O és un punt arbitrari i $P = O + \sum \lambda_i P_i$. □

10.10 Definició alternativa d'espai afí (com a *torsor*). Hi ha una altra definició d'espai afí que és molt comú, cf. les referències: Un espai afí no buit es pot caracteritzar també com una terna $(\mathbb{A}, V, \tau)$ on $\mathbb{A} \neq \emptyset$ és un conjunt, V és un espai vectorial, i τ és una acció simplement transitiva (denotada per $+$)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} \times V & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ (P, \vec{v}) & \longmapsto & P + \vec{v}, \end{array}$$

és a dir una aplicació que compleix

1. $P + \vec{0} = P, \quad \forall P \in \mathbb{A}$
2. $P + (\vec{v} + \vec{w}) = (P + \vec{v}) + \vec{w}, \qquad \forall P \in \mathbb{A}, \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$
3. Donats $P, Q \in \mathbb{A}$, existeix un únic $\vec{v} \in V$ tal que $P + \vec{v} = Q$.

L'únic $\vec{v}$ tal que $P + \vec{v} = Q$ el denotem $\overrightarrow{PQ}$. Ara (2) implica la identitat de Chasles, $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

Nota: El nom *G-torsor* és comú per a dir "conjunt amb una acció simplement transitiva d'un grup G". Altres terminologies són "G-conjunt principal" i "G-espai principal homogeni".

10.11 Demostració que les dues definicions són equivalents, per a espais no buits. Els arguments de 10.2–10.7 ja demostren que un espai afí en el sentit de combinacions afins és també un espai afí en el sentit de torsors (a condició que sigui no buit): l'espai vectorial V es construeix com l'espai vectorial de les translacions. A l'inrevés, suposem que $(\mathbb{A}, V, \tau)$ és una estructura afí com a 10.10. Podem definir combinacions afins de la manera següent. Si $\sum \alpha_i = 1$ definim $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i$ mitjançant un punt auxiliar O com

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i \;:=\; O + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OP_i}.$$

El següent càlcul directe mostra que la definició no depèn del punt O.

$$\begin{aligned} O' + \sum \alpha_i \overrightarrow{O'P_i} &= O' + \sum \alpha_i (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_i}) \\ &= O' + \sum \alpha_i \overrightarrow{O'O} + \sum \alpha_i \overrightarrow{OP_i} \\ &= O' + \overrightarrow{O'O} + \sum \alpha_i \overrightarrow{OP_i} \\ &= O + \sum \alpha_i \overrightarrow{OP_i}. \end{aligned}$$

10.12 Exercici: Definició alternativa d'espai afí, versió "diferència". Demostreu que la següent definició (cf. [3]) és equivalent a 10.10: Un espai afí $\mathbb{A} \neq \emptyset$ es caracteritza equivalentment com una terna $(\mathbb{A}, V, \varphi)$ on $\mathbb{A} \neq \emptyset$ és un conjunt, V és un espai vectorial, i φ és una aplicació $\varphi : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V$ que compleix

1. Per a tot $P \in \mathbb{A}$, l'aplicació

$$\begin{aligned} \varphi_P : \mathbb{A} &\longrightarrow V \\ Q &\longmapsto \varphi(P, Q) \end{aligned}$$

   és bijectiva. (Escrivim $\overrightarrow{PQ} := \varphi(P, Q)$.)

2. Per a tots $P, Q, R \in \mathbb{A}$ tenim

$$\varphi(P, Q) + \varphi(Q, R) = \varphi(P, R).$$

[Indicació: la simple transitivitat estipulada a 10.10 permet de definir una φ que automàticament serà bijectiva. D'altra banda, donada φ, es defineix l'acció d'un vector $\vec{v}$ per $P + \vec{v} := \varphi_P^{-1}(\vec{v})$, és a dir, el punt Q tal que $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$.]

10.13 Geometria amb vectors. Els càlculs geomètrics que vam fer amb punts i combinacions afins, moltes vegades admeten formulacions més elegants quan fem servir la flexibilitat de la notació matricial.

Per exemple, la raó simple $\rho(P_0, P_1, Q)$ es caracteritza també com l'únic $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$Q = P_0 + r\overrightarrow{P_0P_1} \tag{5}$$

i es caracteritza també com l'únic $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{P_0Q} = r\overrightarrow{P_0P_1} \tag{6}$$

En el lema anterior a Tales, hi havia dues raons $\rho(O, P_1, P_2)$ i $\rho(O, Q_1, Q_2)$ i també un tercer nombre r que va ser una mica deselegant d'escriure. Amb vectors podem caracteritzar r simplement com

$$\overrightarrow{P_2Q_2} = r \cdot \overrightarrow{P_1Q_1}.$$

Altres càlculs de la lliçó 8 admeten formulacions una mica més elegants en termes de vectors.

11 Independència afí i independència lineal

11.1 Proposició. *Un conjunt de punts $P_0, \ldots, P_n$ (d'un espai afí $\mathbb{A} \neq \emptyset$) és afinment independent si i només si*

$$\left[\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = \vec{0},\ \sum \lambda_i = 0\right] \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0\ \forall i. \tag{7}$$

Demostració. Suposem que $P_0, \ldots, P_n$ són afinment independent en el sentit de (2), i suposem que tenim una relació $\vec{0} = \sum \lambda_i P_i$ (combinació vectorial). Volem establir que $\lambda_i = 0\, \forall i$. Però de la relació obtenim

$$P_0 + \sum \lambda_i P_i = P_0,$$

i per (2) això implica $\lambda_i = 0\, \forall i$.

A l'inrevés, suposem (7), i suposem que tenim una relació $\sum \alpha_i P_i = \sum \beta_i P_i$. Volem establir que $\alpha_i = \beta_i\, \forall i$. Però la relació equival a $\sum(\alpha_i - \beta_i) P_i = \vec{0}$, i (7) implica $\alpha_i - \beta_i = 0\, \forall i$. □

11.2 Proposició. *Un conjunt de punts $P_0, \ldots, P_n$ (d'un espai afí $\mathbb{A} \neq \emptyset$) és afinment independent a $\mathbb{A}$ si i només si els vectors $\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}$ són linealment independents a $T(\mathbb{A})$.*

Demostració. Suposem que els vectors $\overrightarrow{P_0P_i}$ són linealment independents. Volem utilitzar la proposició anterior per establir que $P_0, \ldots, P_n$ són afinment independents. Suposem, doncs, que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = \vec{0}$, amb $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 0$ i volem provar $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Amb l'ajut d'un punt auxiliar arbitrari Q calculem

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i &= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{QP_i} \\
&= \lambda_0 \overrightarrow{QP_0} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{QP_i} \\
&= -\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big) \overrightarrow{QP_0} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{QP_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \big(\overrightarrow{QP_i} - \overrightarrow{QP_0}\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}.
\end{aligned}$$

Si aquest vector és zero, la independència lineal dels $\overrightarrow{P_0P_i}$ ens diu que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, i per tant $\lambda_0 = 0$ també.

Ara suposem que els punts $P_0, \ldots, P_n$ són afinment independents. Escrivim una relació $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i} = \vec{0}$ i volem concloure que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Posem $\lambda_0 = -\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$. Ara el càlcul mostra que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = \vec{0}$, i la proposició anterior implica que tots els lambda són 0 com volíem. $\square$

11.3 Observació. Evidentment, a la proposició 11.2, qualsevol dels punts podria jugar el paper de P_0. El mateix és cert per al lema següent.

11.4 Lema. *Un conjunt de punts $P_0, \ldots, P_n$ genera $\mathbb{A} \neq \emptyset$ si i només si el conjunt de vectors $\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}$ genera $T(\mathbb{A})$ linealment.*

Demostració. Variació de la demostració de la proposició 11.2. $\square$

11.5 Corol·lari. *Un conjunt (ordenat) de punts $P_0, \ldots, P_n$ constitueix una base afí de $\mathbb{A} \neq \emptyset$ si i només si els vectors $\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}$ constitueixen una base lineal de $T(\mathbb{A})$.* $\square$

11.6 Corol·lari. *Si $\mathbb{A} \neq \emptyset$, la dimensió de $\mathbb{A}$ (com a espai afí) és igual a la dimensió de $T(\mathbb{A})$ (com a espai vectorial):*

$$\dim \mathbb{A} = \dim T(\mathbb{A}).$$

11.7 Coordenades cartesianes. Si $P_0, \ldots, P_n$ constitueixen una base afí de $\mathbb{A} \neq \emptyset$, tot punt Q es pot representar de manera única com $P_0 + \sum_{i\neq 0} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}$, segons la proposició 11.2. Això vol dir que l'aplicació

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & P_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{P_0P_i} \end{array}$$

és bijectiva. Així doncs, podem fer els càlculs a $\mathbb{R}^n$.

Aquesta forma de coordenatització ens serà molt útil per la seva relació més estreta amb l'espai vectorial de les translacions. Per emfatitzar aquesta relació fem una lleugera reformulació: anomenem *referència cartesiana* de $\mathbb{A}$ l'escull d'un punt $P_0 \in \mathbb{A}$ i d'una base $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ de $T(\mathbb{A})$.

11.8 Comparació. El dos tipus de coordenades són molt similars. És clar que hi ha una bijecció entre bases afins i referències cartesianes, donada per

$$(P_0, P_1, \ldots, P_n) \leftrightarrow (P_o; \overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}).$$

A més a més, respecte a aquestes bases corresponents, les coordenades afins d'un punt $X = \sum x_i P_i$ són

$$[x_0, \ldots, x_n]$$

i les coordenades cartesianes del mateix punt són

$$(x_1, \ldots, x_n)$$

— per tant, es passa d'un tipus a l'altre oblidant x_0 o afegint $x_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i$.

12 Subespais afins i direcció

12.1 Translacions dins un subespai; direcció. Sigui $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ un subespai no buit. Per definició de translació, cada parell de punts $P, Q \in \mathbb{B}$ defineix una translació

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{B} & \longrightarrow & \mathbb{B} \\ X & \longmapsto & X - P + Q, \end{array}$$

que evidentment és la restricció de la translació

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ X & \longmapsto & X - P + Q. \end{array}$$

De manera natural, doncs, les translacions de $\mathbb{B}$ formen un subespai vectorial

$$T(\mathbb{B}) \leq T(\mathbb{A}),$$

format per tots els vectors $\overrightarrow{PQ}$ amb $P, Q \in \mathbb{B}$ (o més precisament: tots els vectors $\vec{w}$ que admeten una representació $\vec{w} = \overrightarrow{PQ}$ amb $P, Q \in \mathbb{B}$). Quan $T(\mathbb{B})$ es considera un subespai vectorial de $T(\mathbb{A})$ s'anomena la *direcció* de $\mathbb{B}$.

12.2 Observació. Atenció: "Direcció" no vol dir "cap a l'esquerra" o "cap a la dreta": és un espai vectorial, no pas un vector.

12.3 Exemple. Quina és la direcció d'una recta $\overline{PQ}$? És l'espai vectorial de totes les translacions de la forma $\overrightarrow{XY}$ amb $X \in \overline{PQ}$ i $Y \in \overline{PQ}$. Si $X = (1-s)P + sQ$ i $Y = (1-t)P + tQ$, llavors

$$\overrightarrow{XY} = -(t-s)P + (t-s)Q = (t-s)\overrightarrow{PQ}.$$

Això mostra que tot vector de $T(\overline{PQ})$ és proporcional a $\overrightarrow{PQ}$. En conclusió: $T(\overline{PQ})$ és l'espai vectorial generat pel vector $\overrightarrow{PQ}$.

Observem també que tot punt de $\overline{PQ}$ és de la forma $P + t\overrightarrow{PQ}$ per algun $t \in \mathbb{R}$.

Un subespai afí $\mathbb{B} \neq \emptyset$ queda completament determinat per un punt arbitrari $P \in \mathbb{B}$ i la direcció $W := T(\mathbb{B})$: en efecte, sabem que per a tot punt $Q \in \mathbb{B}$ hi ha un únic vector $\vec{w} \in W$ tal que $P + \vec{w} = Q$; per tant, podem escriure

$$\mathbb{B} = P + W = \{P + \vec{w} \mid \vec{w} \in W\}.$$

Tot subespai afí de $\mathbb{A}$ és doncs de la forma $P + W$ on $P \in \mathbb{A}$ és un punt i $W \leq T(\mathbb{A})$ un subespai vectorial. El lema següent mostra que tot subespai W és possible:

12.4 Lema. *Sigui $W \leq T(\mathbb{A})$ qualsevol subespai vectorial, i sigui $P \in \mathbb{A}$ un punt. Llavors el conjunt*

$$P + W = \{P + \vec{w} \mid \vec{w} \in W\} = \{Q \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{PQ} \in W\}$$

és un subespai afí de $\mathbb{A}$ amb direcció W.

Demostració. Siguin $Q_i = P + \vec{w}_i$ punts de $P + W$. (És a dir $\vec{w}_i \in W$.) Volem veure que tota combinació afí $\sum \alpha_i Q_i$ també pertany a $P + W$. Tenir $Q_i = P + \vec{w}_i$ és equivalent a

$\vec{w}_i = \overrightarrow{PQ_i}$. Ara calculem

$$\begin{aligned}
\sum \alpha_i Q_i &= P - P + \sum \alpha_i Q_i \\
&= P - \textstyle\sum \alpha_i P + \sum \alpha_i Q_i \\
&= P + \sum (Q_i - P) \\
&= P + \sum \alpha_i \vec{w}_i.
\end{aligned}$$

Atès que els $\vec{w}_i$ pertanyen al subespai W, la combinació lineal també hi pertany, de manera que $P + W$ és un subespai afí. És fàcil veure que la seva direcció és W (la qual asserció és una de les implicacions del lema 12.6 (2)). □

12.5 Lema. *Els següents enunciats són equivalents, per a punts $P, Q \in \mathbb{A}$ i un subespai vectorial $W \leq T(\mathbb{A})$:*

1. $P + W = Q + W$.
2. $\overrightarrow{PQ} \in W$.
3. $P \in Q + W$.
4. $Q \in P + W$.

Demostració. Exercici. □

12.6 Lema. *Sigui $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ un subespai afí no buit.*

1. *Sigui $W := T(\mathbb{B})$. Llavors $\mathbb{B} = P + W \Leftrightarrow P \in \mathbb{B}$.*
2. *Sigui P un punt de $\mathbb{B}$. Llavors $\mathbb{B} = P + W \Leftrightarrow W = T(\mathbb{B})$.*

Demostració. Exercici. □

12.7 Exemple. Hem vist que per a una aplicació lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^c$, i per a $\vec{b} \in \mathbb{R}^c$, el conjunt

$$\mathbb{L} := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{v} = \vec{b}\},$$

de les solucions del sistema $A\vec{v} = \vec{b}$ és un subespai afí de $\mathbb{R}^n$. Afirmem que si és no buit, llavors la seva direcció és els conjunt

$$T(\mathbb{L}) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{v} = \vec{0}\},$$

de les solucions del sistema homogeni associat. De fet, per definició $T(\mathbb{L})$ està format de totes les diferències de punts de $\mathbb{L}$. Ara, d'una banda, la diferència de dues solucions de $A\vec{v} = \vec{b}$ és clarament una solució de $A\vec{v} = \vec{0}$, i d'altra banda, si P és una solució de $A\vec{v} = \vec{b}$ i $\vec{w}$ és una solució del sistema homogeni associat $A\vec{v} = \vec{0}$, llavors sabem que $P + \vec{w}$ també és solució del sistema $A\vec{v} = \vec{b}$.

En particular, l'espai afí estàndard

$$\mathrm{Aff}(n+1) = \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i = 1\}$$

de tots els coeficients possibles de combinacions afins té com a direcció l'espai

$$\{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i = 0\}$$

de tots els coeficients possibles de combinacions vectorials.

12.8 Paral·lelisme. Ja havíem una noció de paral·lelisme per a varietats lineals (5.13): a saber l'existència d'una translació que porta una varietat en l'altra. Ara fem una definició alternativa, equivalent: diem que dos subespais afins no buits d'un espai afí són *paral·lels* si tenen la mateixa direcció.

12.9 Observació. Alguns autors utilitzen la paraula "paral·lel" en un sentit menys estricte: diuen que dos subespais afins són paral·lels si la direcció d'un està continguda en la direcció de l'altre. Segons aquesta definició, però, la relació de paral·lelisme no seria d'equivalència! Per aquesta raó ens quedem amb la noció estricta.

12.10 Proposició. *Les següent condicions són equivalents per a dos subespais afins no buits $\mathbb{L}_0$ i $\mathbb{L}_1$ de $\mathbb{A}$.*

1. *Un és una translació de l'altre. (És a dir, existeix una translació de $\mathbb{A}$ que porta els punts de $\mathbb{L}$ als punts de $\mathbb{L}'$ bijectivament.)*

2. *Tenen la mateixa direcció: $T(\mathbb{L}_0) = T(\mathbb{L}_1)$.*

Demostració. Suposem que $T(\mathbb{L}) = T(\mathbb{L}') = W$. Siguin $P \in \mathbb{L}$ i $P' \in \mathbb{L}'$; afirmem que la translació $\overrightarrow{PP'}$ estableix la bijecció requerida. Efectivament, $\overrightarrow{PP'}$ porta un punt arbitrari $P + \vec{w} \in P + W = \mathbb{L}$ a $P + \vec{w} + \overrightarrow{PP'} = P' + \vec{w} \in P' + W = \mathbb{L}'$.

D'altra banda, sigui $P \in \mathbb{L}$ i sigui $\overrightarrow{PP'}$ una translació arbitrària; suposem que $\mathbb{L}'$ és la translació de $\mathbb{L}$ segons $\overrightarrow{PP'}$. És a dir, $\mathbb{L}' = \{X + \overrightarrow{PP'} \in \mathbb{A} \mid X \in \mathbb{L}\}$. Per abreujar escrivim $X' := X + \overrightarrow{PP'}$ per a qualsevol $X \in \mathbb{L}$. Ara $T(\mathbb{L}') = \{\overrightarrow{P'Q'} \mid Q \in \mathbb{L}\}$. Però $\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ}$, perquè per a qualsevol $X \in \mathbb{L}$ tenim $X + \overrightarrow{P'Q'} = X - P' + Q' = X - P' + (Q - P + P') = X - P + Q = X + \overrightarrow{PQ}$. Per tant, $T(\mathbb{L}') = T(\mathbb{L})$. □

12.11 Lema. *Donats un subespai afí $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ no buit i un punt $P' \in \mathbb{A}$, existeix un únic subespai afí $\mathbb{B}'$ paral·lel a $\mathbb{B}$ i que contingui P'.*

Demostració. Si $\mathbb{B} = P + W$ per a algun $W \leq T(\mathbb{A})$, llavors necessàriament $\mathbb{B}' = P' + W$. □

12.12 Definició alternativa de subespai afí. Segons la definició alternativa 10.10, un espai afí no buit es pot representar com una terna $(\mathbb{A}, V, \tau)$ on $\mathbb{A}$ és un conjunt no buit, V és un espai vectorial, i $\tau : \mathbb{A} \times V \to \mathbb{A}$ és una acció simplement transitiva. Segons aquesta definició, hauríem de definir subespai afí de la següent manera: Un *subespai afí (no buit)* de $(\mathbb{A}, V, \tau)$ és un espai afí no buit $(\mathbb{B}, W, \sigma)$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{B} &\subset \mathbb{A} \quad \text{(subconjunt)} \\ W &\leq V \quad \text{(subespai vectorial)} \\ \tau_{|\mathbb{B}\times W} &= \sigma. \end{aligned}$$

En altres paraules, és un subconjunt $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ amb un subespai vectorial $W \leq V$ tals que la restricció de τ a $\mathbb{B} \times W \to \mathbb{B}$ és un espai afí.

S'observa llavors que $W \leq V$ queda completament determinat per $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ i per la condició que σ sigui restricció de τ. Això és conseqüència de la transitivitat simple de τ: l'espai W ha de ser exactament el subespai vectorial dels vectors que deixin $\mathbb{B}$ invariant.

12.13 Lema. *El subespai generat per $P_0, \ldots, P_k$ es pot representar com*

$$P_0 + W$$

on W és l'espai vectorial generat linealment pels vectors $\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_k}$.

Demostració. $\overline{P_0, \ldots, P_k}$ és el conjunt de combinacions afins $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i$ (amb $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$). Ara podem escriure

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k}\lambda_i P_i &= \lambda_0 P_0 + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_i \\ &= \big(1-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\big)P_0 + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_i \\ &= P_0 + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}.\end{aligned}$$

$\square$

13 Intersecció, suma i les fórmules de Grassmann

13.1 Repàs de la fórmula de Grassmann per a espais vectorials. Per a subespais vectorials d'un espai vectorial tenim les dues operacions "intersecció" i "suma": la intersecció de subespais vectorials V i W es pot definir com el subespai vectorial més gran contingut a tots dos, i no és res més que la intersecció com a conjunts. Contrariament, la suma de V i W es pot definir com el subespai més petit que els conté. Es caracteritza també com el subespai de totes les combinacions lineals possibles de tots els vectors de V i de W. Un tret important de la intersecció de subespais vectorials és que sempre conté l'origen. Aquest fet és un ingredient clau en la demostració de la fórmula de les dimensions de Grassmann per a espais vectorials: *si E és un espai vectorial de dimensió finita, i V i W són subespais vectorials de E, llavors*

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V\cap W). \tag{8}$$

13.2 Envers una fórmula de Grassmann per a espais afins. Per als espais afins, la situació és una mica més complicada: com que no hi ha origen, els subespais afins es poden esquivar, fet aquest que causa algunes anomalies. Per exemple, dues rectes al pla generalment es tallen en un punt, però si són paral·leles llur intersecció és buida (recordeu que $\dim\emptyset = -1$). La clau per entendre aquests fenòmens és la noció de direcció d'un subespai, que permet relacionar la qüestió amb la fórmula per al cas d'espais vectorials.

13.3 Intersecció. La *intersecció* de dos subespais afins és simplement la intersecció com a conjunts. Es caracteritza també com el subespai afí més gran contingut als dos.

Observeu que la intersecció de dos subespais afins pot ser buida!

13.4 Lema. *Siguin $\mathbb{L}_0$ i $\mathbb{L}_1$ dos subespais afins d'un espai afí donat. Si $\mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}_1 \neq \emptyset$, llavors*

$$T(\mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}_1) = T(\mathbb{L}_0) \cap T(\mathbb{L}_1).$$

(Observeu que $\mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}_1 \neq \emptyset$ implica que ja no són buits $\mathbb{L}_0$ i $\mathbb{L}_1$, de manera que també té sentit parlar de $T(\mathbb{L}_0)$ i $T(\mathbb{L}_1)$.)

Demostració. És clar que $T(\mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}_1) \subset T(\mathbb{L}_0) \cap T(\mathbb{L}_1)$. Per veure la inclusió contrària, considerem un vector $\vec{v} \in T(\mathbb{L}_0) \cap T(\mathbb{L}_1)$. Sabem que existeix un punt $X \in \mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}_1$. Com que $\vec{v} \in T(\mathbb{L}_0)$ tenim $Y := X + \vec{v} \in \mathbb{L}_0$, i com que $\vec{v} \in T(\mathbb{L}_1)$ tenim també $Y = X + \vec{v} \in \mathbb{L}_1$. Així $\vec{v} = \overrightarrow{XY} \in T(\mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}_1)$. $\square$

13.5 Suma afí. La *suma afí* — o simplement *suma* — de dos subespais afins $\mathbb{L}_0$ i $\mathbb{L}_1$ és el subespai afí més petit que els conté; el denotem $\mathbb{L}_0 + \mathbb{L}_1$. És doncs l'espai generat per tots els punts de $\mathbb{L}_0$ i $\mathbb{L}_1$ junts, o sigui, el conjunt de totes les combinacions afins dels punts de $\mathbb{L}_0$ i $\mathbb{L}_1$ junts. Per un argument similar al del lema 4.4, si els dos espais són no buits podem realitzar qualsevol combinació d'aquestes com una combinació afí de dos punts: un de $\mathbb{L}_0$ i un de $\mathbb{L}_1$. En aquest cas ($\mathbb{L}_0 \neq \emptyset$, $\mathbb{L}_1 \neq \emptyset$), tenim la fórmula

$$\mathbb{L}_0 + \mathbb{L}_1 = \{\alpha_0 Q_0 + \alpha_1 Q_1 \mid Q_0 \in \mathbb{L}_0, Q_1 \in \mathbb{L}_1, \alpha_0 + \alpha_1 = 1\}.$$

En particular, per a tots $Q_0 \in \mathbb{L}_0$ i $Q_1 \in \mathbb{L}_1$, la recta $\overline{Q_0 Q_1}$ està continguda a $\mathbb{L}_0 + \mathbb{L}_1$. Per aquest motiu, la notació $\overline{\mathbb{L}_0 \mathbb{L}_1}$ també és bona per a denotar la suma.

13.6 Lema. *Si $\mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}_1 \neq \emptyset$, llavors*

$$T(\mathbb{L}_0 + \mathbb{L}_1) = T(\mathbb{L}_0) + T(\mathbb{L}_1).$$

Demostració. Sigui P un punt de la intersecció. Els vectors de $T(\mathbb{L}_0 + \mathbb{L}_1)$ són de la forma $\overrightarrow{PQ}$ on $Q \in \mathbb{L}_0 + \mathbb{L}_1$. Si escrivim $Q = \alpha_0 Q_0 + \alpha_1 Q_1$, llavors podem escriure els vectors de la forma

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= -P + \alpha_0 Q_0 + \alpha_1 Q_1 \\ &= \alpha_0(-P + Q_0) + \alpha_1(-P + Q_1) \\ &= \alpha_0 \overrightarrow{PQ_0} + \alpha_1 \overrightarrow{PQ_1} \end{aligned}$$

exhibint $\overrightarrow{PQ}$ com una combinació lineal d'un vector de $T(\mathbb{L}_0)$ i un vector de $T(\mathbb{L}_1)$. Això estableix la inclusió $T(\mathbb{L}_0 + \mathbb{L}_1) \leq T(\mathbb{L}_0) + T(\mathbb{L}_1)$.

Sigui ara $\vec{w} \in T(\mathbb{L}_0) + T(\mathbb{L}_1)$, és per tant una combinació lineal d'un vector de $T(\mathbb{L}_0)$ i un vector de $T(\mathbb{L}_1)$. Multiplicant si cal aquest vectors per escalars adients, podem suposar que la combinació lineal és

$$\vec{w} = \tfrac{1}{2}\vec{w}_0 + \tfrac{1}{2}\vec{w}_1$$

on $\vec{w}_0 = \overrightarrow{PQ_0}$ per a algun $Q_0 \in \mathbb{L}_0$ i $\vec{w}_1 = \overrightarrow{PQ_1}$ per algun $Q_1 \in \mathbb{L}_1$. Tenim doncs

$$\vec{w} = -P + \tfrac{1}{2}Q_0 + \tfrac{1}{2}Q_1,$$

que és un vector de $T(\mathbb{L}_0 + \mathbb{L}_1)$, segons la descripció que ja hem donat d'aquest espai. Per tant, $T(\mathbb{L}_0) + T(\mathbb{L}_1) \leq T(\mathbb{L}_0 + \mathbb{L}_1)$, com volíem veure. $\square$

Per tant, en el cas que $\mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}_1 \neq \emptyset$, no hi ha sorpreses: la següent versió de la fórmula de Grassmann és una conseqüència immediata de (8):

13.7 Proposició. *Siguin $\mathbb{L}_0$ i $\mathbb{L}_1$ subespais afins de dimensions finites, amb $\mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}_1 \neq \emptyset$. Llavors*

$$\dim(\mathbb{L}_0 + \mathbb{L}_1) = \dim \mathbb{L}_0 + \dim \mathbb{L}_1 - \dim(\mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}_1).$$

$\square$

De fet la fórmula és vàlida també en el cas on $\mathbb{L}_0$ o $\mathbb{L}_1$ és buit.

Si la intersecció és buida, no té sentit parlar de la seva direcció, i l'argument no funciona. De fet, la fórmula anterior sovint és falsa en el cas d'intersecció buida, com mostra el següent exemple.

13.8 Exemple. Siguin $\mathbb{L}_0$ i $\mathbb{L}_1$ dues rectes paral·leles i distints del pla afí $\mathbb{A}$. Llavors $\mathbb{L}_0 + \mathbb{L}_1 = \mathbb{A}$, i la fórmula donaria

$$2 = 1 + 1 - (-1)$$

que és fals.

Per aconseguir una fórmula correcta, hem d'introduir un ajust a nivell de les direccions:

13.9 Proposició. *Siguin $\mathbb{L}_0$ i $\mathbb{L}_1$ subespais afins no buits, de dimensions finites, amb $\mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}_1 = \emptyset$. Llavors*

$$\dim(\mathbb{L}_0 + \mathbb{L}_1) = \dim \mathbb{L}_0 + \dim \mathbb{L}_1 - \dim(T(\mathbb{L}_0) \cap T(\mathbb{L}_1)) + 1.$$

La demostració depèn d'alguns lemes.

13.10 Lema. *Siguin* $\mathbb{L}_0$ *i* $\mathbb{L}_1$ *subespais afins amb punts* $P_0 \in \mathbb{L}_0$ *i* $P_1 \in \mathbb{L}_1$*. Llavors*

$$T(\mathbb{L}_0 + \mathbb{L}_1) = T(\mathbb{L}_0) + T(\mathbb{L}_1) + T(\overline{P_0P_1}).$$

Demostració. Ja sabem que la recta $\overline{P_0P_1}$ està continguda a $\mathbb{L}_0 + \mathbb{L}_1$, de manera que $\mathbb{L}_0 + \mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_0 + \mathbb{L}_1 + \overline{P_0P_1} = \mathbb{L}_0 + (\mathbb{L}_1 + \overline{P_0P_1})$. Ara podem utilitzar el lema 13.6 dues vegades: la primera vegada (fora del parèntesis) perquè la intersecció conté P_0, i la segona (dins del parèntesis) perquè la intersecció en qüestió conté P_1:

$$\begin{aligned} T(\mathbb{L}_0 + \mathbb{L}_1) &= T(\mathbb{L}_0 + (\mathbb{L}_1 + \overline{P_0P_1})) \\ &= T(\mathbb{L}_0) + T(\mathbb{L}_1 + \overline{P_0P_1}) \\ &= T(\mathbb{L}_0) + T(\mathbb{L}_1) + T(\overline{P_0P_1}). \end{aligned}$$

□

La qüestió és ara: quan és $T(\overline{P_0P_1})$ necessari com a part generadora? La resposta ve donada per aquest lema:

13.11 Lema. *Siguin* $\mathbb{L}_0$ *i* $\mathbb{L}_1$ *subespais afins amb punts* $P_0 \in \mathbb{L}_0$ *i* $P_1 \in \mathbb{L}_1$*. Llavors*

$$\overrightarrow{P_0P_1} \in T(\mathbb{L}_0) + T(\mathbb{L}_1) \ \Leftrightarrow\ \mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}_1 \neq \emptyset.$$

Demostració. Comparant la fórmula del lema 13.10 amb la del lema 13.6 ja veiem que si $\mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}_1 \neq \emptyset$ llavors $T(\overline{P_0P_1}) \subset T(\mathbb{L}_0) + T(\mathbb{L}_1)$. Suposem ara que $\overrightarrow{P_0P_1} \in T(\mathbb{L}_0) + T(\mathbb{L}_1)$. Vol dir $\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{w}_0 + \vec{w}_1$, amb $\vec{w}_0 \in T(\mathbb{L}_0)$ i $\vec{w}_1 \in T(\mathbb{L}_1)$. Podem escriure $\vec{w}_0 = \overrightarrow{P_0Q}$, per a algun $Q \in \mathbb{L}_0$, però ara

$$\vec{w}_1 = \overrightarrow{P_0P_1} - \vec{w}_0 = \overrightarrow{P_0P_1} - \overrightarrow{P_0Q} = \overrightarrow{QP_1}.$$

Per tant $Q \in \mathbb{L}_1$. Hem establert que Q pertany a la intersecció. □

Demostració de la proposició 13.9. Amb l'ajut del lema 13.10 escrivim:

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{L}_0 + \mathbb{L}_1) &= \dim T(\mathbb{L}_0 + \mathbb{L}_1) \\ &= \dim\big((T(\mathbb{L}_0) + T(\mathbb{L}_1)) + T(\overline{P_0P_1})\big) \end{aligned}$$

Aquí podem aplicar la fórmula de Grassmann vectorial, observant que pel lema 13.11, $\overrightarrow{P_0P_1} \notin (T(\mathbb{L}_0) + T(\mathbb{L}_1))$:

$$\begin{aligned} &= \dim(T(\mathbb{L}_0) + T(\mathbb{L}_1)) + \dim T(\overline{P_0P_1}) \\ &= \dim(T(\mathbb{L}_0) + T(\mathbb{L}_1)) + 1 \end{aligned}$$

Finalment, apliquem la fórmula de Grassmann vectorial altra vegada:

$$\begin{aligned} &= \dim T(\mathbb{L}_0) + \dim T(\mathbb{L}_1) - \dim(T(\mathbb{L}_0) \cap T(\mathbb{L}_1)) + 1 \\ &= \dim \mathbb{L}_0 + \dim \mathbb{L}_1 - \dim(T(\mathbb{L}_0) \cap T(\mathbb{L}_1)) + 1 \end{aligned}$$

□

13.12 Exemple. Provem que dues rectes $\mathbb{L}_0 \neq \mathbb{L}_1$ del pla $\mathbb{A}$ es tallen en un sol punt si no són paral·leles. De qualsevol manera tenim $\mathbb{L}_0 + \mathbb{L}_1 = \mathbb{A}$. Si les rectes tenen intersecció no buida, la fórmula de Grassmann (13.7) dóna

$$\dim \mathbb{A} = \dim \mathbb{L}_0 + \dim \mathbb{L}_1 - \dim \mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}_1$$

o sigui

$$2 = 1 + 1 - d.$$

Per tant, la dimensió d de la intersecció és 0, que vol dir que és un punt. Si les rectes no el tallen, l'altra fórmula (Proposició 13.9) dóna

$$\dim \mathbb{A} = \dim \mathbb{L}_0 + \dim \mathbb{L}_1 - \dim T(\mathbb{L}_0) \cap T(\mathbb{L}_1) + 1.$$

Per tant, $\dim T(\mathbb{L}_0) \cap T(\mathbb{L}_1) = 1$, la qual cosa implica $T(\mathbb{L}_0) = T(\mathbb{L}_1)$ i les rectes són paral·leles.

14 Linealització: diferencials i coordenades cartesianes

14.1 Translacions. Recordeu de la lliçó 10 que una translació d'un espai afí $\mathbb{A}$ és una afinitat $f = \overrightarrow{PQ}$ definida a partir de dos punts P, Q per

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ X &\longmapsto X - P + Q. \end{aligned}$$

Recordeu també que dos parells de punts, (P, Q) i (R, S), defineixen la mateixa translació, és a dir $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, si i només si els quatre punts formen un paral·lelogram, és a dir $S = R - P + Q$. Finalment, hem vist que les translacions de $\mathbb{A}$ formen un espai vectorial $T(\mathbb{A})$.

La notació additiva $X \mapsto X + \overrightarrow{PQ}$ per una translació $f = \overrightarrow{PQ}$ està justificada perquè la composició de translacions és commutativa. Per a les afinitats generals això no és cert, i *mai* escrivim $X + f$ per $f(X)$.

14.2 La diferencial d'una aplicació afí. Una aplicació afí $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ entre espais afins no buits indueix una aplicació lineal

$$\begin{array}{rcl} Df : T(\mathbb{A}) & \longrightarrow & T(\mathbb{B}) \\ \overrightarrow{PQ} & \longmapsto & \overrightarrow{f(P)f(Q)} \end{array}$$

que anomenem *diferencial* de l'aplicació. Que aquesta definició té sentit és el contingut del lema següent.

14.3 Lema. *1. La definició de Df no depèn dels representants de les translacions. És a dir,* $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \Rightarrow \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{f(R)f(S)}$.

2. $Df : T(\mathbb{A}) \to T(\mathbb{B})$ *és una aplicació lineal.*

3. $Df(\overrightarrow{PQ})$ *és l'única translació que fa commutar el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\overrightarrow{PQ}"'] & \mathbb{B} \arrow[d, "Df(\overrightarrow{PQ})"] \\ \mathbb{A} \arrow[r, "f"'] & \mathbb{B} \end{tikzcd}$$

És a dir

$$\boxed{f(P + \vec{v}) = f(P) + Df(\vec{v})}$$

Demostració. Ad (1): $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ vol dir $S = R - P + Q$. Vegem ara que $Df(\overrightarrow{PQ}) =$

$Df(\overrightarrow{RS})$ avaluant en un punt arbitrari $B \in \mathbb{B}$:

$$\begin{aligned}
B + Df(\overrightarrow{RS}) &= B + \overrightarrow{f(R)f(S)} \\
&= B - f(R) + f(S) \\
&= B - f(R) + f(R - P + Q) \\
&= B - f(R) + f(R) - f(P) + f(Q) \\
&= B - f(P) + f(Q) \\
&= B + \overrightarrow{f(P)f(Q)} \\
&= B + Df(\overrightarrow{PQ}).
\end{aligned}$$

Ad (2): hem de veure que $Df(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Df(\vec{v}_i)$. Escollim un punt P_0, i escrivem cada vector $\vec{v}_i = \overrightarrow{P_0 P_i}$ per algun punt P_i. Ara posem

$$X := P_0 + \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = \big(1 - \sum \lambda_i\big) P_0 + \sum \lambda_i P_i,$$

de manera que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i = \overrightarrow{P_0 X}$. Ara calculem:

$$\begin{aligned}
Df(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i) &= Df(\overrightarrow{P_0 X}) \\
&= \overrightarrow{f(P_0)f(X)} \\
&= -f(P_0) + f(X) \\
&= -f(P_0) + \big(1 - \sum \lambda_i\big) f(P_0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(P_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{f(P_0)f(P_n)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Df(\vec{v}_i).
\end{aligned}$$

Ad (3) Exercici. □

14.4 Lema. *Una aplicació afí f és injectiva, resp. exhaustiva, resp. bijectiva si i només si Df és una aplicació lineal injectiva, resp. exhaustiva, resp. bijectiva.* □

La noció de diferencial d'una aplicació afí és molt important perquè captura la seva part lineal. Més endavant classificarem les afinitats en termes de l'àlgebra lineal de les seves diferencials. (El terme "diferencial" ve del càlcul de les funcions diferenciables i de la geometria diferencial. Advertim que en aquells contexts, la noció de diferencial és menys simple: una funció diferenciable té una diferencial en cada punt. És característic de les aplicacions afins que les diferencials de tots els punts es poden identificar a u sol, que anomenem *la* diferencial.)

14.5 Proposició. *Donades aplicacions afins* $\mathbb{A} \xrightarrow{f} \mathbb{B} \xrightarrow{g} \mathbb{C}$ *entre espais afins no buits, tenim*

$$D(g \circ f) = Dg \circ Df.$$

A més, per a tot espai afí $\mathbb{A}$*, tenim*

$$D(\mathrm{Id}_{\mathbb{A}}) = \mathrm{Id}\,.$$

(És a dir, en llenguatje més culte, que la regla que a cada espai afí $\mathbb{A} \neq \emptyset$ *li associa l'espai vectorial* $T(\mathbb{A})$ *de les translacions de* $\mathbb{A}$ *i que a cada aplicació afí li associa la seva diferencial és un* functor *de la categoria dels espais afins no buits i aplicacions afins a la categoria dels espais vectorials i aplicacions lineals.)*

Demostració. Exercici. □

14.6 Proposició. *Dues aplicacions afins* $f, g : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *entre espais afins no buits són iguals si i només si coincideixen en algun punt i si* $Df = Dg$*.* □

Demostració. Segueix del lema 14.3 (3). □

A més a més:

14.7 Proposició. *Siguin* $\mathbb{A}$ *i* $\mathbb{B}$ *espais afins no buits, i sigui* $\ell : T(\mathbb{A}) \to T(\mathbb{B})$ *una aplicació lineal. Llavors existeix una aplicació afí* $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *tal que* $Df = \ell$*.*

Demostració. Exercici. □

Recordeu que segons la nostra convenció, *afinitat* significa "aplicació afí d'un espai $\mathbb{A}$ en ell mateix".

14.8 Proposició. *Una afinitat* $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ *és una translació si i només si* $Df = \mathrm{Id}$*.*

Demostració. Per a qualsevol punt fixat $P \in \mathbb{A}$ escrivim $P' := f(P)$. Dir que Df és la identitat és dir que per a tot Q tenim $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$. Això és equivalent a $Q' = Q - P + P'$ (per a tot Q). Però això vol dir exactament que $f(Q) = Q + \overrightarrow{PP'}$, és a dir f és la translació $\overrightarrow{PP'}$. □

14.9 El grup afí d'un espai. El conjunt de totes les afinitats invertibles d'un espai afí $\mathbb{A}$ té estructura de grup. S'anomena el *grup afí general* de $\mathbb{A}$ i es denota

$$\mathrm{GA}(\mathbb{A}).$$

Això és anàleg a la definició del grup lineal general $\mathrm{GL}(V)$ d'un espai vectorial — el grup de totes les aplicacions lineals invertibles.

14.10 Proposició. *Per a un espai afí $\mathbb{A} \neq \emptyset$, l'aplicació*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{GA}(\mathbb{A}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(T(\mathbb{A})) \\ f & \longmapsto & Df \end{array}$$

és un homomorfisme de grups exhaustiu, i el seu nucli és exactament el grup de les translacions de $\mathbb{A}$ (és a dir el grup subjacent a $T(\mathbb{A})$).

Demostració. Observem primer que l'aplicació està ben definida: si f és invertible, llavaors Df ho és també, pel lema 14.4. És un morfisme de grups per la proposició 14.5; és exhaustiu per la proposició 14.7, i finalment lema 14.8 ens diu que el seu nucli és exactament el grup de les translacions de $\mathbb{A}$. $\square$

14.11 Caracterització de les aplicacions afins en termes de torsors (cf. 10.10). Si $(\mathbb{A}, V, \tau)$ i $(\mathbb{A}', V', \tau')$ són dos espais afins, segons la caracterització d'espais afins en termes de torsors (10.10), una aplicació afí de $(\mathbb{A}, V, \tau)$ en $(\mathbb{A}', V', \tau')$ consisteix en una aplicació de conjunts $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$, i una aplicació lineal $\tilde{f} : V \to V'$, tal que

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \times V \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "f \times \tilde{f}"'] & \mathbb{A} \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{A}' \times V' \arrow[r, "\tau'"'] & \mathbb{A}' \end{tikzcd}$$

commuta. (Es pot comprovar que $\tilde{f}$ està completament determinada per f.)

Aplicacions afins en coordenades cartesianes

14.12 Coordenades cartesianes d'una aplicació afí. A la llicó 9 hem descrit les aplicacions afins en coordenades afins. Ara veiem la descripció en coordenades cartesianes.

Considerem una aplicació afí $f : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$. Posem $\vec{w}_j = \overrightarrow{Q_0 Q_j}$ formant una base cartesiana de $\mathbb{B}$ d'origen Q_0, i $\vec{v}_i = \overrightarrow{P_0 P_i}$, formant una base cartesiana de $\mathbb{A}$ d'origen P_0. Escrivim

$$Df(\vec{w}_j) = \sum_i m_{ij} \vec{v}_i,$$

i posem

$$f(Q_0) = P_0 + \sum_i b_i \vec{v}_i,$$

és a dir, $(b_1, \ldots, b_n)$ són les coordenades cartesianes de $f(Q_0)$ respecte a la base de $\mathbb{A}$. D'un punt $X = Q_0 + \sum_j x_j \vec{w}_j$ de $\mathbb{B}$ podem calcular la seva imatge

$$\begin{aligned} Y = f(X) &= f(Q_0) + Df(\sum_j x_j \vec{w}_j) \\ &= P_0 + \sum_i b_i \vec{v}_i + \sum_i x_j m_{ij} \vec{v}_i. \end{aligned}$$

En coordenades:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}.$$

La presència del vector constant dels b_i molesta una mica, i no tenim en coordenades cartesianes la mateixa descripció elegant lineal que tenim en coordenades afins. L'economia en el nombre de coordenades (n en lloc de $n+1$) té un preu aquí, que és la falta de linealitat. Però amb un lleuger ajust, la podem obtenir: si augmentem les coordenades amb una entrada extra a la posició zero i si convenim que aquesta entrada sempre serà 1, llavors podem escriure l'equació com

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & m_{11} & \cdots & m_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & m_{n1} & \cdots & m_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}.$$

Si posem $Y = f(X)$ amb coordenades cartesianes $(y_1, \ldots, y_n)$, llavors podem escriure més compactament

$$\begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix}.$$

Amb aquesta trampa, f té una expressió lineal, i és fàcil veure a més que la composició d'aplicacions afins s'expressa com a multiplicació de matrius ampliades d'aquesta manera.

Clarament, la trampa consisteix en ficar el model vectorial $\mathbb{R}^n$ (respectivament $\mathbb{R}^k$) dins de $\mathbb{R}^{n+1}$ (respectivament $\mathbb{R}^{k+1}$) com l'hiperplà definit per $x_0 = 1$. Aquest hiperplà,

$$\mathbb{E}^n := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 = 1\}$$

és un espai afí i no pas un espai vectorial, i en certa manera l'expressió matricial és gairebé una variant de les coordenades afins. Així, en aquest nou model afí amb les matrius ampliades, tot espai afí de dimensió n es modelitza com l'hiperplà $\mathbb{E}^n$, i les aplicacions afins $\mathbb{E}^k \to \mathbb{E}^n$ són modelitzades per matrius de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & M \end{pmatrix}.$$

De fet, per analogia amb 9.15 tenim:

14.13 Lema. *Una aplicació lineal $A : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ envia $\mathbb{E}^k$ a $\mathbb{E}^n$ si i només si la matriu A és de la forma $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ B & M \end{smallmatrix}\right)$.* □

14.14 Exemple. Sabem que una translació $\overrightarrow{PQ}$ té diferencial igual a la identitat. Per tant, en coordenades cartesianes respecte una referència cartesiana amb origen P, la matriu de $\overrightarrow{PQ}$ és $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ B & \mathrm{Id} \end{smallmatrix}\right)$, on B denota el vector de coordenades de Q.

14.15 Canvi de coordenades cartesianes. Observem, exactament com a 9.16, que en el cas particular que $\mathbb{B} = \mathbb{A}$ i f és l'aplicació identitat, l'única cosa no trivial que resta és el fet que tenim dues bases: una donada pels $(Q_0, \overrightarrow{Q_0Q_1}, \ldots, \overrightarrow{Q_0Q_n})$, i l'altra donada pels $(P_0, \overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n})$. En aquest cas la matriu $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ B & M \end{smallmatrix}\right)$ expressa el canvi de coordenades: si $(1, x_1, \ldots, x_n)$ és el vector de coordenades cartesianes d'un punt X respecte a la primera base, llavors

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ B & M \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ X \end{smallmatrix}\right)$$

és el vector de coordenades cartesianes del mateix punt X respecte a la segona base.

14.16 La relació entre les dues descripcions. És un càlcul directe establir la següent relació entre les dues matrius:

$$\begin{bmatrix} a_{00} & \cdots & \cdots & a_{0k} \\ \vdots & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ & C_{n+1} & \\ \\ \\ \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & m_{11} & \cdots & m_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & m_{n1} & \cdots & m_{nk} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \\ & C_{k+1} & \\ \\ \end{pmatrix}$$

on

$$C_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

és la matriu $\mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^{k+1}$ que envia $\mathrm{Aff}(k+1) \subset \mathbb{R}^{k+1}$ bijectivament a $\mathbb{E}^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$.

Tot i que la primera versió matricial, la de les coordenades afins estàndards, pot semblar més elegant, la segona versió té un avantatge molt important: la matriu de $Df = M$ és explícita! Moltes vegades és important saber la forma de Df, com ho veurem en fer la classificació de les afinitats.

15 Afinitats: alguns exemples i trets característics

En aquesta llicó, comencem amb alguns exemples importants d'afinitat, o més precisament, tipus d'afinitats, com ara tranlacions, homotècies, projeccions, reflexions. Per caracteritzar els diferents tipus, estudiem els seus punts fixos i subespais invariants.

15.1 Lema. *Sigui $P \in \mathbb{A}$ un punt. Tota afinitat $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ factoritza de manera única com*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\ell"'] & & \mathbb{A} \\ & \mathbb{A} \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd}$$

on t és una translació i $\ell(P) = P$.

Demostració. Si $f(P) = Q$, llavors si la factorització existeix, necessàriament

$$t = \overrightarrow{PQ}.$$

D'altra banda, com que t és invertible, l'equació $f = t \circ \ell$ és equivalent a

$$\ell = t^{-1} \circ f,$$

que és testimoni que la factorització existeix, i que a més defineix ℓ de manera única. □

15.2 Observació. En coordenades cartesianes respecte una referència cartesiana amb origen P, la factorització de f és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & Df \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & \mathrm{Id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Df \end{pmatrix},$$

on B denota el vector de coordenades de $f(P)$ (cf. exemple 14.14).

15.3 Punts fixos. Un *punt fix* d'una afinitat $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ és un punt P tal que $f(P) = P$. Denotem per $\mathrm{Fix}(f)$ el conjunt de tots els punts fixos de f.

15.4 Exemple. Per trobar els punts fixos d'una afinitat donada en coordenades (diguem cartesianes), cal només resoldre l'equació $f(X) = X$. Per exemple si la matriu ampliada de f és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

llavors hem de resoldre

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

En aquest cas el sistema és incompatible, per tant no hi ha punts fixos.

15.5 Lema. *El conjunt* $\mathrm{Fix}(f)$ *de punts fixos de f és un subespai afí.*

Demostració. Si $P_0, \ldots, P_k$ són punts fixos, volem provar que tota combinació afí $\sum \alpha_i P_i$ és un punt fix també. És un càlcul directe: $f\left(\sum \alpha_i P_i\right) = \sum \alpha_i f(P_i) = \sum \alpha_i P_i$. □

15.6 Lema. *Si* $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$*, la direcció de* $\mathrm{Fix}(f)$ *és l'espai propi de* Df *corresponent al valor propi* 1*.*

Demostració. La restricció de f a $\mathrm{Fix}(f)$ és la identitat, per tant la restricció de Df a la direcció de $\mathrm{Fix}(f)$ és la identitat i el valor propi corresponent és 1. Per tant, $T(\mathrm{Fix}(f))$ està contingut a V_1 (l'espai propi de valor propi 1). D'altra banda, sigui P un punt fix. Si Df té un espai propi V_1 amb valor propi 1, llavors la restricció de f a la varietat lineal $P + V_1$ ha de ser una translació. Però, com que P pertany a la varietat i és un punt fix, aquesta translació és la identitat. Per tant, $P + V_1$ està contingut a $\mathrm{Fix}(f)$. □

15.7 Lema. *Si* $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ *té exactament un punt fix, i si* $\vec{v} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ *és una translació, llavors* $\vec{v} \circ f$ *també té exactament un punt fix.*

Demostració. Si f té només un punt fix, sabem del lema 15.6 que Df no té valor propi 1. És a dir: $(Df - \mathrm{Id})$ és invertible. Hem de resoldre $X = f(X) + \vec{v}$, l'equació dels punts fixos de $\vec{v} \circ f$. Si escrivim $X = P + \vec{w}$, on P és el punt fix de f, l'equació és equivalent a $P + \vec{w} = P + Df(\vec{w}) + \vec{v}$, o encara $(Df - \mathrm{Id})\vec{w} = -\vec{v}$. Com que $(Df - \mathrm{Id})$ és invertible, aquesta equació té una solució única en $\vec{w}$, i així $\vec{v} \circ f$ té un únic punt fix, com afirmat. □

15.8 Proposició. *Una afinitat* f *té un punt fix aïllat (és a dir únic) si i només si* $V_1 = \{\vec{0}\}$ *(és a dir,* 1 *no és valor propi).*

Demostració. Hi ha tres casos. Cas 1: Si P és l'únic un punt fix, llavors pel lema 15.6 tenim $\dim V_1 = \dim \mathrm{Fix}(f) = 0$, com volíem. Cas 2: Si existeix més que un punt fix, llavors agafem dos punts fixos $P \neq Q$, i calculem $Df(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{PQ}$. Veiem que el vector $\overrightarrow{PQ} \neq \vec{0}$ és un vector propi de valor propi 1, i en particular $V_1 \neq \{\vec{0}\}$, com volíem. Cas 3: Si f no té cap punt fix, agafem algun punt P i posem $Q = f(P)$. Llavors P és un punt fix de l'afinitat $\tau_P^Q \circ f$, però segons el lema 15.7 no pot ser un punt fix aïllat, perquè llavors f ja tendria un punt fix aïllat. Per tant 1 és un valor propi de $D(\tau_P^Q \circ f) = Df$ (on fem servir que una translació no afecta la diferencial). És a dir $V_1 \neq \{\vec{0}\}$, com volíem. □

15.9 Subespais invariants. Un subespai afí $\mathbb{L} \subset \mathbb{A}$ s'anomena *invariant* per una afinitat $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ si

$$P \in \mathbb{L} \quad \Rightarrow \quad f(P) \in \mathbb{L}.$$

En particular ens interessen les rectes invariants. Si $\mathbb{L}$ és una recta invariant per a f, i si $\vec{v} \in T(\mathbb{L})$, llavors és clar que $Df(\vec{v})$ també pertany a $T(\mathbb{L})$. Com que $T(\mathbb{L})$ és de dimensió 1, vol dir que

$$Df(\vec{v}) = \lambda\vec{v},$$

és a dir: $\vec{v}$ és un vector propi de Df. Així, si ja coneixem l'afinitat en coordenades, podem buscar els vectors propis, i a partir d'ells esbrinar si hi ha rectes invariants.

Per exemple, *si P és un punt fix, i si $\vec{v}$ és un vector propi de Df (amb valor propi λ), llavors la recta $\mathbb{L} = P + \langle\vec{v}\rangle$ és invariant.* En efecte, $f(P + r\vec{v}) = f(P) + rDf(\vec{v}) = P + r\lambda\vec{v} \in \mathbb{L}$. Observeu que pot haver-hi altres rectes invariants, fins i tot amb la mateixa direcció, com ho veurem en 16.6.

Per trobar rectes invariants que no tenen un punt fix, és una mica més complicat: per a cada vector propi $\vec{v}$ hem de buscar un punt P tal que el vector $\overrightarrow{Pf(P)}$ sigui un múltiple de $\vec{v}$:

15.10 Lema. *Si $\vec{v}$ és un vector propi de Df, i si tenim $\overrightarrow{Pf(P)} = r\vec{v}$, per algun punt P i per algun $r \in \mathbb{R}$, llavors la recta $P + \langle\vec{v}\rangle$ és invariant per a f.*

Demostració. Diguem $Df(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. La segona hipòtesi és equivalent a $f(P) = P + r\vec{v}$. Ara apliquem f a algun punt de la recta: $f(P + t\vec{v}) = f(P) + Df(t\vec{v}) = P + r\vec{v} + \lambda t\vec{v}$, que clarament pertany a la recta també. □

15.11 Exemple. Sigui f l'afinitat amb matriu ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ja hem vist a 15.4 que aquesta afinitat no té cap punt fix. Trobem les seves rectes invariants. Un càlcul d'àlgebra lineal revela que la diferencial $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ té valors propis 1 i 2; un vector propi associat a 1 és $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, i un vector propi associat a 2 és $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Comencem amb el vector propi $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. En aquest cas busquem una recta horizontal: busquem algun punt $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si resolem el sistema trobem que hi ha una solució amb $y = 1$ i $r = 3$ (i llavors x pot ser qualsevol). En conclusió, la recta

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

és una recta invariant, i f actua en aquesta recta com una translació pel vector $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. (Per al segon vector propi, el mateix procediment mostra que no hi ha solució per a cap valor de r; per tant no hi har rectes invariants amb direcció $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

15.12 Exemple. Construïm una afinitat del pla amb les següents propietats: algun punt P és un punt fix, i hi ha una recta L tal que la restricció de f a L és una translació — en particular, L és una recta invariant. *Solució.* Sigui Q un punt de la recta i posem $R = f(Q)$. Vol dir que $f_{|L} = \overrightarrow{QR}$. Per tant, la recta està generada per Q i R. Podem treballar doncs en la base P, Q, R. Per donar una afinitat és suficient especificar el seu valor en cada punt d'una base. Hem de posar $f(P) = P$ (que ha de ser un punt fix), $f(Q) = R$ (per ser la translació) i finalment $f(R) = 2R - Q$. Quina és la diferencial de f? Calculem en la base cartesiana respecte a $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$. El punt Q té coordenades $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ i R té coordenades $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Tenim $Df(\vec{0}) = \vec{0}$ (per tant l'aplicació f és "lineal" en aquesta base), i $Df(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{PR}$ i $Df(\overrightarrow{PR}) = 2\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$. Així, Df ve donada per $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. L'únic valor propi és 1, amb vector propi $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, que és exactament la direcció de L. Vol dir que P no és un punt fix aïllat: tota la recta generada per P i el vector $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ és també de punts fixos. És exactament la recta paral·lela a L que passa per P. En general: *Si la restricció de f a una recta és una translació, i si P és un punt fix, llavors la recta paral·lela a L que passa per P també és de punts fixos.*

Dilatacions

15.13 Dilatacions. Una *dilatació* $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ és per definició una afinitat amb $Df = r\,\mathrm{Id}$, $r \neq 0$. Com que excloem el cas $r = 0$, és clar que les dilatacions són invertibles. També és clar que la composició de dues dilatacions és novament una dilatació. Per tant, les dilatacions formen un grup.

El cas particular $r = 1$ ja coneixem: són les translacions (14.8).

Ara estudiem el cas $r \neq 1$:

15.14 Homotècies. Per a un punt $Z \in \mathbb{A}$ i un nombre real $r \neq 0, 1$, definim la *homotècia* de centre Z i raó $r \neq 0, 1$ com l'afinitat

$$\begin{aligned} h_Z^r : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ X &\longmapsto (1-r)Z + rX. \end{aligned}$$

(Excloem $r = 0$ perquè seria una aplicació constant. El cas $r = 1$ seria la identitat.) En el cas $r = -1$, la homotècia h_Z^{-1} és l'afinitat que també hem anomenat *reflexió central* en Z (3.12). Observem que h_Z^r és invertible amb inversa $h_Z^{1/r}$.

La descripció de h_Z^r en vectors és més suggestiva:

$$\begin{aligned} h_Z^r : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ Z + \vec{v} &\longmapsto Z + r\vec{v}. \end{aligned}$$

Veiem que efectivament tenim $D(h_Z^r) = r\,\mathrm{Id}$, així les homotècies són dilatacions.

15.15 Lema. *El centre Z és l'únic punt fix de l'homotècia h_Z^r, $r \neq 1$.*

Demostració. Això és clar de la descripció en vectors. $\square$

15.16 Lema. *Una homotècia seguida d'una translació és una altra homotècia.*

Demostració. Sigui h_P^r la homotècia i $\overrightarrow{PQ}$ la translació. La composició ve donada per

$$X \mapsto (1-r)P + rX - P + Q = Q - rP + rX.$$

Si posem

$$Z := \frac{Q - rP}{1 - r}$$

tenim $h_Z^r(X) = (1-r)Z + rX = Q - rP + rX$, també. $\square$

15.17 Lema. *Tota afinitat $h : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ amb $Dh = r\,\mathrm{Id}$ (amb $r \neq 0, 1$) és una homotècia de raó r (i algun centre que trobarem a la prova).*

Demostració. Suposem $Dh = r\,\mathrm{Id}$. Sigui P un punt i posem $Q := h(P)$. Sabem pel lema 15.1 que podem factoritzar h com una afinitat g que fixi P seguida de la translació $\overrightarrow{PQ}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "g"'] & & \mathbb{A} \\ & \mathbb{A} \arrow[ur, "\overrightarrow{PQ}"'] & \end{tikzcd}$$

Per tant, $Dg = r\,\mathrm{Id}$ i $g(P) = P$. Però una afinitat està completament determinada pel seu valor en un punt i la seva diferencial, per tant necessàriament $g = h_P^r$. Finalment, el lema anterior mostra que $h = h_Z^r$. $\square$

15.18 Exercici. Demostreu que la composició de dues homotècies de raons r i s és

— o bé una homotècia (és els casos on $rs \neq 1$)

— o bé una translació (és el cas especial on $rs = 1$).

15.19 Exercici. Demostreu que

$$r\overrightarrow{PQ} = h_Z^r \circ \overrightarrow{PQ} \circ h_Z^{1/r}.$$

Projeccions i reflexions

15.20 Projeccions. Una afinitat $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ s'anomena *projecció* si $f \circ f = f$.

Observeu que tot punt de la imatge de f és un punt fix, i és evident que tot punt fix està en la imatge. Posem $\mathbb{E} := \mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Im}(f)$. Posem $W := \mathrm{Ker}\, Df \leq T(\mathbb{A})$. Afirmem que *tot punt $X \in \mathbb{A}$ s'escriu de manera única com $X = P + \vec{w}$, amb $P \in \mathbb{E}$ i $\vec{w} \in W$. Equivalentment, tenim*

$$T(\mathbb{E}) \oplus W = T(\mathbb{A}).$$

Per trobar aquesta descomposició, suposem primer que tenim $X = P + \vec{w}$ com afirmat. Llavors $f(X) = f(P) + Df(\vec{w}) = P + \vec{0} = P$. Per tant, si existeix la descomposició, necessàriament tenim $P = f(X)$, clarament un punt de $\mathbb{E}$. Però ara la equació afirmada determina $\vec{w}$ també: $\vec{w} = \overrightarrow{PX}$. Falta veure si $\vec{w} \in W$. Calculem: $Df(\vec{w}) = Df(\overrightarrow{PX}) = \overrightarrow{f(P)f(X)} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$, com volíem. Queda demonstrada l'afirmació.

Així, la projecció f queda determinada només amb la informació de $\mathbb{E} \subset \mathbb{A}$ i $W \leq T(\mathbb{A})$ tals que $T(\mathbb{E}) \oplus W = T(\mathbb{A})$: la fórmula és

$$f(P + \vec{w}) = P, \qquad P \in \mathbb{E},\ \vec{w} \in W.$$

Podem dir que $\mathbb{E}$ és el subespai afí sobre el qual projectem, i W és la direcció de la projecció. (Observeu que en geometria afí no tenim conceptes com "projecció ortogonal". Per això és necessari especificar la direcció de la projecció.)

Si volem escriure en coordenades, escullim una referència cartesiana

$$(P_0; \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \ldots, w_{n-k})$$

on $P_0 \in \mathbb{E}$, on $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ formen una base lineal de $T(\mathbb{E})$ i on $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_{n-k}$ formen una base lineal de W. Ara la matriu ampliada de f és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_k & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-k} \end{pmatrix}$$

on Id_k és la matriu identitat $k \times k$, i 0_{n-k} és la matriu zero $(n-k) \times (n-k)$.

Hi ha dos casos extrems: si $\mathbb{E}$ és només un punt, llavors f és l'aplicació constant sobre aquest punt. Si $\mathbb{E} = \mathbb{A}$, llavors clarament f és la identitat.

Com a exemple concret intermediari, sigui $\mathbb{A}$ el pla, sigui $\mathbb{E} \subset \mathbb{A}$ una recta, i sigui $\vec{w} \notin T(\mathbb{E})$ un vector (que genera un subespai vectorial de dimensió 1). Agafem una referència cartesiana $(P_0, \vec{v}, \vec{w})$ amb $P_0 \in \mathbb{E}$ i amb $\vec{v} \in T(\mathbb{E})$. Ara la projecció té matriu ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

15.21 Reflexions. Una afinitat $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ s'anomena *reflexió* si $f \circ f = \mathrm{Id}$.

L'analisi de les reflexions és similar a la feta per a les projeccions, però una mica més subtil. Posem $\mathbb{E} := \mathrm{Fix}(f)$, i posem $W := V_{-1} \leq T(\mathbb{A})$, l'espai propi de valor propi -1. Afirmem que *tot punt $X \in \mathbb{A}$ s'escriu de manera única com $X = P + \vec{w}$, amb $P \in \mathbb{E}$ i $\vec{w} \in W$. Equivalentment, tenim*

$$T(\mathbb{E}) \oplus W = T(\mathbb{A}).$$

Per trobar aquesta descomposició, suposem primer que tenim $X = P + \vec{w}$ com afirmat. Llavors $X' := f(X) = f(P) + Df(\vec{w}) = P - \vec{w}$. Tenim

$$X' + \vec{w} = P = X - \vec{w}.$$

Si olvidem P un moment, la equació mostra que necessàriament

$$\vec{w} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{X'X}.$$

A partir d'ali també determinem P:

$$P = X - \vec{w} = \tfrac{1}{2}X + \tfrac{1}{2}X'.$$

Falta veure que realment $\vec{w} \in W$ i que $P \in \mathrm{Fix}(f)$. Són verificacions directes, fent servir que $X' = f(X)$ i que $f \circ f = \mathrm{Id}$: per tant f intercanvia X i X'. Per a $\vec{w}$ calculem $Df(\vec{w}) = Df(\frac{1}{2}\overrightarrow{X'X}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{f(X')f(X)} = \frac{1}{2}\overrightarrow{XX'} = -\vec{w}$, per tant realment $\vec{w} \in W = V_{-1}$. D'altra banda, per a P calculem

$$f(P) = f(\tfrac{1}{2}X + \tfrac{1}{2}X') = \tfrac{1}{2}X' + \tfrac{1}{2}X = P,$$

és a dir que P és un punt fix. Queda demonstrada l'afirmació.

Així, la reflexió f queda determinada només amb la informació de $\mathbb{E} \subset \mathbb{A}$ i $W \leq T(\mathbb{A})$ tals que $T(\mathbb{E}) \oplus W = T(\mathbb{A})$:

$$f(P + \vec{w}) = P - \vec{w}, \qquad P \in \mathbb{E},\ \vec{w} \in W.$$

Podem dir que el subespai afí $\mathbb{E}$ és l'eix de la reflexió (o el mirall), i que W és la direcció de la reflexió. (Observeu que com que en la geometria afí no tenim un concepte d'ortogonalitat, és necessari especificar la direcció per separat.)

Si volem escriure en coordenades, escullim una referència cartesiana

$$(P_0; \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \ldots, w_{n-k})$$

on $P_0 \in \mathbb{E}$, on $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ formen una base lineal de $T(\mathbb{E})$ i on $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_{n-k}$ formen una base lineal de W. Ara la matriu ampliada de f és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_k & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{Id}_{n-k} \end{pmatrix}$$

on Id_k és la matriu identitat $k \times k$, i I_{n-k} és la matriu identitat $(n-k) \times (n-k)$.

Hi ha dos casos extrems: si $\mathbb{E}$ és només un punt, llavors f és la reflexió central en P, ja estudiada en 3.12, i que és també una homotècia de raó -1. Si $\mathbb{E} = \mathbb{A}$, llavors f és la identitat.

Com a exemple concret intermediari, sigui $\mathbb{A}$ el pla, sigui $\mathbb{E} \subset \mathbb{A}$ una recta, i sigui $\vec{w} \notin T(\mathbb{E})$ un vector (que genera un subespai vectorial de dimensió 1). Agafem una referència cartesiana $(P_0, \vec{v}, \vec{w})$ amb $P_0 \in \mathbb{E}$ i amb $\vec{v} \in T(\mathbb{E})$. Ara la reflexió té matriu ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

És un exemple d'una *homologia general*, que estudiem en la propera lliçò.

15.22 "Homotècies relatives". Totes les afinitats estudiades fins ara són exemples de la construcció següent. Sigui $\mathbb{E} \subset \mathbb{A}$ un subespai afí, i sigui $W \leq T(\mathbb{A})$ una direcció complementaria, és a dir $T(\mathbb{E}) \oplus W = T(\mathbb{A})$. Finalment, sigui $r \in \mathbb{R}$. Definim la *homotècia relativa* amb base $\mathbb{E}$, direcció W i raó r com

$$\begin{aligned} h^r_{\mathbb{E},W} : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ P + \vec{w} &\longmapsto P + r\vec{w} \end{aligned}$$

on $P \in \mathbb{E}$ i $\vec{w} \in W$. En coordenades tenim la següent descripció. Escullim una referència cartesiana

$$(P_0; \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \ldots, w_{n-k})$$

on $P_0 \in \mathbb{E}$, on $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ formen una base lineal de $T(\mathbb{E})$ i on $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_{n-k}$ formen una base lineal de W. Ara la matriu ampliada de $h^r_{\mathbb{E},W}$ és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_k & 0 \\ 0 & 0 & r\,\mathrm{Id}_{n-k} \end{pmatrix}$$

on Id_k és la matriu identitat $k \times k$, i I_{n-k} és la matriu identitat $(n-k) \times (n-k)$.

Si $\mathbb{E}$ és només un punt Z, llavors es tracta d'una homotècia de centre Z i raó r. Si $r = 0$ es tracta d'una projecció sobre $\mathbb{E}$ de direcció W. Si $r = -1$ es tracta d'una reflexió d'eix $\mathbb{E}$ i de direcció W. Com esmentat, el cas particular on $\mathbb{E}$ és una recta del pla, es tracta d'una homologia general (com veurem a la propera lliçó).

15.23 Exercici. Hem vist que tant una projecció com una reflexió queda determinada per les dades $\mathbb{E}$ i W (amb $T(\mathbb{E}) \oplus W = T(\mathbb{A})$). Per tant hi ha una bijecció entre el conjunt de projeccions de $\mathbb{A}$ i el conjunt de reflexions de $\mathbb{A}$. L'exercici consisteix en demostrar aquest resultat sense fer servir descomposicions, fent servir només que una projecció p satisfà $p \circ p = p$, i que una reflexió r satisfà $r \circ r = \mathrm{Id}$.

[Indicació: donada p, defineix r com $X \mapsto 2p(X) - X$. I donada r, defineix p com $X \mapsto \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}r(X)$. Cal verificar que aquestes aplicacions són respectivament una reflexió i una projecció, i mostrar que les dues construccions són mutualment inverses.]

Similitud

Hem vist uns exemples de tipus d'afinitats, i podem preguntar quins tipus existeixen. Si volem realment clasificar tots els tipus — i ho farem per al pla a la propera lliçó — hem de decidir quin és el criteri formal de classificació. Un criteri bó és *similitud*.

15.24 Similitud. Diem que dues afinitats $f, g : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ són *similars* si existeix una afinitat invertible $c : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que

$$f = c^{-1} \circ g \circ c.$$

És a dir, dues afinitats són similars quan pertanyen a la mateixa "classe de conjugació".

La idea és que dues afinitats són similars quan tenen les mateixes "propietat afins". I "propietat afí" vol dir una propietat invariant per afinitats invertibles. Totes les propietats estudiades en aquestes lliçons són afins: per exemple

— ser base d'un subespai

— que tres rectes siguin concurrents

— que dos punts siguin idèntics

Clarament, en aquest tres exemples, si és cert l'enunciat llavors també ho és per a la imatge sota una afinitat invertible. Un exemple d'una propietat no afí és "que dues rectes són perpendiculars". De fet, és una propietat que no té sentit en un espai afí general.

Ara afinitats similars tenen les mateixes propietats afins, com per exemple

— no tenir punts fixos

— ser una projecció.

15.25 Lema. *Si dues afinitats són similars, llavors llurs diferencials són similars (com a endomorfismes lineals).*

Demostració. Fàcil. $\square$

La implicació contrària no és certa: afinitats amb diferencials iguals no són necessàriament similars:

15.26 Observació. L'única afinitat similar a la identitat és la identitat. En efecte, si tenim $f = c^{-1} \circ \mathrm{Id} \circ c$ clarament $f = \mathrm{Id}$.

15.27 Lema. *Les translacions és reparteixen en dues classes de similitud: la identitat i les altres. (És a dir: dues translacions no trivials són similars.)*

Demostració. Sigui $\overrightarrow{PQ}$ la primera translació i $\overrightarrow{PR}$ la segona. (Recordeu que qualsevol translació es pot representar per un parell de punts on el primer punt és P.) L'afinitat invertible $c : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ que necessitem l'escollim amb $c(P) = P$ i $c(Q) = R$. (L'existència d'una tal c es pot establir per exemple amb l'ajut d'una base que contingui P i Q i una altra base que contingui P i R. Tals bases existeixen perquè hem suposat que cap de les dues translacions és la identitat.) Ara afirmem que

$$\overrightarrow{PQ} = c^{-1} \circ \overrightarrow{PR} \circ c.$$

En efecte, l'afinitat composada té diferencial trivial, per tant és una translació (14.8), i com que el seu valor a P és Q, ha de ser $\overrightarrow{PQ}$. $\square$

15.28 Lema. *Si* $f \sim g$ *llavors* $\dim \mathrm{Fix}(f) = \dim \mathrm{Fix}(g)$.

Demostració. Suposem $f = c^{-1} \circ g \circ c$. Sigui P un punt fix de f. Llavors tenim $c^{-1} \circ g \circ c(P) = f(P) = P$, i per tant $g \circ c(P) = c(P)$. Així $c(P)$ és un punt fix de g. Vol dir que c aplica punts fixos de f a punts fixos de g, i com que c és invertible, preserva la independència afí, les bases afins, i la dimensió, d'on la conclusió. □

Típicament, l'enunciat contrapositiu

$$\dim \mathrm{Fix}(f) \neq \dim \mathrm{Fix}(g) \ \Rightarrow f \not\sim g$$

és el més útil: ens permet de concloure que dues afinitats *no* són similars. L'anàlisi dels punts fixos ens permet doncs de fer una classificació preliminar, tot i que menys fina que la classificació per similitud. Per exemple:

15.29 Proposició. *Dues afinitats de la recta són similars si i només si tenen les mateixes* $\dim \mathrm{Fix}$ *i la mateixa diferencial. Les possibilitats són:*

$\dim \mathrm{Fix}(f)$	*nom*	Df
-1	*translació*	Id
0	*homotècies*	$r\,\mathrm{Id}\ \ (r \neq 0,1)$
	constant	0
1	*identitat*	Id

Demostració. És clar que $\dim \mathrm{Fix}$ ha de ser -1, 0, o 1, i que les diferencials només poden ser 0, 1, o $r \neq 0, 1$. Ja hem vist tots els casos, excepte el de les afinitats constants. Clarament, una afinitat constant té un únic punt fix, i és pot considerar com una "homotècia de raó 0". La diferencial és 0. □

16 Classificació de les afinitats del pla

Ara passem a estudiar les afinitats del pla.

16.1 Lema. *Si* $f \sim g$ *són afinitats del pla similars, llavors tenen el mateix nombre de rectes invariants.*

Demostració. És clar. □

16.2 Lema. *Si dues rectes són invariants, i si tenen un únic punt en comú P, llavors P és un punt fix.*

Demostració. És evident. $\square$

16.3 Lema. *Al pla, si dues rectes paral·leles són invariants per a una afinita f, llavors totes les rectes paral·leles a elles són invariants.*

Demostració. Siguin L_0 i L_1 les rectes invariants paral·leles, i sigui P un punt fora de les dues rectes. Sigui P_0 un punt de L_0, i sigui P_1 un punt de L_1 tal que els tres punts P, P_0 i P_1 estiguin alineats, diguim que tenim una combinació afí $P = a_0 P_0 + a_1 P_1$. Sigui $\vec{v}$ un generador de la direcció $W := TL_0 = TL_1$. Per ser rectes invariants tenim $\overrightarrow{P_0 f(P_0)} = r_0 \vec{v}$ i $\overrightarrow{P_1 f(P_1)} = r_1 \vec{v}$. Ara calculem

$$\overrightarrow{Pf(P)} = a_0 \overrightarrow{P_0 f(P_0)} + a_1 \overrightarrow{P_1 f(P_1)} = a_0 r_0 \vec{v} + a_1 r_1 \vec{v} = (a_0 r_0 + a_1 r_1)\vec{v},$$

i així la recta $P + W$ també és una recta invariant. $\square$

Afinitats del pla que tenen una recta de punts fixos

16.4 Lema. *Si $f : \mathbb{A} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}$ és una afinitat invertible del pla, i si* $\mathrm{Fix}\, f$ *és una recta L, llavors tot punt de $\mathbb{A}$ pertany a alguna recta invariant.*

Demostració. Sigui $Q \notin L$, i posem $Q' := f(Q)$. Afirmem que $\overline{QQ'}$ és una recta invariant. Hi ha dos casos: si la recta $\overline{QQ'}$ talla L en algun punt P, llavors P i Q formen una base de $\overline{QQ'}$. Però $P \mapsto P \in \overline{QQ'}$ i $Q \mapsto Q' \in \overline{QQ'}$, per tant tots els punts de $\overline{QQ'}$ s'envien a $\overline{QQ'}$, és a dir $\overline{QQ'}$ és invariant.

El segon cas és quan $\overline{QQ'}$ és paral·lela a L. Això vol dir que $Q' = Q + \vec{v}$, on $\vec{v} \in T(L)$. Però ara $f(Q') = f(Q) + Df(\vec{v}) = Q + 2\vec{v}$, que també pertany a $\overline{QQ'}$. Per tant f deixa $\overline{QQ'}$ invariant. De fet veiem que la restricció de f a $\overline{QQ'}$ és la translació $\vec{v} \in T(L)$. $\square$

16.5 Homologies generals. Si estem al primer cas de la demostració, és a dir, si la recta $\overline{QQ'}$ talla L en un punt P, llavors P és un punt fix de $f_{|\overline{QQ'}}$, i el vector $\vec{w} := \overrightarrow{PQ}$ és un vector propi d'algun valor propi r que no pot ser 1 (ja que seria $f = \mathrm{Id}$) i tampoc pot ser 0 (ja que f no seria invertible). Ara tot punt de $\mathbb{A}$ s'escriu com $X + a\vec{w}$ amb $X \in L$, i tenim

$$f(X + a\vec{w}) = X + ra\vec{w},$$

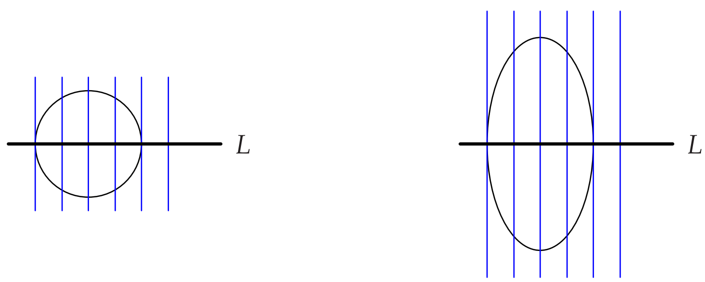
la qual cosa prova que totes les rectes paral·leles a $\overline{PQ}$ també són rectes invariants. En cadascuna d'aquestes rectes, la restricció de f és una homotècia de raó r amb centre sobre L.

Aquest tipus d'afinitat s'anomena *homologia general* de raó r; la denotem $h^r_{L,\vec{w}}$. (És un cas particular de les "homotècies relatives" de 15.22. És determinada per L i la direcció $\vec{w}$. Afinitats d'aquest tipus són similars si i només si llur raó és igual: és clar que la raó ha de ser igual, perquè es pot determinar amb la diferencial. D'altra banda, si en tenim una altra, $h^r_{L',\vec{w}'}$ (de la mateixa raó) existeix una afinitat c que aplica L a L' i tal que $Dc(\vec{w}) = \vec{w}'$. Ara és fàcil veure que $c \circ h^r_{L,\vec{w}} = h^r_{L',\vec{w}'} \circ c$.

Un exemple representatiu d'homologia general de raó r (o descripció en coordenades cartesianes apropiades) és

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ r\,y \end{pmatrix} \end{array}$$

La diferencial és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$.



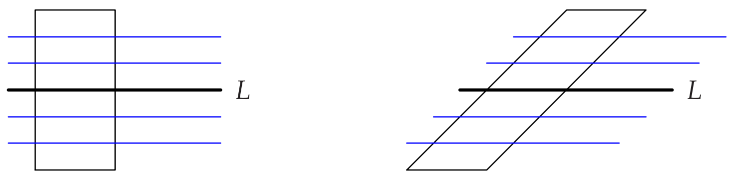
Observeu en particular que per una homologia general, la diferencial tés valors propis 1 i r. En el cas $r = -1$,tenim una reflexió (que per tant es pot considerar un cas particular d'homologia general).

16.6 Homologies especials. Si estem al segon cas de la demostració, és a dir, la recta $\overline{QQ'}$ no talla L, llavors tenim $\overrightarrow{QQ'} \in T(L)$. És clar que totes les altres rectes són paral·leles a aquesta: si no, hi hauria un punt d'intersecció fora de L, per tant un punt fix, però sabem que no hi ha punts fixos fora de L. La restricció de f a cadascuna d'aquestes rectes és per tant una translació. Observem que com que totes les rectes invariants són paral·leles, hi ha només un valor propi, que és la direcció de L, i l'únic valor propi és 1.

Si agafem un punt $P_0 \in L$ i els vectors $\overrightarrow{QQ'}$ i $\overrightarrow{P_0Q}$ com a referència cartesiana, l'afinitat és

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \binom{x}{y} & \longmapsto & \binom{x+y}{y} \end{array}$$

i la diferencial $Df = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.



Una tal afinitat s'anomena *homologia especial*. El terme anglès *shear* és més suggerent. És fàcil veure que totes les homologies especials són similars entre elles.

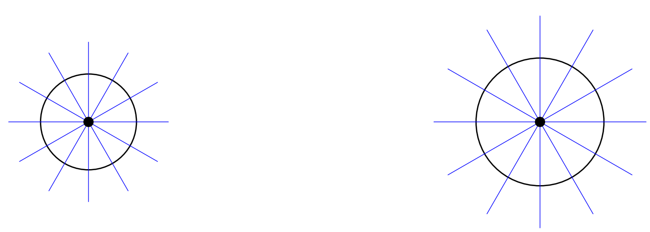
Això completa la classificació de les afinitats amb recta fixa.

Afinitats del pla que tenen només un punt fix

Sigui O el punt fix.

Fem una classificació segons les configuracions de rectes invariants. Si existeix una recta invariant llavors ha de passar per O (cf. exemple 15.12). Hi ha quatre casos:

16.7 Totes les rectes passant per O són invariants: homotècia. Si hi ha tres o més rectes invariants llavors totes les rectes que passen per O són invariants. En efecte, cada recta invariant correspon a un vector propi de Df, i si n'hi ha tres llavors és perquè són tots del mateix valor propi. Per tant, en aquest cas, tenim $Df = \left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right)$ i f és una homotècia de centre O i raó $r \neq 1$. Dues afinitats així són similars si i només si tenen la mateixa raó.



16.8 Dues rectes invariants: afinitat hiperbòlica. Si hi ha dues rectes invariants L_1 i L_2, vol dir que hi ha dos vectors propis independents de valors propis distints (i distints de 1). Aquest tipus d'afinitat es diu *afinitat hiperbòlica*. En aquest cas tenim $Df = \left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right)$.

Una tal afinitat és una composició d'una homologia general d'eix L_1 i direcció L_2 i raó s i una altra homologia general d'eix L_2 i direcció L_1 i raó r, en qualsevol ordre. No és res més que dir que

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

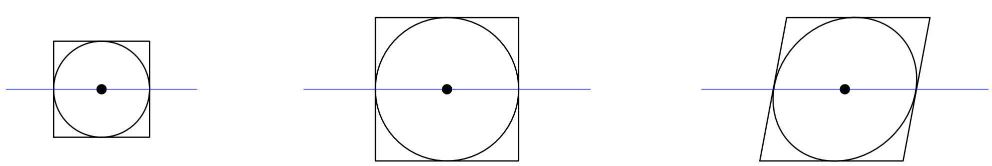
Es pot realitzar també com una homologia general d'eix L_1 i direcció L_2 i raó s/r seguida d'una homotècia de centre O i raó r:

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

i clarament hi ha altres variacions de com obtenir f usant homologies i homotècies. És clar que dues afinitats d'aquestes són similars si i només si tenen el mateix conjunt de valors propis $\{r, s\}$.

16.9 Una sola recta invariant: afinitat parabòlica. Si f té només una recta invariant (aquest tipus d'afinitat es diu *afinitat parabòlica*), vol dir que Df té només un vector propi, i que el valor propi corresponent r és diferent de 1 (sinó seria una recta fixa més aviat que invariant). Algebraicament això vol dir que la diferencial Df no és diagonalitzable: ha de ser similar a la matriu $\begin{pmatrix} r & r \\ 0 & r \end{pmatrix}$. (Observeu que aquest cas té el mateix polinomi característic que el cas de l'homotècia de raó r, exemplificant que el polinomi característic no és suficient per a classificar les matrius llevat similitud.) Per descriure geomètricament una afinitat amb aquesta diferencial, la podem realitzar com la composició d'una homotècia de raó r i una homologia especial (en qualsevol ordre):

$$\begin{pmatrix} r & r \\ 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$



16.10 Cap recta invariant: afinitat el·líptica. Finalment pot succeir que no hi hagi cap recta invariant. Aquest tipus d'afinitat es diu *afinitat el·líptica*. Algebraicament es caracteritzen pel fet que la diferencial no té vectors propis, (és a dir, els valors propis són complexos). Geomètricament vol dir que hi ha algun tipus de rotació en joc. Ara bé, veritables rotacions com les coneixem de la geometria euclidiana, diguem una rotació d'algun angle (diferencial igual a $\left(\begin{smallmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{smallmatrix}\right)$ per algun "angle" θ) no tenen molt de sentit en geometria afí, perquè després d'un canvi de coordenades deixaria de ser una rotació. En geometria euclidiana sabem (o sabrem) que tota rotació és la composició de dues reflexions ortogonals respecte d'eixos que passen pel centre de la rotació. En geometria afí no té sentit parlar d'ortogonalitat, i especificar un eix no és suficient per especificar una reflexió. Hem d'especificar també la direcció. Si diem "rotació afí" (de centre O) per a qualsevol composició de dues reflexions respecte d'eixos que passen per O, llavors tenim una classe d'afinitats amb O com a punt fix i sense rectes invariants. Les afinitats el·líptiques s'obtenen a partir d'aquestes rotacions afins composant-les amb una homotècia.

Veure això depèn de la classificació de les matrius llevat similitud: sabem que tota matriu sense valors propis reals és similar a

$$\begin{pmatrix}0 & -c\\ 1 & -b\end{pmatrix}, \qquad b^2-4c<0$$

o equivalentment, amb $s^2=c$ i $2ks=-b$,

$$\begin{pmatrix}0 & -s^2\\ 1 & 2ks\end{pmatrix}, \qquad k^2<1$$

Per exemple, la matriu de rotació,

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\cos\theta\end{pmatrix},$$

i per tant, $s=1$ i $k=\cos\theta$. Les matrius amb $s=1$ són exactament les rotacions afins: podem escriure

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2k\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

i les dues matrius de la dreta són reflexions. (Pot ser que no sigui evident per la forma de les matrius que aquestes siguin reflexions, però és clar que els quadrats són la identitat.) Més generalment, podem escriure

$$\begin{pmatrix}0 & -s^2\\ 1 & 2ks\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & s\\ s^{-1} & 0\end{pmatrix}}_{\text{reflexió}}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2ks\\ 0 & -1\end{pmatrix}}_{\text{reflexió}}\underbrace{\begin{pmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{pmatrix}}_{\text{homotècia}}$$

Afinitats del pla sense punt fix

Si no hi ha cap punt fix, ja sabem (15.8) que Df té valor propi 1. Llavors pot passar que el valor propi 1 tingui multiplicitat 2, per tant $Df = \mathrm{Id}$, i f ha de ser una translació. Si 1 és l'únic valor propi (i de multiplicitat 1), llavors és una homologia especial seguida de translació de direcció diferent al conjunt de rectes invariants. Si hi ha un altre valor propi, llavors és una homologia general seguida de translació de direcció la de la recta de punts fixos de l'homologia...

16.11 Més que una recta invariant: translació. Si existeixen dues rectes invariants, han de ser paral·leles, perquè qualsevol punt d'intersecció seria un punt fix. Llavors és fàcil veure que totes les rectes paral·leles són invariants també, i que necessàriament f és una translació. De fet la restricció de f a una de les rectes invariants L és una translació de vector $\vec{v} \in T(L)$. Per tant, $T_{\vec{v}} \circ f$ té L com a recta fixa i les rectes paral·leles com a rectes invariants però no fixes, de manera que $T_{\vec{v}} \circ f$ és una homologia especial. Però una homologia especial seguida d'una translació en la direcció de l'eix és de nou una homologia especial, contradicció. Per tant, f és una translació.

16.12 Lema. *Qualssevol dues translacions diferents de la identitat són similars.*

Demostració. Considerem dos vectors $\vec{v}$ i $\vec{w}$ i les translacions $T_{\vec{v}}$ i $T_{\vec{w}}$. Hem de construir $c : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que $T_{\vec{w}} \circ c = c \circ T_{\vec{v}}$. Això vol dir que per a tot P tenim $c(P) + \vec{w} = c(P + \vec{v}) = c(P) + Dc(\vec{v})$. És doncs suficient trobar un c amb $Dc(\vec{v}) = \vec{w}$, la qual cosa és clarament sempre possible. □

16.13 Hi ha només una recta invariant. Si hi ha només una recta L invariant per f, la restricció de f a L seria una translació de vector $\vec{v} \in T(L)$, i per tant $T_{-\vec{v}} \circ F$ tindria L com a recta fixa i les rectes paral·leles no serien invariants. Per tant, $T_{-\vec{v}} \circ f$ és una homologia general d'eix L. Conclusió: f és una homologia general seguida d'una translació amb la direcció de l'eix L.

16.14 Exemple. L'afinitat f amb matriu ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hem vist en 15.4 que no té cap punt fix, i en 15.11 hem trobat que té una única recta invariant,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

i que f actua en aquesta recta com una translació pel vector $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Si composem f amb la translació $\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ obtenim

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

i un càlcul directe mostra que ara la recta consisteix de punts fixos, i que de fet és una homologia general.

16.15 No hi ha rectes invariants. Però encara sabem que 1 és valor propi de Df, amb vector propi algun $\vec{v}$. Això vol dir que tota recta L de direcció $\vec{v}$ s'aplica a una altra recta de direcció $\vec{v}$. Ara si per algun punt P composem amb la translació que envia $f(P)$ a P tenim una afinitat amb L com a recta fixa, i totes les rectes paral·leles a L invariants. Per tant, és una homologia especial d'eix L. En conclusió, f és la composició d'una homologia especial seguida d'una translació en una direcció independent de l'eix.

Així hem finalitzat la classificació de les afinitats del pla.

A Apèndix: Axiomàtica de les combinacions afins

A.1 Combinacions afins. Hem dit que un espai afí és un conjunt $\mathbb{A}$ on es poden formar *combinacions afins*:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i \qquad\qquad \text{on } \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1.$$

En la pràctica, gairebé tot els nostres exemples són o bé espais vectorials o bé subespais afins d'espais vectorials donats com conjunts de solucions de sistemes d'equacions lineals. En aquests casos, les combinacions afins són casos particulars de combinacions lineals a l'espai vectorial ambient, i per això les manipulacions que fem amb elles en tant que combinacions lineals també són vàlides en tant que combinacions afins (evidentment a condició que romanen combinacions afins).

Para espais afins generals, és correcte la intuició que les manipulacions vàlides són aquelles vàlides per a combinacions lineals. Això no és perquè sigui automàtic — com ho mostra l'exemple següent — sinó perquè exigim aquestes identitats com a axiomes.

A.2 No-exemple. Sense axiomes, podríem pensar que el següent seria un espai afí: $\mathbb{A}$ és el conjunt $\{A, B, C\}$ de tres elements, i definim que qualsevol combinació afí tingui valor igual a A. Per exemple, $0{\cdot}A + 0{\cdot}B + 1{\cdot}C = A$. Això és ara un conjunt on es poden fer combinacions afins, però no volem considerar-lo un espai afí, perquè no té les propietats geomètriques que esperem d'un espai afí. Els axiomes següent exclouen tals exemples ridículs.

A.3 Axiomes de Mac Lane i Birkhoff [*Algebra*, 1967]. Perquè un conjunt amb combinacions afins sigui un espai afí, les combinacions afins han de satisfer ells següents axiomes:

A1: L'ordre dels termes no importa. (Per exemple, $\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 = \alpha_1 P_1 + \alpha_0 P_0$.)

A2: $1 \cdot P = P$.

A3: Si apareix un terme amb coeficient 0 el podem eliminar de la suma:

$$0{\cdot}P \ + \ \textstyle\sum \beta_j Q_j = \sum \beta_j Q_j.$$

A4: Si un punt P apareix dues vegades (o més), podem agrupar els termes en una sola ocurrència sumant els coeficients:

$$\lambda_0 P + \lambda_1 P \ + \ \textstyle\sum \beta_j Q_j \ = \ (\lambda_0 + \lambda_1) P \ + \ \sum \beta_j Q_j \qquad\qquad \text{on } \lambda_0 + \lambda_1 + \sum \beta_j = 1.$$

(Observeu que segons l'axioma A1, no importa on en la nova suma posem el nou terme.)

A5: Podem distribuir coeficients sobre combinacions afins embutides:

$$\beta_0 \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i \right) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j Q_j \;=\; \sum_{i=0}^{n} \beta_0 \alpha_i P_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_j Q_j$$

(La combinació afí a l'esquerra és una suma amb $k+1$ termes (és a dir $\sum_{j=0}^{k} \beta_j = 1$), i el primer punt és per sí una combinació afí amb $n+1$ termes (és a dir $\sum \alpha_i = 1$; el resultat és la combinació afí a la dreta, que és una suma amb $n+k+1$ termes (i automàticament $\sum \beta_0 \alpha_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_j = 1$).)

A.4 Observacions. Una dificultat en escriure els axiomes és que no podem descompo-sar una combinació afí en subexpressions, posant parèntesis en la suma. Per exemple, no podem directament escriure

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = (\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1) + \alpha_2 P_2,$$

amb l'intenció de calcular primer la suma en el parèntesis: el parèntesis no té sentit, perquè no tenim $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$ en general. Per aquesta raó, no podem escriure A4 simplement com $aP + bP = (a+b)P$; aquesta equació representa una bona intuició, però no té sentit formalment perquè el seus constituents no són combinacions afins. Tot el que podem dir és que dins d'una combinació afí ben-formada podem substituir qualsevol ocurrència de $aP + bP$ per $(a+b)P$. Anàlogament, A5 diu que dins d'una combinació afí ben-formada podem substituir $\beta \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i \right)$ per $\sum_{i=0}^{n} \beta \alpha_i P_i$.

A.5 Notació matricial. Hi ha una manera elegant de codificar tots els axiomes, que a més es manifesten en un axioma d'associativitat i un d'unitalitat, dos dels principis més fonamentals de les matemàtiques. Per formular els axiomes d'aquesta manera hem d'introduir una notació matricial, que a més és molt útil per a tractar de canvis de bases (cf. lliçons 7 i 8).

Primer de tot, podem interpretar una combinació afí com un producte matricial d'una fila per una columna:

$$\sum_{j=0}^{k} \beta_j Q_j \;=\; (Q_0, \ldots, Q_k) \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}$$

Aquí la fila és una llista de punts $(Q_0, \ldots, Q_k)$ i la columna està formada pels coeficients: la suma de les entrades és igual a 1 (la qual cosa la indiquem amb els claudàtors), i és per tant un element de l'espai que hem denotat $\mathrm{Aff}(k+1)$.

Aquesta construcció es pot iterar: Siguin $P_0, \ldots, P_n$ uns quants punts; per a cada $j = 0, \ldots, k$ formem la combinació afí

$$Q_j = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij} P_i,$$

i ara formem una combinació afí dels punts $Q_0, \ldots, Q_k$:

$$\sum_{j=0}^{k} \beta_j Q_j.$$

Tot això es pot escriure amb productes matricials. Els coeficients α_{ij} formen una matriu

$$\begin{bmatrix} \alpha_{00} & \cdots & \alpha_{0k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n0} & \cdots & \alpha_{nk} \end{bmatrix}$$

on cada columna té suma 1. La llista dels punts Q_j és el producte matricial

$$(Q_0, \ldots, Q_k) = (P_0, \ldots, P_n) \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \cdots & \alpha_{0k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n0} & \cdots & \alpha_{nk} \end{bmatrix},$$

i la combinació afí final és

$$\sum_{j=0}^{k} \beta_j Q_j = \left((P_0, \ldots, P_n) \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \cdots & \alpha_{0k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n0} & \cdots & \alpha_{nk} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}.$$

Axioma M2 més avall diu que podem igualment calcular aquest producte fent primer el producte matricial de la matriu $[\underline{\alpha}]$ amb la columna $[\beta]$:

$$\left((P_0, \ldots, P_n) \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \cdots & \alpha_{0k} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n0} & \cdots & \alpha_{nk} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} = (P_0, \ldots, P_n) \left[\begin{bmatrix} \alpha_{00} & \cdots & \alpha_{0k} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n0} & \cdots & \alpha_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \right]$$

Aquí la gran parèntesis rond és una llista de punts (els punts $Q_0, \ldots, Q_k$), i el gran claudàtor a la dreta és un vector amb suma 1.

A.6 Axiomes matricials. Amb la notació matricial introduïda, els axiomes de combinació afí són:

M1 : (unitalitat)

$$\underline{P}\ \underline{\iota} = \underline{P}$$

M2 : (associativitat)

$$\left(\underline{P}\ \underline{\alpha}\right)\ \beta \ = \ \underline{P}\ \left[\underline{\alpha}\ \beta\right]$$

Aquí $\underline{P}$ és una llista de $n+1$ punts, $\underline{\iota}$ és la matriu identitat; $\underline{\alpha}$ una matriu $(n+1)\times(k+1)$ on cada columna té suma 1, i β una columna amb $k+1$ entrades de suma 1.

A.7 Teorema. *Els axiomes M1-M2 són equivalents als axiomes A1-A2-A3-A4-A5.*

Demostració. La part més interessant és que M1-M2 implica A1-A2-A3-A4-A5. Suposem M1-M2.

El cas $n = 0$ de l'axioma M1 diu simplement

$$P_0 \cdot 1 = P_0$$

establint A2.

En general, M1 diu que

$$(P_0, \ldots, P_n) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = (P_0, \ldots, P_n)$$

és a dir, afirma que dues lllistes de punts són iguals; en particular són iguals entrada per entrada. Si agafem l'última entrada del cas general, tenim

$$0\cdot P_0 \ + \ \ldots \ + \ 0\cdot P_{n-1} \ + \ 1\cdot P_n \ = \ P_n. \tag{9}$$

És a dir si tots els coeficients són zero excepte u, llavors podem omitir tots els zero-termes. D'aquesta equació segueix que qualsevol matriu de permutació actua com permutació. Per exemple,

$$\big(P_0, P_1\big) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \big(0P_0 + 1P_1, 1P_0 + 0P_1\big) = \big(P_1, P_0\big).$$

Ara l'axioma A1 segueix fàcilment de l'associativitat M2 del cas

$$\left(\big(P_0, P_1\big) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} \ = \ \big(P_0, P_1\big) \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} \right]$$

(Això és A1 del cas de dos termes. El cas general s'obté amb una matriu de permutació general.)

Per a etablir l'axioma A3,

$$0\cdot P \ + \ \textstyle\sum \beta_j Q_j \ = \ \textstyle\sum \beta_j Q_j,$$

considerem productes amb una matriu que té una fila de zeros a més de la matriu identitat. En el cas més simple tenim

$$\big(P, Q_0, Q_1\big) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix};$$

l'axioma M2 juntament amb equació (9) dóna

$$\beta_0 Q_0 + \beta_1 Q_1 \ = \ 0P + \beta_0 Q_0 + \beta_1 Q_1$$

com volíem. És evident que aquest argument funciona igual per a combinacions afins més llargs, amb zeros en qualsevol posició de la suma. En conclusió sempre podem omitir zero-termes.

Considerem ara l'equació A4

$$\lambda_0 P + \lambda_1 P + \sum \beta_j Q_j \ = \ (\lambda_0 + \lambda_1) P + \sum \beta_j Q_j \qquad \text{on } \lambda_0 + \lambda_1 + \sum \beta_j = 1.$$

La podem obtenir de l'axioma de l'associativitat M2 aplicat a

$$\left(P, Q_0, \dots, Q_k\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}$$

Finalment, l'equació A5:

$$\beta_0 \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i \right) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j Q_j \; = \; \sum_{i=0}^{n} \beta_0 \alpha_i P_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_j Q_j$$

la podem obtenir de l'axioma de l'associativitat M2 aplicat a

$$\left(P_0, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_k\right) \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}$$

A l'inrevés, si suposem els axiomes A1-A2-A3-A4-A5, és fàcil deduir M1 a partir de A2 i A3 (i A1), i de deduir M2 a partir de A4 i A5 (i A1). $\square$

Bibliografia

[1] E. Artin. *Geometric Algebra*. Interscience Publishers Inc., New York, 1957.

[2] M. Berger. *Geometry (vols. 1–2)*. Springer, New York, 1987. (Translated from the French *Géométrie, vols. 1–5*, CEDIC, Paris, 1977.)

[3] M. Castellet & I. Llerena. *Àlgebra lineal i geometria*. Manuals de la UAB no. 1, Servei de Publicacions de la UAB, Bellaterra, 1998. (Versió castellana per Ed. Reverté, 1991.)

[4] A. I. Kostrikin & Yu. I. Manin. *Linear Algebra and Geometry*. Gordon and Breach Science Publishers, New York 1989. (Translated from the Russian Линейная Алгебра и Геометрия, Moscow, 1981.)

[5] S. Mac Lane & G. Birkhoff. *Algebra*. The Macmillan Co., New York, 1967.

[6] A. Reventós. *Afinitats, moviments i quàdriques*. Manuals de la UAB no. 50, Servei de Publicacions de la UAB, Bellaterra, 2008.

[7] E. Snapper & R. J. Troyer. *Metric Affine Geometry*. Academic Press, New York, 1971.

[8] H. Weyl. *Space, Time, Matter*. Dover, 1922. (Translated from the German *Raum, Zeit, Materie*, Springer, Berlin, 1918.)

Índex alfabètic

Aff$(n+1)$, 9, 29
afinitat, 8, 50, 78
  el·líptica, 93
  hiperbòlica, 92
  parabòlica, 93
afinment independent, 31
alineat, 33
àncora, 24
aplicació afí, 7, 50
aplicació identitat, 50
aplicació lineal, 7
axiomes de Mac Lane i Birkhoff, 97
axiomes matricials, 100

base afí, 34
base lineal, 61
buit, 8

canvi de coordenades
  afins, 37, 54
  cartesianes, 77
categoria, 50
centre, 83
centre de masses, 19
centroide, 19
claudàtors, 29
combinació afí, 7
combinació lineal, 7
combinació vectorial, 57
concurrent, 19
coordenades afins (o baricèntriques), 35
  d'una aplicació afí, 53
coordenades cartesianes, 62
  d'una aplicació afí, 75
corba de Bézier, 24

Df, 72
diferencial, 72
dilatació, 82
dimensió, 35
direcció, 63
distància relativa, 13

energia, 4
equacions, 39
  d'un hiperplà, 42
equacions versus parametritzacions, 38, 45, 52
espai afí, 7
  definició alternativa, 58, 59
espai afí estàndard, 9, 29
espai físic, 4
espai vectorial, 7

fórmula de Grassmann
  cas intersecció buida, 69
  cas intersecció no buida, 69
  en espais vectorials, 67
Fix(f), 79
funcional afí, 42
functor, 74

generat, 28, 33
grup afí general, 75

homologia especial, 92
homologia general, 91
homotècia, 82

identitat de Chasles, 18, 55
imatge, 27
imatge inversa, 27
independència afí, 31
independència lineal, 31

intersecció, 67
invariant, 80
invertible, 50
isomorfisme afí, 50

linealment independent, 31

mediana, 19

palanca d'Arquimedes, 22
paral·lel, 18, **30**, 65
paral·lelogram, 14
parametrització, 29, 32, 39
pes, 22
PostScript, 25
primitives de funcions, 4
projecció, 84
propietat afí, 88
punt, 7
punt de control, 24
punt fix, 79
punt mitjà, 14
    ponderat, 22

raó simple, 13, 46
recta, 11
recta invariant, 89
referència cartesiana, 62
reflexió, 85
reflexió central, 14, 83
resoldre un sistema lineal, 38

segment, 14
shear, 92
similitud, 87
simplement transitiva, 56
sistema de referència (baricèntric), 34
solucions de sistemes lineals, 4, 8
subespai afí, 7, 26
subespai invariant, 80
suma (afí), 68

$T(\mathbb{A})$, 56
temps, 3
teorema de Ceva, 47
teorema de Menelao, 47
teorema de Tales, 47
teorema de Varignon, 20
torsor, 58
translació, 16, 55, 71
TrueType, 25

valor propi 1, 80
varietat lineal, 26