Francesc Bars Cortina

Tema 3, polinomi mínim.

Apunts de classe:
Grau d'Estadística Aplicada
UAB, 4 de novembre de 2019
Versió preliminar.

Contingut

Capítol 1

Tema 3, Diagonalització

1.1 Polinomi mínim

Sigui $A \in M_N(K)$ una matriu quadrada, (o $f : E \to E$ un endomorfisme on E un K-espai vectorial de dimensió N amb una base fixa $\mathcal{B}$ de E i denotem $A = M(\mathcal{B} \leftarrow^f \mathcal{B}) \in M_N(K)$), hem definit el polinomi característic de A (o de f) via:

$$p_A(x)(= p_f(x)) = det(A - xId_N)$$

polinomi de grau N a coeficients en el cos K (per a f aquest polinomi és independent de la base $\mathcal{B}$ triada per a E).

Fet 1.1.1 (Teorema Cayley-Hamilton,I). *És compleix que $p_A(A)$ és la matriu zero de mida N. A més si P és invertible de mida N també tenim que $p_A(P^{-1}AP) = p_A(A)$ la matriu zero.*

Exemple 1.1.2. *Considera la matriu $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. És fàcil observar que*

$$p_A(x) = x^2 - 6x + 5 = (x-5)(x-1)$$

i un càlcul tenim $A^2 = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}$ i tenim

$$\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 13 - 6*3 + 5*1 & 12 - 6*2 \\ 12 - 6*2 & 13 - 6*3 + 5*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observació 1.1.3. *L'anterior exercici podem pensar $A = M(can \leftarrow^{T_A} can)$ on $f = T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Com A diagonaliza i una base on f diagonalitza formada per vectors propis és $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$ tenim $D = M(\mathcal{B} \leftarrow^f \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ fixeu-vos clarament que*

$$p_f(D) = (D - 5Id_2)(D - 1Id_2) = (\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquesta última expressió és fàcil, ja que multiplicar matrius és pot fer en blocs si tenen sentits les mides dels blocs, és a dir es té:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AE+BG & AF+BH \\ \hline CE+DG & CF+DH \end{array}\right)$$

Exercici 1.1.4. *Considera* $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. *Comprova que diagonalitza a* $\mathbb{R}$ *amb valors propis -1 i 2 i que* $p_A(x) = -(x+1)(x-2)^2$.

Comprova que el polinomi $m(x) := (x+1)(x-2)$ *compleix que* $m(A) = 0$ *i comproveu que* $m(x)$ *divideix el polinomi característic de* A.

Del fet d'haver-hi una aplicació de $K[A]$ a $End(E)$ via $p(A)$ a $p(f)$ s'obté el següent resultat:

Fet 1.1.5. *Donada* $A \in M_N(K)$ *(o* $f : E \to E$ *un endomorfisme on* E *un* K*-espai vectorial de dimensió* N *amb una base fixa* $\mathcal{B}$ *de* E *i denotem* $A = M(\mathcal{B} \xleftarrow{f} \mathcal{B}) \in M_N(K)$*), existeix un UNIC polinomi mònic de grau més petit possible,* $m_A(x)$*, amb la propietat que* $m_A(A) = (0)$ *matriu zero. Aquest polinomi* $m_A(x)$ *(o* $m_f(x)$*) s'anomena EL POLINOMI MINIM DE A (o* f*).*

Teorema 1.1.6 (Cayley-Hamilton,II)**.** *Sempre es té que* $m_A(x)$ *divideix a* $p_A(x)$ *i a més si* a *és una arrel de* $p_A(x)$ *llavors també* a *és una arrel de* $m_A(x)$ *(més generalment si* $u(x)$ *és un factor irreductible en* $p_A(x)$*, aquest factor irreductible també apareix en* $m_A(x)$*).*

Corol.lari 1.1.7. *Suposem que* $A \in M_N(K)$ *diagonalitza en el cos* K*. Escrivim el polinomi característic via*

$$p_A(x) = (x-\alpha_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_k)^{n_k}$$

amb $n_k \geq 1$ *enters, i* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *els diferents valors propis de* A.

Llavors el polinomi mínim (recordem que suposem que diagonalitza) és

$$m_A(x) = (x-\alpha_1)^1 \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_k)^1$$

.

Demostració. Penseu la demostració amb $k = 2$ i $N = 3$. □

Exemple 1.1.8. *Considereu la matriu següent de mida* N

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

amb polinomi caracteristic $p_C(x) = (x-\lambda)^N$ *i polinomi mínim* $m_C(x) = (x-\lambda)^N$.

Observeu que donada P *invertible, la matriu resultant* $P^{-1}CP$ *complirà tambe que el polinomi mínim i el caracteristic és igual al de* C.

Usant la idea de multiplicació en blocs:

Exercici 1.1.9. *Construïu una matriu A on $p_A(x) = (x-4)^2(x-5)^4$ i $m_A(x) = (x-4)(x-5)^3$. En podeu construir una altra? i una altra on no existeixi P invertible on $P^{-1}AP$ sigui l'altra matriu triada?*

Lema 1.1.10. *Donada una matriu $A \in M_N(K)$ (o f endomorfisme) i λ un número a K, i fixem n un natural no zero. Llavors la dimensió del subespai vectorial $Ker((A - \lambda Id_N)^n)$ (o $Ker((f - \lambda id)^n)$) no canvia per conjugació; és a dir*

$$dim(Ker((P^{-1}AP - \lambda Id_N)^n)) = dim(Ker((A - \lambda Id_N)^n))$$

per a tota matriu P invertible.

Demostració. $Ker((A - \lambda id)^n)$ és un s.e.v del tipus (SE2) i té dimensió $N - rang((A - \lambda I_N)^n)$.

Peró fixeu-vos que el rang no canvia en multiplicar per matrius invertibles i es té (ho faig per $n = 3$, penseu-ho en general)

$$P^{-1}((A - \lambda I_N)^3)P^{-1} = P(A - \lambda I)(A - \lambda I)(A - \lambda I)P^{-1} =$$

$$P(A - \lambda I)P^{-1} \cdot P(A - \lambda I)P^1 \cdot P(A - \lambda I)P^{-1} =$$

$$(PAP^{-1} - PP^{-1})(PAP^{-1} - PP^{-1})(PAP^{-1} - PP^{-1}) = (PAP^{-1} - I_N)^3$$

d'on $dim(Ker((P^{-1}AP - \lambda Id_N)^n)) = N - rang((A - \lambda I_N)^n)$. □

Exemple 1.1.11. *Fixeu-vos les matrius A_1, A_2 4×4 següents tenen polinomi característic $(x-2)^4$ i polinomi mínim $(x-2)^2$*

$$A_1 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \; A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

però A_1 i A_2 no són equivalents (o conjugades entre elles), és dir no hi ha una matriu invertible P (o matriu canvi de base) on $PA_1P^{-1} = A_2$, perquè $dim(Ker(A_1 - 2I_4)) = 2$ i $dim(Ker(A_2 - 2I_4)) = 3$.