Modelització i simulació

Grau en Matemàtica Computacional i Analítica de Dades de la UAB

Carles Barril Basil

Capítol 1

Sistemes Dinàmics Discrets

En aquest tema introduirem què són els sistemes dinàmics discrets i estudiarem algunes de les seves propietats. Els sistemes dinàmics discrets comparteixen moltes propietats amb els sistemes dinàmics a temps continu, sovint expressats en termes d'equacions diferencials. Molts dels conceptes que veurem en aquestes classes admeten una versió anàloga pels sistemes dinàmics a temps continu.

Definició. Un sistema dinàmic discret (s.d.d) en dimensió $n \in \mathbb{N}$ és una aplicació

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

En el context dels sistemes dinàmics discrets ens referim als punts d'$\mathbb{R}^n$ com estats del sistema i a l'espai $\mathbb{R}^n$ com espai de fase.

Definició. La semiòrbita positiva que passa per $x \in \mathbb{R}^n$ d'un sistema dinàmic $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és la successió:

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad x_0 = x$$

que denotem com $O_+(x) = (x_0, x_1, x_2, \dots)$.

Definició. Si un sistema dinàmic F és invertible, es defineix la semiòrbita negativa que passa per $x \in \mathbb{R}^n$ com la successió:

$$x_{k-1} = F^{-1}(x_k), \quad x_0 = x$$

que denotem com $O_-(x) = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0)$.

En general els sistemes dinàmics depenen de paràmetres que aporten informació sobre propietats del model que representen. Per exemple el nombre de naixements que es produeixen cada any (si el model representa la dinàmica d'una població any a any) o el coeficient de fregament (si el model representa la dinàmica d'un pèndol). Per aquest motiu és oportú considerar famílies de sistemes dinàmics.

Definició. Una família de s.d.d. de dimensió n parametritzada per $\alpha \in A$, on A és el conjunt de paràmetres, és un conjunt d'aplicacions:

$$F_A := \{F_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n | \alpha \in A\}.$$

Notació. Sovint serà convenient escriure $F_\alpha(x)$ com $F(x;\alpha)$.

Exemples. En dimensió 1 (i.e. $n = 1$) els tres primers i en dimensió 2 (i.e. $n = 2$) el quart.

1. Quan F_α és lineal: $F_\alpha(x) = \alpha x \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

   - La semiòrbita positiva de x és:

     $$O_+(x) = (x, \alpha x, \alpha^2 x, \alpha^3 x, \dots)$$

   - La semiòrbita negativa de x existeix només si $\alpha \neq 0$. En aquest existeix la inversa de F_α, que val $F_\alpha^{-1}(x) = \frac{x}{\alpha}$, i l'òrbita negativa de x és:

     $$O_-(x) = \left(\dots, \frac{x}{\alpha^3}, \frac{x}{\alpha^2}, \frac{x}{\alpha}, x\right)$$

   - Quan $\alpha \neq 0$ es defineix l'òrbita completa de x com la successió bi-infinita:

     $$O(x) = \left(\dots, \frac{x}{\alpha^3}, \frac{x}{\alpha^2}, \frac{x}{\alpha}, x, \alpha x, \alpha^2 x, \alpha^3 x, \dots\right)$$

2. Quan F_α és afí: $F_\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ amb $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2$.

   - La semiòrbita positiva de x és:

     $$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_0 + \alpha_1 x \\ x_2 &= \alpha_0 + \alpha_1(\alpha_0 + \alpha_1 x) = \alpha_0(1 + \alpha_1) + \alpha_1^2 x \\ x_3 &= \alpha_0 + \alpha_1(\alpha_0(1 + \alpha_1) + \alpha_1^2 x) = \alpha_0(1 + \alpha_1 + \alpha_1^2) + \alpha_1^3 x \\ &\vdots \\ x_k &= \alpha_0 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^j + \alpha_1^k x \end{aligned}$$

3. Quan F_α és no lineal: $F_\alpha = \alpha x(1 - x)$ amb $\alpha \geq 1$.

   - La semiòrbita positiva de x és:

     $$\begin{aligned} x_1 &= \alpha x(1 - x) && \text{Polinomi de grau 2} \\ x_2 &= \alpha(\alpha x(1 - x))(1 - (\alpha x(1 - x))) && \text{Polinomi de grau 4} \\ &\vdots \\ x_k &= ? && \text{Polinomi de grau 2k} \end{aligned}$$

El sistema anterior s'anomena sistema logístic i, com veurem més endavant, presenta un comportament molt complex per certs valors del paràmetre α. El sistema sorgeix del següent model poblacional:

$$\xrightarrow{\beta P} \boxed{P} \xrightarrow{\mu P^2},$$

és a dir un model en el que una determinada població es representa amb una variable real (un compartiment) i on s'assumeix que els naixements que es produeixen cada pas de temps (per exemple cada any) són proporcionals a la població total (en concret són βP) i les morts que es produeixen cada pas de temps són proporcionals al quadrat de la població (en concret són μP^2). Fixeu-vos que l'esquema del model anterior és una manera gràfica i/o formal de representar les hipòtesis del model. Són raonables les hipòtesis del model?

Per veure que del model compartimental anterior s'arriba al sistema logístic n'hi ha prou en definir una nova variable x com:

$$x = \frac{\mu}{1+\beta}P.$$

Aleshores, com que

$$P_{k+1} = P_k + \beta P_k - \mu P_k^2 = (1+\beta)P_k\left(1 - \frac{\mu}{1+\beta}P_k\right),$$

multiplicant a banda i banda per $\frac{\mu}{1+\beta}$ s'obté l'equació per la nova variable x:

$$x_{k+1} = (1+\beta)x_k\left(1 - x_k\right),$$

de manera que definint $\alpha = 1+\beta$ tenim el sistema logístic (per això es pren $\alpha \geq 1$, perquè en el model $\beta \geq 0$. Matemàticament, però, no hi ha cap problema en considerar sistemes logístics amb $\alpha < 1$). La variable x i la variable P estan relacionades per la fòrmula $x = P\mu/(1+\beta)$, si coneixem la dinàmica del sistema logístic coneixerem la dinàmica del model poblacional original.

4. En dimensió 2 hi ha un sistema relacionat amb l'anterior que és de la forma

$$F_\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 x(1-x) - xy \\ \alpha_2 xy \end{pmatrix} \qquad \text{amb} \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in [1,\infty) \times [0,\infty).$$

El sistema anterior, conegut com a sistema presa-depredador, surt del següent model compartimental:

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{\beta P} & \boxed{P} & \xrightarrow{\mu P^2 - \delta PD} \\ \xrightarrow{\gamma\delta PD} & \boxed{D} & \xrightarrow{D} \end{array}$$

Aquest model representa una població de preses P i una de depredadors D. La població de preses segueix una dinàmica logística en absència de depredadors (és a dir els naixements són βP i les morts μP^2), però quan hi ha depredadors hi ha un increment en el nombre de morts igual a δPD, que es corresponen amb les preses que han caçat els depredadors. Els naixements de depredadors al llarg d'un pas de temps son proporcionals al nombre de preses que han caçat els depredadors (és a dir proporcionals a δPD, i en concret són $\gamma\delta PD$), mentre que les morts són iguals a la població de depredadors (és a dir, tots els depredadors moren al cap d'un pas de temps, i només queden els que han nascut al llarg d'aquell pas de temps). Són raonables aquestes assumpcions?

Com en l'exemple anterior, definint noves variables s'arriba al sistema depredador-presa original. Per veure-ho escrivim primer les equacions del sistema associat a les variables P i D:

$$P_{k+1} = P_k + \beta P_k - \left(\mu P_k^2 + \delta P_k D_k\right) = (1+\beta)P_k\left(1 - \frac{\mu}{1+\beta}P_k\right) - \delta P_k D_k$$
$$D_{k+1} = D_k + \gamma\delta P_k D_k - D_k = \gamma\delta P_k D_k$$

Aleshores, definint

$$x = \frac{\mu_p}{1+\beta}P \qquad \text{i} \qquad y = \delta D.$$

el sistema dinàmic associat a les variables x i y és:

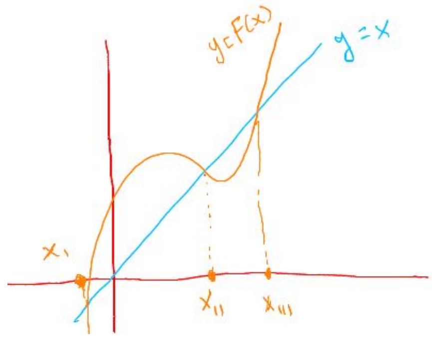
$$x_{k+1} = (1+\beta)x_k\,(1-x_k) - x_k y_k$$
$$y_{k+1} = \frac{\gamma\delta(1+\beta)}{\mu}x_k y_k$$

i definint $\alpha_1 = 1+\beta$ i $\alpha_2 = \gamma\delta(1+\beta)/\mu$ obtenim el sistema presa-depredador original.

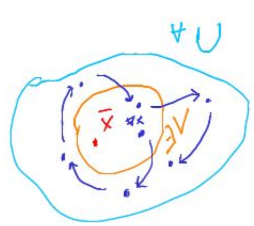
1.1 Punts fixos i estabilitat

Definició. Es diu que x és un punt fix d'un s.d.d. F si $F(x) = x$.

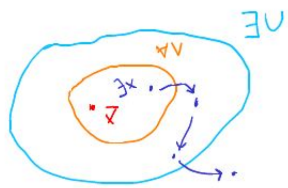
Una manera gràfica de trobar punts fixos de s.d.d. en dimensió 1 consisteix en representar, en el pla, la recta $y = x$ i la corba $y = F(x)$:



Definició Sigui $\bar{x}$ un punt fix de F. Es diu que $\bar{x}$ és estable de F si $\forall U \subset \mathbb{R}^n$ entorn obert de $\bar{x}$ existeix un altre entorn $V \subset U$ de $\bar{x}$ tal que per tot punt $x \in V$ la semiòrbita positiva de x està continguda a U, i.e. $O_+(x) \subset U$.



Definició Sigui $\bar{x}$ un punt fix de F. Es diu que $\bar{x}$ és inestable (o repulsor) de F si $\bar{x}$ no és estable. És a dir, si existeix $U \subset \mathbb{R}^n$ entorn obert de $\bar{x}$ tal que per tot $V \subset U$ entorn obert de $\bar{x}$ existeix un punt $x \in V$ tal que la semiòrbita positiva de x no està continguda a U, i.e. $O_+(x) \not\subset U$.



Definició. Sigui $\bar{x}$ un punt fix estable de F. Es diu que $\bar{x}$ és asimptòticament estable (o atractor local) de F si existeix $U \subset \mathbb{R}^n$ entorn obert de $\bar{x}$ tal que

$$\forall x \in U \qquad \lim_{k\to\infty} F^k(x) = \lim_{k\to\infty} F \circ \overset{k}{\cdots} \circ F(x) = \bar{x},$$

és a dir que el límit de la semiòrbita positiva de qualsevol punt de U existeix i és igual al punt $\bar{x}$.

Observació. Hi pot haver punts fixos que no són ni atractors locals ni repulsors. Per exemple quan F és la identitat (i.e. $F(x) = x$) tot punt és un punt fix estable però cap és asimptòticament estable. També hi pot haver punts on convergeixen les semiòrbites positives de tots els punts però que no són estables. Per exemple

$$F(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ -1 + 2x & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(1 + x) & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

1.2 Estabilitat de sistemes lineals

Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és lineal aleshores és de la forma

$$F(x) = Ax$$

amb A una matriu (tota aplicació lineal es pot representar com una matriu).

Si F és lineal, aleshores 0 és necessàriament un punt fix.

Teorema Sigui $F = Ax$ un sistema lineal. Sigui $\rho(A)$ el radi espectral de A (és a dir, el mòdul del valor propi de A amb mòdul més gran). Aleshores

- Si $\rho(A) < 1$ aleshores els 0 és un atractor global.
- Si $\rho(A) > 1$ aleshores els 0 és un repulsor.

Demostració.

• El cas $\rho(A) < 1$ es dedueix a partir de la descomposició de Jordan que admet qualsevol matriu:

$$A = CJC^{-1}$$

on J és una matriu a blocs de la forma

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_l \end{pmatrix} \qquad \text{amb} \qquad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

i on λ_i per $i \in \{1, \ldots, l\}$ són valors propis de la matriu A (no necessàriament diferents). La matriu C és una matriu de canvi de base (i per tant és invertible).

Es pot comprovar que, si $|\lambda_i| < 1$,

$$\lim_{k\to\infty} J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}^k = 0.$$

Per tant, quan $\rho(A) < 1$, tots els valors propis tenen mòdul més petit que 1, i.e. $|\lambda_i| < 1$ per a tot $i \in \{1, \ldots, l\}$, i aleshores

$$\lim_{k\to\infty} J^k = \lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} J_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_l^k \end{pmatrix} = 0,$$

i

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \lim_{k\to\infty} (CJC^{-1})^k = \lim_{k\to\infty} CJ^kC^{-1} = C0C^{-1} = 0$$

En particular, com A^k tendeix a la matriu 0 quan k va a infinit, es té que

$$\lim_{k\to\infty} A^k x = 0 \qquad \text{per a tot} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

• Per veure que el 0 és inestable quan $\rho(A) > 1$ prenem λ un valor propi de A tal que $|\lambda| = \rho(A)$, que existeix per definició del radi espectral. Aquest valor propi té necessàriament al menys un vector propi associat, diguem-li v. Si λ és real, el vector propi tindrà coeficients reals (perquè la matriu A és a coeficients reals), de manera que podem prendre punts arbitràriament propers al 0 de la forma $x_\varepsilon = \varepsilon v \in \mathbb{R}^n$ tals que

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k x_\varepsilon\| = \lim_{k\to\infty} \|A^k \varepsilon v\| = \lim_{k\to\infty} |\varepsilon||\lambda|^k \|v\| = \infty$$

perquè $|\lambda| = \rho(A) > 1$. Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ i v és un vector propi associat a λ, aleshores $\bar{v}$ és un vector propi de valor propi $\bar{\lambda}$. El vector $v + \bar{v}$ té coeficients reals i no és idènticament 0 perquè v i $\bar{v}$ són linealment independents per ser vectors propis de valors propis diferents. Llavors, prenent $x_\varepsilon = \varepsilon(v + \bar{v})$ amb $\varepsilon > 0$ (és a dir un punt arbitràriament proper a 0) i escrivint $\lambda = |\lambda| e^{\omega i}$ es té

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k x_\varepsilon\| = \lim_{k\to\infty} \|A^k \varepsilon(v + \bar{v})\| = \lim_{k\to\infty} |\varepsilon||\lambda|^k \|e^{k\omega i} v + e^{-k\omega i}\bar{v}\| = \lim_{k\to\infty} |\varepsilon||\lambda|^k \|e^{2k\omega i} v + \bar{v}\| = \infty$$

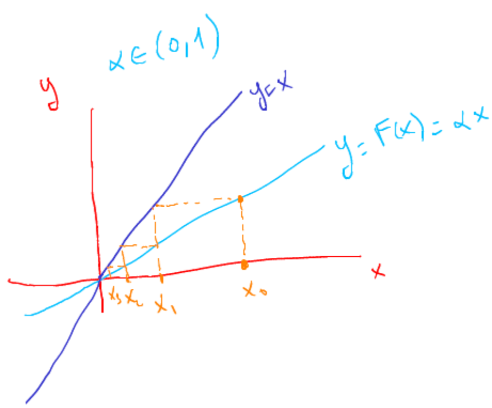
perquè $|\lambda| = \rho(A) > 1$ i perquè, com que v i $\bar{v}$ son linealment independents, la distància entre el punt $\bar{v}$ i la recta generada per v és estrictament positiva, de manera que

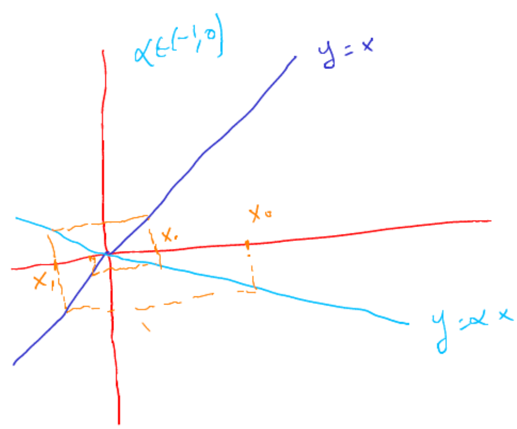
$$\|e^{2k\omega i} v + \bar{v}\| \geq \min_{z\in\mathbb{C}} \|zv + \bar{v}\| = \min_{z\in\mathbb{C}} \|\bar{v} - zv\| = \operatorname{dist}(\bar{v}, \langle v \rangle) > 0.$$

$\square$

Casos particulars. En dimensió $n = 1$.

$$F(x) = Ax \quad \text{amb} \quad A = \alpha \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad \rho(A) = |\alpha|.$$





En dimensió $n = 2$.

$$F(x) = Ax \quad \text{amb} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Per estudiar quan $\rho(A) = 1$ recordem que els vaps de A són les arrels del polinomi característic, és a dir, que si λ és vap de A aleshores

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{Tr}(A)\lambda + \operatorname{Det}(A) = 0.$$

Anem a determinar com ha de ser la traça i el determinant de A perquè A tingui un vap de mòdul 1. Primer observem que $|\lambda| = 1$ implica que $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$ o $\lambda = e^{\omega i} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Si $\lambda = 1$ aleshores

$$p(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Det}(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Det}(A) = \operatorname{Tr}(A) - 1.$$

Si $\lambda = -1$ aleshores

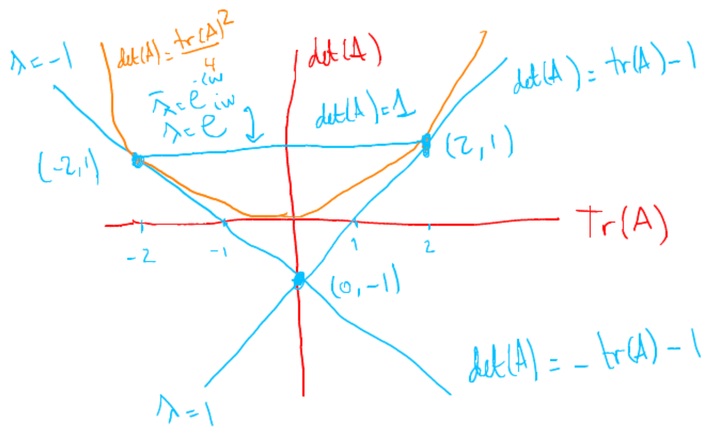
$$p(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Det}(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Det}(A) = -\operatorname{Tr}(A) - 1.$$

Si $\lambda = e^{\omega i} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, el discriminant de $p(\lambda)$ ha de ser negatiu:

$$\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\mathrm{Det}(A) < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Det}(A) > \frac{\mathrm{Tr}(A)^2}{4}.$$

A més a més, com que en aquest cas $\bar{\lambda}$ és l'altre vap de A, el determinant de A satisfà $\mathrm{Det}(A) = \lambda\bar{\lambda} = 1$.

Aquestes observacions permeten classificar l'estabilitat del sistema en termes de la traça i el determinant de la matriu A en base al següent diagrama:



"TRIANGLE D'ESTABILITAT" del pla traça determinant

1.3 Dinàmica en sistemes afins

Un s.d.d. F és afí si és de la forma:

$$F(x) = Ax - b \quad \text{amb} \quad A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \quad \text{i} \quad b \in \mathbb{R}^n.$$

Els punts fixos de F són solucions del sistema lineal d'equacions:

$$(A - \mathrm{Id})x = b.$$

Per tant,

- si $\mathrm{Rang}(A - \mathrm{Id}) = \mathrm{Rang}(A - \mathrm{Id}|b)$ el sistema té almenys un punt fix $\bar{x}$,
- si $\mathrm{Rang}(A - \mathrm{Id}) < \mathrm{Rang}(A - \mathrm{Id}|b)$ el sistema no té cap punt fix.

En el primer cas la dinàmica del vectors $\xi_k = x_k - \bar{x}$ està descrita pel s.d.d. lineal

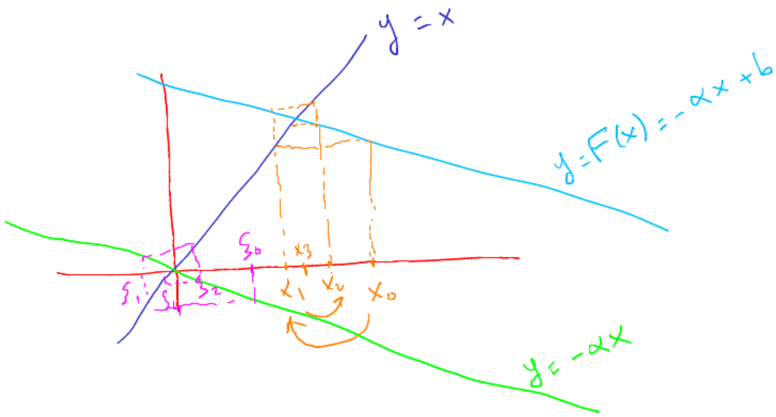
$$\xi_{k+1} = A\xi_k$$

ja que

$$\xi_{k+1} = x_{k+1} - \bar{x} = F(x_k) - \bar{x} = Ax_k - b - \bar{x} = A(x_k - \bar{x}) + A\bar{x} - b - \bar{x} = A(x_k - \bar{x}) = A\xi_k.$$

Per tant, $x_{k+1} = \xi_{k+1} + \bar{x} = A^{k+1}\xi_0 + \bar{x} = A^{k+1}(x_0 - \bar{x}) + \bar{x}$.

En paraules, aquesta relació entre la dinàmica dels ξ_k i les x_k diu que "la dinàmica d'un sistema afí $F(x) = Ax + b$ **a tot l'entorn** d'un punt fix $\bar{x}$ **és equivalent** a la dinàmica del sistema lineal corresponent, $F_L(x) = Ax$, entorn el punt 0". En particula $\rho(A)$ determina l'estabilitat del punt fix $\bar{x}$.



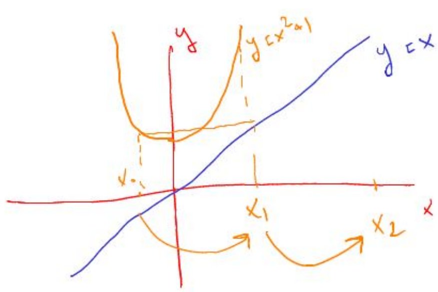
1.4 Dinàmica entorn punts fixos de sistemes dinàmics discrets no-lineals

Un s.d.d. F és no-lineal si no és afí (i per tant tampoc lineal).

Els punts fixos de F són solucions del sistema d'equacions no lineal de n equacions (la dimensió de l'espai de fase)

$$F(x) = x$$

i poden existir o no. Per exemple el sistema 1-dimensional$F(x) = x^2 + 1$ no té punts fixos.



Quan es treballa en dimensions més grans que 1 es perd la intuïció que dóna la gràfica del sistema F en relació a l'eix $y = x$.

Una estratègia per provar que $F(x) = x$ no té solucions en aquests casos consisteix en provar que $\|F(x)\| \neq \|x\|$ per a tot $x \in \mathbb{R}^n$.

Si $\bar{x}$ és un punt fix de F, la dinàmica dels vectors $\xi_k = x_k - \bar{x}$ es pot aproximar pel sistema dinàmic lineal

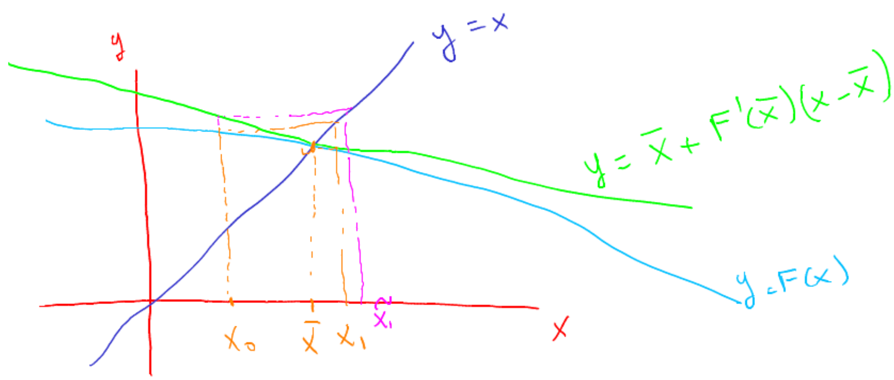
$$\xi_{k+1} \approx DF(\bar{x})\xi_k$$

si ξ_k és prou petit (com més petit sigui ξ_k, més bona serà l'aproximació. En efecte,

$$\xi_{k+1} = x_{k+1} - \bar{x} = F(x_k) - \bar{x} = \bar{x} + DF(\bar{x})(x_k - \bar{x}) + o(\|x_k - \bar{x}\|) - \bar{x} = DF(\bar{x})\xi_k + o(\|\xi_k\|),$$

on $o : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ és una funció que satisfà $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$.

En paraules, aquesta la relació entre la dinàmica dels ξ_k i la de les x_k diu que "la dinàmcia d'un s.d.d. no-lineal $F(x)$ **en un entorn prou petit** d'un punt fix $\bar{x}$ **és aproximadament** com la dinàmica del sistema dinàmic lineal donat per la matriu $DF(\bar{x})$ entorn el 0". En particular $\rho(DF(\bar{x})$ determina l'estabilitat local (si $\rho(DF(\bar{x}) < 1)$ o inestabilitat (si $\rho(DF(\bar{x}) > 1)$ del punt $\bar{x}$.



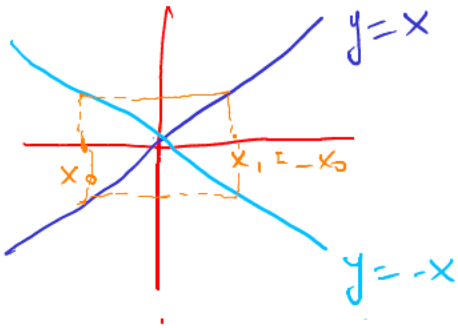
1.5 Òrbites periòdiques

Definició. Sigui F un s.d.d. i $p \in \mathbb{N}$. Un punt x és p-periòdic de F si $F^p(x) = x$ i $F^l(x) \neq x$ per a tot $l < p$.

Observació. Els punts fixos de F són el mateix que els punts 1-periòdics de F.

Definició. Sigui x un punt p-periòdic de f. El cicle $(x, F(x), \ldots, F^{p-1}(x))$ és una òrbita p-periòdica de F. Es diu que x genera l'òrbita p-periòdica $O_p(x) = (x, F(x), \ldots, F^{p-1}(x))$, a la qual també hi pertany.

Exemple. Considerem $F(x) = -x$. Tot punt excepte el 0 8que és un punt fix de F) és un punt 2-periòdic ja que $F^2(x) = F(F(x)) = F(-x) = -(-x) = x$. L'òrbita 2-periòdica generada per x és el 2-cicle $(x, -x)$.



Observació. Tots els punts continguts a una òrbita p-periòdica són punts p-periòdics i no pertanyen a cap altra òrbita p-periòdica.

Definició. Sigui $O(\bar{x}) = (\bar{x}, F(\bar{x}), \ldots, F^{p-1}(\bar{x})) = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{p-1})$ una òrbita p-periòdica (això vol dir que tots els elements de cicle $O(\bar{x})$ són diferents i que $F^p(\bar{x}) = \bar{x}$).

- $O(\bar{x})$ és estable si $\forall U \subset \mathbb{R}^n$ entorn obert de $O(\bar{x})$ existeix $V \subset U$ entorn obert $O(\bar{x})$ tal que $\forall x \in V$ es té $O_+(x) \subset U$.
- $O(\bar{x})$ és inestable (o repulsora) si no és estable.
- $O(\bar{x})$ és asimptòticament estable (o localment atractora) si és estable i existeix U entorn obert de $O(\bar{x})$ tal que $\forall x \in U$
$$\lim_{k\to\infty} d(F^k(x), O(\bar{x})) = 0$$
on $d(F^k(x), O(\bar{x})) = \min\left\{\|F^k(x) - \bar{x}_i\| \quad | \quad i \in \{0, \ldots, p-1\}\right\}$ és la distància entre el punt $F^k(x)$ i el conjunt de punts que formen $O(\bar{x})$.

Teorema. Sigui $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicació contínua. Sigui $O(\bar{x}) = (\bar{x}, F(\bar{x}), \ldots, F^{p-1}(\bar{x})) = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{p-1})$ una òrbita p-periòdica de F. Aleshores:

1) $O(\bar{x})$ és estable si i només si $\bar{x}$ és un punt fix estable de F^p.

2) $O(\bar{x})$ és inestable si i només si $\bar{x}$ és un punt fix inestable de F^p.

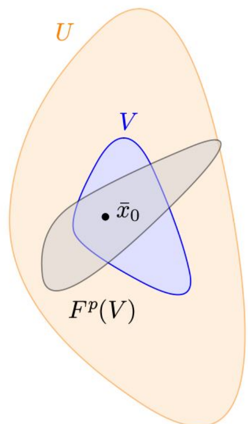
3) $O(\bar{x})$ és asimptòticament estable si i només si $\bar{x}$ és un punt fix asimptòticament estable de F^p.

A més a més es té que el caràcter de $\bar{x}$ per F^p (és a dir si és estable, inestable o asimptòticament estable) coincideix amb el caràcter de la resta de punts de $O(\bar{x})$ per F^p.

Demostració (idea).

Com que F és contínua, la imatge de punts propers a $\bar{x}_0$ estarà a prop de $\bar{x}_1$, la imatge de punts propers a $\bar{x}_1$ estarà a prop de $\bar{x}_2$, i així successivament. Això implica que si x és un punt prou proper a $\bar{x}_0$, $F^p(x)$ estarà més a prop de $\bar{x}_0$ que de cap altra punt de l'òrbita periòdica $O_p(\bar{x})$.

Per tant, si $\bar{x}_0$ és un punt fix inestable de F^p, aleshores hi haurà punts propers a l'òrbita periòdica que tendiran a allunyar-se de l'òrbita (concretament punts arbitràriament propers a $\bar{x}_0$ s'allunyaran una certa quantitat fixada de $\bar{x}_0$, però també estaran lluny dels altres punts de l'òrbita periòdica per la continuïtat de F). La inestabilitat de $\bar{x}_0$ per F^p implica la inestabilitat que l'òrbita periòdica $O_p(\bar{x})$. Un argument més rigorós d'aquesta idea s'obté considerant la construcció següent:



1) $\exists U$ entorn de $\bar{x}_0$ tal que $\forall V \subset U$ obert que conté $\bar{x}_0$ es té que

$$\exists x \in V, \quad F^{mp}(x) \notin U \quad \text{per algun } m \in \mathbb{N}$$

2) Prenem V un d'aquests oberts de manera que tots els punts del conjunt $F^p(V)$ estiguin més a prop de $\bar{x}_0$ que de cap altra punt de l'òrbita periòdica $O_p(\bar{x})$.

3) Necessàriament $F^p(V) \not\subset V$, ja que si no $F^{mp}(x) \in V \in U$ per a tot $x \in V$ i per a tot m natural.

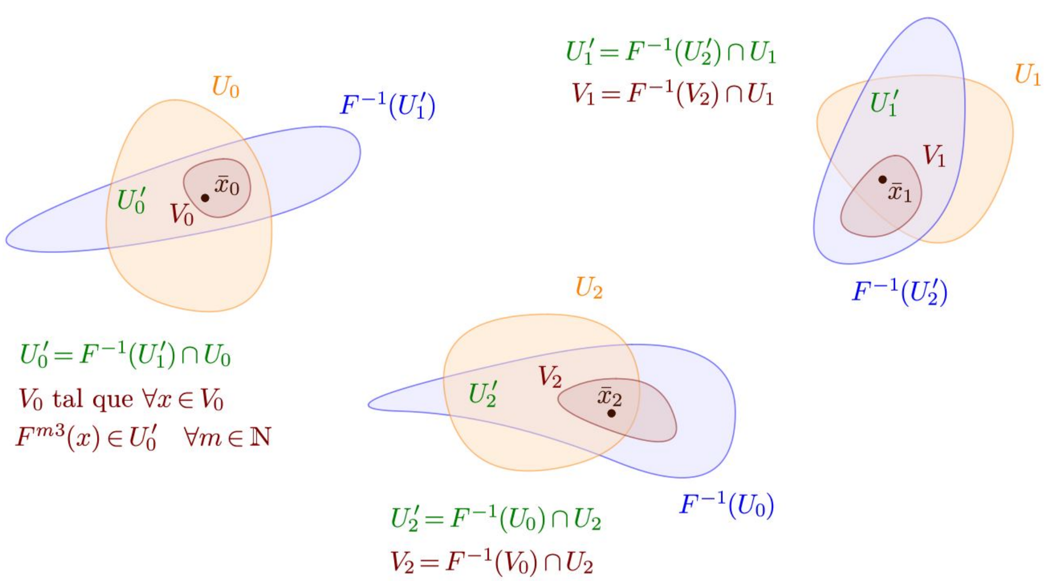
4) Prenem $\tilde{V}$ un entorn obert de la resta de punts de l'òrbita que no intersequi amb $F^p(V)$. Definim $W = V \cup \tilde{V}$.

5) Concloem que $\forall V' \subset W$ obert que conté els punts de $O_p(\bar{x})$ es té que existeix $x \in V'$ tal que $F^k(x) \notin W$ per algun k. En efecte, n'hi ha prou en prendre $x \in V' \cap V$, de manera que per algun $m \in \mathbb{N}$ es té

$$F^{mp}(x) \in F^p(V) \quad \text{i} \quad F^{mp}(x) \notin V,$$

que implica que $F^{mp}(x) \notin V \cup \tilde{V} = W$ ja que $\tilde{V}$ no interseca amb $F^p(V)$ per construcció. Per tant l'òrbita periòdica és inestable.

Per contra, si $\bar{x}_0$ és un punt fix estable de F^p, aleshores necessàriament $O_p(\bar{x})$ és també estable. Per veure-ho prenem U un entorn obert arbitrari dels punts de l'òrbita periòdica $O_p(\bar{x})$. Sense pèrdua de generalitat es pot prendre U com una unió de conjunts disjunts $U = U_0 \cup U_1 \cup \cdots \cup U_{p-1}$ amb U_l entorn obert de $\bar{x}_l$. Aleshores es considera la construcció següent, feta pel cas concret $p = 3$ (la versió per p en general és anàloga però no es pot dibuixar tan clarament):



i es defineix $V = V_0 \cup V_1 \cup V_2$ i es comprova que per tot $x \in V$ es té que, per tot $m \in \mathbb{N}$, $F^m(x) \in U_0' \cup U_1' \cup U_2' \subset U_0 \cup U_1 \cup U_2 = U$, i per tant l'òrbita periòdica és estable.

Observem que combinant els dos resultats anteriors, es dedueix que si $\bar{x}_0$ és estable per F^p aleshores necessàriament $\bar{x}_l$ és estable per F_p per tot $l \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$. Si no fos així, pel primer resultat tindríem que l'òrbita periòdica és inestable (perquè algun punt de l'orbita seria inestable per F^p) i pel segon resultat tindríem que l'òrbita periòdica és estable (perquè $\bar{x}_0$ és estable), de manera que s'arribaria a una contradicció.

Per acabar, observem que si $\bar{x}_0$ és assimptòticament estable de F^p, aleshores $O_p(\bar{x})$ és assimptòticament estable de F. Que l'òrbita és estable ja ho tenim pel resultat anterior. Cal veure que existeix un entorn de l'òrbita periòdica tal que tots els punts d'aquest entorn "tendeixen" a l'òrbita periòdica. En efecte, per ser $\bar{x}_0$ assimptòticament estable de F^p existeix un entorn U_0 d'aquest punt pel qual $\forall x \in U_0$ es té

$$\lim_{k\to\infty} (F^p)^k(x) = \bar{x}_0.$$

Es defineix $U = U_0 \cup F^{-1}(U_0) \cup F^{-2}(U_0) \cup \dots \cup F^{-(p-1)}(U_0)$, que és un entorn de l'òrbita periòdica (perquè $\bar{x}_{p-1} \in F^{-1}(U_0)$, $\bar{x}_{p-2} \in F^{-2}(U_0)$,..., $\bar{x}_1 \in F^{-(p-1)}(U_0)$). Per construcció es té que per tot $x \in U$ existeix $l \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ tal que $F^l(x) \in U_0$ i aleshores, per $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ es té

$$\lim_{k\to\infty} F^i \circ F^{pk} \circ F^l(x) = F^i \left(\lim_{k\to\infty} F^{pk} \circ F^l(x) \right) = F^i \bar{x}_0 = \bar{x}_i,$$

que implica $\lim_{k\to\infty} d(F^k(x), O_p(\bar{x})) = 0$ (ja que tot natural més gran que l es pot expressar de la forma $i + pk + l$ amb $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ i $k > 0$).

□

Nota. De la regla de la cadena es dedueix:

$$\begin{aligned} DF^p(\bar{x}) &= DF(F^{p-1}(\bar{x}))DF^{p-1}(\bar{x}) = \\ &= DF(F^{p-1}(\bar{x}))DF(F^{p-2}(\bar{x}))DF^{p-2}(\bar{x}) = \\ &= \dots = \\ &= DF(F^{p-1}(\bar{x}))DF(F^{p-2}(\bar{x}))\dots DF(F^2(\bar{x}))DF(F(\bar{x}))DF(\bar{x}) = \\ &= DF(\bar{x}_{p-1})DF(\bar{x}_{p-2})\dots DF(\bar{x}_2)DF(\bar{x}_1)DF(\bar{x}_0) \end{aligned}$$

de manera que la matriu $DF^p(\bar{x})$ s'obté multiplicant les matrius Jacobianes de F avaluades en els diferents punts de l'òrbita periòdica (en sentit invers al sentit de l'òrbita i començant per $F^{p-1}(\bar{x}) = \bar{x}_{p-1}$).

Casos particulars:

Recordem que l'estabilitat de l'òrbita periòdica està determinada pel radi espectral de $DF^p(\bar{x})$.

Com hem vist, en dimensió 1 les aplicacions lineals són nombres i els seus radis espectrals coincideixen amb el mòdul d'aquests nombres. En particular

$$\rho((F^p)'(\bar{x})) = |(F^p)'(\bar{x})| = |F'(\bar{x}_{p-1})F'(\bar{x}_{p-2})\dots F'(\bar{x}_2)F'(\bar{x}_1)F'(\bar{x}_0)|.$$

En dimensió 2 podríem calcular el mòdul de $\rho(DF^p(\bar{x}))$ calculant el determinant i la traça de

$$DF^p(\bar{x}) = DF(\bar{x}_{p-1})DF(\bar{x}_{p-2})\dots DF(\bar{x}_2)DF(\bar{x}_1)DF(\bar{x}_0)$$

i mirant si aquest parell de valors cauen o no dins el “triangle d'estabilitat”. Per fer això cal tenir en compte que $det(AB) = det(A)det(B)$ per tot parell de matrius quadrades però en general no és cert que $tr(AB) = tr(A)tr(B)$. Per tant el més fàcil sol ser calcular el producte matricial primer i calcular el determinant i la traça després.

Exemples. Considerem $F(x) = \frac{16}{5}x(1-x)$.

- Té òrbites 2-periòdiques? Quantes?

- És estable?

1.6 Atractors estranys i multiplicadors de Lyapunov

La definició de punts fixos atractors i òrbites periòdiques atractores es pot generalitzar a altres conjunts de l'espai de fase.

Definició. Un conjunt C és un atractor de F si:

1) C és acotat,
2) $F(C) = C$, és a dir C és invariant per F,
3) $\forall U \subset \mathbb{R}^n$ entorn obert de C existeix un obert $V \subset U$ que conté C tal que $\forall x \in V$ la semiòrbita positiva de x està continguda a U, és a dir C és estable per F,
4) $\exists U \in \mathbb{R}^n$ entorn obert de C tal que $\forall x \in U$
$$\lim_{k\to\infty} d(F^k(x), C) = 0$$
on $d(x, C) = \min\{\|x - \bar{x}\| \text{ amb } \bar{x} \in C\}$,
5) si $C' \subset C$ i $F(C') = C'$ aleshores C' no és estable (i.e. és inestable).

Definició. Es defineix la conca d'atracció d'un atractor C com la unió de tots els oberts U que satisfan la condició 4) de la llista anterior.

Pregunta: Existeixen atractors que no siguin ni punts fixos ni òrbites periòdiques?

Per respondre aquesta pregunta definim primer el multiplicador de Lyapunov d'una semiòrbita positiva en dimensió 1.

Definició. Sigui $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un s.d.d. en dimensió 1. Donat $x \in \mathbb{R}$ es defineix el multiplicador de Lyapunov de la semiòrbita positiva de x com:
$$\Lambda(x) = \lim_{k\to\infty} |(F^k)'(x)|^{\frac{1}{k}} \quad \text{en cas que existeixi.}$$

Observació. El multiplicador de Lyapunov de la semiòrbita positiva de x dóna informació sobre com es comporta la distància entre els punts $F^k(x)$ i $F^k(\tilde{x})$, on $\tilde{x}$ és un punt proper a x, a mesura k es fa gran. En concret es té que

$$|F^k(\tilde{x}) - F^k(x)| \approx \Lambda(x)^k |\tilde{x} - x|$$

si k és prou gran i $\tilde{x}$ és prou proper a x (de fet, com més gran és k més a prop ha d'estar $\tilde{x}$ de x perquè l'aproximació sigui bona degut a que les derivades de F^k es fan poden fer cada vegada més acusades).

Per justificar aquesta afirmació observem que:

$$|F^k(\tilde{x}) - F^k(x)| = |\tilde{x} - x| \left| \frac{F^k(\tilde{x}) - F^k(x)}{\tilde{x} - x} \right| \overset{(1)}{\approx} |\tilde{x} - x| |(F^k)'(x)| \overset{(2)}{\approx} |\tilde{x} - x| \Lambda(x)^k,$$

on a (1) s'utilitza que $\tilde{x}$ és prou proper a x (tenint en compte el valor de k) i a (2) s'utilitza que k és prou gran per tal que

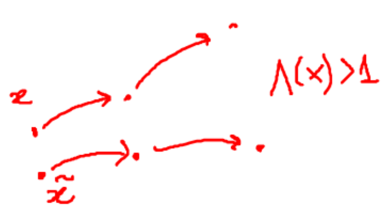
$$\Lambda(x) - \left|(F^k)'(x)\right|^{\frac{1}{k}} \approx 0,$$

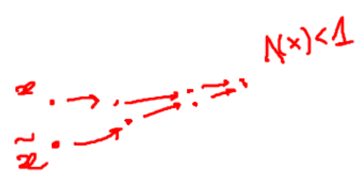
per la definició de $\Lambda(x)$, la qual cosa implica que

$$\Lambda(x)^k \approx \left|(F^k)'(x)\right|.$$

El multiplicador de Lyapunov dóna, per tant, una mesura sobre si òrbites que comencen aprop tendeixen a convergir o a divergir.

- Si $\Lambda(x) > 1$, $O_+(x)$ i $O_+(\tilde{x})$ tendeixen a separar-se l'una de l'altra. En aquest cas es diu que el sistema en aquesta regió de l'espai de fase és sensible respecte condicions inicials.
- Si $\Lambda(x) < 1$, $O_+(x)$ i $O_+(\tilde{x})$ tendeixen a apropar-se l'una de l'altra.





Definició. L'exponent de Lyapunov es defineix a partir del multiplicador de Lyapunov com:

$$\lambda(x) = \ln \Lambda(x)$$

Observació. Un mètode per calcular $\lambda(x)$ i/o $\Lambda(x)$ es sistemes 1-dimesnionals es basa en el següent. Per la regla de la cadena es té, definint $x_k = F^k(x)$,

$$\left|(F^k)'(x)\right| = \left|F'(F^{k-1}(x))F'(F^{k-2}(x))\dots F'(F(x))F'(x)\right| = |F'(x_{k-1})F'(x_{k-2})\dots F'(x_1)F'(x_0)|\,.$$

Per tant

$$\begin{aligned}\lambda(x) = \ln \Lambda(x) = \ln \lim_{k\to\infty} |(F^k)'(x)|^{\frac{1}{k}} &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln |(F^k)'(x)| = \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln |F'(x_{k-1})||F'(x_{k-2})|\dots|F'(x_1)||F'(x_0)| = \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln |F'(x_j)|\end{aligned}$$

Així, per calcular l'exponent de Lyapunov de la semiòrbita positiva de x només cal conèixer la derivada de F en els punts de $O_+(x)$. Una aproximació de $\lambda(x)$ s'obtindria amb l'algorisme següent:

```
x <- x_0
lam <- ln(|F'(x)|)
k <- 10000
per (i de 1 fins a k-1) {
    x <- F(x)
    lam <- lam+ln(|F'(x)|)
}
lam <- lam/k
retorna(lam)
```

Evidentment aquest algorisme es podria millorar. De fet és una bona idea calcular primer x_m per un m gran i després calcular $\lambda(x_m)$, ja que d'aquesta manera s'eliminen possibles comportaments transitoris (i no assimptòtics) de la semiòrbita positiva de x. Observeu que $\lambda(x) = \lambda(x_m)$ amb $x_m = F^m(x)$ pel fet que l'exponent de Lyapunov és un límit de la semiòrbita positiva de x (ho provarem amb més detall a problemes). Aquest nou algorisme seria, per exemple,

```
x <- x_0
m <- 5000
per (i de 1 fins a m) {
     x <- F(x)
}
lam <- ln(|F'(x)|)
k <- 10000
per (i de 1 fins a k-1) {
     x <- F(x)
     lam <- lam+ln(|F'(x)|)
}
lam <- lam/k
retorna(lam)
```

Aquest algorisme també es podria refinar introduint un criteri que determinés si el valor de l'exponent de Lyapunov ha convergit o no.

Lema. Si f és contínua i $x_k \to x$ quan k tendeix a infinit, aleshores

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} f(x_j) = f(x)$$

Demostració. Com que f és contínua, es té que per tot $\varepsilon > 0$ existeix k_0 tal que si $k > k_0$ aleshores

$$|f(x_k) - f(x)|| < \varepsilon$$

Definim M com

$$M = \sum_{j=0}^{k_0} |f(x_j) - f(x)|$$

que serà una quantitat finita (potser molt gran, però finita). Llavors,

$$\begin{aligned} \left| \left(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} f(x_j) \right) - f(x) \right| &= \left| \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \Big(f(x_j) - f(x) \Big) \right| \leq \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} |f(x_j) - f(x)| \,| < \\ &< \lim_{k\to\infty} \frac{M}{k} + \frac{1}{k} \sum_{j=k_0+1}^{k-1} \varepsilon \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

i com que això és cert per ε arbitràriament petits es conclou

$$\left(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} f(x_j) \right) - f(x) = 0.$$

□

Proposició. Si F és de C^1 (és a dir F és diferenciable i F' és contínua) i x convergeix a un punt fix atractor $\bar{x}$ aleshores

$$\lambda(x) = \ln |F'(\bar{x})| < 0$$

Demostració. Com que la funció $f(x) = \ln |F'(x)|$ és contínua perquè és composició de funcions contínues (la funció logaritme i la funció valor absolut són contínues) i $x_k = F^k(x)$ convergeix a $\bar{x}$ per hipòtesi, aleshores es té, utilitzant el lema anterior, que

$$\lambda(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln |F'(x_j)| = \ln |F'(\lim_{k\to\infty} x_k)| = \ln |F'(\bar{x})|,$$

i $\lambda(x) < 0$ perquè $|F'(\bar{x})| < 1$ ja que $\bar{x}$ és un punt fix atractor.

□

Proposició. Si F és de C^1 i x convergeix a una òrbita p-periòdica atractora

$$O(\bar{x}) = (\bar{x}, F(\bar{x}), \ldots, F^{p-1}(\bar{x})) = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{p-1})$$

aleshores

$$\lambda(x) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \ln |F'(\bar{x}_j)| < 0$$

Demostració. Com en el cas anterior la funció $f(x) = \ln |F'(x)|$ és contínua. D'altra banda, com que la semiòrbita positiva de x convergeix a l'òrbita periòdica $O(\bar{x})$, es té que la successió $x_p = F^p(x)$, $x_{2p} = F^{2p}$, $x_{3p} = F^{3p}$ convergeix a algun punt de l'òrbita periòdica. Sense pèrdua de generalitat podem suposar que aquest punt és $\bar{x}_0$ (sempre es pot reindexar els índexs de la òrbita perquè això sigui així), és a dir que

$$\lim_{k\to\infty} F^{kp}(x) = \bar{x}_0.$$

Aleshores, utilitzant el lema anterior es té

$$\begin{aligned}
\lambda(x) &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln |F'(x_j)| = \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{pk} \sum_{j=0}^{k-1} \Big(\ln |F'(x_{pj})| + \ln |F'(x_{pj+1})| + \cdots + \ln |F'(x_{pj+p-1})| \Big) = \\
&= \frac{1}{p} \left(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln |F'(x_{pj})| + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln |F'(x_{pj+1})| + \cdots + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln |F'(x_{pj+p-1})| \right) = \\
&= \frac{1}{p} \Big(\ln |F'(\lim_{k\to\infty} x_{pj})| + \ln |F'(\lim_{k\to\infty} x_{pj+1})| + \cdots + \ln |F'(\lim_{k\to\infty} x_{pj+p-1})| \Big) = \\
&= \frac{1}{p} (\ln |F'(\bar{x}_0)| + \ln |F'(\bar{x}_1)| + \cdots + \ln |F'(\bar{x}_{p-1})|) = \ln |F'(\lim_{k\to\infty} x_k)| = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \ln |F'(\bar{x}_j)|.
\end{aligned}$$

Es conclou, a més a més, que $\lambda(x) < 0$ perquè

$$|F'(\bar{x}_0)||F'(\bar{x}_1)| \cdots |F'(\bar{x}_{p-1})| < 1$$

ja que $O(\bar{x}) = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{p-1})$ és una òrbita p-periòdica atractor, de manera que

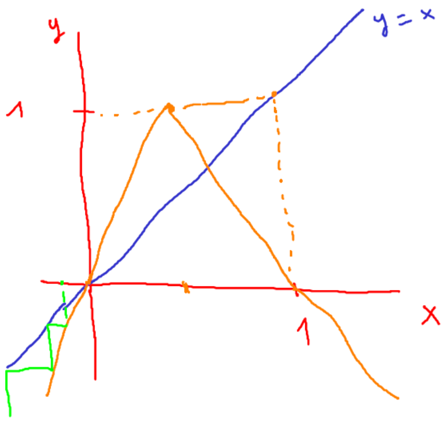
$$\sum_{j=0}^{p-1} \ln |F'(\bar{x}_j)| = \ln \Big(|F'(\bar{x}_0)||F'(\bar{x}_1)| \cdots |F'(\bar{x}_{p-1})| \Big) < 0.$$

□

Corol·lari. Si la semiòrbita positiva de x, $O_+(x)$, és acotada i $\lambda(x) > 0$, aleshores x convergeix a un atractor que no és ni un punt fix ni una òrbita periòdica.

Exemple. L'aplicació tenda:

$$F(x) = 1 - |1 - 2x| = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 1/2 \\ 2 - 2x & \text{si} \quad x \geq 1/2 \end{cases}$$



$|F'(x)| = 2 \quad \text{si } x \notin \frac{1}{2}$

$F([0,1]) = [0,1]$

si $x \in [0,1]$

$\lambda(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln|F'(x_k)| =$

$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln 2 = \ln 2 > 1$

1.7 Multiplicadors/exponents de Lyapunov en dimensió superior

Els multiplicadors i exponents de Lyapunov es poden definir també en sistemes dinàmics de dimensions més altes. En aquests casos, però, una semiòrbita positiva tindrà tants multiplicadors/exponents de Lyapunov com la dimensió del sistema. **Notació.** Donada una matriu quadrada M de dimensió n denotem les arrels del polinomi característic de M com

$$\text{vap}_1(M), \text{vap}_2(M), \ldots, \text{vap}_n(M)$$

de manera que

$$|\text{vap}_1(M)| \geq |\text{vap}_2(M)| \geq \cdots \geq |\text{vap}_n(M)|$$

Recordeu que el polinomi característic de A és d'ordre n i per tant té n arrels (no necessàriament diferents entre elles i no necessàriament reals).

Definició. Sigui $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un sistema dinàmic n-dimensional. Suposem F contínua amb diferenciable contínua. Sigui $x \in \mathbb{R}^n$.

El primer multiplicador de Lyapunov de $O_+(x)$ és

$$\Lambda_1(x) = \lim_{k\to\infty} |\text{vap}_1(DF^k(x))|^{\frac{1}{k}}$$

on $DF^k(x)$ indica la matriu Jacobiana de F^k. De forma anàloga es defineix, per $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$, el l-èssim multiplicador de Lyapunov de $O_+(x)$ com

$$\Lambda_l(x) = \lim_{k\to\infty} |\text{vap}_l(DF^k(x))|^{\frac{1}{k}}.$$

El l-èssim exponent de Lyapunov de $O_+(x)$ es defineix a partir el multiplicador de Lyapunov com

$$\lambda_l(x) = \ln \Lambda_l(x)$$

Observeu que si $\Lambda_l(x) = 0$ aleshores $\lambda_l(x) = -\infty$. En particular quan $\Lambda_1(x) = 0$ es tindrà que $\Lambda_l(x) = 0$ per a tot $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$, i en aquest cas es diu que x convergeix a un superatractor (per exemple, en dimensió 1 es té que el 0 és un punt fix superatractor del sistema $F(x) = -x^2$).

Proposició. Si x convergeix a un punt fix atractor $\bar{x}$ aleshores els multiplicadors/exponents de Lyapunov de $O_+(x)$ coincideixen amb els de $O_+(\bar{x})$. En particular es té:

$$\Lambda_l(x) = \Lambda_l(\bar{x}) = |\text{vap}_l DF(\bar{x})| \le \rho(DF(\bar{x}) < 1,$$

on la darrera desigualtat es deu al fet que $\bar{x}$ és un punt fix atractor.

Proposició. Si x convergeix a una òrbita p-periòdica atractora $O(\bar{x}) = (\bar{x}, F(\bar{x}), F^2(\bar{x}), \ldots, F^{p-1}(\bar{x}) = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{p-1})$, aleshores els multiplicadors/exponents de Lyapunov de $O_+(x)$ coincideixen amb els de $O_+(\bar{x})$. En particular es té

$$\Lambda_l(x) = \Lambda_l(\bar{x}) = |\text{vap}_l DF^p(\bar{x})|^{\frac{1}{p}} \le \rho(DF^p(\bar{x}))^{\frac{1}{p}} < 1$$

on la darrera igualtat es deu al fet que $O_p(\bar{x})$ és una òrbita periòdica atractora (que implica $\rho(\text{vap}_l DF^p(\bar{x})) < 1$) . Per calcular $DF^p(\bar{x})$ recordeu la identitat (que surt d'aplicar la regla de la cadena p vegades):

$$DF^p(\bar{x}) = DF(\bar{x}_{p-1})DF(\bar{x}_{p-2}) \cdots DF(\bar{x}_1)DF(\bar{x}_0).$$

1.8 Bifurcacions

Sigui A un obert de $\mathbb{R}^m$ i $F_A = \{F_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid \alpha \in A\}$ una família de sistemes dinàmics discrets parametritzada per α. És clar que els atractors de F_α depenen del valor que prengui el paràmetre α. Quan els atractors varien entorn un valor α^*, tant en nombre com en tipologia (punts fixos, òrbites periòdiques, atractors estranys, etc.), es diu que el sistema experimenta una bifurcació a α^*.

1.9 Bifurcacions de punts fixos

Sigui $F_\alpha(x) = F(x, \alpha)$ contínua respecte x i α. Siguin $\bar{x}$ i $\bar{\alpha}$ tals que $F(\bar{x}, \bar{\alpha})$, és a dir tals que $\bar{x}$ sigui un punt fix de $F_{\bar{\alpha}}$.

El punt fix "segueix existint" quan es modifica lleugerament el paràmetre α?

Més concretament, existeix una, i només una, funció $\bar{x}(\alpha)$ definida en un entorn d'$\bar{\alpha}$ tal que

$$\bar{x}(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha} \quad \text{i} \quad F_\alpha(\bar{x}(\alpha)) = F(\bar{x}(\alpha), \alpha) = \bar{x}(\alpha) \quad ?$$

El teorema de la funció implícita permet donar condicions en les que això serà possible: si

$$DF_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) - Id = D_1F(\bar{x}, \bar{\alpha}) - Id$$

és invertible.

Nota. Una manera de recordar les hipòtesis del teorema de la funció implícita consisteix en partir de la funció implícita que volem (en el nostre cas $\bar{x}(\alpha)$) i escriure l'expansió lineal (Taylor d'ordre 1) entorn el punt on se satisfà l'equació implícita. En el nostre cas l'equació implícita és $F(\bar{x}, \alpha) = \bar{x}$ i el punt on se satisfà l'equació és $\alpha = \bar{\alpha}$, per tant escrivim l'expansió lineal de $\bar{x}(\alpha)$ entorn $\bar{\alpha}$:

$$\bar{x}(\alpha) = \bar{x}(\bar{\alpha}) + D\bar{x}(\bar{\alpha})(\alpha - \bar{\alpha}) + o(\|\alpha - \bar{\alpha}\|).$$

Ara bé, perquè aquesta expansió existeixi cal que $D\bar{x}(\bar{\alpha})$ (si α fos 1 dimensional escriuríem la derivada ordinària $\bar{x}'(\bar{\alpha})$) estigui ben definida. Per veure quan això és així partim de l'equació implícita (suposant que existeix la funció implícita $\bar{x}(\alpha)$)

$$F(\bar{x}(\alpha), \alpha) - \bar{x}(\alpha) = 0$$

i derivem respecte α:

$$D_1F(\bar{x}(\alpha), \alpha)D\bar{x}(\alpha) + D_2F(\bar{x}(\alpha), \alpha) - D\bar{x}(\alpha) = 0$$

Així veiem que perquè $D\bar{x}(\bar{\alpha})$ estigui ben definida cal que $D_1F(\bar{x}, \bar{\alpha}) - Id$ (o, utilitzant l'altra notació, $DF_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) - Id$) sigui invertible ja que:

$$D\bar{x}(\bar{\alpha}) = -(D_1F(\bar{x}(\bar{\alpha}), \bar{\alpha}) - Id)^{-1}D_2F(\bar{x}(\bar{\alpha}), \bar{\alpha}) = -(D_1F(\bar{x}, \bar{\alpha}) - Id)^{-1}D_2F(\bar{x}, \bar{\alpha}).$$

Observació. Demanar que la matriu $DF_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) - Id$ sigui invertible equival a demanar que la matriu $DF_{\bar{\alpha}}(\bar{x})$ no tingui valors propis iguals a 1 (recordeu que els valors propis d'una matriu M són els valors μ pels quals la matriu $M - \mu Id$ no és invertible, que equivalen a les arrels del polinomi característic $p(\mu) = \det(M - \mu Id)$). Per tant:

- Si $DF_{\bar{\alpha}}(\bar{x})$ té algun valor propi igual a 1 **pot passar** que $\bar{\alpha}$ sigui un paràmetre de bifurcació (pot passar, per exemple, que el punt fix desapareixi).
- Si $DF_{\bar{\alpha}}(\bar{x})$ no té valors propis iguals a 1, el punt fix existeix per valors d'α propers a $\bar{\alpha}$. En aquest cas es pot definir $\rho(\alpha) := \rho(DF_\alpha(\bar{x}(\alpha)))$ en un entorn d'$\bar{\alpha}$. Com que $\bar{x}(\alpha)$ serà atractor si $\rho(\alpha) < 1$ i serà repulsor si $\rho(\alpha) > 1$, si $\rho(\bar{\alpha}) = \rho(DF_{\bar{\alpha}}(\bar{x})) = 1$ **pot passar** que $\bar{\alpha}$ sigui un paràmetre de bifurcació .
- Si $DF_{\bar{\alpha}}(\bar{x})$ no té valors propis iguals a 1 i $\rho(DF_{\bar{\alpha}}(\bar{x})) \neq 1$ aleshores $\bar{\alpha}$ **no és** un paràmetre de bifurcació del punt $\bar{x}$.

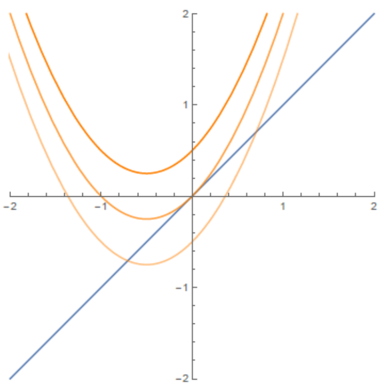
1.10 Bifurcacions de punts fixos en dimensió 1 i $\alpha \in \mathbb{R}$

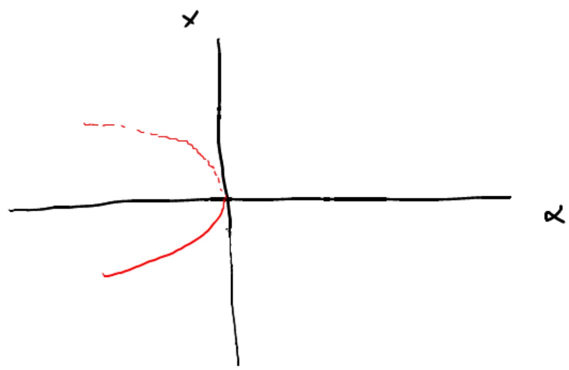
Siguin $\bar{\alpha}$ i $\bar{x}$ tals que $F_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) = \bar{x}$.

Bifurcació sella node: En aquesta bifurcació apareixen dues branques de punts fixos en una regió de l'espai de fase on no hi havia punts fixos. Un dels punts fixos que apareix és estable i l'altra inestable. Les condicions que determinen aquest tipus de bifurcacions són:

$F'_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) = 1$ i $F''_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) \neq 0$ i $\partial_\alpha F(\bar{x}, \bar{\alpha}) \neq 0$.

Exemple. $F(x) = \alpha + x^2 + x$ quan $(\bar{x}, \bar{\alpha}) = (0, 0)$.

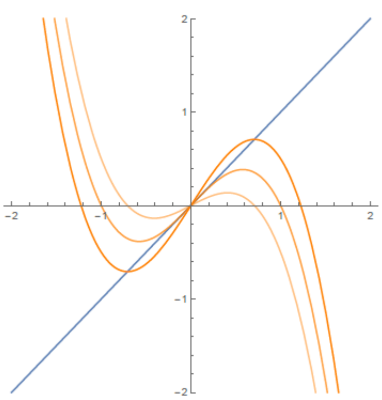


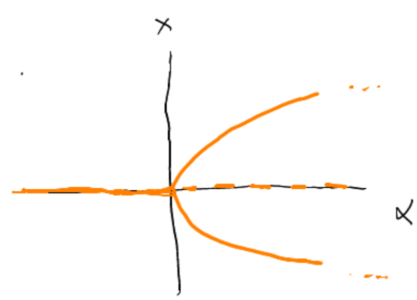


Bifurcació Pitchfork: En aquesta bifurcació un punt fix canvia de caràcter i apareixen dues branques de punts fixos que hereten el caràcter del punt fix original. Les condicions que determinen aquest tipus de bifurcacions són:

$F'_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) = 1$ i $F''_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) = 0$ i $F'''_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) \neq 0$ i $\partial_\alpha \partial_x F(\bar{x}, \bar{\alpha}) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x} F(\bar{x}, \bar{\alpha})\right) \neq 0$.

Exemple. $F(x) = \alpha x - x^3 + x$ quan $(\bar{x}, \bar{\alpha}) = (0, 0)$.

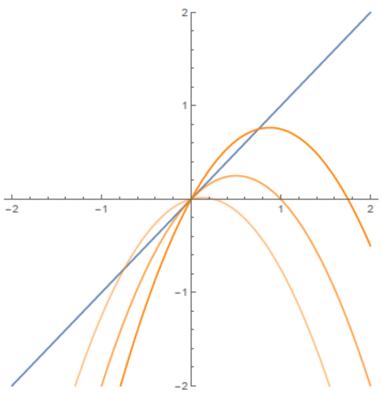


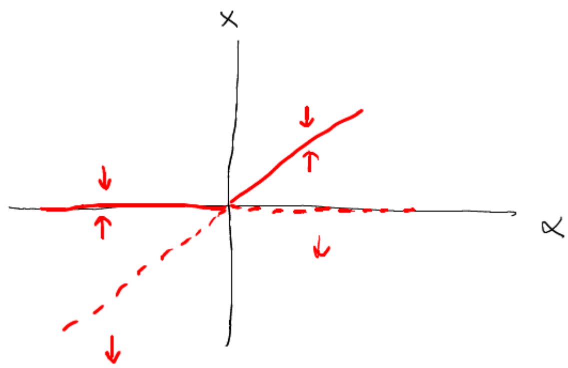


Bifurcació transcrítica: En aquesta bifurcació dues branques de punts fixos (un estable i l'altre inestable) es creuen i intercanvien el seu caràcter (la branca de punts fixos estables passa a ser de punts fixos inestables i viceversa). Les condicions que determinen aquest tipus de bifurcacions són:

$F'_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) = 1$ i $F''_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) \neq 0$ i $\partial_\alpha F(\bar{x}, \bar{\alpha}) = 0$ i $\partial_\alpha \partial_x F(\bar{x}, \bar{\alpha}) \neq 0$.

Exemple. $F(x) = \alpha x(1-x)$ quan $(\bar{x}, \bar{\alpha}) = (0, 0)$.

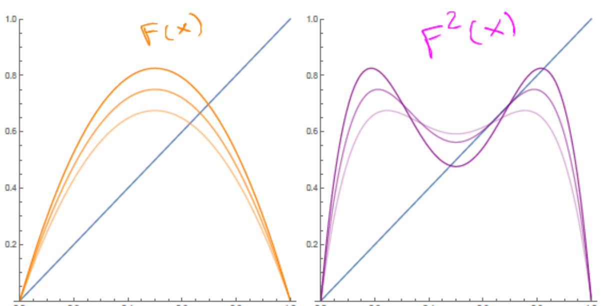


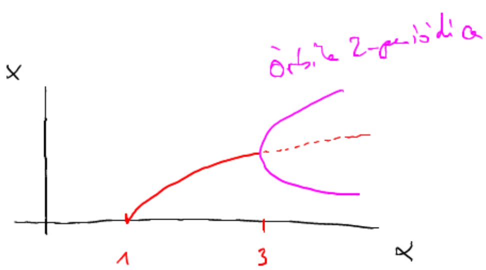


Bifurcació duplicació de període: En aquesta bifurcació un punt fix estable passa a ser inestable i apareix una òrbita 2 periòdica estable. Les condicions que determinen aquest tipus de bifurcacions són:

$F'_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) = -1$ i $\partial_\alpha \partial_x F(\bar{x}, \bar{\alpha}) \neq 0$.

Exemple. $F(x) = \alpha x(1-x)$ quan $(\bar{x}, \bar{\alpha}) = (\frac{2}{3}, 3)$





1.11 Relació entre les bifurcacions dels sistemes dinàmics discrets i els continus

Considerem una EDO 1 dimensional de la forma:

$$x'(t) = f_\alpha(x(t))$$

on α és un paràmetre de l'equació. Recordeu que un punt fix de l'EDO anterior és un punt tal que $f_\alpha(\bar{x}) = 0$ i que el punt fix és atractor si $f'_\alpha(\bar{x}) < 0$ i repulsor si $f'_\alpha(\bar{x}) > 0$. Com en els sistemes dinàmics discrets, els sistemes dinàmics a temps continu com el representat per aquesta EDO també poden presentar bifurcacions en relació al paràmetre α. Anem a veure quines bifurcacions pot presentar l'equació anterior i com es relacionen amb les que hem vist pels sistemes dinàmics a temps discret.

La solució de l'EDO anterior satisfà

$$x(t+h) = x(t) + hf_\alpha(x(t)) + O(h^2).$$

Per tant, si $h > 0$ és prou petit, es tindrà que la dinàmica de les trajectòries de l'EDO anterior s'assemblaran a les del sistema dinàmic discret donat per

$$F_\alpha(x) = x + hf_\alpha(x).$$

Observem que els punts fixos d'aquesta sistema són els mateixos que els punts fixos de l'EDO anterior (independentment del valor que prengui h). Concretament,

$$F_\alpha(x) = x \qquad \text{si i només si} \qquad f_\alpha(x) = 0.$$

D'altra banda, el caràcter dels punts fixos tampoc depèn del paràmetre h (sempre que aquest sigui prou petit). Concretament, si $\bar{x}$ és un punt fix de l'EDO (i per tant també de l'aplicació F_α anterior), es té

$$F'_\alpha(\bar{x}) = 1 + hf'_\alpha(x) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} F'_\alpha(\bar{x}) < 1 & \text{si} \quad f'_\alpha(\bar{x}) < 0 \\ F'_\alpha(\bar{x}) > 1 & \text{si} \quad f'_\alpha(\bar{x}) > 0 \end{cases}$$

Per tant, les bifurcacions que experimenti el sistema dinàmic discret en moure α es tradueixen en bifurcacions del sistema dinàmic continu.

Observeu, entre d'altres coses, que l'EDO no podrà experimentar mai bifurcacions del tipus *Doblament de període*, ja que perquè això passi cal que $F'_\alpha(\bar{x}) = -1$ i això no pot passar perquè si h és prou petit es té que $F'_\alpha(\bar{x}) \approx 1$. De fet, si h és prou petit, la funció $F_\alpha(x) = x + hf'_\alpha(x)$ serà creixent, i això implica que la trajectòria (semiòrbita positiva) de qualsevol punt x_0 bé convergirà a un punt fix o bé divergirà (exercici 7b de la llista).

El sistema dinàmic continu donat per l'EDO sí podrà presentar bifurcacions de tipus *Sella-node*, *Pitchfork* i *Transcrítica*. Concretament, donat un parell $(\bar{x}, \bar{\alpha})$, es té que

- L'EDO presenta una bifrucació Sella-node en $(\bar{x}, \bar{\alpha})$ si i només si per h prou petit F_α presenta una bifurcació d'aquest estil. En particular això passarà si i només si

$$f_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) = 0 \quad \text{i} \quad f''_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) \neq 0 \quad \text{i} \quad \partial_\alpha f(\bar{x}, \bar{\alpha}) \neq 0.$$

- L'EDO presenta una bifrucació Pitchfork en $(\bar{x}, \bar{\alpha})$ si i només si per h prou petit F_α presenta una bifurcació d'aquest estil. En particular això passarà si i només si

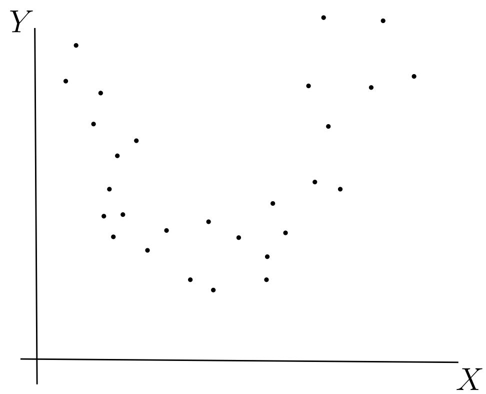
$$f_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) = 0 \quad \text{i} \quad f''_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) = 0 \quad \text{i} \quad f'''_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) \neq 0 \quad \text{i} \quad \partial_\alpha \partial_x f(\bar{x}, \bar{\alpha}) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(\bar{x}, \bar{\alpha})\right) \neq 0.$$

- L'EDO presenta una bifrucació Transcrítica en $(\bar{x}, \bar{\alpha})$ si i només si per h prou petit F_α presenta una bifurcació d'aquest estil. En particular això passarà si i només si

$$f_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) = 0 \quad \text{i} \quad f''_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) \neq 0 \quad \text{i} \quad \partial_\alpha f(\bar{x}, \bar{\alpha}) = 0 \quad \text{i} \quad \partial_\alpha \partial_x f(\bar{x}, \bar{\alpha}) \neq 0.$$

1.12 Problemes

1. Suposem que s'ha preguntat a k individus de diverses edats que quantifiquèssin les hores de temps lliure que tenen a la setmana. Els resultats de l'estudi són k parells (X_k, Y_k) on X_k indica l'edat de la persona enquestada i Y_k les hores de temps lliure que ha manifestat tenir. La gràfica del conjunt de parells és la següent:



Considereu un model fenomenològic de la forma $Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$. Doneu el sistema lineal que determina els coeficients a_0, a_1 i a_2 que minimitzen les desviacions al quadrat entre el model i les observacions (és a dir, busqueu la paràbola que millor s'ajusta a les dades).

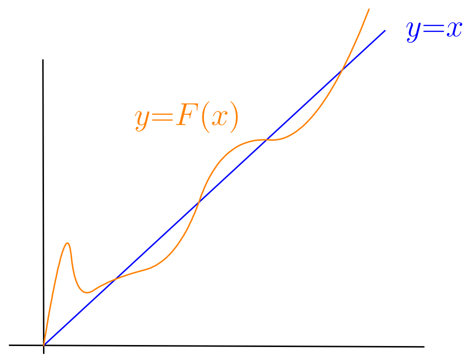
2. Llei d'Al·lometria. En molts organismes, el pers és proporcional a una potència de la seva longitud. Així, si P és el pes d'un organisme i L la seva longitud es té $P(L) = cL^\alpha$ on els paràmetres c i α es poden obtenir de dades disponibles. Per exemple, d'un estudi sobre la gambeta blanca del Pacífic Mexicà obtenim

Longitud (cm)	5.8	9.2	11.7	13.7	15.1	16.3	17.2	17.8	18.4	18.8	19.1	19.2
Pes (grams)	0.6	2.4	5.0	8.1	11.2	14.0	16.5	18.6	20.3	21.6	22.7	23.6

a) Definiu $Y = \log(P)$ i $X = \log(L)$ i doneu el model (lineal) que dóna Y en termes de X. Utilitzeu el mètode dels mínims quadrats en aquest model per estimar els paràmetres c i α a partir de les dades. Hi ha raons teòriques per esperar un valor semblant a l'α obtingut?

b) Estimeu el pes d'un individu de 25cm de longitud.

3. Discutiu gràficament la successió x_k donada pel sistema dinàmic $x_{k+1} = F(x_k)$ depenent del valor de $x_0 \geqslant 0$, on F té la gràfica següent:



4. Estudieu gràficament el model discret següent:

$$x_{k+1} = \frac{2x_k}{1+x_k^2}.$$

Dieu quin és el comportament de la semiòrbita positiva dels diferents $x_0 \in [0, \infty)$.

5. Doneu un sistema dinàmic discret 1-dimensional que tingui un punt fix estable a $x = 1$ i un punt fix inestable a $x = 3$.

6. Considereu una planta que germina a la primavera, floreix a l'estiu i mort a la tardor després d'haver produït llavors. Una fracció de les llavors sobreviu l'hivern. D'aquestes, una fracció germina a la primavera següent (i floreix i produeix noves llavors). Les llavors que no han germinat ho podran fer la següent primavera si sobreviuen un segon hivern. Aquest procés podria continuar però assumim que cap llavor pot sobreviure 2 hiverns.

a) Desenvolupeu un model determinista a temps discret lineal per aquesta població de plantes tenint en compte les següents assumpcions:

- γ és el nombre mitjà de llavors que produeix una planta que ha florit.

- φ és la probabilitat que una planta floreixi.

- σ_1 és la probabilitat que una llavor sobrevisqui el primer hivern.

- σ_2 és la probabilitat que una llavor "d'un any" sobrevisqui el segon hivern.

- α_1 és la probabilitat que una llavor "d'un any" germini a la primavera.

- α_2 és la probabilitat que una llavor "de dos anys" germini a la primavera.

b) Determineu, en funció dels paràmetres, si la població creix o decreix geomètricament.

c) Modifiqueu alguna de les hipòtesis anteriors per tal que el model ja no sigui lineal i la població de plantes no pugui divergir a mesura passen els anys.

7a. Sigui $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua. Suposem que F no té punts fixos. Donat $x_0 \in \mathbb{R}$, proveu que la seva òrbita divergeix.

7b. Sigui $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua estrictament creixent. Donat $x_0 \in \mathbb{R}$, proveu que la seva òrbita o bé divergeix o bé convergeix a un punt fix.

7c. Sigui $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció de classe C^1 (i.e. contínua amb derivada contínua) estrictament decreixent . Donat $x_0 \in \mathbb{R}$, proveu que la seva òrbita o bé divergeix o bé convergeix a un punt fix o a una òrbita 2-periòdica. Indicació. Noteu que F^2 és estrictament creixent.

8. Doneu totes les òrbites 2-periòdiques de l'aplicació $F(x) = 4x(1 - x)$.

9. Sigui la família uniparamètrica de sistemes dinàmics donada per

$$F_\alpha(x) = x^2 + (\alpha + 1)x + 2\alpha - 3, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

a) Calculeu els punts fixos de F_α en funció de α i determineu-ne l'estabilitat.

b) Representeu les bifurcacions que experimenten els punts fixos en un diagrama de bifurcació.

10. Considereu una població que té un cicle reproductiu anual que satisfà les següents propietats:

- La probabilitat que un individu mori al llarg d'un any és $\mu \in (0, 1)$ (independentment de l'edat que tingui).

- El nombre mitjà de naixements que es produeixen cada any depèn de la població P aquell any, i ve donada per

$$b(P) = Pe^{r\left(1 - \frac{P}{K}\right)}.$$

a) Proposeu un sistema determinista discret 1-dimensional que modelitzi aquesta població i on la variable d'estat sigui P.

b) Definiu $x = P/K$ i escriviu el sistema per aquesta variable d'estat. Observeu que conèixer la dinàmica de x és equivalent a conèixer la dinàmica de P, però que el sistema per x depèn d'un paràmetre menys.

c) Justifiqueu que quan $\mu = 1$, independentment de la condició inicial, a partir del primer iterat (un any) la població prendrà valors en un interval $[0, P_{\max})$. Doneu el valor de $P_{\max}$ en funció de r i K.

d) Quan $\mu = 1$ determineu, en funció de r i K, els punt fixos del sistema i la seva estabilitat.

e) Feu un programa que, donats els paràmetres $r > 0$ i $\mu \in (0, 1]$ i una condició incial $x_0 > 0$ calculi l'exponent de Lyapunov de l'atractor al qual convergeix l'òrbita de x_0.

f) Executeu el programa per $(r, \mu) = (0.1i, 0.01j)$ amb $i \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ i $j \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ i grafiqueu la regió del pla de paràmetres $(r, \mu) \in (0, 10] \times (0, 1]$ on l'exponent de lyapunov és positiu.

11. Considereu els model poblacional següent, parametritzat per $(a, b) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$:

$$p_{k+1} = \frac{ap_k^2}{b^2 + p_k^2}.$$

a) Trobeu tots els punts fixos no negatius (i.e. $\bar{p} \geqslant 0$) en funció de a i b.

b) Proveu que el 0 és un atractor local independentment de a i b.

c) Per quins valors de (a, b) el 0 és un punt fix és un atractor global? Quin tipus de bifurcació es produeix en el sistema quan el 0 deixa de ser un atractor global i esdevé un atractor local?

e) Quina és la conca d'atracció del 0 en funció dels paràmetres a i b?

12. Un model d'efecte hivernacle.

Sigui $dt = 1\,\text{any}$. Sigui E l'energia del sol que incideix sobre la terra cada any per unitat de superfície, $\alpha \in [0, 1]$ el factor de reflexió de la terra (l'albedo), T la temperatura de la superfície terrestre (en graus Kelvin) i $\varepsilon \in [0, 1]$ un paràmetre relacionat amb l'efecte hivernacle (es tracta de la fracció d'energia calorífica emesa per la superfície de la terra que és absorbida per l'atmosfera i reemesa cap a la terra, enlloc de travessar-la. Valors grans d'ε es corresponen, per tant, amb efectes hivernacles més intensos). Sota certes assumpcions, la dinàmica de la temperatura de la terra al llarg dels anys es pot modelitzar com

$$T_{k+1} = T_k + \frac{A}{c}((1-\alpha)E - \sigma T_k^4 + \varepsilon\sigma T_k^4/2)$$

on A indica l'àrea de la superfície terrestre i c indica la quantitat d'energia necessària per pujar un grau la temperatura de la terra (com que la terra és molt gran, té molta massa, aquesta energia serà molt gran en comparació a l'energia que arriba i surt de la terra, és a dir c serà gran en comparació a $A((1-\alpha)E - \sigma T_k^4 + \varepsilon\sigma T_k^4/2)$). Per més detalls sobre el model podeu consultar: `https://en.wikipedia.org/wiki/Idealized_greenhouse_model`

a) Proveu que el sistema anterior només té un punt fix, és a dir que la temperatura de la terra és estacionaria només en un valor. Doneu la temperatura estacionaria en funció dels paràmetres i comproveu que és creixent respecte ε. Proveu que la temperatura és estable si c és prou gran.

b) Considereu els valors

$E = 705 \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2\,\text{dia}}$, que és aproximadament l'energia solar que arriba cada dia a la terra per unitat de superfície terrestre (és a dir, AE és l'energia total que arriba a la terra en un dia)

$\sigma = 1.17 \cdot 10^{-7} \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2\,\text{dia}\,\text{K}^4}$, que és la constant d'Stefan-Boltzmann

$\alpha = 0.3$, aproximadament l'albedo de la terra.

Dibuixeu la temperatura estacionaria que s'obté per aquests valors en funció del paràmetre ε.

c) Suposeu que α no és constant sinó que depèn de la temperatura de la terra com

$$\alpha(T) = 0.25 + 0.2\frac{e^{-0.4(T-283)}}{1+e^{-0.4(T-283)}}.$$

Dibuixeu la funció $\alpha(T)$ i doneu una interpretació a aquesta dependència de l'albedo en relació a la temperatura de la terra (recordeu que 273 K = 0 °C).

Dibuixeu el diagrama de bifurcació que s'obté en termes del paràmetre ε i indiqueu, aproximadament, en quins punts es produeixen bifurcacions sella node. Quines implicacions tenen aquestes bifurcacions en relació al canvi climàtic i a l'emissió de gasos d'efecte hivernacle?

1.13 Pràctica 1

Considereu l'aplicació logística

$$F_\alpha(x) = \alpha x(1-x)$$

amb $\alpha \in [1,4]$.

a) Argumenteu que si $x \in [0,1]$, aleshores $F_\alpha^k(x) \in [0,1]$ per a tot $k \in \mathbb{N}$ i $\alpha \in [1,4]$, però que això deixa de ser cert si $\alpha > 4$.

b) Preneu x un nombre aleatori entre 0 i 1. Per cada $\alpha \in \{1, 1.01, 1.02, \ldots, 3.98, 3.99, 4\}$ calculeu els punts

$$(\alpha, F^k(x)) \qquad \text{amb} \qquad 1000 < k \leqslant 1100,$$

i representeu aquests punts en el pla cartesià (α en l'eix horitzontal i $F^k(x)$ en l'eix vertical). La gràfica que obtindreu es coneixen com a diagrama de bifurcació de la dinàmica, i dóna informació sobre com canvia el comportament asimptòtic de la dinàmica del sistema a mesura es modifica el paràmetre α.

Comentari: Si repetíssiu la gràfica anterior canviant el nombre aleatori de partida, obtendríeu essencialment el mateix. Això es deu al fet per $\alpha \in [0,4]$ l'aplicació logística només té un atractor contingut a l'interval $[0,1]$, de manera que pràcticament tota condició inicial convergeix al mateix atractor, que és el que s'observa a la gràfica. Els únics punts que no convergeixen a aquest atractor únic són punts fixos inestables o punts d'òrbites periòdiques inestables.

c) Basant-vos en la gràfica anterior doneu intervals aproximats del paràmetre α, és a dir intervals de la forma (α_1, α_2), en els que

- l'atractor al qual convergeixen les semiòrbites positives és un punt fix,
- l'atractor al qual convergeixen les semiòrbites positives és un òrbita 2 periòdica,
- l'atractor al qual convergeixen les semiòrbites positives és una òrbita 4 periòdica.

Expliqueu com deduïu a partir de la gràfica que la semiòrbita positiva de la condició inicial convergeix a un punt fix o a una òrbita periòdica.

d) Preneu x un nombre aleatori contingut a [0,1]. Per cada un dels intervals identificats en l'apartat anterior, preneu α dins aquest interval i feu un gràfic dels primers 50 iterats de la semiòrbita positiva de x, és a dir grafiqueu els punts $(k, F^k(x))$ per $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 50\}$ en el pla cartesià. Les gràfiques que obteniu estan d'acord amb les observacions de l'apartat anterior?

e) Feu una funció que, per un valor α donat, calculi (aproximadament) l'exponent de Lyapunov de la semiòrbita positiva d'un punt x. Podeu basar-vos en el pseudocodi que vam veure a teoria:

```
x <- x_0
m <- 1000
per (i de 1 fins a m) {
     x <- F(x)
}
lam <- ln(|F'(x)|)
k <- 5000
per (i de 1 fins a k-1) {
     x <- F(x)
     lam <- lam+ln(|F'(x)|)
}
lam <- lam/k
retorna(lam)
```

Els arguments de la funció seran, per tant, el punt x i el paràmetre α de l'aplicació. La funció retorna $\lambda(x, \alpha)$ que es correspon amb una aproximació de l'exponent de Lyapunov que es buscava.

f) Preneu x un nombre aleatori contingut a [0,1]. Per cada $\alpha \in \{1, 1.01, 1.02, \ldots, 3.98, 3.99, 4\}$ calculeu els punts

$$(\alpha, \lambda(x, \alpha))$$

i representeu aquests punts en el pla cartesià (α en l'eix horitzontal i $\lambda(x, \alpha)$ en l'eix vertical). Per aquest gràfic podeu utilitzar una línia que uneixi els diferents punts ja que en cert sentit s'està graficant $\lambda(x, \alpha)$ en funció de α. Com que la funció $\lambda(x, \alpha)$ pot prendre valors molt negatius, definiu el rang de l'eix vertical perquè es mostrin només els valors que es troben a l'interval $(-5, 1)$.

Comentari. En aquest cas la gràfica de $\lambda(x, \alpha)$ com a funció de α és essencialment la mateixa per a pràcticament tota condició inicial x continguda a $[0, 1]$.

g) Basant-vos en l'apartat anterior, preneu un valor α tal que $\lambda(x, \alpha) > 0$. Preneu x i $\tilde{x} = x \pm 0.0001 \in (0, 1)$ i representeu els primers 50 iterats de les semiòrbites positives de x i de $\tilde{x}$ com en l'apartat d). Representeu les semiòrbites en el mateix gràfic i utilitzant un color diferent per a cada una d'elles. Observeu que les trajectòries són semblants al principi però que al cap d'alguns iterats aquesta coherència inicial es perd.

Capítol 2

Processos estocàstics a temps discret

En aquest tema definirem què són els processos estocàstics en general i donarem algunes propietats dels processos estocàstics a temps discret. També mostrarem la relació que hi ha entre els processos estocàstics a temps discret i els sistemes dinàmics discrets vistos al tema anterior.

Definició. Un procés estocàstic és una col·lecció de variables aleatòries $\{X_t : t \in T\}$ on T és un conjunt d'índexs (que habitualment indiquen una variable temporal). Les variables aleatòries de la col·lecció estan definides en el mateix espai de probabilitat, de manera que cada esdeveniment d'aquest espai determina el valor que pren X_t pels diferents $t \in T$. El conjunt d'aquests valors s'anomena la *realització* o *trajectòria* del procés associat a l'esdeveniment en qüestió.

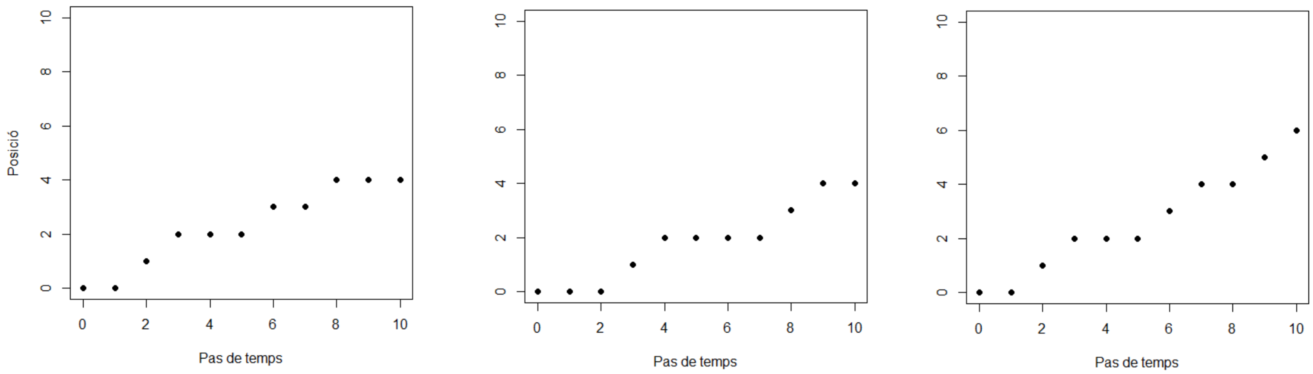
Un model estocàstic dinàmic es basa en un procés estocàstic en el que se satisfan relacions específiques entre les variables aleatòries X_t per $t \in T$ del procés. Com hem comentat a la definició anterior, els índexs t denoten una variable temporal. Quan el conjunt d'índexs T és continu (per exemple $\mathbb{R}$), es diu que el procés estocàstic és a temps continu. En aquest cas es diu que X_t és la variable aleatòria del procés a temps t. Per contra, quan el conjunt T és discret (per exemple $\mathbb{N}$), es diu que el procés estocàstic és a temps discret. En aquest segon cas és oportú canviar l'índex t per k (en analogia als sistemes dinàmics discrets), i dir referir-nos X_k com la variable aleatòria del procés al pas de temps k.

Els mètodes per formular, analitzar i simular els processos estocàstics depenen de si les variables aleatòries prenen valors en un conjunt (l'espai de fase del procés) discret o continu i si el conjunt d'índexs temporals T és continu o discret. Per aquest motiu els processos estocàstics es classifiquen en els quatre grups següents:

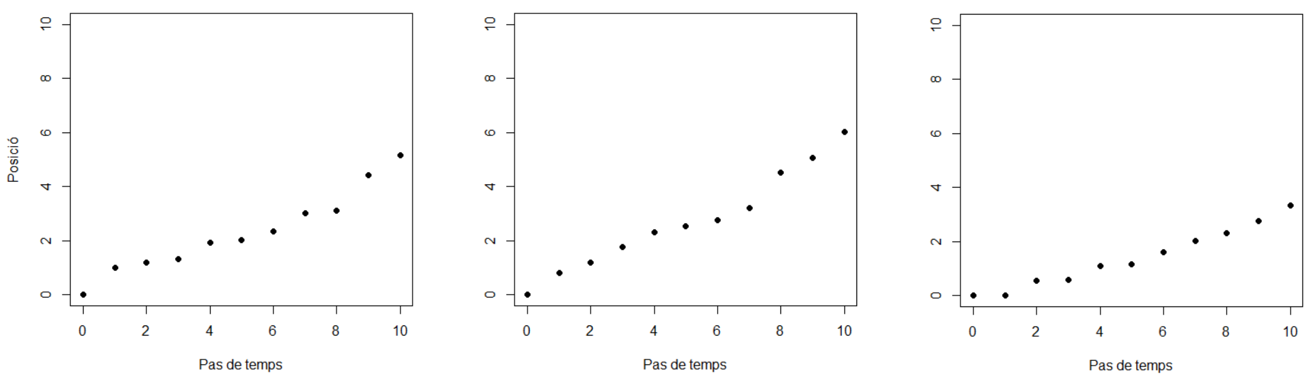
1) Processos estocàstic discret en temps i espai.
2) Processos estocàstic discret en temps i continu en espai.
3) Processos estocàstic continu en temps i discret en espai.
4) Processos estocàstic continu en temps i espai.

Anem a veure un exemple de cada un d'aquests grups. Com es pot observar en els següents exemples, es poden utilitzar diferents tipus de processos per modelitzar fenòmens relativament similars. Per cada exemple es mostren tres realitzacions del procés diferents.

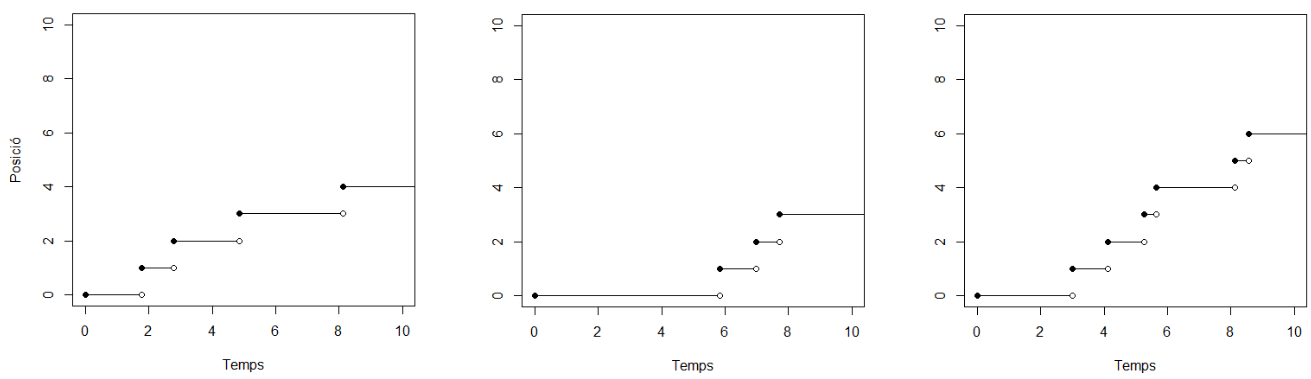
Exemple 1. X_k representa la posició d'una partícula (inicialment a la posició 0) que a cada pas de temps es desplaça una unitat d'espai cap amunt amb probabilitat 1/2. És a dir $X_k = X_{k-1} + 1$ amb probabilitat $1/2$ i $X_k = X_{k-1}$ amb probabilitat $1/2$.



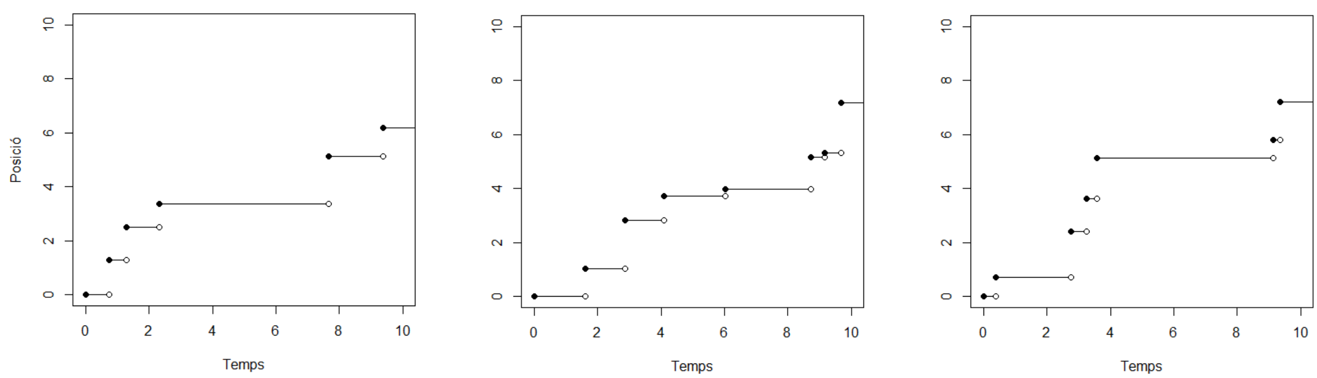
Exemple 2. X_k representa la posició d'una partícula (inicialment a la posició 0) que a cada pas de temps es desplaça cap amunt una certa quantitat aleatòria que segueix una distribució exponencial de paràmetre 2. És a dir $X_k = X_{k-1} + Y_k$ amb $Y_k \sim \text{Exp}(2)$.



Exemple 3. X_t representa la posició d'una partícula (inicialment a la posició 0) que es desplaça una unitat d'espai cap amunt cada cert interval de temps aleatori que segueix una distribució exponencial de paràmetre $1/2$.



Exemple 4. X_t representa la posició d'una partícula (inicialment a la posició 0) que es desplaça cap amunt una quantitat aleatòria que segueix una distribució uniforme a l'interval $[0, 2]$, i aquest desplaçament es produeix cada cert interval de temps també aleatori que segueix una distribució exponencial de paràmetre $1/2$.



Es pot demostrar que "en mitjana" els 4 exemples anteriors es comporten igual. Això vol dir que, per un $k \in \mathbb{N}$ qualsevol, l'esperança de X_k, és a dir $E(X_k)$, coincideix en tots 4 models i de fet es té
$$E(X_k) = \frac{k}{2}.$$
Pels 2 models a temps continu anteriors aquesta fórmula s'estén per valors t no necessàriament enters, és a dir que es té $E(X_t) = t/2$, però els 4 models només es poden comparar per valors enters de t.

Vegem que això és així en els models a temps discret.

Pel model de l'exemple 1, que satisfà $X_{k+1} = X_k + Y_k$, amb $Y_k = \text{Bernoulli}(1/2)$ tenim que

$$X_{k+1} = X_k + Y_k \quad \Rightarrow \quad E(X_{k+1}) = E(X_k) + E(Y_k) = E(X_k) + \frac{1}{2}.$$

És a dir, aplicant l'esperança a banda i banda a l'equació que relaciona les variables aleatòries X_k s'obté una equació "determinista" per les esperances de X_k. Concretament s'obté un sistema dinàmic discret com els que hem estudiat al tema anterior. Es tracta d'un sistema afí donat per la recurrència
$$E_{k+1} = E_k + \frac{1}{2}$$

on utilitzem E_k per denotar $E(X_k)$ per tal d'abreujar la notació. Com que $E_0 = 0$ perquè la partícula es troba inicialment a la posició 0, es conclou

$$E_k = \frac{k}{2}.$$

Pel model de l'exemple 2 es procedeix essencialment de la mateixa manera. En aquest cas el procés estocàstic satisfà $X_{k+1} = X_k + Y_k$ amb Y_k una variable aleatòria que segueix una distribució exponencial de paràmetre 2. Aleshores, com que l'esperança de la suma de variables aleatòries és la suma de les respectives esperances (i.e. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$), es té que

$$X_{k+1} = X_k + Y_k \quad \Rightarrow \quad E(X_{k+1}) = E(X_k) + E(Y_k) = E(X_k) + \frac{1}{2},$$

ja que l'esperança de Y_k és $1/2$. Com abans, aplicant l'esperança a banda i banda a l'equació que relaciona les variables aleatòries X_k s'obté una equació "determinista" per les esperances de X_k, i com que és la mateixa que en cas anterior (i de fet la mateixa que obtindríem per altres Y_k que també tinguessin mitjana igual a $1/2$), es conclou també que

$$E_k = \frac{k}{2}.$$

Per demostrar que aquesta relació també és certa pels exemples a temps continu caldria primer donar una formulació adequada d'aquests models per tal de poder analitzar com es comporta l'esperança de X_t pels diferents t. Deixarem de banda, però, aquesta qüestió. Només dir que perquè $E(X_t) = t/2$ cal que els intervals de temps entre els salts segueixin una llei exponencial de paràmetre $1/2$. Si s'hagués suposat que l' interval de temps entre salts seguia, per exemple, una distribució uniforme en $[0, 4]$, que té la mateixa mitjana que l'exponencial de paràmetre $1/2$, aleshores $E(X_t) = t/2$ no seria cert. Això posa de manifest algunes de les subtileses dels processos estocàstics a temps continu.

Donem ara un parell més d'exemples de processos estocàstics a temps i espai discrets.

Població de bacteris que no interaccionen (independents). X_k representa el nombre de bacteris en un cultiu cel·lular. Al llarg de cada pas de temps cada bacteri es pot dividir (i donar lloc a 2 bacteris) o no. La probabilitat que un bacteri es divideix al llarg d'un pas de temps és p, i el fet que es divideixi o no és independent del que facin els altres bacteris. Quants bacteris hi haurà al pas de temps $k+1$, és a dir com es distribuirà X_{k+1}, si al pas de temps k hi ha X_k bacteris?

Per respondre aquesta pregunta cal expressar el nombre de bacteris que es divideixen i els que no al llarg del pas de temps X_k.

- El nombre de bacteris que es divideix durant el pas de temps k és una variable aleatòria, que denotem D_k, que es distribueix com una binomial de paràmetres X_k i p, és a dir

$$D_k \sim \text{Binomial}(X_k, p)$$

ja que D_k es pot expressar com la suma de X_k Bernoullis de paràmetre p independents:

$$D_k = \sum_{j=1}^{X_k} \text{Bernoulli}_j(p).$$

- El nombre de bacteris que no es divideixen al llarg del pas de temps k és $X_k - D_k$.

Per tant, X_{k+1} serà igual al nombre de bacteris que es divideixin multiplicat per 2 més el nombre de bacteris que no s'han dividit, és a dir

$$X_{k+1} = 2D_k + (X_k - D_k) = D_k + X_k$$

amb $D_k \sim \text{Binomial}(X_k, p)$.

Població de bacteris que interaccionen (no independents). Considerem el mateix model de l'exemple anterior amb la diferència que la probabilitat que un bacteri es divideix al llarg d'un pas de temps ja no és una constant p sinó que és una funció que depèn de la població de bacteris en aquell pas de temps, és a dir la probabilitat que un bacteri es divideix al llarg del pas de temps k és $p(X_k)$ on p és una funció que pren valors entre 0 i 1 (perquè és una probabilitat). En aquest cas podem seguir els mateixos arguments que hem fet en l'exemple anterior per tal d'expressar X_{k+1} en termes de X_k. En fer-ho s'obté la relació

$$X_{k+1} = D_k + X_k \qquad \text{amb} \qquad D_k \sim \text{Binomial}(X_k, p(X_k))$$

Pregunta: Podem donar un sistema dinàmic discret que relacioni la mitjana de bacteris al pas de temps $k+1$ en termes de la mitjana de bacteris al pas de temps k? És a dir, una equació de la forma

$$E_{k+1} = F(E_k)$$

per alguna F (on, com en els models de la partícula, utilitzem la notació $E_{k+1} = E(X_{k+1})$ i $E_k = E(X_k)$)?

Per respondre aquesta pregunta introduïm primer el concepte d'esperança condicionada.

Definició. Siguin Y i X dues variables aleatòries (discretes). Es defineix l'esperança condicionada de Y a que X pren el valor x com

$$E(Y|X = x) = \sum_y yP(Y = y|X = x).$$

Proposició. Siguin Y i X dues variables aleatòries (discretes), no necessàriament independents l'una de l'altra. Aleshores es té que

$$E(Y) = \sum_x E(Y|X = x)P(X = x).$$

Demostració.

$$E(Y) = \sum_y yP(Y=y) = \sum_y y \sum_x P(Y=y|X=x)P(X=x)$$

$$= \sum_x P(X=x) \sum_y yP(Y=y|X=x) = \sum_x P(X=x)E(Y|X=x). \qquad \square$$

Tornem ara a l'equació $X_{k+1} = D_k + X_k$. Prenent esperances a banda i banda tenim

$$E(X_{k+1}) = E(D_k) + E(X_k),$$

i com que $D_k \sim \text{Binomial}(X_k, p(X_k))$, l'esperança condicionada de D_k a que X_k val x és

$$E(D_k|X_k = x) = xp(x).$$

Aleshores, aplicant la propietat anterior sobre l'esperança condicionada tenim

$$E(D_k) = \sum_x E(D_k|X_k = x)P(X_k = x) = \sum_x xp(x)P(X_k = x) = E(X_k p(X_k)).$$

Observem, per tant, que si $p(x)$ no depèn de x (i.e. és constant com en l'exemple en que els bacteris no interaccionen), aleshores $E(D_k) = pE(X_k)$ i obtenim

$$E(X_{k+1}) = E(D_k) + E(X_k) = (p+1)E(X_k).$$

És a dir, en el cas en què els bacteris no interaccionen la dinàmica del nombre mitjà de bacteris en els diferents passos de temps segueix el sistema dinàmic discret lineal $E_{k+1} = (1+p)E_k$. Si coneixem el nombre mitjà de bacteris al pas de temps $k = 0$, diguem-li E_0, aleshores el nombre mitjà de bacteris al pas de temps k serà $E_k = (1+p)^k E_0$.

Si $p(x)$ no és constant (com en l'exemple en què els bacteris interaccionen) aleshores ja no és possible donar un sistema dinàmic discret que doni E_{k+1} només en termes de E_k, ja que en aquest cas hi intervé també el valor de $E(X_k p(X_k))$ que en general no és igual a $E(X_k)p(E(X_k))$:

$$E(X_{k+1}) = E(X_k p(X_k)) + E(X_k) \neq E(X_k)p(E(X_k)) + E(X_k)$$

Sí és cert, però, que si la variància de X_k és prou petita, aleshores $E(X_k p(X_k)) \approx E(X_k)p(E(X_k)) = E_k p(E_k)$, de manera que el sistema dinàmic discret no lineal

$$E_{k+1} = E_k p(E_k) + E_k = (p(E_k) + 1)E_k$$

aproxima el nombre mitjà de bacteris als diferents passos de temps sempre que la variància de X_k sigui prou petita per tot k.

2.1 Cadenes finites de Markov a temps discret

Considereu un procés estocàstic discret en temps i en espai $\{X_k | k \in \mathbb{N}\}$, en el que les variables aleatòries poden prendre només un conjunt finit de valors (és a dir, el conjunt d'estats possibles en el que pot estar el sistema és finit). Es diu que aquest procés és un procés de Markov si l'estat del sistema en el futur depèn només de l'estat actual (present) del sistema i no dels estat en els que ha estat el sistema en el passat.

Definició. Un procés estocàstic discret en temps i espai $\{X_k | k \in \mathbb{N}\}$ satisfà la *propietat de Markov* si

$$P(X_{k+1} = x_{k+1} | X_k = x_k,\, X_{k-1} = x_{k-1},\, \ldots, X_0 = x_0) = P(X_{k+1} = x_{k+1} | X_k = x_k).$$

Un procés estocàstic que satisfà la propietat de Markov es diu que és una *cadena de Markov* en general, i si el procés només pot prendre un conjunt finit de valors es diu que és una *cadena finita de Markov*.

Exemple. L'exemple 1 del dia anterior, donat per

$$X_{k+1} = X_k + Y_k$$

amb $Y_k \sim \text{Bernoulli}(1/2)$, és una cadena infinita de Markov, perquè el conjunt d'estats en els que pot estar el sistema és $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$, que no és finit.

Exemple. El procés estocàstic definit sobre el conjunt d'estats $S = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ i donat per

$$X_{k+1} = X_k + Y_k \mod m$$

amb $Y_k \sim \text{Bernoulli}(1/2)$, és una cadena finita de Markov.

Exemple. El procés estocàstic definit sobre el conjunt d'estats $S = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ i donat per

$$X_{k+1} = \left(\sum_{j=0}^{k} X_k \right) + Y_k \mod m$$

amb $Y_k \sim \text{Bernoulli}(1/2)$, no és una cadena finita de Markov perquè el procés no satisfà la propietat de Markov.

Definició. Sigui $\{X_k | k \in \mathbb{N}\}$ una cadena finita de Markov (c.f.M.), on el conjunt d'estats que pot prendre el sistema (l'espai d'estats) és $S = \{1, 2, \ldots, m\}$. Donats dos estats $i, j \in S$, es defineix la *probabilitat de transició d'un pas* de l'estat i al j com

$$p_{ji} = P(X_{k+1} = j | X_k = i),$$

i s'interpreta com la probabilitat que el sistema es trobi en l'estat j en el pas de temps $k+1$ quan es trobava en l'estat i en el pas de temps k.

La probabilitat de transició de i a j pot dependre del pas de temps k pel qual s'està calculant. En aquests casos caldria indicar aquesta dependència escrivint $p_{ji}(k)$. En aquest tema treballarem únicament en probabilitats de transició que no depenen del pas de temps.

Les probabilitats de transició satisfan

$$\sum_{j\in S} p_{ji} = 1 \qquad \forall i \in S \tag{2.1}$$

ja que en un pas de temps el sistema o bé es queda on està (amb probabilitat p_{ii} si estava en l'estat i) o bé es mou a un altre estat del sistema (amb probabilitat $\sum_{j\neq i} p_{ji}$).

És útil expressar el conjunt de probabilitats de transició en forma matricial.

Definició. Donat $\{X_k | k \in \mathbb{N}\}$ una c.f.M. amb espai d'estats $S = \{1, 2, ..., m\}$ es defineix la *matriu de transició* de la cadena de Markov com

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

Observació. Les columnes d'una matriu de transició necessàriament han de sumar 1 ja que aquesta condició és precisament la donada a (2.1).

Al seu torn, la distribució de probabilitat de la variable X_k es pot representar com un vector

$$p(k) = \begin{pmatrix} p_1(k) \\ p_2(k) \\ \vdots \\ p_m(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_k = 1) \\ P(X_k = 2) \\ \vdots \\ P(X_k = m) \end{pmatrix}.$$

La matriu de transició P permet donar la distribució de probabilitat de X_{k+1}, i.e. $p(k+1)$, en termes de la distribució de probabilitat de X_k, i.e. $p(k)$. En efecte,

$$p(k+1) = Pp(k)$$

ja que, per tot $i \in S$, es té que

$$\begin{aligned} p_i(k+1) = P(X_{k+1} = i) &= \sum_{j\in S} P(X_{k+1} = i, X_k = j) = \\ &= \sum_{j\in S} P(X_{k+1} = i | X_k = j) P(X_k = j) = \sum_{j\in S} p_{ij} p_j(k), \end{aligned}$$

que és precisament el producte de la fila i-èssima de P amb el vector $p(k)$.

La relació $p(k+1) = Pp(k)$ es pot aplicar de forma reiterada per expressar $p(k+1)$ en termes de $p(l)$ amb $l \leq k$:

$$p(k+1) = P^{k+1-l} p(l),$$

Per tant, la distribució de probabilitat de X_k es pot donar en termes de la distribució de probabilitat a l'inici del procés (que acostumarà a ser una dada coneguda) com:

$$p(k) = P^k p(0).$$

Notació. Per referir-nos a l'element de la fila i i columna j de la matriu P^k utilitzarem la notació $p_{ij}^{(k)}$. Gràcies al parèntesi es distingeix $p_{ij}^{(k)}$ de p_{ij}^k, que indica l'element p_{ij} elevat a la k.

Es pot veure que

$$p_{ji}^{(k)} = P(X_k = j | X_0 = i),$$

és a dir que $p_{ji}^{(k)}$ dóna la probabilitat que el sistema es trobi en l'estat j en el pas de temps k si inicialment es trobava en l'estat i. En efecte, que $X_0 = i$ significa que la distribució de probabilitat de X_0 al pas de temps 0 està concentrada a l'estat i, és a dir que $p(0)$ és el vector canònic e_i (que té totes les entrades iguals a 0 excepte la coordenada i que és un 1):

$$(e_i)_l = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq i \\ 1 & \text{si } l = i \end{cases}.$$

Aleshores, utilitzant que $p(k) = P^k p(0)$, es té

$$P(X_k = j | X_0 = i) = (P^k e_i)_j = \sum_{l \in S} p_{jl}^{(k)} (e_i)_l = p_{ji}^{(k)}.$$

2.2 Classificació d'estats

Els estats d'una cadena finita de Markov poden presentar una serie de relacions i propietats importants a l'hora d'analitzar la dinàmica del procés estocàstic subjacent.

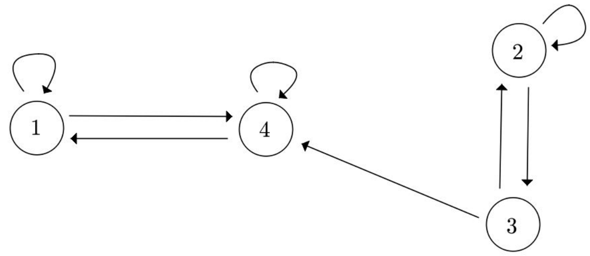
Definició. Es diu que l'estat j és *accessible* des de l'estat i si $p_{ji}^{(k)} > 0$ per algun $k \geq 0$. Aquesta relació entre estats es denota $i \rightarrow j$. Dos estats i i j es *comuniquen* si $i \rightarrow j$ i $j \rightarrow i$. Aquesta relació entre estats es denota $i \leftrightarrow j$.

Les relacions d'accessibilitat entre estats que hi ha en una cadena de Markov es poden determinar representant la matriu de transició de la cadena en forma d'un graf dirigit. Concretament cal identificar els estats del sistema amb els nodes del graf i inserir una aresta dirigida de l'estat i a l'estat j si i només si $p_{ji} > 0$. Aleshores es té que $i \rightarrow j$ si i només si hi ha un camí dirigit del node i al node j.

Exemple. Sigui una cadena finita de Markov que té per per matriu de transició

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.5 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

El graf associat a la cadena és:



La comunicació entre estats defineix una relació d'equivalència i permet agrupar els diferents estats del sistema en classes d'equivalència per aquesta relació. És a dir, dos estats i i j estan relacionats (i són per tant de la mateixa classe) si i només si $i \leftrightarrow j$. En aquests apunts ens referirem a les classes que defineix la comunicació entre estats simplement com a *classes* de la cadena de Markov.

Comentari. Donat un conjunt S i una relació $\sim$ entre els seus elements, es diu que $\sim$ és una *relació d'equivalència* si la relació és:

Reflexiva: per tot $i \in S$ es té que i es relaciona amb ell mateix, és a dir $i \sim i$.
Simètrica: per tot parell $i, j \in S$ es té que si i es relaciona amb j aleshores j es relaciona amb i, és a dir si $i \sim j$ aleshores $j \sim i$.
Transitiva: per tota terna $i, j, l \in S$ es té que si i es relaciona amb j i j es relaciona amb l, aleshores i es relaciona amb l, és a dir si $i \sim j$ i $j \sim l$ aleshores $i \sim l$.

Una relació d'equivalència permet dividir el conjunt S en subconjunts disjunts anomenats *classes d'equivalència*: dos elements $i, j \in S$ estan a la mateixa classe si i només si $i \sim j$. Per demostrar que la partició del conjunt S en classes d'equivalència és possible n'hi ha prou en veure que tot element està en una i només una classe d'equivalència.

Exemple. La c.f.M. de l'exemple anterior té 2 classes, donades pels conjunts d'estats $\{1, 4\}$ i $\{2, 3\}$.

Exemple. Si es modifica la matriu de transició de l'exemple anterior de manera que $p_{23} = 0$ i $p_{43} = 1$ aleshores la c.f.M. té 3 classes, donades pels conjunts d'estats $\{1, 4\}$ i $\{2\}$ i $\{3\}$.

Definició. Una classe C d'una c.f.M. és *tancada* si la probabilitat de transició d'un estat de la classe a un estat de fora de la classe és sempre 0. És a dir, si per tot $i \in C$ i $j \notin C$ es té que $p_{ji} = 0$.

Definició. Un estat d'una c.f.M. és *absorbent* si l'estat constitueix una classe (d'un sol element) tancada de la c.f.M., la qual cosa equival a dir que un estat i és absorbent si $p_{ii} = 1$.

Definició. Un estat i d'una c.f.M. és *aperiòdic* si existeix $k_0 > 0$ tal que $p_{ii}^{(k)} > 0$ per tot $k \geq k_0$. Això equival a dir que en el graf que representa la c.f.M. hi ha un camí de k passos que comença i acaba en i per tot $k \geq k_0$.

Es pot demostrar que si i i j són de la mateixa classe i i és aperiòdic, aleshores j també és aperiòdic (la idea és que, com que hi ha un camí "d'anada" de j a i i un camí "de tornada" de i a j, és possible anar fins a i des de j, donar voltes per retornar a i després d'un nombre de passos arbitrari gràcies a l'aperiodicitat de i, i després tornar a j des de i). La propietat d'aperiodicitat és, per tant, una propietat de classe:

Definició. Una classe d'una c.f.M. és *aperiòdica* si els estats que la formen son aperiòdics.

Definició. Una c.f.M. és *irreductible* si només té una classe.

2.3 Temps d'arribada i probabilitats d'absorció

L'objectiu d'aquest apartat és mostrar com calcular la probabilitat que, partint d'un estat i, la trajectòria arribi a un subconjunt d'estats A de S. En particular quan el conjunt A és una classe tancada de la cadena de Markov, aquesta probabilitat d'arribada serà una probabilitat d'absorció (ja que un cop s'entra a A ja no se'n pot sortir). També es mostra com calcular l'esperança del temps que es triga en arribar al subconjunt A (si és que s'hi arriba mai). Quan A és la unió de les classes tancades de la cadena de Markov, aquesta esperança indica el temps que que es triga abans que la trajectòria del procés sigui absorbida per alguna de les classes tancades de la cadena.

Definició. Sigui una c.f.M. i A un subconjunt d'estats del conjunt d'estats S. Es defineix el *temps d'arribada a A* com la variable aleatòria τ^A que dóna el pas de temps en què la trajectòria arriba per primera vegada al conjunt A, és a dir:

$$\tau^A := \inf\{k \geq 0 \text{ tals que } X_k \in A\}.$$

La *probabilitat d'arribada al conjunt A des de l'estat i* és la probabilitat que la trajectòria arribi al conjunt A partint de l'estat i, és a dir

$$u_i^A := P(\tau^A < \infty | X_0 = i).$$

Quan A és una classe tancada ens referim a u_i^A com la probabilitat d'absorció (ja que un cop la trajectòria entra a A ja no en pot sortir mai). El *temps (nombre de passos temporals) esperat d'arribada al conjunt A des de l'estat i* és l'esperança de la variable τ^A condicionada a que la trajectòria ha partit de l'estat i, és a dir

$$v_i^A := E(\tau^A | X_0 = i) = \sum_{k \geq 0} k P(\tau^A = k | X_0 = i) + \infty P(\tau^A = \infty | X_0 = i).$$

Observem que serà infinita si la probabilitat d'arribar al conjunt A és menor a 1 (és a dir si $u_i^A < 1$), ja que en aquest cas $P(\tau^A = \infty | X_0 = i) = 1 - u_i^A > 0$.

Exemple. Considerem la c.f.M. sobre els estats $S = \{1, 2, 3, 4\}$ amb la següent matriu de transició:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'estat 1 és un estat absorbent del sistema (la classe $\{1\}$ és tancada). Anem a veure com calcular la probabilitat d'absorció des dels diferents estats del sistema, és a dir $u_i^{\{1\}}$ per $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Per aquest exemple utilitzem u_i enlloc de $u_i^{\{1\}}$ per no sobrecarregar la notació.

És clar que $u_1 = 1$ perquè l'estat 1 ja es troba dins el conjunt $\{1\}$. D'altra banda $u_4 = 0$ perquè l'estat 4 constitueix una classe tancada de la cadena, de manera que partint del 4 mai s'arribarà al conjunt $\{1\}$. Per calcular u_2 i u_3 observem que se satisfan les següents relacions:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_3 \\ u_3 &= \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_4 \end{aligned}$$

ja que la probabilitat d'arribar a l'estat 1 des de l'estat j és la mateixa que la probabilitat de saltar als diferents estats primer i després arribar a l'estat 1 des d'aquells estats. Formalment (per la primera equació):

$$\begin{aligned} u_2 = P(\tau^{\{1\}} < \infty | X_0 = 2) &= \sum_{j \in S} P(\tau^{\{1\}} < \infty, X_1 = j | X_0 = 2) = \\ &= \sum_{j \in S} P(\tau^{\{1\}} < \infty | X_1 = j, X_0 = 2) P(X_1 = j | X_0 = 2) = \\ &= \sum_{j \in S} P(\tau^{\{1\}} < \infty | X_1 = j) p_{j2} = \sum_{j \in S} u_j p_{j2}, \end{aligned}$$

on a la penúltima igualtat s'està utilitzant la propietat de Markov i a la última igualtat s'està utilitzant que $P(\tau^{\{1\}} < \infty | X_1 = j)$ és igual a $P(\tau^{\{1\}} < \infty | X_0 = j)$ (que és cert perquè les probabilitats de transició no depenen del pas de temps).

Aleshores, resolent el sistema lineal anterior per u_2 i u_3 (utilitzant $u_1 = 1$ i $u_4 = 0$) obtenim les probabilitats d'absorció a l'estat 1 des dels diferents estats de la cadena, que són:

$$u_2 = \frac{2}{3} \qquad \text{i} \qquad u_3 = \frac{1}{3}$$

Observació. Si no ens haguéssim fixat que l'estat 4 pertanyia a una classe tancada diferent de la classe de l'estat 1, és a dir si no haguéssim vist a priori que $u_4 = 0$, el sistema per u_2, u_3 i u_4 hagués quedat:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_3 \\ u_3 &= \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_4 \\ u_4 &= u_4. \end{aligned}$$

Observem que la última equació admet moltes solucions. Quan això passa s'ha d'agafar la solució no negativa més petita possible, en aquest cas $u_4 = 0$, que es correspon amb el fet que des de l'estat 4 no es pot arribar mai a l'estat 1.

Exemple. Considerem la mateixa cadena de Markov que en l'exemple anterior. Anem a veure com calcular l'esperança del temps (nombre de passos temporals) que es triga en arribar al conjunt

$\{1,4\}$, que en aquest exemple es correspon amb la unió de totes les classes tancades de la cadena. És a dir, volem calcular $v_i^{\{1,4\}}$ per $i \in \{1,2,3,4\}$. Per no sobrecarregar la notació escriurem v_i en lloc de $v_i^{\{1,4\}}$. És clar que $v_1 = 0$ i $v_4 = 0$. Per calcular v_2 i v_3 observem que se satisfan les relacions següents:

$$v_2 = 1 + \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_3$$
$$v_3 = 1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_4$$

ja que el nombre de passos que es triga en arribar al conjunt $\{1,4\}$ des de l'estat j ha de ser igual al pas de temps que es triga en saltar als diferents estats més l'esperança del temps que es triga en arribar a $\{1,4\}$ des dels diferents estats ponderada per la probabilitat d'haver saltat en aquell estat. Per justificar aquestes equacions formalment, considerem primer les variables aleatòries auxiliars:

$$\mathbf{1}_j := \mathbf{1}_{\{X_1=j\}},$$

que satisfan $\mathbf{1}_j = 1$ si i $X_1 = j$ i $\mathbf{1}_j = 0$ en cas contrari. Aleshores es té que la suma de $\mathbf{1}_j$ pels diferents $j \in S$ val sempre 1, de manera que

$$\tau^{\{1,4\}} = \tau^{\{1,4\}} \sum_{j\in S} \mathbf{1}_j = \sum_{j\in S} \tau^{\{1,4\}} \mathbf{1}_j.$$

Aquesta forma de reescriure la variable $\tau^{\{1,4\}}$ permet arribar a les equacions anteriors. En efecte (per la primera equació):

$$\begin{aligned}
v_2 = E(\tau^{\{1,4\}}|X_0 = 2) &= E(\sum_{j\in S} \tau^{\{1,4\}}\mathbf{1}_j|X_0 = 2) = \sum_{j\in S} E(\tau^{\{1,4\}}\mathbf{1}_j|X_0 = 2) \\
&= \sum_{j\in S} E(\tau^{\{1,4\}}|X_1 = j, X_0 = 2)P(X_1 = j|X_0 = 2) \\
&= \sum_{j\in S} E(\tau^{\{1,4\}}|X_1 = j)P(X_1 = j|X_0 = 2) \\
&= \sum_{j\in S} \left(1 + E(\tau^{\{1,4\}}|X_0 = j)\right) p_{j2} = 1 + \sum_{j\in S} v_j p_{j2},
\end{aligned}$$

on a la penúltima igualtat s'ha utilitzat que $E(\tau^{\{1,4\}}|X_1 = j)$ és igual a $1 + E(\tau^{\{1,4\}}|X_0 = j)$ (que és cert perquè les probabilitats de transició no depenen del pas de temps).

Aleshores, resolent el sistema lineal anterior per v_2 i v_3 (utilitzant $v_1 = 0$ i $v_4 = 0$) obtenim l'esperança del nombre de passos que triga la trajectòria en arribar al conjunt $\{1,4\}$ des dels diferents estats de la cadena, que són:

$$v_2 = 2 \qquad \text{i} \qquad v_3 = 2$$

Observació. Si repetim l'exercici anterior utilitzant com a conjunt d'arribada el conjunt $\{1\}$ (enlloc de $\{1,4\}$), aleshores tindrem $v_1^{\{1\}} = 0$ i per $v_2^{\{1\}}$, $v_3^{\{1\}}$ i $v_4^{\{1\}}$ considerarem el sistema lineal:

$$v_2^{\{1\}} = 1 + \frac{1}{2}v_1^{\{1\}} + \frac{1}{2}v_3^{\{1\}}$$
$$v_3^{\{1\}} = 1 + \frac{1}{2}v_2^{\{1\}} + \frac{1}{2}v_4^{\{1\}}$$
$$v_4^{\{1\}} = 1 + v_4^{\{1\}}$$

En aquest cas la tercera equació no té solució. El que passa és que com que l'estat 4 és tancat, les trajectòries que comencen a l'estat 4 no arriben mai a l'estat 1, o si es vol, triguen infinit temps en arribar-hi. De fet, $v_4^{\{1\}} = \infty$, és, en cert sentit, solució de la tercera equació del sistema anterior. Prenent $v_4^{\{1\}} = \infty$ es té que $v_2^{\{1\}}$ i $v_3^{\{1\}}$ també són infinit, i això té sentit perquè la probabilitat que la trajectòria entri al conjunt $\{4\}$ si comença tant de l'estat 2 o com de l'estat 3 és no nul·la, i si això passa la trajectòria no arriba mai a l'estat 1 (la probabilitat que trigui infinit temps és positiva, de manera que l'esperança del temps que triga en arribar-hi també).

A continuació es donen 2 resultats que generalitzen la metodologia dels exemples anteriors.

Proposició (mètode per calcular la probabilitat d'arribada). Sigui una c.f.M. sobre els estats $S = \{1, 2, \dots, m\}$ amb matriu de transició $P = (p_{ji})$. Sigui A un subconjunt de S. Aleshores el vector de probabilitats d'entrada a A, és a dir el vector u^A amb $u_i^A = P(\tau^A < \infty | X_0 = i)$ per $i \in S$, és la mínima solució no negativa del sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_i^A = 1 & \text{si } i \in A \\ u_i^A = \sum_{j \in S} u_j^A p_{ji} & \text{si } i \notin A \end{array} \right. ,$$

on solució mínima significa que si $\tilde{u}$ és una altra solució no negativa del sistema, aleshores $\tilde{u}_i \geq u_i^A$ per tot $i \in S$.

Proposició (mètode per calcular l'esperança del temps d'arribada). Sigui una c.f.M. sobre els estats $S = \{1, 2, \dots, m\}$ amb matriu de transició $P = (p_{ji})$. Sigui A un subconjunt de S. Aleshores el vector d'esperances del temps (nombre de passos temporals) d'arribada a A, és a dir el vector v^A amb $v_i^A = E(\tau^A | X_0 = i)$ per $i \in S$, és la mínima solució no negativa del sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{ll} v_i^A = 0 & \text{si } i \in A \\ v_i^A = 1 + \sum_{j \in S} v_j^A p_{ji} & \text{si } i \notin A \end{array} \right. ,$$

on s'admeten vectors solució que tinguin entrades iguals a infinit. Solució mínima significa que si $\tilde{v}$ és una altra solució no negativa del sistema, aleshores $\tilde{v}_i \geq v_i^A$ per tot $i \in S$.

2.4 Distribucions invariants

En aquest apartat es donen resultats per estudiar el comportament asimptòtic d'una cadena finita de Markov irreductible i aperiòdica.

Definició. Una *distribució invariant* d'una c.f.M. sobre els estats $S = \{1, 2, \dots, m\}$ és un vector $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)^{\text{tr}}$ de components no negatives tal que

$$P\pi = \pi \qquad \text{i} \qquad \sum_{i \in S} \pi_i = 1$$

Observació. Noteu que si la distribució de X_k és una distribució invariant π, és a dir si $p(k) = \pi$, aleshores la distribució de $p(k + k') = \pi$ per tot $k' \geq 0$ ja que, pel que vam veure $p(k+1) = Pp(k) = P\pi = \pi$. Les distribucions invariants són, per tant, distribucions estacionàries de la dinàmica estocàstica (en el sentit que la distribució de $X_{k+k'}$ és la mateixa que la de X_k si la distribució de X_k és invariant).

Teorema (Existència i unicitat de distribució invariant). Sigui $\{X_k | k \geq 0\}$ una c.f.M. irreductible i aperiòdica sobre els estats $S = \{1, 2, \ldots, m\}$ i amb matriu de transició $P = (p_{ji})$. Aleshores existeix una i només una distribució invariant π. La distribució π, a més a més, és la distribució de probabilitat de X_k (representada pel vector $p(k)$) quan k tendeix a infinit, és a dir sigui quina sigui la distribució de X_0 (representada pel vector $p(0)$) es té

$$\lim_{k\to\infty} p(k) = \lim_{k\to\infty} P^k p(0) = \pi$$

Observació. La demostració del resultat anterior és una conseqüència del Teorema de Perron-Frobenius (per matrius irreductibles amb entrades no negatives, com la matriu P), que garanteix que l'1 és un valor propi simple i dominant de la matriu P (és a dir que 1 és una solució simple del polinomi característic de P i que per tot altra valor propi λ de P es té $|\lambda| < 1$) i que el vector propi associat té totes les entrades del mateix signe. Per tant, per trobar la distribució invariant d'una c.f.M. irreductible i aperiòdica amb matriu de transició P n'hi ha prou en trobar l'únic vector propi de valor propi 1 de P i normalitzar-lo perquè les components siguin positives i sumin 1.

Observem que el resultat anterior permet inferir quina serà la probabilitat de X_k es trobi en un determinat estat si k és prou gran. Vegem-ho en un exemple.

Exemple. Considerem la cadena de Markov sobre $\{1, 2, 3\}$ donada per la matriu de transició

$$P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es comprova que és irreductible perquè P^2 té totes les entrades positives (és a dir en dos passos es pot anar de qualsevol estat a qualsevol altra, cosa que es pot veure fàcilment fent el graf de la Cadena de Markov) i és aperiòdica perquè l'estat 1 és aperiòdic (perquè $p_{11}^{(k)} \geq (1/2)^k$ per tot $k \geq 0$. Ai es vol argumentar en termes del graf de la cadena de Markov diríem que per tot k hi ha un camí que comença i acaba en l'estat 1, concretament el camí que està a 1 tots els passos: $1 \to 1 \to 1 \to \cdots \to 1$).

El vector propi de valor propi de 1 de la matriu P es troba buscant el nucli de la matriu $P - Id$:

$$(P - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 3z = 2x \\ y = 2x \\ y = 3z \end{array},$$

que té per solucions vectors de la forma $(x, 2x, 2x/3)^{\mathrm{tr}}$, i com que busquem un vector propi normalitzat, imposant

$$x + 2x + \frac{2x}{3} = 1$$

determinem $x = 3/11$, la qual cosa ens permet concloure que la distribució invariant cap on convergeix el sistema és

$$\pi = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aquesta distribució invariant permet inferir que si simuléssim la cadena de Markov moltes vegades fins un pas de temps k gran, començant cada vegada des d'un estat diferent agafat a l'atzar, les freqüències dels valors de X_k que obtindríem serien similars a les que dóna la distribució invariant π.

Exemple. La informació genètica d'un individu es pot representar mitjançant una seqüència de 4 lletres, que indiquen les 4 bases de l'ADN, que són l'adenina (A), la guanina (G), la citosina (C) i la timina (T). Un model senzill sobre com canvia aquesta informació de generació a generació es basa en una cadena finita de Markov sobre els estats $\{A, G, C, T\}$ que indexem com $\{1, 2, 3, 4\}$. El model suposa que a cada generació només es pot produir un canvi en una posició de la seqüència, que es tria a l'atzar entre totes les posicions, i que el canvi que es produeix està descrit per la matriu de transició

$$P = \begin{pmatrix} 1-3a & a & a & a \\ a & 1-3a & a & a \\ a & a & 1-3a & a \\ a & a & a & 1-3a \end{pmatrix},$$

és a dir la lletra no es canvia amb probabilitat $1 - 3a$ i canvia a qualssevol de les altres 3 lletres amb probabilitat a.

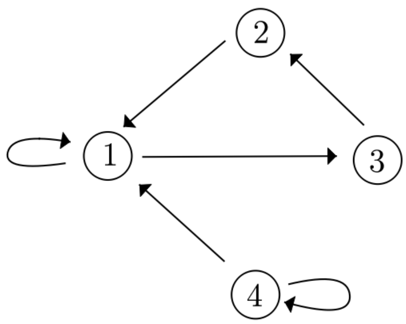
Si les freqüències de les diferents bases en la seqüència inicial són $p(0) = (p_1, p_2, p_3, p_4)^{\mathrm{tr}}$ (és a dir una fracció p_1 de la seqüència conté A, una fracció p_2 de la seqüència conté G, etc.), la freqüència esperada a la generació k serà $p(k) = P^k p(0)$. Per tant, com que la cadena de Markov donada per la matriu de transició P és irreductible i aperiòdica (perquè totes les entrades són positives), aleshores és té que

$$\lim_{k\to\infty} p(k) = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

ja que el vector propi de valor propi 1 de la matriu P és el vector $(1, 1, 1, 1)$ com es comprova fàcilment.

2.5 Problemes

1. Doneu una matriu de transició que es pugui representat amb el següent graf dirigit:



2. Tres cadenes finites de Markov estan representades per les matrius de transició següents:

$$\text{(i)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(iii)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Dibuixeu el graf associat a cada cadena, trobeu les classes d'estats comunicants i dieu si són (o no són) tancades i aperiòdiques. Quines cadenes són irreductibles?

3. Una cadena finita de Markov està representada per les matriu de transició següent:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p_{23} & 0 & 0 \\ 0 & p_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{42} & p_{43} & 1 & 0 \\ p_{51} & 0 & p_{53} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on les p_{ij} que apareixen sense determinar són positives (i sumen 1 per columnes).

a) Dibuixeu el graf associat de la cadena i trobeu les classes d'estats comunicants i dieu si són (o no són) tancades i aperiòdiques. La cadena és irreductible?

b) Reindexeu els estats del sistema de manera que els estats d'una mateixa classe estiguin agrupats (és a dir, de manera que si i i j amb $i < j$ són de la mateixa classe, aleshores tot estat l entre i i j també sigui de la classe de i i j) i que els estats que pertanyen a classes tancades tinguin índexs més baixos que els estats de classes no tancades (transitòries). Escriviu la matriu de transició utilitzant aquesta nova indexació dels estats i observeu que resulta una matriu a blocs triangular superior (on cada bloc es correspon a una classe de la cadena).

4. Considereu la cadena de Markov $\{X_k | k \geqslant 0\}$ donada per la matriu de transició:

$$P = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Mostreu que la cadena de Markov del model és aperiòdica i irreductible i doneu la distribució invariant cap on convergeix la distribució de la variable X_k per $k \to \infty$.

5. Considereu la cadena de Markov $\{X_k | k \geqslant 0\}$ donada per la matriu de transició:

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Mostreu que la cadena de Markov del model no és irreductible. Comproveu que les distribucions de la forma $(x, 0, 1-x)$ per $x \in [0,1]$ són distribucions invariants.

6. Un model de progressió forestal suposa que un arbre pot estar en tres estats diferents: jove, madur i vell. Cada 8 anys l'arbre pot o bé quedar-se en el mateix estat o bé passar a un altre estat (ja sigui perquè l'arbre creix o perquè cau i en creix un altre en el mateix lloc). Concretament es considera que, al cap de 8 anys, 1) un arbre jove o segueix jove (amb probabilitat 1/4) o passa a ser madur, 2) un arbre madur o segueix madur (amb probabilitat 1/2) o passar a ser vell i 3) un arbre vell o segueix vell (amb probabilitat r) o i n'ha crescut un de jove al mateix lloc. Aquesta dinàmica es pot representar mitjançant una cadena de Markov.

a) Identifiqueu els estats $\{\text{jove}, \text{madur}, \text{vell}\}$ amb els índexs {1,2,3} i doneu la matriu de transició que representa la cadena de Markov corresponent al model anterior.

b) Mostreu que la cadena de Markov del model és aperiòdica i irreductible.

c) Calculeu l'única distribució invariant de la cadena anterior. Observeu que el resultat es podria interpretar com la proporció d'arbres joves, madurs i vells que trobaríem en un bosc que estigués ben representat pel model (si assumim que el que passa a cada arbre del bosc és independent del que passa en els altres).

7. Considereu la cadena finita de Markov sobre els estats {1,2,3,4} donada per la matriu de transició:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & p & 0 & q \\ 0 & 0 & p & p \end{pmatrix}$$

amb $q = 1 - p$ i $p \in (0, 1)$.

a) Doneu les classes de la cadena i digueu quines són tancades.

b) Calculeu, en funció de p, el temps que trigarà la trajectòria en arribar a l'estat 1 si l'estat inicial de la trajectòria és el 4.

8. Considereu la cadena finita de Markov $\{X_k | k \geqslant 0\}$ sobre els estats {1,2,3,4,5} donada per la matriu de transició:

$$P = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 1 \end{pmatrix}.$$

amb $q = 1 - p$ i $p \in (0, 1)$ i amb $a = 1 - b$ amb $b \in (0, 1)$.

a) Doneu les classes de la cadena i digueu quines són tancades.

b) Calculeu, en funció de p, la probabilitat que la trajectòria arribi a la classe {1,2} quan parteix dels diferents estats de la cadena.

c) A quina distribució invariant convergirà la distribució de X_k en el cas que la trajectòria arribi a la classe $\{1, 2\}$? I si no hi arriba?

9. (Procés de Moran) Imaginem una població en la que els individus poden portar un gen o no portar-lo (individus $+$ i $-$ respectivament). Suposem que la població és sempre N, de manera que d'aquests N individus $i \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ individus són portadors del gen i $N - i$ individus no porten el gen. A cada generació un individu agafat a l'atzar es reprodueix (es duplica) i un altre individu també agafat a l'atzar (i que podria ser el mateix que s'ha reproduït) mort. Això garanteix que d'una generació a l'altra N no varii. Aquest procés es pot modelitzar amb una cadena finita de Markov sobre els estats $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$ i on les probabilitats de transició venen donades per:

$P_{(i-1)i} = \frac{N-i}{N}\frac{i}{N}$ Es reprodueix un individu $-$ i es mort un individu $+$.

$P_{ii} = 1 - P_{(i-1)i} - P_{(i+1)i}$ Qui es reprodueix és del mateix tipus que qui es mort.

$P_{(i+1)i} = \frac{i}{N}\frac{N-i}{N}$ Es reprodueix un individu $+$ i es mort un individu $-$.

és clar que $P_{00} = 1$ i $P_{NN} = 1$, de manera que són estats absorbents de la cadena i es corresponen, respectivament, a l'estat en què el gen s'ha extingit de la població (tothom és $-$) i a l'estat en què el gen s'ha fixat a la població (tothom és $+$).

a) (Llarg) Calculeu la probabilitat (en funció de N) que el gen desapareixi si hi ha només un individu sense el gen (és a dir si inicialment la població es troba en l'estat $N - 1$).

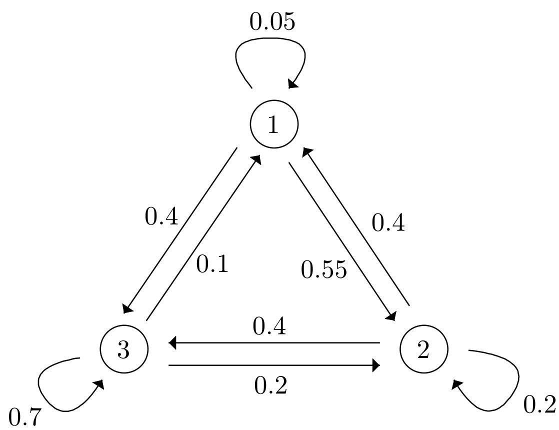
b) (Llarg) Calculeu el nombre de generacions esperades, en funció de N i de l'estat inicial de la cadena i, abans que el gen es fixi o desapareixi.

2.6 Pràctica 2

Considereu una cadena finita de Markov sobre tres estats $S = \{1, 2, 3\}$ donada per la matriu de transició

$$P = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 5 & 40 & 10 \\ 55 & 20 & 20 \\ 40 & 40 & 70 \end{pmatrix},$$

i que representa una partícula que es mou sobre els vèrtexs d'un triangle (en el sentit que l'estat del sistema és el vèrtex on es troba la partícula):



En aquesta pràctica simularem i analitzarem les voltes que fa la partícula en un sentit o altre del triangle. És a dir, simularem i analitzarem les trajectòries de la cadena de Markov donada per la matriu P.

Per fer-ho denotem la cadena de Markov $\{X_k | k \geqslant 0\}$ i definim una variable Y_k que dóna la diferència entre els salts que s'han donat en sentit horari (els salts $1 \to 2$, $2 \to 3$ i $3 \to 1$) i els salts que s'han donat en sentit antihorari (els salts $1 \to 3$, $3 \to 2$ i $2 \to 1$) en el pas de temps k. Valors Y_k positius indiquen que s'han fet més salts en sentit horari i valors de Y_k negatius indiquen el contrari. Concretament diem que una trajectòria de $\{X_k | k \geqslant 0\}$ fa un salt en sentit horari si

$$\mathrm{mod}(X_{k+1} - X_k, 3) = 1$$

i en aquest cas es té que

$$Y_{k+1} = Y_k + 1,$$

mentre que la trajectòria fa un salt en sentit antihorari si

$$\mathrm{mod}(X_{k+1} - X_k, 3) = -1$$

i en aquest cas es té que

$$Y_{k+1} = Y_k - 1.$$

Al pas de temps $k = 0$ fixem $Y_0 = 0$.

A partir de la variable Y_k es pot definir la variable V_k

$$V_k = Y_k / 3,$$

que dóna la diferència entre el nombre de voltes en sentit horari i el nombre de voltes en sentit antihorari que fan les trajectòries de $\{X_k | k \geqslant 0\}$.

a) Mirant la matriu de transició, com creieu que es comportaran les trajectòries de la variable Y? Creieu que les trajectòries tendiran a créixer (opció 1), que en mitjana ni creixeran ni decreixeran (opció 2) o que tendiran a decréixer (opció 3)? No cal que justifiqueu la resposta, simplement anoteu el que creieu per tal de poder comparar la vostra intuïció amb els resultats que obtindreu després. Observeu que l'opció 1 equival a dir que la partícula tendeix a girar més en senti horari, l'opció 2 que la partícula gira en sentit horari i antihorari a parts iguals i l'opció 3 que la partícula tendeix a girar més en sentit antihorari.

b) Feu una funció `trajectoriaY(x0,kmax)` que tingui com arguments una condició inicial $X_0 \in \{1, 2, 3\}$ i un natural $k_{\max} > 0$ i que retorni la trajectòria de la variable Y_k des de $k = 0$ fins a $k = k_{\max}$ (és a dir la funció `trajectoriaY(x0,kmax)` retornarà un vector de $k_{\max}+1$ components).

Per fer aquesta funció haureu de simular la cadena de Markov, és a dir caldrà que doneu el valor que prendrà X_{k+1} en funció del valor que hagi pres X_k. Si X_k ha pres el valor $i \in \{1, 2, 3\}$, aleshores per determinar el valor que prendrà X_{k+1} caldrà que utilitzeu la columna i de la matriu P, ja que és la que conté les probabilitats de transició des de l'estat i als altres. Concretament, com que $X_{k+1} = j$ amb probabilitat p_{ji} per $j \in \{1, 2, 3\}$, una manera de generar una realització de X_{k+1} es basa en generar un nombre aleatori u uniformement distribuït entre 0 i 1 i aleshores prendre

$$\begin{array}{lll} X_{k+1} = 1 & \text{si} & u < p_{1i} \\ X_{k+1} = 2 & \text{si} & p_{1i} \leqslant u < p_{1i} + p_{2i} \\ X_{k+1} = 3 & \text{si} & p_{1i} + p_{2i} \leqslant u \end{array} .$$

Si feu la funció amb R podeu utilitzar la funció `sample` . Aquesta funció permet generar realitzacions d'una variable aleatòria discreta qualsevol. Pel cas concret en que es vol generar una variable aleatòria que pot prendre els valors 1, 2 i 3 amb probabilitats p_1, p_2 i p_3 respectivament (amb $p_1 + p_2 + p_3 = 1$), s'utilitzaria la sintaxis:

```
sample(c(1,2,3),1,replace=TRUE,prob=c(p1,p2,p3))
```

c) Grafiqueu, en un mateix gràfic, 10 trajectòries de la variable Y_k des de $k = 0$ fins a $k = 1000$ utilitzant com a condició inicial $X_0 = 1$ (podeu utilitzar colors diferents per cada trajectòria per veure-les millor). Representeu el pas de temps k utilitzant la coordenada "horitzontal" del gràfic.

d) Repetiu un gràfic com l'anterior afegint-hi una 11 corba que representi la mitjana de les 10 trajectòries de la variable Y que es mostren en el gràfic (les trajectòries no cal que siguin les mateixes que les del gràfic anterior), és a dir

$$\bar{Y}_k = \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} Y_k^{(j)}$$

on $Y^{(j)}$ representa la j-èssima trajectòria de la variable Y. Veieu alguna tendència?

e) En aquest apartat es calcularà l'esperança del salt que es produeix al pas de temps k per valors de k prou grans.

Per fer-ho observeu primer que la probabilitat de donar un pas en sentit horari en el pas de temps k, que denotem $J_+(k)$ és

$$\begin{aligned} J_+(k) &= P(X_{k+1}=2, X_k=1) + P(X_{k+1}=3, X_k=2) + P(X_{k+1}=1, X_k=3) \\ &= P(X_{k+1}=2|X_k=1)P(X_k=1) + P(X_{k+1}=3|X_k=2)P(X_k=2) + P(X_{k+1}=1|X_k=3)P(X_k=3) \\ &= p_{21}p_1(k) + p_{32}p_2(k) + p_{13}p_3(k), \end{aligned}$$

on $p(k)$ és la distribució de la variable X_k al pas de temps k (és a dir $p_i(k) = P(X_k = i)$).

Anàlogament, la probabilitat de donar un pas en sentit antihorari en el pas de temps k, que denotem $J_-(k)$ és

$$J_-(k) = p_{31}p_1(k) + p_{12}p_2(k) + p_{23}p_3(k).$$

Observeu que $1 - J_+(k) - J_-(k)$ donaria la probabilitat de quedar-se quiet en el pas de temps k.

A partir de $J_+(k)$ i $J_-(k)$ es pot donar l'esperança del salt que es produeix en el pas de temps k, que denotem $E_{\text{salt}}(k)$, i que és

$$E_{\text{salt}}(k) = 1 \cdot J_+(k) + (-1) \cdot J_-(k),$$

ja que els salts són de mida 1 (per com s'ha definit la variable Y) i són positius quan es fan en sentit horari i negatius quan es fan en sentit antihorari.

Com que la cadena de Markov associada a la matriu P és irreductible i aperiòdica, les distribucions $p(k)$ convergeixen (quan $k \to \infty$) a una distribució invariant $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ donat per l'únic vector propi de valor propi 1 de la matriu P.

Podem definir, per tant, el salt esperat que es produeix en el límit quan $p(k) \approx \pi$, que serà

$$E_{\text{salt}} = (p_{21} - p_{31})\pi_1 + (p_{32} - p_{12})\pi_2 + (p_{13} - p_{23})\pi_3.$$

Doneu el valor numèric de E_{salt} que es correspon a la matriu de transició P de l'anunciat. No cal que feu els càlculs a ma, podeu utilitzar les funcions del programari que vulgueu.

f) Repetiu el gràfic de l'apartat d) afegint-hi la recta

$$E(Y_k) = kE_{\text{salt}},$$

i comproveu que hi ha certa coherència entre el resultat empíric i el teòric. Per obtenir un millor ajust podeu augmentar el nombre de trajectòries que s'utilitzen per calcular la trajectòria $\bar{Y}$ mitjana. Si ho feu, eviteu graficar totes les trajectòries individuals perquè embrutaran innecessàriament el gràfic, és a dir limiteu-vos a graficar les corbes

$$\bar{Y}_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_k^{(j)} \qquad \text{i} \qquad E(Y_k) = kE_{\text{salt}}.$$

Si utilitzeu un n prou gran veure que les dues rectes són molt semblants. L'ajust no és perfecte perquè la distribució de X_0 no és π (quina és la distribució de X_0, és a dir $p(0)$, si $X_0 = 1$ amb probabilitat 1?), la qual cosa implica que els salts esperats que es produeixen per k petits poden diferir del valor E_{salt}. A partir de cert moment els salts esperats ja són força semblants a E_{salt} (per això el pendent de les dues corbes és pràcticament igual), però la desviació que s'ha produït inicialment es tradueix en un desplaçament de les dues rectes (per veure aquest desplaçament millor hauríeu de fer un zoom a les dues corbes, ja que en aquest exemple el desplaçament és aproximadament 0.2. L'ajust seria perfecte, però, si X_0 no fos idènticament 1 sinó que prengués el valor 1, 2 o 3 amb probabilitats π_1, π_2 i π_3 respectivament.