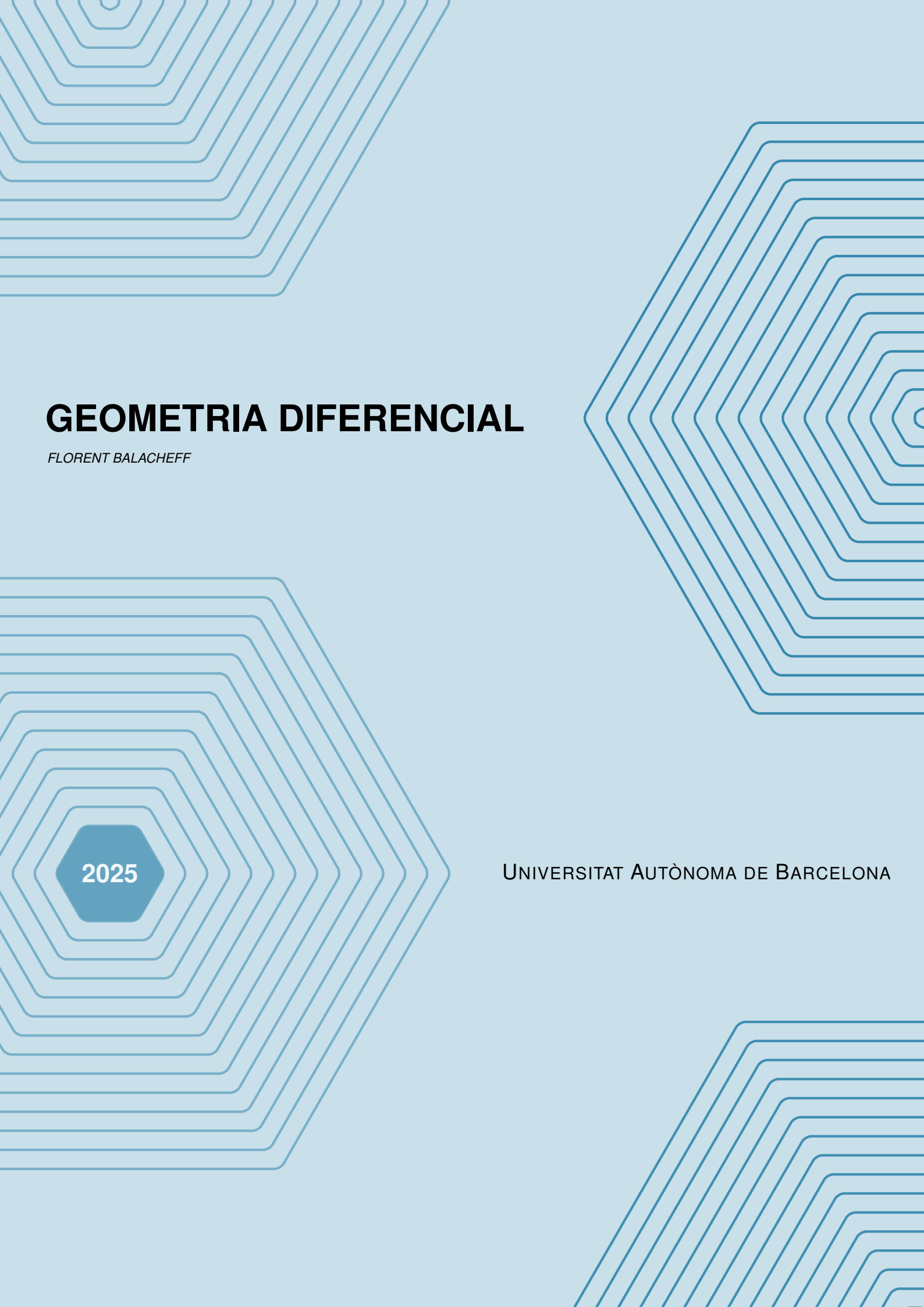




GEOMETRIA DIFERENCIAL

FLORENT BALACHEFF

2025

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

Voldria agrair a Teo Gil Moreno de Mora i Sardà la seva lectura atenta i els nombrosos suggeriments de correcció, així com a tots els estudiants dels cursos 2022/23, 2023/24 i 2024/25, els comentaris dels quals han ajudat a millorar aquest text.

Aquest document utilitza una versió modificada d'una plantilla LaTeX original distribuïda sota llicència Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

Font: <https://es.overleaf.com/latex/templates/plantilla-notas/dwyzhjhtzrcw>

Autor: *Danelnov*

Geometria Diferencial © 2025 by *Florent Balacheff*

Aquesta obra està subjecta a una llicència CC BY 4.0.

Text de la llicència: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

ÍNDIX

1	Corbes parametritzades	5
1.1	Corbes parametritzades de $\mathbb{R}^n$	5
1.1.1	Definicions	5
1.1.2	Longitud d'una corba	6
1.1.3	Canvi de paràmetre	8
1.1.4	El paràmetre arc	9
1.1.5	Curvatura i vector normal	10
1.2	Geometria de les corbes de $\mathbb{R}^2$	14
1.2.1	Curvatura amb signe d'una corba plana	14
1.2.2	Punts singulars de les corbes planes	16
1.3	Geometria de les corbes de $\mathbb{R}^3$	19
1.3.1	Torsió i fórmules de Frenet	19
1.3.2	Forma canònica local	21
1.3.3	Teorema fonamental de la teoria local de les corbes	23
1.3.4	Triedre de Frenet i torsió en el cas general	24
2	Subvarietats	27
2.1	Estructura local de les immersions i submersions	27
2.1.1	Definicions	28
2.1.2	Estructura local de les immersions	29
2.1.3	Estructura local de les submersions	30
2.2	Subvarietats	31
2.2.1	Definició	31
2.2.2	Caracteritzacions	31
2.2.3	Parametritzacions locals d'una subvarietat	34
2.2.4	Espai tangent a una subvarietat	36
2.2.5	Aplicacions diferenciables	37
3	Superfícies regulars	40
3.1	Primera forma fonamental	40
3.1.1	Definició	40
3.1.2	Calcul de longitud	41
3.1.3	Àrea en coordenades locals	42
3.1.4	Isometries entre superfícies	44
3.2	Segona forma fonamental	46
3.2.1	Orientació de les superfícies	46

3.2.2	Definició de la segona forma fonamental	48
3.2.3	Curvatures principals, de Gauss i mitjana	49
3.2.4	Expressió local	50
3.2.5	Curvatura normal	52
3.2.6	Línies de curvatura i línies asimptòtiques	54
3.3	Teorema Egregium de Gauss	56
3.3.1	Símbols de Christoffel	56
3.3.2	Expressió de la curvatura de Gauss	57
3.4	Geodèsiques	58
3.4.1	Camps vectorials al llarg d'una corba	58
3.4.2	Derivada covariant	58
3.4.3	Transport paral·lel	59
3.4.4	Definició de la noció de geodèsica	60
3.4.5	Curvatura geodèsica	63
4	Formes Diferencials	66
4.1	Camps vectorials de $\mathbb{R}^n$	66
4.1.1	Definicions i notacions	66
4.1.2	Corbes integrals	67
4.2	Àlgebra multilineal	70
4.2.1	Formes multilineals	70
4.2.2	Producte exterior	71
4.2.3	Avaluació del producte exterior via el determinant	72
4.2.4	Descomposició de les formes multilineals	73
4.3	Formes diferencials sobre $\mathbb{R}^n$	75
4.3.1	Definició de forma diferencial	75
4.3.2	Diferencial exterior	77
4.3.3	Pullback d'una forma diferencial	79
4.3.4	Forma volum sobre $\mathbb{R}^n$	81
4.4	Subvarietats amb vora	82
4.4.1	Definicions	82
4.4.2	Camps vectorials	84
4.4.3	Formes diferencials i orientació	85
4.5	Integració de formes i Teorema de Stokes	88
4.5.1	Integració	88
4.5.2	Teorema de Stokes	91

CORBES PARAMETRITZADES

En aquest primer capítol, estudiarem els objectes geomètrics diferencials més elementals: les corbes parametritzades. Intuïtivament sentim que són els més simples perquè són de dimensió 1. Veurem que els podem associar diversos quantitats: la curvatura (definida en qualsevol dimensió ambient), la curvatura amb signe (en dimensió 2), i el triedre de Frenet i la torsió (en dimensió 3). Aleshores ens adonarem que aquestes quantitats són en realitat invariants geomètrics: no depenen de la parametrització particular triada si no de l'objecte geomètric que constitueix la imatge de la corba.

Denotem per I un interval obert de $\mathbb{R}$.

1.1

Corbes parametritzades de $\mathbb{R}^n$

1.1.1 Definicions

Definició 1.1.1

Una **corba parametritzada** de $\mathbb{R}^n$ és una aplicació $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable de classe C^∞ .

El conjunt $\gamma(I) = \{\gamma(t) \mid t \in I\}$ s'anomena **traça** de γ .

El **vector tangent** de γ en $t_0 \in I$ és el vector $\gamma'(t_0) \in \mathbb{R}^n$.

La corba es diu **regular** si $\gamma'(t) \neq 0$ per tot $t \in I$, i en aquest cas es defineix el **vector tangent unitari** en el paràmetre t per la fórmula

$$T(t) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|},$$

i la **recta tangent** de γ en $t_0 \in I$ com la corba parametrizada $t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma(t_0) + t \cdot \gamma'(t_0)$.

Exemples.

- 1 Una recta de $\mathbb{R}^n$ que passa per dos punts p, q es pot parametritzar com la corba $t \in \mathbb{R} \mapsto tq + (1-t)p$.
- 2 Un cercle de centre $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ i de radi $r > 0$ es pot parametritzar per la corba $t \in \mathbb{R} \mapsto (x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t)$.
- 3 La corba $t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t, t)$ és una hèlix continguda dins el cilindre

$$\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Aquestes tres corbes són regulars.

- 4 La corba $t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma(t) = (t^2, t^3)$ no és regular com $\gamma'(0) = (0, 0)$.
- 5 Les tres corbes parametritzades

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (\cos t, \sin t) \text{ on } t \in \mathbb{R}, \\ \gamma_2(t) &= (\cos t, \sin t) \text{ on } t \in (-\infty, 2\pi), \\ \gamma_3(t) &= (\cos(2t), \sin(2t)) \text{ on } t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

són diferents, però tenen la mateixa traça.

1.1.2 Longitud d'una corba

Definició 1.1.2

Sigui $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una corba (parametrizada) i $[a, b] \subset I$. Anomenem **longitud** de γ entre a i b al nombre

$$\ell(\gamma|_{[a,b]}) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

on $\|\cdot\|$ denota la norma euclidiana estàndard de $\mathbb{R}^n$.

Recordem que la norma d'un vector $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es pot calcular fent servir la fórmula $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

No sembla gens evident que aquesta definició coincideixi amb la noció intuïtiva de longitud, però el següent resultat ens ajuda a entendre-ho.

Proposició 1.1.1

Sigui $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una corba i $[a, b] \subset I$. Llavors

$$\ell(\gamma|_{[a,b]}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^p \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$$

on hem posat $t_k = a + k \frac{b-a}{p}$ per tot $k = 0, \dots, p$.

De fet es pot demostrar que més generalment

$$\ell(\gamma|_{[a,b]}) = \sup_{a=t_0 < t_1 < \dots < t_n=b} \sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|.$$

En particular, observem que la longitud només depèn de la traça $\gamma([a, b])$.

Demostració. Fent servir el teorema del valor mitjà, escrivim

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^p \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^p \sqrt{\sum_{i=1}^n (\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1}))^2} \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^p \sqrt{\sum_{i=1}^n (\gamma'_i(t_k) + o(1))^2 |t_k - t_{k-1}|} \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^p \|\gamma'(t_k)\| |t_k - t_{k-1}| \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^p \|\gamma'(t_k)\| \frac{b-a}{p} \\ &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \end{aligned}$$

on hem conclòs reconeixent una suma de Riemann. □

Exemples.

- ❶ Si $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$ amb $t \in [0, 2\pi]$ (cercle de radi r centrat en l'origen), llavors calculem

$$\gamma'(t) = (-r \sin t, r \cos t),$$

i per tant

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = 2\pi r.$$

- ❷ Si $\gamma(t) = (ae^{-bt} \cos t, ae^{-bt} \sin t)$ amb $t \in (0, \infty)$ i $a, b > 0$ (espiral logarítmica), llavors calculem

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \|(-abe^{-bt} \cos t - ae^{-bt} \sin t, -abe^{-bt} \sin t + ae^{-bt} \cos t)\| \\ &= ae^{-bt} \sqrt{(-b \cos t - \sin t)^2 + (-b \sin t + \cos t)^2} \\ &= ae^{-bt} \sqrt{1 + b^2}, \end{aligned}$$

i per tant

$$\ell(\gamma) = a \sqrt{1 + \frac{1}{b^2}}.$$

- ❸ Si $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ amb $t \in [0, 2\pi]$, llavors (exercici)

$$\ell(\gamma) = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

1.1.3 Canvi de paràmetre

Sigui $J \subset \mathbb{R}$ un altre interval obert.

Definició 1.1.3

Diem que una corba $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una **reparametrització** d'una corba $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ si $\exists h : J \rightarrow I$ difeomorfisme tal que $\beta = \alpha \circ h$.

Observació.

- 1 Si $h : J \rightarrow I$ és lissa i exhaustiva, aleshores h és difeomorfisme $\Leftrightarrow h'(s) \neq 0 \forall s \in J$.
En efecte, si h és difeomorfisme llavors $h'(x) \neq 0$ com $dh_s(v) = h'(s) \cdot v$. Recíprocament, si existeixen $a, b \in J$ tal que $h(a) = h(b)$, el teorema de Rolle implica que podem trobar $x \in (a, b)$ tal que $h'(x) = 0$.
- 2 Si denotem $\alpha \sim \beta$ quan β és reparametrització de α , aleshores $\sim$ és una relació d'equivalència.
- 3 Si $\alpha \sim \beta$, aleshores les dues corbes tenen mateixa traça. La recíproca no és certa: les dues corbes definides sobre $\mathbb{R}$ per $\alpha(t) = (t, t)$ i $\beta(t) = (t^3, t^3)$ tenen mateixa traça però no són reparametrització l'un de l'altre.

Definició 1.1.4

Si $\beta = \alpha \circ h$ és una reparametrització de α , llavors el **canvi de paràmetre** h es diu **positiu** si $h' > 0$ i **negatiu** si $h' < 0$.

Això correspon a l'orientació que podem definir de la corba.

Proposició 1.1.2

Sigui $\beta = \alpha \circ h$ una reparametrització.
Llavors

- 1 β regular $\Leftrightarrow \alpha$ regular.
- 2 Si $[a, b] \subset I$ i $[c, d] = h^{-1}([a, b])$, llavors

$$\ell(\alpha|_{[a,b]}) = \ell(\beta|_{[c,d]}).$$

Demostració.

- 1 És conseqüència directa de la relació $\beta'(s) = h'(s) \cdot \alpha'(h(s))$.
- 2 Suposem $h'(s) > 0$, l'altre cas es tracta igualment. Tenim $h^{-1}(a) = c$ i $h^{-1}(b) = d$, i calculem

$$\ell(\beta|_{[c,d]}) = \int_c^d \|\beta'(s)\| ds = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} \|\alpha'(h(s))\| |h'(s)| ds = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \ell(\alpha|_{[a,b]})$$

fent servir que $h' > 0$ i el canvi de variable $t = h(s)$.

□

Exemples.

- ❶ La corba $\alpha : t \in [0, \mathbb{R}] \rightarrow (r \cos t, r \sin t)$ de $\mathbb{R}^2$ es pot reparametritzar en la corba

$$\beta = \alpha \circ h : s \in \mathbb{R} \rightarrow \left(r \cos \left(\frac{s}{r}\right), r \sin \left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

fent servir el difeomorfisme $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definit per $h(s) = s/r$: (comprovem que $h'(s) = 1/r \neq 0$ i per tant que h és difeomorfisme).

- ❷ (Canvi de sentit) Qualsevol corba $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es pot reparametritzar en sentit contrari. Triem un interval tancat $[a, b] \subset I$ qualsevol i posem $J := a + b - I := \{a + b - t \mid t \in I\}$. Aleshores el difeomorfisme $h : J \rightarrow I$ definit per

$$h(s) = a + b - s$$

permet reparametritzar α en $\beta = \alpha \circ h$ tal que $\beta(a) = \alpha(b)$ i $\beta(b) = \alpha(a)$.

- ❸ Qualsevol corba $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es pot reparametritzar sobre l'interval $(0, 1)$ fent servir el difeomorfisme $h : (0, 1) \rightarrow (a, b)$ definit per

$$h(s) = (1 - s)a + sb.$$

1.1.4 El paràmetre arc**Definició 1.1.5**

Direm que una corba $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ està **parametritzada per la longitud d'arc** (abreviarem en **ppla**) quan

$$\|\gamma'(t)\| = 1 \quad (\forall t \in I),$$

i anomenarem **paràmetre arc** al paràmetre corresponent de la corba que denotarem per s . Observem que si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ està ppla, aleshores

- $T(s) = \gamma'(s)$,
- Si $[a, b] \subset I$,

$$\ell(\gamma|_{[a,b]}) = \int_a^b \|\gamma'(s)\| ds = b - a,$$

és a dir, la longitud d'una corba ppla entre a i b és $b - a$.

Proposició 1.1.3

Tota corba regular es pot reparametritzar per longitud d'arc.

Demostració. Sigui $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una corba regular i $a \in I$. Posem

$$s_a(t) := \int_a^t \|\gamma'(u)\| du. \quad (\text{funció longitud d'arc amb origen a } a)$$

La funció s_a és clarament C^∞ i compleix $s'_a(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$. Així, $s_a : I \rightarrow J := s_a(I)$ és difeomorfisme, i si definim la corba

$$\beta := \gamma \circ s_a^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

comprovem que està ppla: $\forall s \in J$,

$$\beta'(s) = (s_a^{-1})'(s) \cdot \gamma'(s_a^{-1}(s)) = \frac{1}{s'_a(s_a^{-1}(s))} \cdot \gamma'(s_a^{-1}(s)) = \frac{1}{\|\gamma'(s_a^{-1}(s))\|} \cdot \gamma'(s_a^{-1}(s))$$

i per tant $\|\beta'(s)\| = 1$. □

Proposició 1.1.4

Sigui α una corba ppla, i $\beta = \alpha \circ h$ una reparametrització ppla. Llavors el canvi de paràmetre s'escriu

$$h(s) = \pm s + s_0$$

per un cert $s_0 \in \mathbb{R}$.

Demostració. Com $\beta'(s) = h'(s) \cdot \alpha'(h(s))$, deduïm agafant la norma que $|h'(s)| = 1 \Leftrightarrow h'(s) = \pm 1$. Això implica el resultat. □

1.1.5 Curvatura i vector normal

Definició 1.1.6

Sigui $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una corba ppla. Definim la **curvatura** de γ en s com el nombre

$$k(s) := \|\gamma''(s)\|.$$

Observació. Sabem que $T(s) = \gamma'(s)$ quan γ està ppla, per tant

$$k(s) = \|T'(s)\|$$

sempre que γ sigui ppla.

Recordem que el producte escalar canònic de dos vectors $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ es defineix per la fórmula

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i.$$

Proposició 1.1.5

Siguin $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dues corbes parametritzades sobre el mateix interval. Llavors

$$\frac{d}{dt} \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle = \langle \alpha'(t), \beta(t) \rangle + \langle \alpha(t), \beta'(t) \rangle.$$

Demostració. Denotem $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$ i $\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_n(t))$. Aleshores

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle \alpha(t), \beta(t) \rangle &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \cdot \beta_i(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha'_i(t) \cdot \beta_i(t) + \alpha_i(t) \cdot \beta'_i(t)) \\ &= \langle \alpha'(t), \beta(t) \rangle + \langle \alpha(t), \beta'(t) \rangle.\end{aligned}$$

□

En particular, si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ està ppla,

$$\|\gamma'(s)\|^2 = 1 \Rightarrow (\|\gamma'(s)\|^2)' = 0 \Rightarrow \langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle = 0.$$

Això justifica la següent definició.

Definició 1.1.7

Sigui $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una corba ppla i $s \in I$ tal que $k(s) \neq 0$. Definim el **vector normal** de γ en s com el vector

$$N(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$$

que compleix $N(s) \perp \gamma'(s)$.

Alternativament $N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$ i per tant tenim la relació

$$T'(s) = k(s) \cdot N(s).$$

Exemple. La corba $\gamma : s \in \mathbb{R} \rightarrow r(\cos(s/r), 1 + \sin(s/r))$ on $r > 0$ és la ppla d'un cercle de radi r centrat en el punt $(0, r)$ de $\mathbb{R}^2$, i calculem

$$\gamma''(s) = [(-\sin(s/r), \cos(s/r))]' = \frac{1}{r}(-\cos(s/r), -\sin(s/r)) \implies k(s) = \frac{1}{r}.$$

Veiem que el cercle tendeix geomètricament quan $r \rightarrow \infty$ cap a la recta $t \in \mathbb{R} \mapsto (t, 0)$ que té curvatura nul·la.

La definició de curvatura està justificada pel següent resultat.

Proposició 1.1.6

Sigui $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una corba ppla i fixem $s_0 \in I$ tal que $k(s_0) \neq 0$. $\exists!$ cercle $\mathcal{C} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametritzat per longitud d'arc que compleix les següents condicions (ordre de contacte en s_0 al menys 2):

$$\begin{cases} \mathcal{C}(s_0) = \gamma(s_0) \\ \mathcal{C}'(s_0) = \gamma'(s_0) \\ \mathcal{C}''(s_0) = \gamma''(s_0). \end{cases}$$

L'únic cercle determinat per aquestes condicions es diu **cercle osculador** a γ en s_0 . Aquest cercle té com a radi $\frac{1}{k(s_0)}$ (anomenat **radi de curvatura**), i com a centre el punt $\gamma(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}N(s_0)$.

Demostració. Fent el canvi següent del domini de la parametrització per longitud d'arc $s \in I \mapsto s - s_0 \in I - s_0$, podem suposar que $s_0 = 0$. Busquem el cercle parametritzat per longitud d'arc sota la forma

$$\mathcal{C}(s) = q + r \cos(s/r) \cdot v + r \sin(s/r) \cdot w$$

on $q \in \mathbb{R}^n$ i v, w són dos vectors unitaris ortogonals. Llavors

$$\begin{cases} \mathcal{C}(0) = q + rv = \gamma(0) \\ \mathcal{C}'(0) = w = \gamma'(0) = T(0) \\ \mathcal{C}''(0) = -\frac{1}{r}v = \gamma''(0) = k(0)N(0), \end{cases}$$

sistema que determina unicament q, v i w de la forma següent:

$$\begin{cases} w = T(0) \\ r = \frac{1}{k(0)} \quad \text{i} \quad v = -N(0) \\ q = \gamma(0) + \frac{1}{k(0)}N(0). \end{cases}$$

Per tant el cercle $\mathcal{C}$ buscat s'escriu

$$\mathcal{C}(s) = \left(\gamma(0) + \frac{1}{k(0)}N(0) \right) + \frac{1}{k(0)} (-\cos(k(0)s)N(0) + \sin(k(0)s)T(0)).$$

□

Finalment demostrem que la curvatura és un invariant que no depèn de la ppla triada.

Proposició 1.1.7

Sigui $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ una reparametrització per longitud d'arc d'una corba $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ppla. Llavors si fixem $s_0 = h(\tilde{s}_0) \in I$, tenim

$$k_\beta(\tilde{s}_0) = k_\alpha(s_0).$$

Demostració. Sabem que $h(\tilde{s}) = \pm \tilde{s} + c$ per un cert $c \in \mathbb{R}$, i per tant $h'(s) = \pm 1$ i $h''(s) = 0$. Llavors

$$k_\beta(\tilde{s}_0) = \|(\alpha \circ h)''(\tilde{s}_0)\| = \|(h' \cdot (\alpha' \circ h))'(\tilde{s}_0)\| = \|((h')^2 \cdot (\alpha'' \circ h)(\tilde{s}_0))\| = \|\alpha''(s_0)\| = k_\alpha(s_0).$$

□

Aquest últim resultat ens permet definir la curvatura de la traça d'una corba sense fer referència a cap parametrització.

Definició 1.1.8

Sigui C un subconjunt de $\mathbb{R}^n$ tal que al voltant de cada punt $p \in C$ es pugui parametritzar de forma inequívoca per una parametrització regular, es a dir que existeix per cada punt p de C un entorn obert U de p i una parametrització regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que γ sigui homeomorfisme de I sobre $U \cap C$.

Aleshores es defineix la **curvatura** de C en un punt $p = \gamma(t)$ com la curvatura de qualsevol reparametrització $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ per longitud d'arc en el paràmetre $h^{-1}(t)$.

La condició que γ sigui homeomorfisme de I sobre $U \cap C$ serveix per excloure les corbes que no són simples (per les quals és evident que no podem definir de forma inequívoca la noció de curvatura en un punt), però també serveix per excloure la figura en vuit del pla que es pot parametritzar per una corba regular injectiva. Aquesta condició també garanteix que si tenim una segona parametrització regular de C al voltant de p llavors serà una reparametrització de la corba γ com ho veurem més endavant.

Aquestes observacions seran fonamentals a l'hora de generalitzar les corbes a objectes geomètrics de dimensió superior, i entendre perquè fem servir la noció de subvarietats que requereix aquesta condició de homeomorficitat.

Dins aquesta secció treballem en dimensió $n = 2$.

1.2.1 Curvatura amb signe d'una corba plana

Recordem que si una corba $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ està ppla i si $k(s) = \|T'(s)\| > 0$, llavors el vector normal està definit per $N(s) = T'(s)/\|T'(s)\|$. Quan $k(s) = 0$, el problema és que en general no tenim cap elecció canònica d'un vector normal, es a dir d'un vector dins l'hiperpla $\{\langle \cdot, T(s) \rangle = 0\}$, a la corba. L'única excepció és la dimensió $n = 2$, per la qual aquest hiperpla té dimensió 1.

Definició 1.2.1

Sigui $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una corba ppla i fixem $s \in I$. Llavors $\exists! \hat{N}(s) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(T(s), \hat{N}(s))$ sigui una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^2$.

La **curvatura amb signe** de γ en el paràmetre s és l'únic real $\kappa(s)$ tal que $T'(s) = \kappa(s) \cdot \hat{N}(s)$, i compleix

$$\kappa(s) = \det(T(s), T'(s))$$

com $\det(T(s), \hat{N}(s)) = 1$.

El següent resultat relaciona la curvatura amb signe i la curvatura que hem definit a la secció anterior.

Proposició 1.2.1

Sigui $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una corba ppla i fixem $s \in I$ tal que $k(s) > 0$. Llavors

$$k(s) = |\kappa(s)| \quad \text{i} \quad N(s) = \pm \hat{N}(s).$$

Demostració. De fet

$$k(s) = \|T'(s)\| = \|\kappa(s)\hat{N}(s)\| = |\kappa(s)| \cdot \|\hat{N}(s)\| = |\kappa(s)|.$$

La igualtat $N(s) = \pm \hat{N}(s)$ és conseqüència del fet que $(T(s), N(s))$ i $(T(s), \hat{N}(s))$ són totes dues bases ortonormals de $\mathbb{R}^2$. $\square$

La curvatura amb signe es pot interpretar com la derivada de l'angle que forma el vector tangent amb l'eix horitzontal de pla:

Teorema 1.2.1

Sigui $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una corba ppla. $\exists \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que podem escriure

$$T(s) = \cos \theta(s) e_1 + \sin \theta(s) e_2,$$

i llavors $\kappa(s) = \theta'(s)$.

Demostració. Si denotem (e_1, e_2) la base canònica de $\mathbb{R}^2$, llavors podem escriure

$$T(s) = \langle T(s), e_1 \rangle e_1 + \langle T(s), e_2 \rangle e_2,$$

i de la igualtat $\|T(s)\|^2 = 1$ deduïm l'equació

$$\langle T(s), e_1 \rangle^2 + \langle T(s), e_2 \rangle^2 = 1. \quad (\forall s \in I)$$

Utilitzarem el resultat següent.

Lema 1.2.1

Siguin $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ dos funcions de classe C^∞ tal que $\forall s \in I$,

$$a(s)^2 + b(s)^2 = 1.$$

Fixem $s_0 \in I$ i $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $a(s_0) = \cos \theta_0$ i $b(s_0) = \sin \theta_0$.

Aleshores la funció de classe C^∞ definida per

$$\begin{aligned} \theta : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto \theta(s) := \theta_0 + \int_{s_0}^s (ab' - a'b)(u) du \end{aligned}$$

compleix $a(s) = \cos \theta(s)$ i $b(s) = \sin \theta(s)$.^a

Demostració. Volem demostrar que

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a(s) = \cos \theta(s) \\ b(s) = \sin \theta(s) \end{cases} \\ \iff &(a(s) - \cos \theta(s))^2 + (b(s) - \sin \theta(s))^2 \equiv 0 \\ \iff &2 - 2(a(s) \cos \theta(s) + b(s) \sin \theta(s)) \equiv 0 \\ \iff &A(s) := a(s) \cos \theta(s) + b(s) \sin \theta(s) \equiv 1. \end{aligned}$$

Observem que

- La definició de $\theta = \theta(s)$ implica la igualtat $\theta' = ab' - a'b$;
- De la igualtat $a^2 + b^2 = 1$ obtenim $aa' + bb' = 0$.

Aleshores calculem

$$\begin{aligned} A' &= a' \cos \theta - a\theta' \sin \theta + b' \sin \theta + b\theta' \cos \theta \\ &= a' \cos \theta + b' \sin \theta + (b \cos \theta - a \sin \theta)(ab' - a'b) \\ &= \cos \theta(a' + abb' - a'b^2) + \sin \theta(b' - a^2b' + aa'b) \\ &= \cos \theta(a' - a^2a' - a'b^2) + \sin \theta(b' - a^2b' - b^2b') \\ &= a' \cos \theta(1 - a^2 - b^2) + b' \sin \theta(1 - a^2 - b^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finalment, $A(s) \equiv A(s_0) = 1$ i obtenim el resultat. $\square$

^aPer $s \in I$ fixat, sabem que $\exists \theta(s)$ que compleix aquestes igualtats. La dificultat és obtenir una solució de classe C^∞ en el paràmetre s .

Ara, utilitzant el lema anterior, $\exists \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\langle T(s), e_1 \rangle = \cos \theta(s)$ i $\langle T(s), e_2 \rangle = \sin \theta(s)$, o

de forma equivalent

$$T(s) = \cos \theta(s)e_1 + \sin \theta(s)e_2.$$

Ara bé, podem escriure

$$\hat{N}(s) = \cos(\theta(s) + \pi/2)e_1 + \sin(\theta(s) + \pi/2)e_2 = -\sin \theta(s)e_1 + \cos \theta(s)e_2,$$

i obtenim

$$T'(s) = \theta'(s)(-\sin \theta(s)e_1 + \cos \theta(s)e_2) = \theta'(s) \cdot \hat{N}(s).$$

Per tant, finalment veiem que $\kappa(s) = \det(T(s), T'(s)) = \theta'(s)$ com volíem. $\square$

1.2.2 Punts singulars de les corbes planes

Sigui $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una corba parametritzada i fixem $t_0 \in I$.

Definició 1.2.2

Diem que γ és **singular** en t_0 si $\gamma'(t_0) = 0$.

En el cas contrari diem que γ és **regular** en t_0 .

En particular una corba regular és regular en cada $t \in I$.

En el cas d'un punt singular $\gamma(t_0)$, no podem utilitzar el vector tangent per estudiar el comportament local de la corba γ en t_0 . Però podem estudiar la quantitat següent.

Proposició 1.2.2

Sigui $\begin{cases} \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (x(t), y(t)) \end{cases}$ una corba parametritzada i $\gamma(t_0)$ un punt singular. Si el límit

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} = \ell \in [-\infty, \infty]$$

existeix, llavors la recta $R_t = (\gamma(t_0)\gamma(t))$ convergeix a la recta tangent a γ en $\gamma(t_0)$ definida per

$$(T_{t_0}) : \begin{cases} y = y(t_0) + \ell(x - x(t_0)) & \text{si } \ell \neq \pm\infty \\ x = x(t_0) & \text{si } \ell = \pm\infty. \end{cases}$$

Observació. Si $\gamma'(t_0) \neq 0$, llavors

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \in [-\infty, \infty],$$

i tornem a trobar la definició de recta tangent en un punt regular.

Demostració. La corba γ s'escriu localment com

$$(\gamma) : \begin{cases} y(t) = y(t_0) + (\ell + o(1))(x(t) - x(t_0)) & \text{si } \ell \neq \pm\infty \\ x(t) = x(t_0) + o(1)(y(t) - y(t_0)) & \text{si } \ell = \pm\infty \end{cases}$$

i per tant la recta passant per els punts $\gamma(t)$ i $\gamma(t_0)$ s'escriu

$$(R_t) : \begin{cases} y = y(t_0) + (\ell + o(1))(x - x(t_0)) \\ x = x(t_0) + o(1)(y - y(t_0)) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{si } \ell \neq \pm\infty \\ \text{si } \ell = \pm\infty. \end{array}$$

Per tant podem concloure el resultat que havíem anunciat. $\square$

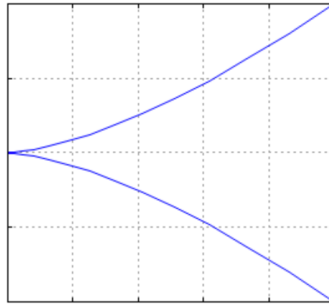
Exemple. Considerem $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (t^2, t^3)$. La corba és regular excepte en $t = 0$, ja que $\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$. Així doncs, podem estudiar les variacions de les seves components per dibuixar la forma de la corba. En el punt singular, calculem

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{t^2} = 0.$$

Per tant la recta tangent en $\gamma(0) = (0, 0)$ és la recta horitzontal $\{y = 0\}$. De fet, podem escriure la corba γ com

$$\gamma(t) = t^2(1, 0) + t^3(0, 1) = t^2 e_1 + t^3 e_2,$$

fet que ens permet determinar completament el comportament local de la corba al voltant del punt singular:



De fet, més generalment, podem classificar els diferents tipus de punts singulars de les corbes planes fent servir el comportament respecte a la tangent, quan aquesta existeix.

Definició 1.2.3

Sigui $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una corba plana, i suposem que $\exists v, w \in \mathbb{R}^2$ vectors linealment independents i $\exists p < q \in \mathbb{N}$ tal que

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)^p \cdot v + (t - t_0)^q \cdot w + o((t - t_0)^q).$$

Llavors la corba té recta tangent en t_0 de vector director v , i tenim la classificació següent:

- 1 El punt $\gamma(t_0)$ es diu **punt ordinari** si $\begin{cases} p \text{ senar,} \\ q \text{ parell.} \end{cases}$
- 2 El punt $\gamma(t_0)$ es diu **punt d'inflexió** si $\begin{cases} p \text{ senar,} \\ q \text{ senar.} \end{cases}$

3 El punt $\gamma(t_0)$ es diu **cúspide de primer tipus** si $\begin{cases} p \text{ parell,} \\ q \text{ senar.} \end{cases}$

4 El punt $\gamma(t_0)$ es diu **cúspide de segon tipus** si $\begin{cases} p \text{ parell,} \\ q \text{ parell.} \end{cases}$

Observació. La corba de la definició anterior té recta tangent en t_0 de vector director v : si denotem $v = (v_1, v_2)$, aleshores

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + (t - t_0)^p v_1 + o((t - t_0)^p) \\ y(t) = y(t_0) + (t - t_0)^q v_2 + o((t - t_0)^q) \end{cases}$$

i trobem que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} = \frac{v_2}{v_1} \in [-\infty, \infty].$$

En aquesta secció treballarem en dimensió ambient $n = 3$.

1.3.1 Torsió i fórmules de Frenet

Definició 1.3.1

Una corba $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ppla es diu **biregular** si, $\forall s \in I$, es compleix la condició

$$\gamma''(s) \neq 0.$$

(De forma equivalent, la corba γ és biregular si la seva curvatura no s'anul·la mai: $\forall s \in I$, $k(s) \neq 0$.)

Si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ és una corba ppla i biregular, definim el seu **vector binormal** en el paràmetre s per la fórmula^a

$$B(s) := T(s) \wedge N(s).$$

De forma equivalent, $B(s)$ és l'únic vector de $\mathbb{R}^3$ tal que $(T(s), N(s), B(s))$ defineix una base ortonormal positiva. El triplet $(T(s), N(s), B(s))$ s'anomena **triedre de Frenet**.

^aRecordem que el producte vectorial està definit per la fórmula

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Per construcció,

$$B(s) \perp T(s) \quad \text{i} \quad B(s) \perp N(s).$$

Proposició 1.3.1

Sigui $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba ppla i biregular. $\exists! \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall s \in I$

$$B'(s) = \tau(s) \cdot N(s).$$

La funció τ s'anomena **torsió** de γ .

Demostració. Podem descomposar el vector $B'(s)$ en aquesta base ortonormal com

$$B'(s) = \langle B'(s), T(s) \rangle \cdot T(s) + \langle B'(s), N(s) \rangle \cdot N(s) + \langle B'(s), B(s) \rangle \cdot B(s).$$

Com $\|B(s)\|^2 = 1$, obtenim derivant $\langle B'(s), B(s) \rangle = 0$. I de la relació $\langle B(s), T(s) \rangle = 0$ veiem que

$$\langle B'(s), T(s) \rangle = -\langle B(s), T'(s) \rangle = -k(s) \cdot \langle B(s), N(s) \rangle = 0.$$

Per tant, la funció τ existeix i és únicament determinada com $\tau(s) := \langle B'(s), N(s) \rangle$. $\square$

A diferència de la curvatura, la torsió pot prendre valors negatius. La torsió mesura el defecte d'una corba a ser plana, com podem intuir en el següent resultat.

Proposició 1.3.2

Sigui $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba ppla i biregular. Llavors la corba és plana (i.e. està continguda en un subespai afí de dimensió 2) si i només si $\tau \equiv 0$.

Demostració. Fixem $s_0 \in I$ qualsevol.

Si la corba és plana, $\exists f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^3)^*$ tal que $f(\gamma(s)) = f(\gamma(s_0))$ per tot $s \in I$. (De forma equivalent $\gamma(s) \in \gamma(s_0) + \ker f$, un pla afí.) Derivant obtenim $f(\gamma'(s)) = 0$ i $f(\gamma''(s)) = 0$, és a dir $f(T(s)) = 0$, i $f(N(s)) = 0$ com $k(s) \neq 0$ (γ és biregular). Ara bé $\exists! X \in \mathbb{R}^3$ tal que $f = \langle \cdot, X \rangle$, i llavors necessàriament $B(s) = \lambda(s) \cdot X$ amb $\lambda \in C^\infty(I)$, ja que $X \perp T(s)$ i $X \perp N(s)$. Així $\|B(s)\| = 1 = |\lambda(s)| \cdot \|X\|$ i per tant $B(s) = \pm X/\|X\|$. En particular B és constant, i llavors $\tau = \langle B', N \rangle \equiv 0$.

Recíprocament, si $\tau \equiv 0$, primer observem que $B(s) \equiv B(s_0)$ com $B'(s) = \tau(s)N(s)$, i després calculem

$$\begin{aligned} (\langle \gamma(s) - \gamma(s_0), B(s_0) \rangle)' &= \langle \gamma'(s), B(s_0) \rangle \\ &= \langle T(s), B(s) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Doncs $\langle \gamma(s) - \gamma(s_0), B(s_0) \rangle = \langle \gamma(s_0) - \gamma(s_0), B(s_0) \rangle = 0$ i trobem que $\forall s \in I$

$$\gamma(s) \in \gamma(s_0) + \ker \langle \cdot, B(s_0) \rangle.$$

Es a dir la corba és plana. □

Teorema 1.3.1 (Fórmules de Frenet)

Sigui $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba ppla i biregular. Llavors

$$\begin{cases} T' &= & kN \\ N' &= & -kT & -\tau B \\ B' &= & \tau N \end{cases}$$

o, de forma equivalent,

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

Demostració. Només ens falta demostrar la fórmula $N' = -kT - \tau B$. Com $(T(s), N(s), B(s))$ és una base ortonormal positiva, podem escriure $N = B \wedge T$.

Lema 1.3.1

Siguin $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dues corbes parametritzades sobre el mateix interval. Llavors

$$\frac{d}{dt}(\alpha(t) \wedge \beta(t)) = \alpha'(t) \wedge \beta(t) + \alpha(t) \wedge \beta'(t).$$

Demostració. És un càlcul:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\alpha(t) \wedge \beta(t)) &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \\ \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha'_2\beta_3 - \alpha'_3\beta_2 \\ \alpha'_3\beta_1 - \alpha'_1\beta_3 \\ \alpha'_1\beta_2 - \alpha'_2\beta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2\beta'_3 - \alpha_3\beta'_2 \\ \alpha_3\beta'_1 - \alpha_1\beta'_3 \\ \alpha_1\beta'_2 - \alpha_2\beta'_1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha'(t) \wedge \beta(t) + \alpha(t) \wedge \beta'(t).\end{aligned}$$

□

Per tant $N' = B' \wedge T + B \wedge T' = (\tau N) \wedge T + B \wedge (kN) = -\tau B - kT$.

□

1.3.2 Forma canònica local

En aquesta secció donarem la interpretació geomètrica de la torsió.

Proposició 1.3.3 (Forma canònica local)

Sigui $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba biregular ppla.

Les coordenades $(x(s), y(s), z(s))$ de la corba γ dins la referència $\{\gamma(0), (T(0), N(0), B(0))\}$ s'expressen de la forma següent:

$$\begin{cases} x(s) = s - \frac{k(0)^2}{6}s^3 + o(s^3) \\ y(s) = \frac{k(0)}{2}s^2 + \frac{k'(0)}{6}s^3 + o(s^3) \\ z(s) = -\frac{k(0)\tau(0)}{6}s^3 + o(s^3). \end{cases}$$

Demostració. Busquem les funcions coordenades $x(s), y(s), z(s)$ tal que

$$\gamma(s) = \gamma(0) + x(s)T(0) + y(s)N(0) + z(s)B(0).$$

Considerem el desenvolupament de Taylor de $\gamma(s)$ d'ordre 3 en $t = 0$:

$$\gamma(s) = \gamma(0) + s\gamma'(0) + \frac{s^2}{2}\gamma''(0) + \frac{s^3}{6}\gamma'''(0) + o(s^3).$$

Com

$$\begin{cases} \gamma' = T \\ \gamma'' = kN \\ \gamma''' = k'N + kN' = k'N + k(-kT - \tau B) = -k^2T + k'N - k\tau B \end{cases}$$

resulta que

$$\gamma(s) = \gamma(0) + \left(s - \frac{k(0)^2}{6}s^3\right)T(0) + \left(\frac{k(0)}{2}s^2 + \frac{k'(0)}{6}s^3\right)N(0) - \frac{k(0)\tau(0)}{6}s^3B(0) + o(s^3).$$

Això ens dona el resultat anunciat.

□

La proposició anterior ens permet interpretar la torsió de la manera següent:

Definició 1.3.2

Sigui $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba biregular ppla.

- 1 Si $\tau(0) < 0$, la corba γ travessa en $s = 0$ el pla osculador $\gamma(0) + \text{Vect}(T(0), N(0))$ dirigint-se cap al costat que conté $B(0)$ (sentit **dextrògir**).
- 2 Si $\tau(0) > 0$, la corba γ travessa el pla osculador en sentit contrari (sentit **levògir**).

La forma canònica local ens permet intepretar igualment el pla osculador de la manera següent.

Proposició 1.3.4

Sigui $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba biregular ppla i fixem $s_0 \in I$. El pla osculador en s_0 és el límit dels plans que contenen la recta tangent a γ en s_0 i un punt $\gamma(s)$ quan $s \rightarrow s_0$.

Demostració. Suposem fent una possible translació de domini de parametrització que $s_0 = 0$, i observem que el pla osculador s'escriu $\{z = 0\}$ dins la referència $\mathcal{R} = \{\gamma(0), (T(0), N(0), B(0))\}$. Denotem Π_s el pla afí que conté la recta tangent $t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma(0) + t \cdot \gamma'(0)$ i el punt $\gamma(s)$. Aquest pla es pot descriure dins les coordenades associades a la referència $\mathcal{R}$ mitjançant l'equació

$$(\Pi_s) : a_s x + b_s y + c_s z = d_s.$$

El pla Π_s conté $\gamma(0) = (0, 0, 0)_{\mathcal{R}}$, pel que $d_s = 0$. També conté el punt $\gamma(0) + T(0) = (1, 0, 0)_{\mathcal{R}}$, per tant $a_s = 0$. En fi, la condició $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))_{\mathcal{R}} \in \Pi_s$ s'escriu $b_s y(s) + c_s z(s) = 0$.

Com la corba és biregular, en particular $k(0) > 0$ i deduïm de l'expressió

$$y(s) = \frac{k(0)}{2} s^2 + \frac{k'(0)}{6} s^3 + o(s^3)$$

que $y(s) \neq 0$ per $s \neq 0$ prou petit. Per tant $c_s \neq 0$ i podem suposar que $c_s = 1$. Al final obtenim que $(\Pi_s) : b_s y + z = 0$ amb

$$b_s = -\frac{z(s)}{y(s)}.$$

Ara bé

$$-\frac{z(s)}{y(s)} = -\frac{-\frac{k(0)\tau(0)}{6} s^3 + o(s^3)}{\frac{k(0)}{2} s^2 + \frac{k'(0)}{6} s^3 + o(s^3)} \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0,$$

i doncs $\lim_{s \rightarrow 0} \Pi_s = \{z = 0\}$. □

També obtenim una interpretació de la curvatura.

Proposició 1.3.5

La curvatura de γ en s_0 coincideix amb la curvatura de la corba plana obtinguda projectant ortogonalment γ sobre el seu pla osculador en s_0 .

Demostració. Suposem $s_0 = 0$ i considerem la forma canònica local de γ . Llavors la projecció ortogonal sobre el pla osculador a γ en s_0 s'escriu $\pi(x, y, z)_{\mathcal{R}} = (x, y)_{\mathcal{R}}$. Doncs, la corba projectada que busquem s'escriu

$$\pi \circ \gamma(s) = \left(s - \frac{k(0)^2}{6}s^3 + o(s^3), \frac{k(0)}{2}s^2 + \frac{k'(0)}{6}s^3 + o(s^3)\right).$$

Ara bé, no podem calcular la seva curvatura com la quantitat $\|(\pi \circ \gamma)''(0)\|$ donat que la corba no està ppla.

Primer observem que la curvatura de la corba plana $s \mapsto \pi \circ \gamma(s)$ coincideix amb la curvatura de la corba a l'espai $s \mapsto (\pi \circ \gamma(s), 0)$, i que són biregulars per s prou petit en el sentit de la definició 1.3.3.

Segon utilitzarem que la curvatura d'una corba biregular α es pot calcular fent servir la fórmula

$$k_{\alpha} = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

que veurem més endavant. Aquí veiem que la corba $\alpha(s) := (\pi \circ \gamma(s), 0)$ compleix

$$\alpha'(0) = (1, 0, 0) \text{ i } \alpha''(0) = k(0)(0, 1, 0),$$

del qual deduïm que

$$k_{\alpha}(0) = k(0)$$

com volíem veure. □

1.3.3 Teorema fonamental de la teoria local de les corbes

El resultat següent és fonamental: ens diu que curvatura i torsió determinen completament les corbes parametritzades per longitud d'arc llevat d'isometries positives de l'espai $\mathbb{R}^3$. Per tant aquests dues funcions (o invariants) determinen completament les corbes ppla biregulars de l'espai.

Teorema 1.3.2

Siguin $k : I \rightarrow (0, \infty)$ i $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ dues funcions de classe C^{∞} . Fixem $s_0 \in I$, un punt $p \in \mathbb{R}^3$ i una base ortonormal positiva (T_0, N_0, B_0) . Aleshores $\exists!$ corba ppla i biregular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ que compleix les condicions:

$$\begin{cases} k_{\gamma} = k, \\ \tau_{\gamma} = \tau, \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} \gamma(s_0) = p, \\ (T(s_0), N(s_0), B(s_0)) = (T_0, N_0, B_0). \end{cases}$$

Demostració. Considerem les fórmules de Frenet

$$\begin{cases} T' &= & kN \\ N' &= & -kT & -\tau B \\ B' &= & \tau N \end{cases}.$$

És un sistema d'equacions diferencials ordinàries de primer ordre *lineal*. Per tant, $\exists!$ solucions $T, N, B : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$(T(s_0), N(s_0), B(s_0)) = (T_0, N_0, B_0).$$

El fet que les solucions estiguin definides a tot l'interval I és conseqüència de la linealitat del sistema.

Provem ara que $(T(s), N(s), B(s))$ és una base ortonormal positiva per tot $s \in I$. Si posem

$$A(s) := \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad G(s) := \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(s) & T_2(s) & T_3(s) \\ N_1(s) & N_2(s) & N_3(s) \\ B_1(s) & B_2(s) & B_3(s) \end{pmatrix},$$

llavors les fórmules de Frenet es poden escriure com $G' = AG$. A banda d'això, observem que la família $(T(s), N(s), B(s))$ serà una base ortonormal positiva si i només si $G(s) \in SO(3) \iff G(s)^t G(s) \equiv I_3$, ja que $G(s_0) \in SO(3)$ i per continuïtat del determinant. Tenint en compte que $A^t = -A$, calculem

$$(G^t G)' = (G')^t G + G^t G' = (AG)^t G + G^t (AG) = G^t A^t G + G^t AG = G^t (A^t + A)G = 0.$$

Per tant la matriu producte $G^t G$ i la matriu identitat I_3 són solucions de l'equació diferencial matricial $X' = 0$ amb la condició inicial $X(s_0) = I_3$. Per unicïtat obtenim que efectivament $G(s)^t G(s) \equiv I_3$ i doncs $(T(s), N(s), B(s))$ és una base ortonormal positiva per tot $s \in I$.

Ara definim la corba buscada per

$$\gamma(s) := p + \int_{s_0}^s T(t) dt.$$

Notem que $\gamma(s_0) = p$ i $\gamma' = T$. En particular la corba γ està parametritzada per l'arc i T és el seu vector tangent. De la relació $T' = kN$ deduïm que la curvatura de γ coincideix efectivament amb k i que el seu vector normal és N . Aleshores el vector binormal de γ és $T \wedge N = B$, i la relació $B' = \tau N$ implica que τ és la torsió de γ .

L'unicïtat de la corba γ es dedueix de l'unicïtat de les solucions del sistema $G' = AG$ amb condició inicial $G(s_0) = (T_0, N_0, B_0)$ i del sistema $\gamma' = T$ amb $\gamma(s_0) = p$. $\square$

1.3.4 Triedre de Frenet i torsió en el cas general

Moltes vegades no podem explicitar la parametrització per la longitud d'arc. En aquesta secció veurem com tot i aquesta dificultat podem definir les nocions de triedre de Frenet, curvatura i torsió fent servir la parametrització donada, i calcular aquests invariants.

Definició 1.3.3

Una corba $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es diu **biregular** si compleix la condició

$$\gamma' \wedge \gamma'' \neq 0.$$

En particular, una corba biregular és regular.

Proposició 1.3.6

Sigui $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba regular. Fixem $t_0 \in I$ i recordem la funció longitud d'arc amb origen t_0 definida per

$$h := s_{t_0}(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du.$$

Sabem que h és difeomorfisme amb $h' > 0$, i que la corba $\tilde{\gamma} := \gamma \circ h^{-1} : h(I) \rightarrow \mathbb{R}^3$ és una reparametrització positiva de γ per la longitud d'arc.

Aleshores γ és biregular si i només si $\tilde{\gamma}$ és biregular:

$$\tilde{\gamma}'' \neq 0 \iff \gamma' \wedge \gamma'' \neq 0.$$

Demostració. Derivant obtenim

$$\gamma' = (\tilde{\gamma} \circ h)' = h' \cdot \tilde{\gamma}' \circ h \implies \gamma'' = h'' \cdot \tilde{\gamma}' \circ h + (h')^2 \cdot \tilde{\gamma}'' \circ h$$

i trobem la fórmula

$$\gamma' \wedge \gamma'' = (h')^3 (\tilde{\gamma}' \circ h) \wedge (\tilde{\gamma}'' \circ h).$$

Així doncs, clarament $\gamma' \wedge \gamma'' \neq 0 \implies \tilde{\gamma}'' \neq 0$.

Recíprocament, la condició $\tilde{\gamma}'' \neq 0$ permet definir el vector normal a $\tilde{\gamma}$ com $\tilde{N} = \tilde{\gamma}'' / \|\tilde{\gamma}''\|$ i tindrem $\tilde{\gamma}' \perp \tilde{\gamma}'' \implies \tilde{\gamma}' \wedge \tilde{\gamma}'' \neq 0$. Com $h' > 0$ deduïm de l'anterior fórmula que $\gamma' \wedge \gamma'' \neq 0$. $\square$

Definició 1.3.4

Sigui $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba biregular, i $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h^{-1}$ una reparametrització positiva per la longitud d'arc. Denotarem per $(\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B})$ el triedre de Frenet, $\tilde{k}$ la curvatura i $\tilde{\tau}$ la torsió de la corba $\tilde{\gamma}$. Les quantitats

$$\begin{cases} T = \tilde{T} \circ h \\ N = \tilde{N} \circ h \\ B = \tilde{B} \circ h \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} k = \tilde{k} \circ h \\ \tau = \tilde{\tau} \circ h \end{cases}$$

s'anomenen respectivament **triedre de Frenet, curvatura i torsió** de γ .

Aquestes quantitats no depenen de la reparametrització triada. En particular es poden determinar mitjançant les següents fórmules.

Proposició 1.3.7

Sigui $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba biregular. Llavors

$$\begin{cases} T = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \\ B = \frac{\gamma' \wedge \gamma''}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|} \\ N = B \wedge T \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} k = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} \\ \tau = \frac{-\langle \gamma' \wedge \gamma'', \gamma''' \rangle}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2} \end{cases}$$

Demostració. La relació $N = B \wedge T$ és evident.

En primer lloc derivem $\gamma = \tilde{\gamma} \circ h$. Fent servir que $h' = \|\gamma'\|$, obtenim

$$\gamma' = h' \cdot \tilde{\gamma}' \circ h = \|\gamma'\| \cdot \tilde{T} \circ h = \|\gamma'\| \cdot T \implies T = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}.$$

En segon lloc derivem γ' . Obtenim

$$\gamma'' = (\|\gamma'\|)' \cdot \tilde{T} \circ h + \|\gamma'\|^2 \cdot \tilde{T}' \circ h = (\|\gamma'\|)' \cdot T + k \|\gamma'\|^2 \cdot N.$$

Aleshores deduïm que

$$\gamma' \wedge \gamma'' = k \|\gamma'\|^3 \cdot T \wedge N = k \|\gamma'\|^3 B \implies \|\gamma' \wedge \gamma''\| = k \|\gamma'\|^3,$$

i doncs

$$k = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} \text{ i } B = \frac{\gamma' \wedge \gamma''}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}.$$

En tercer lloc derivem γ'' . Obtenim

$$\begin{aligned} \gamma''' &= ((\|\gamma'\|)' \cdot T + k \|\gamma'\|^2 \cdot N)' \\ &= (\|\gamma'\|)'' \cdot T + (\|\gamma'\|)' \cdot T' + (k \|\gamma'\|^2)' \cdot N + k \|\gamma'\|^2 \cdot N' \\ &= (\|\gamma'\|)'' \cdot T + (\|\gamma'\|)' \cdot k \|\gamma'\| N + (k \|\gamma'\|^2)' \cdot N + k \|\gamma'\|^2 \cdot N'. \end{aligned}$$

Llavors, fent servir les fórmules de Frenet,

$$\begin{aligned} \langle \gamma' \wedge \gamma'', \gamma''' \rangle &= \|\gamma' \wedge \gamma''\| \cdot \langle B, \gamma''' \rangle \\ &= \|\gamma' \wedge \gamma''\| \cdot k \|\gamma'\|^2 \cdot \langle B, N' \rangle \\ &= \|\gamma' \wedge \gamma''\| \cdot \left(\frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} \|\gamma'\|^2 \right) \cdot \langle B, -k \|\gamma'\| T - \tau \|\gamma'\| B \rangle \\ &= \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2}{\|\gamma'\|} \cdot (-\tau \|\gamma'\|) \\ &= -\tau \cdot \|\gamma' \wedge \gamma''\|^2 \end{aligned}$$

i per tant τ compleix la fórmula anunciada. □

El triedre de Frenet compleix fórmules similars a les fórmules de Frenet.

Proposició 1.3.8

Sigui $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba biregular. Llavors

$$\begin{cases} T' &= k \|\gamma'\| N \\ N' &= -k \|\gamma'\| T - \tau \|\gamma'\| B \\ B' &= \tau \|\gamma'\| N \end{cases}.$$

Demostració. Aquestes fórmules són conseqüències directes del fet que $h' = \|\gamma'\|$ i de les fórmules de Frenet en el cas ppla. □

SUBVARIETATS

En el primer capítol, vam considerar les corbes parametritzades com objectes centrals del nostre estudi, i en vàrem definir diversos invariants: la curvatura (definida en qualsevol dimensió), la curvatura amb signe (en dimensió 2), i el triedre de Frenet i la torsió (en dimensió 3). Una observació fonamental ha estat que aquests invariants són de fet geomètrics: no depenen de la parametrització triada en concret, sinó de la imatge de la corba (la seva traça). Això imposa algunes condicions sobre la traça d'una corba com objecte geomètric, i en el cas concret de la curvatura (l'únic invariant definit per les corbes en qualsevol dimensió), vam veure al final de la primera secció que el subconjunt de $\mathbb{R}^n$ que constitueix la traça d'una corba s'havia de poder parametritzar de forma regular per una aplicació que fos un homeomorfisme sobre la seva imatge per poder definir la seva curvatura en un punt.

En aquest capítol estudiarem la noció que generalitza aquestes corbes que admeten parametritzacions regulars injectives que són homeomorfisme sobre la seva imatge a qualsevol dimensió superior, és a dir la noció de *subvarietat*. La seva definició requereix alguns resultats previs de càlcul diferencial, interessants en si mateixos, i que presentem a continuació.

2.1

Estructura local de les immersions i submersions

En aquesta secció, fixem $m, n \in \mathbb{N}^*$, U un obert de $\mathbb{R}^m$ i $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació diferenciable de classe C^∞ .

Recordem que l'aplicació f es diu difeomorfisme local si per tot $p \in U$ existeix un entorn obert $V \subset U$ de p tal que $f|_V$ sigui un difeomorfisme¹ (i aleshores $m = n$), i que el teorema de la funció inversa afirma que f és difeomorfisme local si i només si df_p és invertible en tot $p \in U$. És a dir, f és localment invertible si i només si f és invertible infinitesimalment. Veurem ara que aquest tipus d'enunciat té anàlegs per les nocions d'injectivitat i d'exhaustivitat.

Primer definim les nocions d'injectivitat i d'exhaustivitat infinitesimal que necessitem.

¹ $f|_V$ és difeomorfisme $\iff f|_V$ invertible d'inversa C^∞

2.1.1 Definicions

Definició 2.1.1 (Immersió i submersió)

- 1 Diem que f és una **immersió** en $p \in U$ si la seva diferencial $df_p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ és injectiva. Aleshores $m \leq n$. Diem que f és una immersió sobre U si ho és en cada punt de U .
- 2 Diem que f és una **submersió** en $p \in U$ si la seva diferencial $df_p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ és exhaustiva. Aleshores $m \geq n$. Diem que f és una submersió sobre U si ho és en cada punt de U .

Exemples.

- 1 (Inclusió canònica) Quan $m \leq n$, l'aplicació

$$\begin{aligned} i : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \simeq \mathbb{R}^n \\ p = (x_1, \dots, x_m) &\mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

és una immersió, ja que $di_p = i$ és injectiva per tot p . Aleshores per tot difeomorfisme $\varphi : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ l'aplicació $\varphi \circ i$ és una immersió ja que

$$d(\varphi \circ i)_p = d\varphi_{i(p)} \circ di_p = d\varphi_{i(p)} \circ i$$

és injectiva. Veurem que tota immersió s'escriu localment d'aquesta manera.

- 2 (Projecció canònica) Quan $m \geq n$, l'aplicació

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ p = (x_1, \dots, x_m) &\mapsto (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

és una submersió perquè $d\pi_p = \pi$ és exhaustiva per tot p . Aleshores per tot difeomorfisme $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ l'aplicació $\pi \circ \varphi$ és una submersió ja que

$$d(\pi \circ \varphi)_p = \pi \circ d\varphi_p$$

és exhaustiva. Veurem que tota submersió en un punt s'escriu localment d'aquesta manera.

- 3 (Gràfica d'una funció) La gràfica de la funció f

$$\begin{aligned} \Gamma(f) : U \subset \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{m+n} \\ p &\mapsto (p, f(p)) \end{aligned}$$

és una immersió ja que $d\Gamma(f)_p = (Id_{\mathbb{R}^m}, df_p)$ és injectiva. Notem que $\Gamma(f)$ també és automàticament injectiva.

Ara recordem com descriure geomètricament de forma simple una aplicació lineal.

Proposició 2.1.1

Sigui $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Llavors $\exists B$ base de $\mathbb{R}^m$ i $\exists B'$ base de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\text{Mat}_{B,B'}(L) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostració. Sigui $r \leq \min\{m, n\}$ el rang de L . Per definició podem trobar una família de vectors $e_1, \dots, e_r$ de $\mathbb{R}^m$ tal que $(L(e_1), \dots, L(e_r))$ sigui base de $\text{Im} L$. La família $(e_1, \dots, e_r)$ és linealment independent, i es pot completar en una base $(e_1, \dots, e_r, u_{r+1}, \dots, u_m)$ de $\mathbb{R}^m$. $\forall i = r+1, \dots, m$, $\exists \lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,r} \in \mathbb{R}$ tal que $L(u_i) = \sum_{k=1}^r \lambda_{i,k} L(e_k)$, i denotem $e_i = u_i - \sum_{k=1}^r \lambda_{i,k} e_k \Rightarrow e_i \in \ker L$. Aleshores posem $B = (e_1, \dots, e_m)$ que encara serà base, i completem la família $(L(e_1), \dots, L(e_r))$ en una base B' de $\mathbb{R}^n$. La matriu de L dins aquestes bases s'escriu com s'ha enunciat. $\square$

En particular veiem que

- 1 si $I : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una immersió lineal, $\exists$ bases B, B' tal que

$$\text{Mat}_{B,B'}(I) = \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix} \iff I((x_1, \dots, x_m)_B) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)_{B'},$$

- 2 si $\Pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una submersió lineal, $\exists$ bases B, B' tal que

$$\text{Mat}_{B,B'}(\Pi) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \end{pmatrix} \iff \Pi((x_1, \dots, x_m)_B) = (x_1, \dots, x_n)_{B'}.$$

El mateix passa amb les aplicacions diferencials: només cal utilitzar difeomorfismes enlloc d'utilitzar difeomorfismes lineals (que són de fet els canvis de base).

2.1.2 Estructura local de les immersions

Comencem amb les immersions.

Teorema 2.1.1 (Estructura local de les immersions)

Suposem que $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una immersió en $p \in U$.

Existeixen $U' \subset U$ entorn obert de p , $V' \subset \mathbb{R}^n$ entorn obert de $f(U')$ i $\Phi : V' \rightarrow \Phi(V')$ difeomorfisme tals que

$$\Phi \circ f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

$$\forall q = (x_1, \dots, x_m) \in U'.$$

En particular, si f és immersió en p , f és localment injectiva.

Demostració. Recordem que $m \leq n$. Posem $v_i = df_p(e_i)$ per tot $i = 1, \dots, m$ on $(e_1, \dots, e_m)$ és la base canònica de $\mathbb{R}^m$. Com df_p és injectiva, la família de vectors $(v_1, \dots, v_m)$ és linealment independent i es pot completar en una base $(v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Definim

$$\begin{aligned} \Psi : U \times \mathbb{R}^{n-m} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto f(x_1, \dots, x_m) + \sum_{i=m+1}^n x_i \cdot v_i \end{aligned}$$

que compleix $\Psi(p, 0) = f(p)$ i és diferenciable de classe C^∞ . A més

$$d\Psi_{(p,0)} = df_p \circ \pi + \sum_{i=m+1}^n v_i \cdot e_i^* = \sum_{i=1}^m df_p(e_i) \cdot e_i^* + \sum_{i=m+1}^n v_i \cdot e_i^* = \sum_{i=1}^n v_i \cdot e_i^*$$

i trobem que $\text{Mat}_{can}(d\Psi_{(p,0)}) = (v_1 \dots v_n)$. En particular $d\Psi_p$ és invertible, i pel teorema de la funció inversa, Ψ és difeomorfisme d'un entorn obert de $(p, 0)$ sobre un entorn obert $V' \subset \mathbb{R}^n$ de $\Psi(p, 0) = f(p)$. Podem suposar l'obert $\Psi^{-1}(V')$ de la forma $U' \times W'$ amb U' entorn obert de p i W' obert de $\mathbb{R}^{n-m}$ (aquests oberts formen una base de la topologia producte). Aleshores, per construcció

$$\Psi(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = f(x_1, \dots, x_m) \iff \Psi^{-1} \circ f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

per tot $(x_1, \dots, x_m) \in U'$, i per tant el teorema és cert amb $\Phi = \Psi^{-1}$. $\square$

2.1.3 Estructura local de les submersions

Ara tractem el cas de les submersions.

Teorema 2.1.2 (Estructura local de les submersions)

Suposem que $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ és submersió en $p \in U$.

Existeixen $U' \subset U$ entorn obert de p i $\Phi : U' \rightarrow \Phi(U')$ difeomorfisme tal que

$$f \circ \Phi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\forall q = (x_1, \dots, x_m) \in \Phi(U').$$

En particular, si f és submersió en p , f és localment exhaustiva.

Demostració. Recordem que $m \geq n$. Com df_p és exhaustiva, la matriu

$$\text{Mat}_{can}(df_p) = \begin{pmatrix} \text{Mat}_{can}(df_1(p)) \\ \vdots \\ \text{Mat}_{can}(df_n(p)) \end{pmatrix}$$

té rang n . Això vol dir que la família $(df_1(p), \dots, df_n(p))$ de $(\mathbb{R}^m)^*$ és lliure, i es pot completar en una base $(df_1(p), \dots, df_n(p), \phi_{n+1}, \dots, \phi_m)$ de $(\mathbb{R}^m)^*$. Definim $\forall x \in U$

$$\Phi(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x), \phi_{n+1}(x), \dots, \phi_m(x))$$

que és diferenciable de classe C^∞ i compleix $d\Phi_p = (df_1(p), \dots, df_n(p), \phi_{n+1}, \dots, \phi_m)$. En particular $d\Phi_p$ és invertible, i pel teorema de la funció inversa, Φ és difeomorfisme d'un entorn obert U' de p sobre la seva imatge. Aleshores, per construcció

$$\pi \circ \Phi(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) = f(x)$$

on recordem que $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ és la projecció canònica, i per tant obtenim que

$$\pi \circ \Phi = f \iff f \circ \Phi^{-1} = \pi$$

i per tant el teorema és cert. $\square$

Siguin $1 \leq m \leq n$ dos nombres enters.

2.2.1 Definició

Definició 2.2.1

Diem que un subconjunt $M \subset \mathbb{R}^n$ és **subvarietat de dimensió m** si per tot $p \in M$ existeixen un entorn obert $U \subset \mathbb{R}^n$ de p i un difeomorfisme $h : U \rightarrow h(U)$ tal que

$$h(U \cap M) = h(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

L'aplicació h es diu **difeomorfisme linealitzant** de M al voltant de p .

És a dir, una subvarietat de dimensió m és un subconjunt de $\mathbb{R}^n$ localment difeomorf a un subespai vectorial de dimensió m . En particular l'imatge d'una subvarietat per un difeomorfisme és una subvarietat.

Exemple. Tot subespai vectorial de dimensió m de $\mathbb{R}^n$ és una subvarietat, i per tant tota imatge per un difeomorfisme d'un subespai vectorial de dimensió m és subvarietat. També és evident que si $M^m \subset \mathbb{R}^n$ és subvarietat i $V \subset \mathbb{R}^n$ és un obert tal que $V \cap M \neq \emptyset$, aleshores el subconjunt $V \cap M$ és igualment una subvarietat de la mateixa dimensió.

2.2.2 Caracteritzacions

El resultat següent dona diversos criteris per demostrar que un subconjunt és subvarietat.

Teorema 2.2.1

Un subconjunt M de $\mathbb{R}^n$ és una subvarietat de dimensió m si i només si compleix una de les propietats equivalents següents.

- 1 **(Gràfica)** Per tot punt p de M , existeixen un entorn obert $U \subset \mathbb{R}^n$ de p , un difeomorfisme $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$, un obert Ω de $\mathbb{R}^m$ i una funció $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^∞ tal que

$$q \in U \cap M \iff \exists x = (x_1, \dots, x_m) \in \Omega \text{ tal que } \Phi(q) = (x, f(x)) = \Gamma(f)(x)$$

És a dir, M és una subvarietat si i només si M és localment difeomorf a la gràfica d'una funció.

- 2 **(Descripció implícita)** Per tot punt p de M , existeixen un entorn obert $U \subset \mathbb{R}^n$ de p i una submersió $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ tal que

$$U \cap M = F^{-1}(0).$$

És a dir, M és una subvarietat si i només si està donada localment com la solució d'un sistema de $n - m$ equacions

$$\begin{cases} F_{m+1}(q) = 0 \\ \vdots \\ F_n(q) = 0 \end{cases}$$

sota la condició que la família de formes lineals $(dF_{m+1}(q), \dots, dF_n(q))$ sigui linealment independent a $(\mathbb{R}^m)^*$.

- 3 (Parametrització)** Per tot punt p de M , existeixen un entorn obert $U \subset \mathbb{R}^n$ de p , un obert Ω de $\mathbb{R}^m$ i una immersió $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que φ indueix un homeomorfisme

$$\varphi : \Omega \xrightarrow{\sim} U \cap M$$

de l'obert Ω sobre el subconjunt $U \cap M$ proveït amb la topologia induïda.

El parell (Ω, φ) es diu **parametrització local** de M al voltant de p , mentre que el parell $(U \cap M, \varphi^{-1})$ s'anomena **carta local** de M al voltant de p .

És a dir, M és una subvarietat si i només si M és localment l'imatge d'una immersió que sigui homeomorfisme sobre la seva imatge.

La última caracterització implica en particular que la traça d'una corba regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ no és necessàriament subvarietat de dimensió 1, i cal ser més exigent. Tal com vam comentar a la primera secció del capítol anterior, és necessari que γ sigui homeomorfisme de I sobre la seva imatge per poder elaborar correctament la geometria diferencial d'aquests subconjunts.

Demostració.

- 1** ($\implies$) Suposem que

$$q \in U \cap M \iff \Phi(q) = (x, f(x)) \text{ amb } x \in \Omega$$

per un cert difeomorfisme Φ i una aplicació $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$. Definim

$$\begin{aligned} h : \Omega \times \mathbb{R}^{n-m} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_m, x_{m+1} - f_{m+1}(x_1, \dots, x_m), \dots, x_n - f_n(x_1, \dots, x_m)) \end{aligned}$$

que compleix

$$\text{Mat}_{can}(dh) = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ * & I_{n-m} \end{pmatrix}.$$

Per tant dh és invertible en cada punt. En particular h és difeomorfisme sobre un entorn obert $V = V_1 \times V_2$ de $\Phi(p) = (x_p, f(x_p))$, i si posem $U' = U \cap \Phi^{-1}(V)$, tenim

$$\begin{aligned} q \in U' \cap M = (U \cap M) \cap \Phi^{-1}(V) &\iff \Phi(q) = (x, f(x)) \text{ per un cert } x \in \Omega \cap V_1 \\ &\iff h \circ \Phi(q) = h(x, f(x)) = (x, 0) \text{ per un cert } x \in \Omega \cap V_1 \\ &\iff h \circ \Phi(q) \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \cap h(V) = V_1 \times \{0\}. \end{aligned}$$

En particular $h \circ \Phi(U' \cap M) = h \circ \Phi(U') \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$, i $h \circ \Phi$ és difeomorfisme linealitzant.

($\Leftarrow$) Recíprocament escrivim $h(U \cap M) = \Omega \times \{0\}$ on Ω és un obert de $\mathbb{R}^m$, definim $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ per $f(x) = 0$. Llavors

$$\begin{aligned} q \in U \cap M &\iff h(q) \in h(U \cap M) = \Omega \times \{0\} \\ &\iff h(q) = (h_1(q), \dots, h_m(q), 0, \dots, 0) \in \Omega \times \{0\} \\ &\iff h(q) = \Gamma(f)(x) \text{ amb } x = (h_1(q), \dots, h_m(q)) \in \Omega \end{aligned}$$

i obtenim el resultat posant $\Phi := h$.

- 2 ($\Rightarrow$) Suposem que $U \cap M = F^{-1}(0)$ amb $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ submersió. El teorema d'estructura local ens dona un difeomorfisme $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$ (podem suposar $U' = U$) tal que

$$F \circ \Phi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_{m+1}, \dots, x_n). \quad (!!!)$$

Llavors

$$\begin{aligned} q \in U \cap M &\iff q \in U \text{ amb } F(q) = 0 \\ &\iff q \in U \text{ amb } F \circ \Phi^{-1}(\Phi(q)) = 0 \\ &\iff q \in U \text{ amb } \Phi(q) \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \\ &\iff \Phi(q) \in \Phi(U) \cap \mathbb{R}^m \times \{0\} \end{aligned}$$

i obtenim que el difeomorfisme Φ és linealitzant.

($\Leftarrow$) Si h és difeomorfisme linealitzant sobre un obert U al voltant d'un punt p , llavors $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ definida per $F(q) = (h_{m+1}(q), \dots, h_n(q))$ és una submersió com $dF = d(\pi_2 \circ h) = \pi_2 \circ dh$ amb $\pi_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ submersió lineal definida per $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_{m+1}, \dots, x_n)$. Al final obtenim que

$$q \in M \cap U \iff h(q) \in h(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \iff q \in U \text{ i } F(q) = 0.$$

- 3 ($\Rightarrow$) Suposem que $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una immersió tal que $\varphi : \Omega \xrightarrow{\sim} U \cap M$ sigui un homeomorfisme. Pel teorema d'estructura local de les immersions, per tot $p \in U \cap M$ existeix un entorn obert $\Omega' \subset \Omega$ de x , $U' \subset U$ un entorn obert de $\varphi(\Omega')$ i un difeomorfisme $h : U' \rightarrow h(U') \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$h \circ \varphi(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

per tot $(x_1, \dots, x_m) \in \Omega'$. Podem suposar que $h(U') = \Omega' \times W$ per algun obert W de $\mathbb{R}^{n-m}$. Tenim

$$\begin{aligned} q \in U' \cap M &\iff \exists! (x_1, \dots, x_m) \in \Omega' \text{ tal que } q = \varphi(x_1, \dots, x_m) \in U' \\ &\iff h(q) \in h(U') \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \end{aligned}$$

i veiem que h és linealitzant.

($\Leftarrow$) Si agafem un difeomorfisme h linealitzant M al voltant d'un punt, podem suposar que $h(U \cap M) = \Omega \times \{0\}$ amb Ω un obert de $\mathbb{R}^m$. Posem

$$\varphi = h^{-1} \circ i : \Omega \rightarrow U$$

on i és la injecció canònica. Llavors φ és una immersió injectiva, i per tant és bijectiva sobre la seva imatge. Per construcció $\varphi(\Omega) = U \cap M$. Podem triar $U \subset K$ compacte i llavors φ^{-1} és tancada doncs contínua.

□

Exemple. L'esfera unitat de $\mathbb{R}^n$ definida per

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

és una subvarietat de dimensió $n - 1$. De fet l'aplicació $F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1$ és una submersió sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ com $\text{Jac}(F) = (2x_1 \dots 2x_n)$.

Per acabar aquesta secció, anomenem les subvarietats en les quals centrarem els nostres esforços en el proper capítol.

Definició 2.2.2

Una subvarietat de dimensió 2 de $\mathbb{R}^3$ s'anomena una **superfície regular**.

Per tant una superfície regular és un subconjunt de $\mathbb{R}^3$ que admet localment parametritzacions $(\Omega, \varphi(u, v))$ regulars en el sentit que φ és immersió, i a més homeomorfisme sobre la seva imatge (en particular injectiva). Des d'aquest punt de vista les superfícies regulars són la generalització que buscàvem de les corbes regulars.

2.2.3 Parametritzacions locals d'una subvarietat

El següent criteri serà molt útil a l'hora de demostrar que un parell (Ω, φ) és efectivament una parametrització local d'una subvarietat.

Proposició 2.2.1

Siguin $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat i $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ una immersió injectiva on Ω és un obert.

Lavors (Ω, φ) és una parametrització local de M .

El punt clau de la proposició anterior és que suposem que M ja és subvarietat. Si no, no és cert com es pot veure amb l'immersió injectiva següent

$$\begin{aligned} \gamma :]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \gamma(t) := \left(\frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1 + \cos^2 t} \right). \end{aligned}$$

La seva imatge, en forma de vuit, no és subvarietat, i γ no és homeomorfisme sobre la seva imatge.

Demostració. Cal demostrar que $\varphi : \Omega \rightarrow M$ és un homeomorfisme sobre la seva imatge. Com sabem que φ és invertible (és injectiva, i per tant bijectiva sobre la seva imatge), només s'ha de comprovar que φ^{-1} és contínua.

Aquesta propietat és local, i per tant podem suposar que disposem d'un difeomorfisme linealitzant $h : U \cap M = \varphi(\Omega) \rightarrow h(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$. Aleshores l'aplicació $\Psi = \pi_1 \circ h \circ \varphi$ compleix que $d\Psi$ és bijectiva.

Més precisament, tenim en tot punt p de Ω

$$\begin{aligned} d\Psi_p(\mathbb{R}^m) &= d(\pi_1 \circ h \circ \varphi)_p(\mathbb{R}^m) \\ &= \pi_1 \circ d(h \circ \varphi)_p(\mathbb{R}^m), \end{aligned}$$

i com $h \circ \varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$ i que $d(h \circ \varphi)_p$ és injectiva, obtenim que $d(h \circ \varphi)_p(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m \times \{0\}$, i per tant

$$\begin{aligned} d\Psi_p(\mathbb{R}^m) &= \pi_1(\mathbb{R}^m \times \{0\}) \\ &= \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Doncs $d\Psi_p$ és exhaustiva, i doncs bijectiva.

Pel teorema de la funció inversa, l'aplicació Ψ és invertible localment i la seva inversa Ψ^{-1} és de classe C^∞ . Per tant trobem que localment podem escriure sempre

$$\varphi^{-1} = \Psi^{-1} \circ \pi \circ h|_{\varphi(\Omega)}$$

que és C^∞ , i en particular contínua. □

Exemple. (Coordenades esfèriques) Si considerem $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, ja sabem que és una subvarietat de dimensió 2. Considerem l'aplicació $\varphi : \Omega := (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{S}^2$ definida per la fórmula

$$\varphi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u).$$

Podem veure fàcilment que φ és injectiva, i calcular

$$\text{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v \\ -\sin u & 0 \end{pmatrix}$$

que té sempre rang 2 i doncs φ és immersió. Per tant fent servir la proposició anterior obtenim que (Ω, φ) és una parametrització local.

Ara demostrarem la propietat següent que vam comentar al capítol anterior: si tenim dues parametritzacions regulars d'una subvarietat de dimensió 1 al voltant d'un mateix punt, llavors localment les parametritzacions són reparametritzacions l'una de l'altra. De fet això és cert en qualsevol dimensió, i serà fonamental a l'hora de generalitzar la noció de subvarietats a la noció de varietats.

Proposició 2.2.2

Siguin (Ω_1, φ_1) i (Ω_2, φ_2) dues parametritzacions locals d'una subvarietat M de $\mathbb{R}^n$. Llavors $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(\varphi_1(\Omega_1) \cap \varphi_2(\Omega_2)) \rightarrow \varphi_2^{-1}(\varphi_1(\Omega_1) \cap \varphi_2(\Omega_2))$ és un difeomorfisme.

Demostració. Només cal demostrar que $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ és diferenciable de classe C^∞ (la seva inversa $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ ho serà automàticament intervertint els índexos), ja que $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ és bijectiva de $\varphi_1^{-1}(\varphi_1(\Omega_1) \cap \varphi_2(\Omega_2))$ sobre $\varphi_2^{-1}(\varphi_1(\Omega_1) \cap \varphi_2(\Omega_2))$ com cada φ_i és homeomorfisme sobre la seva imatge. La propietat de diferenciabilitat és local, i per tant podem suposar que disposem d'un difeomorfisme linealitzant

$$h : \varphi_1(\Omega_1) \cap \varphi_2(\Omega_2) \subset M \rightarrow h(\varphi_1(\Omega_1) \cap \varphi_2(\Omega_2)) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}.$$

Aleshores per cada $i = 1, 2$ l'aplicació $\pi \circ h \circ \varphi_i$ és un difeomorfisme local: en tot punt p , tenim que $d(\pi \circ h \circ \varphi_i)_p(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$, i per tant

$$d(\pi \circ h \circ \varphi_i)_p$$

és exhaustiva, i doncs bijectiva. Això ens assegura que $\pi \circ h \circ \varphi_i$ és un difeomorfisme local, i com és injectiva, deduïm que és difeomorfisme i que la seva inversa és de classe C^∞ .

Al final obtenim que

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = (\pi \circ h \circ \varphi_2)^{-1} \circ (\pi \circ h \circ \varphi_1)$$

és de classe C^∞ . □

2.2.4 Espai tangent a una subvarietat

Definició 2.2.3

Sigui $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat i $p \in M$.

Si $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ és una corba diferenciable de classe C^∞ tal que $\gamma(0) = p$, diem que el vector $\gamma'(0)$ és **tangent** a M en p .

El conjunt de tots els vectors tangents a M en p s'anomena **espai tangent** a M en p i es denota per

$$T_p M := \{\gamma'(0) \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{C^\infty} M \text{ tal que } \gamma(0) = p\}$$

El resultat següent ens permetrà determinar fàcilment l'espai tangent d'una subvarietat presentada implícitament o paramètricament.

Proposició 2.2.3

Sigui $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat i $p \in M$.

- 1 Si (Ω, φ) és una parametrització local de M al voltant de p , llavors

$$T_p M = \text{Im} d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}.$$

- 2 Si $U \subset \mathbb{R}^n$ és un entorn obert de p i $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ una submersió tal que $F^{-1}(0) = U \cap M$, llavors

$$T_p M = \ker dF_p.$$

En particular $T_p M$ és subespai vectorial de dimensió m de $\mathbb{R}^n$.

Demostració. Primer observem que per tot $X = d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}(Y) \in \text{Im} d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}$, la corba $\gamma : t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \varphi(\varphi^{-1}(p) + tY) \in M$ està ben definida per ε prou petit, i compleix $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}(Y) = X$. Per tant tenim la inclusió $\text{Im} d\varphi_{\varphi^{-1}(p)} \subset T_p M$.

En segon lloc si $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ és una corba diferenciable de classe C^∞ tal que $\gamma(0) = p$, podem suposar ε prou petit perquè $F(\gamma(t))$ sigui ben definit, i aleshores derivant en 0 obtenim $dF_p(\gamma'(0)) = 0$. Així doncs, tenim la doble inclusió

$$\underbrace{\text{Im} d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}}_{\dim=m} \subset T_p M \subset \underbrace{\ker dF_p}_{\dim=m},$$

i concloem fent servir les dimensions. □

Exemple. Calculem el tangent a $\mathbb{S}^2$ en un punt p fent servir els dos punts de la proposició anterior.

- 1 Recordem la parametrització (Ω, φ) on $\Omega := (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ i

$$\varphi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u).$$

Vam observar que

$$\text{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v \\ -\sin u & 0 \end{pmatrix}$$

i per tant si $p = \varphi(u, v)$ aleshores

$$T_p M = \text{Im} d\varphi_{(u,v)} = \text{Vect} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right).$$

- 2 Recordem que $\mathbb{S}^2 = F^{-1}(0)$ amb $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ submersió sobre $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Com $\text{Jac}(F) = (2x_1 \ 2x_2 \ 2x_3)$, obtenim per qualsevol $p = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$ que

$$T_p \mathbb{S}^2 = \{X = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3 \mid dF_p(X) = 2(x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3) = 0\} = p^\perp.$$

En el cas d'una superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$, si $(\Omega, \varphi = \varphi(u, v))$ és una parametrització local de S al voltant d'un punt p , denotarem per

$$\varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad \text{i} \quad \varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

els **vectors coordenades** que formen una base de $T_p S = \text{Im} d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}$

2.2.5 Aplicacions diferenciables

Definició 2.2.4

Sigui $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat, $p \in M$ i $k \in \mathbb{N}^*$.

Una aplicació $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ es diu **diferenciable en p** si, per a tota parametrització local (Ω, φ) de M al voltant de p , l'aplicació $f \circ \varphi$ és diferenciable en $\varphi^{-1}(p)$.

L'aplicació $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ es diu **diferenciable** si ho és en cada punt de M .

Observacions.

- 1 Per comprovar que una aplicació $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ és diferenciable en un punt p de M , només cal comprovar-ho per una parametrització local (Ω, φ) al voltant de p . Més precisament, si (Ω', ψ) és una altra parametrització local al voltant de p , sabem que l'aplicació $\varphi^{-1} \circ \psi$ és un difeomorfisme, i per tant $f \circ \psi = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)$ és diferenciable en $\psi^{-1}(p)$ si i només si $f \circ \varphi$ ho és en $\varphi^{-1}(p)$.
- 2 Evidentment la restricció a M d'una aplicació diferenciable $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ definida sobre un obert U que conté M és automàticament diferenciable sobre M .

Proposició 2.2.4

Sigui $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ una aplicació diferenciable, i $\gamma : I \rightarrow M$ una corba de classe C^∞ .

Aleshores la corba $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^k$ és de classe C^∞ .

Demostració. Fixem $t_0 \in I$ i triem una parametrització local (Ω, φ) de M al voltant de $\gamma(t_0)$. Pel teorema d'estructura local de les immersions, $\exists \Phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ difeomorfisme d'un entorn obert U de $\gamma(t_0)$ sobre la seva imatge tal que

$$\Phi \circ \varphi(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

per tot $(x_1, \dots, x_m) \in \varphi^{-1}(U \cap M)$. En particular observem que Φ és difeomorfisme linealitzant de M . Fent una possible restricció de Ω podem suposar que $\varphi(\Omega) \subset U$.

Triem I' un subinterval obert de I tal que $t_0 \in I'$ i $\gamma(I') \subset \varphi(\Omega)$, i definim m funcions

$$u_1, \dots, u_m : I' \rightarrow \mathbb{R}$$

per la condició

$$(u_1(t), \dots, u_m(t)) := \varphi^{-1}(\gamma(t))$$

per tot $t \in I'$. Com $\Phi \circ \varphi(u_1(t), \dots, u_m(t)) = (u_1(t), \dots, u_m(t), 0, \dots, 0)$ veiem que

$$(u_1(t), \dots, u_m(t), 0, \dots, 0) = \Phi \circ \gamma(t)$$

i que per tant les funcions $u_1, \dots, u_m$ són de classe C^∞ com Φ et γ ho són.

Finalment escrivim que

$$f \circ \gamma(t) = f \circ \Phi^{-1} \circ \Phi \circ \gamma(t) = f \circ \Phi^{-1} \circ \Phi \circ \varphi(u_1(t), \dots, u_m(t)) = f \circ \varphi(u_1(t), \dots, u_m(t))$$

per tot $t \in I'$, i podem concloure que $f \circ \gamma$ és de classe C^∞ sobre I' com a composició de les aplicacions $f \circ \varphi$ i $t \in I' \mapsto (u_1(t), \dots, u_m(t))$ que ho són. $\square$

Proposició 2.2.5

Sigui $f : M^m \subset \mathbb{R}^n \rightarrow N \subset \mathbb{R}^k$ una aplicació diferenciable, i p un punt de M .

Per tota corba $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ de classe C^∞ tal que $\gamma(0) = p$, el valor

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(\gamma(t))$$

depèn només del vector tangent X , i ho denotarem $df_p(X)$.

En particular l'aplicació

$$\begin{aligned} df_p : T_p M &\rightarrow T_{f(p)} N \\ X &\mapsto df_p(X) := \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(\gamma(t)) \end{aligned}$$

on $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ és qualsevol corba tal que $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = X$ és una aplicació lineal ben definida que s'anomena **aplicació tangent, o diferencial**, de f en p .

Demostració. Ja sabem per la proposició anterior que la funció $f \circ \gamma$ està de classe C^∞ . Comprovem que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(\gamma(t))$$

no depèn efectivament de la corba triada. Suposem que $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ és difeomorfisme linealitzant de M al voltant de p tal que $h(U) = \Omega_1 \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ (sempre ho podem suposar per definició de la topologia producte). Posem per tot $q \in U$

$$\bar{f}(q) = f \circ h^{-1} \circ \pi \circ h(q),$$

és a dir que si $h(q) = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ definim $\bar{f}(q) = f \circ h^{-1}(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$. Aleshores l'aplicació $\bar{f} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és diferenciable i, com f i $\bar{f}$ coincideixen sobre $U \cap M$,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(\gamma(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \bar{f}(\gamma(t)) = d\bar{f}_p(X),$$

valor que no depèn de la corba triada. □

És un exercici veure que la regla de la cadena es compleix per l'aplicació tangent: si $g : M^m \subset \mathbb{R}^n \rightarrow N^p \subset \mathbb{R}^k$ i $f : N^p \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ són aplicacions diferenciables entre subvarietats, llavors per tot $p \in M$ tenim la igualtat

$$d(f \circ g)_p = df_{g(p)} \circ dg_p.$$

SUPERFÍCIES REGULARS

Sigui S una superfície regular i fixem $p \in S$. Recordem que una superfície regular és una subvarietat de dimensió 2 de $\mathbb{R}^3$.

3.1

Primera forma fonamental

3.1.1 Definició

Definició 3.1.1

El producte escalar de $\mathbb{R}^3$ definit per $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^3 X_i Y_i$ induïx un producte escalar

$$\begin{aligned} I_p : T_p S \times T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto \langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

sobre l'espai tangent anomenat **primera forma fonamental** de S en p .

Si (Ω, φ) és parametrització local de S al voltant de p , recordem que els vectors coordenades $\varphi_u = \partial\varphi/\partial u$ i $\varphi_v = \partial\varphi/\partial v$ formen una base de $T_p M = \text{Im} d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}$, i escriurem

$$\text{Mat}_{(\varphi_u, \varphi_v)}(I_p) = \begin{pmatrix} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \\ \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix}.$$

Quan no hi hagi risc de confusió denotarem simplement I_p la matriu $\text{Mat}_{(\varphi_u, \varphi_v)}(I_p)$.

Exemples.

- 1 Considerem la superfície regular $\mathbb{S}_R^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\} \subset \mathbb{R}^3$ i fixem la parametrització local (Ω, φ) amb $\Omega = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ i $\varphi(u, v) = R(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$. Llavors

calculem fàcilment

$$I_p = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 u \end{pmatrix}.$$

- 2 El cilindre $\{x^2 + y^2 = 1\}$ és una superfície regular que admet com a parametrització $\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ amb $(u, v) \in \Omega = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ per exemple. Aleshores

$$I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.1.2 Calcul de longitud

Aquesta forma fonamental ens permet calcular la longitud d'una corba de la qual la traça està continguda dins una carta local.

Proposició 3.1.1

Sigui (Ω, φ) una parametrització local de S , i $\gamma : I \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ una corba tal que la seva traça compleix $\gamma(I) \subset \varphi(\Omega)$. Si posem $(u(t), v(t)) = \varphi^{-1}(\gamma(t))$, recordem que les funcions u, v són automàticament dins $C^\infty(I)$ i fixem $[a, b] \subset I$.

Aleshores la longitud de γ de a a b està donada per la fórmula:

$$\ell(\gamma|_{[a,b]}) = \int_a^b \sqrt{E(u(t), v(t))(u'(t))^2 + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t), v(t))(v'(t))^2} dt,$$

o, de forma més condensada,

$$\ell(\gamma|_{[a,b]}) = \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2} dt.$$

Demostració. Tenim

$$\gamma'(t) = u'(t)\varphi_u(u(t), v(t)) + v'(t)\varphi_v(u(t), v(t)),$$

i per tant

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} \\ &= \sqrt{E(u(t), v(t))(u'(t))^2 + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t), v(t))(v'(t))^2}. \end{aligned}$$

Deduïm el resultat de la definició de la longitud: $\ell(\gamma|_{[a,b]}) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$. □

El resultat anterior és sobretot interessant quan la corba està ja donada en coordenades locals com en l'exemple a continuació.

Exemple. Considerem la superfície anterior $\mathbb{S}_R^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\} \subset \mathbb{R}^3$ i la seva parametrització local (Ω, φ) donada per $\varphi : (u, v) \in \Omega = (0, \pi) \times (0, 2\pi) \mapsto R(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$. Per qualsevol $\theta_0 \in (0, \pi)$, definim la corba parametritzada $\gamma_{\theta_0} : (0, 2\pi) \rightarrow S$ per

$$\gamma(t) = \varphi(\theta_0, t).$$

Lavors $u(t) = \theta_0$ i $v(t) = t$, i la proposició anterior ens permet calcular per a tot interval $[a, b] \subset (0, 2\pi)$ la longitud següent:

$$\begin{aligned}\ell(\gamma|_{[a,b]}) &= \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v'^2)} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{R^2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 + R^2 \sin^2 \theta_0 \cdot 1^2} dt \\ &= (b-a)R \sin \theta_0.\end{aligned}$$

En particular observem que la longitud total del paral·lel $\overline{\gamma((0, 2\pi))}$ val $2\pi \sin \theta_0$.

3.1.3 Àrea en coordenades locals

Definició 3.1.2

Un subconjunt $D \subset S$ s'anomena **domini** si

- D és un obert connex per la topologia induïda;
- $\partial D = \gamma_1 \sqcup \dots \sqcup \gamma_k$ amb $k \in \mathbb{N}$ i els γ_i 's són corbes diferenciables a troços per tot $i = 1, \dots, k$, amb el conveni que $k = 0 \iff \partial D = \emptyset$.

L'unió $\mathcal{R} := D \cup \partial D$ s'anomena **regió**.

Considerem el paral·lelogram

$$P := \{sX + tY \mid (s, t) \in [0, 1]^2\}$$

determinat per dos vectors X i Y de $\mathbb{R}^3$. Aquest subconjunt té àrea

$$\text{Àrea}(P) = \|X\| \|Y\| \sin \theta$$

on $\theta \in [0, \pi]$ està determinat per la condició $\langle X, Y \rangle = \|X\| \|Y\| \cos \theta$. Però recordem que $\|X \wedge Y\| = \|X\| \|Y\| \sin \theta$ i per tant trobem la fórmula

$$\text{Àrea}(P) = \|X \wedge Y\|.$$

Això ens ajuda a entendre la següent definició.

Definició 3.1.3

Siguin (Ω, φ) parametrització local de S i $\mathcal{R}$ una regió compacta de S de domini associat D tal que $\mathcal{R} \subset \varphi(\Omega)$.

Definim l'**àrea** de la regió $\mathcal{R}$ com

$$\text{Àrea}^\varphi(\mathcal{R}) := \int_{\varphi^{-1}(D)} \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du dv.$$

Comprovem en el proper resultat que aquesta definició no depèn de la parametrització triada, i que podrem escriure $\text{Àrea}(\mathcal{R})$ sense fer cap referència a la parametrització φ .

Proposició 3.1.2

Siguin (Ω, φ) una parametrització local de S i $\mathcal{R}$ una regió compacta de S de domini associat D tal que $\mathcal{R} \subset \varphi(\Omega)$.

Aleshores primer

$$\text{Àrea}^\varphi(\mathcal{R}) = \int_{\varphi^{-1}(D)} \sqrt{EG - F^2} \, dudv,$$

i en segon lloc aquesta quantitat no depèn de la parametrització triada.

Demostració. Pel primer punt, denotem θ l'angle dins $[0, \pi]$ determinat per l'equació $\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \|\varphi_u\| \|\varphi_v\| \cos \theta$ i calculem

$$\begin{aligned} \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 &= \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 \sin^2 \theta \\ &= \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 \\ &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 \\ &= EG - F^2 \end{aligned}$$

i veiem que la fórmula anunciada és correcta.

El segon punt necessita més feina. Sigui (Ω', ψ) una segona parametrització de S que compleix $\mathcal{R} \subset \psi(\Omega')$. Fent una possible reducció dels oberts Ω i Ω' , suposarem que $\varphi(\Omega) = \psi(\Omega')$. Sabem que l'aplicació

$$\begin{aligned} h &:= \psi^{-1} \circ \varphi : \Omega \rightarrow \Omega' \\ (u, v) &\mapsto h(u, v) = (\bar{u}, \bar{v}) \end{aligned}$$

és un difeomorfisme tal que $h(\varphi^{-1}(\mathcal{R})) = \psi^{-1}(\mathcal{R})$. L'aplicació h es pot interpretar com un canvi de variables i donat que $d\bar{u}d\bar{v} = |\det \text{Jac}(h)| dudv$ obtenim

$$\int_{\psi^{-1}(D)} \sqrt{E_\psi G_\psi - F_\psi^2} \, d\bar{u}d\bar{v} = \int_{\varphi^{-1}(D)} \sqrt{E_\psi G_\psi - F_\psi^2} \circ h \, |\det \text{Jac}(h)| dudv.$$

Lema 3.1.1

Si I_φ i I_ψ són les matrius que representen la forma fonamental de S en les bases (φ_u, φ_v) i $(\psi_{\bar{u}}, \psi_{\bar{v}})$ respectivament, llavors

$$I_\varphi = \text{Jac}(h)^t \cdot (I_\psi \circ h) \cdot \text{Jac}(h).$$

Demostració. De la relació $\varphi(u, v) = \psi(h_1(u, v), h_2(u, v))$ obtenim

$$\begin{cases} \varphi_u = \frac{\partial h_1}{\partial u} \times \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} \circ h + \frac{\partial h_2}{\partial u} \times \frac{\partial \psi}{\partial \bar{v}} \circ h \\ \varphi_v = \frac{\partial h_1}{\partial v} \times \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} \circ h + \frac{\partial h_2}{\partial v} \times \frac{\partial \psi}{\partial \bar{v}} \circ h \end{cases}$$

i observem que $\text{Jac}(h)$ és la matriu de canvi entre les bases (φ_u, φ_v) i $(\psi_{\bar{u}}, \psi_{\bar{v}})$. De la fórmula del canvi de base de la representació matricial d'una forma quadràtica deduïm el resultat. $\square$

Al final calculem

$$\det I_\varphi = \det(\text{Jac}(h))^2 \cdot \det(I_\psi) \circ h,$$

i com

$$\det I_\varphi = E_\varphi G_\varphi - F_\varphi^2 \quad \text{i} \quad \det(I_\psi) = E_\psi G_\psi - F_\psi^2,$$

deduïm el resultat:

$$\int_{\psi^{-1}(D)} \sqrt{E_\psi G_\psi - F_\psi^2} \, d\bar{u}d\bar{v} = \int_{\varphi^{-1}(D)} \sqrt{E_\varphi G_\varphi - F_\varphi^2} \, dudv.$$

□

Exemple. Considerem la superfície anterior $\mathbb{S}_R^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\} \subset \mathbb{R}^3$ i la seva parametrització local (Ω, φ) donada per $\varphi : (u, v) \in \Omega = (0, \pi) \times (0, 2\pi) \mapsto R(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$. El subconjunt $\mathbb{S}_R^2$ és una regió compacta associada al domini $D := \varphi(\Omega)$, donat que D és un obert com φ és homeomorfisme sobre la seva imatge, i que $\mathbb{S}_R^2 = \overline{\varphi(\Omega)}$. Llavors, calculem

$$\text{Àrea}(\mathbb{S}_R^2) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \cdot R^2 \sin^2 u - 0^2} \, dudv = 4\pi R^2.$$

3.1.4 Isometries entre superfícies

Siguin $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ dues superfícies regulars, i $f : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicació diferenciable.

Definició 3.1.4

L'aplicació f es diu **isometria local** si per tot $p \in S_1$ la diferencial $df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ és isometria, és a dir compleix $\forall X, Y \in T_p S_1$ la igualtat

$$\langle df_p(X), df_p(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

Diem que f és **isometria** si a més f és invertible.

Observacions.

- 1 f isometria local $\implies \forall p \in S_1, df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ és invertible. Llavors es pot demostrar, prenent parametritzacions locals, que f és localment invertible.
- 2 Si f és isometria, f^{-1} ho és.

Ara analitzarem com una isometria preserva les longituds i les àrees. En el cas de les longituds, tenim una caracterització de les isometries locals.

Proposició 3.1.3

$[f \text{ és isometria local}] \iff [f \text{ preserva les longituds: } \forall \gamma \text{ corba sobre } S_1, \ell(f \circ \gamma) = \ell(\gamma)].$

Demostració. Si f és isometria local, llavors

$$\|\gamma'(t)\|_1 = \|df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\|_2 = \|(f \circ \gamma)'(t)\|_2,$$

fórmula de la qual deduïm per integració que γ i $f \circ \gamma$ tenen la mateixa longitud.

Recíprocament, si f conserva les longituds, aleshores $\forall p \in S_1$ i $\forall X \in T_p S_1$ sigui $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$ tal que $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = X$. Tenim per tot $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\int_0^t \|\gamma'(u)\|_1 du = \int_0^t \|(f \circ \gamma)'(u)\|_2 du$$

i derivant aquesta relació en $t = 0$ obtenim

$$\|\gamma'(0)\|_1 = \|df_{\gamma(0)}(\gamma'(0))\|_2 \iff \|X\|_1 = \|df_p(X)\|_2.$$

Així la diferencial df_p preserva la norma, i doncs preserva el producte escalar via la identitat de polarització. $\square$

Proposició 3.1.4

$[f \text{ és isometria}] \implies [f \text{ preserva les àrees}]$.

Demostració. Sigui $R \subset S_1$ una regió compacta i $(\Omega, \varphi(u, v))$ una parametrització local de S_1 tal que $R \subset \varphi(\Omega)$. Com f és isometria, $f \circ \varphi : \Omega \rightarrow f(\varphi(\Omega))$ és diferenciable, injectiva i immersió. Això implica que $(\Omega, \psi := f \circ \varphi)$ és una parametrització local de S_2 i compleix $f(R) \subset \psi(\Omega)$. De la relació $\psi = f \circ \varphi$, veiem que

$$\psi_u = df(\varphi_u) \quad \text{i} \quad \psi_v = df(\varphi_v).$$

Així

$$E_\psi = \langle \psi_u, \psi_u \rangle = \langle df(\varphi_u), df(\varphi_u) \rangle = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = E_\varphi,$$

i de la mateixa manera $F_\psi = F_\varphi$ i $G_\psi = G_\varphi$. Aleshores

$$\text{Àrea}(R) = \int_{\varphi^{-1}(D)} \sqrt{E_\varphi G_\varphi - F_\varphi^2} du dv = \int_{(f \circ \varphi)^{-1}(f(D))} \sqrt{E_\psi G_\psi - F_\psi^2} du dv = \text{Àrea}(f(R)).$$

$\square$

Sigui S una superfície regular.

3.2.1 Orientació de les superfícies

Denotem $\mathbb{S}^2$ la esfera de radi 1 centrada a l'origen de l'espai $\mathbb{R}^3$ definida per

$$\mathbb{S}^2 := \{p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Definició 3.2.1

Diem que S és **orientable** si existeix una aplicació $\nu : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ diferenciable de classe C^∞ tal que per tot $p \in S$

$$\nu(p) \in (T_p S)^\perp \iff T_p S = \nu(p)^\perp.$$

Una tal aplicació ν es diu **aplicació de Gauss** o **camp normal unitari** de S .

Si S és orientable per un camp normal unitari ν , llavors S admet exactament dos camps normals unitaris que seran ν i $-\nu$, ja que $\dim(T_p S)^\perp = 1$. L'elecció d'un camp normal unitari d'una superfície orientable s'anomena **orientació** de S .

Si S és **orientada** per un camp normal unitari ν , llavors $\forall p \in S$ i $X, Y \in T_p S$, diem que (X, Y) és **base positiva** de $T_p S$ si es compleix la condició:

$$\det(X, Y, \nu(p)) > 0.$$

Exemples.

- 1 La esfera $\mathbb{S}^2$ és una superfície regular orientable, i un exemple d'orientació és el vector normal unitari definit per tot $p \in \mathbb{S}^2$ com

$$\nu(p) = p,$$

perquè $T_p \mathbb{S} = \text{Vect}(p)^\perp$ i $\|p\| = 1$.

- 2 Localment sempre existeix una orientació. Precisament, si $(\Omega, \varphi = \varphi(u, v))$ és una parametrització local de S , llavors

$$\nu(\varphi(u, v)) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(u, v)$$

és, per construcció, un camp normal unitari tal que $(\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v))$ sigui base positiva de $T_{\varphi(u, v)} S$ en cada punt de $\varphi(\Omega)$.

- 3 La banda de Moebius no és orientable com veurem a classe de problemes.

El resultat següent relaciona les orientacions locals (que existeixen sempre) amb l'orientació global.

Proposició 3.2.1

Si existeix una col·lecció de parametritzacions locals $\{(\Omega_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de S tal que

$$S = \cup_{i \in I} \varphi_i(\Omega_i)$$

i tal que per tot $i \neq j \in I^2$

$$\det \text{Jac}(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i) > 0$$

sobre $\varphi_i^{-1}(\varphi_i(\Omega_i) \cap \varphi_j(\Omega_j))$, aleshores S és orientable.

Demostració. Vam veure que si posem $h = (h_1, h_2) := \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ llavors escrivint $\varphi_i = \varphi_j \circ h$ obtenim

$$\begin{cases} (\varphi_i)_u = \frac{\partial h_1}{\partial u}(\varphi_j)_{\bar{u}} \circ h + \frac{\partial h_2}{\partial u}(\varphi_j)_{\bar{v}} \circ h \\ (\varphi_i)_v = \frac{\partial h_1}{\partial v}(\varphi_j)_{\bar{u}} \circ h + \frac{\partial h_2}{\partial v}(\varphi_j)_{\bar{v}} \circ h \end{cases} \iff \begin{pmatrix} (\varphi_i)_u \\ (\varphi_i)_v \end{pmatrix} = \text{Jac}(h)^t \begin{pmatrix} (\varphi_j)_{\bar{u}} \\ (\varphi_j)_{\bar{v}} \end{pmatrix} \circ h.$$

Per tant si $\det \text{Jac}(h)^t = \det \text{Jac}(h) > 0$ deduïm que

$$\nu_i \circ \varphi_i = \frac{(\varphi_i)_u \wedge (\varphi_i)_v}{\|(\varphi_i)_u \wedge (\varphi_i)_v\|} = \frac{(\varphi_j)_{\bar{u}} \wedge (\varphi_j)_{\bar{v}}}{\|(\varphi_j)_{\bar{u}} \wedge (\varphi_j)_{\bar{v}}\|} \circ h = \nu_j \circ \varphi_j \circ h = \nu_j \circ \varphi_i,$$

és a dir que $\nu_i = \nu_j$ sobre el domini $\varphi_i(\Omega_i) \cap \varphi_j(\Omega_j)$. Per tant podem definir un camp normal unitari posant per tot $p \in S$

$$\nu(p) = \nu_i(p)$$

si $p \in \varphi_i(S)$. Aquesta aplicació està ben definida, de classe C^∞ i defineix un camp normal unitari sobre S . $\square$

Per acabar introduïm la definició següent.

Definició 3.2.2

Suposem S orientada per ν camp normal unitari. Una parametrització local (Ω, φ) de S es diu **compatible amb l'orientació** si tenim

$$\nu(p) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$$

per tot $p = \varphi(u, v) \in \varphi(\Omega)$.

3.2.2 Definició de la segona forma fonamental

En aquesta secció suposarem S orientada per un camp normal unitari $\nu : S \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ i fixarem $p \in S$.

Definició 3.2.3

Via la igualtat $T_p S = T_{\nu(p)} \mathbb{S}^2 (= (\nu(p))^\perp)$, obtenim que l'aplicació lineal

$$\begin{aligned} W_p : T_p S &\rightarrow T_{\nu(p)} \mathbb{S}^2 \\ X &\mapsto -d\nu_p(X) \end{aligned}$$

és un endomorfisme de $T_p S$ conegut com **endomorfisme de Weingarten**, i l'aplicació bilineal associada

$$\begin{aligned} \Pi_p : T_p S \times T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto \Pi_p(X, Y) := I_p(W_p(X), Y) = -\langle d\nu_p(X), Y \rangle \end{aligned}$$

s'anomena **segona forma fonamental** de S en p .

Observem que si coneixem la primera forma fonamental I_p , determinar l'endomorfisme de Weingarten W_p és estrictament equivalent a determinar la segona forma fonamental Π_p .

Exemples.

- 1 Si $\{z = 0\}$, llavors $\nu \equiv (0, 0, 1)$ i deduïm $W \equiv 0$ i $\Pi \equiv 0$.
- 2 Sobre $\mathbb{S}^2$ podem escollir el camp normal unitari $\nu(p) = p$, es a dir $\nu = Id_{\mathbb{S}^2}$. Llavors

$$W_p = -Id_{T_p \mathbb{S}^2} \quad \text{i} \quad \Pi_p = -I_p.$$

- 3 Considerem el cilindre $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ orientat per el camp normal unitari

$$\nu(x, y, z) = (x, y, 0).$$

Fixem $u_0 \in \mathbb{R}$ i considerem la parametrització local

$$\begin{aligned} \varphi : (u_0, u_0 + 2\pi) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{C} \\ (u, v) &\mapsto \varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v). \end{aligned}$$

Veiem que

$$-\nu \circ \varphi(u, v) = -(\cos u, \sin u, 0) \implies \begin{cases} -d\nu(\varphi_u) = -(-\sin u, \cos u, 0) = -\varphi_u \\ -d\nu(\varphi_v) = 0 \end{cases}$$

i llavors, utilitzant que (φ_u, φ_v) és ortonormal, obtenim

$$\text{mat}_{(\varphi_u, \varphi_v)}(W_p) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \text{mat}_{(\varphi_u, \varphi_v)}(\Pi_p) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El resultat següent és fonamental i ens permetra definir les diferents nocions de curvatures.

Proposició 3.2.2

La segona forma fonamental és simètrica, o de forma equivalent, l'endomorfisme W_p és autoadjunt:

$$\Pi_p(X, Y) = \langle W_p(X), Y \rangle = \langle X, W_p(Y) \rangle = \Pi_p(Y, X)$$

per tot $X, Y \in T_p S$.

Demostració. Sigui (Ω, φ) una parametrització local de S al voltant de $p = \varphi(u_0, v_0)$. Per linealitat de W_p i simetria del producte escalar, només cal demostrar la igualtat pel parell (φ_u, φ_v) , ja que és base de $T_p S$. Recordem que

$$\begin{aligned} W_p(\varphi_u) &= -d\nu_p(\varphi_u) \\ &= -\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \nu(\varphi(u_0 + t, v_0)) \\ &= -\frac{\partial \nu \circ \varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \end{aligned}$$

i de la mateixa manera $W_p(\varphi_v) = -\frac{\partial \nu \circ \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$. Observem que

$$\langle \nu \circ \varphi(u, v), \varphi_u(u, v) \rangle = 0 \xrightarrow{\partial/\partial v} \langle \partial(\nu \circ \varphi)/\partial v, \varphi_u \rangle + \langle \nu \circ \varphi, \varphi_{vu} \rangle = 0,$$

i de la mateixa manera $\langle \partial(\nu \circ \varphi)/\partial u, \varphi_v \rangle + \langle \nu \circ \varphi, \varphi_{uv} \rangle = 0$. Llavors, tenint en compte que $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$,

$$\begin{aligned} \langle W_p(\varphi_u), \varphi_v \rangle &= -\langle \partial(\nu \circ \varphi)/\partial u, \varphi_v \rangle \\ &= \langle \nu \circ \varphi, \varphi_{uv} \rangle \\ &= \langle \nu \circ \varphi, \varphi_{vu} \rangle \\ &= -\langle \partial(\nu \circ \varphi)/\partial v, \varphi_u \rangle \\ &= \langle W_p(\varphi_v), \varphi_u \rangle \end{aligned}$$

i concloem fent servir la simetria del producte escalar. □

3.2.3 Curvatures principals, de Gauss i mitjana

Ara podem definir les diferents nocions de curvatura d'una superfície regular orientada. Suposem S orientada per un camp normal unitari ν i fixem $p \in S$.

Definició 3.2.4

Com $W_p : T_p S \rightarrow T_p S$ és un endomorfisme autoadjunt, W_p té valors propis reals $k_1(p)$ i $k_2(p)$, i diagonalitza en una base ortonormal (X_1, X_2) de $T_p S$. En particular tindrem

$$\text{Mat}_{(X_1, X_2)}(\Pi_p) = \text{Mat}_{(X_1, X_2)}(W_p) = \begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix}.$$

Els subespais propis $\text{Vect}(X_1)$ i $\text{Vect}(X_2)$ s'anomenen **direccions principals** de S en p , i els valors propis $k_1(p)$ i $k_2(p)$ s'anomenen **curvatures principals** de S en p .

Si $k_1(p) \neq k_2(p)$ les direccions principals són úniques.

Quan $k_1(p) = k_2(p) = k(p)$, la superfície es diu **umbilical** en p i tenim que $W_p = k(p) \text{Id}|_{T_p S}$: totes les direccions de $T_p S$ són principals.

Definim la **curvatura de Gauss** de S en p com

$$K(p) := \det(W_p) = k_1(p) \cdot k_2(p),$$

i la **curvatura mitjana** de S en p com

$$H(p) := \frac{1}{2} \text{tr}(W_p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}$$

Observació. Si canviem l'orientació de S de ν a $-\nu$, W_p es convertirà an $-W_p$ i per tant veiem que curvatures principals i mitjana es multipliquen per -1 . En canvi, la curvatura de Gauss no depèn de l'orientació triada.

Aquestes diferents nocions de curvatura estan relacionades com segueix.

Proposició 3.2.3

Les curvatures principals estan determinades per la fórmula:

$$k_i(p) = H(p) \pm \sqrt{H(p)^2 - K(p)}.$$

Demostració. Si denotem $P(\lambda) = \det(W_p - \lambda \text{Id})$, i, donada una parametrització local (Ω, φ) de S al voltant de p , denotem

$$\text{Mat}_{(\varphi_u, \varphi_v)} W_p = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

llavors

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 \\ &= ac - b^2 - (a + c)\lambda + \lambda^2 \\ &= K - 2H\lambda + \lambda^2 \\ &= (\lambda - (H + \sqrt{H^2 - K})) \cdot (\lambda - (H - \sqrt{H^2 - K})) \end{aligned}$$

i per tant obtenim el resultat. □

3.2.4 Expressió local

Ara expliquem com determinar les expressions de W_p i Π_p dins una parametrització local.

Proposició 3.2.4 (expressions locals de Π_p i W_p)

Suposem S orientada per $\nu : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, i sigui (Ω, φ) una parametrització local de S compatible amb l'orientació. Posem $\bar{\nu} = \nu \circ \varphi = \varphi_u \wedge \varphi_v / \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$ i definim

$$\begin{cases} e = \langle \bar{\nu}, \varphi_{uu} \rangle, \\ f = \langle \bar{\nu}, \varphi_{uv} \rangle, \quad (= \langle \bar{\nu}, \varphi_{vu} \rangle) \\ g = \langle \bar{\nu}, \varphi_{vv} \rangle. \end{cases}$$

Llavors

$$\text{Mat}_{(\varphi_u, \varphi_v)}(\Pi_p) = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

i

$$\text{Mat}_{(\varphi_u, \varphi_v)}(W_p) = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & Gf - Fg \\ -eF + fE & -fF + gE \end{pmatrix}.$$

En particular,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad \text{i} \quad H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}.$$

Observem que quan $\text{Mat}_{(\varphi_u, \varphi_v)}(\Pi_p) = I_2$ en un cert punt p , llavors $E = G = 1$ i $F = 0$ i per tant

$$\text{Mat}_{(\varphi_u, \varphi_v)}(\Pi_p) = \text{Mat}_{(\varphi_u, \varphi_v)}(W_p) = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

com dins el cas del cilindre (exemple 3 de la secció 3.2.2).

Demostració. Calculem primer

$$\Pi_p(\varphi_u, \varphi_u) = \langle -d\nu_p(\varphi_u), \varphi_u \rangle = \langle -\bar{\nu}_u, \varphi_u \rangle \underset{\langle \bar{\nu}, \varphi_u \rangle = 0}{=} \langle \bar{\nu}, \varphi_{uu} \rangle = e,$$

i de la mateixa manera obtenim

$$\Pi_p(\varphi_u, \varphi_v) = f \quad \text{i} \quad \Pi_p(\varphi_v, \varphi_v) = g.$$

Per tant

$$\text{Mat}_{(\varphi_u, \varphi_v)}(\Pi_p) = \begin{pmatrix} \Pi_p(\varphi_u, \varphi_u) & \Pi_p(\varphi_u, \varphi_v) \\ \Pi_p(\varphi_v, \varphi_u) & \Pi_p(\varphi_v, \varphi_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Ara bé, com $\Pi_p(X, Y) = I_p(W_p(X), Y)$ veiem que en termes de matrius

$$\text{Mat}_{(\varphi_u, \varphi_v)}(\Pi_p) = \text{Mat}_{(\varphi_u, \varphi_v)}(W_p)^t \cdot \text{Mat}_{(\varphi_u, \varphi_v)}(I_p).$$

Aleshores

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{(\varphi_u, \varphi_v)}(W_p) &= (\text{Mat}_{(\varphi_u, \varphi_v)}(\Pi_p) \times \text{Mat}_{(\varphi_u, \varphi_v)}(I_p)^{-1})^t \\ &= \text{Mat}_{(\varphi_u, \varphi_v)}(I_p)^{-1} \times \text{Mat}_{(\varphi_u, \varphi_v)}(\Pi_p) \quad (I_p \text{ i } \Pi_p \text{ són simètriques}) \\ &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & Gf - Fg \\ -eF + fE & -fF + gE \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les fórmules per K i H en són conseqüència directa. □

3.2.5 Curvatura normal

En aquesta secció relacionem les curvatures principals de la superfície regular S amb la curvatura de les corbes que conté. Suposem S orientada per $\nu : S \rightarrow \mathbb{S}^2$.

Definició 3.2.5

Sigui $\gamma : I \rightarrow S$ una corba parametritzada per la longitud d'arc i fixem $s \in I$. Llavors la **curvatura normal** de γ en s es defineix com la quantitat

$$k_n(s) := \langle \gamma''(s), \nu(\gamma(s)) \rangle.$$

Aquesta quantitat es pot calcular fent servir la segona forma fonamental:

Proposició 3.2.5

Sigui $\gamma : I \rightarrow S$ una corba parametritzada per la longitud d'arc i fixem $s \in I$. Es compleix la igualtat:

$$k_n(s) = \text{II}_{\gamma(s)}(\gamma'(s), \gamma'(s)).$$

Demostració. Sabem que $\gamma'(s) \in T_{\gamma(s)}S$ i per tant $\langle \gamma'(s), \nu \circ \gamma(s) \rangle = 0$ per tot $s \in I$. Derivant aquesta relació obtenim

$$\langle \gamma''(s), \nu \circ \gamma(s) \rangle + \langle \gamma'(s), (\nu \circ \gamma)'(s) \rangle = 0.$$

Aleshores veiem que

$$k_n(s) = -\langle \gamma'(s), (\nu \circ \gamma)'(s) \rangle = -\langle \gamma'(s), d\nu_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) \rangle = \text{II}_{\gamma(s)}(\gamma'(s), \gamma'(s)).$$

□

En particular, observem que la curvatura normal només depèn del punt i del vector tangent a la corba en aquest paràmetre. Això justifica la següent definició.

Definició 3.2.6

Fixem $p \in S$ i $X \in T_pS$ tal que $I_p(X, X) = 1$.

La **curvatura normal** de S en la direcció X és el número

$$k_n(X) := \text{II}_p(X, X).$$

Observem que $k_n(-X) = k_n(X)$.

Aquesta quantitat coincideix amb la curvatura normal de qualsevol corba $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ ppla tal que $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = X$.

En particular, $k_n(X)$ és la curvatura normal de la corba parametritzada per la longitud d'arc resultant de la intersecció de S amb el pla afí $p + \text{Vect}(X, \nu(p))$.

Ara relacionem curvatures principals i curvatura normal:

Teorema 3.2.1 (Formula d'Euler)

Fixem $p \in S$. Siguin k_1, k_2 les curvatures principals de S en p , i (e_1, e_2) una base ortonormal de vectors propis de l'endomorfisme de Weingarten, és a dir

$$\text{Mat}_{(e_1, e_2)}(W_p) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Aleshores

$$k_n(\theta) := k_n(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$$

per tot $\theta \in \mathbb{R}$.

En particular les curvatures principals k_1 i k_2 de S en p corresponen als extrems, màxim i mínim respectivament, de la funció $k_n : \{X \in T_p S \mid \|X\| = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ curvatura normal de S en p .

Demostració. Primer calculem

$$\begin{aligned} k_n(\theta) = k_n(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) &= \Pi_p(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2, \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) \\ &= \langle W_p(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2), \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \rangle \\ &= \langle \cos \theta W_p(e_1) + \sin \theta W_p(e_2), \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \rangle \\ &= \langle \cos \theta k_1 e_1 + \sin \theta k_2 e_2, \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \rangle \\ &= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Aleshores obtenim que $k'_n(\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta (-k_1 + k_2)$, i doncs si $k_1 \neq k_2$ veiem que els valors extrems s'assoleixen quan $\cos \theta \sin \theta = 0 \iff \theta = 0[\pi/2] \iff k_n(\theta) = k_1$ o k_2 . $\square$

En particular veiem que la curvatura de Gauss es pot interpretar com el producte del mínim pel màxim de les curvatures normals. Quant a la curvatura mitjana tenim el resultat següent.

Corol·lari 3.2.1

La curvatura mitjana en $p \in S$ compleix

$$H_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(\theta) d\theta.$$

Demostració.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} k_n(\theta) d\theta &= k_1 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + k_2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ &= (k_1 + k_2) \cdot \pi. \end{aligned}$$

$\square$

3.2.6 Línies de curvatura i línies asimptòtiques

Definició 3.2.7

- Diem que la direcció de $T_p S$ determinada per un vector tangent $X \in T_p S$ tal que $I_p(X, X) = 1$ és una **direcció asimptòtica** si $k_n(X) = 0$.
- Diem que una corba $\gamma : I \rightarrow S$ regular és **línia de curvatura** (respectivament **línia asimptòtica**) si en cada $t \in I$ la direcció determinada pel seu vector tangent $\gamma'(t)$ és direcció principal (respectivament direcció asimptòtica).

Està clar que les línies asimptòtiques estan caracteritzades per la propietat següent : γ és línia asimptòtica si i només si $\Pi_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0$. Podem donar la caracterització següent de les línies de curvatura.

Proposició 3.2.6

Una corba $\gamma : I \rightarrow S$ regular és línia de curvatura si i només si $\exists \lambda \in C^\infty(I)$ tal que

$$(\nu \circ \gamma)'(t) = \lambda(t) \cdot \gamma'(t)$$

per tot $t \in I$.

Demostració. ($\Rightarrow$) Si γ és línia de curvatura, llavors $\gamma'(t)$ està contingut en una direcció principal, i podem escriure $d\nu_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \lambda(t)\gamma'(t)$ on $-\lambda(t)$ serà una de les curvatures principals en $\gamma(t)$. Per tant $(\nu \circ \gamma)' = \lambda \cdot \gamma'$.

($\Leftarrow$) Recíprocament, si $(\nu \circ \gamma)' = \lambda \cdot \gamma'$, aleshores $\gamma'(t)$ és vector propi de l'aplicació de Weingarten $W_{\gamma(t)}$ i deduïm que pertany a un de les direccions principals. $\square$

Per acabar, donem les descripcions locals de les línies de curvatura i asimptòtica.

Proposició 3.2.7

Sigui (Ω, φ) una parametrització local de S , i $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ una corba $\gamma : I \rightarrow S$ tal que $\gamma(I) \subset \varphi(\Omega)$. Aleshores

- 1 La corba γ és línia asimptòtica si i només si

$$e(u')^2 + 2f(u'v') + g(v')^2 = 0.$$

- 2 La corba γ és línia de curvatura si i només si

$$\det \begin{pmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{pmatrix} = 0.$$

Demostració. Com que $\gamma' = u'\varphi_u + v'\varphi_v$, calculem

$$\begin{aligned}\Pi_\gamma(\gamma', \gamma') &= \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \\ &= e(u')^2 + 2f(u'v') + g(v')^2.\end{aligned}$$

Per tant, com sabem que γ és línia asimptòtica si i només si $\Pi_\gamma(\gamma', \gamma') = 0$, obtenim el primer punt.

Pel segon punt, la relació $W_\gamma(\gamma') = -\lambda \cdot \gamma'$ s'escriu

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{(\varphi_u, \varphi_v)}(W_\gamma) \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} &= -\lambda \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \\ \iff \det \begin{pmatrix} (eG - fF)u' + (Gf - Fg)v' & u' \\ (-eF + fE)u' + (-fF + gE)v' & v' \end{pmatrix} &= 0 \\ \iff (fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 &= 0 \\ \iff \det \begin{pmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{pmatrix} &= 0.\end{aligned}$$

□

3.3

Teorema Egregium de Gauss

En aquesta secció considerem S una superfície regular parametritzada per (Ω, φ) . En particular la superfície està orientada per el camp normal unitari $\nu(\varphi(u, v)) = \varphi_u \wedge \varphi_v / \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$ i posem $\bar{\nu} = \nu \circ \varphi$ com sempre.

3.3.1 Símbols de Christoffel

Definició 3.3.1

$\exists!$ funcions $\{\Gamma_{ij}^k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}_{i,j,k=1,2}$ anomenades **símbols de Christoffel** de S definides per les relacions

$$\begin{cases} \varphi_{uu} = \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + e \bar{\nu} \\ \varphi_{uv} = \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + f \bar{\nu} \\ \varphi_{vu} = \Gamma_{21}^1 \varphi_u + \Gamma_{21}^2 \varphi_v + f \bar{\nu} \\ \varphi_{vv} = \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + g \bar{\nu} \end{cases}$$

i com $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$, obtenim que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ per tot $i, j, k = 1, 2$.

Ara relacionem aquests símbols de Christoffel amb la primera forma fonamental.

Proposició 3.3.1

Es compleixen les fórmules següents:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = E_u/2, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - E_v/2, \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = E_v/2, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = G_u/2, \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - G_u/2, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = G_v/2. \end{cases}$$

En particular els símbols de Christoffel estan completament determinats per la primera forma fonamental, i són de classe C^∞ .

Demostració. La demostració és molt senzilla. Partim de l'expressió

$$\varphi_{uu} = \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + e \bar{\nu}$$

i fent el producte escalar amb φ_u obtenim

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F + e \cdot 0.$$

Alshores podem concloure per la primera relació, ja que

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \frac{E_u}{2}.$$

Per exemple per la segona relació, farem servir un càlcul del tipus

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle &= \frac{\partial}{\partial u} \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle - \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle \\
 &= F_u - \langle \varphi_u, \varphi_{vu} \rangle \\
 &= F_u - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \\
 &= F_u - \frac{E_v}{2}.
 \end{aligned}$$

□

3.3.2 Expressió de la curvatura de Gauss

Les equacions de la proposició anterior permeten trobar fórmules explícites pels símbols de Christoffel en termes de E , F , G i de les seves derivades. No les detallarem aquí, i a efectes pràctics serà suficient resoldre cadascun d'aquests tres sistemes lineals independents.

Més enlla, el símbols de Christoffel determinen la curvatura de Gauss.

Teorema 3.3.1 (Teorema Egregium de Gauss)

La curvatura de Gauss està donada per la fórmula

$$K = -\frac{1}{E}[(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2].$$

En particular K és invariant per isometries locals.

Demostració. Aquesta equació es dedueix del sistema anterior per un càlcul directe però molt laboriós que no farem aquí. De fet aquesta equació forma part d'un conjunt de sis identitats, les quatre primeres anomenades **equacions de Gauss** mentre que les dues últimes s'anomenen **equacions de Codazzi-Mainardi**. Aquest conjunt de sis identitats és fonamental perquè es pot demostrar que caracteritzen localment les superfícies regulars llevat de les isometries de $\mathbb{R}^3$ (Teorema de Bonnet).

La conclusió que K és invariant per isometries locals s'obté de la forma següent. Si $f : S \rightarrow S'$ és una isometria local i si (Ω, φ) és parametrització local, llavors sabem que $(\Omega, f \circ \varphi)$ és una parametrització local de S' tal que

$$E_\psi = \langle \psi_u, \psi_u \rangle = \langle df(\varphi_u), df(\varphi_u) \rangle = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = E_\varphi,$$

i de la mateixa manera $F_\psi = F_\varphi$ i $G_\psi = G_\varphi$. Com les primeres formes fonamentals coincideixen, els símbols de Christoffel també i deduïm que $K_S(p) = K_{S'}(f(p))$ de la fórmula donant K en termes dels símbols de Christoffel. □

Sigui S una superfície regular i $\gamma : I \rightarrow S$ una corba de classe C^∞ .

3.4.1 Camps vectorials al llarg d'una corba

Definició 3.4.1

Un **camp vectorial** tangent a S al llarg de la corba γ és una aplicació $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que per tot $t \in I$

$$X(t) \in T_{\gamma(t)}S$$

i tal que per cada parametrització local (Ω, φ) i cada interval obert $J \subset I$ tal que $\gamma(J) \subset \varphi(\Omega)$, si definim les funcions $u, v \in C^\infty(J)$ per $(u(t), v(t)) = \varphi^{-1}(\gamma(t))$, aleshores les úniques funcions $a, b : J \rightarrow \mathbb{R}$ determinades per l'equació

$$X(t) = a(t)\varphi_u(u(t), v(t)) + b(t)\varphi_v(u(t), v(t))$$

siguin de classe C^∞ .

Exemples.

- 1 Un exemple important de camp vectorial tangent a una superfície al llarg d'una corba és el següent. Sigui $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un **camp vectorial tangent sobre S** , és a dir una aplicació $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable tal que per tot $p \in S$ es compleix la condició $X(p) \in T_p S$. Aleshores $X \circ \gamma$ és un camp vectorial tangent a S al llarg de γ .
- 2 Un altre exemple fonamental és el propi vector tangent a la corba $\gamma' : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. De fet, la condició $\gamma(I) \subset S$ implica $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}S$ per tot $t \in I$, i per tant γ' és un camp vectorial tangent a la superfície al llarg de γ com

$$\gamma'(t) = u'(t)\varphi_u(u(t), v(t)) + v'(t)\varphi_v(u(t), v(t))$$

per tot parametrització local (Ω, φ) i $t \in I$ tal que $\gamma(t) \in \varphi(\Omega)$.

3.4.2 Derivada covariant

Definició 3.4.2

Sigui X un camp vectorial al llarg de γ . Es defineix la **derivada covariant** de X al llarg de γ com el camp vectorial tangent a S al llarg d'aquesta corba definit per la fórmula

$$\frac{DX}{dt} := \pi_t^\perp \left(\frac{dX}{dt} \right)$$

on $\pi_t^\perp : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_{\gamma(t)}S$ és la projecció ortogonal.

Per tant, la derivada covariant és allò que podem observar, des del punt de vista de la superfície de la derivada d'un camp vectorial tangent a S al llarg d'una corba.

En particular, observem que

$$\frac{D\gamma'}{dt} = \pi_t^\perp (\gamma'')$$

és la projecció ortogonal del vector acceleració sobre l'espai tangent a la superfície. És l'acceleració de la corba vista des del punt de vista de la superfície. Més endavant definirem les geodèsiques com les corbes que tenen acceleració nul·la en aquest sentit.

La proposició següent dona l'expressió local de la derivada covariant en termes dels símbols de Christoffel.

Proposició 3.4.1

Siguin (Ω, φ) una parametrització local de S , $J \subset I$ un interval obert tal que $\gamma(J) \subset \varphi(\Omega)$ i X un camp vectorial tangent a S al llarg de γ . Aleshores, si escrivim $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ i $X(t) = a(t)\varphi_u(u(t), v(t)) + b(t)\varphi_v(u(t), v(t))$ per tot $t \in J$, es compleix

$$\begin{aligned} \frac{DX}{dt} &= (a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{21}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv')\varphi_u \\ &\quad + (b' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{21}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv')\varphi_v. \end{aligned}$$

Demostració. Derivant l'expressió $X(t) = a(t)\varphi_u(u(t), v(t)) + b(t)\varphi_v(u(t), v(t))$, obtenim

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= a'\varphi_u + a(u'\varphi_{uu} + v'\varphi_{vu}) + b'\varphi_v + b(u'\varphi_{uv} + v'\varphi_{vv}) \\ &= a'\varphi_u + b'\varphi_v + au'(\Gamma_{11}^1\varphi_u + \Gamma_{11}^2\varphi_v + e\bar{\nu}) \\ &\quad + (av' + bu')(\Gamma_{12}^1\varphi_u + \Gamma_{12}^2\varphi_v + f\bar{\nu}) + bv'(\Gamma_{22}^1\varphi_u + \Gamma_{22}^2\varphi_v + g\bar{\nu}) \end{aligned}$$

i obtenim el resultat enunciat projectant sobre $\text{Vect}(\varphi_u, \varphi_v)$ ortogonalment a $\bar{\nu}$. □

3.4.3 Transport paral·lel

Definició 3.4.3

Diem que un camp vectorial X al llarg de γ és **paral·lel** si compleix

$$\frac{DX}{dt} = 0.$$

La proposició següent ens permet definir la noció de transport paral·lel.

Proposició 3.4.2

Fixem $t_0 \in I$ i $X_0 \in T_{\gamma(t_0)}S$.

Aleshores $\exists!$ camp vectorial paral·lel $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ al llarg de γ tal que $X(t_0) = X_0$. S'anomena **transport paral·lel** de X_0 al llarg de γ .

Demostració. En una parametrització local (Ω, φ) tal que $\gamma(t_0) \in \varphi(\Omega)$, podem escriure que $X(t) = a(t)\varphi_u + b(t)\varphi_v$, i busquem a i b solucions dels sistema lineal d'equacions diferencials ordinàries

$$\begin{cases} a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{21}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv' = 0 \\ b' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{21}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv' = 0 \end{cases}$$

amb condicions inicials donades per $X(t_0) = a(t_0)\varphi_u + b(t_0)\varphi_v = X_0$. Aquí $u, v : J \rightarrow \mathbb{R}$ són funcions C^∞ definides per $\varphi(u(t), v(t)) = \gamma(t)$ per tot $t \in J$, i definim $J \subset I$ com l'interval obert maximal que conté t_0 tal que $\gamma(t) \in \varphi(\Omega)$ per tot $t \in J$.

Aleshores $\exists!$ solucions $a, b : J \rightarrow \mathbb{R}$, i obtenim el transport paral·lel de X_0 sobre aquest interval J . Fent servir un recobriment de la corba per parametrització locals, veiem que podem estendre aquesta solució de manera única en una solució sobre tot l'interval I . $\square$

El transport paral·lel preserva el producte escalar.

Proposició 3.4.3

Siguin X, Y dos camps vectorials paral·lel al llarg de γ . Aleshores la funció $t \in I \mapsto \langle X(t), Y(t) \rangle$ és constant.

En particular les normes de X i Y són funcions constants sobre I .

Demostració. Primer

$$\frac{d}{dt} \langle X(t), Y(t) \rangle = \left\langle \frac{dX}{dt}, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{dY}{dt} \right\rangle.$$

Però com

$$\frac{DX}{dt} = 0 \iff \pi_t^\perp \left(\frac{dX}{dt} \right) = 0 \iff \frac{dX}{dt} \perp T_{\gamma(t)}S,$$

trobem que $\langle \frac{dX}{dt}, Y \rangle = 0$, i de la mateixa manera $\langle X, \frac{dY}{dt} \rangle = 0$. En deduïm el resultat. $\square$

3.4.4 Definició de la noció de geodèsica

Ara definim la noció de geodèsica com la de corba l'acceleració de la qual, vista des del punt de vista de la superfície, és nul·la.

Definició 3.4.4

Diem que la corba parametritzada $\gamma : I \rightarrow S$ és **geodèsica** si

$$\frac{D\gamma'}{dt} = 0 \iff \gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)}S \text{ per tot } t \in I.$$

Com que una definició equivalent a la de geodèsica és que el vector tangent a la corba sigui paral·lel, obtenim el resultat següent.

Proposició 3.4.4

Si γ és geodèsica, llavors la funció $t \mapsto \|\gamma'(t)\|$ és constant. En particular, el paràmetre d'una geodèsica és un múltiple del paràmetre d'arc de la corba: $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tal que $t = as + b$.

El resultat següent ens dona les equacions de les geodèsiques en una parametrització local.

Proposició 3.4.5

Sigui (Ω, φ) una parametrització local de S i $\gamma : I \rightarrow \varphi(\Omega)$ una corba. Aleshores, si escrivim $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$, la corba γ és geodèsica si i només si es compleix

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 = 0, \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 = 0. \end{cases}$$

Demostració. Aquí calculem $\gamma' = u'\varphi_u + v'\varphi_v$, i si recordem l'expressió local de $\frac{DX}{dt}$ per $X = a\varphi_u + b\varphi_v$, obtenim el resultat substituint i utilitzant la simetria dels símbols de Christoffel ($\Gamma_{12}^i = \Gamma_{21}^i$ per $i = 1, 2$). $\square$

Observem que el sistema d'equacions diferencials ordinàries anterior és de grau 2 en les variables u i v , i per tant obtenim com a conseqüència del teorema d'existència local de les solucions el resultat següent.

Proposició 3.4.6

Donats $p \in S$ i $X \in T_p S$, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\exists ! \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ geodèsica tal que $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = X$.

El sistema anterior no és lineal, i per tant no podem assegurar que la geodèsica sigui definida sobre tot $\mathbb{R}$.

Exemple. Sobre $\Pi = \{z = 0\} = \varphi(\mathbb{R}^2)$ amb $\varphi(u, v) = (u, v, 0)$, podem calcular fàcilment que $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$, i per tant que el transport paral·lel d'un vector X_0 al llarg de qualsevol corba γ és el camp constant $X(t) \equiv X_0$. També obtenim que les geodèsiques de Π són les rectes.

Exemple. Sobre $\mathbb{S}^2$, per to $p \in \mathbb{S}^2$ i $X \in T_p \mathbb{S}^2$ tal que $\|X\| = 1$, la corba $\gamma : t \in \mathbb{R} \rightarrow p \cos t + X \sin t$ és una geodèsica de $\mathbb{S}^2$. Efectivament, primer recordem que $T_p \mathbb{S}^2 = p^\perp$, i doncs per tot $t \in \mathbb{R}$ tenim

$$\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = \langle p \cos t + X \sin t, p \cos t + X \sin t \rangle = 1.$$

Aleshores calculem que $\gamma''(t) = -\gamma(t)$, i per tant $\gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)} \mathbb{S}^2$, d'on deduïm que

$$\frac{D\gamma'}{dt} = 0$$

i doncs que γ és geodèsica.

Demostrem ara que les geodèsiques són localment els camins de longitud minimal entre dos punts. Per això aquestes corbes són tant important !

Teorema 3.4.1

Sigui S una superfície regular orientada.

Aleshores les geodèsiques minimitzen localment la seva longitud.

Demostració. Fixem una geodèsica $\beta : (-\eta, \eta) \rightarrow S$ que suposarem parametritzada per longitud d'arc. Sigui $\alpha : I \rightarrow S$ qualsevol altre corba parametritzada per longitud d'arc sobre un interval obert I que conté 0, tal que $\alpha(0) = \beta(0)$ i $(\alpha'(0), \beta'(0))$ sigui una base ortonormal positiva de $T_{\beta(0)} S$.

Per tot $v \in I$ denotem β_v la única geodèsica definida sobre un interval obert J_v maximal tal que

- $0 \in J_v$;
- $\beta_v(0) = \alpha(v)$;
- $(\alpha'(v), \beta'_v(0))$ és una base ortonormal positiva de $T_{\alpha(v)}S$.

En particular, veiem que $\beta_0 = \beta$ sobre $(-\eta, \eta)$. Notem també que per construcció les geodèsiques β_v són parametritzades per longitud d'arc.

A més, es pot demostrar que existeix un subinterval $I' \subset I$ que conté 0 i $\varepsilon > 0$ tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset J_v$ per tot $v \in I'$. Suposarem d'ara endavant que $I' := I$.

Ara observem que l'aplicació

$$\varphi(u, v) := \beta_v(u)$$

indueix una parametrització local (Ω, φ) per un cert entorn obert Ω de $(0, 0)$. De fet, φ és diferenciable per la dependència diferenciable de la solució d'una equació diferenciable respecte a les condicions inicials. A més, com

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right|_{(0,0)} = \beta'_v(0) \text{ i } \left. \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right|_{(0,0)} = \alpha'(v)$$

i $(\alpha'(v), \beta'_v(0))$ és una base ortonormal positiva de $T_{\alpha(v)}S$, veiem que φ és localment una immersió injectiva sobre un cert entorn obert Ω de $(0, 0)$ per el teorema d'estructura de les immersions. Finalment obtenim que és parametrització local com ja sabem que S és superfície regular. Suposarem que $\Omega = (-\varepsilon, \varepsilon) \times I$ sense pèrdua de generalitat.

Ara demostrarem que

$$\Gamma_{11}^2 = 0$$

on $\{\Gamma_{ij}^k\}$ són els símbols de Christoffel associats amb la parametrització local (Ω, φ) . Per això recordem que la corba $\beta_{v_0}(t) = \varphi(t, v_0)$ és geodèsica, i que una corba $\varphi(u(t), v(t))$ és geodèsica si i només si

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 = 0, \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 = 0. \end{cases}$$

Veiem aleshores que la segona equació amb $u(t) = t$ i $v(t) \equiv v_0$, que correspon a la corba β_{v_0} , ens dona directament que $\Gamma_{11}^2 = 0$.

De les relacions

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = E_u/2, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - E_v/2, \end{cases}$$

on E, F, G són els coeficients de la matriu de la primera forma fonamental en la base (φ_u, φ_v) , deduïm fàcilment que

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}.$$

Amb el fet que

$$E = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle = \|\beta'_v(u)\|^2 = 1,$$

deduïm que $F_u = 0$.

D'altra banda

$$F(0, v) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(0, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0, v) \right\rangle = \langle \beta'_v(0), \alpha'(v) \rangle = 0,$$

i per tant $F \equiv 0$.

Per tant, hem obtingut el

Lema 3.4.1 (Lema de Gauss)

Les corbes de la forma $t \mapsto \varphi(u_0, t)$ són ortogonals a les geodèsiques β_v .

Demostració. Tenim per tot $(u_0, t_0) \in \Omega$

$$\left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \varphi(u_0, t), \beta'_{t_0}(u_0) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, t_0), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, t_0) \right\rangle = F(u_0, t_0) = 0.$$

□

Fixem ara $[a, b] \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ un interval tancat, i comprovem el resultat anunciat de minimalitat de les geodèsiques: de totes les corbes $c : [a, b] \rightarrow S$ de la forma

$$c(t) = \varphi(t, \psi(t))$$

on $\psi : [a, b] \rightarrow I$ és qualsevol funció de classe C^∞ tal que $\psi(a) = \psi(b) = 0$, la geodèsica $\beta(t) = \varphi(t, 0)$ té longitud minimal: com $u(t) = t, v(t) = \psi(t), E = 1, F = 0$ i $G > 0$, veiem efectivament que

$$\ell(c) = \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + G(\psi')^2} dt \geq \int_a^b 1 dt = b - a = \ell(\beta|_{[a, b]}).$$

□

Observem que, donat que la condició de minimalitat de les geodèsiques és local, el teorema anterior també és cert si la superfície regular no és orientable.

3.4.5 Curvatura geodèsica

Considerem S una superfície regular orientada per $\nu : S \rightarrow \mathbb{S}^2$. Fixem $\gamma : I \rightarrow S$ una corba C^∞ i un camp vectorial tangent a S unitari $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ al llarg de γ .

Definició 3.4.5

Denotarem $\bar{X} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'únic camp vectorial unitari al llarg de γ definit per la condició

$$(X(t), \bar{X}(t), \nu(\gamma(t))) \text{ base ortonormal directe de } \mathbb{R}^3$$

per tot $t \in I$.

Observem que la condició $\langle \bar{X}(t), \nu(\gamma(t)) \rangle = 0$ assegura que $\bar{X}(t) \in T_{\gamma(t)}S$ i aleshores el camp vectorial $\bar{X}$ és automàticament tangent a S .

A més aquest camp vectorial està donat per la fórmula: $\forall t \in I$,

$$\bar{X}(t) = \nu(\gamma(t)) \wedge X(t).$$

Ara, com que $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ és unitari es compleix

$$\left\langle \frac{dX}{dt}, X \right\rangle = 0 \iff \left\langle \frac{DX}{dt}, X \right\rangle = 0$$

ja que tenim l'igualtat $\langle \frac{dX}{dt}, Y \rangle = \langle \frac{DX}{dt}, Y \rangle =$ per tot $Y \in T_{\gamma(t)}S$.

Per tant $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{DX}{dt} = \lambda \cdot \bar{X}$, i aquest λ es pot determinar de la manera següent:

$$\lambda = \left\langle \frac{DX}{dt}, \bar{X} \right\rangle = \left\langle \frac{DX}{dt}, (\nu \circ \gamma) \wedge X \right\rangle = \left\langle \frac{dX}{dt}, (\nu \circ \gamma) \wedge X \right\rangle.$$

això justifica la següent definició.

Definició 3.4.6

Definim el **valor algebraic de la derivada covariant** de X en t com el nombre

$$\left[\frac{DX}{dt} \right] := \left\langle \frac{dX}{dt}, (\nu \circ \gamma) \wedge X \right\rangle.$$

Valor algebraic vol dir que pot ser positiu o negatiu (o nul evidentment), i notem que el signe de $\left[\frac{DX}{dt} \right]$ depèn de l'elecció de ν . Però en tot cas tenim:

$$\left\| \frac{DX}{dt} \right\| = \left| \left[\frac{DX}{dt} \right] \right|.$$

Fent servir la noció de valor algebraic de la derivada covariant, podem definir la noció de curvatura geodèsica.

Definició 3.4.7

Sigui $\gamma : I \rightarrow S$ una corba parametritzada per longitud d'arc. Aleshores per tot $s \in I$ el nombre

$$k_g(s) := \left[\frac{D\gamma'}{ds} \right]$$

s'anomena **curvatura geodèsica** de γ en s .

Observacions.

- 1 Una corba $\gamma : I \rightarrow S$ ppla és geodèsica si i només si la seva curvatura geodèsica compleix $k_g \equiv 0$.
- 2 El signe de k_g depèn òbviament de l'orientació triada.
- 3 Si $\beta : J \rightarrow S$ és una corba regular, i $\gamma : I \rightarrow S$ n'és una reparametrització positiva per la longitud d'arc, la curvatura geodèsica en $s = s(t)$ s'anomena curvatura geodèsica de β en $\beta(t)$. Com que dues reparametritzacions positives per la longitud d'arc difereixen només d'una translació del domini de definició, veiem que aquesta noció està ben definida.
- 4 Veiem fàcilment de l'expressió anterior de $\left[\frac{DX}{dt}\right]$ que si $\gamma : I \rightarrow S$ és ppla

$$k_g(s) = \langle \gamma''(s), \nu(\gamma(s)) \wedge \gamma'(s) \rangle.$$

Una fórmula similar es pot demostrar per la curvatura geodèsica d'una corba no ppla.

El resultat següent relaciona les diferents curvatures d'una corba sobre una superfície.

Proposició 3.4.7

Sigui $\gamma : I \rightarrow S$ una corba parametritzada per longitud d'arc. Si denotem per

$$\begin{cases} k(s) = \|\gamma''(s)\| & \text{(la seva curvatura)} \\ k_g(s) = \langle \gamma''(s), \nu(\gamma(s)) \wedge \gamma'(s) \rangle & \text{(la seva curvatura geodèsica),} \\ k_n(s) = \langle \gamma''(s), \nu(\gamma(s)) \rangle & \text{(la seva curvatura normal)} \end{cases}$$

aleshores

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2.$$

Demostració. Apliquem el teorema de Pitàgores:

$$k(s)^2 = \|\gamma''(s)\|^2 = \langle \gamma''(s), \nu(\gamma(s)) \wedge \gamma'(s) \rangle^2 + \langle \gamma''(s), \nu(\gamma(s)) \rangle^2 = k_g(s)^2 + k_n(s)^2.$$

□

FORMES DIFERENCIALS

4.1

Camps vectorials de $\mathbb{R}^n$

Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ un obert. Recordem que $(e_1, \dots, e_n)$ denota la base canònica a $\mathbb{R}^n$.

4.1.1 Definicions i notacions

Definició 4.1.1

Un **camp vectorial diferenciable** sobre U és una aplicació $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable de classe C^∞ .

Denotarem per $\chi(U)$ el conjunt dels camps vectorials diferenciables sobre U , que és un $C^\infty(U)$ -mòdul com per tots $h \in C^\infty(U)$ i $X, Y \in \chi(U)$ tenim $h \cdot X + Y \in \chi(U)$.

Si per tot $i = 1, \dots, n$ denotem $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(\mathbb{R}^n)$ el camp vectorial diferenciable definit per la fórmula

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p := \frac{\partial}{\partial x_i}(p) = e_i$$

en tot $p \in \mathbb{R}^n$, aleshores tot camp vectorial diferenciable X sobre U s'escriu de manera única

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

on les **components** X_i són funcions diferenciables sobre U , com per tot $p \in U$ tenim

$$X(p) = (X_1(p), \dots, X_n(p)) = \sum_{i=1}^n X_i(p) e_i = \sum_{i=1}^n X_i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p.$$

Donats $f \in C^\infty(U)$ i $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(U)$, es defineix la **derivada de f en la direcció de X** com la funció $X(f) \in C^\infty(U)$ definida per

$$X(f)(p) := \sum_{i=1}^n X_i(p) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

En particular veiem a posteriori que la notació és consistent, ja que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Es defineix el **producte escalar sobre $\chi(U)$** com la funció definida per

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \chi(U) \times \chi(U) &\rightarrow C^\infty(U) \\ (X, Y) &\mapsto \left(\langle X, Y \rangle : p \in U \mapsto \langle X(p), Y(p) \rangle = \sum_{i=1}^n X_i(p) Y_i(p) \right). \end{aligned}$$

Aquí hem escrit $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ i $Y = \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Aleshores es compleixen les següents propietats.

Proposició 4.1.1

- $X(\lambda f + g) = \lambda X(f) + X(g)$;
- $X(fg) = X(f)g + fX(g)$;
- $X(f) = \langle X, \text{grad} f \rangle$ on $\text{grad} f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Demostració. Demostrem només l'últim punt.

$$\begin{aligned} X(f)(p) &= \sum_i X_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \\ &= \left\langle \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle(p) \\ &= \langle X, \text{grad} f \rangle(p). \end{aligned}$$

□

4.1.2 Corbes integrals

Definició 4.1.2

Sigui $X \in \chi(U)$. Diem que $\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una **corba integral de X** si satisfà $\forall t \in (a, b)$

$$X(\gamma(t)) = \gamma'(t).$$

Si escrivim $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ i $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, aleshores γ és una corba integral de X si i només si

$$x'_i(t) = X_i(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

$\forall t \in (a, b)$ i $\forall i = 1, \dots, n$. De forma equivalent γ és corba integral si i només si $\gamma' = \bar{X} \circ \gamma$ on $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$. Com els $X_i \in C^\infty(U)$, veiem que és un sistema d'equacions diferencials ordinàries, i per tant es compleix el següent resultat.

Proposició 4.1.2 (Existència local de les corbes integrals)

Sigui $X \in \chi(U)$ i $p \in U$. $\exists V \subset U$ entorn obert de p , $\exists \varepsilon > 0$ i $\exists \Psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \xrightarrow{C^\infty} U$ tals que $\Psi(0, x) = x$ i tals que per tot $x \in V$ la corba $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto \Psi(t, x)$ és una corba integral de X .

Denotarem Ψ_t la funció $\Psi(t, \cdot) : V \rightarrow U$.

Proposició 4.1.3 (Grup uniparamètric local o flux)

Amb les notacions de la proposició anterior, tenim:

- $\Psi_0 = id_V$,
- $\Psi_t \circ \Psi_s = \Psi_{t+s}$.

En particular $\Psi_{-t} \circ \Psi_t = id_V$ per tot $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, i doncs $\{\Psi_t\}_t$ és una família a un paràmetre de difeomorfismes.

Demostració. El primer punt és directe. Pel segon, si fixem s , calculem

$$\left. \frac{d}{dt'} \right|_t \Psi_{t'+s}(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t+s} \Psi_t(x) = X(\Psi(t+s, x)),$$

i com que $\Psi_{0+s}(x) = \Psi_s(x)$ deduïm que $t \mapsto \Psi_{t+s}(x)$ és una corba integral de X passant per $\Psi_s(x)$ en $t = 0$. Per unicitat de les solucions d'un sistema d'EDO, obtenim que aquesta corba coincideix amb la corba integral $t \mapsto \Psi_t(\Psi_s(x))$. $\square$

Definició 4.1.3

Direm que $F \in C^\infty(U)$ és una **integral primera** de $X \in \chi(U)$ si

- F és submersió: $dF_p \neq 0$ per tot $p \in U$,
- F és constant sobre les corbes integrals de X .

Observacions.

- 1 Si F és integral primera de X , qualsevol corba integral $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ està continguda dins la subvarietat de dimensió $n - 1$ definida per $F^{-1}(F(\gamma(0)))$.

En particular si disposem de $n - 1$ integrals primeres $F_1, \dots, F_{n-1}$ tal que en tot $p \in U$ les formes lineals $\{dF_i(p)\}_{i=1, \dots, n-1}$ són linealment independents, aleshores la imatge d'una corba integral està localment determinada geomètricament per la intersecció $\cap_{i=1}^{n-1} F_i^{-1}(F_i(\gamma(0)))$.

2 Si γ és corba integral de $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, tenim que

$$\gamma'(t) = (X_1(\gamma(t)), \dots, X_n(\gamma(t)))$$

i doncs

$$\begin{aligned} F \text{ és una integral primera de } X &\Leftrightarrow 0 = (F \circ \gamma)'(t) = dF_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^n X_i(\gamma(t)) \frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma(t)) \\ &\Leftrightarrow 0 = X(F). \end{aligned}$$

Proposició 4.1.4

Sigui $p \in U$, i $X \in \chi(U)$ tal que $X(p) \neq 0$.

Aleshores $\exists V \subset U$ entorn obert de p i $F : V \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ tal que F sigui integral primera de X .

Demostració. Sabem que $\exists V \subset U$ entorn obert de p i $\varphi : V \rightarrow \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ difeomorfisme tal que $d\varphi_q(\bar{X}(q)) = e_1$ on $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ per tot $q \in V$. Per tant les corbes integrals de X són de la forma $t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_1)$ com

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt} (\varphi^{-1}(\varphi(p) + te_1)) = d\varphi_{\varphi(p) + te_1}^{-1}(e_1) = \bar{X}(\gamma(t)).$$

Aleshores definim $F = \pi \circ \varphi$ amb $\pi(x_1, \dots, x_n) = x_2$, i tenim $F(\varphi^{-1}(\varphi(p) + te_1)) = \pi(\varphi(p) + te_1) = \pi(\varphi(p))$, així doncs F és integral primera. $\square$

Sigui E un $\mathbb{R}$ -espai vectorial de dimensió n del qual fixem una base $B = (e_1, \dots, e_n)$. Designem per $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espai dual de les formes lineals sobre E , i denotarem $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base dual de E^* definida per les relacions $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ per tot $i, j = 1, \dots, n$.

4.2.1 Formes multilineals

Definició 4.2.1

Sigui $k \geq 1$. Una aplicació k -multilinear sobre E

$$\omega : E \times \overset{k}{\dots} \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

es diu **alternada** si es compleix la igualtat

$$\omega(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma) \omega(u_1, \dots, u_k)$$

per tota k -tupla $(u_1, \dots, u_k) \in E^k$ i per tot $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ ^a.

Una aplicació k -multilinear alternada sobre E s'anomena una **k -forma multilinear**, i denotarem

$$\Lambda^k E^*$$

l'espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ de les k -formes (multilineals) sobre E . En particular $\Lambda^1 E^* = E^*$, i posem $\Lambda^0 E^* = \mathbb{R}$ per conveni.

^aRecordem que una aplicació $\omega : E \times \overset{k}{\dots} \times E \rightarrow \mathbb{R}$ es diu k -multilinear si és lineal respecte cadascuna de les seves variables, i que $\mathfrak{S}_k$ és el grup de permutacions de k elements, també conegut com a grup simètric.

Exemple. L'aplicació determinant $\det : \mathbb{R}^n \times \overset{n}{\dots} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és una aplicació n -multilinear alternada sobre $\mathbb{R}$, és a dir $\det \in \Lambda^n \mathbb{R}^*$.

Observacions.

- 1 Una aplicació k -multilinear de grau k es diu **antisimètrica** si ω es cancel·la sempre que dues de les seves variables siguin igual (és a dir la condició $u_i = u_j$ per dos índexs $i \neq j$ implica $\omega(u_1, \dots, u_k) = 0$).

Es pot comprovar fàcilment (exercici) que ω és alternada si i només si ω és antisimètrica.

- 2 Per $k > n$ tenim $\Lambda^k E^* = 0$.

De fet, si agafem k vectors $u_1, \dots, u_k \in E$ i descomposem aquests vectors en la base B com $u_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} e_j$, tindrem per multilinealitat

$$\omega(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n u_{1i_1} \dots u_{ki_k} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$

Com cada terme $(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}, e_{i_{n+1}}, \dots, e_{i_k})$ té al menys dues components idèntiques i que ω és alternada, conclouem que $\omega(u_1, \dots, u_k) = 0$ sempre.

4.2.2 Producte exterior

Definició 4.2.2

Siguin $\omega \in \Lambda^k E^*$ i $\eta \in \Lambda^\ell E^*$. Es defineix el seu **producte exterior** $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+\ell} E^*$ per la fórmula

$$\omega \wedge \eta(u_1, \dots, u_{p+q}) = \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon(\sigma) \omega(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)}) \eta(u_{\sigma(k+1)}, \dots, u_{\sigma(k+\ell)}).$$

Observacions.

- ❶ Si $\alpha, \beta \in \Lambda^1 E^* = E^*$, llavors

$$\alpha \wedge \beta(v, w) = \alpha(v)\beta(w) - \beta(v)\alpha(w).$$

En particular $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$.

- ❷ Comprovem que $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+\ell} E^*$: la multilinealitat és clara, i $\forall \tau \in \mathfrak{S}_{k+\ell}$

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta(u_{\tau(1)}, \dots, u_{\tau(k+\ell)}) &= \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon(\sigma) \omega(u_{\sigma(\tau(1))}, \dots, u_{\sigma(\tau(k))}) \eta(u_{\sigma(\tau(k+1))}, \dots, u_{\sigma(\tau(k+\ell))}) \\ &= \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\rho = \sigma \circ \tau \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon(\rho \circ \tau^{-1}) \omega(u_{\rho(1)}, \dots, u_{\rho(k)}) \eta(u_{\rho(k+1)}, \dots, u_{\rho(k+\ell)}) \\ &= \varepsilon(\tau^{-1}) \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon(\rho) \omega(u_{\rho(1)}, \dots, u_{\rho(k)}) \eta(u_{\rho(k+1)}, \dots, u_{\rho(k+\ell)}) \\ &= \varepsilon(\tau) \omega \wedge \eta(u_1, \dots, u_{k+\ell}). \end{aligned}$$

La última igualtat és conseqüència del fet que $\varepsilon : \mathfrak{S}_k \rightarrow \mathbb{Z}_2$ és un morfisme de grups.

Proposició 4.2.1

$\forall \omega \in \Lambda^k E^*, \eta \in \Lambda^\ell E^*, \gamma \in \Lambda^m E^*$,

- $\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \eta \wedge \omega$.
- El producte exterior és associatiu: $\omega \wedge (\eta \wedge \gamma) = (\omega \wedge \eta) \wedge \gamma$.

Demostració. Demostrarem aquesta proposició a classe de problemes. □

4.2.3 Avaluació del producte exterior via el determinant

El següent resultat serà molt útil a l'hora de calcular.

Proposició 4.2.2

Siguin $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Lambda^1 E^* = E^*$ i $u_1, \dots, u_k \in E$.
Aleshores

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k(u_1, \dots, u_k) = \det(\alpha_i(u_j)) = \begin{vmatrix} \alpha_1(u_1) & \dots & \alpha_1(u_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_k(u_1) & \dots & \alpha_k(u_k) \end{vmatrix}.$$

Demostració. El resultat és cert per $k=1$. Suposem-ho cert per $k-1$. Primer escrivim fent servir la definició de producte exterior

$$\begin{aligned} \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k(u_1, \dots, u_k) &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) \cdot \alpha_1(u_{\sigma(1)}) \cdot [\alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k(u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(k)})] \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i=1}^k \alpha_1(u_i) \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k | \sigma(1)=i} \varepsilon(\sigma) \cdot \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k(u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(k)}) \right), \end{aligned}$$

i observem el següent.

Lema 4.2.1

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$ tal que $\sigma(1) = i$ es compleix la igualtat següent:

$$\varepsilon(\sigma) \cdot \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k(u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(k)}) = (-1)^{i-1} \cdot \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k(u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_k).$$

Demostració. Definim $\tau \in \mathfrak{S}_{k-1}$ i $\kappa, \tilde{\tau} \in \mathfrak{S}_k$ per

$$\tau : (1, 2, \dots, \hat{i}, \dots, k) \mapsto (\sigma(2), \dots, \sigma(k))$$

$$\kappa : (1, 2, \dots, i, \dots, k) \mapsto (i, 1, \dots, \hat{i}, \dots, k)$$

$$\tilde{\tau} : (i, 1, \dots, \hat{i}, \dots, k) \mapsto (i, \sigma(2), \dots, \sigma(k)).$$

En particular $\sigma = \tilde{\tau} \circ \kappa$, i per tant $\varepsilon(\tau) = (-1)^{i-1} \varepsilon(\sigma)$ com $\varepsilon(\tilde{\tau}) = \varepsilon(\tau)$ i $\varepsilon(\kappa) = (-1)^{i-1}$.
Aleshores

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma) \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k(u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(k)}) &= (-1)^{i-1} \varepsilon(\tau) \cdot \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k(u_{\tilde{\tau} \circ \kappa(2)}, \dots, u_{\tilde{\tau} \circ \kappa(k)}) \\ &= (-1)^{i-1} \varepsilon(\tau) \varepsilon(\tilde{\tau}) \cdot \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k(u_{\kappa(2)}, \dots, u_{\kappa(k)}) \\ &= (-1)^{i-1} \varepsilon(\tau)^2 \cdot \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k(u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_k) \end{aligned}$$

i concloem com $\varepsilon(\tau)^2 = 1$. □

Llavors, fent servir la hipotesi d'inducció i el fet que el conjunt $\{\sigma \in \mathfrak{S}_k \mid \sigma(1) = i\}$ és de cardinal

$(k-1)!$, obtenim

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k(u_1, \dots, u_k) &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \cdot \alpha_1(u_i) \cdot \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k(u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_k) \\
&= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \cdot \alpha_1(u_i) \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2(u_1) & \dots & \widehat{\alpha_2(u_i)} & \dots & \alpha_2(u_k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_k(u_1) & \dots & \widehat{\alpha_k(u_i)} & \dots & \alpha_k(u_k) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \alpha_1(u_1) & \dots & \alpha_2(u_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_k(u_1) & \dots & \alpha_k(u_k) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

on la darrera igualtat s'obté fent servir el desenvolupament de Laplace. $\square$

Com a conseqüència directa obtenim:

Corol·lari 4.2.1

- $e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*(u_1, \dots, u_n) = \det(u_{ij})$ si escrivim $u_i = \sum_j u_{ij} e_j$ per tot $i = 1, \dots, n$,
- $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } \{i_1, \dots, i_k\} = \{j_1, \dots, j_k\}, \\ 0 & \text{sinó.} \end{cases}$

En particular, dins el cas on $E = \mathbb{R}^n$ i on B és la base canònica, obtenim

$$\det = e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*.$$

4.2.4 Descomposició de les formes multilineals

De forma menys directa, la proposició anterior implica el resultat de descomposició següent:

Proposició 4.2.3

$\forall \omega \in \Lambda^k E^*$, tenim la fórmula

$$\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_k}^*.$$

Demostració. Per qualsevol $(u_1, \dots, u_k) \in E^k$, calculem

$$\begin{aligned}
 \omega(u_1, \dots, u_k) &= \omega\left(\sum_{j_1=1}^n u_{1j_1} e_{j_1}, \dots, \sum_{j_k=1}^n u_{kj_k} e_{j_k}\right) \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n u_{1j_1} \dots u_{kj_k} \cdot \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \\
 &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} u_{1j_{\sigma(1)}} \dots u_{kj_{\sigma(k)}} \cdot \omega(e_{j_{\sigma(1)}}, \dots, e_{j_{\sigma(k)}}) \\
 &= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) \cdot u_{1j_{\sigma(1)}} \dots u_{kj_{\sigma(k)}} \cdot \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \\
 &= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \cdot \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) \cdot e_{j_{\sigma(1)}}^*(u_1) \dots e_{j_{\sigma(k)}}^*(u_k) \right) \\
 &= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \cdot e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_k}^*(u_1, \dots, u_k).
 \end{aligned}$$

□

Corol·lari 4.2.2

L'espai vectorial $\Lambda^k E^*$ admet com a base el conjunt $(e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_k}^* \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n)$. En particular $\Lambda^k E^*$ té dimensió $\binom{n}{k}$.

Demostració. Sabem que la família de k -formes $\{e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_k}^* \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n\}$ genera $\Lambda^k E^*$ per la proposició anterior, i com és de cardinal $\binom{n}{k}$, només cal comprovar que són linealment independents. Però la igualtat

$$\sum_{j_1 < \dots < j_k} \lambda_{j_1 \dots j_k} e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_k}^* = 0$$

avaluada sobre la k -tupla $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ implica que cada coeficient $\lambda_{i_1 \dots i_k}$ és zero. □

Observacions.

En particular $\Lambda^n E^* = \text{Vect}(e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*)$. Quan $E = \mathbb{R}^n$ i $B = (e_1, \dots, e_n)$ és la base canònica, llavors existeix un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\det = \lambda \cdot e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$. Avaluant sobre la n -tupla $(e_1, \dots, e_n)$ deduïm $\lambda = 1$ i tornem a obtenir que

$$\det = e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*.$$

Fixem $k \geq 1$.

4.3.1 Definició de forma diferencial

Definició 4.3.1 (k -formes sobre un obert)

Una k -forma sobre U (o forma de grau k sobre U) és una correspondència

$$\omega : p \in U \mapsto \omega_p \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*.$$

Si per tot $i = 1, \dots, n$ denotem dx_i la 1-forma sobre $\mathbb{R}^n$ definida per la fórmula

$$dx_i|_p = e_i^*$$

en tot $p \in \mathbb{R}^n$, aleshores en tot punt p de $\mathbb{R}^n$ la família de k -formes (multilineals)

$$(dx_{j_1}|_p \wedge \dots \wedge dx_{j_k}|_p \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n)$$

és una base de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$, i per tant tota k -forma ω sobre U s'escriu en tot punt $p \in U$ com

$$\omega_p = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \omega_{j_1 \dots j_k}(p) \cdot dx_{j_1}|_p \wedge \dots \wedge dx_{j_k}|_p$$

on els coeficients reals $\omega_{j_1 \dots j_k}(p)$ estan únicament determinats.

Una k -forma diferencial sobre U és una k -forma ω sobre U que s'escriu en tot punt $p \in U$

$$\omega_p = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \omega_{j_1 \dots j_k}(p) \cdot dx_{j_1}|_p \wedge \dots \wedge dx_{j_k}|_p$$

amb les funcions coeficients $\omega_{j_1 \dots j_k} \in C^\infty(U)$.

Denotem $\Omega^k(U)$ el conjunt de k -formes diferencials sobre U , i posem $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$ per conveni. Aleshores $\Omega^k(U)$ és un $C^\infty(U)$ -mòdul, i en particular un $\mathbb{R}$ -espai vectorial.

Estenem ara de forma natural la noció de producte exterior a les k -formes diferencials.

Definició 4.3.2 (Producte exterior de k -formes diferencials)

Siguin $\omega \in \Omega^k(U)$ i $\eta \in \Omega^\ell(U)$. Es defineix el seu **producte exterior** $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+\ell}(U)$ a través de la fórmula següent: posem en tot punt p de U

$$(\omega \wedge \eta)_p := \omega_p \wedge \eta_p \in \Lambda^{k+\ell}(\mathbb{R}^n)^*.$$

En particular podrem escriure

$$\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \omega_{j_1 \dots j_k} \cdot dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k},$$

i podem comprovar fàcilment que

1. $\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \cdot \eta \wedge \omega$,
2. El producte exterior és associatiu.

Exemple. Sobre $\mathbb{R}^3$,

- Una 0-forma diferencial serà una funció C^∞ -diferenciable $f(x, y, z)$,
- Una 1-forma diferencial serà per exemple la forma $\alpha = x^2 y dx - e^z dy + \sin x dz$,
- Una 2-forma diferencial s'escrirà $\beta = f dx \wedge dy + g dy \wedge dz + h dx \wedge dz$ amb $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$,
- Una 3-forma serà per exemple la forma $\gamma = (x^2 - y^3) z dx \wedge dy \wedge dz$.

Proposició 4.3.1

Sigui $\omega \in \Omega^k(U)$. Aleshores l'aplicació

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} : \chi(U) \times \dots \times \chi(U) &\rightarrow C^\infty(U) \\ (X_1, \dots, X_k) &\mapsto (p \in U \mapsto \omega_p(X_1(p), \dots, X_k(p))) \end{aligned}$$

és $C^\infty(U)$ -multilineal de grau k alternada.
Denotarem $\tilde{\omega}$ per ω .

Demostració. Si escrivim $X_i = \sum_j a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$ amb $a_{ij} \in C^\infty(U)$, és fàcil veure que per tot $p \in U$

$$\omega(X_1, \dots, X_k)(p) = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \omega_{j_1 \dots j_k}(p) \cdot a_{1j_1}(p) \dots a_{kj_k}(p),$$

i doncs efectivament que $\omega(X_1, \dots, X_k) \in C^\infty(U)$. Les altres propietats es desmostren de forma similar. $\square$

Exemple. Sobre $\mathbb{R}^3$ considerem

- $\alpha = z dx \wedge dy$,
- $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ i $Y = -z \frac{\partial}{\partial y}$.

Aleshores

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y) &= z dx \wedge dy \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}, -z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= y z^2 dx \wedge dy \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) - x z^2 dx \wedge dy \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= y z^2. \end{aligned}$$

4.3.2 Diferencial exterior

Comencem amb les 0-formes.

Definició 4.3.3 (Diferencial exterior) d'una funció

La **diferencial exterior** d'una 0-forma $h \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$ és la 1-forma $dh \in \Omega^1(U)$ definida per

$$dh = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i.$$

Observem que aquesta definició és coherent amb la noció clàssica de diferencial d'una funció $h \in C^\infty(U)$ com la 1-forma dh_p coincideix amb l'única forma lineal sobre $\mathbb{R}^n$ també denotada dh_p que satisfà

$$h(p+v) = h(p) + dh_p(v) + o(\|v\|).$$

Proposició 4.3.2

$\forall h \in C^\infty(U)$ i $\forall X \in \chi(U)$ es compleix

$$dh(X) = X(h).$$

Demostració. Tenim

$$\begin{aligned} dh(X) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i \left(\sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial h}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

□

Aquesta noció de diferencial es generalitza a qualsevol grau de la forma següent.

Definició 4.3.4 (Diferencial exterior)

Sigui $k \geq 0$. La **diferencial exterior** d'una k -forma diferencial

$$\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \omega_{j_1 \dots j_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \in \Omega^k(U)$$

és la $(k+1)$ -forma diferencial sobre U definida com

$$d\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_k} d\omega_{j_1 \dots j_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}.$$

L'aplicació lineal així obtinguda $d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$ s'anomena **diferencial exterior**, i satisfà les següents propietats :

$$1. \forall \alpha \in \Omega^k(U) \text{ i } \forall \beta \in \Omega^\ell(U),$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.$$

$$2. \forall \alpha \in \Omega^k(U),$$

$$d(d\alpha) = 0.$$

Observació.

Tenim

$$d\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j_1 < \dots < j_k} \frac{\partial \omega_{j_1 \dots j_k}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k},$$

i comprovem efectivament que, si $h \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$, tornem a trobar la fórmula anterior $dh = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i$.

Demostració. Per demostrar la primera propietat, escrivim

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d\left(\left(\sum \alpha_{j_1 \dots j_k} \cdot dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}\right) \wedge \left(\sum \beta_{i_1 \dots i_\ell} \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_\ell}\right)\right) \\ &= d\left(\sum \alpha_{j_1 \dots j_k} \beta_{i_1 \dots i_\ell} \cdot dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_\ell}\right) \\ &= \sum d(\alpha_{j_1 \dots j_k} \beta_{i_1 \dots i_\ell}) \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_\ell} \end{aligned}$$

i acabem amb un càlcul senzill com

$$d(\alpha_{j_1 \dots j_k} \beta_{i_1 \dots i_\ell}) = \sum_{m=1}^n \left(\frac{\partial \alpha_{j_1 \dots j_k}}{\partial x_m} \beta_{i_1 \dots i_\ell} + \alpha_{j_1 \dots j_k} \frac{\partial \beta_{i_1 \dots i_\ell}}{\partial x_m} \right) dx_m.$$

Per la segon propietat, observem que, per linealitat de la diferencial exterior d , ni ha prou a demostrar que $d^2(h dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}) = 0$. Ara bé

$$\begin{aligned} d^2(h dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}) &= d\left(\sum_{m=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_m} dx_m \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}\right) \\ &= \sum_{m, \ell=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x_\ell \partial x_m} dx_\ell \wedge dx_m \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \\ &= \sum_{m \neq \ell} \frac{\partial^2 h}{\partial x_\ell \partial x_m} dx_\ell \wedge dx_m \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \\ &= \sum_{m < \ell} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_\ell \partial x_m} - \frac{\partial^2 h}{\partial x_m \partial x_\ell} \right) dx_\ell \wedge dx_m \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

pel teorema de Schwarz. □

La següent definició proposa una operació inversa de la diferencial exterior. Serà molt útil a l'hora d'integrar formes diferencials.

Definició 4.3.5 (Contracció interior)

Siguin $X \in \chi(U)$ i $\omega \in \Omega^k(U)$ amb $k \geq 1$. Es defineix la **contracció interior** de ω per X com la $(k-1)$ -forma diferencial $i_X \omega \in \Omega^{k-1}(U)$ definida per

$$i_X \omega(Y_2, \dots, Y_k) := \omega(X, Y_2, \dots, Y_k).$$

Per conveni posem $i_X h = 0$ si $h \in \Omega^0(U)$. Es compleix la següent fórmula (exercici):

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X \alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_X \beta$$

si α és de grau k .

4.3.3 Pullback d'una forma diferencial

Si tenim una aplicació diferenciable entre oberts, podem transportar les formes però en el sentit contrari:

Definició 4.3.6 (Pullback d'una forma diferencial)

Sigui $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ una aplicació C^∞ . $\forall k \geq 1$ i $\omega \in \Omega^k(V)$, definim el **pullback** de ω per f com la k -forma diferencial $f^* \omega \in \Omega^k(U)$ definida $\forall X_1, \dots, X_k \in \chi(U)$ i $p \in U$ per

$$(f^* \omega)_p(X_1(p), \dots, X_k(p)) := \omega_{f(p)}(df_p(X_1(p)), \dots, df_p(X_k(p))).$$

Si $h \in \Omega^0(U) (= C^\infty(U))$, posem $f^* h = h \circ f$.

Aleshores obtenim $\forall k \geq 0$ una aplicació

$$f^* : \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^k(U)$$

anomenada pullback per f que és lineal: $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \omega, \eta \in \Omega^k(V)$,

$$f^*(a\omega + \eta) = af^*\omega + f^*\eta.$$

El pullback per una funció té moltes propietats:

Proposició 4.3.3

Sigui $f : U \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^\infty} V \subset \mathbb{R}^m$.

- 1 $f^*(\omega \wedge \eta) = f^* \omega \wedge f^* \eta$, $(\forall \omega \in \Omega^k(V) \text{ i } \eta \in \Omega^\ell(V))$
- 2 $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ $(\forall g : V \xrightarrow{C^\infty} W \subset \mathbb{R}^r)$
- 3 $f^*(h \cdot \omega) = (h \circ f) \cdot f^* \omega$, $(\forall h \in C^\infty(V) \text{ i } \omega \in \Omega^k(V))$
- 4 $f^* \circ d = d \circ f^*$ i, en particular, $d(f^* h) = d(h \circ f) = f^* dh$, $(\forall h \in C^\infty(V))$
- 5 $f^* dx_i = df_i$. $(\forall i = 1, \dots, m)$

Demostració. Fixem $X, X_1, \dots, X_{k+\ell} \in \chi(U)$ i $p \in U$.

1 Calculem

$$\begin{aligned}
 f^*(\omega \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{k+\ell}) &= (\omega \wedge \eta)(df(X_1), \dots, df(X_{k+\ell})) \\
 &= \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon(\sigma) \omega(df(X_{\sigma(1)}), \dots, df(X_{\sigma(k)})) \eta(df(X_{\sigma(k+1)}), \dots, df(X_{\sigma(k+\ell)})) \\
 &= \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon(\sigma) f^*\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) f^*\eta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+\ell)}) \\
 &= (f^*\omega \wedge f^*\eta)(X_1, \dots, X_{k+\ell}).
 \end{aligned}$$

2 Aquí

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)^*\omega_p(X_1(p), \dots, X_k(p)) &= \omega_{g(f(p))}(d(g \circ f)_p(X_1(p)), \dots, d(g \circ f)_p(X_k(p))) \\
 &= \omega_{g(f(p))}(dg_{f(p)}(df_p(X_1(p))), \dots, dg_{f(p)}(df_p(X_k(p)))) \\
 &= g^*\omega_{f(p)}(df_p(X_1(p)), \dots, df_p(X_k(p))) \\
 &= f^*(g^*\omega)_p(X_1(p), \dots, X_k(p)).
 \end{aligned}$$

3 $f^*(h\omega)_p(X) = (h\omega)_{f(p)}(df_p(X)) = h(f(p))\omega_{f(p)}(df_p(X)) = (h \circ f)(p)f^*\omega_p(X).$

4 Per inducció sobre k :

- Primer comprovem fàcilment que $d(f^*h) = d(h \circ f) = dh \circ df = f^*dh$ com

$$dh_{f(p)}(df_p(X(p))) = f^*dh_p(X(p)).$$

- Suposem la fórmula certa per $k-1$ i sigui $\omega \in \Omega^{k-1}(U)$:

$$\begin{aligned}
 f^*d(dx_i \wedge \omega) &= f^*(d^2x_i \wedge \omega - dx_i \wedge d\omega) \\
 &= -f^*(dx_i \wedge d\omega) \\
 (\text{per H.I.}) &= -d(f^*x_i) \wedge d(f^*\omega) \\
 &= d(f^*dx_i \wedge f^*\omega) \\
 &= d \circ f^*(dx_i \wedge \omega),
 \end{aligned}$$

i concloem fent servir el punt anterior.

5 $(f^*dx_i)_p(X) = (dx_i)_{f(p)}(df_p(X(p))) = dx_i(df_p(X(p))) = df_i|_p(X(p)).$

□

Corol·lari 4.3.1

Si

$$\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \omega_{j_1 \dots j_k} \cdot dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \in \Omega^k(V),$$

llavors

$$f^*\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \omega_{j_1 \dots j_k} \circ f \cdot df_{j_1} \wedge \dots \wedge df_{j_k}.$$

4.3.4 Forma volum sobre $\mathbb{R}^n$

Definició 4.3.7 (Element de volum de $\mathbb{R}^n$)

La forma

$$\eta_{\mathbb{R}^n} := dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$$

s'anomena **element de volum** de $\mathbb{R}^n$ i està caracteritzada per la següent propietat (*):

$$\eta_{\mathbb{R}^n}|_p(u_1, \dots, u_n) = 1$$

$\forall p \in \mathbb{R}^n$ i $(u_1, \dots, u_n)$ base ortonormal positiva de $T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$.

Efectivament, si $(u_1, \dots, u_n)$ és una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^n$ i escrivim $u_i = \sum a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p$, aleshores $\det((a_{ij})) = 1$ i doncs

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbb{R}^n}|_p(u_1, \dots, u_n) &= dx_1|_p \wedge \dots \wedge dx_n|_p(u_1, \dots, u_n) \\ &= e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*(u_1, \dots, u_n) \\ &= \det(e_i^*(u_j)) \\ &= \det(a_{ij}) = 1. \end{aligned}$$

D'altra banda, si $\tau \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ té aquesta propietat, com que $\dim \Lambda^n(\mathbb{R}^n)^* = 1$, llavors $\exists h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\tau = h \cdot \eta_{\mathbb{R}^n}$ veiem fàcilment que $h \equiv 1$ i per tant $\tau = \eta_{\mathbb{R}^n}$.

El següent resultat ens serà molt útil per integrar.

Proposició 4.3.4

Sigui $f : U \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^\infty} V \subset \mathbb{R}^n$. Aleshores

$$f^* \eta_{\mathbb{R}^n} = \det(Jac(f)) \cdot \eta_{\mathbb{R}^n}.$$

Demostració. Denotem $\eta_{\mathbb{R}^n}$ per η en aquesta demostració. Sabem que existeix $h \in C^\infty(U)$ tal que $f^* \eta = h \cdot \eta$ ja que $\dim \Lambda^n(\mathbb{R}^n)^* = 1$, i aquesta funció està determinada per

$$\begin{aligned} h &= (f^* \eta) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \\ &= \eta_{f(\cdot)} \left(df \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right), \dots, df \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right) \\ &= \det \left(\sum \frac{\partial f_j}{\partial x_1} e_j, \dots, \sum \frac{\partial f_j}{\partial x_n} e_j \right) \\ &= \det(Jac(f)). \end{aligned}$$

□

4.4

Subvarietats amb vora

Denotem

$$\mathbb{R}_+^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\} \quad \text{i} \quad \partial\mathbb{R}_+^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m = 0\}.$$

4.4.1 Definicions

Primer necessitem una noció de diferenciabilitat de les funcions definides sobre oberts de $\mathbb{R}_+^n$.

Definició 4.4.1

Sigui $V \subset \mathbb{R}_+^m$ un obert.

Diem que $f : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ és **diferenciable** (de classe C^∞) si per tot $p \in V$ existeix W un entorn obert de p dins $\mathbb{R}^m$ i una aplicació $\bar{f} : W \rightarrow \mathbb{R}^k$ de classe C^∞ tal que $\bar{f}|_{V \cap W} = f|_{V \cap W}$.

Aleshores es defineix la **diferencial** de f en $p \in V$ com $df_p := d\bar{f}_p$.

Evidentment, si $p \notin V \cap \partial\mathbb{R}_+^m$ tornem a trobar la noció clàssica de diferenciabilitat de les funcions sobre $\mathbb{R}^m$ amb valors a $\mathbb{R}^k$ agafant $\bar{f} = f$. La novetat és el cas $p \in V \cap \partial\mathbb{R}_+^m$, i llavors cal observar que la diferencial de $\bar{f}$ no depèn de l'extensió $\bar{f}$ triada.

Definició 4.4.2

Un subconjunt $M \subset \mathbb{R}^n$ és una **subvarietat amb vora** de dimensió m si per tot $p \in M$ existeix un entorn obert U de p dins $\mathbb{R}^n$, un obert $\Omega \subset \mathbb{R}_+^m$ i una aplicació diferenciable $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

- 1 $\varphi : \Omega \xrightarrow{\sim} U \cap M$ és homeomorfisme ;
- 2 φ_x és una immersió, és a dir, $d\varphi_x$ és injectiva $\forall x \in \Omega$.

El parell (Ω, φ) s'anomena **parametrització local** de M .

Un primer exemple fàcil de subvarietat amb vora no buida és el subconjunt

$$\mathbb{R}_+^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} = \mathbb{R}^n.$$

Veiem intuïtivament que hi ha dos tipus de punts dins una subvarietat amb vora.

Definició 4.4.3

Sigui $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat de dimensió m amb vora.

Diem que $p \in M$ és un **punt interior** si hi ha una parametrització local (Ω, φ) de M al voltant de p tal que $p \in \varphi(\Omega \setminus \partial\mathbb{R}_+^m)$. Denotem $\text{int}(M)$ el subconjunt de punts interiors de M i $\partial M = M \setminus \text{int}(M)$ el subconjunt complementari que s'anomena **vora** de M .

És fàcil observar que la definició anterior de punt interior no depèn de la parametrització local triada, i que tota parametrització local porta un punt de la vora topològica $\partial\mathbb{R}_+^m$ a la vora ∂M de M .

Observem també que la vora d'una subvarietat definida al capítol 2 és buida. Així podrem identificar des d'ara les subvarietats amb vora buida amb les subvarietats que vam definir al capítol 2.

Sorprenentment, quan no és buida, la vora d'una subvarietat és un objecte geomètric molt raonable.

Proposició 4.4.1

Sigui $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat de dimensió m amb vora. Llavors ∂M és una subvarietat (sense vora) de dimensió $m - 1$.

Demostració. La demostració és molt senzilla. Sigui $p \in \partial M$ i $(\Omega, \varphi = \varphi(u_1, \dots, u_m))$ una parametrització local de M al voltant de p . Llavors $(\Omega \cap \partial \mathbb{R}_+^m, \bar{\varphi} = \varphi(u_1, \dots, u_{m-1}, 0))$ serà parametrització local de ∂M al voltant de p . De fet $\Omega \cap \partial \mathbb{R}_+^m$ serà un obert de $\partial \mathbb{R}_+^m \simeq \mathbb{R}^{m-1}$, i $\bar{\varphi}$ serà homeomorfisme sobre la seva imatge i immersió, per ser una restricció de φ , que també ho és. $\square$

Per tal de decidir quan un subconjunt és subvarietat amb vora de la mateixa dimensió que l'espai ambient, disposem del criteri següent.

Proposició 4.4.2

Un subconjunt $M \subset \mathbb{R}^n$ és subvarietat amb vora de dimensió n si per tot $p \in M$ existeix una aplicació diferenciable $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre un entorn obert U de p tal que $U \cap M = F^{-1}(\mathbb{R}_+)$ i F és submersió sobre $F^{-1}(0)$.

Demostració. Notem en primer lloc que $F^{-1}((0, \infty))$ és un obert de $\mathbb{R}^n$ i doncs una subvarietat sense vora de dimension n .

Suposem ara que p és un punt de M tal que $F(p) = 0$ i, sense pèrdua de generalitat, que $\frac{\partial F}{\partial x_n} \neq 0$. L'aplicació

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, F(x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

serà un difeomorfisme en algun entorn U de p , i denotem llavors la seva inversa per $\varphi = \psi^{-1} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Aleshores el parell $(\Omega \cap \mathbb{R}_+^n, \varphi)$ serà una parametrització local de M al voltant de p . En particular, ∂M serà parametritzada com una subvarietat de dimensió $n - 1$ considerant l'aplicació

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Omega' \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$$

on l'obert Ω' de $\mathbb{R}^{n-1}$ està definit per $\Omega \cap \partial \mathbb{R}_+^n = \Omega' \times \{0\}$ i veiem que $p \in \partial M$. $\square$

Exemple. Utilitzant la submersió $F(x_1, \dots, x_n) = 1 - \sum_{i=1}^n x_i^2$ veiem que la bola

$$\mathbb{B}^n := \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right\} = F^{-1}(\mathbb{R}_+)$$

és una subvarietat de dimensió n $\mathbb{R}^n$ amb vora $\partial \mathbb{B}^n = \mathbb{S}^{n-1}$.

4.4.2 Camps vectorials

Primer estenem la definició d'espai tangent a la vora d'una subvarietat.

Definició 4.4.4

Sigui $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat de dimensió m amb vora, i $(\Omega, \varphi = \varphi(u_1, \dots, u_m))$ una parametrització local al voltant d'un punt $p \in \partial M$. Definim l'**espai tangent** a M en p com

$$T_p M := \text{Vect}(\bar{\varphi}_{u_1}(\varphi^{-1}(p)), \dots, \bar{\varphi}_{u_m}(\varphi^{-1}(p))) \subset \mathbb{R}^n$$

on $\bar{\varphi}$ és qualsevol extensió de φ .

L'anterior definició no depèn de l'elecció de l'extensió ni tampoc de la parametrització triada, i d'ara endavant denotarem els vectors $\bar{\varphi}_{u_i}$ per φ_{u_i} . De fet podríem definir alternativament els φ_{u_i} fent les derivades direccionals

$$\varphi_{u_i}(\varphi^{-1}(p)) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(\varphi^{-1}(p) + te_i) - p}{t}$$

on recordem que $(e_1, \dots, e_m)$ és la base canònica de $\mathbb{R}^m$. Per un punt $p \in \text{int}(M)$ guardem la mateixa definició d'espai tangent que en el capítol 2.

Els vectors tangents en un punt de la vora es poden classificar en dues classes.

Definició 4.4.5

Sigui $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat de dimensió m amb vora i $p \in \partial M$. Es defineix el conjunt de **vectors interiors** de $T_p M$ com

$$T_p^{\text{int}} M := \{\gamma'(0) \mid \gamma : [0, \varepsilon) \xrightarrow{C^\infty} M \text{ amb } \gamma(0) = p\}$$

que serà un semi espai tancat de $T_p M$ de frontera $T_p \partial M \simeq \mathbb{R}^{m-1}$.

Si (Ω, φ) és parametrització local de M al voltant de p , llavors

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \varphi_{u_i} \in T_p^{\text{int}} M \iff X_m \geq 0.$$

Els elements de $T_p M \setminus T_p^{\text{int}} M$ s'anomenen **vectors exteriors**.

Aleshores definim la noció de camps vectorials sobre una subvarietat amb vora de la manera següent.

Definició 4.4.6

Sigui $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat de dimensió m amb vora.

Un **camp vectorial tangent** de M és una aplicació $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable tal que per tot $p \in M$ es compleix

$$X(p) \in T_p M.$$

Per X diferenciable entenem que $\forall (\Omega, \varphi)$ parametrització local de M la composició $X \circ \varphi$

és de classe C^∞ sobre Ω . Aleshores, com $(\varphi_{u_1}, \dots, \varphi_{u_m})$ és una base de $T_p M$ per tot $p = \varphi(u_1, \dots, u_m)$, obtenim la definició equivalent següent: X és camp vectorial tangent sobre M si es pot escriure en cada parametrització local (Ω, φ) com

$$X \circ \varphi(u_1, \dots, u_m) = \sum_{i=1}^m X_i(u_1, \dots, u_m) \varphi_{u_i}$$

amb els X_i funcions diferenciables sobre Ω .

Denotarem $\chi(M)$ el conjunt de camps vectorials tangent de M .

Exemple. Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ un obert tal que $M \subset U$, i $Y \in \chi(U)$ un camp vectorial tal que per tot $p \in M$ tenim $Y(p) \in T_p M$. Aleshores $Y|_M$ és camp vectorial tangent de M .

De fet aquest exemple és el cas general: tot camp vectorial sobre M es pot constuir d'aquesta manera fent servir un teorema potent i que no demostrarem aquí que s'anomena teorema de l'entorn tubular.

4.4.3 Formes diferencials i orientació

Sigui M^m una subvarietat amb vora de $\mathbb{R}^n$ de dimensió m .

Recordem que si $(\Omega, \varphi = \varphi(u_1, \dots, u_m))$ és una parametrització local de M al voltant d'un punt $p \in M$ (possiblement $p \in \partial M$), aleshores la família de vectors $(\varphi_{u_1}(\varphi^{-1}(p)), \dots, \varphi_{u_m}(\varphi^{-1}(p)))$ és una base de $T_p M$. Denotem per $(du_1|_p, \dots, du_m|_p)$ la base de $(T_p M)^*$ dual.

Definició 4.4.7

Una **k -forma diferencial** sobre M és una correspondència

$$\omega : p \in M \mapsto \omega_p \in \Lambda^k(T_p M)^*$$

tal que per tota parametrització local (Ω, φ) la k -forma ω es descomposa sobre $\varphi(\Omega)$ com

$$\omega_{\varphi(u_1, \dots, u_m)} = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \omega_{j_1 \dots j_k}(u_1, \dots, u_m) du_{j_1} \wedge \dots \wedge du_{j_k}$$

on les aplicacions $\omega_{j_1 \dots j_k}$ són diferenciables sobre Ω . Denotem $\Omega^k(M)$ el conjunt de k -formes diferencials sobre M que és un $C^\infty(M)$ -mòdul, i en particular un $\mathbb{R}$ -espai vectorial.

Aleshores totes les propietats de les formes diferencials sobre un obert de $\mathbb{R}^n$ s'estenen sense dificultat a les formes diferencials sobre una subvarietat fent servir parametritzacions locals. En particular definim

$$d\omega = \sum_{i, j_1, \dots, j_k} \frac{\partial \omega_{j_1 \dots j_k}}{\partial u_i} du_i \wedge du_{j_1} \wedge \dots \wedge du_{j_k}$$

i això no depèn de l'expressió local de ω .

Utilitzant aquestes formes diferencials podem definir la noció d'orientació de les subvarietats amb vora.

Definició 4.4.8

Diem que M és **orientable** si $\exists \omega \in \Omega^m(M)$ tal que per tot $p \in M$ es compleix la condició $\omega_p \neq 0$.

Aleshores una base $(X_1, \dots, X_m)$ de vectors de $T_p M$ es diu **positiva** si es compleix la condició $\omega_p(X_1, \dots, X_m) > 0$.

Per exemple, la subvarietat $M = \mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^n$ és orientable per $\eta_{\mathbb{R}^n} = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Com ho vam demostrar aquesta forma té la propietat següent: per tot $p \in \mathbb{R}^n$ i per tota base ortonormal positiva $(u_1, \dots, u_n)$ de $T_p \mathbb{R}^n$, tenim $\eta_{\mathbb{R}^n}|_p(u_1, \dots, u_n) = 1$.

Això es pot generalitzar a qualsevol subvarietat amb vora.

Proposició 4.4.3

Si M és orientable, aleshores $\exists!$ m -forma diferencial denotada per $\eta_M \in \Omega^m(M)$ tal que si $(X_1, \dots, X_m)$ és base ortonormal^a positiva de $T_p M$ llavors $\eta_M|_p(X_1, \dots, X_m) = 1$.

Aquesta m -forma η_M s'anomena **element de volum**.

^aés a dir, base de $T_p M$ tal que $\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}$ per tot $i, j = 1, \dots, m$.

Demostració. Si M està orientada per una m -forma diferencial ω , sabem que qualsevol m -forma sobre M s'escriurà de la forma $f \cdot \omega$ per una certa funció $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Aleshores si $(X_1, \dots, X_m)$ és una base ortonormal positiva de $T_p M$ posem

$$f(p) = \frac{1}{\omega_p(X_1, \dots, X_m)}.$$

Aquesta expressió no dependrà de la base ortonormal positiva triada (per les propietats de les formes multilineals) i defineix una funció diferenciable. Per tant deduïm el resultat. $\square$

Exemple. Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície regular orientada per un camp normal unitari $\nu : S \rightarrow \mathbb{S}^2$. Aleshores S serà orientable per l'element de volum

$$\eta_S = i_\nu(dx \wedge dy \wedge dz),$$

i les dues nocions d'orientació que vam definir per a les superfícies coincideixen: per tota base ortonormal (X_1, X_2) de $T_p S$ positiva dins el sentit que (X_1, X_2, ν) és base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$ per la seva forma volum (orientació induïda per ν), tindrem que

$$\begin{aligned} \eta_S(X_1, X_2) &= i_\nu(dx \wedge dy \wedge dz)(X_1, X_2) \\ &= (dx \wedge dy \wedge dz)(\nu, X_1, X_2) \\ &= \det_{(e_1, e_2, e_3)}(\nu, X_1, X_2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

i serà positiva per l'orientació induïda per la 2-forma η_S .

En el cas de les superfícies regulars, la forma volum tindrà l'expressió local següent.

Proposició 4.4.4

Siguin S una superfície regular orientada per ν , i (Ω, φ) una parametrització local compatible amb l'orientació^a. Aleshores

$$\varphi^* \eta_S = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv.$$

^aÉs a dir que $\nu = \varphi_u \wedge \varphi_v / \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$

Demostració. Sabem que $\varphi^* \eta_S = A du \wedge dv$ amb $A > 0$, i calculem

$$\begin{aligned} A &= \varphi^* \eta_S \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) = \eta_S \left(d\varphi \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), d\varphi \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right) \\ &= \eta_S (\varphi_u, \varphi_v) = i_\nu \eta_{\mathbb{R}^3} (\varphi_u, \varphi_v) \\ &= \underbrace{\eta_{\mathbb{R}^3} (\nu, \varphi_u, \varphi_v)}_{\text{volum paral·lelepípede}} = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned}$$

□

En fi, observem que la vora d'una subvarietat amb vora està naturalment orientada.

Definició 4.4.9

Suposem $\partial M \neq \emptyset$. Definim el **camp exterior normal unitari** com la correspondència

$$\nu_{\partial M} : p \in \partial M \mapsto \nu_{\partial M}(p) \in T_p M$$

determinada de manera única per les condicions següents:

- $\|\nu_{\partial M}(p)\| = 1$;
- $\nu_{\partial M}(p) \in T_p^{\text{ext}} M$;
- $\nu_{\partial M}(p) \perp T_p \partial M$.

Aleshores, si M és orientada, i si $\eta_M \in \Omega^m(M)$ és l'element de volum de M associat a l'orientació, tindrem que la forma diferencial

$$\eta_{\partial M} = i_{\nu_{\partial M}}(\eta_M) \in \Omega^{m-1}(\partial M)$$

sobre ∂M no s'anul·la, i l'orientació associada de ∂M s'anomena **orientació induïda**.

Exemple. Si el semi espai $\mathbb{R}_+^m$ està orientat per l'element de volum $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$, aleshores

$$\nu_{\partial \mathbb{R}_+^m} = -\frac{\partial}{\partial x_m}$$

i obtenim

$$\eta_{\partial \mathbb{R}_+^m} = i_{\nu_{\partial \mathbb{R}_+^m}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m = (-1)^m dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{m-1}.$$

4.5.1 Integració

Comencem amb l'integració d'una forma diferencial sobre un obert de $\mathbb{R}^m$.

Definició 4.5.1

Siguin

- Ω un obert de l'espai $\mathbb{R}^m$ del qual denotem $(u_1, \dots, u_m)$ les seves coordenades,
- $\omega = h \cdot du_1 \wedge \dots \wedge du_m \in \Omega^m(\mathbb{R}^m)$ una m -forma diferencial on $h \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ tal que el seu **suport**

$$\text{spt}(\omega) := \overline{\{p \in \mathbb{R}^m \mid \omega_p \neq 0\}}$$

sigui compacte i contingut dins l'obert Ω .

Es defineix la **integral** de ω sobre Ω com la quantitat

$$\int_{\Omega} \omega = \int_{\Omega} h \, du_1 \wedge \dots \wedge du_m := \int_{\Omega} h \, du_1 \dots du_m.$$

Observem que la condició que el suport sigui compacte ens assegura que la integral sigui ben definida. Ara passem a la definició de la integral d'una forma sobre un domini d'una subvarietat que sigui parametritzat.

Definició 4.5.2

Siguin

- $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat amb vora orientada
- (Ω, φ) una parametrització local de M compatible amb l'orientació^a,
- $\omega \in \Omega^m(M)$ tal que $\text{spt}(\omega) := \overline{\{p \in M \mid \omega_p \neq 0\}}$ sigui compacte i contingut dins l'obert $\varphi(\Omega)$.

Es defineix la **integral** de ω sobre M com la quantitat

$$\int_M \omega := \int_{\Omega} \varphi^* \omega = \int_{\Omega} \omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_m} \right) du_1 \wedge \dots \wedge du_m,$$

i per tant

$$\int_M \omega = \int_{\Omega} \omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_m} \right) du_1 \dots du_m.$$

^aÉs a dir que la família $(\varphi_{u_1}, \dots, \varphi_{u_m})$ és una base ortonormal positiva de $T_p M$.

Proposició 4.5.1

L'anterior definició no depèn de l'elecció de la parametrització local (Ω, φ) .

Demostració. Sigui (Ω', ψ) una altre parametrització complint les mateixes condicions. Suposarem que $\varphi(\Omega) = \psi(\Omega')$ sense pèrdua de generalitat. La composició $f = \varphi^{-1} \circ \psi$ està definida sobre Ω' i $\text{spt}(\omega) \subset \varphi(\Omega) = \psi(\Omega')$. Posem $\varphi^*\omega = A \, du_1 \wedge \dots \wedge du_m$ on $A = \omega(\varphi_{u_1}, \dots, \varphi_{u_m})$. Llavors es compleix

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \psi^*\omega &= \int_{\Omega'} (\varphi \circ f)^*\omega = \int_{\Omega'} f^*(A \, du_1 \wedge \dots \wedge du_m) \\ &= \int_{\Omega'} (A \circ f) f^*(du_1 \wedge \dots \wedge du_m) \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{\Omega'} (A \circ f) \det(Jac(f)) du_1 \dots du_m \\ &\stackrel{(**)}{=} \int_{f(\Omega')=\Omega} A \, du_1 \dots du_m \\ &= \int_{\Omega} \varphi^*\omega \end{aligned}$$

on la igualtat $(*)$ resulta de la fórmula $f^*\eta_{\mathbb{R}^m} = \det(Jac(f)) \cdot \eta_{\mathbb{R}^m}$ que vam demostrar i la igualtat $(**)$ del teorema del canvi de variables ja que $\det(Jac(f)) > 0$. $\square$

Per tal d'integrar les formes diferencials de grau m sobre les subvarietats de dimensió m , necessitem la noció de partició de la unitat.

Proposició 4.5.2

Sigui $K \subset \mathbb{R}^m$ un compacte i $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recobriment obert^a de K . Aleshores $\exists k \geq 1$ funcions $\rho_1, \dots, \rho_k \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ tal que

- Per tot $i = 1, \dots, k$, $\rho_i \geq 0$ i $\text{spt}(\rho_i) \subset V_{\alpha_i}$ per un $\alpha_i \in A$,
- $\sum_{i=1}^k \rho_i(x) = 1$ per tot punt $x \in K$.

La família de funcions $\{\rho_i\}_i$ s'anomena **partició de la unitat** de K subordinada a $\{V_\alpha\}_\alpha$.

^aEs a dir que els V_α són oberts i $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$.

Demostració. Per a cada punt $x \in K$ escollim un parell de boles obertes centrades en x , que denotem $B(x)$ i $D(x)$, de manera que $\bar{B}(x) \subset D(x) \subset \bar{D}(x) \subset V_\alpha$ per algun $\alpha \in A$. Per ser K compacte, hi ha un nombre finit de punts $x_1, \dots, x_k \in K$ tals que $K \subset B(x_1) \cup \dots \cup B(x_k)$. Podem trobar funcions $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables i, amb valors a $[0, 1]$ tals que $f_i \equiv 1$ sobre $B(x_i)$ i $\text{spt}(f_i) \subset D(x_i)$. Definim

$$\begin{cases} \rho_1 = f_1, \\ \rho_2 = (1 - f_1)f_2, \\ \vdots \\ \rho_k = \prod_{i=1}^{k-1} (1 - f_i) \cdot f_k. \end{cases}$$

Aquestes funcions són totes ≥ 0 i veiem per inducció que

$$\sum_{i=1}^m \rho_i = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - f_i).$$

Per tant tenim que per tot $x \in K$

$$\sum_{i=1}^m \rho_i(x) = 1$$

ja que x pertany a alguna bola $B(x_i)$. Això conclou la demostració. $\square$

La demostració de la proposició anterior s'adapta sense dificultats per provar que si K és un subconjunt compacte d'una subvarietat M^m de $\mathbb{R}^n$ i $\{(\Omega_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ és una família de parametritzacions de M amb $K \subset \cup_\alpha \varphi_\alpha(\Omega_\alpha)$, llavors hi ha una partició de la unitat $\{\rho_i\}_i$ de K subordinada al recobriment $\{\varphi_\alpha(\Omega_\alpha)\}$ on els $\rho_i \in C^\infty(M)$.

Definició 4.5.3

Sigui M^m una subvarietat amb vora de $\mathbb{R}^n$. Denotarem per $\Omega_c^m(M)$ l'espai vectorial de les m -formes diferencials de M amb suport compacte.

Utilitzant aquestes particions de la unitat, podem finalment definir la integral d'una forma diferencial amb suport compacte sobre una subvarietat amb vora.

Definició 4.5.4

Siguin

- $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat orientada,
- $\{(\Omega_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ una família de parametritzacions locals de M compatible amb l'orientació i tal que $M = \cup_\alpha \varphi_\alpha(\Omega_\alpha)$ (una tal família es diu un **atles** de M),
- $\omega \in \Omega_c^m(M)$ i denotem $K := \text{spt}(\omega)$ el seu suport compacte,
- $\{\rho_i\}_{i=1,\dots,k}$ una partició de la unitat de K subordinada al recobriment $\{\varphi_\alpha(\Omega_\alpha)\}$,
- per tot $i = 1, \dots, k$ denotem α_i l'índex que compleix $\text{spt}(\rho_i) \subset \varphi_{\alpha_i}(\Omega_{\alpha_i})$.

Es defineix la **integral** de ω sobre M com la quantitat

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^k \int_M \rho_i \omega = \sum_{i=1}^k \int_{\Omega_{\alpha_i}} (\rho_i \circ \varphi_{\alpha_i}) \varphi_{\alpha_i}^* \omega.$$

Com anteriorment, aquesta definició no depèn de la partició de la unitat o de l'atles escollides.

Definició 4.5.5

Sigui $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat orientada compacte. Definim el seu **volum** com la quantitat

$$\text{Vol}(M) = \int_M \eta_M.$$

A l'hora de calcular integrals de formes diferencials sobre subvarietats, no utilitzarem les particions de la unitat sinó que farem servir el resultat que segueix, del qual deixem la demostració com a exercici.

Proposició 4.5.3

Siguin $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat orientada, i $\{(\Omega_i, \varphi_i)\}_i$ una família de parametritzacions locals de M compatible amb l'orientació tal que

- 1 $M \setminus \cup_i \varphi_i(\Omega_i)$ és una unió de subvarietats de dimensió $< m$,
- 2 $\varphi_i(\Omega_i) \cap \varphi_j(\Omega_j) = \emptyset$ per tot $i \neq j$.

Aleshores es compleix

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^k \int_{\Omega_i} \varphi_i^* \omega$$

per tot $\omega \in \Omega_c^m(M)$.

Un altre resultat tècnic útil a l'hora de calcular aquestes integrals és el següent.

Proposició 4.5.4

Sigui $f : M^m \subset \mathbb{R}^n \rightarrow N^m \subset \mathbb{R}^k$ un difeomorfisme entre subvarietats orientables tal que per tot $p \in M$ la seva diferencial $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ preserva orientacions. Llavors

$$\int_N \omega = \int_M f^* \omega$$

per tot $\omega \in \Omega_c^m(M)$.

Demostració. Només cal recordar que si (ω, φ) és una parametrització local de M , llavors $(\omega, f \circ \varphi)$ és parametrització local de N . $\square$

4.5.2 Teorema de Stokes

Aquest teorema s'enuncia així.

Teorema 4.5.1 (Stokes)

Siguin $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat orientada, i $\omega \in \Omega_c^{m-1}(M)$. Aleshores

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Demostració. Denotem

- $\{(\Omega_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ un atlas de M compatible amb l'orientació,
- $K := \text{spt}(\omega)$ compacte,
- $\{\rho_i\}_{i=1, \dots, k}$ una partició de la unitat de K subordinada a $\{\varphi_\alpha(\Omega_\alpha)\}$,
- α_i l'índex per tot $i = 1, \dots, k$ que compleix $\text{spt}(\rho_i) \subset \varphi_{\alpha_i}(\Omega_{\alpha_i})$.

Posem $J := \{i \in I \mid \text{spt}(\rho_i) \cap \partial M \neq \emptyset\}$ i suposarem que $\alpha_i = i$. Escrivim $\omega = \sum_i \rho_i \omega$, i llavors

$$\begin{aligned} \int_M \omega &= \sum_i \int_M d(\rho_i \omega) = \sum_i \int_{\Omega_i} \varphi_i^*(d(\rho_i \omega)) \\ &= \sum_i \int_{\mathbb{R}_+^m} \underbrace{d\varphi_i^*(\rho_i \omega)}_{=: \bar{\omega}_i} \end{aligned}$$

i observem que les formes $\bar{\omega}_i$ són elements de $\Omega_c^{m-1}(\mathbb{R}_+^m)$.

Lema 4.5.1

Si $\bar{\omega} \in \Omega_c^{m-1}(\mathbb{R}_+^m)$, aleshores

- 1 Si $\text{spt}(\bar{\omega}) \cap \partial \mathbb{R}_+^m = \emptyset$ aleshores $\int_{\mathbb{R}_+^m} d\bar{\omega} = 0$.
- 2 Si $\text{spt}(\bar{\omega}) \cap \partial \mathbb{R}_+^m \neq \emptyset$ aleshores $\int_{\mathbb{R}_+^m} d\bar{\omega} = \int_{\partial \mathbb{R}_+^m} \bar{\omega}$.

Demostració. Escrivim

$$\bar{\omega} = \sum_{i=1}^m f_i(u_1, \dots, u_m) du_1 \wedge \dots \wedge \widehat{du}_i \wedge \dots \wedge du_m$$

i per tant

$$d\bar{\omega} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial u_i} du_i \wedge du_1 \wedge \dots \wedge \widehat{du}_i \wedge \dots \wedge du_m = \left(\sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \right) du_1 \wedge \dots \wedge du_m.$$

Aleshores

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^m} d\bar{\omega} &= \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{\partial f_i}{\partial u_i} du_1 \dots du_m \\ (\text{Fubini}) &= \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}_+^{m-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial u_i} du_i \right) du_1 \dots \widehat{du}_i \dots du_m \\ &\quad + (-1)^{m-1} \int_{\mathbb{R}_+^{m-1}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial u_i} du_i \right) du_1 \dots \widehat{du}_i \dots du_m. \end{aligned}$$

Ara bé, com el suport de $\bar{\omega}$ és compacte, tenim per $i = 1, \dots, m-1$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial u_i} du_i &= f_i(u_1, \dots, u_{i-1}, +\infty, u_{i+1}, \dots, u_m) - f_i(u_1, \dots, u_{i-1}, -\infty, u_{i+1}, \dots, u_m) \\ &= 0 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\partial f_m}{\partial u_m} du_m &= f_m(u_1, \dots, u_{m-1}, +\infty) - f_m(u_1, \dots, u_{m-1}, 0) \\ &= -f_m(u_1, \dots, u_{m-1}, 0). \end{aligned}$$

Al final obtenim

$$\int_{\mathbb{R}_+^m} d\bar{\omega} = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f(u_1, \dots, u_{m-1}, 0) \cdot (-1)^m du_1 \dots du_{m-1} = \int_{\partial \mathbb{R}_+^m} \bar{\omega},$$

com $\partial \mathbb{R}_+^m$ està orientada per $(-1)^m du_1 \wedge \dots \wedge du_{m-1}$.

Més precisament, dins el cas on $m \in 2\mathbb{N}$, considerem la parametrització local

$$\varphi : (u_1, \dots, u_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1} \mapsto (u_1, \dots, u_{m-1}, 0) \in \partial \mathbb{R}_+^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$$

que és compatible amb l'orientació $\eta_{\partial \mathbb{R}_+^m} = (-1)^m du_1 \wedge \dots \wedge du_{m-1}$ com

$$\eta_{\partial \mathbb{R}_+^m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_{m-1}} \right) = (-1)^m = 1.$$

Dins aquest cas,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f(u_1, \dots, u_{m-1}, 0) \cdot (-1)^m du_1 \dots du_{m-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f(u_1, \dots, u_{m-1}, 0) du_1 \dots du_{m-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \bar{\omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_{m-1}} \right) du_1 \dots du_{m-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \bar{\omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_{m-1}} \right) du_1 \wedge \dots \wedge du_{m-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \varphi^* \bar{\omega} \\ &= \int_{\partial \mathbb{R}_+^m} \bar{\omega}. \end{aligned}$$

Si no, $m \in 2\mathbb{N} + 1$, i considerem la parametrització local

$$\varphi : (u_1, \dots, u_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1} \mapsto (u_2, u_1, u_3, \dots, u_{m-1}, 0) \in \partial \mathbb{R}_+^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$$

que és compatible amb l'orientació com

$$\eta_{\partial \mathbb{R}_+^m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_{m-1}} \right) = (-1)^{m+1} = 1.$$

Aleshores

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f(u_1, \dots, u_{m-1}, 0) \cdot (-1)^m du_1 \dots du_{m-1} \\
&= - \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f(u_1, \dots, u_{m-1}, 0) du_1 \dots du_{m-1} \\
&= - \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f(u_1, \dots, u_{m-1}, 0) du_2 du_1 du_3 \dots du_{m-1} \\
&= - \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \bar{\omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_{m-1}} \right) du_2 \wedge du_1 \wedge \dots \wedge du_{m-1} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \bar{\omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_{m-1}} \right) du_1 \wedge \dots \wedge du_{m-1} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \varphi^* \bar{\omega} \\
&= \int_{\partial \mathbb{R}_+^m} \bar{\omega}.
\end{aligned}$$

□

Acabem la demostració:

$$\begin{aligned}
\int_M d\omega &= \sum_{i \in J} \int_{\mathbb{R}_+^m} d\bar{\omega}_i + \sum_{i \notin J} \int_{\mathbb{R}_+^m} d\bar{\omega}_i \\
&= \sum_{i \in J} \int_{\partial \mathbb{R}_+^m} \bar{\omega}_i = \sum_{i \in J} \int_{\Omega_i \cap \partial \mathbb{R}_+^m} \varphi_i^* (\rho_i \omega) \\
&= \sum_{i \in J} \int_{\partial M} \rho_i \omega = \int_{\partial M} \sum_{i \in J} \rho_i \omega \\
&= \int_{\partial M} \omega.
\end{aligned}$$

□

El corol·lari següent és directe.

Corol·lari 4.5.1

Sigui $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat orientada amb $\partial M = \emptyset$. Llavors

$$\int_M d\omega = 0$$

per tot $\omega \in \Omega_c^{m-1}(M)$.

El corol·lari següent és clàssic (Teorema de Green).

Corol·lari 4.5.2

Sigui $D \subset \mathbb{R}^2$ una subvarietat amb vora de dimensió 2, i $P, Q \in C^\infty(D)$. Llavors

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} (P dx + Q dy).$$

Demostració. Apliquem el teorema de Stokes amb la 2-forma $\omega = P dx + Q dy$. □