REDES- Revista hispana para el análisis de redes sociales
Vol.?,#?, Junio 2010
http://revista-redes.rediris.es

Modelos matemáticos de la sociedad y aplicaciones. Grupos en la red social.

Nelia Tello[1]

Escuela Nacional de Trabajo Social, Universidad Nacional Autónoma de México, México.

José Antonio de la Peña[2]

Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México y Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, México.

Resumen
Consideramos la estructura de las redes sociales S correspondientes a sociedades primitivas donde cada individuo pertenece a un clan. El número de clanes y el tamaño de la sociedad se pueden acotar en función del *número de Perron* r(S), asociado a la matriz de adyacencia de la red, que a su vez es menor que el número de Dunbar de la sociedad, esto es, r(S) ≤ $D(S)$. El número de Perron r(S) es una medida de la complejidad de la red S.
Palabras clave: clan, tribu, número de Dunbar, número de Perron.

Abstract
We consider the structure of social networks corresponding to primitive societies where each individual belongs to a clan. The number of clans and the size of the society are bounded as functions of the Perron number r(S) of the adjacency matrix of the network. We get the inequality r(S) ≤ $D(S)$ comparing the Perron and the Dunbar numbers of the network. The Perron number r(S) is a measure of the complexity of the social network.
Key words: clan, tribe, Dunbar number, Perron number.

En este capítulo, estudiaremos los grupos sociales, que llamaremos clanes, como constituyentes fundamentales de la red social. Un ***clan***[3] es un conjunto de individuos fuertemente cohesionados que desempeñan *roles* similares al interior del grupo social. En general, un clan es una estructura duradera y los individuos dentro de él actúan de acuerdo con *normas, valores* y *fines* acordados y necesarios, en principio, para el bien común del grupo. Otro término usado es ***clique.*** De origen francés, y más usado en inglés, es el término usado en teoría de gráficas.

El ejemplo fundamental, por supuesto, es la *familia,* definida por vínculos dados a priori y de carácter estable y duradero. En general, la familia nuclear, formada por

---

[1]E-mail: neliatello@me.com

[2] E-mail: jap@matem.unam.mx

[3] El término *clan* en su uso actual tiene una connotación de linaje o ascendencia familiar. Sin embargo, el origen de la palabra es irlandés y gaélico y se refiere más a *tribu* o *familia extendida* y tiene un significado territorial. Es en este sentido que nosotros la usamos.

los padres y los hijos, es la base de la estructura, pero en muchas sociedades, aún hoy en día, la *familia extendida* es una estructura organizada, jerarquizada y funcional. Este es un ejemplo de clan que consideraremos.

Aunque, en general, la familia está definida por lazos de 'sangre', según la antropología, esto no es así en muchas sociedades, donde la familia se define por otros rasgos diferentes a la 'distancia genética'. El primer estudio extensivo de esta índole fue el de Louis H. Morgan que en 1877 publicó *Las sociedades primitivas* presentando diferentes conceptos de afinidad y convivencia familiar en el mundo. Su trabajo fue la fuente de inspiración para el famoso estudio de Engels, *El origen de la familia, de la propiedad privada y del Estado* publicado en 1884, que extiende la idea de que son los factores económicos de control de bienes y propiedades los que producen la transformación de la vida tribal primitiva en una sociedad con clases.

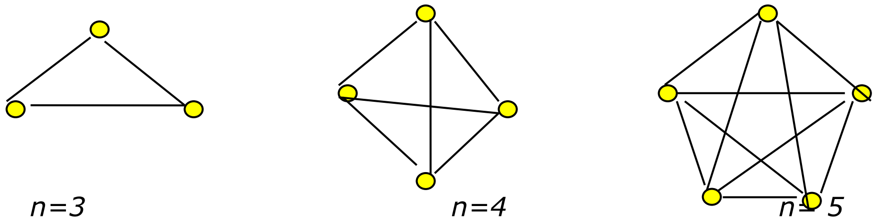
El modelo de los clanes.

Para nuestros fines de construir un modelo de la sociedad, tenemos que entender la descripción y el papel de los clanes en una red social *S*, puramente desde el punto de vista de los enlaces entre individuos dentro y fuera del clan. Es importante este punto: desde la perspectiva del modelo de redes, no podemos hacer uso de más información que la que leemos en la estructura de la red. Por lo pronto, no les pedimos a nuestros nodos certificados de consanguineidad, ni domicilios, pero estos son elementos que podremos incorporar posteriormente.

El elemento definitorio de un clan *C* dentro de la red social *S* es la:

Afinidad: todos los miembros de un clan se conocen bien entre sí y comparten intereses, valores y normas.

Comenzaremos viendo la estructura de la red con estas condiciones. En primer lugar observamos que un clan *C* dentro de la sociedad *S* tiene un número $n(C)$ de individuos acotado por el número de Dunbar $D(S)$, esto es, $n(C) \leq D(C)$. En efecto, la gráfica, sin pesos, de un clan *C* con *n* individuos se ve como sigue:



O sea, todos los nodos son vecinos de todos los otros nodos en C. Las gráficas así obtenidas se llaman *completas* o *n*-cliques.

Siendo el número de Dunbar a lo más 150, obtenemos esta cota para nuestros clanes. Para constatar esta afirmación sobre el tamaño de los clanes, Dunbar, usando la literatura antropológica y etnográfica para realizar una especie de censo sobre tamaños de grupos sociales en las sociedades nómadas, notó que los grupos caían dentro de tres categorías, de 30-50, 100-200, y 500-2500 individuos, donde a mayor tamaño se gana estructura pero se pierden las relaciones directas entre individuos del grupo. En el estudio se incluyeron también otros tipos de sociedades, como las sociedades científicas, donde 200 es el máximo número de académicos en la sub-especialización de una disciplina; y las unidades militares, donde 150 era el tamaño básico de una unidad militar profesional en la Roma antigua y así se ha mantenido hasta los tiempos modernos.

Valores y vectores propios de una matriz.

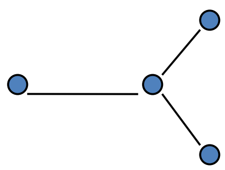
Consideremos una matriz $A=(a_{ij})$ de tamaño n x n. Decimos que un vector u de tamaño n es vector propio de A, si existe un número r tal que Au = ru.

Los valores propios son las soluciones numéricas de la ecuación Det $(x\ id_n - A)=0$, que se llama la *ecuación característica* de A, donde id_n es la matriz identidad de tamaño n x n. Una vez encontrados los valores propios, para cada uno de ellos, digamos r, el correspondiente vector propio u es solución de la ecuación lineal:

$$A\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Si A es *simétrica,* esto es $a_{ij}=a_{ji}$, para todas las entradas $1 \leq i,j \leq n$, entonces hay n soluciones reales de la ecuación característica. En caso de que la matriz A sea *positiva*, esto es, $a_{ij} \geq 0$ para todas las entradas i,j, entonces hay valores propios $r \geq 0$. El máximo de los valores propios $r(A)= \max \{ r : 0 \leq r \text{ valor propio de } A\}$ se llama el *radio espectral* de A.

Ejemplo: consideremos la gráfica G con matriz de adyacencia A como sigue:



$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y ecuación característica $0= x^4 - 3x^2 = (x^2 - 3)\,x^2$, de manera que los valores propios son $\sqrt{3}$ y 0 con multiplicidad 2. El radio espectral es $r(A) = \sqrt{3}$ y el vector propio u correspondiente satisface la ecuación Au=r u, esto es,

$$\begin{cases} u_2 = \sqrt{3}\,u_1 \\ u_1 + u_3 + u_4 = \sqrt{3}u_2 \\ u_2 = \sqrt{3}u_3 \\ u_2 = \sqrt{3}u_4 \end{cases} \quad \text{con solución } u = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El radio espectral de una red social.

Una red social con gráfica asociada G tiene una matriz de adyacencia $A(G)=(a_{xy})$ que son positivas. Una observación importante es que

$$\min \{ c(x) : 1\leq x \leq n\} \leq c(G) \leq r(A(G)) \leq \max \{ c(x): 1\leq x \leq n\} = D(G),$$

o sea, el *radio espectral* de la matriz de adyacencia resulta acotado por abajo por el número promedio c(G) de vecinos en G, y por arriba por el número de Dunbar de la gráfica G.

Otro resultado asegura que si B es una *submatriz principal* de la matriz A, esto es, B se obtiene tomando algunos renglones y las correspondientes columnas de A, entonces los radios espectrales cumplen $r(B) \leq r(A)$.

Consideremos el caso de submatrices principales de G que forman un clan.

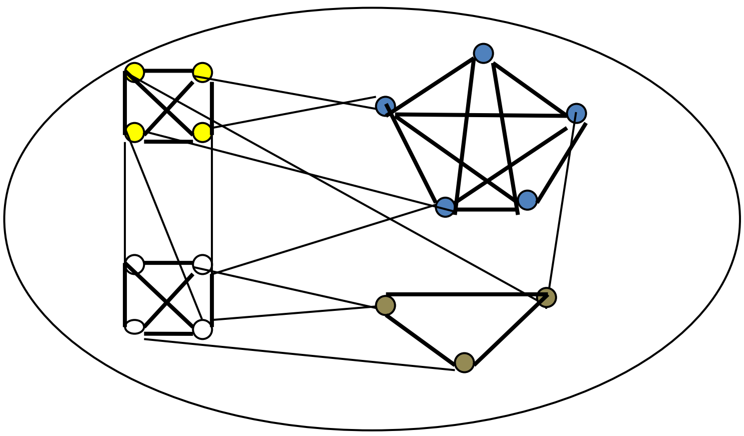
Clanes como subgráficas de una red.

Sea G una gráfica con *n* nodos, que representa una red social. Consideremos un clan C en G definido por *m* nodos, que visto como gráfica tiene matriz de adyacencia $A(C)= (a_{ij})$.

En primer lugar, observamos que $a_{ij} =1$ para todos los nodos i,j de *C*. Llamemos u_s al vector columna de tamaño *s* cuyas entradas son todas 1. Entonces

$\underline{A}(C)\ u_m = (m-1)\ u_m$, esto es, u_m es vector propio de $\underline{A}(C)$ con valor propio $m - 1$. Observemos que el radio espectral $r(C) = c(C) = m-1$.

Corolario: si C es un clan en G con *m* nodos, entonces el radio espectral de $\underline{A}(G)$ satisface $m-1 \leq r(\underline{A}(G)) \leq D(G)$.



> En una *sociedad tribal*, cada individuo pertenece a un clan. El clan con mayor número de miembros, en este caso 5, determina el número de Dunbar, en este caso $D(S) = 7$. El radio espectral $r(S)$ de la matriz de adyacencia queda acotado por $4 < r(S) < 7$.

Probablemente el caso mejor documentado y estudiado de una sociedad tribal es el de los *yanomamo* en el amazonia brasileño, entre los cuales vivió y trabajó durante 4 años el antropólogo norteamericano Napoleon Chagnon. Su libro *The fierce people* publicado en 1968 representa todavía una de las mayores aportaciones etnográficas sobre civilizaciones primitivas. Los yanomamo viven en pequeñas comunidades en forma de aldeas cuya población promedio es de 100 habitantes dedicados a la agricultura y al forraje. Sin embargo estas aldeas sedentarias pueden dividirse en pequeños grupos de caza y recolección constituidos cada uno por 30 a 40 individuos. Las aldeas son regidas por *jefes* tribales y son esencialmente autosuficientes en la producción de sus bienes de consumo. La principal relación entre las aldeas es la práctica frecuente de guerras rituales y ataques para robar mujeres. Al tiempo del reporte de Chagnon había unos 12,000 pobladores divididos en 125 aldeas[4].

¿Qué indica nuestro modelo de redes sociales en el caso de una sociedad tribal como los yanomamo? En una sociedad así formada, cada aldea es un clan y por lo tanto su población está acotada por $D(S)$, el número de Dunbar. Por otra parte, a falta de una estructura de gobierno, el jefe de cada aldea debe conocer a los jefes de todas las otras aldeas, lo que asimismo limita el número posible de aldeas. Resulta así que la población total $n(S)$ en una sociedad tribal S deberá satisfacer $n(S) \leq D(S)^2 \leq 22{,}500$.

La literatura donde se discute el tamaño de las poblaciones en función de las posibilidades de sustentabilidad de los bienes de consumo es inmensa, remontándose, al menos, al *Ensayo sobre el principio de población* (1798), escrita por el economista inglés Thomas Malthus, en la que desarrolla la influyente teoría de que la población crece más rápidamente que los recursos, conduciendo a una progresiva pauperización de la población. En nuestra discusión sobre las sociedades tribales hemos argumentado de otra manera, que en esencia se remonta a los

[4] Otro ejemplo contemporáneo de sociedades tribales lo constituyen los *hombres de los arbustos* que se distribuyen en un área similar a la de Dinamarca entre Sudáfrica, Namibia y Angola. Con una población de unos 82,000 individuos, se dedican a la caza y recolección, viven en pequeñas comunidades sedentarias o en grupos nómadas de entre 40 y 60 individuos.

límites cerebrales del ser humano para conocer bien a otros individuos. El argumento implica también que *las sociedades humanas con una población mayor a $D(S)^2$ requieren de organización adicional a los clanes para su funcionamiento*. Esto explica el surgimiento *espontáneo* de supra organizaciones (el Estado entre otras) en una sociedad conforme esta crece.

Siguiendo los principios de Malthus, Herbert Spencer concluyó que las sociedades humanas están sujetas a presiones internas y externas constantes que la fuerzan a adaptar su estructura interna. Argumentaba que toda sociedad requiere resolver problemas de *coordinación*, *producción* de bienes, servicios e ideas y finalmente *distribución* de estos recursos. En las sociedades tribales estas tres funciones se llevan a cabo a través de las líneas de afinidad y parentesco, pero conforme crece la población nuevos problemas de alimentación emergen que requieren *división del trabajo* y con ello, nuevas formas de organización, coordinación y distribución. En una analogía muy popular, Spencer comparaba a los individuos, las instituciones y el gobierno de la sociedad humana con un cuerpo, donde las células forman los órganos que deben funcionar adecuadamente para garantizar el correcto funcionamiento del cuerpo. Estas direcciones de pensamiento de la *escuela estructural-funcionalista* en sociología, conducen al desarrollo por Durkheim de la noción de *sistemas diferenciados* y los antecedentes de la *teoría de la complejidad* que se encuentran en Parsons.

La complejidad de una red social habla de las múltiples interacciones entre los individuos, las organizaciones sociales, el gobierno y la manera en que estas interacciones determinan y controlan el rol de los individuos en el sistema y el crecimiento y desarrollo de la red. Ya hemos dicho en la Introducción que desde el punto de vista de la teoría de redes, toda la información que tenemos está contendida en la gráfica de la red.

En nuestro modelo de red social *S*, la *medida de complejidad* de la red estará dada por el *radio espectral* r(*S*), esto es, el máximo valor propio de la matriz de la red A(*S*).

Este acuerdo, que además de aparentemente artificial, por sí mismo poco significa, deberá sustentarse en resultados que muestren que la noción intuitiva de complejidad en la red *S* se relaciona adecuadamente con el invariante r(*S*). Por lo pronto, podemos señalar las siguientes propiedades:

(a) Si c(S) es el promedio del número de vecinos de nodos en S y $D(S)$ es el número de Dunbar de la red S, entonces c(S) ≤ r(S) ≤ 3 $D(S)$;

(b) Si C es un clan con m miembros en la red S, entonces m-1 ≤ r(S);

(c) Si S es una sociedad tribal, entonces el número de clanes es cl(S) ≤ r(S)^2 y el tamaño de la sociedad es $n(S)$ ≤ r(S)^3;

(d) Si S' es la red social formada sólo por algunos de los individuos pertenecientes a S, entonces r(S') ≤ r(S).

(e) Supongamos que la red S es *conexa* y S' es una subred de S, entonces la igualdad r(S') = r(S) vale sólo cuando S'=S.

La propiedad (c) se puede demostrar como sigue: en una sociedad tribal, el individuo x está en un clan C_x que tiene por jefe a x_0. Para dos individuos cualesquiera x,y hay entonces un camino de longitud 3 en S formado como

$$x - x_0 - y_0 - y$$

lo que significa que todas las entradas de A(S)^3 son positivas y las entradas $a^{(2)}_{xy_0}$ de A(S)^2 son positivas. Como A(S) u = r(S) u para el *vector de Perron* u cuyas entradas, todas positivas, podemos elegir cumpliendo u_1 +…+ u_n =1. Elegimos x_0 coordenada donde u toma un valor mínimo, entonces cl(S) ≤ $\sum_y a^{(2)}_{x_0y}$ y obtenemos

$$\mathrm{cl}(S)u_{x_0} \leq \sum_y a^{(2)}_{x_0y}\, u_{x_0} \leq \sum_{y\,\epsilon\, S} a^{(2)}_{x_0y}\, u_y = \mathrm{r}^{\,2}\, u_{x_0}\ ,\ \mathrm{y}$$

$$n(S)\, u_{x_0} \leq \sum_y a^{(3)}_{x_0y}\, u_{x_0} \leq \sum_{y\,\epsilon\, S} a^{(3)}_{x_0y}\, u_y = \mathrm{r}^{\,3}\, u_{x_0}\ .$$

Si S' es una red social formada por algunos de los individuos de la red S, con sus lazos de relación, decimos que S' es una *subred* de S. Las propiedades (d) y (e) del radio espectral son muy importantes y las conoceremos como propiedades de *decrecimiento en subredes*.

En el próximo capítulo de la serie veremos como el radio espectral y el vector propio correspondiente son herramientas esenciales para describir un rango entre los nodos de la red que permite diferenciar su importancia relativa. Las aplicaciones de estas herramientas son impresionantes, baste decir por lo pronto, que son la base de la *economía matemática* y de algoritmos como el buscador de *Google*.

Referencias bibliográficas

Cvetkovic, D., Doob, M. and Sachs, H. *Spectra of Graphs -- Theory and applications*. Academic Press (1980).

Chagnon, N. (1968): *Yanomamö: The Fierce People*, U. of Michigan.

Chagnon, N. (2002) *Adaptation and Human Behavior: An Anthropological Perspective* (with Lee Cronk and William Irons).

Dunbar, R.I.M (1992), *Neocortex size as a constraint on group size in primates*, *Journal of Human Evolution* vol. 20, pp. 469-493.

Gantmacher, F.R. *The theory of matrices*.Vol II. Chelsea, New York (1974).

Gladwell, Malcolm (2000). The Tipping Point - How Little Things Make a Big Difference. Little, Brown and Company.

Hoult, Thomas Ford (1969). *Dictionary of Modern Sociology*.

Lenski, Gerhard (1966). *Power and Privilege: A Theory of Social Stratification*. New York: McGraw-Hill.

Lin, N., Dayton, P., & Greenwald, P. (1978). *The urban communication network and social stratification: A "small world experiment."* In B. D. Ruben (Ed.), Communication yearbook: Volume 1 (pp. 107-119) . New Brunswick: Transaction Books.

Lundberg, C. C. (1975). *Patterns of acquaintanceship in society and complex organization: A comparative study of the small world problem*. Pacific Sociological Review 18, 206-222.

Merton, Robert (1958) *Consensus and Controversy*, Falmer Press, London.

Merton, Robert (1957). *Social Theory and Social Structure*, revised and enlarged. London: The Free Press of Glencoe.

Nolan, Patrick and Gerhard Lenski (2004). *Human Societies: An Introduction to Macrosociology.* Boulder, CO: Paradigm.

Parsons, Talcott (1951) *The Social System*, Routledge, London.

De la Peña, J.A. (1996) *Algebra Lineal Avanzada*. Fondo de Cultura Económica. México.

De la Peña, J.A. and Tello, N.(2010): *The structure of tribal societies*. In preparation.