

Valoración de opciones de compra bermuda con precios de ejercicio variables

Santiago Leguey Galán

CESSJ Ramón Carande (Universidad Juan Carlos I).

Francesc Llerena Garrés

Universitat Rovira i Virgili.

Recibido: diciembre de 1997

Aceptado: julio de 1998

Resumen

En el presente trabajo se obtiene una fórmula para valorar opciones de compra bermuda con precios de ejercicio variables sobre un activo subyacente que no paga dividendos y cuya dinámica viene descrita por un proceso browniano geométrico o lognormal. En el marco teórico planteado la fórmula de Black-Scholes para opciones de compra europeas resulta ser un caso particular de la expresión obtenida. La discretización del conjunto de oportunidades de ejercicio permite aproximar el valor de una opción de compra que puede ejercerse en cualquier instante a un precio de ejercicio estrictamente creciente respecto al tiempo.

Palabras clave: arbitraje, opción de compra bermuda, proceso de difusión lognormal.

Abstract. *Valuation of bermuda call options with variable exercise prices*

In this paper a formula is deduced in order to value bermuda call options with variable exercise prices on a non-dividend-paying stock. It is assumed that the dynamics of underlying asset prices are defined by a lognormal diffusion process. The Black Scholes formula for European call options is a particular case within the established valuation framework. The discretization of exercise opportunities allows an approximation of the call option's value which can be executed at any moment to an exercise price that strictly increases with time.

Key words: arbitrage, bermuda call option, lognormal diffusion process.

1. Introducción

La moderna teoría de valoración de opciones tiene su origen en el artículo de Black-Scholes (1973). La importancia del mismo radica, más que en su modelo de opciones, en el análisis cualitativo que subyace en el mismo. Este marco de valoración se fundamenta en una relación de arbitraje y el objetivo es establecer una dependencia funcional entre el valor de un activo (activo derivado) y el

valor, supuestamente conocido, de otros (activos subyacentes).¹ La idea fundamental de los modelos continuos² de arbitraje es que, bajo ciertas hipótesis, es posible crear una cartera de cobertura, formada por un número determinado de activos derivados y de activos subyacentes negociables, de manera que ajustando continua y convenientemente el número de éstos obtengamos una cartera exenta de riesgo. Entonces, suponiendo que el mercado no permite oportunidades de arbitraje, la rentabilidad nominal instantánea esperada de la cartera debe coincidir con el tipo de interés libre de riesgo. La conjunción de estas hipótesis proporciona un modelo de valoración descrito por una ecuación diferencial parcial (EDP), cuyas condiciones de contorno-arbitraje recogen las características esenciales del título a valorar. Aunque este método de valoración es muy flexible, la mayoría de sus aplicaciones dan origen a ecuaciones diferenciales sin solución analítica. Esto a dado lugar a una extensa literatura sobre métodos numéricos aplicados a la valoración de opciones y de activos contingentes, en general. Una forma práctica de acotar el problema, ampliamente utilizada, es introducir hipótesis que permiten expresar el título objeto de valoración como combinación de opciones, reduciéndolo a encontrar soluciones a las ecuaciones diferenciales que definan a éstas últimas.

Una extensión natural de las opciones de compra europeas son las llamadas opciones de compra bermuda³, que pueden ser ejercidas en un número discreto de fechas, lo que constituye un caso intermedio entre las europeas y las americanas.

Podemos encontrar algunos trabajos sobre determinados tipos de opciones bermuda. Por ejemplo, en Flesaker (1992), Chance (1992) y Trippi y Chance (1993) se estudian las *Bermuda capped option* que combinan la característica de ejercicio al final del vencimiento, en cuanto que el poseedor de la opción no tiene derecho a ejercerla antes del mismo, y el ejercicio automático en un conjunto predeterminado de fechas si el valor del subyacente alcanza un determinado nivel (*cap*). El primer autor aproxima su valor aplicando el método de simulación de Monte Carlo, el segundo utiliza el algoritmo de las diferencias finitas. En Trippi y Chance (1993) se presenta una valoración analítica aproximada utilizando el modelo de Black-Scholes con pago continuo de dividendos ajustado por Merton (1973). En Leguey (1995) se estudian las opciones de venta bermuda con precios de ejercicio constante como una vía de aproximación al valor de las opciones de venta americanas. Este tipo de bermuda difiere de las *capped* en cuanto que no contempla la posibilidad de ejercicio automático y puede ser ejercida en un conjunto discreto de fechas antes del vencimiento.

Nuestro trabajo se centrará en las opciones de compra bermuda con precios de ejercicio no uniformes, con el objeto de obtener una fórmula cerrada para su valoración. Como hipótesis de trabajo supondremos que el subyacente no reali-

1. Activos en sentido amplio; es decir, no necesariamente negociables.

2. Continuos en cuanto que consideran que la contratación en el mercado se realiza de forma continua en el tiempo.

3. Este tipo de opciones también son conocidas como *Atlantic option*, *Limited exercise option* y *Quasi-American option*. Ver Gastineau (1992).

za pagos durante la vida de la opción y que la dinámica de su valor sigue un proceso browniano geométrico o lognormal.⁴ Existen aproximaciones algorítmicas a este problema: por ejemplo, Merton (1973) y, más recientemente, Dewynne-Howison-Wilmott (1997). Merton describe un método sistemático para valorar opciones americanas en el supuesto que existan n cambios en el precio de ejercicio. Se demuestra, bajo ciertas condiciones, que el ejercicio anticipado únicamente puede ser óptimo justo antes de la variación del precio de ejercicio. Por tanto, esta opción es equivalente a una bermuda con precios de ejercicio variables. En Dewynne-Howison-Wilmott se implementa un pseudo-código del algoritmo SOR (Successive Over Relaxation)⁵ para valorar este tipo de opciones bermuda. Nuestro enfoque, a diferencia de los anteriores que requieren de algoritmos iterativos para su resolución, proporciona una expresión cerrada para su valoración.

Es sabido que, en ausencia de dividendos, la opción de compra americana no vale más que su correspondiente europea. Evidentemente, este límite también será válido para opciones bermuda con precios de ejercicio constantes. Nuestro punto de partida será establecer la relación que debe existir entre los precios de ejercicio para que el problema tenga sentido. Esto se expone en la sección 3.1. Previamente, en la sección 2, se define el marco teórico de valoración. En las secciones 3.2, 3.3 y 3.4 se plantean la EDP y la condición de contorno que definen a la opción descrita, resolviéndose inductivamente. La discretización del conjunto de fechas de ejercicio nos permitirá aproximar el valor de una opción de compra que puede ejercerse en cualquier instante a un precio de ejercicio estrictamente creciente respecto al tiempo. En la sección 4, mediante un ejemplo numérico, se analiza el comportamiento de la opción frente a variaciones de la volatilidad, de los precios de ejercicio y del tipo de interés sin riesgo. En la sección 5, y última, se exponen las conclusiones del trabajo.

2. Hipótesis y notación

La EDP a resolver puede deducirse bajo supuestos distintos. Así, por ejemplo, los trabajos de Black-Scholes (1973), Merton (1973) y Merton (1977) parten de hipótesis diferentes para llegar a la misma EDP. De todas ellas, las fundamentales son la posibilidad de realizar transacciones de forma continua, la ausencia de oportunidades de arbitraje y el proceso estocástico que describe la dinámica del valor de los activos subyacentes.

4. La elección de un proceso lognormal responde más a criterios de operatividad en cuanto a obtener una fórmula de valoración, que no, posiblemente, a una realidad empírica. Una técnica estadística para corregir el error que cometemos al considerar una función de distribución alternativa, distinta de la verdadera, es la denominada *ampliación de las series de Edgeworth*. Básicamente, el método consiste en minimizar el error a través de los momentos de segundo orden y superiores de ambas distribuciones. Véase Jarrow-Rudd (1982) para una aplicación de esta técnica a la valoración de opciones europeas.
5. El método SOR es utilizado frecuentemente para resolver ciertos tipos de ecuaciones matriciales. Ver, Por ejemplo, Stoer y Bulirsch (1993).

La notación básica usada en el texto es la siguiente:

t fecha de valoración,

T_i fecha de ejercicio. $T_i \in \{T_1, \dots, T_n\}, T_i < T_{i+1}$,

k_i precio de ejercicio asociado a T_i . $k_i \in \{k_1, \dots, k_n\}$,

v_{T_i} v.a. «valor del subyacente en la fecha de ejercicio T_i », $t = T_0$, $\tau_i = T_i - t$,

$C = C(v, T_1, \dots, T_n; k_1, \dots, k_n)$ valor en t de la opción de compra bermuda descri-

$$\text{ta, } \frac{\partial C}{\partial v_t} = C_1, \frac{\partial^2 C}{\partial v_t^2} = C_{11}, \frac{\partial C}{\partial t} = C_t,$$

$C_e = C_e(v_{T_i}, T_j; k_j)$ valor en T_i de una opción de compra europea sobre el mismo subyacente que la opción bermuda, ejercitable en T_j ($T_j \geq T_i$) a un precio de ejercicio de k_j ,

$C_a = C_a(v_{T_i}, T_j; k_j)$ valor en T_i de una opción de compra americana sobre el mismo subyacente que la opción bermuda, ejercitable en el intervalo $[T_i, T_j]$ a un precio de ejercicio de k_j ,

r tipo de interés sin riesgo a corto plazo, conocido y constante en $[t, T_n]$,

$f(T_j, T_i)$ valor en T_i de un bono sin riesgo que paga 1 u.m. en T_j ($T_j \geq T_i$),

$dv_t = \mu v_t dt + \sigma v_t dz_t$ proceso lognormal que modeliza las variaciones instantáneas del valor del subyacente, siendo dz_t un proceso estándar de Wiener,

$p(v_{T_i} | v_{T_j})$ probabilidad de transición de que el valor del subyacente en T_i sea v_{T_i} condicionada al valor que tome en T_j ($i > j$).

Cuando se requiera una notación adicional se la definirá en el texto.

3. Valoración de opciones de compra bermuda

3.1. Delimitación del problema

Es bien sabido que una opción de compra americana sobre un subyacente que no paga dividendos no vale más que su correspondiente europea. Siendo la opción bermuda un caso intermedio entre la americana y la europea, cabe preguntarse, bajo las hipótesis de ausencia de arbitraje (o de activos dominados) y de inversores que prefieren más a menos, para que precios de ejercicio el problema tiene sentido.

a) Consideremos en primer lugar una opción de compra bermuda con dos fechas de ejercicio $\{T_1, T_2\}$ y con precios de ejercicio asociados de $\{k_1, k_2\}$, respectivamente.

— Si $k_1 = k_2$, $C_e(v, T_2; k_2) \leq C(v, T_1, T_2; k_1, k_2) \leq C_a(v, T_2; k_2)$. Puesto que en ausencia de dividendos las opciones europea y americana tienen el mismo valor, se tiene

$$C(v, T_1, T_2; k_1, k_2) = C_e(v, T_2; k_2) = C_a(v, T_2; k_2)$$

- Si $k_1 > k_2$ y la opción se ejerce en T_1 su valor será $v_{T_1} - k_1 < v_{T_1} - k_2$. Como $C_e(v_{T_1}, T_2; k_2) \geq \max\{0, v_{T_1} - k_2 f(T_2, T_1)\} \geq v_{T_1} - k_2 f(T_2, T_1) > v_{T_1} - k_2$ y $C(v_{T_1}, T_2; k_2) = C_e(v_{T_1}, T_2; k_2)$, se tiene $v_{T_1} - k_1 < C(v_{T_1}, T_2; k_2)$. Es decir, en T_1 la opción vale más viva que muerta y, en consecuencia, no se ejercerá, coincidiendo su valor con el de una opción de compra europea con fecha y precio de ejercicio de T_2 y k_2 , respectivamente:

$$C(v, T_1, T_2; k_1, k_2) = C_e(v, T_2; k_2)$$

- $k_1 < k_2$. La opción se ejercerá en T_1 si $v_{T_1} - k_1 > C(v_{T_1}, T_2; k_2)$. Como $C(v_{T_1}, T_2; k_2) = C_e(v_{T_1}, T_2; k_2) \geq v_{T_1} - k_2 f(T_2, T_1)$, se tiene $v_{T_1} - k_1 > v_{T_1} - k_2 f(T_2, T_1)$, si y sólo si $\frac{k_1}{k_2} < f(T_2, T_1)$. Bajo la hipótesis de tipo de interés conocido y constante: $f(T_2, T_1) = e^{-r(T_2 - T_1)}$, de donde:

$$\frac{k_1}{k_2} < e^{-r(T_2 - T_1)} \quad [1]$$

La desigualdad [1] es una condición necesaria de ejercicio anticipado, por tanto, si $\frac{k_1}{k_2} > e^{-r(T_2 - T_1)}$ la opción bermuda no se ejercerá en T_1 , coincidiendo su valor con el de una opción de compra europea con fecha y precio de ejercicio T_2 y k_2 , respectivamente:

$$C(v, T_1, T_2; k_1, k_2) = C_e(v, T_2; k_2)$$

Evidentemente, si la volatilidad del subyacente es nula la condición [1] se convierte en necesaria y suficiente.

- b) Consideremos ahora el caso general de una opción de compra bermuda con fechas de ejercicio $\{T_1, \dots, T_n\}$ y precios de ejercicio asociados de $\{k_1, \dots, k_n\}$, respectivamente.

- Si $k_1 = \dots = k_n$, $C_e(v, T_n; k_n) \leq C(v, T_1, \dots, T_n; k_1, \dots, k_n) \leq C_a(v, T_n; k_n)$. Como en ausencia de dividendos el valor de las opciones de compra europea y americana coinciden, se tiene:

$$C(v, T_1, \dots, T_n; k_1, \dots, k_n) = C_e(v, T_n; k_n) = C_a(v, T_n; k_n)$$

- Si $k_i > k_{i+1}$ y la opción se ejerce en T_i , su valor será $v_{T_i} - k_i < v_{T_i} - k_{i+1} < C_e(v_{T_i}, T_{i+1}; k_{i+1}) \leq C(v_{T_i}, T_{i+1}, \dots, T_n; k_{i+1}, \dots, k_n)$. Es decir, la opción vale más viva que muerta y, en consecuencia, no se ejercerá en T_i .

— $k_i < k_{i+1}$. La opción se ejercerá en T_i si:

$$v_{T_i} - k_i > C(v_{T_i}, T_{i+1}, \dots, T_n; k_{i+1}, \dots, k_n) \geq C_e(v_{T_i}, T_{i+1}; k_{i+1}) \geq$$

$$\geq v_{T_i} - k_{i+1} f(T_{i+1}, T_i). \text{ Si tomamos } f(T_{i+1}, T_i) = e^{-r(T_{i+1}-T_i)},$$

se tiene $v_{T_i} - k_i > v_{T_i} - k_{i+1} e^{-r(T_{i+1}-T_i)}$, si y sólo si:

$$\frac{k_i}{k_{i+1}} < e^{-r(T_{i+1}-T_i)} \quad [2]$$

Obsérvese también aquí que la expresión [2] es una condición necesaria de ejercicio anticipado, por tanto, si $k_i/k_{i+1} > e^{-r(T_{i+1}-T_i)}$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$, podemos eliminar T_i como posible fecha de ejercicio.

Es importante resaltar que las condiciones anteriores no presuponen que el valor del subyacente venga descrito por un determinado proceso estocástico.

3.2. La ecuación de valoración

La función C que simboliza el valor de la opción de compra bermuda responderá a la EDP:

$$0 = C_1 r v_t + \frac{1}{2} C_{11} v_t^2 \sigma^2 + C_t - rC \quad [3]$$

sujeta a

$$\text{en } T_1, C = \max\{0, v_{T_1} - k_1, C(v_{T_1}, T_2, \dots, T_n; k_2, \dots, k_n)\} \quad [3.1]$$

cuya solución es⁶

$$C = e^{-r\tau_1} E_t [\max\{0, v_{T_1} - k_1, C(v_{T_1}, T_2, \dots, T_n; k_2, \dots, k_n)\} | v_t]$$

tomando como dinámica corregida del valor del subyacente a $dv_t = r v_t dt + \sigma v_t dz_t$, donde dz_t es un proceso estándar de Wiener.

Resolveremos la EDP [3] sujeta a [3.1] inductivamente.

6. Consideremos una EDP del tipo:

$$0 = C_1 r v + \frac{1}{2} C_{11} r v^2 \sigma^2 + C_t - rC,$$

sujeta a

$$C(v, T) = f(v_T)$$

Se demuestra (ver, por ejemplo, Rochet-Demange (1992: 216 y 217), que el precio del activo derivado $C(v, t)$ es igual a la esperanza matemática (para una cierta ley de probabilidad, llamada *probabilidad riesgo neutro*) de la suma actualizada, al tipo de interés libre de riesgo, de los pagos generados por el título, ya sean en forma de flujo continuo de cupones o dividendos, y/o bajo la forma de un reembolso final. En el caso que nos ocupa, la solución es

$$C(v, T) = E_t \left[e^{\int_t^T (-r) du} f(v_T) | v(t) = v \right].$$

3.3. Opciones de compra bermuda con dos fechas de ejercicio

Consideremos una opción de compra que únicamente puede ejercerse en las fechas T_1 y T_2 a unos precios de ejercicio de k_1 y k_2 , respectivamente.

Suponer que $dv_t = \mu v_t dt + \sigma v_t dz_t$ equivale, en términos de distribución, a que⁷:

$$\ln\left(\frac{v_{T_i}}{v_{T_{i-1}}}\right) \sim N(a, b)$$

siendo:

$$\varrho = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2,$$

$$a = \varrho(T_i - T_{i-1}),$$

$$b = \sigma^2(T_i - T_{i-1}),$$

y $N(a, b)$ la función de distribución normal de media a y variancia b .

Cálculo de $C(v, T_1, T_2; k_1, k_2)$.

$C(v, T_1, T_2; k_1, k_2) = e^{-rT_1} E_t [\max\{0, v_{T_1} - k_1, C(v_{T_1}, T_2; k_2)\} | v_t]$, teniendo en cuenta que $dv_t = rv_t dt + \sigma v_t dz_t$ y⁸ donde $C(v_{T_1}, T_2; k_2)$ representa el valor en T_1 de una opción de compra europea con vencimiento en T_2 y precio de ejercicio k_2 , estando definido por la fórmula de Black-Scholes.

Para calcular la esperanza matemática, debemos estudiar previamente los puntos de corte entre las funciones $v_{T_1} - k_1$ y $C(v_{T_1}, T_2; k_2)$. Para ello definiremos la función auxiliar: $f(v) = v - C(v, T_2; k_2) - k_1$.

$f(v)$ es una función continua y derivable con $f'(v) > 0$. En $v = 0$, $f(0) = -k_1 < 0$. Si $v \rightarrow \infty \Rightarrow f(v) \rightarrow k_2 e^{-r(T_2 - T_1)} - k_1$. Para asegurarnos que $f(v)$ tiene una única raíz debemos imponer la condición $\lim_{v \rightarrow \infty} f(v) > 0 \Leftrightarrow k_2 e^{-r(T_2 - T_1)} - k_1 > 0$, la cual se cumplirá si y sólo si

$$\frac{k_1}{k_2} < e^{-r(T_2 - T_1)} \quad [4]$$

7. Ver, por ejemplo, Hull (1993: 82 y 83).

8. Por tanto, a efectos de cálculo se tiene que

$$\ln\left(\frac{v_{T_i}}{v_{T_{i-1}}}\right) \sim N(r(T_i - T_{i-1}), \sigma^2(T_i - T_{i-1})).$$

Observación 1:

Si $\frac{k_1}{k_2} > e^{-r(T_2-T_1)}$, entonces, como la función $f(v)$ es estrictamente creciente se tiene que $f(v) = v - C(v, T_2; k_2) - k_1 < 0$ para todo v y la opción se ejercerá en T_2 coincidiendo su valor con el de una clásica con precio de ejercicio k_2 y vencimiento T_2 . Obsérvese que la expresión [4] coincide con la desigualdad [1].

En estas condiciones, existe un único valor v_1 tal que $f(v_1) = 0$ y:

$$\forall v > v_1, f(v) > 0 \Leftrightarrow v - k_1 > C(v, T_2; k_2),$$

$$\forall v \in [0, v_1], f(v) < 0 \Leftrightarrow v - k_1 < C(v, T_2; k_2).$$

Así pues,

$$C(v, T_1, T_2; k_1, k_2) = e^{-rT_1} E_t [\max\{0, v_{T_1} - k_1, C(v_{T_1}, T_2; k_2)\} | v_t]$$

y teniendo en cuenta que:

$$C(v_{T_1}, T_2; k_2) = e^{-r(T_2-T_1)} E_t [\max\{0, v_{T_2} - k_2\} | v_{T_1}]$$

se tiene:

$$C(v, T_1, T_2; k_1, k_2) = v_t \Phi_2^2 - e^{-rT_2} k_2 \Phi_1^2 + v_t \Phi(d_1) - e^{-rT_1} k_1 \Phi(d_2) \quad [5]$$

siendo,

$$m_1 = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T_1 - t) = \varrho(T_1 - t),$$

$$m_2 = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T_2 - T_1) = \varrho(T_2 - T_1),$$

$$m'_1 = \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T_1 - t),$$

$$m'_2 = \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T_2 - T_1),$$

$$d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T_1 - t},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{v_t}{v_1}\right) + \varrho(T_1 - t)}{\sigma\sqrt{T_1 - t}},$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx,$$

$$\Phi_1^2 = P \left[N_2 \left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma^2(T_1 - t) & 0 \\ 0 & \sigma^2(T_2 - T_1) \end{pmatrix} \right) \in R \right],$$

$$\Phi_2^2 = P \left[N_2 \left(\begin{pmatrix} m'_1 \\ m'_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma^2(T_1-t) & 0 \\ 0 & \sigma^2(T_2-T_1) \end{pmatrix} \right) \in R \right],$$

$$R = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathfrak{R}^2 \text{ tal que } -\infty < z_1 < \ln\left(\frac{v_t}{v_1}\right); \ln\left(\frac{k_2}{v_t}\right) < z_1 + z_2 < \infty \right\}.$$

La consideración de una fecha y precio de ejercicio adicional requiere estudiar el valor de la derivada de C , definida por la fórmula [5], con respecto de v_t . Dado el número de parámetros que contempla la expresión [5], el cálculo directo de C_1 nos ha resultado infructuoso. No obstante, siendo, en cierto sentido, la opción bermuda una generalización de la opción europea, parecía lógico pensar que compartirían algunas propiedades; en concreto, la convexidad con respecto al valor del subyacente. Además, la elección de un proceso lognormal sugería la existencia de una asíntota oblicua en $v_t - k_1 e^{-r\tau_1}$. El cumplimiento de estas dos propiedades implica que $C_1 < 1$. Para demostrarlas hemos replicado un conjunto de proposiciones de Merton (1973: 146, 147 y 150).

Proposición 1. $C(v_t, T_1, T_2; k_1, k_2)$ es homogénea de grado 1 con respecto al valor del subyacente v_t y a los precios de ejercicio k_1 y k_2 .

Demostración: Hay que probar que el recinto de integración R no varía si el valor del subyacente pasa de v_t a αv_t , con $\alpha \in \mathfrak{R}^+$.

Sea $v_1 \in \mathfrak{R}^+$ tal que $v_1 = k_1 + C(v_1, T_2; k_2)$; sabemos que v_1 es único.

Sean $\alpha, v_2 \in \mathfrak{R}^+$ tales que $v_2 = \alpha k_1 + C(v_2, T_2; \alpha k_2)$.

$C(v_{T_1}, T_2; k_2)$ viene definida por la fórmula de Black-Scholes que es homogénea de grado 1 con respecto de v_{T_1} y k_2 . Por tanto,

$$v_2 = \alpha \left(k_1 + C\left(\frac{v_2}{\alpha}, T_2; k_2\right) \right) \Leftrightarrow \frac{v_2}{\alpha} = k_1 + C\left(\frac{v_2}{\alpha}, T_2; k_2\right),$$

y por la unicidad se tiene que $\frac{v_2}{\alpha} = v_1 \Leftrightarrow v_2 = \alpha v_1$.

La proposición 1 afirma que el valor de la cartera A formada por una opción de compra bermuda sobre α acciones con un vector de precios de ejercicio de $(\alpha k_1, \alpha k_2)$ coincide con el de una cartera B formada por α opciones de compra bermuda sobre una acción con vector de precios de ejercicio (k_1, k_2) . Se demuestra fácilmente que si los valores de ambas carteras son distintos se da una situación de arbitraje, basta considerar que en cualquier fecha de ejercicio T_i los valores de la cartera A y la cartera B son iguales.

Proposición 2. $C(v_t, T_1, T_2; k_1, k_2)$ es convexa con respecto a los precios de ejercicio k_1 y k_2 .

Demostración. Sean:

$$k_i = (k_i^1, k_i^2) \in \mathfrak{R}^+ \times \mathfrak{R}^+, \text{ con } i = 1, 2, 3,$$

$$k_3^j = \lambda k_1^j + (1-\lambda)k_2^j, \text{ con } j = 1, 2,$$

$$\lambda \in [0, 1],$$

$$\tau = (T_1, T_2) \in \mathfrak{R}^+ \times \mathfrak{R}^+.$$

Obsérvese que $k_2^j \leq k_3^j \leq k_1^j, \forall j = 1, 2$.

Hagamos el cambio de notación: $C(v, T_1, T_2; k_i^1, k_i^2) \equiv C(v, \tau; k_i)$.

Hay que demostrar que $\forall \lambda \in [0, 1]$ se cumple:

$$C(v, \tau; k_3) \leq \lambda C(v, \tau; k_1) + (1-\lambda)C(v, \tau; k_2)$$

siendo,

$$C(v, \tau; k_i) = e^{-r\tau_1} E_t [\max\{0, v_{T_1} - k_i^1, C(v_{T_1}, T_2; k_i^2)\} | v_t]$$

y $C(v_{T_1}, T_2; k_i^2)$ el valor en T_1 de una opción de compra estándar definido por la fórmula de Black-Scholes, para $i \in \{1, 2, 3\}$.

De las propiedades de la función $\max$, de la convexidad de $C(v_{T_1}, T_2; k_i^2)$ respecto del precio de ejercicio y de la monotonía de la esperanza matemática se llega al resultado:

$$\begin{aligned} & \lambda C(v, \tau; k_1) + (1-\lambda)C(v, \tau; k_2) = \\ & = e^{-r\tau_1} E_t [\lambda \max\{0, v_{T_1} - k_1^1, C(v_{T_1}, T_2; k_1^2)\} + \\ & + (1-\lambda) \max\{0, v_{T_1} - k_2^1, C(v_{T_1}, T_2; k_2^2)\} | v_t] \geq \\ & = e^{-r\tau_1} E_t [\max\{0, v_{T_1} - k_3^1, C(v_{T_1}, T_2; k_3^2)\} | v_t] = C(v, \tau; k_3). \end{aligned}$$

La proposición 2 nos dice que el valor de una cartera A formada por λ opciones de compra bermuda con vector de precios de ejercicio (k_1^1, k_1^2) más $1-\lambda$ opciones de compra bermuda con vector de precios de ejercicio (k_2^1, k_2^2) es mayor o igual que el valor de una cartera B formada por una opción de compra bermuda con vector de precios de ejercicio (k_3^1, k_3^2) . Obsérvese que si el valor de la cartera A fuera estrictamente menor que el de la cartera B , se daría una situación de arbitraje puesto que en cualquier fecha de ejercicio T_i el valor de la cartera A es, como mínimo, igual que el de la cartera B .

Proposición 3. $C(v, T_1, T_2; k_1, k_2)$ es convexa con respecto al valor del subyacente.

Demostración. Sean:

$$k_i = (k_i^1, k_i^2) \in \mathfrak{R}^+ \times \mathfrak{R}^+, \text{ con } i = 1, 2, 3,$$

$$k = (k^*, k^{**}) \in \mathfrak{R}^+ \times \mathfrak{R}^+,$$

$$\begin{aligned}
 k_3 &= \gamma k_1 + (1-\lambda)k_2, \forall \gamma \in [0, 1], \\
 v_3 &= \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2, \forall \lambda \in [0, 1], v_i \in \mathfrak{R}^+ \forall i = 1, 2, 3, \\
 \tau &= (T_1, T_2) \in \mathfrak{R}^+ \times \mathfrak{R}^+.
 \end{aligned}$$

Hay que demostrar que $\forall \lambda \in [0, 1]$ se cumple:

$$C(v_3, \tau; k) \leq \lambda C(v_1, \tau; k) + (1-\lambda)C(v_2, \tau; k),$$

donde $C(v_i, \tau; k) \equiv C(v_i, T_1, T_2; k^*, k^{**})$.

Por la proposición 2 sabemos que $\forall \gamma \in [0, 1]$ se verifica:

$$C(1, \tau; k_3) \leq \gamma C(1, \tau; k_1) + (1-\gamma)C(1, \tau; k_2) \quad [1]$$

Tomemos $\gamma = \frac{\lambda v_1}{v_3}$ (obsérvese que γ así definida toma valores entre cero y uno⁹) y $k_i = \left(\frac{1}{v_i}\right) k$ con¹⁰ $i = 1, 2, 3$.

Multiplicando la desigualdad [1] por v_3 :

$$\begin{aligned}
 v_3 C(1, \tau; k_3) &\leq v_3 \gamma C(1, \tau; k_1) + v_3 (1-\gamma) C(1, \tau; k_2) = \\
 &= \{\gamma v_3 = \lambda v_1; (1-\gamma)v_3 = v_2(1-\lambda)\} = \\
 &= \lambda v_1 C(1, \tau; k_1) + v_2 (1-\lambda) C(1, \tau; k_2) = \{\text{Por la proposición 1}\} = \\
 &= \lambda C(v_1, \tau; k) + (1-\lambda)C(v_2, \tau; k).
 \end{aligned}$$

La proposición 3 se deduce de las proposiciones 1 y 2; por tanto, su incumplimiento implica que la proposición 1 o la proposición 2 no se verifiquen, provocando una situación de arbitraje.

9. En efecto, de la igualdad $v_3 = \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2$ se tiene

$$1 = \frac{\lambda v_1}{v_3} + (1-\lambda) \frac{v_2}{v_3} \Rightarrow 0 \leq \frac{\lambda v_1}{v_3} \leq 1.$$

10. Obsérvese que k_i definido de esta forma verifica la igualdad $k_3 = \gamma k_1 + (1-\gamma)k_2$. En efecto, si $k^* = k_1^1 v_1 = k_2^1 v_2$ y $k^{**} = k_1^2 v_1 = k_2^2 v_2$, y como:

$$k_3^1 = \gamma k_1^1 + (1-\gamma)k_2^1 \quad [1] \text{ y } k_3^2 = \gamma k_1^2 + (1-\gamma)k_2^2 \quad [2], \text{ se tiene:}$$

De [1],

$$k_3^1 = \gamma \frac{k^*}{v_1} + (1-\gamma) \frac{k^*}{v_2} = k^* \left(\frac{\gamma}{v_1} + \frac{1-\gamma}{v_2} \right) = k^* \left(\frac{\lambda}{v_3} + \frac{1-\lambda}{v_3} \right) = \frac{k^*}{v_3} \Leftrightarrow k_3^1 v_3 = k^*.$$

Y de [2],

$$k_3^2 = \gamma \frac{k^{**}}{v_1} + (1-\gamma) \frac{k^{**}}{v_2} = k^{**} \left(\frac{\gamma}{v_1} + \frac{1-\gamma}{v_2} \right) = k^{**} \left(\frac{\lambda}{v_3} + \frac{1-\lambda}{v_3} \right) = \frac{k^{**}}{v_3} \Leftrightarrow k_3^2 v_3 = k^{**}.$$

Proposición 4. $C(v, T_1, T_2; k_1, k_2)$ tiene una asíntota oblicua en $v, -k_1 e^{-r\tau_1}$.

Demostración.

$$C(v, T_1, T_2; k_1, k_2) = v_t(\Phi_2^2 + \Phi(d_1)) - e^{-r\tau_2} k_2 \Phi_1^2 - e^{-r\tau_1} k_1 \Phi(d_2).$$

Cuando $v_t \rightarrow \infty \Rightarrow \Phi_2^2 \rightarrow 0, \Phi_1^2 \rightarrow 0, \Phi(d_1) \rightarrow 1$ y $\Phi(d_2) \rightarrow 1$; por tanto,
 $C(v, T_1, T_2; k_1, k_2) \rightarrow v_t - k_1 e^{-r\tau_1}$.

3.4. Valoración de opciones de compra bermuda con n fechas de ejercicio

Mediante un proceso de inducción, el resultado anterior puede generalizarse al caso en que la opción permite el ejercicio en n fechas.

Sean:

$$\tau^i = (T_i, T_{i+1}, \dots, T_n)$$

$$k^i = (k_i, k_{i+1}, \dots, k_n)$$

$$C(v_{T_i}, T_{i+1}, \dots, T_n; k_{i+1}, \dots, k_n) = C(v_{T_i}, \tau^{i+1}; k^{i+1})$$

$$f_i(v_{T_i}) = v_{T_i} - k_i - C(v_{T_i}, \tau^{i+1}; k^{i+1})$$

$$i \in \{1, \dots, n-1\}$$

Por inducción se demuestra que, $\forall i, C(v_{T_i}, \tau^{i+1}; k^{i+1})$ verifica las proposiciones¹¹ 1, 2, 3 y 4. Por tanto:

$$f_i(0) = -k_i < 0 \quad [6.1]$$

$$f_i(\infty) = k_{i+1} e^{-r(T_{i+1}-T_i)} - k_i \quad [6.2]$$

$$f'_i(v_{T_i}) > 0 \quad [6.3]$$

Lo que nos interesa es estudiar las raíces de la función $f_i(v_{T_i})$ para determinar los valores del subyacente en que es preferible ejercer la opción y aquéllos para los cuales es mejor mantenerla viva. Para asegurar la existencia de una única raíz debemos imponer la condición $f_i(\infty) > 0$, la cual se cumplirá si y sólo si:

$$\frac{k_i}{k_{i+1}} < e^{-r(T_{i+1}-T_i)} \quad [7]$$

Observación 2:

Si $\frac{k_i}{k_{i+1}} > e^{-r(T_{i+1}-T_i)}$ entonces, $v_{T_i} - k_i < C(v_{T_i}, \tau^{i+1}; k^{i+1})$ y la opción no se ejercerá en T_i . Obsérvese que la desigualdad [7] coincide con la expresión [2].

De [6.1], [6.2], [6.3] y [7] se deduce que existe un único valor de la acción, v_i , tal que $f_i(v_i) = 0$ y

$$\forall v_{T_i} \in [0, v_i], f_i(v_{T_i}) < 0 \Leftrightarrow v_{T_i} - k_i < C(v_{T_i}, \tau^{i+1}; k^{i+1}),$$

$$\forall v_{T_i} > v_i, f_i(v_{T_i}) > 0 \Leftrightarrow v_{T_i} - k_i > C(v_{T_i}, \tau^{i+1}; k^{i+1})$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} C(v_{T_i}, \tau^{i+1}; k^{i+1}) &= \\ &= e^{-r(T_{i+1}-T_i)} \left(\int_0^{v_{i+1}} C(v_{T_{i+1}}, \tau^{i+2}; k^{i+2}) p(v_{T_{i+1}} | v_{T_i}) dv_{T_{i+1}} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{v_{i+1}}^{\infty} (v_{T_{i+1}} - k_{i+1}) p(v_{T_{i+1}} | v_{T_i}) dv_{T_{i+1}} \right) \end{aligned} \quad [8]$$

Así pues, el valor de una opción de compra bermuda que permite el ejercicio en las fechas $T_1, \dots, T_n$ con precios de ejercicio respectivos $k_1, \dots, k_n$ vendrá determinado por:

$$C(v_t, \tau^1; k_1) = e^{-r\tau_1} E_t [\max\{0, v_{T_1} - k_1, C(v_{T_1}, \tau^2; k^2)\} | v_t]$$

y teniendo en cuenta [8] se llega a:

$$C(v_t, T_1, \dots, T_n; k_1, \dots, k_n) = \sum_{i=1}^n (v_t \Phi_2^i - k_i e^{-r\tau_i} \Phi_1^i) \quad [9]$$

con:

$$m_i = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T_i - T_{i-1}),$$

$$m'_i = \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T_i - T_{i-1}), \forall i = 1, \dots, n,$$

$$T_0 \equiv t,$$

$$d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T_1 - t},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{v_t}{v_1}\right) + \varrho(T_1 - t)}{\sigma\sqrt{T_1 - t}},$$

$$\Phi_2^1 \equiv \Phi(d_1),$$

$$\Phi_1^1 \equiv \Phi(d_2),$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx,$$

$$\Phi_1^i = P \left[N_i \left(\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma^2(T_1-t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2(T_2-T_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2(T_i-T_{i-1}) \end{pmatrix} \right) \right] \in R_{i-1},$$

$$\Phi_2^i = P \left[N_i \left(\begin{pmatrix} m'_1 \\ \vdots \\ m'_i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma^2(T_1-t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2(T_2-T_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2(T_i-T_{i-1}) \end{pmatrix} \right) \right] \in R_{i-1},$$

$$R_{i-1} = \{ (z_1, \dots, z_i) \in \mathfrak{R}^i \text{ tal que}$$

$$-\infty < z_1 < \ln\left(\frac{v_1}{v_t}\right); -\infty < z_1 + z_2 < \ln\left(\frac{v_2}{v_t}\right); \dots; ,$$

$$-\infty < z_1 + \dots + z_{i-1} < \ln\left(\frac{v_{i-1}}{v_t}\right); \ln\left(\frac{v_i}{v_t}\right) < z_1 + \dots + z_i < \infty \},$$

$$\forall i = 2, \dots, n-1,$$

$$R_{n-1} = \{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathfrak{R}^n \text{ tal que}$$

$$-\infty < z_1 < \ln\left(\frac{v_1}{v_t}\right); -\infty < z_1 + z_2 < \ln\left(\frac{v_2}{v_t}\right); \dots; ,$$

$$-\infty < z_1 + \dots + z_{n-1} < \ln\left(\frac{v_{n-1}}{v_t}\right); \ln\left(\frac{k_n}{v_t}\right) < z_1 + \dots + z_n < \infty \},$$

$$v_{n-j} - k_{n-j} = C(v_{n-j}, T_{n-j+1}, \dots, T_n; k_{n-j+1}, \dots, k_n),$$

$$\forall j = 1, \dots, n-1,$$

$$\ln\left(\frac{k_j}{k_{j+1}}\right) < -r(T_{j+1} - T_j), \forall j = 1, \dots, n-1,$$

$$Q = r - \frac{1}{2}\sigma^2,$$

$$\tau_j = T_j - t, \forall j = 1, \dots, n.$$

Obsérvese que la expresión [9] incluye como caso particular la conocida fórmula de Black-Scholes (1973).

Si consideramos particiones cada vez más finas del intervalo temporal $[t, T_n]$ cuyo diámetro (máxima longitud de los intervalos incluidos) tiende a cero, podemos aproximar el valor de una opción de compra que puede ejercerse en cualquier

instante $\tau \in [t, T_n]$ a un precio de ejercicio estrictamente creciente $k(\tau)$ a través del límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C(v, T_1, \dots, T_n; k_1, \dots, k_n) = C(v, \tau; k(\tau)) \quad [10]$$

4. Un ejemplo numérico

Consideremos una opción de compra bermuda que puede ejercerse en tres instantes: a los tres, a los seis y a los nueve meses de su emisión, y con los parámetros siguientes: v_0 : 50 u.m., $k_1 = 40$ u.m., $k_2 = 43$ u.m., $k_3 = 45$ u.m., $\sigma = 0,22$ y $r = 0,1$.

Con estos valores se tiene

$$\begin{aligned} C(50, 0,25, 0,5, 0,75; 40, 43, 45) &= \\ &= 50 \Phi_2^3 - 45e^{-r \cdot 0,75} \Phi_1^3 + 50 \Phi_2^2 - 43e^{-r \cdot 0,5} \Phi_1^2 + 50 \Phi(d_1) - 40e^{-r \cdot 0,25} \Phi(d_2) = \\ &= 11,00771 + 0,00771 + 0,00716 = 11,02258 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

Los valores obtenidos para las tres opciones europeas son:

$$\begin{aligned} C_e(50, 0,25; 40) &= 11,00771 \text{ u.m.}, C_e(50, 0,5; 43) = 9,42294 \text{ u.m. y} \\ C_e(50, 0,75; 45) &= 9,05126 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

En las siguientes tablas se recogen las variaciones del valor de la opción de compra bermuda y de las opciones de compra europeas con vencimientos respectivos de $\tau = 0,25$; $\tau = 0,5$; $\tau = 0,75$ frente a cambios parciales de los parámetros:

Parámetro	$\sigma = 0$	$\sigma = 1$	$r = 0,12$	$k_1 = 41$
$v_t \Phi(d_1) - k_1 e^{-r\tau_1} \Phi(d_2)$	10,98760	15,31207	11,20019	10,05050
$v_t \Phi_2^2 - k_2 e^{-r\tau_2} \Phi_1^2$	0	13,81992	0,00975	0,04448
$v_t \Phi_2^3 - k_3 e^{-r\tau_3} \Phi_1^3$	0	4,74202	0,00120	0,01682
valor bermuda	10,98760	33,87400	11,21113	10,1118
$C_e(50, 0,25; k_1)$	10,98760	15,31207	11,20019	10,05050
$C_e(50, 0,5; k_2)$	9,09713	17,58839	9,78687	9,42294
$C_e(50, 0,75; k_3)$	8,25154	19,80413	9,55660	9,05126

Como era de esperar, la opción de compra bermuda se comporta del mismo modo que la opción de compra europea frente a variaciones de la volatilidad, de los precios de ejercicio y del tipo de interés sin riesgo: incrementos de volatilidad y tipos de interés provocan incrementos del valor de la opción; contrariamente, incrementos en los precios de ejercicio implican una disminución en el valor de la opción. Además, cuanto mayor es la volatilidad mayor es el peso de los instantes de ejercicio $\tau = 0,5$ y $\tau = 0,75$. Si la volatilidad es nula la opción se ejercerá en $\tau = 0,25$ y su valor coincidirá con el de su homóloga europea. La coincidencia del valor de las opciones europeas con vencimiento en $\tau = 0,25$ con el primer sumando, se debe a que la raíz de la ecuación $v_t - k_1 = C(v, T_2, T_3; k_2, k_3)$ está muy cerca del precio de ejercicio k_1 y, a efectos computacionales, se desprecia la diferencia.

5. Conclusiones

Tomando como objeto de estudio las opciones de compra bermuda con precios de ejercicio no uniformes, hemos obtenido una fórmula cerrada para su valoración en el caso en que el activo subyacente no paga dividendos y cuya dinámica viene descrita por un proceso browniano geométrico (expresión [9]). La discretización del tiempo permite, tomando límites en [9], valorar una opción de compra que puede ejercerse en cualquier instante con un precio de ejercicio asociado estrictamente creciente respecto al tiempo (expresión [10]). La fórmula deducida es aplicable a aquellos títulos cuya componente opcional puede interpretarse como una opción de este tipo (por ejemplo, bonos convertibles con distintas fechas y precios de conversión o empréstitos amortizables en distintas fechas y con precios de amortización diferentes). También, y a efectos de aplicación práctica, podría utilizarse un proceso más general usando los parámetros de tendencia y difusión como parámetros de máxima verosimilitud para ajustar el comportamiento de la opción, no necesariamente el del subyacente.

El método de valoración empleado se basa en la actualización, al tipo de interés libre de riesgo, de los flujos esperados que definen a la opción para una determinada ley de probabilidad (*probabilidad riesgo neutro*). Bajo la hipótesis de ausencia de arbitraje, y con independencia del proceso estocástico que modeliza el valor del subyacente, se comprueba fácilmente que el problema únicamente tiene sentido cuando los precios de ejercicio guardan la relación: $k_i < k_{i+1} f(T_{i+1}, T_i)$. Para precios de ejercicio constantes el valor de la opción bermuda coincide con el de una opción europea (o americana por la ausencia de dividendos) con fecha de vencimiento T_n . La desigualdad anterior es una condición necesaria de ejercicio anticipado, por tanto, si para algún $i \in \{1, \dots, n\}$ no se verifica podemos eliminar T_i como posible fecha de ejercicio. Evidentemente, en el marco teórico planteado, la fórmula de Black-Scholes para opciones europeas resulta ser un caso particular.

Un papel importante en la obtención de los resultados lo juega el valor de $\frac{\partial C}{\partial v_t}$. De hecho, para la deducción de la expresión [9] únicamente interesa probar que es menor que la unidad. Para ello hemos replicado un conjunto de proposiciones de Merton (1973), demostrando que la opción bermuda descrita verifica las siguientes propiedades: P1) es homogénea de grado 1 con respecto al valor de subyacente y a los precios de ejercicio, P2) es convexa con respecto a los precios de ejercicio, P3) es convexa con respecto al valor del subyacente y P4) tiene una asíntota oblicua en $v_t - k_1 e^{-r\tau_1}$. El resultado buscado se deriva de las propiedades P3 y P4. P3 se deduce de P1 y P2. Precisamente, la dificultad de cálculo de las derivadas parciales respecto a determinados parámetros nos ha impedido calcular los ratios de cobertura (delta, gamma, ...) para este tipo de opción. Sin embargo, la implementación informática permite cuantificar la influencia de los instantes de ejercicio en el valor de la opción, lo que posibilita la construcción de una cesta de opciones europeas equivalente. En este contexto computacional podría ser útil, en cuanto a minimizar errores de aproximación,

la siguiente propiedad: la sucesión de raíces $\{v_i\}_{i=1,\dots,n-1}$ de la ecuación $v_i - k_i = C(v_i, T_{i+1}, \dots, T_n; k_{i+1}, \dots, k_n)$ es monótona creciente.

Una posible línea para futuros análisis sería la consideración de subyacentes con volatilidades estocásticas y pago de dividendos. Actualmente estamos estudiando la valoración de opciones de venta bermuda con precios de ejercicio variables.

Apéndice

Las proposiciones 1, 2, 3 y 4 pueden generalizarse, mediante un proceso de inducción completa, a todo n .

Para $n = 1$: $C(v, T_1; k_1)$ verifica las cuatro proposiciones ya que está definida por la fórmula de Black-Scholes.

Supongamos que se verifican para $n - 1$.

Para n :

Proposición 1. Sea $\alpha \in \mathfrak{R}^+$ y $v_{n-1} \in \mathfrak{R}^+$ el único valor del subyacente en el instante T_1 que cumple la igualdad:

$$v_{n-1} - k_1 = C(v_{n-1}, T_2, \dots, T_n; k_2, \dots, k_n)$$

Sea $v_{n-1}^* \in \mathfrak{R}^+$ tal que

$$v_{n-1}^* - \alpha k_1 = C(v_{n-1}^*, T_2, \dots, T_n; \alpha k_2, \dots, k_n)$$

Como, por hipótesis de inducción, $C(v_{T_1}, T_2, \dots, T_n; k_2, \dots, k_n)$ verifica la proposición 1, se tiene:

$$\frac{v_{n-1}^*}{\alpha} - k_1 = C\left(\frac{v_{n-1}^*}{\alpha}, T_2, \dots, T_n; k_2, \dots, k_n\right)$$

y por la unicidad $v_{n-1}^* = \alpha v_{n-1}$.

Proposición 2. La demostración es análoga al caso $n = 2$, haciendo el cambio de notación:

$$k_i^* = (k_i^2, \dots, k_i^n) \in \mathfrak{R}^{n-1}$$

$$k_i = (k_i^1, \dots, k_i^n) \in \mathfrak{R}^n, k_i^j > 0, \forall j = 1, \dots, n, i = 1, 2, 3,$$

$$k_3^j = \lambda k_1^j + (1 - \lambda) k_2^j, \forall j = 1, \dots, n, \forall \lambda \in [0, 1],$$

$$\tau^* = (T_2, \dots, T_n) \in \mathfrak{R}^{n-1},$$

$$\tau = (T_1, \dots, T_n) \in \mathfrak{R}^n, T_j > 0, \forall j = 1, \dots, n.$$

$$C(v, T_1, \dots, T_n; k_i^1, \dots, k_i^n) \equiv C(v, \tau; k_i),$$

$$C(v, \tau; k_i) = e^{-r\tau_1} E_t [\max\{0, v_{T_1} - k_i^1, C(v_{T_1}, \tau^*; k_i^*)\} | v_t].$$

Proposición 3. La demostración es análoga al caso $n = 2$, teniendo en cuenta que:

$$k_i = (k_i^1, \dots, k_i^n) \in \mathfrak{R}^n, k_i^j > 0, \forall j = 1, \dots, n, i = 1, 2, 3,$$

$$E = (E_1, \dots, E_n) \in \mathfrak{R}^n, E_j > 0, \forall j = 1, \dots, n,$$

$$k_3 = \gamma k_1 + (1 - \gamma) k_2, \forall \gamma \in [0, 1],$$

$$v_3 = \lambda v_1 + (1 - \lambda) v_2, \forall \lambda \in [0, 1], v_i \in \mathfrak{R}^+, i = 1, 2, 3,$$

$$\tau = (T_1, \dots, T_n) \in \mathfrak{R}^n, T_j > 0, \forall j = 1, \dots, n,$$

$$C(v, \tau; E) \equiv C(v, T_1, \dots, T_n; E_1, \dots, E_n).$$

Proposición 4.

$$C(v, T_1, \dots, T_n; k_1, \dots, k_n) = v_t \sum_{i=1}^n \Phi_2^i - \sum_{i=1}^n k_i e^{-r\tau_i} \Phi_1^i.$$

Cuando $v_t \rightarrow \infty \Rightarrow \Phi_2^i \rightarrow 0, \Phi_1^i \rightarrow 0, \forall i = 2, \dots, n, \Phi_2^1 \rightarrow 1$, y $\Phi_1^1 \rightarrow 1$; por tanto, $C(v, T_1, \dots, T_n; k_1, \dots, k_n) \rightarrow v_t - k_1 e^{-r\tau_1}$.

Referencias bibliográficas

- BLACK, F.; SCHOLES, M. (1973). «The Pricing of Options and Corporate Liabilities». *Journal of Political Economy*, 81, 637-654.
- CHANCE, D. (1992). «The Pricing of Limited-exercise Caps and Spreads». *Working paper*, Virginia Polytechnic Institute and State University.
- DEWYNNE, J.; HOWISON, S.; WILMOTT, P. (1997). «Option Pricing: Mathematical Models and Computation». Oxford: Oxford Financial Press.
- FLESAKER, B. (1992). «The Design and Valuation of Capped Index Option». *Working paper*, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- GASTINEAU, G. (1992). «Dictionary of Financial Risk Management». Chicago: Probus Publishing Co.
- HULL, J. (1993). «Options, Futures, and other Derivative Securities». New Jersey: Prentice-Hall International.
- JARROW, R.; RUDD, A. (1982). «Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes». *Journal of Financial Economics*, 10, 347-369.
- LEGUEY, S. (1995). «Las bases estocásticas de la modelización financiera». Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid.
- MERTON, R.C. (1973). «Theory of Rational Option Pricing». *Bell Journal of Economics and Management Science*, Spring, p. 141-183.
- (1977). «On the Pricing of Contingent Claims and the Modigliani-Miller Theorem». *Journal of Financial Economics*, 5, 241-249.
- ROCHET, J.-C.; DEMANGE, G. (1992). «Méthodes mathématiques de la finance». *Economica*. París.
- STOER, J.; BULIRSCH, R. (1993). «Introduction to Numerical Analysis». Berlín: Springer.
- TRIPPI, R.; CHANCE, D. (1993). «Quick Valuation of the Bermuda Capped Option». *Journal of Portfolio Management*, 20, 93-99.