

SOBRE LA DETERMINACION DE UNA ÓRBITA SIN HIPÓTESIS ALGUNA RELATIVA A LA EXCENTRICIDAD

POR

R. ORTIZ FORNAGUERA

El método para la determinación de la órbita de un asteroide o de un cometa a partir de tres observaciones completas realizadas durante una misma oposición, cuyo fundamento teórico, en sus rasgos generales, se expone en lo que sigue, reconoce sus principios últimos en los métodos clásicos de Laplace y de Gauss, siendo en conjunto, una a modo de combinación de ambos. Sin embargo, las posibilidades que ofrece el cálculo mecánico han inducido a modificar en más de un aspecto el detalle de los mismos, y así hemos prescindido de los artificios, sumamente ingeniosos por otra parte, con que se sorteaban en aquéllos el obstáculo que para el cálculo logarítmico representan las sumas y las diferencias, artificios a los que el aritmómetro ha desprovisto de toda razón de ser. Además, con la desaparición casi total de ángulos auxiliares, se reduce al minimum indispensable el empleo de las tablas trigonométricas, y con ello una de las más frecuentes causas de error. En el mismo orden de ideas, se ha procurado que las comprobaciones fuesen lo más numerosas posible, sin que, cual ocurre en algunos procedimientos, sea menester esperar casi las postrimerías del cálculo para saber de su corrección.

Aparte el hecho de haber elegido el plano del ecuador como plano fundamental, y el uso de las coordenadas rectilíneas, en vez de las polares, lo que es hoy algo ya corriente, podría caracterizar el procedimiento que exponemos: a) el modo de resolver la ecuación de Gauss; b) la intervención *en la práctica* de las funciones f y g de Gauss, las cuales, en la mayor parte de los métodos, desempeñan el papel de simple medio analítico para llegar a determinadas fórmulas finales; c) el cálculo de los cocientes c_1 y c_3 , y de la derivada \dot{r}_2 ; d) el de la época, T , de paso por el perihelio, en el caso de las órbitas casi parabólicas.

Una advertencia en cuanto a las notaciones empleadas: en lo vectorial, hemos seguido las notaciones de la escuela italiana (Buralli-Forti, Levi-Civita, etc.); en las de índole astronómica, nos hemos ceñido a los acuerdos tomados en el V Congreso de la Union Astronomique (París, 1935) y ratificados en el VI (Estocolmo, 1938); finalmente, en las de carácter bibliográfico, se han tenido en

cuenta las recomendaciones hechas por este organismo en su congreso de Leyden (1928).

RELACIONES ANALÍTICAS

Sea O el lugar desde el cual ha sido observado el astro A; T y S los centros de gravedad de la Tierra y del Sol, respectivamente. Elegiremos como sistema fundamental de referencia una terna rectangular directa de ejes cartesianos, $Sxyz$, de modo que el origen coincida con S, y el plano xy con el del ecuador medio, relativo a S, de una cierta época, por lo general, la del comienzo del año en que se ha observado el astro un mayor número de veces, o también, según acuerdo internacional, la de 1950,0. Además, los ejes Sx y Sz estarán dirigidos hacia el equinoccio medio y hacia el polo norte celeste correspondientes a tal cuadro.

Los sistemas de ejes coordenados rectangulares de ejes paralelos y dirigidos en el mismo sentido que los del sistema anterior, pero cuyos orígenes se identifican con T y con O, se representarán por (T) y por (O), en oposición a aquél que lo será por (S), y serán llamados, respectivamente, *sistemas geocéntrico y topocéntrico*, siendo el (S) el *sistema heliocéntrico*. Finalmente, y en cuanto a las observaciones, se suponen éstas topocéntricas, esto es, relativas al equinoccio y al ecuador medios antes fijados y sin estar corregidas de paralaje. El tiempo t se expresa en tiempo civil de Greenwich (T. U.).

Sentado esto, sean α_i y δ_i las coordenadas polares de A, relativas al sistema (O), *observadas* en el instante \bar{t}_i distinto, por consiguiente, del t_i en que *realmente* eran aquéllas las coordenadas de A y que debiera ser el introducido en los cálculos. Suponiéndonos en el caso de no contar con elementos provisionales de la órbita del astro, resulta imposible deducir de \bar{t}_i el valor de t_i , ya que para ello es necesario el conocimiento de las distancias $|A_i - O_i|$. Tomaremos, pues, en primera aproximación $t_i = \bar{t}_i$. La identidad vectorial

$$A_i - S = (A_i - O_i) - (S - O_i),$$

siendo O_i el lugar de la observación en el instante t_i , equivale, en el sistema (S), a las tres igualdades escalares

$$x_i = l_i \Delta_i - X_i, \quad y_i = m_i \Delta_i - Y_i, \quad z_i = n_i \Delta_i - Z_i, \quad (1)$$

siendo $\Delta_i = |A_i - O_i|$,

y

$$l_i = \cos \alpha_i \cos \delta_i, \quad m_i = \sin \alpha_i \cos \delta_i, \quad n_i = \sin \delta_i$$

los cosenos directores del vector $(A_i - O_i)$ respecto a cualquiera de los sistemas (S) u (O_i) .

Es fá
céntricas

por tanto

siendo

$\Delta \bar{X}_i =$

las compo

El cál

constantes

que puedé

unidades c

Desde

preciable l

rige por l

de la cual

e integranc

puesto que

de la ecuac

es decir, e

vector vari

permanece

Es fácil deducir las coordenadas topocéntricas del sol (X_1, Y_1, Z_1) de las geocéntricas $(\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{Z}_1)$, puesto que

$$(S - O_1) = (S - T_1) + (T_1 - O_1);$$

por tanto

$$X_1 = \bar{X}_1 + \Delta \bar{X}_1, \quad Y_1 = \bar{Y}_1 + \Delta \bar{Y}_1, \quad Z_1 = \bar{Z}_1 + \Delta \bar{Z}_1,$$

siendo

$$\Delta \bar{X}_1 = -P_{\odot} \rho_0 \cos \varphi' \cos \theta_1, \quad \Delta \bar{Y}_1 = -P_{\odot} \rho_0 \cos \varphi' \sin \theta_1, \quad \Delta \bar{Z}_1 = -P_{\odot} \rho_0 \sin \varphi,$$

las componentes de $(T_1 - O_1)$, y

P_{\odot} = paralaje horizontal ecuatorial del sol,

ρ_0 = distancia geocéntrica del observador,

φ' = latitud geocéntrica, y

θ_1 = tiempo sidéreo correspondiente al t_1 .

El cálculo de éstas se simplifica extraordinariamente cuando son conocidas las constantes $-P_{\odot} \rho_0 \cos \varphi'$ y $-P_{\odot} \rho_0 \sin \varphi'$, propias de cada observatorio, datos que pueden obtenerse, por ejemplo, de la tabla 43 de Bauschinger, expresados en unidades del séptimo orden decimal, para los más importantes de entre ellos.

Desde otro punto de vista, el movimiento de A alrededor de S — supuesta despreciable la masa del astro con respecto a la del Sol, tomada como unidad — se rige por la ley dinámica fundamental (Newton):

$$\gamma = -\frac{k^2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (2)$$

$$k = 0,017202099, \quad \mathbf{r} = (A - S),$$

γ = aceleración de A referida al sistema (S),

de la cual se deduce.

$$\mathbf{r} \wedge \gamma = 0,$$

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{v} = \text{const.} = \mathbf{c}$$

e integrando,

puesto que $\gamma = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$. Multipliquemos escalarmente el primero y último miembros de la ecuación última por \mathbf{r} ; obtendremos:

$$\mathbf{c} \times \mathbf{r} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{r} = 0,$$

es decir, el vector constante \mathbf{c} — que es el llamado *vector de las áreas* — y el vector variable \mathbf{r} se conservan perpendiculares, de modo que el extremo A, de \mathbf{r} permanece en el plano trazado por S normalmente a \mathbf{c} . O en otros términos: la

ecuación $\mathbf{c} \times \mathbf{r} = 0$ queda satisfecha para todo valor de t . En particular, el sistema

$$c_x x_i + c_y y_i + c_z z_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

tiene que ser compatible, lo que exige la anulación del determinante

$$\delta \equiv \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Si sucesivamente, desarrollamos δ por los elementos de cada columna resulta:

$$\begin{cases} x_1 (y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_2 (y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_3 (y_1 z_2 - y_2 z_1) = 0, \\ y_1 (z_2 x_3 - z_3 x_2) - y_2 (z_1 x_3 - z_3 x_1) + y_3 (z_1 x_2 - z_2 x_1) = 0, \\ z_1 (x_2 y_3 - x_3 y_2) - z_2 (x_1 y_3 - x_3 y_1) + z_3 (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0; \end{cases}$$

y como de otra parte,

$$\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{r}_j = (y_i z_j - y_j z_i) \mathbf{i} + (z_i x_j - z_j x_i) \mathbf{j} + (x_i y_j - x_j y_i) \mathbf{k},$$

siendo $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ los vectores-unidad de los ejes (S), queda en definitiva

$$\begin{cases} [r_2 r_3] x_1 - [r_1 r_3] x_2 + [r_1 r_2] x_3 = 0, \\ [r_2 r_3] y_1 - [r_1 r_3] y_2 + [r_1 r_2] y_3 = 0, \\ [r_2 r_3] z_1 - [r_1 r_3] z_2 + [r_1 r_2] z_3 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

En estas tres relaciones hemos representado por $[r_i r_j]$ el módulo del vector $\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{r}_j$, esto es

$$[r_i r_j] \equiv |[\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{r}_j]| \quad (4)$$

$[r_i r_j]$ coincide, por tanto, con el área del triángulo $A_i S A_j$.

Es conveniente poner de manifiesto, en el sistema (3), las distancias Δ_1 , en vista de lo cual se introducen los cocientes

$$c_1 = \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]}, \quad c_3 = \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]}$$

y los valores de las coordenadas heliocéntricas dadas por (1), obteniéndose de este modo el sistema lineal en Δ_1 :

$$\begin{cases} c_1 l_1 \Delta_1 - l_2 \Delta_2 + c_3 l_3 \Delta_3 = c_1 X_1 - X_2 + c_3 X_3, \\ c_1 m_1 \Delta_1 - m_2 \Delta_2 + c_3 m_3 \Delta_3 = c_1 Y_1 - Y_2 + c_3 Y_3, \\ c_1 n_1 \Delta_1 - n_2 \Delta_2 + c_3 n_3 \Delta_3 = c_1 Z_1 - Z_2 + c_3 Z_3. \end{cases} \quad (5)$$

Por un momento, supongamos que conocemos tanto c_1 como c_3 , y, en esta hipótesis, el sistema (5) permitirá calcular, sin más, Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 . Cuanto al método a seguir, no obstante ser, en general, el método de reducción el más práctico, resolveremos el sistema (5) calculando primero Δ_2 y, luego, Δ_1 , y Δ_3 en fun-

ción de é
tal sistema
de donde
constantes

siendo

D₁
D₂
d₁₁

y por otra

siendo

$$\begin{cases} K_1 = \\ a'_{11} = \\ a'_{12} = \\ a'_{13} = \\ a'_{14} = \\ K_2 = \\ a'_{21} = \\ a'_{22} = \\ a'_{23} = \\ a'_{24} = \end{cases}$$

eligiéndose
que correspon
Resumido de las

ción de éste, de c_1 y de c_3 . Lo cual recibe su razón de ser del hecho de que el tal sistema ha de ser resuelto más de una vez, con *distintos valores de c_1 y de c_3* , de donde la conveniencia de que aparezcan éstas explícitamente, permaneciendo constantes todos los demás coeficientes. Llegamos así, por una parte, a la ecuación

$$\Delta_2 = a_{22} c_1 + a_{23} c_3 + a_{24}, \quad (6.1)$$

siendo

$$a_{22} = -\frac{D_1}{D_0}, \quad a_{23} = -\frac{D_3}{D_0}, \quad a_{24} = \frac{D_2}{D_0} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} D_1 &= X_1 d_{11} + Y_1 d_{12} + Z_1 d_{13}, & D_2 &= X_2 d_{11} + Y_2 d_{12} + Z_2 d_{13}, \\ D_3 &= X_3 d_{11} + Y_3 d_{12} + Z_3 d_{13}, & D_0 &= l_2 d_{11} + m_2 d_{12} + n_2 d_{13}, \\ d_{11} &= m_1 n_3 - m_3 n_1, & d_{12} &= n_1 l_3 - n_3 l_1, & d_{13} &= l_1 m_3 - l_3 m_1; \end{aligned}$$

y por otra, al sistema

$$\begin{cases} K_1 c_1 \Delta_1 = a'_{11} \Delta_2 + a'_{12} c_1 + a'_{13} c_3 + a'_{14}, \\ K_3 c_3 \Delta_3 = a'_{31} \Delta_2 + a'_{32} c_1 + a'_{33} c_3 + a'_{34}, \end{cases} \quad (6.2)$$

siendo

	I	II	III	
(4)	$K_1 = d_{11},$	$d_{12},$	$-d_{13},$	(6.21)
	$a'_{11} = m_1 n_3 - n_3 m_3,$	$n_2 l_3 - l_2 n_3,$	$l_2 m_3 - m_2 l_3,$	
	$a'_{12} = Y_1 n_3 - Z_1 m_3,$	$Z_1 l_3 - X_1 n_3,$	$X_1 m_3 - Y_1 l_3,$	
	$a'_{13} = Y_3 n_3 - Z_3 m_3,$	$Z_3 l_3 - X_3 n_3,$	$X_3 m_3 - Y_3 l_3,$	
	$a'_{14} = -Y_2 n_3 + Z_2 m_3;$	$-Z_2 l_3 + X_2 n_3;$	$-X_2 m_3 + Y_2 l_3,$	
(5)	$K_3 = -d_{11},$	$-d_{12},$	$-d_{13},$	(6.22)
	$a'_{31} = m_3 n_1 - n_1 m_1,$	$n_2 l_1 - l_2 n_1,$	$l_2 m_1 - m_2 l_1,$	
	$a'_{32} = Y_1 n_1 - Z_1 m_1,$	$Z_1 l_1 - X_1 n_1,$	$X_1 m_1 - Y_1 l_1,$	
	$a'_{33} = Y_3 n_1 - Z_3 m_1,$	$Z_3 l_1 - X_3 n_1,$	$X_3 m_1 - Y_3 l_1,$	
	$a'_{34} = -Y_2 n_1 + Z_2 m_1;$	$-Z_2 l_1 + X_2 n_1;$	$-X_2 m_1 + Y_2 l_1;$	

eligiéndose como coeficientes a'_{ij} las expresiones de aquel de los grupos I, II, III que corresponde a mayor valor de K_i .

Resumiendo: el sistema (5) lo substituye, en cuanto se refiere al cálculo práctico de las distancias Δ_1 , el nuevo sistema:

$$\begin{cases} \Delta_2 = a_{22} c_1 + a_{23} c_3 + a_{24}, \\ c_1 \Delta_1 = a_{11} \Delta_2 + a_{12} c_1 + a_{13} c_3 + a_{14}, \\ c_3 \Delta_3 = a_{31} \Delta_2 + a_{32} c_1 + a_{33} c_3 + a_{34}, \end{cases} \quad (6)$$

en el cual $a_{ij} = \frac{a'_{ij}}{K_1}$, ($i = 1, 3; j = 1, 2, 3, 4$).

Veamos cómo es posible la determinación de un primer valor de c_1 y c_2 , pues que sin ellas no cabe el calcular los de Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 . Sea t_0 el instante inicial en que el vector $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$; $\tau = k(t - t_0)$ el intervalo $t - t_0$ medido en unidades dinámicas ($k = 0,017202099$). El desarrollo de \mathbf{r} en serie de Taylor

$$\mathbf{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \left(\frac{d^n \mathbf{r}}{d\tau^n} \right)_0$$

partiendo de

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} = -\frac{1}{r^3} \mathbf{r}$$

y llamando

$$f = 1 - \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{r_0^3} + \frac{1}{2} \frac{\tau^3}{r_0^4} \dot{r}_0 + \frac{\tau^4}{24} \left(\frac{1}{r_0^6} + \frac{12}{r_0^5} \dot{r}_0^2 + \frac{3}{r_0^4} \ddot{r}_0 \right) + \dots$$

$$g = \tau - \frac{1}{6} \frac{\tau^3}{r_0^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau^4}{r_0^4} \dot{r}_0 + \dots$$

se reduce a

$$\mathbf{r} = f \mathbf{r}_0 + g \dot{\mathbf{r}}_0 \quad (7)$$

Elijamos como instante inicial el t_2 y sean

$$\tau_1 = k(t_3 - t_2), \quad \tau_2 = k(t_3 - t_1), \quad \tau_3 = k(t_2 - t_1);$$

con ello, la ecuación (7), escrita haciendo sucesivamente $\tau = \tau_3$ y $\tau = \tau_1$ nos da:

$$\mathbf{r}_1 = f_3 \mathbf{r}_2 - g_3 \dot{\mathbf{r}}_2,$$

$$\mathbf{r}_3 = f_1 \mathbf{r}_2 + g_1 \dot{\mathbf{r}}_2,$$

y como que $r_i r_j = | \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{r}_j |$,

$$[r_1 r_2] = g_3 | \mathbf{r}_2 \wedge \dot{\mathbf{r}}_2 | \quad [r_2 r_2] = g_1 | \mathbf{r}_2 \wedge \dot{\mathbf{r}}_2 |,$$

$$[r_1 r_3] = (f_1 g_3 + f_3 g_1) | \mathbf{r}_2 \wedge \dot{\mathbf{r}}_2 |,$$

queda finalmente

$$\begin{cases} c_1 = \frac{g_1}{f_1 g_3 + f_3 g_1} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \left[1 + \frac{1}{6} \frac{\tau_2^2 - \tau_1^2}{r_2^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau_3 (\tau_2 \tau_3 - \tau_1^2)}{\tau_2^4} \dot{r}_2 + \dots \right], \\ c_2 = \frac{g_3}{f_1 g_3 + f_3 g_1} = \frac{\tau_3}{\tau_2} \left[1 + \frac{1}{6} \frac{\tau_2^2 - \tau_3^2}{r_2^3} - \frac{1}{4} \frac{\tau_1 (\tau_2 \tau_1 - \tau_3^2)}{\tau_2^4} \dot{r}_2 + \dots \right], \end{cases} \quad (8)$$

Llévemos estas expresiones de c_1 y c_3 , limitadas a los dos primeros términos, a la ecuación (6.1), haciendo, además,

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = c_{10}, \quad \frac{\tau_1 \tau_3}{\theta} = q_0, \quad \frac{\tau_3}{\tau_4} = c_{30}, \quad v_{10} = q_0 (1 + c_{10}), \quad v_{30} = q_0 (1 + c_{30}),$$

$$A = a_{22} c_{10} + a_{23} c_{30} + a_{24}, \quad B = a_{22} v_{10} + a_{23} v_{30}; \quad (\text{Encke})$$

resulta

$$\Delta_2 = A + \frac{B}{r_2^2}. \quad (9)$$

Por otra parte, síguese del triángulo SOA (fig. 1):

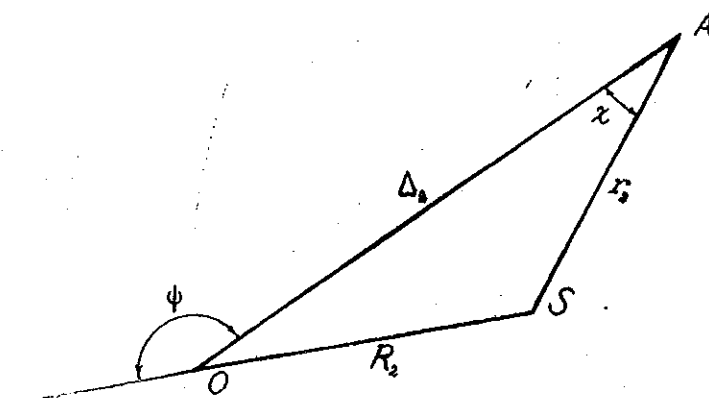


Fig. 1

$$\frac{R_2}{\text{sen } z} = \frac{\Delta_2}{\text{sen } (\psi - z)} = \frac{r_2}{\text{sen } \psi};$$

luego, si eliminamos Δ_2 y r_2 entre ellas y la (9), obtendremos

$$\frac{R_2 \text{sen } (\psi - z)}{\text{sen } z} = A + \frac{B \text{sen }^2 z}{(R_2 \text{sen } \psi)^2};$$

ecuación en z que se simplifica notablemente transformándose en la

$$\text{sen } (z - \gamma) = M_0 \text{sen }^2 z \quad (\text{Gauss}) \quad (10)$$

al introducir las auxiliares Γ , γ , y M_0 definidas por las relaciones

$$\Gamma \text{sen } \gamma = R_2 \text{sen } \psi, \quad \Gamma \text{cos } \gamma = A + R_2 \text{cos } \psi, \quad M_0 = - \frac{B}{\Gamma (R_2 \text{sen } \psi)^2}.$$

El ángulo ψ lo determinaremos en función de las ascensiones rectas y de las declinaciones *topocéntricas* de S y de A que corresponden a la posición intermedia, ya que, con efecto, existen entre uno y otras las relaciones expresadas por

$$\begin{cases} \cos \psi = - \text{sen } \delta_{\odot} \text{sen } \delta_2 - \cos \delta_{\odot} \cos \delta_2 \cos (\alpha_2 - \alpha_{\odot}), \\ \text{sen } \psi \cos P = - \cos \delta_{\odot} \text{sen } \delta_2 + \text{sen } \delta_{\odot} \cos \delta_2 \cos (\alpha_2 - \alpha_{\odot}), \\ \text{sen } \psi \text{sen } P = \cos \delta_2 \text{sen } (\alpha_2 - \alpha_{\odot}), \end{cases}$$

que se deducen fácilmente de la consideración de la fig. 2. Las coordenadas α_{\odot} y δ_{\odot} del Sol, a la vez que el valor de R_2 , se obtienen de

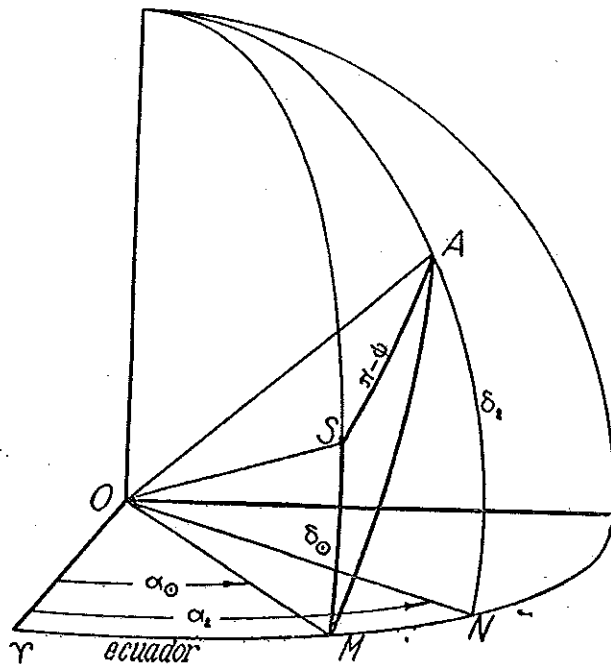


Fig. 2

$$R_2 \cos \delta_{\odot} \cos \alpha_{\odot} = X_2, \quad R_2 \cos \delta_{\odot} \sin \alpha_{\odot} = Y_2, \quad R_2 \sin \delta_{\odot} = Z_2.$$

Aunque en el detalle difieran, más o menos, unos métodos de otros, la ecuación (10) es siempre resuelta por aproximaciones sucesivas. Proponemos el siguiente: Sea z_i un valor inicial de z , distinto del valor exacto. Es evidente que el número

$$y_i \equiv M_0 \operatorname{sen}^4 z_i - \operatorname{sen} (z_i - \gamma)$$

será diferente de cero, y como que

$$\Delta y = [4 M_0 \operatorname{sen}^3 z \cos z - \cos (z - \gamma)] \Delta z,$$

es fácil ver que de z_i se deduce un valor z_f más aproximado sin más que tomar para éste el dado por

$$z_f = z_i + \frac{R'' [M_0 \operatorname{sen}^4 z_i - \operatorname{sen} (z_i - \gamma)]}{\cos (z_i - \gamma) - 4 M_0 \operatorname{sen}^3 z_i \cos z_i}$$

($R'' = 206264,806$)

Ho
lor prim
pero pró
cuanto
Resu
puesto q

resulta

Estos
tud de lo
mera de

Llega
chas t_p p
 Δ ; la f

Claro
tes, pues
líneas del
con los v
hasta lleg
aproxima

Para
tores r_i

El val
(11); el
rrección i
dades

equivalent

Huelga casi el indicar que, en la aproximación siguiente, se elige como valor primero el z_f de la aproximación que precede, tomándose el inicial arbitrario pero próximo al γ debido a que z es, por lo general, muy pequeño — tanto más cuanto más cerca de la oposición haya sido observado el astro en el instante t_2 .

Resuelta que sea la ecuación (10), el cálculo de c_1 y de c_3 es ya inmediato, puesto que, conocido r_2 mediante la ecuación

$$r_2 = \frac{R_2 \operatorname{sen} \psi}{\operatorname{sen} z}, \tag{11}$$

resulta

$$c_1 = c_{10} + \frac{v_{10}}{r_2^3} \quad c_3 = c_{30} + \frac{v_{30}}{r_2^3}. \tag{12}$$

Estos son los valores que, llevados a (6), permiten determinar Δ_2 y, en virtud de lo dicho, Δ_1 y Δ_3 . Como comprobación, el dado valor para Δ_2 por la primera de aquéllas, debe coincidir con el

$$\Delta_2 = \frac{R_2 \operatorname{sen} (\psi - z)}{\operatorname{sen} z}.$$

Llegados aquí, estamos ya en condiciones de corregir de aberración las fechas \bar{t}_1 , puesto que se conocen, aunque sólo sea aproximadamente, las distancias Δ ; la fórmula a emplear es

$$t_1 = \bar{t}_1 - a \Delta_1 \quad a = 0,0057717$$

Claro está que con ello cambiará el valor de la mayor parte de los coeficientes, pues bien sea directamente, bien porque dependan de las coordenadas rectilíneas del Sol, las que a su vez son funciones del tiempo, casi todos están ligados con los valores t_1 . Lo mejor será, por todo esto, repetir el cálculo en su totalidad hasta llegar a los nuevos valores de Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 de los que se deducirán otros más aproximados de c_1 y c_3 .

Para ello, comiézase por calcular x_1, y_1, z_1 mediante las (1) y los radios vectores r_1 .

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

El valor de r_2 que así se obtenga debería coincidir con el antes obtenido en (11); el mayor o menor grado en que ello ocurra, será un exponente de la corrección intrínseca lograda en el cálculo. Otra verificación se apoya en las igualdades

$$x_2 = c_1 x_1 + c_3 x_3, \quad y_2 = c_1 y_1 + c_3 y_3, \quad z_2 = c_1 z_1 + c_3 z_3,$$

equivalentes en conjunto al sistema (3).

El proceder más rápido para el cálculo de las raíces cuadradas que dan r_i cuando se pretende asegurar la bondad de la séptima o de la octava decimal, estriba en determinar las tres primeras cifras de la raíz — p. e., con el auxilio de una corta tabla de raíces cuadradas, o con el de la regla de cálculo —, el número formado por las cuales representaremos por \bar{r}_i . Un cálculo fácil demuestra que un nuevo valor mucho más exacto es el dado por

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{\bar{r}_i} - \bar{r}_i \right).$$

Por lo común, la segunda aproximación es ya más que suficiente, en el sentido de que el cuadrado del último valor de r_i coincide con la suma $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ hasta la séptima cifra decimal.

Sean $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$, las relaciones *sector: triángulo* correspondientes, respectivamente, a las posiciones (2, 3), (1, 3) y (1, 2). De ellas, y mediante las ecuaciones que siguen, cuya justificación puede verse en cualquier tratado, se deducen los valores c_1 y c_3 que terminan la primera aproximación que empezó con el cálculo de las mismas en las ecuaciones (9) una vez corregidas de aberración las fechas t_i .

Las fórmulas a que nos referimos son las siguientes: determinase en primer lugar la magnitud auxiliar x

$$x^2 = 2 (rr' + xx' + yy' + zz'),$$

hecho lo cual se calcula

$$m = \frac{\tau^2}{x^3}, \quad \tau = k (t' - t)$$

y

$$l = \frac{1}{x} \frac{r + r'}{2} - \frac{1}{2},$$

de donde se deduce el valor

$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi}$$

Los cocientes y , que, en rigor, resultan de una ecuación de tercer grado, se han dispuesto en tablas para mayor comodidad, por ejemplo las de Bauschinger y de Boyer. En otras, generalmente adjuntas a esas, se dan los valores de ξ en función de

$$x = \frac{m}{y^2} - l,$$

lo cual indica ya que, si el valor ξ no es despreciable, será necesario reiterar el cálculo de h y deducir de éste el nuevo valor de y . De ordinario es $\xi = 0$ y, en todo caso, como que ξ será siempre muy pequeño, en la primera aproximación podremos considerarlo nulo. Según sea \bar{y}_1 , \bar{y}_2 o \bar{y}_3 , la \bar{y} que se calcula, deberá substituirse

$$\begin{array}{l} \tau \quad \text{por} \quad \tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \\ x, y, z, r \quad \text{"} \quad x_2, y_2, z_2, r_2, \quad x_1, y_1, z_1, r_1, \quad x_3, y_3, z_3, r_3 \\ x', y', z', r' \quad \text{"} \quad x_3, y_3, z_3, r_3, \quad x_2, y_2, z_2, r_2, \quad x_1, y_1, z_1, r_1 \end{array}$$

Finalmente, c_1 y c_3 las determinaremos, aun apartándonos del proceder general, mediante las ecuaciones

$$c_1 = \frac{g_1}{g_1 g_3 + f_3 g_1}, \quad c_3 = \frac{g_3}{f_1 g_2 + f_2 g_1} \quad (13)$$

siendo

$$\begin{array}{l} g_1 = \frac{x_1}{y_1}, \quad g_3 = \frac{\tau_2}{y_3} \\ f_1 = 1 - \frac{g_1^2}{\frac{1}{2} r_3 x^2}, \quad f_3 = 1 - \frac{g_3^2}{\frac{1}{2} r_2 x^2} \end{array} \quad (14)$$

El hecho de ser también

$$c_1 = c_{10} \frac{\bar{y}_2}{y_1}, \quad c_3 = c_{30} \frac{\bar{y}_2}{y_3}$$

permite comprobar los valores hallados en (13) para c_1 y c_3 . Es precisamente en esta determinación de c_1 y c_3 con lo que termina el proceso que constituye la primera aproximación, proceso que, en rigor, comienza con el cálculo de v_{10} y v_{30} . Veamos ahora en qué consiste la segunda, distinguiendo el caso en que se pasa directamente a ésta por poseerse ya elementos provisionales. Esencialmente, estriba en *repetir el cálculo de la primera* hasta llegar a las fórmulas (13) inclusive, salvo que se tomará

$$v_{10} = (c_1 - c_{10}) r_2^2, \quad v_{30} = (c_3 - c_{30}) r_2^2,$$

procediendo c_1 , c_3 y r_2 de la aproximación primera, o bien

$$\begin{array}{l} v_{10} = \left[\frac{r_2 r_3 \operatorname{sen}(v_3 - v_2)}{r_1 r_3 \operatorname{sen}(v_3 - v_1)} - c_{10} \right] r_2^2, \\ v_{30} = \left[\frac{r_1 r_2 \operatorname{sen}(v_2 - v_1)}{r_1 r_3 \operatorname{sen}(v_3 - v_1)} - c_{30} \right] r_2^2 \end{array}$$

si nos hallamos en el segundo de los casos indicados. Naturalmente, que, en este último supuesto, tanto las anomalías verdaderas v_i como los radios vectores r_i habrán sido calculados con aquellos elementos.

Además, al resolver la ecuación de Gauss, se escogerá como valor inicial de z , bien el definitivo de la aproximación anterior, o, acaso, el definido por la igualdad

$$\text{sen } z = \frac{R_2 \text{ sen } \psi}{r_2}$$

donde el valor r_2 coincide con el adoptado para calcular v_{10} y v_{30} .

Así proseguirá el cálculo hasta conseguir que, en una misma aproximación, convengan entre sí los valores de c_1 y de c_3 hallados por medio de las (13) y los dados por las (12), dentro de los límites que nos hayamos fijado — seis o siete decimales.

Elegidas ya definitivamente c_1 y c_3 , podemos pasar a la determinación de los elementos, calculando de nuevo, y en primer lugar, con el fin de asegurarnos de los resultados obtenidos, las distancias Δ_i de las que se deducen las coordenadas heliocéntricas y los radios vectores.

Sentado esto, sea \mathbf{c} el vector de las áreas, p el parámetro de la órbita y \mathbf{R} el vector-unidad correspondiente a \mathbf{c} . Se tiene:

$$\mathbf{c} = \sqrt{p} \mathbf{R} \quad \therefore \quad r_2 \wedge \dot{r}_2 = \sqrt{p} \mathbf{R}$$

y como que

$$r_1 = f_3 r_2 - g_3 r_2, \quad r_3 = f_1 r_2 + g_1 r_2,$$

resulta, en último término

$$r_2 \wedge \frac{f_3 r_3 - f_1 r_1}{f_1 g_3 + f_3 g_1} = \sqrt{p} \mathbf{R}$$

Introduzcamos las componentes de \mathbf{R} respecto del sistema (S):

$$R_x = \text{sen } i \cos \Omega, \quad R_y = \text{sen } i \text{ sen } \Omega, \quad R_z = \cos i.$$

La última igualdad vectorial equivale a las tres escalares

$$\begin{cases} y_2 \dot{z}_2 - z_2 \dot{y}_2 = \sqrt{p} \text{ sen } i \cos \Omega, \\ z_2 \dot{x}_2 - x_2 \dot{z}_2 = \sqrt{p} \text{ sen } i \text{ sen } \Omega, \\ x_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{x}_2 = \sqrt{p} \cos i, \end{cases} \quad (15)$$

siendo

$$\dot{x}_2 = \frac{f_3 x_2 - f_1 x_1}{f_1 g_3 + f_3 g_1}, \quad \dot{y}_2 = \frac{f_3 y_2 - f_1 y_1}{f_1 g_3 + f_3 g_1}, \quad \dot{z}_2 = \frac{f_3 z_2 - f_1 z_1}{f_1 g_3 + f_3 g_1}$$

las proyecciones de

$$\dot{r}_2 = \frac{f_3 r_2 - f_1 r_1}{f_1 g_3 + f_3 g_1}$$

sobre los ejes (S).

Las e
nodo asc
harto con
ecliptica.
de efemé
constantes
mo papel
de esos v
ponentes
dos en S,
dese el v

Las ecuaciones (15) permiten determinar la inclinación i , y la longitud del nodo ascendente, Ω , referidos al ecuador como plano fundamental. Fórmulas harto conocidas facilitan el paso de éstos a los mismos elementos relativos a la eclíptica. Advertiremos, sin embargo, que en cuanto a lo que a la determinación de efemérides se refiere, dicho cambio es, por lo menos, ocioso, puesto que las constantes vectoriales $P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z$, las cuales desempeñan hoy el mismo papel que antaño las constantes de Gauss, se calculan directamente a partir de esos valores ecuatoriales. En efecto: los vectores unidad \mathbf{Q} y \mathbf{P} , cuyas componentes respecto de (S) son precisamente $P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z$, están aplicados en S, al igual que \mathbf{R} , y forman con él una terna ortogonal directa, dirigiéndose el vector \mathbf{P} al perihelio de A (fig. 3) de modo que

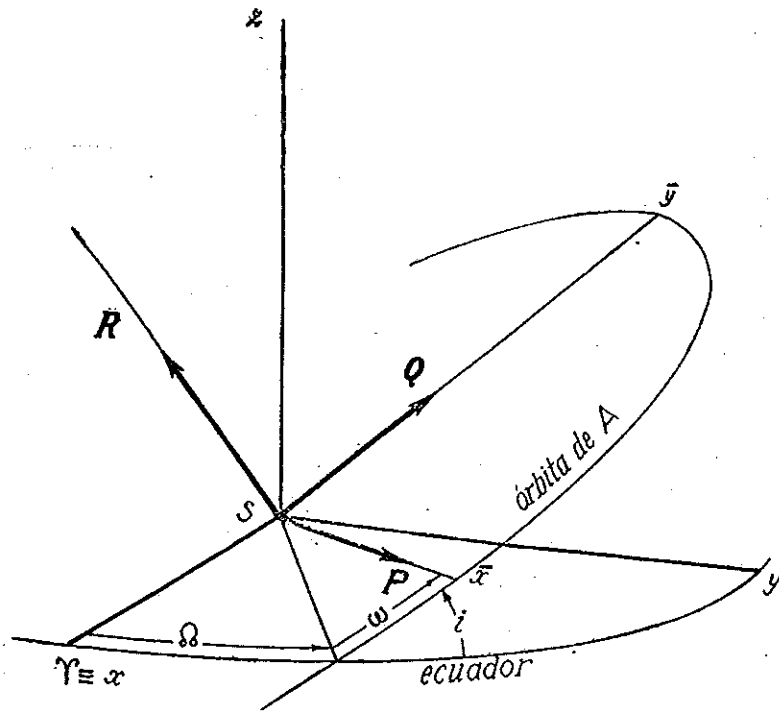


Fig. 3

$$\left\{ \begin{array}{l} P_x = \cos \Omega \cos \omega - \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \omega \cos i, \\ P_y = \operatorname{sen} \Omega \cos \omega + \cos \Omega \operatorname{sen} \omega \cos i, \\ P_z = \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} i, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_x = -\cos \Omega \operatorname{sen} \omega - \operatorname{sen} \Omega \cos \omega \cos i, \\ Q_y = -\operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i, \\ Q_z = \cos \omega \operatorname{sen} i, \end{array} \right.$$

Elevemos al cuadrado los dos miembros de la igualdad

$$r_2 \wedge r_2 = \sqrt{p} R;$$

se obtiene

$$r_2^2 (V_2^2 - \dot{r}_2^2) = p,$$

ya que

$$V_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2,$$

$$\dot{r}_2 = \frac{x_2 \dot{x}_2 + y_2 \dot{y}_2 + z_2 \dot{z}_2}{r_2},$$

valor de p que debe coincidir con el deducido de (15).

La anomalía verdadera v_2 que corresponde a la posición intermedia, y, a la vez la excentricidad e resultan del sistema

$$\begin{cases} e \operatorname{sen} v_2 = \dot{r}_2 \sqrt{p} \\ e \operatorname{cos} v_2 = \frac{p}{r_2} - 1 \end{cases}$$

Conocida e , el semieje mayor a de la órbita puede ser calculado por medio de la relación

$$p = a(1 - e^2) \quad \therefore \quad a = \frac{p}{1 - e^2};$$

además, habrá de tenerse

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r_2} - V_2^2,$$

igualdad que da lugar a una nueva comprobación de los valores hallados.

Finalmente, el argumento de latitud del perihelio, ω , queda definido por

$$\begin{cases} r_2 \operatorname{sen}(v_2 + \omega) = z_2 \operatorname{cosec} i \\ r_2 \operatorname{cos}(v_2 + \omega) = x_2 \operatorname{cos} \Omega + y_2 \operatorname{sen} \Omega \end{cases}$$

Fáltanos sólo determinar la anomalía media, M_0 , correspondiente a una época arbitrariamente escogida — la cual puede coincidir con el instante t_2 —, si la órbita es netamente elíptica, o la época T , de paso por el perihelio, si la órbita es casi parabólica — de e próxima a la unidad.

En el primero de estos casos, empezaremos por calcular la anomalía excéntrica, E_2 :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E_2 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2,$$

o también,

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E_2 = \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2, \quad (\operatorname{sen} \varphi = e)$$

y de ella

Además,

Si la
según he
versos m
problema
po t y la
cesarias (cap. 2.º):

tg -

Los v
Oppolzer
ordinario

que corr
parabólico
tabla 14
para cad
pre, que

En e
en el ir
En la p

y de ella deduciremos

$$M_0 = E_2 - R'' e \text{ sen } E_2 \quad (R'' = 206264,806).$$

Además, el movimiento medio diario valdrá

$$n = k'' a^{-\frac{3}{2}}, \quad (k'' = 3548,18761).$$

Si la órbita es casi parabólica ($e \sim 1$), el conocimiento de M_0 se substituye, según hemos dicho, por el de T , para cuya determinación se han propuesto diversos métodos. El que seguimos, corresponde al empleado por Oppolzer en el problema directo — determinar la anomalía verdadera dados que sean el tiempo t y la época T —, por lo cual nos limitaremos a transcribir las fórmulas necesarias en nuestro caso, que son las siguientes (v. Oppolzer op. cit. I, sec. 2.ª, cap. 2.º):

$$\epsilon = \frac{1-e}{1+e}, \quad \alpha = \frac{f(1+e)^2}{\sqrt{2} p f}, \quad \beta = E \epsilon;$$

$$M = \alpha (t - T), \quad x = \sigma : f, \quad n = \beta x^2,$$

$$\text{tg } \frac{1}{2} v = x \text{ GH}, \quad \theta = \epsilon \text{ tg}^2 \frac{v}{2}, \quad r = q (1 + \text{tg}^2 \frac{v}{2}) : (1 + \theta).$$

Los valores de $\log G$ y $\log H$ se obtienen de las tablas VI, b) y VI, c) de Oppolzer (Calc. des orb.), con argumento n y $n \epsilon$, respectivamente, siendo de ordinario $\log H$ muy pequeño, sino nulo. En cuanto a σ , es el valor de la $\text{tg } \frac{1}{2} v$ que correspondería al valor de $M = \alpha (t - T)$, si la órbita fuese rigurosamente parabólica, pudiéndose hallar, por tanto, en cualquiera tabla, de Barker (p. e., la tabla 14 de Bauschinger). Al calcular unas efemérides, es preciso determinar para cada fecha G , H y σ ; en cambio E , f , ϵ , α y β , lo serán una vez para siempre, puesto que no dependen del tiempo. En efecto: haciendo

$$A = a_0 - a_1 \epsilon - a_2 \epsilon^2 - a_3 \epsilon^3 - \dots,$$

$$a_0 = 0,4000000, \quad a_1 = 0,01142857, \quad a_2 = 0,006603175,$$

$$a_3 = 0,004411462, \quad a_4 = 0,003211174,$$

$$E = \frac{5}{2} A \quad \text{y} \quad f^2 = 1 + 3 \epsilon \left(A - \frac{2}{3} \right).$$

En el problema inverso, para deducir del valor v_2 de la anomalía verdadera en el instante t_2 el de la época T , procederemos por aproximaciones sucesivas. En la primera aproximación se hará

$$\sigma = \text{tg } \frac{1}{2} v_2,$$

cantidad conocida, y de ella deduciremos, como en el problema directo, un valor para $\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2$, que representaremos por $\left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2\right)_f$ distinto del verdadero, pero que nos permitirá corregir la primitiva σ incrementándola en

$$\delta \sigma = \frac{f \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2 - \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2\right)_f \right]}{2 \beta x^2 (b_1 + 2 b_2 n + 3 b_3 n^2) + G}$$

siendo

$$G = 1 + b_1 n + b_2 n^2 + b_3 n^3 + \dots$$

$$b_1 = 0,4000000, \quad b_2 = 0,2114286, \quad b_3 = 0,1168254, \quad b_4 = 0,06540012.$$

De este nuevo valor de σ resulta un segundo valor de $\left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2\right)_f$ con el cual se corrige otra vez el de aquélla y, así siguiendo, se consigue al cabo de dos o tres aproximaciones, anular siete u ocho cifras de la diferencia

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2 - \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2\right)_f.$$

Determinado de ese modo σ , es ya fácil deducir el valor de T, pues que, en efecto,

$$t_2 - T = \frac{\sigma}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{3} \sigma \right) \sqrt{\frac{2}{k}}, \quad \left(\sqrt{\frac{2}{k}} = 82,2116859 \right).$$

Con ello queda terminado el cálculo de la órbita, y resuelto el problema que nos habíamos propuesto. Para comprobar la bondad de los elementos hallados, es imprescindible calcular a partir de ellos las efemérides que corresponden a las fechas t_1 y t_2 . Si las diferencias observación-cálculo a ellas relativas son satisfactorias, podremos asegurar que dichos elementos representan suficientemente las observaciones base, sin que con ello se aluda a la coincidencia con la trayectoria real, y esto por doble motivo; porque a menudo sabemos muy poco de la exactitud de dichas observaciones, y además, porque las perturbaciones modifican continuamente los elementos de la órbita osculatrix.

RESUMEN DE LAS FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO EFECTIVO

A continuación resumimos las fórmulas necesarias para el cálculo de una órbita de acuerdo con la teoría que acabamos de exponer, entre las cuales se elegirán unas u otras según no se posean elementos aproximados — caso (a) — o, por el contrario, se cuente con ellos — caso (b) —.

Datos

Redú
días y fr
Calcu

De l
Almanac
denadas

En
ya \bar{X} , \bar{Y}

y hacier

CÁLCUL

c
E
I

DATOS

$$(\bar{t}, \alpha, \delta)_1 \quad (\bar{t}, \alpha, \delta)_2 \quad (\bar{t}, \alpha, \delta)_3$$

Redúzcase el tiempo \bar{t} a tiempo civil de Greenwich (T. U.), expresado en días y fracción de día, y las ascensiones rectas a grados sexagesimales.

Calcular, para cada observación, los cosenos directores.

$$l = \cos \delta \cos \alpha, \quad m = \cos \delta \sin \alpha, \quad n = \sin \delta.$$

De las efemérides (Almanaque Náutico, Connaissance des Temps, Nautical Almanac, etc.), se deducen, haciendo intervenir las diferencias segundas, las coordenadas rectangulares *geocéntricas* del sol $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ para cada t , siendo

$$t = \bar{t} - a \Delta, \quad (1) \quad a = 0,0057717, \\ \Delta = |A - T|.$$

En el caso (a) se toma, en primera aproximación, $t = \bar{t}$. Conocidos ya $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ pasaremos a coordenadas *topocéntricas* determinando

$$\Delta \bar{X} = -P \odot \rho_0 \cos \varphi' \cos \theta,$$

$$\Delta \bar{Y} = -P \odot \rho_0 \cos \varphi' \sin \theta,$$

$$\Delta \bar{Z} = -P \odot \rho_0 \sin \varphi',$$

y haciendo

$$X = \bar{X} + \Delta \bar{X}, \quad Y = \bar{Y} + \Delta \bar{Y}, \quad Z = \bar{Z} + \Delta \bar{Z}.$$

CÁLCULO DE LAS CONSTANTES

$$d_{11} = m_1 n_3 - m_3 n_1, \quad d_{12} = n_1 l_3 - n_3 l_1, \quad d_{13} = l_1 m_3 - l_3 m_1$$

$$D_1 = X_1 d_{11} + Y_1 d_{12} + Z_1 d_{13}, \quad D_2 = X_2 d_{11} + Y_2 d_{12} + Z_2 d_{13},$$

$$D_3 = X_3 d_{11} + Y_3 d_{12} + Z_3 d_{13}, \quad D_0 = l_3 d_{11} + m_2 d_{12} + n_2 d_{13},$$

$$a_{22} = -\frac{D_1}{D_0}, \quad a_{23} = -\frac{D_2}{D_0}, \quad a_{24} = \frac{D_3}{D_0}.$$

I

II

III

$$\left\{ \begin{array}{lll} K_1 = d_{11}, & d_{12}, & d_{13}, \\ a'_{11} = m_2 n_3 - n_1 m_3, & n_2 l_3 - l_2 n_3, & l_2 m_3 - m_2 l_3, \\ a'_{12} = Y_1 n_3 - Z_1 m_3, & Z_1 l_3 - X_1 n_3, & X_1 m_3 - Y_1 l_3, \\ a'_{13} = Y_2 n_3 - Z_2 m_3, & Z_2 l_3 - X_2 n_3, & X_2 m_3 - Y_2 l_3, \\ a'_{14} = -Y_2 n_3 + Z_2 m_3, & -Z_2 l_3 + X_2 n_3, & -X_2 m_3 + Y_2 l_3. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} K_1 = -d_{11}, & -d_{12}, & -d_{13}, \\ a'_{31} = m_2 n_1 - n_2 m_1, & n_2 l_1 - l_2 n_1, & l_2 m_1 - m_2 l_1, \\ a'_{32} = Y_1 n_1 - Z_1 m_1, & Z_1 l_1 - X_1 n_1, & X_1 m_1 - Y_1 l_1, \\ a'_{33} = Y_3 n_1 - Z_3 m_1, & Z_3 l_1 - X_3 n_1, & X_3 m_1 - Y_3 l_1, \\ a'_{34} = -Y_2 n_1 + Z_2 m_1, & -Z_2 l_1 + X_2 n_1, & -X_2 m_1 + Y_2 l_1. \end{cases}$$

$$a_{ij} = \frac{a'_{ij}}{K_1}, \quad (i = 1, 3; j = 1, 2, 3, 4).$$

$$\tau_1 = k(t_3 - t_2), \quad \tau_2 = k(t_3 - t_1), \quad \tau_3 = k(t_2 - t_1), \quad k = 0,017202099$$

$$c_{10} = \frac{\tau_1}{\tau_2}, \quad c_{30} = \frac{\tau_3}{\tau_2}$$

$$c_{10} + c_{30} = 1 \quad (1)$$

PRIMERA APROXIMACIÓN

En el caso (a) determínese

$$q_0 = \frac{1}{6} \tau_1 \tau_3, \quad v_{10} = q_0 (1 + c_{10}), \quad v_{30} = q_0 (1 + c_{30}),$$

en el (b)

$$v_{10} = \left[\frac{r_2 r_3 \operatorname{sen}(v_3 - v_2)}{r_1 r_3 \operatorname{sen}(v_3 - v_1)} - c_{10} \right] r_1^2, \quad v_{30} = \left[\frac{r_1 r_2 \operatorname{sen}(v_2 - v_1)}{r_1 r_3 \operatorname{sen}(v_3 - v_1)} - c_{30} \right] r_1^2,$$

y tanto en uno como en el otro

$$A = a_{22} c_{10} + a_{13} c_{30} + a_{21}^2, \quad B = a_{22} v_{10} + a_{23} v_{30}.$$

$$R_2 \cos \delta_{\odot} \cos \alpha_{\odot} = X_2, \quad R_2 \cos \delta_{\odot} \operatorname{sen} \alpha_{\odot} = Y_2, \quad R_2 \operatorname{sen} \delta_{\odot} = Z_2,$$

$$\cos \psi = -\operatorname{sen} \delta_{\odot} \operatorname{sen} \delta_2 - \cos \delta_{\odot} \cos \delta_2 \cos \alpha_2 - \alpha_{\odot},$$

$$\operatorname{sen} \psi \cos P = -\cos \delta_{\odot} \operatorname{sen} \delta_2 + \operatorname{sen} \delta_{\odot} \cos \delta_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_{\odot}),$$

$$\operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} P = \cos \delta_2 \operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_{\odot}),$$

$$\operatorname{sen}_2 \psi + \cos^2 \psi = 1$$

$$\begin{cases} \Gamma \operatorname{sen} \gamma = R_2 \operatorname{sen} \psi, \\ \Gamma \cos \gamma = A + R_2 \cos \psi, \end{cases} \quad M_0 = -\frac{B}{\Gamma (R_2 \operatorname{sen} \psi)^3}$$

* Las fórmulas así encuadradas son las que deberán utilizarse para las comprobaciones.

Para
se tendrá
lo es el
z_i =

Llegado
desde (lores Δ
Δ₁ Δ₂ y
rectang

x₁ =

x₂ =

y los 1

El
dir co
Ca

Para resolver la ecuación de Gauss

$$\text{sen}(z - \gamma) = M_0 \text{sen}^4 z,$$

se tendrá en cuenta que si z_i es un valor aproximado de la raíz, otro más exacto lo es el

$$z_i = z_i + \frac{R'' [M_0 \text{sen}^4 z_i - \text{sen}(z_i - \gamma)]}{\cos(z_i - \gamma) - 4 M_0 \text{sen}^3 z_i \cos z_i} \quad (R'' = 206264,806),$$

$$r_2 = \frac{R_2 \text{sen} \psi}{\text{sen} z} \quad (2)$$

$$c_1 = c_{10} + \frac{v_{10}}{r_2^2} \quad c_3 = c_{30} + \frac{v_{30}}{r_2^2} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \Delta_2 = a_{21} c_1 + a_{23} c_3 + a_{24}, \\ c_1 \Delta_1 = a_{11} \Delta_2 + a_{12} c_1 + a_{13} c_3 + a_{14}, \\ c_3 \Delta_3 = a_{31} \Delta_2 + a_{32} c_1 + a_{33} c_3 + a_{34}. \end{cases}$$

$$\Delta_2 = \frac{R_2 \text{sen}(\psi - z)}{\text{sen} z}$$

Llegados aquí, si nos suponemos en el caso (a), será menester repetir el cálculo desde (1) — lo que, en general, no será necesario en el (b), a menos que los valores Δ sean muy diferentes de los utilizados en (1) — hasta encontrar de nuevo Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 , a partir de los cuales se prosigue aquél determinando las coordenadas rectangulares heliocéntricas

$$x_i = l_i \Delta_i - X_i, \quad y_i = m_i \Delta_i - Y_i, \quad z_i = n_i \Delta_i - Z_i, \quad (i = 1, 2, 3).$$

$$x_2 = c_1 x_1 + c_3 x_3$$

$$y_2 = c_1 y_1 + c_3 y_3$$

$$z_2 = c_1 z_1 + c_3 z_3,$$

y los radios vectores

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}.$$

El valor de r_2 que resulta de la extracción de la raíz cuadrada ha de coincidir con el deducido de (2).

Calcúlese, para cada posición,

$$x^2 = 2(rr' + xx' + yy' + zz'),$$

$$m = \frac{x^2}{x^3},$$

$$l = \frac{1}{x} \frac{r+r'}{2} - \frac{1}{2},$$

$$h = \frac{m}{\frac{5}{8} + l + \xi}$$

La \bar{y} resulta, con h como argumento, de la tabla 21 de Bauschinger o la citada de Boyer. Cuanto a ξ , se hará igual a cero en la primera aproximación, y se obtiene con argumento

$$x = \frac{m}{y^2} - l,$$

de la tabla 19, (b) de aquél. Según sea \bar{y} igual a \bar{y}_1 , \bar{y}_2 o \bar{y}_3 deberá hacerse

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_1, & \tau_2, & \tau_3, \\ x, y, z, r &= x_2, y_2, z_2, r_2, & x_1, y_1, z_1, r_1, & x_1, y_1, z_1, r_1, \\ x', y', z', r' &= x_3, y_3, z_3, r_3; & x_2, y_2, z_2, r_2; & x_2, y_2, z_2, r_2; \\ g &= \frac{\tau_1}{y_1}, & g_2 &= \frac{\tau_2}{y_2}, \\ f_1 &= 1 - \frac{g_1^2}{\frac{1}{2} r_2 \kappa_1^2}, & f_2 &= 1 - \frac{g^2}{\frac{1}{2} r_2 \kappa_2^2}, \\ c_1 &= \frac{g_1}{f_1 g_2 + f_2 g_1}, & c_2 &= \frac{g_2}{f_1 g_2 + f_2 g_1}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$c_1 = c_{10} \frac{\bar{y}_1}{y_1},$$

$$c_2 = c_{20} \frac{\bar{y}_2}{y_2}$$

SEGUNDA APROXIMACIÓN

Comienza la segunda aproximación con el cálculo de

$$v_{10} = (c_1 - c_{10}) r_2^2, \quad v_{20} = (c_2 - c_{20}) r_2^2,$$

fórmulas en las que c_1 y c_2 son las halladas al final de la aproximación primera — ecuaciones (4) —. A partir de ellas, se sigue *al igual que en ésta*, hasta llegar otra vez a (4). Así se prosigue hasta que, en una misma aproximación, coincidan los valores de c_1 y de c_2 dados por (3) y por (4), con lo cual se dará por terminado el cálculo de las mismas, pasando a la

DETERMINACIÓN DE LOS ELEMENTOS

$$\begin{cases} \Delta_2 = a_{22} c_1 + a_{23} c_2 + a_{24}, \\ c_2 \Delta_1 = a_{11} \Delta_2 + a_{12} c_1 + a_{13} c_2 + a_{14}, \\ c_2 \Delta_3 = a_{31} \Delta_2 + a_{32} c_1 + a_{33} c_2 + a_{34}. \end{cases}$$

Tanto c_1 como c_2 son las adoptadas como definitivas.

$$x_i = l_i \Delta_i - X_i, \quad y_i = m_i \Delta_i - Y_i, \quad z_i = n_i \Delta_i - Z_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$$

$$\dot{x}_i = \frac{f_2 x_3 - f_1 x_1}{f_1 g_3 + f_2 g_1}, \quad \dot{y}_i = \frac{f_2 y_3 - f_1 y_1}{f_1 g_3 + f_2 g_1}, \quad \dot{z}_i = \frac{f_2 z_3 - f_1 z_1}{f_1 g_3 + f_2 g_1}$$

Los valores de f_1, f_2, g_1, g_2 son los empleados en el cálculo de las últimas c_i .

$$\begin{cases} \sqrt{p} \operatorname{sen} i \cos \Omega = y_2 \dot{z}_2 - z_2 \dot{y}_2, \\ \sqrt{p} \operatorname{sen} i \operatorname{sen} \Omega = z_2 \dot{x}_2 - x_2 \dot{z}_2, \\ \sqrt{p} \cos i = x_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{x}_2, \end{cases}$$

$$\dot{r}_i = \frac{x_2 \dot{x}_2 + y_2 \dot{y}_2 + z_2 \dot{z}_2}{r_i}, \quad V_i^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2,$$

(4)

$$p = r_i^2 (V_i^2 - \dot{r}_i^2)$$

$$\begin{cases} e \operatorname{sen} v_2 = \dot{r}_i \sqrt{p} \\ e \cos v_2 = \frac{p}{r_i} - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} r_2 \operatorname{sen} (v_2 + \omega) = z_2 \operatorname{cosec} i, \\ r_2 \cos (v_2 + \omega) = x_2 \cos \Omega + y_2 \operatorname{sen} \Omega \end{cases}$$

Si la órbita ha resultado netamente elíptica:

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad \frac{1}{a} = \frac{2}{r_i} - V_i^2$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E_2 = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2, \quad M_2 = E_2 - R'' e \operatorname{sen} E_2$$

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{sen} e, \quad (R'' = 206264,806)$$

$$n = k'' a^{-\frac{3}{2}} \quad (k'' = 3548'', 18761).$$

Si, por el contrario, es casi parabólica:

$$q = \frac{1}{1 + e}$$

$$A = a_0 - a_1 e - a_2 e^2 - a_3 e^3 - \dots$$

$$a_0 = 0,4000000, \quad a_1 = 0,01142857, \quad a_2 = 0,006603175, \quad a_3 = 0,004411462.$$

$$E = \frac{5}{2} A, \quad f^2 = 1 + 3e^2 \left(A - \frac{2}{3} \right)$$

$$G = 1 + b_1 n + b_2 n^2 + b_3 n^3 + \dots$$

$$b_1 = 0,4000000, \quad b_2 = 0,214286, \quad b_3 = 0,1168254, \quad b_4 = 0,06540012$$

Para calcular la época T de paso por el perihelio, se calculará, previamente

$$\epsilon = \frac{1-e}{1+e}, \quad \alpha = \frac{f(1+e)^2}{\sqrt{2} p \frac{3}{2}}, \quad \beta = E \epsilon;$$

y se hará

$$x = \frac{\sigma}{f}, \quad n = \beta x^2, \quad \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2 \right)_f = x \text{ GH} \quad (5)$$

En la primera aproximación se elige $\sigma_1 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2$ y de ella se deduce, median-

te las (5) un valor $\left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2 \right)_f$ distinto del verdadero $\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2$, por lo demás

conocido. Con auxilio de éste, se corregirá la primera σ haciendo

$$\sigma = \sigma_1 + \frac{f \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2 - \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2 \right)_f \right]}{2\beta x^2 (b_1 + 2b_2 n + 3b_3 n^2) + G}$$

Fijado ya σ , T resulta de

$$t_2 - T = \frac{\sigma}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{3} \sigma^2 \right) \sqrt{\frac{2}{k}}, \quad \left(\sqrt{\frac{2}{k}} = 82,2116859 \right)$$

Finalmente, tanto en el caso de una órbita elíptica como en el de órbita casi parabólica, conviene determinar

$$\left\{ \begin{array}{l} P_x = \cos \varrho \cos \omega - \operatorname{sen} \varrho \operatorname{sen} \omega \cos i, \\ P_y = \operatorname{sen} \varrho \cos \omega + \cos \varrho \operatorname{sen} \omega \cos i, \\ P_z = \operatorname{sen} \omega \cos i, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} Q_x = \cos \varrho \operatorname{sen} \omega - \operatorname{sen} \varrho \cos \omega \cos i, \\ Q_y = -\operatorname{sen} \varrho \operatorname{sen} \omega + \cos \varrho \cos \omega \cos i, \\ Q_z = \cos \omega \operatorname{sen} i, \end{array} \right.$$

a fin de simplificar el cálculo de efemérides. Si \bar{x} , \bar{y} son las coordenadas orbitales del astro (v. fig. 3), evidentemente son

$$\bar{x} = a (\cos E - e), \quad \bar{y} = b \operatorname{sen} E,$$

si la órbita es una elipse de semieje menor b , y

$$\bar{x} = r \cos v, \quad \bar{y} = r \operatorname{sen} v$$

si se trata
coordenad

x

El pas
fórmulas:

que exige
rítmico.

si se trata de una parábola o casi parábola. De \bar{x} e \bar{y} se deducen fácilmente las coordenadas ecuatoriales heliocéntricas:

$$x = \bar{x} P_x + \bar{y} Q_x, \quad y = \bar{x} P_y + \bar{y} Q_y, \quad z = \bar{x} P_z + \bar{y} Q_z.$$

El paso de elementos ecuatoriales a eclípticos se hará por medio de las fórmulas:

<i>eclípticas</i>		<i>ecuatoriales</i>
$\text{sen } i' \text{ sen } \Omega'$	$=$	$\text{sen } i \text{ sen } \Omega,$
$\text{sen } i' \text{ cos } \Omega'$	$= -$	$\text{sen } \epsilon \text{ cos } i + \text{cos } \epsilon \text{ sen } i \text{ cos } \Omega,$
$\text{sen } i' \text{ sen } (\omega' \cdot \omega)$	$= -$	$\text{sen } \epsilon \text{ sen } \Omega,$
$\text{sen } i' \text{ cos } (\omega' \cdot \omega)$	$=$	$\text{cos } \epsilon \text{ sen } i - \text{sen } \epsilon \text{ cos } i \text{ cos } \Omega,$
$\text{cos } i'$	$=$	$\text{cos } \epsilon \text{ cos } i - \text{sen } \epsilon \text{ sen } i \text{ cos } \Omega,$

que exigen, en conjunto, menos operaciones que las adaptadas al cálculo logarítmico.

Diciembre 1940

BIBLIOGRAFIA

- ADAMS, C. E. — Calculation of a Comet's coordinates (B. A. A. 1922, xxxii, 231).
- ANDoyer, H. — Nouvelles tables trigonométriques fondamentales (Par. 1915). Formules nouvelles relatives à l'étude des Comètes et à différents problèmes de la théorie des orbites. (B. A., xxxv, 5, Par. 1918).
- ASTRONOMICAL UNION. — Transactions of the international A. U. (III, Camb. 1929; v, Camb. 1936; vi, Camb. 1939).
- BANACHIEWICZ, TH. — Formules de nouveau genre appliquées à la détermination d'une orbite. (Cir. O. de Crac., n.° 16, Crac. 1925).
- Formules de nouveau genre appliquées à la correction d'une orbite parabolique (loc. cit., n.° 17, Crac. 1925).
- Sur le calcul arithmométrique des orbites (loc. cit., n.° 20, Crac. 1925).
- Les relations de polygonométrie sphérique et les systèmes de Gauss et de Delambre de trigonométrie sphérique (loc. cit., n.° 23, Crac. 1925).
- Was sind die Formeln neuer Art? (At. A. ser. C., vol. 1, pag. 63-70, Crac. 1929).
- Méthodes arithmométriques de la correction des orbites (loc. cit., pag. 71-86).
- Sur le calcul de la variation de la déclinaison d'une planète (loc. cit., pag. 87-90).
- Calcul arithmométrique d'une orbite parabolique d'après deux lieux héliocentriques. (At. A. ser. c. vol. 2, pag. 37-40).
- Sur la amélioration d'une orbite elliptique. (Circ. O. Reprint, 7, VI Tagung der Baltischen geodätischen Kommission, Helsinki, 1933).
- Calcul des déterminants par le méthode des Cracoviens (loc. cit., n.° 14, Crac. 1937).
- On a certain notions and its astronomical applications. (B. Ac. des Sciences et des Lettres. Crac. 1924).
- BAUSCHINGER, J. — Tafeln zur Theoretischen Astronomie. (Leip., 1934).
- BOYER, L. — Tables facilitant la détermination du rapport γ dans les calculs des orbites. (J. des O., xx, n.° 9, Mars, 1937).
- BROWN, E. W. — On a method of solving Kepler's equation (M. N., 1932, 92, 104).
- COMRIE, L. J. — Note on Dr. Adam's paper and the computation of ephemerides. (B. A. A., 1922, xxxii, 234).
- DAVIDSON, REV. M. — Determination of the true anomaly and the time of perihelion passage in hyperbolic orbits. (M. N., 1933, 93, 33).
- HEROY, P. — Determination of orbits. (Pub. of the Cincinnati O., Cinc. 1936).
- INVERA, R. — Sulla determinazione di un' orbita ellittica per mezzo della macchina calcolatrice. R. O. A. di Torino, n.° 8, Pavia, 1932).
- JEKHOWSKY, M. B. — Applications d'une méthode nouvelle pour le calcul des perturbations d'une petite planète ou d'une comète et pour le détermination de l'orbite d'une comète. (B. A., xxxiii, 265, Par. 1916).
- LEUSCHNER, A. O. — Short methods of determining orbits. (Pub. of the Lick O., vol. VII, 1913).
- LÖHSE. — Tafeln für numerische Rechnen mit Maschinen. (Leip. 1935).
- MERTON, G. — A modifications of Gauss's method for the determination of orbits. (M. N. 1925, xxxv, 693).
- MOLLER, J. P. — Calculation of ephemerides in nearly parabolic orbits. (Pub. og minder Meddelelser fra Kobenhavns O., n.° 90).
- NOUMEROV. — Méthode nouvelle de la détermination des orbites et le calcul des ephemerides. (Gosudarstvennoe izdatelstvo, Mosc., sin fecha).
- Détermination de l'orbite de la comète 1922 o d'après trois observations. (M. N., 1924, lxxxiv, 180).
- A method of extrapolation of perturbations. (M. N., 1929, n.° 84, 599).
- OPPOLZER, TH. — Traité de la détermination des orbites. (Par. 1886).
- STANKIEWICZOWNA, L. — Yznaczenie orbite planetoid 1262 i 1263. (Crac. O. Reprint, n.° 12, Crac. 1937).
- STROMGREN, B. — Formeln und Tafeln zur Bestimmung parabolischer Bahnen. (Pub. og minder Meddelelser fra Kobenhavns O., n.° 66).
- SUBBOTIN, M. — Determination of the elements of the orbit of a planet or a comet by two geocentric distances. (M. n., 1922, lxxxii, 383).
- On the application of Lambert's theorem to the détermination of orbits (loc. cit., 1922, lxxxii, 419).
- KOZIEL. — Über de Gibbs'schen Formeln für die Dreiecksflächenverhältnisse n_1 und n_2 . (Crac. O. Reprint, n.° 13, Crac. 1937).