45. ACERCA DE ALGUNAS NOCIONES FUNDAMENTALES EN TEORIA DE LA ELASTICIDAD, *por* R. ORTIZ FORNAGUERA.

INTRODUCCIÓN.

1.—Es sabido que el estudio de los medios continuos puede hacerse desde dos puntos de vista (1): las magnitudes físicas vinculadas a un elemento del medio pueden expresarse *a*), en función de las coordenadas del punto del espacio ambiente con el que aquél coincidía en un cierto instante inicial (p. e., el $t=0$) y del instante t en que dichas magnitudes se consideran (variables de Lagrange), o bien *b*), en función de las coordenadas del punto del espacio con el que coincide en el instante t y de este mismo instante (variables de Euler). Mientras el ambiente es euclídeo y los sistemas de coordenadas adoptados son referencias cartesianas (Cartan, 1, pág. 2) no hay ningún motivo esencial para considerar una magnitud dada como más ligada a un juego de variables que al otro. Así, pongo por caso, la velocidad puede darse mediante cualesquiera de estos dos sistemas de fórmulas

$$v^i = f^i(x^1, \ldots, x^n / t), \qquad v^i = g^i(X^1, \ldots, X^n / t),$$

(Lagrange) (Euler)

en las que x^k son las coordenadas del punto del espacio con el que coincide la partícula en el instante $t=0$, X^k las de aquel punto del mismo con el que la partícula lo hace en el instante t, existiendo entre las x^k y las X^k relaciones de la forma

$$X^k = X^k(x^1, \ldots, x^n / t). \qquad [1]$$

(1) Véase, p. ej., *Appel*, 1, págs. 279 y sigs.

Si, en vez de la referencia cartesiana (x), adoptamos otro sistema de coordenadas asimismo cartesiano, $(\bar{x})$, de modo que

$$x^i = \varphi^i(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n), \qquad \bar{x}^k = \Psi^k(x^1, \dots, x^n),$$

las expresiones que preceden toman las formas

$$\bar{X} = \Psi[X\{\varphi(\bar{x})\}] = \bar{X}(\bar{x}),$$

$$\bar{v}^i = \beta^i_k f^k[\varphi(\bar{x})/t], \qquad \bar{v}^i = \beta^i_k g^k[\varphi(\bar{X})/t], \quad (1)$$

donde

$$\beta^i_k = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}$$

son constantes en todo el espacio, dado el carácter lineal de la transformación $(x) \rightleftharpoons (\bar{x})$.

En cambio, si la referencia $(\bar{x})$ no es cartesiana—coordenadas curvilíneas generales—los coeficientes β^i_k no son ya constantes y es *esencial* precisar el punto en que deben ser calculados para hallar las nuevas componentes de la magnitud que se considera—en nuestro caso (el de velocidad) los coeficientes son los relativos al punto del espacio que ocupa la partícula en el instante t:

$$\bar{v}^i = \beta^i_k(X) f^k[\varphi(\bar{x})/t], \qquad \bar{v}^i = \beta^i_k(X) g^k[\varphi(\bar{X})/t].$$

Existe, pues, un nexo más íntimo entre la velocidad y las variables de Euler que entre ella y las de Lagrange, por lo menos desde el punto de vista del análisis tensorial. Y no se diga que ello era de prever dado que la velocidad está vinculada a la partícula, pues ésta, merced a (1) está caracterizada *analíticamente* lo mismo por unas que por otras.

---

(1) De acuerdo con el simbolismo generalmente adoptado, debe sumarse respecto de todo índice que aparece en posición covariante en un factor y en posición contravariante en otro.

2.—En lo que sigue, cuando digamos de una magnitud que está *localizada* en un punto del espacio, entenderemos que los coeficientes

$$\alpha^{i}_{k} = \frac{\partial x^{i}}{\partial \bar{x}^{k}}, \qquad \beta^{i}_{k} = \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{k}},$$

que permiten deducir de las componentes de la misma en un sistema general de coordenadas, (x), las componentes en otro sistema cualquiera, $(\bar{x})$, han de ser los correspondientes a dicho punto. *Localizar,* en este sentido, las principales magnitudes elásticas es el objeto de la presente nota y en su desarrollo se verá, además, cómo las nociones fundamentales de la teoría de la elasticidad conservan su sentido cuando el ambiente es no ya euclídeo, sino un espacio de Riemann n-dimensional.

3.—Uno de los principales motivos de haber elegido un tal espacio y no otro de mayor generalidad, lo reconozco en que, si la variación de la distancia entre dos puntos *cualesquiera* del medio continuo, infinitamente próximos, debe caracterizar la *deformación* de éste, más precisamente, si al hacer referencia a esta última se alude a propiedades métricas no locales, cual lo es el *comparar* los módulos de dos vectores infinitésimos *aplicados a puntos distintos* (que no son, en general, infinitamente próximos), y si el resultado de dicha comparación se supone independiente no sólo de la orientación de los mismos, sino también de la trayectoria seguida por el punto de aplicación al pasar de la posición inicial a la final, las unidades locales de longitud deben ser comparables de modo absoluto. En otros términos, el pretender hablar de deformación sin tener que aludir forzosamente a los estados intermedios obliga a que la conexión métrica sea una conexión métrica integrable, esto es, riemanniana. Admitimos, por tanto, la existencia de *una* unidad de longitud válida para todo el espacio, unidad de acuerdo con la cual se han contrastado las determinaciones métricas locales de forma que el transporte por congruencia no vaya acompañado de variación del módulo (1).

---

(1) Cf., en cambio, *Weyl*, págs. 109 y sigs.

Supondremos, por otra parte, que en la traslación (1) no varía el valor absoluto del vector transladado (2), de modo que con esto y con la hipótesis anteriormente sentada quedan determinadas unívocamente las componentes de la conexión afín.

$$\Gamma^{i}_{jk} = \left\{ \begin{matrix} j\,k \\ i \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^{i}} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{m}} \right).$$

Y es el caso que lo hasta aquí postulado caracteriza los espacios de Riemann (3).

Para soslayar algunas cuestiones de detalle, carentes de importancia, por lo demás, para el fin que nos proponemos, hemos supuesto en lo que sigue que la determinación métrica es riemanniana en sentido estricto, es decir, que la forma cuadrática fundamental de la métrica, $\xi_{ik} dx^{i} dx^{k}$, es definida positiva. Con ello las métricas euclídeas tangentes resultan ser euclídeas asimismo en sentido estricto.

En cuanto a la notación y respecto de los elementos de teoría de la elasticidad que tomamos como base para nuestro estudio, seguimos la de Brillouin, y éstos se encuentran en su excelente resumen de la misma (Brillouin, cap. X).

(1) Consideramos conexiones afines de la forma

$$(u^{i})\ \text{trans} = u^{i} - \Gamma^{\;i}_{jk}\, u^{j}\, d\,x^{k}, \qquad (v_{i})\ \text{trans} = v_{i} + \Gamma^{\;j}_{ik}\, v_{j}\, d\,x^{k}, \qquad \Gamma^{\;i}_{jk} = \Gamma^{\;i}_{kj}$$

de modo que el tensor $c_{jk}^{\cdot\cdot\, i} = \Gamma^{\;i}_{jk}\ \Gamma'^{\,i}_{jk}$ (*Schouten*, pág. 66) es nulo.

(2) *Schouten*, págs. 72 y 75.

(3) *Brillouin*, pág. 118; *Appel-Thiry*, 2, págs. 156 y sigs.

Consideraciones geométricas previas.

4.—Sean $\vec{v}_i(P)$, $i=1, 2, \ldots, k$, k vectores linealmente independientes ($k \leqq n$ aplicados a un punto P del R^n (espacio de Riemann de n dimensiones). Con ellos cabe formar $k!$ sucesiones de k vectores, es decir, $k!$ *k-vectores* (1), que se pueden agrupar en dos clases tales, que dos k-vectores de la misma clase resultan el uno del otro mediante un número par de transposiciones, y uno de una y otro de otra, mediante un número impar. Cada una de ellas consta, por consiguiente, de $\frac{k!}{2}$ k-vectores. El concepto que corresponde a lo que de común tienen todos los $\frac{k!}{2}$ k-vectores de una misma clase es el de *orientación*. Y así diremos que los $\frac{k!}{2}$ k-vectores de una clase y los $\frac{k!}{2}$ k-vectores de la otra *definen las dos orientaciones* de que es susceptible el conjunto de los vectores $\vec{v}_i$ (2). Sea $\vec{w}_i(P)$, $i= =1, 2, \ldots, k$, un segundo sistema de vectores linealmente independientes. Establecida una correspondencia lineal, biunívoca, entre los vectores $\vec{v}_i(P)$ y los $\vec{w}(P)$, la traducción analítica de la misma es una transformación afín homogénea cuyos coeficientes dependen de P, pero no del sistema de coordenadas, S_c, a que están referidos dichos vectores. En particular será independiente del S_c el signo del determinante de la transformación—determinante que es necesariamente no nulo, dada la independencia lineal supuesta. Si los dos sistemas están orientados, presentarán *la misma orientación* u *orientación opuesta,* por definición, según sea positivo o negativo aquel determinante, respectivamente.

(1) *Cartan,* 1, pág. 15; 2, pág. 22.

(2) Cuanto se refiere a *orientación* de un sistema de vectores y a orientación determinada por un multivector, está ligado íntimamente con el concepto de *simplex* que se introduce en Topología. Si P_0 es un punto en el que consideramos un sistema de k vectores linealmente independientes, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ y $P_1, \ldots, P_k$ son sus respectivos extremos, los puntos P_0, $P_1, \ldots P_k$ definen un k-simplex rectilíneo en el espacio afín tangente al R^n en P_0, y precisamente la orientación del k-simplex equivale a la del sistema de los k vectores. Véase, p. e., *Seifert-Threlfall,* especialmente las págs. 36 a 40 y la 100.

Sentado esto, convengamos en decir que el espacio afín tangente en P al R^n está *orientado* cuando se ha elegido como positiva la orientación de un determinado sistema de n vectores orientado, o, lo que es lo mismo, cuando se ha *definido* como positiva la orientación de un determinado n-vector, que, en particular, puede estar constituído por los vectores de base del sistema de referencia local tomados en un cierto orden. Fijado un S_c, éste induce una determinada orientación en cada una de las referencias locales, R(P), precisamente aquella que coincide con la del n-vector $(dx^1, \ldots, dx^n)$, siendo $dx^1, dx^2, \ldots, dx^n > 0$. A este hecho aludimos siempre que digamos que cada S_c *define en el R^n* una orientación. Es fácil ver que las orientaciones del R^n definidas por dos S_c, $\overline{S}_c$ son iguales si $\Delta > 0$, opuestas si $\Delta < 0$, desigualdades en las que

$$\Delta = \frac{D(x^1, \ldots, x^n)}{D(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n)}$$

es el jacobiano de la transformación de coordenadas (1):

$$x^i = \varphi^i(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n)$$

Una vez elegido el sistema de coordenadas, S_c^*, al que atribuímos el definir la orientación positiva del R^n, podremos ya decir de un S_c dado que es de *orientación positiva*, o un S_c^+, si el jacobiano de la transformación $S_c^* \rightleftharpoons S_c$ es positivo, que es de *orientación negativa*, o un S_c^-, si dicho determinante es negativo.

5.—Si con los n vectores linealmente independientes $\underset{i}{v}^k$, $i = 1, 2, \ldots n$, de un n-vector formamos todas las combinaciones posibles de orden n-1, obtendremos n hiperplanos, a los que llamaremos *caras* del n-vector, cada uno de los cuales está definido por n-1 de los n vectores del n-vector y, por tanto, *a*), no contiene el vector restante, y *b*), es base de $(n\text{-}1)!$ $(n$-1)-vectores deducidos del n-vector dado. De una cara y del vector no situado en ella diremos que son *correspondientes*, y la cara correspondiente al vector genérico $\underset{i}{v}^k$ del n-vector $(\underset{1}{v}^k, \ldots, \underset{n}{v}^k)$ se orientará del modo tal que la orientación del $(n$-1)-vector

(1) Los únicos cambios de coordenadas que admitimos son aquellos en los cuales Δ es función de P continua y no nula en la región del R^n considerada.

$$[2] \qquad (-1)^{n-i}\,(\underset{1}{v}^{k}, \ldots \underset{i-1}{v}^{k}, \underset{i+1}{v}^{k} \ldots, \underset{n}{v}^{k}),$$

(n-1)-vector *asociado* al $\underset{i}{v}^{k}$, sea, por definición, positiva (Cf. § 4) (1).

6.—Una magnitud que en un cierto aspecto está vinculada a la orientación del espacio es la densidad escalar $\sqrt{|g|}$ ($g = \|g_{ik}\|$). Al efectuar un cambio de referencia, $S_c \to \bar{S}_c$, dicha densidad escalar se transforma de acuerdo con la relación

$$[3] \qquad \sqrt{|\bar{g}|} = \Delta \cdot \sqrt{|g|}$$

característica de las densidades escalares. Pero esta misma relación prueba que debe concebirse $\sqrt{|g|}$ no en su valor aritmético, sino en su valor algébrico, de modo que, si con respecto a un S_c determinado elegimos la determinación (+), este mismo deberá ser el signo para *todos* aquellos $\bar{S}_c$ de igual orientación que el S_c, pero deberá ser el signo (—) para los $\bar{S}_c$ de orientación opuesta a la de S_c. Convendremos, ante ello, en adoptar para $\sqrt{|g|}$ la determinación (+) si el S_c a que corresponde es de orientación positiva, la determinación (—) si se trata de un S_c^{-}. Se consigue así que el *volumen* (escalar) de un n-vector de orientación positiva sea un número positivo *cualquiera que sea el* S_c *a que está referido.*

Adviértase que estas precauciones no son excesivas si se pretende rehuir el llegar a resultados, por lo menos, incorrectos. Consideremos, por ejemplo, un n-vector de orientación positiva y de componentes

$$S^{i_1 \cdots i_n} = \begin{vmatrix} \underset{1}{v}^{i_1} \ldots \underset{1}{v}^{i_n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \underset{n}{v}^{i_1} \ldots \underset{n}{v}^{i_n} \end{vmatrix}$$

respecto de un S_c^{+}. El determinante

$$\tau = \begin{vmatrix} \underset{1}{v}^{1} \ldots \underset{1}{v}^{n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \underset{n}{v}^{1} \ldots \underset{n}{v}^{n} \end{vmatrix} = S^{12 \cdots n}$$

(1) Compárese con *Seifert-Threlfall,* pág. 59. La orientación que allí se indica es opuesta a la que hemos elegido.

es positivo y define una capacidad escalar (1) y el volumen escalar o medida del *n*-vector es (2)

$$V = +\sqrt{|\xi|}\begin{vmatrix} \underset{1}{v}^1 \dots \underset{1}{v}^n \\ \dots\dots \\ \underset{n}{v}^1 \dots \underset{n}{v}^n \end{vmatrix} = +\sqrt{|g|}\,\tau > o$$

Refiramos *el mismo n*-vector a un S_c^-. La capacidad τ toma el valor

$$\bar{\tau} = \left\| \underset{k}{\bar{v}}^i \right\|$$

ligado con el primitivo por la ecuación

$$\tau = \Delta \cdot \bar{\tau}, \qquad (¡\Delta < o, \tau > o!),$$

o sea

$$\bar{\tau} = \frac{\tau}{\Delta} < o.$$

Luego, si sin tener presente la cuestión de los signos se escribiese

$$V = \sqrt{|g|}\,\bar{\tau}$$

sin más, cabría incurrir en el error de tomar para $\sqrt{|g|}$ la determinación positiva, lo que, a su vez, conduciría a atribuir a V, *que es un escalar,* signos distintos según se refieran los elementos de que procede a un S_c^+ o a un S_c^-, y un escalar puede, acaso, depender de la orientación del R^n que se fije como positiva, pero en modo alguno, *por definición,* del sistema de coordenadas. En realidad, en nuestro ejemplo y de acuerdo con lo antes dicho, respecto del S_c^-, es

$$V = -\sqrt{|\bar{g}|}\,\bar{\tau} > o$$

7.—Definamos ahora el vector que, en lo sucesivo, designaremos como *vector normal asociado* a un (*n*-1) vector dado $(\underset{1}{v}^k, \dots, \underset{n-1}{v}^k)$. Sean

$$S^{i_1 \dots i_{n-1}} = \begin{vmatrix} \underset{1}{v}^{i_1} \dots \underset{1}{v}^{i_{n-1}} \\ \dots\dots\dots \\ \underset{n-1}{v}^{i_1} \dots \underset{n-1}{v}^{i_{n-1}} \end{vmatrix}$$

(1) *Brillouin,* págs. 42 y 57.
(2) *Cartan,* 1, pág. 15; 2, pág. 21.

las componentes contravariantes del (n-1)-vector. El tensor alternado (1) $S^{i_1 \cdots i_{n-1}}$ permite definir una capacidad vectorial covariante

$$\sigma_{i_n} = (-1)\,\varphi\, S^{i_1 \cdots i_{n-1}}, \quad p = \text{paridad de la permutación } i_1 \cdots i_{n-1}\, i_n$$

respecto de la fundamental 1, 2, ..., n,

o, lo que es lo mismo,

$$\sigma_k = (-1)^{n-k}\, S^{12 \ldots k-1,\, k+1 \ldots n} \tag{4}$$

El vector $\vec{v}$, de componentes covariantes

$$v_k = \sqrt{|g|}\,\sigma_k \tag{5}$$

($v_k = +\sqrt{|g|}\sigma_k$ en un S_c^+ y $v_k = -\sqrt{|g|}\sigma_k$ en un S_c^-) es el vector normal asociado al (n-1)-vector $\underset{1}{v}^{k}, \ldots, \underset{n-1}{v}^{k}$

Dicho vector es ortogonal al hiperplano determinado por los vectores de éste, y junto con ellos determina un n-vector, el

$$(\underset{1}{v}^{k}, \ldots, \underset{n-1}{v}^{k}, v^{k}),$$

de orientación positiva, supuesta la métrica riemanniana en sentido estricto. En efecto, para cualquier $i = 1, 2, \ldots, n$-1 es

$$\underset{i}{v}^{k}\, v_k = \sqrt{g} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k}\, S^{1 \ldots k-1,\, k+1 \ldots n}\, \underset{i}{v}^{k}$$

$$= \sqrt{g} \begin{vmatrix} \underset{1}{v}^{1} & \ldots & \underset{1}{v}^{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \underset{n-1}{v}^{1} & \ldots & \underset{n-1}{v}^{n} \\ \underset{i}{v}^{1} & \ldots & \underset{i}{v}^{n} \end{vmatrix} = 0,$$

lo que prueba la primera parte. En cuanto a la segunda, introduzcamos las componentes contravariantes del vector $\vec{v}$

$$v^k = g^{ik}\, v_i$$

(1) El concepto de *magnitud alternada* se encuentra, p. ej., en *Schouten*, página 24. Otros autores (*Cartan*, *Brillouin*) la califican, en cambio, de *totalmente antisimétrica*, y aun simplemente de antisimétrica, sobreentendiendo «respecto de todos los índices *co* — o contravariantes».

con lo que

$$\begin{vmatrix} \underset{1}{v}^1 \dots \underset{1}{v}^n \\ \dots\dots\dots \\ \underset{n-1}{v}^1 \dots \underset{n-1}{v}^n \\ v^1 \dots v^n \end{vmatrix} = g^{ik}\, v_i\, \sigma_k = \frac{1}{\sqrt{g}}\, g^{ik}\, v_i\, v_k, \text{ (1)}$$

expresión ésta que es positiva en un S_c^+ y negativa en un S_c^-. De ahí se sigue que el n-vector $(\underset{1}{v}^k, \dots, \underset{n-1}{v}^k, v^k)$ presenta la misma orientación que la referencia local en el primer caso (Cf., § 4) y la orientación opuesta en el segundo, es decir, que es un n-vector de orientación positiva.

8.—Antes de poner término a estas consideraciones, conviene establecer una identidad de la cual necesitaremos más adelante. Para llegar a ella, partamos de un n-vector $(\underset{1}{v}^k, \dots, \underset{n}{v}^k)$ y de la capacidad escalar

$$\tau = \left\| \underset{i}{v}^k \right\|,$$

que constituye lo que podríamos llamar *medida bruta* del mismo. Es inmediato que

$$\begin{vmatrix} \underset{1}{v}^1 \dots \underset{1}{v}^{k-1}\, \underset{1}{v}^h\, \underset{1}{v}^{k+1} \dots \underset{1}{v}^n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \underset{n}{v}^1 \dots \underset{n}{v}^{k-1}\, \underset{n}{v}^h\, \underset{n}{v}^{h+1} \dots \underset{n}{v}^n \end{vmatrix} = \delta_h^k \cdot \tau, \qquad \begin{array}{l} h=1, 2, \dots, n \\ \delta_k^h = \begin{cases} 0, \text{ si } h \mp= k \\ 1, \text{ si } h = k, \end{cases} \end{array}$$

o bien, si desarrollamos el primer miembro por los elementos de la columna k

$$\text{[6]} \qquad \delta_h^k \tau = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i}\, \underset{i}{v}^h\, \sigma_{k,(1, \dots, i-1, i+1, \dots, n)},$$

donde

$$\sigma_{k,(1, \dots, i-1, i+1, \dots, n)} = (-1)^{n-k} \begin{vmatrix} \underset{1}{v}^1 \dots \underset{1}{v}^{k-1}\, \underset{1}{v}^{k+1} \dots \underset{1}{v}^n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \underset{i-1}{v}^1 \dots \underset{i-1}{v}^{k-1}\, \underset{i-1}{v}^{k+1} \dots \underset{i-1}{v}^n \\ \underset{i+1}{v}^1 \dots \underset{i+1}{v}^{k-1}\, \underset{i+1}{v}^{k+1} \dots \underset{i+1}{v}^n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \underset{n}{v}^1 \dots \underset{n}{v}^{k-1}\, \underset{n}{v}^{k+1} \dots \underset{n}{v}^n \end{vmatrix}$$

La identidad a que nos referíamos es la [6] (2).

---

(1) Si el espacio fuese pseudo-riemanniano, en cada punto y para determinados $(n - 1)$ — vectores pueden ser $g^{ik}v_iv_k \leqslant 0$. El caso $g^{ik}v_iv_k = 0$, que no nos interesa aquí considerar en sus detalles, corresponde a un $(n - 1)$ — vector cuyo hiperplano es tangente al hipercono isótropo, de ecuación tangencial $g^{ik}u_iu_k = 0$, a lo largo del vector $\vec{v}$ (real). Pero si es $g^{ik}v_iv_k < 0$, bastaría tomar el vector opuesto al definido en [5] para que el n-vector fuese de orientación positiva.

(2) Cf. *Brillouin*, pág. 214 (ec. X, 5).

LAS DEFORMACIONES

9.—En lo que sigue supondremos que el cuerpo está limitado por una hipersuperficie regular cerrada, aunque no excluímos la posibilidad de la existencia en él de cavidades determinadas por hipersuperficies cerradas, regulares, sin punto común e interiores al dominio definido por aquélla. Sea D_0 el dominio cerrado del R^n ocupado por el cuerpo en un cierto estado, E_0, y D el dominio ocupado por el mismo en el estado E. *Admitiremos* que el paso del cuerpo del estado E_0 al E permite establecer entre los puntos de los dominios D_0 y D una correspondencia que posee las siguientes propiedades:

1.ª Cada punto $P_0 \in D_0$ tiene en D *un* homólogo o punto imagen determinado: $P = T(P_0)$.

2.ª Cuando P_0 describe D_0, el punto imagen, P, describe un dominio que coincide con el D.

3.ª Si P'_0 y P''_0 son dos puntos *distintos* cualesquiera de D_0, $P' = T(P'_0)$ y $P'' = T(P''_0)$ son asimismo distintos.

Las propiedades 1.ª, 2.ª y 3.ª permiten establecer la correspondencia inversa, T^{-1}, $D \to D_0$, en la que cada punto Q de D tiene como punto imagen D_0, por definición, el punto Q_0 tal que $Q = T(Q_0)$, punto que existe (2.ª) y es único (3.ª). Es sabido que éstos son los caracteres peculiares de las correspondencias biunívocas. T es, pues, *biunívoca*.

Por otra parte, si $P = T(P_0)$ y fijado un entorno $e(P)$ de P contenido en D, *existe* un entorno $e(P_0)$ contenido en D_0 tal, que el conjunto imagen del $e(P_0)$ pertenece al entorno prefijado, $e(P)$, de P, T se califica de continua en P_0. Supondremos, además, que

4.ª T es continua en todo punto P_0 de D_0,

y cabe el demostrar que, en estas condiciones y siendo D_0 cerrado, T^{-1} es continua en D. Los puntos P_0 y P son los ocupados en el ambiente por un mismo punto del cuerpo en los estados E_0 y E de

(1) *Seifert-Threlfall*, pág. 35.

(2) Lo que estas propiedades traducen de lo que nos muestra la experiencia diaria, puede verse, en el caso de un cuerpo sumergido en un espacio de tres dimensiones, en *Platrier*, págs. 5 a 9, y *Appel*, 1, pág. 236. Véase también el aspecto general en *Seifert-Threlfall*, pág. 27.

éste, respectivamente, e interpretamos las propiedades 1.ª y 4.ª como definición implícita de un vínculo que une ambos estados, prescindiendo de cuáles fuesen los intermedios, y al que llamaremos *corrimiento*.

Utilizando un lenguaje geométrico, podemos decir que lo postulado equivale a atribuir carácter *topológico* a la correspondencia entre los dos dominios definida por el paso del cuerpo del estado E_o al E, o también que los dos dominios, D_o y D, del espacio ambiente, con los que el cuerpo coincide en uno y en otro estado son *homeomórficos*.

En rigor, en el ulterior desarrollo de la teoría de la elasticidad, en la parte propiamente física de la misma, se conciben los estados E_o y E como formando parte de una sucesión continua de estados, como fases de una *evolución* continua que parte de un cierto estado inicial. Identificado con éste el E_o, el estado E depende del tiempo t, con lo que la transformación $D_o \rightarrow D$ dependerá a su vez de t:

$$P = T(P_o/t), \qquad P_o \equiv T(P_o/t_o), \qquad (P_o \in D_o),$$

siendo P función continua de P_o y de t. Las transformaciones T, los corrimientos, forman, por tanto, un *haz* continuo cuyo parámetro es el tiempo, t.

10.—Examinemos ahora la cuestión en su aspecto analítico, para lo cual elegiremos en el R^n un S_c que será para nosotros un S_c^+, y sean x^i las coordenadas de un punto genérico P_o de D_o, X^i las del punto imagen $P = T(P_o)$. En virtud de la 1.ª y 4.ª, las X^i deben ser funciones uniformes (1.ª) y continuas (4.ª) de las x^i en el dominio D_o:

$$[8] \qquad X^i = f^i(x^1, \dots x^n), \qquad (i = 1, 2, \dots n).$$

Si en todo él existen las derivadas $\dfrac{\partial f^i}{\partial x^k}$, continuas, y el jacobiano $\dfrac{D(X)}{D(x)}$ es distinto de cero, las condiciones 2.ª y 3.ª quedan satisfechas en un cierto entorno $e(P_o)$ de *cada* punto P_o de D y su imagen $e(P)$, pero, en general, no cabe asegurar que lo mismo ocurra en todo D_o y todo D. Sin embargo, admitiremos que así sucede, que las [8] son tales, que *para* ellas el cumplimiento de las condi-

(1) Seifert-Threlfall, pág. 26.

ciones formuladas basta para poder definir las x^i como funciones uniformes y continuas de las X^i en el dominio D:

$$[9] \qquad x^i = g^i(X^1, \dots, X^n).$$

El hecho de que, en realidad, las [8] formen parte de un haz continuo de transformaciones (T), es decir, el que sean

$$[8'] \qquad X^i = f^i(x^1, \dots, x^n, t),$$

donde los segundos miembros son funciones continuas de *todos* sus argumentos, de modo que queden satisfechas las condiciones antes citadas para cada valor de t, a lo largo de la evolución, restringe aún más el campo de las funciones que cabe considerar como trasunto analítico de aquello a que nos referimos. Así, por ejemplo, la condición $\dfrac{D(X)}{D(x)} \neq 0$ en cada uno de los sucesivos estados, junto con el ser $\dfrac{D(X)}{D(x)} = 1$ en el instante inicial, constriñe las [8'] a ser tales, que $\dfrac{D(X)}{D(x)} > 0$ para cualquier valor de t del intervalo de evolución.

11.—Sentado esto, introduzcamos las funciones $u^i(x^1, \dots, x^n)$ (1) definidas por las igualdades

$$[10] \qquad u^i(x) = f^i(x^1, \dots, x^n) - x^i$$

con lo que las ecuaciones [8] podrán escribirse

$$[11] \qquad X^i = x^i + u^i.$$

Las u^i son los *corrimientos* (Cf. § 9), siendo $u^i(x)$ el corrimiento que liga $P_o(x)$ con su imagen $P(X)$. *Los corrimientos no son vectores contravariantes*, pero se comportan como a tales si nos limitamos a transformaciones lineales de coordenadas o si se consideran como infinitésimos de primer orden y se prescinde en los cálculos de los infinitésimos de orden no inferior al segundo. En efecto, sea

$$[12] \qquad \begin{cases} x^i = \varphi^i(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n), \\ \bar{x}^k = \psi^k(x^1, \dots, x^n), \end{cases}$$

(1) Dado que sólo estudiamos las relaciones entre D_o y el D correspondiente a un instante t fijo, huelga el poner de manifiesto el parámetro t.

una transformación genérica de coordenadas regular (Cf. § 4, nota). Se tendrá

$$[13] \qquad \overline{u}^{k} = \overline{X}^{k} - \overline{x}^{k} = \psi^{k}(x^{1} + u^{1}, \ldots, x^{n} + u^{n}) - \overline{x}^{k},$$

o bien, como resulta al aplicar la fórmula de Taylor,

$$[13'] \qquad \overline{u}^{k} = \frac{\partial \psi^{k}}{\partial x^{i}} u^{i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^{2} \psi^{k}}{\partial x^{i} \partial x^{j}} u^{i} u^{j} + \eta^{k}$$

Si las ecuaciones [12] son lineales

$$\frac{\partial \psi^{k}}{\partial x^{i}} = \beta_{i}^{k} = C^{te}$$

y, por consiguiente,

$$\overline{u}^{k} = \beta_{i}^{k} u^{i};$$

y si, aun no siendo lineales—con lo que los coeficientes β_{i}^{k} no serán ya constantes, sino que dependerán de las coordenadas x^{i} del punto P_{o}—, prescindimos de los productos $u^{i} u^{j}$, etc., resulta igualmente

$$\overline{u}^{k} = \beta_{i}^{k}(P_{o}) u^{i},$$

es decir, u^{i} se comporta como un vector contravariante localizado en P_{o}, en tanto que los coeficientes que aparecen al efectuar el cambio de coordenadas son los relativos a dicho punto (§ 2).

Si el espacio ambiente es euclídeo y cartesianos los sistemas de referencia utilizados, a la transformación [11] se suele asociar el ente

$$[14] \qquad t_{k}^{i} = \frac{\partial u^{i}}{\partial x^{k}}$$

que es un tensor respecto de cualquier cambio de referencia cartesiana en cartesiana (tensor de la transformación (1). Veamos qué ocurre en un cambio de coordenadas general, lineal o no.

Partiendo de [12] y [13] se obtiene

$$[15] \qquad \overline{t}_{j}^{k} = \frac{\partial \overline{u}^{k}}{\partial \overline{x}^{j}} = \beta_{i}^{k}(P)\, \alpha_{j}^{l}(P_{o}) \left(\frac{\partial u^{i}}{\partial x^{l}} + \delta_{l}^{i} \right) - \delta_{j}^{k} = \beta_{i}^{k}(P)\, \alpha_{j}^{l}(P_{o}) \frac{\partial u^{i}}{\partial x^{l}} + $$
$$+ \beta_{l}^{k}(P)\, \alpha_{j}^{l}(P_{o}) - \delta_{j}^{k}$$

(1) Cf. *Platrier*, pág. 10.

donde, como de costumbre,

$$\beta_{i}^{k} = \frac{\partial \psi^{k}}{\partial x^{i}}, \qquad \alpha_{i}^{l} = \frac{\partial \varphi^{l}}{\partial \overline{x}^{j}}.$$

Supongamos lineales las ecuaciones [12]. En este supuesto, $\beta_{i}^{k} = C^{te}$, $\alpha_{j}^{l} = C^{te}$, es decir, son independientes del punto del espacio en que se consideren. Luego

$$\beta_{l}^{k}(P)\, \alpha_{j}^{l}(P_{o}) = \beta_{l}^{k}(P_{o})\, \alpha_{j}^{l}(P_{o}) = \delta_{j}^{k}$$

y

$$[15'] \qquad \overline{t}_{j}^{k} = \beta_{i}^{k} \alpha_{j}^{l} t_{l}^{i}.$$

Por consiguiente, sólo respecto de transformaciones [12] lineales es $t_{k}^{i} = \dfrac{\partial u^{i}}{\partial x^{k}}$ un tensor mixto de segundo orden, ya que, en el caso general, la ley de transformación a la cual está sujeto es la [15] y no la [15'].

12.—A pesar de los resultados del examen que precede, no es difícil hallar en Elasticidad magnitudes tensoriales en sentido general, es decir, tensores respecto de cualquier transformación regular [12], mejor dicho, respecto de las transformaciones lineales homogéneas subordinadas a las transformaciones [12] (1). Sea $P_{o}(x)$ un punto de D_{o}, $Q_{o}(x + dx)$ un punto *cualquiera* del entorno, $e(P_{o})$ del punto P_{o}, P(X) la imagen de P_{o}, $Q(X + dX)$ la de Q_{o}. El cuadrado de la distancia PQ es

$$d S^{2} = g_{mn}(P)\, d X^{m}\, d X^{n} = g_{mn}(P)\, a_{i}^{m}(P_{o})\, a_{k}^{n}(P_{o})\, d x^{i}\, d x^{k}, \quad \left(a_{i}^{m} = \frac{\partial X^{m}}{\partial x^{i}} \right),$$

o bien

$$[16] \qquad d S^{2} = h_{ik}\, d x^{i}\, d x^{k},$$

donde

$$[17] \qquad h_{ik} = g_{mn}(P)\, a_{i}^{m}(P_{o})\, a_{k}^{n}(P_{o}).$$

El hecho de que el primer miembro de [16] sea un escalar y dx^{r} un vector contravariante arbitrario (Q_{o} es cualquiera en $e(P_{o})$) per-

(1) Entiendo por tensor el ente $t_{i1 \ldots in}^{k1 \ldots km}$ que obedece a una ley de transformación de la forma $t_{i1 \ldots in}^{k1 \ldots km} = \alpha_{r1}^{k1} \ldots \alpha_{rm}^{km} \beta_{i1}^{s1} \ldots \beta_{in}^{s1} \overline{t}_{s1 \ldots sn}^{r1 \ldots rn}$ (Cf. *Brillouin*, página 32), es decir, en último término, lo que *Schouten* llama *afinor* (*Schouten*, págs. 25 a 27), aunque no en el sentido más general que adopta éste más adelante (pág. 57, ec. [157]).

mite asegurar que h_{ik} es un tensor covariante de segundo orden. Pero es conveniente comprobar tal carácter partiendo de su definición [17], en la que aparecen expresiones calculadas en puntos distintos, el $P_o \in D_o$ y el $P \in D$. Para ello necesitamos determinar previamente la ley de transformación de los coeficientes $a^i_j(P_o) = \frac{\partial X^i}{\partial x^j}$, ley que, por otra parte, deberemos utilizar más adelante (§ 13). Esta resulta desde luego, pues

$$\frac{\partial \overline{X}^r}{\partial \overline{x}^h} = \frac{\partial \psi^r}{\partial X^i} \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial \overline{x}^h} = \beta^r_i(P)\, \alpha^j_h(P_o) \frac{\partial X^i}{\partial x^j},$$

es decir,

[18] $$\overline{a}^r_h(P_o) = \beta^r_i(P)\, \alpha^j_h(P_o)\, a^i_j(P_o). \quad (1)$$

Por consiguiente,

[19] $$\overline{h}_{ik} = \overline{g}_{mn}(P)\, \overline{a}^m_i(P_o)\, \overline{a}^n_k(P_o) = g_{rs}(P)\, \alpha^j_i(P_o)\, \alpha^v_k(P_o)\, a^r_j(P_o)\, a^s_v(P_o) = \alpha^j_i(P_o)\, \alpha^l_k(P_o)\, h_{jl}$$

lo que prueba, de una parte, el carácter tensorial covariante de h_{ik}, y, de otra, su localización en P_o.

Llegados a este punto podemos ya definir el *tensor de la deformación* relativo al corrimiento [8]; éste es el tensor covariante de segundo orden *simétrico* (Cf., Schouten, pág. 24).

[20] $$e_{ij} = h_{ij}(P_o) - g_{ij}(P_o),$$

que permite escribir

$$d\, S^2 = h_{ij}\, d\, x^i\, d\, x^j = g_{ij}\, d\, x^i\, d\, x^j + e_{ij}\, d\, x^i\, d\, x^j,$$

o sea

[21] $$d\, S^2 - d\, s^2 = e_{ij}\, d\, x^i\, d\, x^j. \quad (2)$$

Las ecuaciones [16] y [21] son sumamente importantes y merecen ser consideradas con alguna detención. La ecuación [16] permite calcular la distancia, *de acuerdo con la métrica ambiente*, entre dos puntos, infinitamente próximos, arbitrarios, P y Q, del dominio D ocupado por el cuerpo en su estado E en función de magnitudes localizadas todas ellas en el dominio D_o—en función del

(1) Cf. *Enea Bortolotti*, «Spazi a connessione proiettiva». Roma, 1941, página 22.
(2) Cf. *Brillouin*, pág. 224; *Appel*, 1, págs. 241-245; *Platrier*, pág. 13.

tensor h_{ij} y del vector contravariante dx^i, cuyas componentes, de uno y de otro, *se miden en la referencia local*, $R(P_o)$. De ahí resulta que todos los enunciados de carácter métrico relativos al dominio D de un observador situado en P, *que utilice la referencia* R(P) *y la métrica ambiente*, coinciden exactamente con los que obtendría un observador situado en P_o y que efectuase medidas en D_o utilizando la referencia $R(P_o)$, *pero adoptando como tensor métrico, no el* $g_{ik}(P_o)$ *del ambiente, sino el* $h_{ik}(P_o)$. En otros términos: para dos observadores, uno que utilice la métrica h_{ik} y efectúe mediciones en el cuerpo en su estado E_o, y otro que utilice la métrica g_{ik} y efectúe mediciones en el cuerpo en su estado E, el corrimiento $E_o \rightarrow E$ se lleva a cabo sin variación aparente de las propiedades métricas. En particular, si en todo D_o es $e_{ij}=0$, ello ocurre adoptando ambos la métrica ambiente y, en este sentido, las cosas suceden como si el tensor e_{ij} definiese una *desviación* respecto de dicha métrica.

De un corrimiento [8], [9] que dé lugar a un tensor de deformación nulo en D_o, se puede decir que es un *corrimiento puro*, en oposición a aquellos que originen tensores $e_{ij} \neq 0$ (*corrimientos con deformación*). De estas definiciones y de lo antes dicho se sigue fácilmente que dos corrimientos que parten del mismo estado inicial son equivalentes atendiendo a la *deformación producida*, si los correspondientes tensores de deformación coinciden.

13.—Relativo al tensor e_{ij} demuestra Brillouin (pág. 226) un interesante resultado que enuncia así: si se toma un cuerpo ya deformado y lo sometemos a una deformación suplementaria infinitamente pequeña, si se miden los nuevos corrimientos δu (2) en el sistema de ejes, $\overline{K}$, deformados y arrastrados por toda la deformación precedente, entonces las variaciones del tensor de la deformación las da la fórmula simple

[22] $$\delta e_{ij} = \frac{D\, \delta \overline{u}_i}{D\, \overline{X}^j} + \frac{D\, \delta \overline{u}_j}{D\, \overline{X}^i},$$

donde $\frac{D}{DX}$ es el símbolo de derivación covariante.

(1) Otra interpretación de los tensores h_{ij}, e_{ij}, basada en la introducción de un sistema de coordenadas móvil y deformable, respecto del cual las coordenadas de un punto genérico del cuerpo conservan un valor constante, puede verse en *Brillouin*, pág. 321.
(2) Los corrimientos no son vectores, según sabemos (§ 11), pero las variaciones infinitesimales δu sí lo son.

Se llega a [22] demostrando previamente la relación

[23] $$\delta e_{ij} = \left(\frac{D\,\delta u_r}{D\,X^s} + \frac{D\,\delta u_s}{D\,X^r} \right) a_i^r\, a_j^s$$

en la que aparece un efectivo tensor, la suma entre paréntesis, localizado evidentemente en P; pero dicho tensor está sometido a una multiplicación por los factores $a_i^r\ a_j^s$, seguida de contracción (rs), factores que no son de naturaleza tensorial. ¿Qué pasa con δe_{ij}?

Efectuemos un cambio *cualquiera* de coordenadas—en particular, podremos considerar luego los ejes $(\overline{K})$ de Brillouin. Se tendrá:

$$\frac{D\,\delta u_r}{D\,X^s} = \beta_r^k(P)\,\beta_s^l(P)\,\frac{D\,\delta \overline{u}_k}{D\,\overline{X}^l},$$

$$a_i^r = \alpha_m^r(P)\,\beta_i^n(P_o)\,\overline{a}_m^n,$$

de donde

$$\delta e_{ij} = \alpha_m^r(P)\,\beta_i^n(P_o)\,\alpha_p^s(P)\,\beta_j^q(P_o)\,\beta_r^k(P)\,\beta_s^l(P)\left(\frac{D\,\delta\overline{u}_k}{D\,\overline{X}^l} + \frac{D\,\delta\overline{u}_l}{D\,\overline{X}^k}\right)\overline{a}_n^m\ \overline{a}_q^p,$$

y contrayendo

$$\delta l_{ij} = \beta_i^n(P_o)\,\beta_j^q(P_o)\left(\frac{D\,\delta\overline{u}_k}{D\,\overline{X}^l} + \frac{D\,\delta\overline{u}_e}{D\,\overline{X}^k}\right)\overline{a}_n^k\ \overline{a}_q^l,$$

es decir,

$$\delta e_{ij} = \beta_i^n(P_o)\,\beta_j^q(P_o)\,\delta\,\overline{e}_{nq}$$

lo que prueba su localización en P_o.

A primera vista parece que el resultado que acabamos de obtener esté en contradicción con la expresión [22], cuyo segundo miembro indudablemente está localizado en P. Pero ello es así sólo en apariencia. Hemos demostrado que la magnitud tensorial [23] se transforma con los coeficientes β calculados en P_o, mientras que

$$\frac{D\,\delta u_r}{D\,X^s} + \frac{D\,\delta u_s}{D\,X^r}$$

está localizado en P. Pues bien, lo que ocurre, y lo que demuestra

Brillouin, es que los componentes de este último tensor *respecto de los ejes* $\overline{K}$ *deformados* coinciden *numéricamente* con las componentes del tensor [23] en el punto P_o *relativas a la referencia ambiente* fija. Se trata, pues, de una mera coincidencia numérica, no de una identidad, se trata de *dos tensores* que respecto de *dos referencias distintas*—la ambiente y la correspondiente deformada—tienen las mismas componentes en cada par de puntos homólogos, nada más.

14.—Entre los invariantes (escalares) que dependen exclusivamente de las componentes e_{ik} del tensor de la deformación y, eventualmente, de las componentes g_{ik} del tensor métrico, es particularmente interesante el escalar

[24] $$D^* = \frac{\sqrt{h(P_o)}}{\sqrt{g(P_o)}},$$

a partir del cual se obtiene, conforme veremos, la variación relativa de volumen (escalar). Sea

$$v = \int_{(D)} \sqrt{g(P_o)}\,d\,x^1 \ldots d\,x^n$$

la medida racional del volumen del dominio inicial D_o. La del dominio transformado, D, es

$$V = \int_{(D)} \sqrt{g(P)}\,d\,X^1 \ldots d\,X^n = \int_{(D_o)} \sqrt{g(P)}\,\frac{D(X)}{D(x)}\,d\,x^1 \ldots d\,x^n,$$

o bien, en virtud de [17],

$$V = \int_{(D_o)} \sqrt{h(P_o)}\,d\,x^1 \ldots d\,x^n.$$

Esta última relación no es sino un caso particular del hecho general antes indicado (§ 12): la medida del dominio transformado, obtenida a partir de los datos de los observadores, P, que utilizan la referencia y la métrica ambientes, coincide con la los observadores, P_o, en D_o, que adoptasen el sistema de coordenadas ambiente, pero la métrica h_{ik}.

Ahora bien, sabemos que $\sqrt{g}$ posee las características de una densidad escalar, e igual ocurre con $\sqrt{h}$ (1). Luego, la magnitud [24] es un invariante escalar

$$[24'] \qquad D^* = \frac{\sqrt{h(P_o)}}{\sqrt{\xi(P_o)}} = \frac{dV}{dv}\,.$$

cuyo exceso sobre la unidad da la variación relativa de volumen:

$$\frac{dV - dv}{dv} = D^* - 1. \quad (2)$$

Dado que el aspecto formal de la expresión [24'] y lo que afirma Brillouin—que dicha expresión es un caso particular de la [3] (Cf., Brillouin, pág. 227, ec. X 56 y VI 60)—podría dar lugar a interpretaciones erróneas en determinadas circunstancias, conviene precisar algunos extremos relativos a ella. La ecuación [3] liga el valor en un punto del discriminante g de la forma cuadrática fundamental que define la métrica, discriminante cuyos elementos son las componentes en dicho punto, respecto de un cierto S_c, del tensor métrico, con el valor del discriminante, g, formado con las componentes, *en el mismo punto, del mismo tensor métrico*, pero relativas a otro sistema, S_c. Luego, si concebimos la transformación

$$X^i = f^i(x^1, \ldots, x^n)$$

como un cambio de referencia ambiente (ejes (K) de Brillouin, página 221) la estricta aplicación de [3] nos da

$$h(x^1, \ldots, x^n) = \left\{ \frac{D(X^1, \ldots, X^n)}{D(x^1, \ldots, x^n)} \right\}^2 g(X^1, \ldots X^n); \quad (3)$$

es decir,

$$[25] \qquad \frac{D(X^1, \ldots, X^n)}{D(x^1, \ldots, x^n)} = \sqrt{\frac{h(x^1, \ldots, x^n)}{g(X^1, \ldots, X^n)}}\,, \qquad \text{(Cf., § 10)}$$

(1) La forma cuadrática $h_{ik}\,dx^i\,dx^k$ es, al igual que la $g_{ik}\,dx^i\,dx^k$, definida positiva. (Cf. § 3.)
(2) Cf. *Brillouin*, pág. 228, y *Appel*, 1, pág. 252.
(3) Ello resulta también de [17] inmediatamente.

cuando lo que nos interesa es

$$D^* = \sqrt{\frac{h(x^1, \ldots, x^n)}{g(x^1, \ldots, x^n)}} = \frac{dV}{dv}\,.$$

La [25] sólo traduce el carácter escalar de dV, porque si hacemos

$$dV = \sqrt{g(X)}\,dX^1 \ldots dX^n, \qquad \text{(ejes no deformados)}$$
$$d\overline{V} = \sqrt{h(x)}\,dx^1 \ldots dx^n \qquad \text{(ejes deformados de Brillouin)}$$

y dado que

$$dX^1 \ldots dX^n = \frac{D(X^1, \ldots, X^n)}{D(x^1, \ldots, x^n)}\,dx^1 \ldots dx^n,$$

resulta de [24], cual debe ser,

$$dV = d\overline{V},$$

pero en modo alguno la razón $\frac{dV}{dv}$. Naturalmente, las ecuaciones [24'] y [25] coinciden si el ambiente es euclídeo y el S_c cartesiano, con lo que $g_{ik} = C^{te}$, $\sqrt{g} = C^{te}$. En tal caso se obtiene desde luego

$$D^* = \frac{dV}{dv} = \frac{\sqrt{g}\,dX^1 \ldots dX^n}{\sqrt{g}\,dx^1 \ldots dx^n} = \frac{D(X^1, \ldots, X^n)}{D(x^1, \ldots, x^n)} = \frac{\sqrt{h(P_o)}}{\sqrt{g}}\,.$$

Obsérvese de paso que la medida del elemento $dx^1, \ldots, dx^n$ en torno de $P(x^1, \ldots, x^n)$, todo ello respecto de la referencia ligada al cuerpo—no a la ambiente—, varía en el curso de la evolución a que se ve sometido éste, pues

$$dV = \sqrt{h}\,dx^1 \ldots dx^n$$

y, aunque, numéricamente, sean siempre las mismas las dx^k y las coordenadas x^k del punto P, transformado del P_o, no ocurre así con las componentes del tensor métrico h_{ik}, tensor que debe coincidir —él, no sus componentes—con el del ambiente *en el punto de éste con el que* P *coincide.*

Los esfuerzos.

15.—Sea P un punto genérico interior al cuerpo y consideremos un elemento de hipersuperficie en torno de P determinado por los n-1 vectores linealmente independientes

$$d \underset{k}{x}^{h} = \underset{k}{\alpha}^{h} \, d \underset{k}{u} \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1),$$

vectores que considerados en el *orden* 1, 2, ..., n-1 constituyen junto con el vector normal asociado tomado como vector n-simo un n-vector de orientación positiva (§ 7). Se admite que la acción de la porción de cuerpo que contiene dicho vector normal (contenido, en rigor, en el espacio euclídeo tangente al R^n en P) sobre la porción que contiene el vector opuesto, ejercida a través del elemento de hipersuperficie considerado, está representada por una fuerza $\overline{dF}$ cuyas componentes covariantes son

[26] $$d F_i = T_{i, i_1 \ldots i_{n-1}} \, d S^{i_1 \ldots i_{n-1}} \quad (1)$$

donde (Cf., § 7)

$$d S^{i_1 \ldots i_{n-1}} = \begin{vmatrix} \underset{1}{\alpha}^{i_1} & \ldots & \underset{1}{\alpha}^{i_{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{n-1}{\alpha}^{i_1} & \ldots & \underset{n-1}{\alpha}^{i_{n-1}} \end{vmatrix} \, d \underset{1}{u} \ldots d \underset{n-1}{u},$$

i_1, ..., i_{n-1} es una variación cualquiera con repetición de los números 1, 2, ..., n y orden n-1, y $T_{i, i_1 \ldots i_{n-1}}$ es un tensor covariante de orden n, que se puede suponer alternado respecto de los índices i_1, ..., i_{n-1}, dado el carácter totalmente antisimétrico de $dS^{i_1 \ldots i_{n-1}}$. El número de componentes *independientes* del tensor $T_{i, i_1, \ldots, i_{n-1}}$ es evidentemente n^2 y coincide con el de un tensor de segundo orden en el R^n. Para deshacernos de las componentes no independientes, introduzcamos la densidad tensorial de segundo orden mixta

[27] $$\theta_i^{\cdot k} = (-1)^{n-k} (n-1)! \, T_{i, 1 \ldots k-1 \, k+1 \ldots n} \qquad (k \neq i)$$

(1) Este tensor depende en su definición de la orientación del R^n. (Confróntese § 6.)

con lo que [26] se escribirá en la forma mucho más simple

[26'] $$d F_i = \theta_i^{\cdot k} \, d \sigma_k,$$

fórmula en la que, conforme con lo antes dicho (§ 7, ec. 4),

$$d \sigma_k = (-1)^{n-k} \, d S^{1 \ldots k-1 \, k+1 \ldots n}$$

son las componentes covariantes del vector normal asociado al (n-1)-vector ($d\underset{1}{x}^{h}$, ..., $d\underset{n-1}{x}^{h}$), salvo el factor $\sqrt{g}$. Desde el punto de vista geométrico, [26'] es la representación analítica de una homografía vectorial en el espacio euclídeo tangente al R^n en P. Cuanto se refiere a tales homografías será, pues, aplicable a [26'], en particular la existencia y determinación de las direcciones principales. No seguiremos, con todo, por este camino harto conocido.

En [27] hemos utilizado la notación que sistemáticamente siguen Levi-Civita, Schouten y Thiry, algo más enojosa, pero más precisa que la seguida por nosotros hasta ahora. Y la ventaja que ello comporta se echa de ver ya en la definición de la densidad de segundo orden contravariante que resulta de la [27] al elevar el índice covariante:

$$\theta^{ik} = g^{li} \theta_l^{\cdot k}.$$

La densidad θ^{ik} se define de modo que es *el primer índice contravariante* el que procede de la posición covariante—de acuerdo con la fórmula (X.10) de Brillouin—y claro está que las densidades

$$\theta^{ik} = g^{li} \theta_l^{\cdot k}, \qquad \overline{\theta}^{ik} = g^{lk} \theta_l^{\cdot i},$$

en general no simétricas, serán isómeras, pero no iguales

$$\theta^{ik} = \overline{\theta}^{ki}.$$

Con todo, si una de ellas es simétrica, la otra también lo es y ambas coinciden. Esta última circunstancia se da—como es sabido—cuando no actúan fuerzas de momento proporcional al volumen (1).

16.—En cuanto a la distribución de los esfuerzos en torno de un punto se refiere (ec. [26']), es particularmente interesante el caso en que el esfuerzo es normal al elemento de hipersuperficie (completa-

(1) *Brillouin*, pág. 217.

mente normal al $(n\text{-}1)$-vector que lo define) cualquiera que sea éste:

$$d\,F_i = -\,\mathfrak{P}\,d\,\sigma_i\,. \quad (1)$$

La *presión*, $\mathfrak{P}$, aparece así como una *densidad escalar* y es fácil ver que la condición necesaria y suficiente para que los esfuerzos en el punto P se reduzcan a una presión es que el tensor $T_{i,\,i_1\,\ldots\,i_{n-1}}$ sea alternado respecto de *todos* sus índices. En efecto: *a*), la condición es suficiente, pues si $T_{i,\,i_1\,\ldots\,i_{n-1}}$ es completamente antisimétrico, existe una sola componente independiente, lo que permite definir la *densidad escalar*

$$\mathfrak{P} = (-1)^k\,(n-1)\,!\,T_{1,2,3,\ldots,n}$$

en función de la cual se tiene

$$T_{i,i_1\ldots i_{n-1}} = \frac{(-1)^{p+1}}{(n-1)\,!}\,\mathfrak{P} \qquad (p = \text{paridad de } i_1, \ldots, i_n\,i, \text{ distintos, respecto de } 1, 2, \ldots, n.).$$

y, por consiguiente,

$$d\,F_i = (n-1)\,!\,\frac{(-1)^{n-i+1}}{(n-1)\,!}\,\mathfrak{P}\,(-1)^{n-i}\,d\,\sigma_i = -\,\mathfrak{P}\,d\,\sigma_i\,;$$

b), la condición es necesaria, pues si $\theta_i^{\;k} d\sigma_k = -\,\mathfrak{P}\,d\sigma_i$ cualquiera que sea $d\sigma$, deberá ser $\theta_i^{\;k} = -\,\mathfrak{P}\,\delta_i^k$, donde δ_i^k es el tensor unidad, es decir, $\theta_i^{\;k} = 0$ $(k \neq i)$, con lo que

$$T_{i,i_1\ldots i_{n-1}} = 0,$$

cuando i coincida con alguno de los índices $i_1, \ldots, i_{n-1}$. Pero T es alternado $(i_1, \ldots, i_{n-1})$; luego son nulas *todas* las componentes de T en que dos índices *cualesquiera* son iguales, y, además,

$$T_{i,i_1\ldots i_r\ldots i_s\ldots i_n} = -\,T_{i,i_1\ldots i_s\ldots i_r\ldots i_n}$$

Por otra parte, en virtud de [27] y de $\theta_i^{\;k} = -\,\delta_i^k\,\mathfrak{P}$,

$$T_{i_1,\ldots i_2\ldots i_j\ldots i_n} = \frac{(-1)^{p+1}}{(n-1)\,!}\,\mathfrak{P}, \qquad (p = \text{paridad de } i_2, \ldots, i_j \ldots, i_n, i_1, \text{ respecto de } 1, 2, \ldots, n.)$$

luego

$$T_{i_1,i_2\ldots i_j\ldots i_n} = -\,T_{i_j,i_2\ldots i_1\ldots i_n}.$$

(1) Seguimos aquí el convenio establecido por *Brillouin* (pág. 48) de representar las *densidades* por mayúsculas, griegas o inglesas.

Las condiciones *a*), esfuerzos normales en un punto cualquiera que sea la $(n\text{-}1)$-dirección que se considere, y *b*), antisimetría *completa* del tensor en T, son, por tanto, equivalentes.

17.—Ahora poseemos ya los elementos necesarios para determinar las componentes de la fuerza de tensión resultante sobre un elemento de volumen. Sea éste el definido por el n-vector $(\underset{1}{dx^h}, \ldots, \underset{n}{dx^h})$, que supondremos de orientación positiva, en el cual cada una de las caras está orientada de acuerdo con el convenio del § 5. El paralelepípedo de n dimensiones queda delimitado por las n caras del n-vector y por las n que resultan por translación a lo largo de cada uno de los vectores correspondientes (§ 5), de modo que el interior del paralelepípedo contiene las normales positivas asociadas a las caras del n-vector y las negativas asociadas a las caras transladadas. Consideremos, para fijar ideas, la cara asociada al vector $\underset{i}{dx^h}$, es decir, el $(n\text{-}1)$-vector

$$(-1)^{n-i}\,(\underset{1}{d\,x^h}, \ldots, \underset{i-1}{d\,x^h}, \underset{i+1}{d\,x^h}, \ldots \underset{n}{d\,x^h})$$

aplicado en P. La acción a través de ella *sobre el interior del elemento* es, según lo que precede,

$$\underset{(1,\ldots i-1,\,i+1\,\ldots n)}{d\,F^h\,(P)} = -\,(-1)^{n-i}\,\theta^{hk}\,d\,\sigma_{k,(1\ldots i-1,\,i+1\,\ldots n)}$$

y el esfuerzo ejercido a través de la cara que resulta de aquélla por la translación $\underset{i}{dx^h}$

$$\underset{(1\cdots i-1,\,i+1\,\cdots n)}{d\,F^h\,(P + \underset{i}{d}\,P)} = (-1)^{n-i}\left(\theta^{hk} + \frac{D\,\theta^{hk}}{D\,x^r}\,\underset{i}{d\,x^r}\right)d\,\sigma_{k,(1\ldots i-1,\,i+1\,\ldots n)}\,.$$

La suma de estos esfuerzos vale

$$d\,F^k_{(1\ldots i-1,\,i+1\,\ldots n)} = (-1)^{n-i}\,\frac{D\,\theta^{hk}}{D\,x^r}\,\underset{i}{d\,x^r}\,d\,\sigma_{k,(1\ldots i-1,\,i+1\,\ldots n)},$$

y la resultante total

$$d\,F^k = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\,\frac{D\,\theta^{hk}}{D\,x^r}\,\underset{i}{d\,x^r}\,d\,\sigma_{k,(1\ldots i-1,\,i+1\,\ldots n)} =$$

$$= \frac{D\,\theta^{hk}}{D\,x^r}\,\delta_k^r\,d\,\tau = \frac{D\,\theta^{hk}}{D\,x^k}\,d\,\tau,$$

en virtud de la identidad [6]. Si introducimos la *densidad* de fuerzas correspondientes a las fuerzas elásticas que actúan sobre el elemento de volumen

$$\Phi^h = \frac{D\,\theta^{hk}}{D\,x^k},$$

densidad que traduce la acción del resto del cuerpo sobre el mismo, la ecuación anterior se puede escribir

$$d\,F^h = \Phi^h\,d\,\tau. \quad (1)$$

18.—Indicaré finalmente que el razonamiento seguido por Brillouin para llegar a las ecuaciones que ligan las componentes del pseudotensor de los esfuerzos, θ^{ik}, supuesto simétrico, con las del tensor de deformación, e_{ik}, conserva su validez en un ambiente riemanniano (2). Considera dicho autor transformaciones adiabáticas o isotermas, y tanto en unas como en otras muestra que es posible definir una densidad de energía, e, tal que

$$U = \int_{(D_o)} e\,d\,\tau$$

mide la energía elástica del cuerpo deformado respecto de un cierto estado inicial. Esta densidad de energía es una densidad escalar, energía por unidad de capacidad volumétrica, $e = \frac{d\,U}{d\,\tau}$, y en vez de ella se podría utilizar la energía por unidad de contenido volu-

---

(1) Cf. *Brillouin*, pág. 219, ec. X-18 y X-18 bis. Acerca del término *densidad*, que en Física se usa en dos sentidos distintos, sería de desear que en aquellas cuestiones en que intervengan pseudotensores se reservase el término *densidad* a la cantidad de magnitud *tensorial* que se considere por unidad de *capacidad* espacial, lo que efectivamente da lugar a un pseudotensor del tipo densidad (tal ocurre con Φ^h). En cambio, se podría hablar de *valor específico* al querer aludir a la cantidad de una tal magnitud por unidad de *contenido espacial*, lo que originaría un verdadero tensor. Así, por ejemplo, la *densidad de masa* es la *densidad escalar* ρ definida por la relación $dm = \rho d\tau$, donde dm es el escalar masa, mientras *masa específica* lo es el *escalar* M, definido por $dm = M dv = M\sqrt{|g|}\,dt$ y ligado con la densidad de masa por la relación $\rho = M\sqrt{|g|}$.

(2) Cf. *Brillouin*, págs. 237 a 240. El único punto que puede parecer delicado es la reducción de la integral $\int_{(S)} \theta^k_r \delta u^r\, d\sigma_k$ a la de volumen $\int_{(D_o)} \frac{D\,(\theta^k_r\,\delta u^r)}{D\,X^k}\,d\tau$. La legitimidad de ello puede verse en *Schouten*, pág. 95 (§ 19, «Verallgemeinerungen der Gaußschen und Stockesschen Integralsätze in einer Xn»).

métrico, $E = \frac{d\,U}{d\,V}$, que es un escalar puro ligado con ε por la relación

$$e = \sqrt{h}\,E$$

Si el espacio ambiente es euclídeo y el S_o es un sistema cartesiano ortonormal, $d\tau$ coincide numéricamente con la medida del volumen inicial dv del que procede dV por deformación. Por ello tiene sentido definir e, aunque algo impropiamente en el caso general, como densidad de energía por unidad de volumen *inicial* (1).

La densidad de energía e depende, de una parte, de la deformación e_{ik}, y, de otra, del comportamiento del cuerpo de que se trate en los procesos de carácter elástico, y en este sentido es natural que se hable de una densidad de energía elástica. En función de ella y de la densidad de energía, $\mathfrak{H}$, del sistema mecánico que provoca la deformación inicial y cuya acción se ejerce constantemente durante la deformación ulterior, el pseudotensor θ^{ik} se expresa por

$$\theta^{ik} = \frac{1}{D}\,a^i_m\,a^k_n\left(\frac{\partial\,(e+\mathfrak{H})}{\partial\,e_{mn}} + \frac{\partial\,(e+\mathfrak{H})}{\partial\,e_{nm}}\right),$$

donde

$$D\,(x) = \frac{D\,(X^1, \ldots, X^n)}{D\,(x^1, \ldots, x^n)}.$$

Efectuemos una transformación cualquiera de coordenadas

$$x^i = \varphi^i\,(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n),$$

de la que

$$\Delta\,(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n) = \frac{D\,(x^1, \ldots, x^n)}{D\,(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)} = \Delta\,(P_o)$$

es el determinante jacobiano. Se tendrá:

$$D\,(P_o) = \frac{\Delta\,(P)}{\Delta\,(P_o)}\,\bar{D}\,(P_o), \qquad e + \mathfrak{H} = \frac{1}{\Delta(P_o)}\,(\bar{e} + \bar{\mathfrak{H}}),$$

---

(1) Recuérdese que, si bien $d\tau$ es siempre el mismo a lo largo de la evolución del cuerpo, no ocurre así con dV, pues se tiene $dV = \sqrt{h}d\tau$, y h varía en dicha evolución. (Cf. § 14.)

$$a_i^k = \alpha_g^k(P)\,\beta_i^h(P_o)\,\bar{a}_h^g, \qquad \bar{e}_{mn} = \alpha_m^i(P_o)\,\alpha_n^j(P_o)\,e_{ij},$$

de donde

$$\theta^{kl} = \frac{1}{\Delta(P)}\,\alpha_g^k(P)\,\alpha_p^l(P)\cdot\frac{1}{\bar{D}(P_o)}\,\bar{a}_h^g\,\bar{a}_q^p\left(\frac{\partial(\bar{e}+\bar{\mathcal{H}})}{\partial\bar{e}_{nm}}+\frac{\partial(\bar{e}+\bar{\mathcal{H}})}{\partial\bar{e}_{am}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\Delta(P)}\,\alpha_g^k(P)\,\alpha_p^l(P)\,\bar{\theta}_p^g$$

es decir, el pseudotensor θ^{kl} se transforma cual si estuviera localizado en P.

Seminario de Físicas de la Facultad de Ciencias de Barcelona.

Presentado en la sesión del 4 de febrero de 1946.

OBRAS CITADAS

Appel, P.—Traité de Mécanique Rationelle, vol. III, 1928 (cit. 1), y vol. V (en colaboración con *R. Thiry*), 1933 (cit. 2). Paris, Gauthier-Villars.

Brillouin, L.—Les tenseurs en Mécanique et en Elasticité, 1938. Paris, Masson.

Cartan, E.—Leçons sur la Géometrie des espaces de Riemann, 1928 (cit. 1). Paris, Gauthier-Villars.

— Leçons sur la théorie des spineurs, 1938 (cit. 2). Paris, Hermann (Act. Scient. et. Ind., 643).

Platrier, Ch.—Cinématique des milieux continus, 1936. Paris, Hermann (Act. Scient. et Ind., 327).

Schouten, J. A.—Der Ricci-Kalkul, 1924. Berlin, Springer.

Seifert, H. y *Threlfall, W.*—Lehrbuch der Topologie, 1934. Leipzig-Berlin, Teubner.

Weyl, H.—Raumm, Zeit, Materie, 1921. Berlin, Springer.

46. VALORACION ESPECTROQUIMICA DE Cu, EN ALEACIONES LIGERAS CON MAS DEL 5 % DEL CONTENIDO DE ESTE METAL,

por JUAN MANUEL L. DE AZCONA y ANTONIO CAMUÑAS PUIG.

RESUMEN

El objeto que se persigue en este trabajo es la valoración espectroquímica con excitación por chispa del cobre en las aleaciones ligeras que tengan de 5 a 14 % de este metal, como son, entre otras, las denominadas comercialmente americanas.

La valoración se efectúa por comparación de densidades de ennegrecimiento de una línea de cobre con otra de aluminio.

1. GENERALIDADES.

Se ha investigado la valoración de Cu en aleaciones ligeras a base de aluminio, en concentraciones superiores al 5 % de Cu. La excitación es llevada a cabo entre electrodos metálicos de la muestra por medio del generador chispa «Feussner». Los electrodos son de forma cilíndrica normalizada con los extremos rebajados a 3 mm., y la separación entre ambos es de 3 mm. Las condiciones de excitación son las siguientes:

FF4 ; C = 3.000 cm. ; L = 0,08 mH ; I = 1,2 amp.

Las condiciones ópticas requeridas para la valoración son las que corresponden a la óptica intermedia del espectrógrafo Zeiss «Q-24», para el enfoque de 3.100 Å. La rendija del espectógrafo es de 0,03 mm., el diafragma previo de 1,2 mm. y el diafragma de cámara 1/30.

El tiempo de excitación previa mínimo es de 1,5 minutos, y el tiempo de exposición ajustado para una emulsión Agfa-Film B, y cuando el espectógrafo es provisto del filtro óptico de platino Zeiss, es de 1,5 minutos.

El par de líneas espectrales medido para la valoración espectroquímica de Cu está formado por el par de líneas Al 3064 y Cu 2394 Å. Para dicho par de líneas espectrales se cumple que los logaritmos de la relación de intensidades de ambas líneas son función lineal de los logaritmos de las concentraciones para un intervalo suficientemente amplio (de 5 a 14 % de Cu). Se han preparado una