igualdad que da la marcha de la función de deformación $g'(\sigma')$. Para ver si esta función corresponde al tipo de isoplanasía general, hay que analizar su comportamiento para el ángulo σ'_0 correspondiente al círculo de mínima dispersión. Con este fin se señalan, en lo sucesivo, con un subíndice 1 ó 2 los elementos correspondientes a dos rayos infinitamente próximos, por defecto y por exceso, al caracterizado por el ángulo σ'_0. Con este convenio el segundo término del denominador de [12], que se designará por T, se escribe.

$$T = \frac{\Delta'_2 \operatorname{sen} \sigma'_2 - \Delta'_1 \operatorname{sen} \sigma_1}{p(\operatorname{sen} \sigma_2 - \operatorname{sen} \sigma_1)}$$

Ahora bien: en todo sistema óptico que proyecte imágenes reales en imágenes reales (y en particular en un objetivo de microscopio) es $\frac{d\sigma'}{d\sigma} < 0$ y, generalmente, el círculo de mínima dispersión corresponde a un ángulo σ'_0 tal que

$$\left(\frac{d\Delta'}{d\sigma'}\right)_{\sigma'_0} > 0;$$

se supondrá que esto ocurre siempre en los casos prácticos.

Con estos supuestos se ve que T tiene signo contrario a p. En efecto: supóngase que $\sigma_1 > \sigma_2$; en este caso $\operatorname{sen}\sigma_2 - \operatorname{sen}\sigma_1 < 0$ y como $\frac{d\sigma'}{d\sigma} < 0$ se tiene que $\sigma'_2 < \sigma'_2$ y por ser $\frac{d\Delta'}{d\sigma'} > 0$ también $\Delta'_1 < \Delta'_2$ de donde se deduce que $\Delta'_2 \operatorname{sen}\sigma'_2 - \operatorname{sen}\sigma'_1 > 0$. Por lo tanto, T es positivo o negativo, según sea p negativo o positivo, respectivamente.

Pero en los objetivos de microscopio el objeto se encuentra prácticamente en el foco, por lo que β'_x tiene signo contrario que p; de aquí se deduce (fórmula [12]) que g' es menor que la unidad para σ'_0, ya que β'_x y T son del mismo signo.

Por lo tanto, un objetivo de microscopio aberrante, que satisfaga a la condición del seno y en el cual sea $\left(\frac{d\Delta'}{d\sigma'}\right)_{\sigma'_0} > 0$, cumple con la condición general de isoplanasía. La recíproca, evidentemente, no es cierta y existen otras maneras de hacer que un sistema sea isoplanático general sin imponer la condición del seno.

Instituto de Optica «Daza de Valdés».

30. ACERCA DE UNA PROPIEDAD DE LOS OPERADORES ESTADISTICOS PROYECCIONES DEL OPERADOR ESTADISTICO DE UN SISTEMA COMPUESTO SOBRE LOS SISTEMAS COMPONENTES,

por Ramón Ortiz Fornaguera.

SUMMARY

In the «Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik» J. von Neumann (pages. 229-231) establishe a theorem which asserts, that in a system I, II composed of two other systems I and II there exists a physical magnitude Φ such that if the magnitude which Φ in I is measured in it, the magnitude which Φ induces in II is univocally determined. Though the theorem is true error is found in its proof. A proof which we consider correct is guiven in what follows.

El teorema en cuestión puede enunciarse de la siguiente manera:

Cada estado Φ de un sistema I+II de dos componentes, I y II, establece entre los sistemas I y II una particular conexión de tal naturaleza que existen pares de magnitudes A, B—donde A es magnitud de I y B de II—simultáneamente mesurables y tales que A deriva de B y B deriva de A (1).

En efecto: sean $q = q_1, \ldots, q_k$ las coordenadas generalizadas del sistema I en el modelo clásico, $r = r_1, \ldots, r_l$ la correspondiente al sistema II, $\{\varphi n(q)\}$ una base ortonormal completa en el espacio de Hilbert $\mathcal{E}_I$ (2) de los estados $\varphi(q)$ de I; $\{\xi_n(r)\}$ una base de las mismas características relativa al espacio hilbertiano $\mathcal{E}_{II}$ de los estados $\xi(r)$ de II. Evidentemente, $\{\Phi_{mn}(q,r) \equiv \varphi_m(q)\xi_n(r)\}$ constituye un sistema de referencia en el espacio de Hilbert $\mathcal{E}_{I+II}$ de las funciones de onda $\Phi(q, r)$ del sistema compuesto I+II. Más general, cualquiera que sea la función $\Phi(q, r)$ de cuadrado sumable en el espacio de las configuraciones de I+II (espacio de los puntos (q, r)), la serie

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}\, \varphi_m(q)\, \xi_n(r),$$

en la cual

$$f_{mn} = \iint \Phi(q, r)\, \overline{\varphi}_m(q)\, \overline{\xi}_n(r)\, dq\, dr, \qquad [1]$$

(1) Se dice que una magnitud B *deriva* de una magnitud A (B . der A), cuando del conocimiento del valor de A se deduce el valor de B. Si B . der A y A . der B, se suele calificar de equivalentes a A y B.

(2) $\mathcal{E}_I$, en rigor, es el conjunto de funciones $f(q)$ de cuadrado sumable en el dominio de las configuraciones posibles del sistema I, no sólo el de aquellas cuyo módulo $\int |f(q)|^2 dq = 1$. Lo mismo vale para $\mathcal{E}_I$ y $\mathcal{E}_{I+II}$.

converge en media hacia $\Phi(q, r)$. A cada función $\Phi \varepsilon \mathcal{E}_{I+II}$, la fórmula [1] hace corresponder así una sucesión y sólo una, $\{f_{mn}\}$, de números complejos tales que

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn} \varphi_m(q) \xi_n(r) = \Phi(q, r), \text{ (1)} \qquad [2]$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |f_{mn}|^2 = \| \Phi(q, r) \|^2, \qquad [3]$$

donde $\|\Phi(q, r)\|^2 = \int\int \overline{\Phi(q, r)}\, \Phi(q, r) dq dr$ es el cuadrado del módulo de $\Phi(q, r)$. Recíprocamente, dada una sucesión $\{f_{mn}\}$ de números complejos tales que sea convergente la serie de valores absolutos $\sum_{m,n=1}^{\infty} |f_{mn}|^2$ existe la función

$$\Phi(q, r) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn} \varphi_m(q) \xi_n(r), \qquad \Phi(q, r)\, \varepsilon\, \mathcal{E}_{I+II}, \qquad [2']$$

es única—supuesto que se consideren como no esencialmente distintas dos funciones cuyos valores coinciden en cada punto (q, r) salvo acaso en los puntos de un conjunto de medida-$\mathfrak{L}$ *nula*—y se tiene, además,

$$\| \Phi(q, r) \|^2 = \sum_{m,n=1}^{\infty} |f_{mn}|^2. \qquad [3']$$

Recordadas estas nociones fundamentales, sea $\Phi(q, r)$ una función de onda del sistema I+II y

$$\Phi(q, r) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn} \varphi_m(q) \xi_n(r), \qquad (\| \Phi(q, r) \| = 1). \qquad [4]$$

$\{\varphi_m(q)\}$ y $\{\xi_n(r)\}$ son dos sistemas ortonormales completos *cualesquiera de* $\mathcal{E}_I$ *y* $\mathcal{E}_{II}$, respectivamente. Introduzcamos cuatro operaciones F, $\overline{F}$, F* y F' mediante las relaciones

$$\begin{aligned} F\varphi(q) &= \int \overline{\Phi(q, r)}\, \varphi(q)\, dq, & \overline{F}\varphi(q) &= \int \Phi(q, r)\, \varphi(q)\, dq, \text{ (2)} \\ F^* \xi(r) &= \int \Phi(q, r)\, \xi(r)\, dr, & F' \xi(r) &= \int \overline{\Phi(q, r)}\, \xi(r)\, dr. \end{aligned} \qquad [5]$$

(1) La igualdad (2) vale *en general*, esto es, salvo en un conjunto de puntos de medida-$\mathfrak{L}$ nula.

(2) La integran $\int ...dq$ se extiende a un dominio del espacio de las configuraciones de I, la $\int ...dr$ a un dominio del espacio de las configuraciones de II, dominios que son independientes entre sí y cada uno de los cuales puede coincidir con el espacio de que es parte.

Las cuatro son lineales y cada uno de ellos establece una correspondencia o bien $\mathcal{E}_I$ y $\mathcal{E}_{II}$ —los operadores F y $\overline{F}$—, o entre $\mathcal{E}_{II}$ y $\mathcal{E}_I$ —los operadores F* y F'. Las igualdades

$$(F\varphi, \xi) = \int \overline{\xi(r)}\, dr \int \overline{\Phi(q, r)}\, \varphi(q)\, dq = \int \varphi(q)\, dq \overline{\int \Phi(q, r) \xi(r)\, dr} = (\varphi, F^* \xi)$$

y, análogamente,

$$(F'\xi, \varphi) = (\xi, \overline{F}\varphi),$$

nos dicen que F y F* se comportan de modo análogo a como lo hacen los operadores adjuntos definidos en un mismo espacio hilbertiano, y lo mismo cabe decir del par F', $\overline{F}$. Es fácil ver, además, que

$$\Sigma(F) = \Sigma(\overline{F}) = \Sigma(F^*) = \Sigma(F') = \int\int |\Phi(q, r)|^2 dq dr = \|\Phi\|^2 = 1 \,. \text{ (1)}$$

Luego todos estos operadores son completamente continuos, tanto F*F como $\overline{F}$F' son definidos, y se tiene

$$\text{traza } (F^*F) = \Sigma(F) = 1, \qquad \text{traza } (\overline{F}F') = \Sigma(F') = 1 \,.$$

El operador F*F sólo cabe aplicarlo a elementos del $\mathcal{E}_I$ y el operador $\overline{F}F'$ a elementos del $\mathcal{E}_{II}$.

Dado que el dominio de definición de F está contenido en $\mathcal{E}_I$ y su dominio de los valores es, en cambio, parte de $\mathcal{E}_{II}$, los elementos de una matriz que lo represente dependen, de una parte, de la base elegida en $\mathcal{E}_I$ y, de otra, de la base que se elija en $\mathcal{E}_{II}$. Tomémoslas iguales a $\{\varphi_m(q)\}$, $\{\xi_n(r)\}$, respectivamente. Se tendrá,

$$F\varphi_m = \int \overline{\Phi(q, r)}\, \varphi_m(q)\, dq = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{f}_{mn} \xi_n(r), \qquad [6]$$

es decir, la matriz de F respecto de dichas bases es la $\{\overline{f}_{mn}\}$, donde *m* indica la columna y *n* la fila. Análogamente, la matriz de F*, respecto de las *mismas* bases, resulta de

$$F^* \xi_n = \int \Phi(q, r) \overline{\xi}_n(r)\, dr = \sum_{m=1}^{\infty} f_{mn} \varphi_m(q), \qquad [7]$$

o sea, si *m* indica aquí la fila y *n* la columna, la matriz de F* es

(1) Cr. J. von Neumann, Mathematische Grudlagen der Quantenmechanik (Berlin, Springer, 1932).

la $\{f_{nm}\}$. De ahí se sigue, sin más, que la matriz de F^*F respecto del sistema de referencia $\{\varphi(q)\}$ es la

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}\,\bar{f}_{m'n}\right\}. \qquad [8]$$

Un cálculo en todo semejante prueba que la matriz de $\bar{F}F'$, relativa a la base $\{\xi_n(r)\}$, es igual a

$$\left\{\sum_{m=1}^{\infty} f_{mn}\,\bar{f}_{mn'}\right\}. \qquad [9]$$

Esto sentado, consideremos el estado puro Φ del sistema I + II. El correspondiente operador estadístico es el $U = P_{[\Phi]} \equiv \ldots, \Phi)\Phi$ y la matriz de éste en el sistema de referencia $\Phi_{m,n} = \varphi_m(q)\xi_n(r)$ del $\mathcal{E}_{I+II}$ es igual a

$$\{f_{mn}\,\bar{f}_{m'n'}\}, \qquad [10]$$

puesto que

$$U\,\Phi_{m'n'} = (\varphi_{m'}(q)\,\xi_{n'}(r),\ \ \Phi)\,\Phi = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}\,\bar{f}_{m'n'}\,\varphi_m(q)\,\xi_n(r).$$

Por lo tanto, los operadores estadísticos U y U, proyecciones de U en I y II, respectivamente, tienen por matrices referidas a las bases $\{\varphi_m(q)\}$, la de U, y $\{\xi_n(r)\}$, la de U, las matrices

$$\{u_{mm'}\} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}\,\bar{f}_{m'n}\right\}, \qquad \{u_{nn'}\} = \left\{\sum_{m=1}^{\infty} f_{mn}\,\bar{f}_{mn'}\right\}. \qquad [11]$$

De este resultado y de [8] y [9] se deduce, desde luego,

$$U = F^*F, \qquad u = \bar{F}F', \text{ (1)} \qquad [12]$$

igualdades éstas que son independientes de las bases elegidas en $\mathcal{E}_I$ y $\mathcal{E}_{II}$.

A partir de aquí el razonamiento correcto coincide casi exactamente con el que se encuentra desarrollado en la obra de von Neumann. Sólo son necesarios ligerísimos retoques, por lo cual nos limitaremos a bosquejarlo.

La existencia de una correspondencia biunívoca entre el conjunto de las funciones propias $\psi_k(q)$ del operador U cuyos valores propios w'_k son positivos ($U = F^*F$ es definido y, por ende, sus valores

(1) Cr., en cambio, von Neumann, pg. 230.

propios son no negativos. Cf. von Neumann, págs. 50 y 174) y el conjunto de las funciones propias $\eta_k(r)$ del operador U cuyos valores propios w''_k son positivos, correspondencia que conserva los valores propios, se apoya ahora en las relaciones

$$\overline{F\varphi}\,\overline{F\bar{\varphi}}, \qquad \overline{\overline{F}\varphi} = F\bar{\varphi}, \qquad \overline{F^*\xi} = F'\bar{\xi}, \qquad \overline{F'\xi} = F^*\bar{\xi}, \qquad [13]$$

las cuales se siguen inmediatamente de las definiciones mismas (5).

En efecto, de $w'_k\psi_k = \psi_k = F^*F\psi_k$ se deduce que también $FF^*F\psi_k = w'_kF\psi_k$, es decir,

$$w'_k\,\overline{F\psi_k} = \overline{F\cdot F^*F\psi_k} = \overline{F}\cdot\overline{F^*F\psi_k} = \overline{F}F'\cdot\overline{F\psi_k} = U\cdot\overline{F\psi_k}. \qquad [14]$$

Además,

$$(\overline{F\psi_k},\ \overline{F\psi_l}) = (F\psi_l,\ F\psi_k) = (\psi_l,\ F^*F\psi_k) = (\psi_l,\ U\psi_k) = w'_k\,\delta_{kl}\ \text{(1)} \qquad [15]$$

en particular, pues,

$$\|\overline{F\psi_k}\|^2 = w'_k. \qquad [15']$$

Las relaciones [14], [15], [15'] nos dicen que a cada ψ_k corresponde una función normalizada $\dfrac{\overline{F\psi_k}}{\sqrt{w'_k}}$ que es función propia de U ligada al valor propio w'_k, el mismo que el de ψ_k respecto de U, y que el conjunto $\dfrac{\overline{F\psi_k}}{\sqrt{w'_k}}$ es ortonormal. Recíprocamente, si $\eta_k(r)$ es función propia de U y $w''_k > 0$ su valor propio, de manera que $w''_k\eta = U\eta_k = \bar{F}F'\eta_k$, basta tomar los complejos conjugados de ambos miembros y multiplicar a la izquierda los dos miembros de la nueva igualdad por F^* para ver que

$$w''_k\,F^*\bar{\eta}_k = F^*\,\overline{\bar{F}F'\eta_k} = F^*F\cdot\overline{F'\eta_k} = F^*F\cdot F^*\bar{\eta}_k = U\cdot F^*\bar{\eta}_k,$$

o sea, que $\dfrac{F^*\eta_k}{\sqrt{w''_k}}$ es función propia del operador U relativa al mismo valor propio w''_k de η_k respecto de U. La ortonormalidad del sistema $\dfrac{F^*\bar{\eta}_k}{\sqrt{w''_k}}$ se demuestra como en [15]. Con esto queda probada la existencia de la correspondencia biunívoca arriba indicada y se

(1) $\delta_{kl} = 0$, para $k \lessdot l$, $= 1$, para $k = l$. Las funciones $\psi_k(q)$ constituyen un sistema ortonormal en $\mathcal{E}_I$, aunque no completo en general. Análogamente, las $\eta_k(r)$ en $\mathcal{E}_{II}$. (Cf. loc. cit.).

advierte que el conjunto $\{w'_k\}$ coincide con el $\{w''_k\}$. Efectuando una permutación adecuada puede conseguirse que los valores propios w'_k, w''_k a los que corresponden índices iguales sean iguales, $w'_k = w''_k = w_k$, con lo cual cabe tomar

$$\eta_k(r) = \frac{1}{\sqrt{w_k}} \overline{F \psi_k} \qquad \therefore \qquad \psi_k = \frac{1}{\sqrt{w_k}} F^* \overline{\eta_k}\,.$$

Finalmente, la adición de sistemas ortonormales $\{\psi'_k(q)\}$, $\{\eta'_k(r)\}$, convenientemente elegidos, a los que ya poseemos, conduce a dos sistemas ortonormales completos $\{\psi_k(q)\} + \{\psi'_k(q)\} \equiv \{\varphi_\mu(q)\}$, $\{\eta_k(r)\} + \{\eta'_k(r)\} \equiv \{\xi_\nu(r)\}$ en los espacios $\mathcal{E}_I$ y $\mathcal{E}_{II}$. Sea φ_{μ_k} el elemento que coincide con $\psi_k(q)$ y ξ_{ν_k} el que es igual a η_k. Entonces es

$$F\varphi_{\mu_k} = \sqrt{w_k}\,\overline{\xi}_{\nu_k}\,, \qquad F\varphi_m = 0 \quad (m \neq \mu_1, \mu_2, \ldots),$$

y, por lo tanto, (cf. (6).

$$\bar{f}_{mn} = \begin{cases} \sqrt{w_k} & \text{para } m = \mu_k,\ n = \nu_k,\ K = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{para los demás casos,} \end{cases} \qquad [16]$$

es decir,

$$\Phi(q, r) = \sum_k \sqrt{w_k}\, \varphi_{\mu_k}(q)\, \xi_{\nu_k}(r)\,.$$

Esto nos dice que dado un estado $\Phi(q, r)$ del sistema I + II, si A es una magnitud de I cuyas funciones propias son las φ_m obtenidas mediante el proceso que acabamos de mostrar y cuyos valores propios a_m son todos diferentes, y si A es una magnitud de II que reúne condiciones análogas respecto de las ξ_n, la probabilidad, en el estado $\Phi(q, r)$ de I II, de que A tenga el valor a_m y A el valor a_n es $|f_{mn}|^2$, donde f_{mn} es el valor (16). Luego, si de una medición de A se ha deducido la medida a_m, existe por lo menos un f_{mn}(m fijo, $n = 1, 2, \ldots$) distinto de cero, y, por consiguiente, este f_{mn} es único y necesariamente un $f_{\mu_k \nu_k}$ en virtud de (16). Con otras palabras, a_m coincide con un a_{μ_k}, y entonces necesariamente b_{ν_k} es el valor de B, o sea B. der A. De la misma manera se obtiene que A. der B, esto es, A y B son equivalentes, como queríamos demostrar.

Instituto Daza de Valdés, Sección de Optica teórica.

31 MONTAJE PARA MEDIR FOTOELECTRICAMENTE LA TRANSPARENCIA DE LAMINAS ANTIRREFLEJANTES, *por* J. Cabello Gámez y P. Carro de Cabello

El poder controlar la fabricación de láminas antirreflectoras, así como el estudiar el influjo de los distintos factores, cuya influencia se traduce en una mejor o peor calidad de la lámina obtenida, nos planteó el problema de medir poderes reflectores con una gran exactitud, ya que las máximas variaciones que íbamos a encontrar con la mejor o con la peor lámina sobre un mismo vidrio, sería de un cuatro por ciento, ya que la variación obtenida entre un vidrio—que son dos superficies—con o sin lámina es, aproximadamente, de un ocho por ciento.

En vez del poder reflector podría medirse el poder transmisor, y esto es lo que nosotros hacemos, si bien con ello no se alteran los tantos por cientos antes indicados.

Para obtener una curva que nos expresara con suficiente fidelidad la influencia de uno de estos factores (temperatura, tiempo, concentración del baño en que se obtuvo la lámina, etc.), claramente se ve que necesitamos conocer el poder reflector con una exactitud al menos de un 0,2 %.

Los fotómetros subjetivos ordinarios tan sólo podrían darnos unos valores aproximados, que en último extremo nos servirían sólo como una orientación, ya que el ojo no es capaz de apreciar variaciones de luz inferiores al 0,6 % y aun esto en las mejores condiciones.

Otra dificultad que se presenta es obtener fácilmente un manantial luminoso cuya fijeza sea suficiente para alcanzar la precisión antes indicada.

Por lo dicho anteriormente se desprende que ha de utilizarse como elemento receptor una célula fotoeléctrica y emplear un método de oposición para hacernos lo más independiente posible de las fluctuaciones del manantial luminoso.

Al elegir las células fotoeléctricas a utilizar, preferimos las de vacío a las de resistencia, capa obstructora o de metal alcalino llenas de gas—a pesar de que las primeras dan a igual flujo lumi-