CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS
Patronato "Alfonso el Sabio"

REVISTA MATEMATICA HISPANO-AMERICANA

REVISTA PUBLICADA POR EL INSTITUTO «JORGE JUAN» DE MATEMATICAS Y LA REAL SOCIEDAD MATEMATICA ESPAÑOLA

CUARTA SERIE
Tomo VIII

MADRID
1948

ACERCA DE LA TRANSLACION DE LOS PUNTOS EN LOS ESPACIOS DE CONEXION AFIN

por

R. Ortiz Fornaguera

En lo que sigue no pretendemos sino precisar algunos pormenores relativos a la translación de los puntos en los espacios de conexión afín. No se trata, por lo tanto, de resultados en esencia nuevos. Pero acaso posean un cierto interés, de una parte, examinar la interpretación geométrica a que se prestan, en el estudio de las conexiones afines, algunos teoremas fundamentales de la teoría elemental de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y de los sistemas entre diferenciales totales, y, de otra, el establecer las relaciones entre ciertas consideraciones puramente infinitesimales y analíticas y el método más geométrico de las imágenes tangenciales.

1. Sea $\mathfrak{A}_n$ un espacio de n dimensiones dotado de conexión afín y $A_n(P)$ el espacio afín tangente a $\mathfrak{A}_n$ en el punto P. $A_n(P)$ no es sino un espacio afín, en sentido ordinario, en el cual se conviene en representar el punto P de la variedad $\mathfrak{A}_n$, el entorno de primer orden de P en $\mathfrak{A}_n$ y los entes tensoriales, de índole geométrica o física, vinculados a P. El punto de $A_n(P)$ que se *piensa* identificado con P es un punto propio arbitrariamente elegido, como arbitraria es asimismo la elección de los n vectores $\vec{e}_i$, linealmente independientes, que, aplicados a P, constituyen la representación en $A_n(P)$ de la referencia local natural $R_n[P\,;\,(x)]$ correspondiente al punto P y al sistema de coordenadas (x) en $\mathfrak{A}_n$.

Y esto es todo lo que cabe decir acerca de $A_n(P)$ cuando $\mathfrak{A}_n$ se concibe en sí, no como variedad sumergida en un espacio afín ordinario de mayor número de dimensiones. Elegidos P y

$\vec{e}_i$, si $x^i = x^i(\bar{x})$ es una transformación de coordenadas regular en $\mathfrak{A}_n$, la base $\vec{E}_i$ asociada a $R_n[P\,;\,(\bar{x})]$ está definida por

$$\vec{E}_i = \alpha_i^k \vec{e}_k, \qquad [1]$$

donde el valor de $\alpha_i^k = \dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}$, claro está, es el que corresponde al punto P.

Las coordenadas absolutas de los puntos propios de $A_n(P)$ respecto de las referencias locales $R_n[P\,;\,(x)]$ varían con (x) como las componentes de un vector contravariante. Correlativamente, las coordenadas absolutas de los hiperplanos de $n-1$ dimensiones de $A_n(P)$ que no pasan por P respecto de las $R_n[P\,;\,(x)]$ varían con (x) como las componentes de un vector covariante. Esto y que a cada punto impropio de $A_n(P)$ corresponden infinitos vectores contravariantes cuyas componentes en cada $R_n[P\,;\,(x)]$ son proporcionales y que a cada $(n-1)$-plano que pasa por P corresponde una infinidad de vectores covariantes cuyas componentes en cada $R_n[P\,;\,(x)]$ son también proporcionales, son hechos de sobra conocidos que nos limitamos a recordar aquí al igual que la ley de translación de los vectores contravariantes

$$\overset{*}{u}{}^i = u^i - \Gamma^i_{jk}\, u^j\, dx^k \qquad [2]$$

y de los vectores covariantes

$$\overset{*}{v}_i = v_i + \Gamma^j_{ik}\, v_j\, dx^k. \qquad [3]$$

Si $P + dP \equiv \{x^i + dx^i\}$ es un punto de $\mathfrak{A}_n$ infinitamente próximo al $P \equiv \{x^i\}$, [2] nos dice qué vector $\overset{*}{u}{}^i$ de $A_n(P+dP)$ debe considerarse como equipolente a un vector u^i dado de $A_n(P)$, es decir, qué vector se obtiene en aquél al *transladar* u^i de P a $P+dP$. De ahí se sigue que [2] determina entre $A_n(P)$ y $A_n(P+dP)$ una afinidad infinitesimal en cuanto se den un par de puntos homólogos. Si, en efecto, X^i, $\overset{*}{\underset{\circ}{X}}{}^i$ son las coordenadas de éstos relativas a $R_n[P\,;\,(x)]$, $R_n[P+dP\,;\,(x)]$, respectivamente, el homólogo $\overset{*}{X}{}^i$ de X^i será tal que, haciendo $X^i - \underset{\circ}{X}{}^i = u^i$, deberá tenerse

$$\overset{*}{X}{}^i = \overset{*}{u}{}^i + \overset{*}{\underset{\circ}{X}}{}^i = \overset{*}{\underset{\circ}{X}}{}^i + u^i - \Gamma^i_{jk}\, u^j\, dx^k\,.$$

Ahora bien, como P pertenece al entorno de primer orden de $P+dP$, P es punto de $A_n(P+dP)$, y es claro que sus coordenadas respecto de $R_n[P+dP\ ;\ (x)]$ son iguales a $-dx^i$. Luego, si *convenimos* en elegir la afinidad asociada a [2] de suerte que P sea doble, las ecuaciones de dicha afinidad se escribirán, sin más que tomar $\underset{o}{X}{}^i=0$, $\underset{o}{\overset{*}{X}}{}^i=-dx^i$,

$$\overset{*}{X}{}^i = -\,dx^i + X^i - \Gamma^i_{jk}\, X^j\, dx^k, \qquad [4]$$

en el bien entendido que, insistimos, X^i son coordenadas respecto de $R_n[P\ ;\ (x)]$ y $\overset{*}{X}{}^i$ lo son respecto de $R_n[P+dP\ ;\ (x)]$. Si $M \in A_n(P)$ y $\overset{*}{M} \in A_n(P+dP)$ son puntos homólogos según la afinidad [4], de $\overset{*}{M}$ diremos que es el transladado de M en $A_n(P+dP)$ o también que $\overset{*}{M}$ es el punto M transladado a $A_n(P+dP)$. En general, el homólogo en $A_n(P+dP)$ de un objeto geométrico o físico cualquiera de $A_n(P)$ según la afinidad [4] o la afinidad vectorial [2], será el transladado de dicho objeto a $A_n(P+dP)$ (1).

2. La diferencial $dX^i=\overset{*}{X}{}^i-X^i$, variación de las coordenadas de un punto de $A_n(P)$ al ser transladado a $A_n(P+dP)$ según la ley de transporte [4], no será, en general, una diferencial exacta, de lo que se sigue que carece de sentido hablar de transladado de un punto dado en un espacio afín tangente a otro

(1) Esta condición sujeta extraordinariamente la ley de transporte de los vectores covariantes y contravariantes. En la ley de transporte más general, en vez de [3] se tendría $\overset{*}{v}_i=v_i+{}'\Gamma^j_{ik}v_j dx^k$. Es claro que entonces las ecuaciones $\overset{*}{u}{}^i\overset{*}{v}_i=c\neq 0$ o $\overset{*}{u}{}^i\overset{*}{v}_i=0$ no serán consecuencia en general de $u^iv_i=c\neq 0$ ó $u^iv_i=0$, respectivamente. Dado que

$$\overset{*}{u}{}^i\,\overset{*}{v}_i = u^i\, v_i + u^i\, \Gamma^j_{ik}\, v_j\, dx^k - v_i\, \Gamma^i_{jk}\, u^j\, dx^k\,,$$

$\overset{*}{u}{}^i\,\overset{*}{v}_i = u^i\, v_i$ para dx^k cualquiera implica necesariamente $u^iv_j\,(\Gamma^j_{ik}-{}'\Gamma^j_{ik})=0$. Si esto debe cumplirse para todo par u^i, v_j tal que $u^iv_i=0$, el tensor $C_{ik}^{\cdot\cdot\,j}=\Gamma^j_{ik}-{}'\Gamma^j_{ik}$ ha de ser de la forma $C_{ik}^{\cdot\cdot\,j}=\delta^j_i\, C_k$, donde C_k es un vector covariante arbitrario, y es fácil ver que esta condición necesaria es asimismo suficiente. En cambio, si aquella expresión debe anularse para u^i, v_j sujetos a la condición $u^iv_i=c\neq 0$, forzosamente $C_{ik}^{\cdot\cdot\,j}=0$, es decir, ${}'\Gamma^j_{ik}=\Gamma^j_{ik}$. A esto equivale lo postulado en el texto. (Cf. Schouten, págs. 66-67.)

espacio afín tangente, sin más, cuando las coordenadas de los puntos de contacto de uno y de otro no difieren infinitamente poco. Pero muy otro será el caso si se fija una línea $\Gamma \equiv P(t)$ de $\mathfrak{A}_n$ que enlace estos dos últimos puntos. Sean, en efecto, $P_o=P(t_o)$ y $P=P(t)$ dos puntos genéricos de Γ y sea $\underset{o}{X}\in A_n(P_o)$ un punto dado arbitrariamente en $A_n(P_o)$. Claro está que la integral del sistema de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas

$$\frac{d\,X^i}{dt} + \Gamma^i_{jk}\,[x\,(t)]\,\dot{x}^k\,(t)\,X^j + \dot{x}^i\,(t) = 0, \quad \left(i=1, 2..., n;\ \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}\right), \qquad [5]$$

determinada por las condiciones iniciales $X^i(t_o)=\underset{o}{X}{}^i$ nos da, para cada valor de t, las coordenadas respecto de $R_n[P(t)\ ;\ (x)]$ del punto $X(t)$, trasladado de $\underset{o}{X}$ en $A_n[P(t)]$ *a lo largo de la línea* Γ. Con otras palabras, elegida en $\mathfrak{A}_n$ una línea Γ, o lo que es lo mismo, dadas sus ecuaciones paramétricas $x^i=x^i(t)$ (1), el sistema [5] hace corresponder a cada par de puntos P_o y P de Γ un operador $\mathfrak{T}(P,\ P_o\ ;\ \Gamma)$ que aplicado a un punto $\underset{o}{X}\in A_n(P_o)$ nos da otro punto $\mathfrak{T}(P,\ P_o\ ;\ \Gamma)\underset{o}{X}=X\in A_n(P)$ que es precisamente el transladado de $\underset{o}{X}$ a $A_n(P)$ a lo largo de Γ. Sabemos *a priori* que $\mathfrak{T}\,(P,\ P_o\ ;\ \Gamma)$ es un operador lineal y también que, en virtud de lo que precede,

$$\mathfrak{T}^{-1}(P, P_o;\ \Gamma) = \mathfrak{T}\,(P_o, P;\ \Gamma), \qquad [6]$$

pero conviene determinar, partiendo de [5], cuál es su estructura.

La ley de translación de los vectores contravariantes a lo largo de Γ resulta, en términos finitos, de integrar el sistema lineal homogéneo

$$\frac{du^i}{dt} + \Gamma^i_{jk}\,[x\,(t)]\,\dot{x}^k\,(t)\,u^j = 0, \qquad [7]$$

que es precisamente el sistema homogéneo ligado a [5]. Por otra parte, la teoría general de los sistemas de ecuaciones dife-

(1) La forma del sistema [5] se conserva cualquiera que sea el parámetro t en función del cual se expresen las coordenadas de los puntos de Γ, es decir, las integrales de [5] están ligadas a la línea Γ, no a su representación paramétrica.

renciales lineales nos dice que la integral general de [5] resulta de sumar a la integral general de [7] una integral particular de [5]. Pero hay más, es también sabido que incluso del conocimiento de esta última cabe prescindir, puesto que, mediante cuadraturas, es posible deducir de aquélla una integral particular de [5]. Basándonos en consideraciones puramente geométricas, podríase prever ya este resultado, por lo menos en su primera parte: si conocemos los transladados de *un* punto *dado* $\underset{o}{\overline{X}} \in A_n(P_o)$ a los diferentes espacios tangentes $A_n(P)$, $P \in \Gamma$ (esto es, *una* integral particular de [5]) y los transladados de un vector contravariante *genérico* $\underset{o}{u}^i \in A_n(P_o)$ a dichos espacios (es decir, la integral general de [7]), el transladado de un punto cualquiera $\underset{o}{X} \in A_n(P_o)$ a $A_n(P)$ a lo largo de Γ es la suma del transladado de $\underset{o}{\overline{X}}$ y el transladado del vector $\underset{o}{u}^i = \underset{o}{X}^i - \underset{o}{\overline{X}}^i$ a $A_n(P)$ a lo largo de Γ. Elijamos como punto $\underset{o}{\overline{X}}$ el origen de $R_n[P_o; (x)]$, o sea, el punto de contacto P_o de $A_n(P_o)$. La sucesión de puntos $\mathfrak{T}(P, P_o; \Gamma)P_o$ que se obtiene cuando P describe Γ es, evidentemente, la integral particular de [5] $a^i_o(t, t_o)$ que se anula para $t = t_o$: $a^i_o(t_o, t_o) = 0$ (1). Además, si $a^i_k(t, t_o)$ son las n integrales particulares de [7] determinadas por las condiciones iniciales $a^i_k(t_o, t_o) = \delta^i_k$, donde δ^i_k es el símbolo de Kronecker, es fácil ver que dichas n integrales son linealmente independientes. Luego, la integral general de [5] será de la forma

$$X^i = a^i_o(t, t_0) + a^i_k(t, t_0)\, C^k, \qquad [8]$$

igualdades en las que C^k son n constantes arbitrarias que se expresan sin dificultad ninguna en función de las condiciones iniciales. Si, en efecto, X^i es el transladado a $A_n[P(t)]$ de $\underset{o}{X}^i$, basta hacer en [8] $t = t_o$ para ver que

$$\underset{o}{X}^i = a^i_k(t_o, t_o)\, C^k = \delta^i_k C^k = C^i,$$

(1) En rigor, si pensamos P_o como punto de Γ arbitrariamente elegible, $a^i_o(t, t_0)$ es una familia de integrales particulares de [5]—aquellas que se anulan en puntos de Γ, una para cada punto. Como, en lo que sigue, P_o es cualquiera en Γ, convendrá tener constantemente presente este hecho.

con lo cual [8] toma la forma definitiva

$$X^i = a^i_o(t, t_o) + a^i_k(t, t_o)\, \underset{o}{X}^k \qquad [9]$$

que expresa, en términos finitos, la afinidad puntual que la conexión afín Γ^i_{jk} establece, a lo largo de Γ, entre los espacios tangentes $A_n(P_o)$ y $A_n(P)$. La correspondiente homografía vectorial es la

$$u^i = a^i_k(t, t_o)\, \underset{o}{u}^k. \qquad [10]$$

La forma analítica de $\mathfrak{T}(P, P_o; \Gamma)$ no es, pues, la misma cuando se aplica a puntos que cuando se aplica a vectores contravariantes, lo que nada tiene de particular porque, aun cuando el operador sea geométricamente el mismo—la misma la transformación geométrica—los objetos a que se aplica son distintos—un punto en el primer caso, un vector (diferencia de dos puntos si se quiere) en el otro. Por esta razón, por ser siempre el mismo el substratum geométrico, prescindiendo de las diferencias que pueda haber, y de hecho hay, en la representación analítica, $\mathfrak{T}(P, P_o; \Gamma)$ representará para nosotros la ley de translación de los objetos geométricos desde $A_n(P_o)$ a $A_n(P)$ a lo largo de Γ, cualquiera que sea su naturaleza.

Conocemos ya el significado geométrico de $a^i_o(t, t_o)$—sucesión de las imágenes de P_o obtenidas en los $A_n(P(t))$ por translación a lo largo de Γ. El de las funciones $a^i_k(t, t_o)$ es también reconocible inmediatamente: para cada k, $a^i_k(t, t_o)$ son las componentes respecto de $R_n[P(t); (x)]$ de $\mathfrak{T}(P, P_o; \Gamma)\vec{e}_k(P_o)$, donde $\vec{e}_k(P_o)$ es el k-ésimo vector de base de $R_n[P(t_o); (x)]$.

Es claro que la transformación inversa de [9] se obtendrá sin más que permutar en ella t y t_o, X^i y $\underset{o}{X}^i$:

$$\underset{o}{X}^i = a^i_o(t_o, t) + a^i_k(t_o, t)\, X^k. \qquad [11]$$

Al igual que [9] nos daba, para cada t, el punto $\mathfrak{T}(P, P_o; \Gamma)\underset{o}{X}$, [11] define la imagen en $A_n(P(t_o))$ del punto $X \in A_n(P(t))$, imagen obtenida por translación a lo largo de Γ. Para t_o fijo, la variación de t en [11] va superponiendo a $A_n(P(t_o))$ las imágenes de la sucesión $\{A_n(P(t))\}$ de espacios tangentes al $\mathfrak{R}_n$ en los diferentes puntos de la línea Γ. Consideremos, en particular, una sucesión continua cualquiera de puntos $X(t)$ tales que, para cada valor de t, $X(t)\in A_n(P(t))$. Cada uno de estos puntos tiene una imagen en $A_n(P(t_0))$ determinada por [11] y la sucesión de todas estas imágenes, que es una sucesión continua de puntos del espacio afín tangente $A_n(P(t_0))$, constituye una línea, la *imagen tangencial* en $A_n(P(t_0))$ de la sucesión $\{X(t)\}$. Las ecuaciones de esta línea—que eventualmente puede reducirse a un punto, lo cual sucede cuando los puntos $X(t)$ varían según la translación afín a lo largo de Γ, esto es, cuando $X(t)$ es una integral de [5]—en función del mismo parámetro t a que está referida Γ se obtienen sin más que substituir en [11] X^k por $X^k(t)$:

$$\underset{0}{X}^i = a^i_0(t_0,\, t) + a^i_k(t_0,\, t)\, X^k(t).$$

Así, por ejemplo, la imagen tangencial de la propia línea Γ es la línea de $A_n(P(t_0))$

$$\underset{0}{X}^i = a^i_0(t_0,\, t),$$

lugar de los puntos $\mathfrak{T}^{-1}(P,\, P_0;\, \Gamma)P = \mathfrak{T}(P_0,\, P;\, \Gamma)P$, es decir, lugar de los puntos $P\in\Gamma$ transladados todos a lo largo de Γ hasta $A_n(P(t_0))$.

3. Esto sentado, veamos a qué sistema de ecuaciones diferenciales satisfacen $a^i_0(t_0, t)$, $a^i_k(t_0, t)$ consideradas como funciones de t. Sea $(b^i_k(t, t_0))$ la matriz inversa de la matriz $(a^i_k(t, t_0))$,

$$b^i_k(t,\, t_0) = \frac{\text{adjunto de } a^k_i(t,\, t_0)}{\| a^k_i(t,\, t_0) \|},$$

de suerte que $a^i_m(t,\, t_0)\,.\, b^m_k(t,\, t_0) = \delta^i_k$. Se tendrá

$$\frac{da^i_m(t,\, t_0)}{dt}\, b^m_k(t,\, t_0) + a^i_m(t,\, t_0)\, \frac{db^m_k(t,\, t_0)}{dt} = 0,$$

de donde, multiplicando por $b^j_i(t,\, t_0)$ y contrayendo el índice i,

$$\frac{db^j_k(t,\, t_0)}{dt} + b^j_i(t,\, t_0)\, b^m_k(t,\, t_0)\, \frac{da^i_m(t,\, t_0)}{dt} = 0.$$

Ahora bien, $a^i_m(t,\, t_0)$ es integral de [7], es decir, para $m=1,\, 2,\, \dots,\, n$ se tiene, idénticamente,

$$\frac{da^i_m(t,\, t_0)}{dt} = -\, \Gamma^i_{rs}\, a^r_m(t,\, t_0)\, \dot{x}^s(t).$$

Luego

$$0 = \frac{db^j_k(t,\, t_0)}{dt} - b^j_i(t,\, t_0)\, b^m_k(t,\, t_0)\, a^r_m(t,\, t_0)\, \Gamma^i_{rs}\, \dot{x}^s(t)$$

$$= \frac{db^j_k(t,\, t_0)}{dt} - \Gamma^i_{ks}\, b^j_i(t,\, t_0)\, \dot{x}^s(t), \qquad [12]$$

lo que demuestra que $b^j_k(t,\, t_0)$, j fijo, es una integral del sistema adjunto del sistema [7]. Dicho de otra manera, cada columna de la matriz inversa de la $(a^k_j(t,\, t_0))$ es una integral del sistema

$$\frac{dv_k}{dt} - \Gamma^j_{ks}\, \dot{x}^s\, v_j = 0, \qquad [13]$$

adjunto del [7] (1). Pero la matriz $(b^j_k(t,\, t_0))$ es una matriz regular, en cuanto inversa de una matriz regular; por consiguiente,

$$v_k = C_j\, b^j_k(t,\, t_0)$$

es la integral general de [12] y como $b^j_k(t,\, t_0) = a^j_k(t_0,\, t)$ (Cf. § 2),

$$C_j\, a^j_k(t_0,\, t)$$

coincide con esta integral general.

Por lo que atañe a $a^i_0(t_0,\, t)$, imaginemos una sucesión de puntos $\{X(t)\}$ que varíen a lo largo de Γ por translación afín, con lo cual, conforme dijimos, la imagen tangencial de la misma en $A_n(P(t_0))$ se reducirá a un punto, el $X(t_0) = \underset{0}{X}$. Las n funciones $X^i(t)$, coordenadas de $X(t)$ en $R_n[P(t);\, (x)]$, constituyen una integral de [5] y, por lo tanto, en virtud de [11],

$$a^i_0(t_0,\, t) + a^i_k(t_0,\, t)\, X^k(t) = C^{te} = \underset{0}{X}^i.$$

Basta derivar esta identidad respecto de t y valernos de [5] y [13] para obtener la relación buscada:

$$\frac{da^i_0(t_0,\, t)}{dt} + X^k(t)\, \Gamma^j_{ks}\, a^i_j(t_0,\, t)\, \dot{x}^s(t) - a^i_k(t_0,\, t)\, \Gamma^k_{js}\, X^j(t)\, \dot{x}^s(t) -$$

$$-\, a^i_k(t_0,\, t)\, \dot{x}^k(t) = 0,$$

(1) Esta es la ley de transporte [3] de los vectores covariantes. Las propiedades de los sistemas adjuntos son casi evidentes cuando se consideran en el producto contracto $u^i v_i$. (Cf. Goursat, pág. 503.)

es decir,

$$\frac{da_0^i(t_0,\, t)}{dt} - a_k^i(t_0,\, t)\, \dot{x}^k(t) = 0.$$

Resumiendo, la integración del sistema [5] y la integración del sistema

$$\left.\begin{aligned} a)\quad & \frac{dv_k}{dt} - \Gamma^j_{ks}\, \dot{x}^s v_j = 0, \\ b)\quad & \frac{dv_0}{dt} - \dot{x}^s v_s = 0, \end{aligned}\right\} \qquad [15]$$

son problemas equivalentes. Si $b_k^i(t, t_0)$ son las n integrales particulares de [15, a] independientes determinadas por las condiciones iniciales $b_k^i(t_0, t_0) = \delta_k^i$ y si hacemos

$$b_0^i(t,\, t_0) = \int_{t_0}^{t} b_k^i(\tau,\, t_0)\, \dot{x}^k(\tau)\, d\tau,$$

la integral general de [5] es

$$X^i = b_0^i(t_0,\, t) + b_k^i(t_0,\, t)\, \underset{0}{X}^k.$$

4. Dos sencillas condiciones puramente geométricas conducen a los resultados que preceden con la mayor facilidad. Dada una línea $\Gamma \equiv P(t)$ del $\mathfrak{A}_n$ y elegido en ella un punto $P_0 = P(t_0)$, sean $A_n(P_0)$ el espacio afín tangente a $\mathfrak{A}_n$ en P_0 y $R_n[P_0\, ;\ (x)]$ la referencia local asociada. Se trata de determinar *en el espacio afín* $A_n(P_0)$ una línea $\overset{*}{\Gamma} \equiv \overset{*}{P}(t)$ que pase por P_0 y una familia de referencias afines $\overset{*}{R}_n[\overset{*}{P}(t)]$, $(\overset{*}{R}_n[\overset{*}{P}(t_0)] = R_n[P_0\, ;\ (x)])$, cuyos orígenes sean los puntos $\overset{*}{P}(t)$, tales que:

a) El vector de $A_n(P_0)$ aplicado a $\overset{*}{P}(t) \in \overset{*}{\Gamma}$ y de componentes u^i, cualesquiera, respecto de $\overset{*}{R}_n[\overset{*}{P}(t)]$ y el vector de $A_n(P_0)$ aplicado a $\overset{*}{P}(t+dt) \in \overset{*}{\Gamma}$ y de componentes $u^i - \Gamma^i_{jk} u^j \dot{x}^k dt$ son equipolentes en el sentido ordinario (1).

(1) No se pierda de vista que todos los objetos geométricos de que ahora hablamos pertenecen al espacio $A_n(P_0)$ que es un espacio afín en el sentido de la geometría elemental.

b) Las componentes respecto de $\overset{*}{R}[\overset{*}{P}(t)]$ del vector infinitesimal del $A_n(P_0)$, $d\overset{*}{P} = \overset{*}{P}(t+dt) - \overset{*}{P}(t)$, donde los $\overset{*}{P}$ son puntos de $\overset{*}{\Gamma}$, son los números $\dot{x}(t)dt$.

Sean $\overset{*}{\vec{e}}_k(t)$ los vectores fundamentales de la referencia incógnita $\overset{*}{R}_n[\overset{*}{P}(t)]$. En virtud de a), cualquiera que sea el vector contravariante u^i deberá tenerse

$$(u^k - \Gamma^k_{js}\, u^j\, \dot{x}^s\, dt)\, (\overset{*}{\vec{e}}_k + d\overset{*}{\vec{e}}_k) = u^k\, \overset{*}{\vec{e}}_k,$$

o lo que es lo mismo, salvo factores de orden superior al primero que carecen de interés con vistas a la integración,

$$u^k\, (d\overset{*}{\vec{e}}_k - \Gamma^j_{ks}\, \overset{*}{\vec{e}}_j\, \dot{x}^s\, dt) = 0.$$

Pero esta relación debe quedar satisfecha a lo largo de $\overset{*}{\Gamma}$ y cualquiera que sea u^k. Por ende, a lo largo de $\overset{*}{\Gamma}$, será

$$\frac{d\overset{*}{\vec{e}}_k}{dt} - \Gamma^j_{ks}\, \overset{*}{\vec{e}}_j\, \dot{x}^s = 0. \qquad [15,\ a]$$

Por otra parte, de acuerdo con b)

$$d\,\overset{*}{P} = \overset{*}{\vec{e}}_s\, \dot{x}^s\, dt;$$

luego $\overset{*}{P}(t)$ es solución de

$$\frac{d\,\overset{*}{P}}{dt} - \dot{x}^s\, \overset{*}{\vec{e}}_s = 0. \qquad [15,\ b]$$

Las ecuaciones [15, a] y [15, b] ponen de manifiesto que $\overset{*}{\vec{e}}_k(t)$ y $\overset{*}{P}(t)$, esto es, $\overset{*}{R}_n[\overset{*}{P}(t)]$ y $\overset{*}{\Gamma}$, constituyen un sistema de n integrales de [15], precisamente las determinadas por las condiciones iniciales $\overset{*}{\vec{e}}_k(t_0) = \vec{e}_k(P_0) \in R_n[P_0\, ;\ (x)]$, $\overset{*}{P}(t_0) = P_0$. Si $\overset{*}{e}{}^i_k(t)$ son las componentes de $\overset{*}{\vec{e}}_k(t)$ *respecto de* $R_n[P_0\, ;\ (x)]$, de manera que $\overset{*}{\vec{e}}_k(t) = \overset{*}{e}{}^i_k(t)\, \vec{e}_i(P_0)$ y $\overset{*}{e}{}^i_0(t)$ las coordenadas de $\overset{*}{P}(t)$ relativas a dicha referencia, es claro que $\overset{*}{e}{}^i_k(t)$ coincide con $b^i_k(t, t_0) = a^i_k(t_0, t)$ y

$\overset{*}{e}{}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{o}}(t)$ con $b^{\mathrm{i}}_{\mathrm{o}}(t, t_{\mathrm{o}}) = a^{\mathrm{i}}_{\mathrm{o}}(t_{\mathrm{o}}, t)$. La línea $\overset{*}{\Gamma}$, por lo tanto, es la imagen tangencial de Γ en $\mathrm{A}_{\mathrm{n}}(\mathrm{P}_{\mathrm{o}})$ y $\overset{*}{\mathrm{R}}_{\mathrm{n}}[\overset{*}{\mathrm{P}}(t)]$ la imagen de la referencia local $\mathrm{R}_{\mathrm{n}}[\mathrm{P}(t)\,;\ (x)]$, obtenida en $\mathrm{A}_{\mathrm{n}}(\mathrm{P}_{\mathrm{o}})$ por translación paralela a lo largo de Γ.

5. El sistema [15, a] y esta última consideración conducen inmediatamente a las nociones de geodésica y de curvatura y torsión del espacio de conexión afín $\mathfrak{A}_{\mathrm{n}}$. Para que la imagen tangencial $\overset{*}{\Gamma}$ en $\mathrm{A}_{\mathrm{n}}(\mathrm{P}_{\mathrm{o}})$ de una línea Γ que pase por $\mathrm{P}_{\mathrm{o}} \equiv \{\underset{\mathrm{o}}{x^{\mathrm{k}}}\}$ sea una recta de $\mathrm{A}_{\mathrm{n}}(\mathrm{P}_{\mathrm{o}})$ es necesario y basta, en fuerza de [15, b], que existan un vector fijo $\vec{a}$ y una función $\varphi(t)$ tales que

$$\varphi(t)\,\vec{a} = \frac{d\overset{*}{\mathrm{P}}}{dt} = \dot{x}^{\mathrm{k}}\,\overset{*}{\vec{e}}_{\mathrm{k}}, \qquad [16]$$

es decir,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^{\mathrm{k}}\,\overset{*}{\vec{e}}_{\mathrm{k}}}{\varphi(t)}\right) = 0. \qquad [17]$$

Es desde luego evidente que el producto $\varphi(t)\,\vec{a}$ ha de ser necesariamente no nulo, salvo acaso en aquellos puntos en que la tangente a Γ es indeterminada ($\dot{x}^{\mathrm{k}} = 0$), de lo contrario la imagen tangencial de Γ sería un punto, el P_{o}, y no una recta. La ecuación [17] equivale, por lo tanto, a [16] si la línea Γ que tratamos de determinar ha de poseer tangente única en cada uno de sus puntos, condición ésta necesaria si su imagen $\overset{*}{\Gamma}$ ha de ser una recta. Ahora bien, de [17] se sigue, de acuerdo con [15, a],

$$-\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\,\dot{x}^{\mathrm{k}}\,\overset{*}{\vec{e}}_{\mathrm{k}} + \dot{x}^{\mathrm{k}}\,\dot{x}^{\mathrm{s}}\,\Gamma^{\mathrm{j}}_{\mathrm{ks}}\,\overset{*}{\vec{e}}_{\mathrm{j}} + \ddot{x}^{\mathrm{k}}\,\overset{*}{\vec{e}}_{\mathrm{k}} = 0.$$

Pero los vectores $\overset{*}{\vec{e}}_{\mathrm{k}}$ son linealmente independientes; luego, para que la imagen tangencial de Γ sea una recta es necesario que a lo largo de $\Gamma \equiv \mathrm{P}(t)$ sea

$$\frac{d^2x^{\mathrm{k}}}{dt^2} + \Gamma^{\mathrm{k}}_{\mathrm{js}}\,\frac{dx^{\mathrm{j}}}{dt}\,\frac{dx^{\mathrm{s}}}{dt} = \frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)}\,\frac{dx^{\mathrm{k}}}{dt}. \qquad [18_1]$$

Recíprocamente, cualquiera que sea la función $\psi(t)$, si $\{x^{\mathrm{k}}(t)\}$ es una integral del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2x^{\mathrm{k}}}{dt^2} + \Gamma^{\mathrm{k}}_{\mathrm{js}}\,\frac{dx^{\mathrm{j}}}{dt}\,\frac{dx^{\mathrm{s}}}{dt} = \psi(t)\,\frac{dx^{\mathrm{k}}}{dt}, \qquad [18_2]$$

integral que se reduce a $\{\underset{\mathrm{o}}{x^{\mathrm{k}}}\}$ para $t = t_{\mathrm{o}}$, la imagen tangencial en $\mathrm{A}_{\mathrm{n}}(\mathrm{P}_{\mathrm{o}})$ de $\Gamma \equiv \{x^{\mathrm{k}}(t)\}$ es la recta

$$\overset{*}{\mathrm{P}} = \mathrm{P}_{\mathrm{o}} + f(t)\,\vec{a},$$

donde

$$f(t) = c\int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{\tau}\psi(\sigma)\,d\sigma}\,d\tau, \qquad \vec{a} = \frac{\dot{x}^{\mathrm{k}}(t_{\mathrm{o}})}{c}\,\vec{e}_{\mathrm{k}}(\mathrm{P}_{\mathrm{o}})$$

y c es una constante arbitraria que siempre podemos suponer igual a la unidad. En la expresión de $\vec{a}$ aparecen las n constantes arbitrarias $\dot{x}^{\mathrm{k}}(t_{\mathrm{o}})$ que fijan la dirección de la tangente a la línea Γ que pasa por P_{o}, cual no podía dejar de ocurrir puesto que Γ ha de ser solución de [18_2], sistema que es de segundo orden.

Queda así demostrado que la condición necesaria y suficiente para que la imagen tangencial de una línea Γ del $\mathfrak{A}_{\mathrm{n}}$ sea una recta es que Γ sea una integral de [18_2]—o [18_1]. Si así es, Γ satisface la condición [16] con

$$\varphi(t) = c\,e^{\int_{t_0}^{t}\psi(\sigma)\,d\sigma}.$$

Pero es claro que nada nos impide, aunque se nos dé de antemano la función $\psi(t)$ y con ella el parámetro t a que Γ estará referida, elegir como parámetro, no la variable t, sino la variable λ ligada con t por la relación

$$\lambda = f(t) = \int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)\,d\tau.$$

La ecuación [16] se escribe entonces

$$\vec{a} = \frac{\dot{x}^k(t)\,\overset{*}{\vec{e}}_k}{\varphi(t)} = \frac{\dfrac{dx^k}{dt}}{\dfrac{d\lambda}{dt}}\,\overset{*}{\vec{e}}_k = \frac{dx^k}{d\lambda}\,\overset{*}{\vec{e}}_k$$

y el sistema $[18_1]$ toma la forma

$$\frac{d^2 x^k}{d\lambda^2} + \Gamma^k_{js}\frac{dx^j}{d\lambda}\frac{dx^s}{d\lambda} = 0, \qquad [18_3]$$

que coincide con el $[18_2]$ para $\psi \equiv 0$. Por consiguiente, no perdemos solución ninguna de nuestro problema si en cualquier caso se hace en $[18_2]$ $\psi \equiv 0$, ya que ello equivale a referir Γ a un parámetro convenientemente elegido. Al mismo resultado se llegaría de tomar $\lambda = af(t) + b$, con a y b constantes cualesquiera. El parámetro λ, determinado conforme acabamos de ver salvo una transformación lineal y entera, referida al cual una línea Γ de la familia que consideramos es solución de $[18_3]$ se suele llamar *parámetro afín*. Sea como fuere, tanto si se trata de un parámetro afín como de otro parámetro t cualquiera, el sistema $[18_2]$ nos dice que todo a lo largo de una de sus líneas integrales, Γ, los vectores tangentes a Γ $u^k = \dfrac{dx^k}{dt}$ son paralelos entre sí (respecto de la conexión Γ^k_{js}, claro está), mientras que $[18_3]$ añade algo más, a saber, que si se trata de un parámetro afín, no sólo son paralelos, sino también equipolentes. Las líneas Γ de $\mathfrak{A}_n$ cuyas imágenes tangenciales en un $A_n(P_0)$ cualquiera son rectas son, por ende, las geodésicas del $\mathfrak{A}_n$ que pasan por P_0 y sólo ellas, entendiendo por geodésicas del espacio de conexión afín $\mathfrak{A}_n$ las líneas de $\mathfrak{A}_n$ cuyos vectores tangentes son paralelos entre sí, en particular equipolentes.

6. Volviendo a la imagen tangencial $\overset{*}{\Gamma}$ de una línea cualquiera Γ del $\mathfrak{A}_n$ en el espacio afín tangente en un punto $P_0 \in \Gamma$, aunque es patente en [15] que $\overset{*}{\Gamma}$ y las referencias $\overset{*}{R}_n[\overset{*}{P}(t)]$ no dependen de cuál sea la representación paramétrica de Γ—o lo que es lo mismo, el parámetro t—nos queda por ver cuándo la imagen de un punto P en el $A_n(P_0)$, al igual que la de $R_n[P; (x)]$,

estará unívocamente determinada, es decir, con independencia de la línea Γ que una P_0 y P, y esto cualesquiera que sean P_0 y P. Recordemos ante todo (Cf. §4) que, dada una línea $\Gamma \equiv P(t)$ que pase por P_0, se tiene $\overset{*}{P}(t) \equiv \mathcal{T}[P_0, P(t); \Gamma]P(t)$ y $\overset{*}{R}_n[\overset{*}{P}(t)] \equiv \mathcal{T}[P_0, P(t); \Gamma]R_n[P(t); (x)]$, o sea, que para P_0 y P dados

$$\overset{*}{P} = \mathcal{T}(P_0, P; \Gamma)\,P, \qquad \overset{*}{R}_n[\overset{*}{P}] = \mathcal{T}(P_0, P; \Gamma)\,R_n[P; (x)]$$

dependen de cuál sea Γ, pues de Γ depende el operador de translación $\mathcal{T}(P_0, P; \Gamma)$. En último término, por consiguiente, de lo que se trata es de ver en qué condiciones resultará ser $\mathcal{T}(P_0, P; \Gamma)$ independiente de Γ. Evidentemente, para que así ocurra es necesario y basta que el sistema de ecuaciones entre diferenciales totales

$$\left.\begin{aligned} a)\quad & d\overset{*}{\vec{e}}_k = \Gamma^j_{ks}\,\overset{*}{\vec{e}}_j\,dx^s, \\ b)\quad & d\overset{*}{P} = \overset{*}{\vec{e}}_s\,dx^s, \end{aligned}\right\} \qquad [19]$$

sea completamente integrable—los $\overset{*}{\vec{e}}_k$ han de ser linealmente independientes—, en cuyo caso su integral general

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{\vec{e}}_k &= \overset{*}{\vec{e}}_k(P;\ P_0,\ \vec{e}_k(P_0)), \\ \overset{*}{P} &= \overset{*}{P}(P;\ P_0,\ \vec{e}_k(P_0)), \end{aligned}\right\} \qquad [20]$$

permitirá hacer la *carta* en $A_n(P_0)$ de todo el $\mathfrak{A}_n$, o mejor dicho, de aquel dominio del $\mathfrak{A}_n$ en que se cumplan las condiciones de integrabilidad del sistema [19] (1). Este se descompone en un primer sistema, el $[19, a]$, relativo a las incógnitas $\overset{*}{\vec{e}}_j$ exclusivamente y un segundo sistema, el $[19, b]$, cuya integración se efectúa mediante cuadraturas si el problema tiene solución. Para que $[19, a]$ sea integrable es necesario y basta que de

$$\partial_p\,\overset{*}{\vec{e}}_k = \Gamma^j_{kp}\,\overset{*}{\vec{e}}_j \qquad \left(\partial_p \equiv \frac{\partial}{\partial x^p}\right)$$

(1) Las únicas singularidades de los coeficientes de $dx^s (s = 1, 2, \ldots, n)$ en los segundos miembros de [19] proceden, de existir, de los parámetros Γ^j_{ks} de la conexión afín y aun esto sólo en el sistema parcial $[19, a]$. En lo que sigue supondremos que carecen de ellas en el dominio del $\mathfrak{A}_n$ que se considere.

se siga $\partial^2_{qp}\overset{*}{\vec{e}}_k = \partial^2_{pq}\overset{*}{\vec{e}}_k$, es decir que se tenga idénticamente

$$\partial_q \Gamma^j_{kp}\overset{*}{\vec{e}}_j + \Gamma^j_{kp}\Gamma^i_{jq}\overset{*}{\vec{e}}_i = \partial_p \Gamma^j_{kq}\overset{*}{\vec{e}}_j + \Gamma^j_{kq}\Gamma^i_{jp}\overset{*}{\vec{e}}_i,$$

o bien, pasándolo todo a un mismo miembro y cambiando índices mudos donde sea necesario,

$$(\partial_p \Gamma^j_{kq} - \partial_q \Gamma^j_{kp} + \Gamma^j_{ip}\Gamma^i_{kq} - \Gamma^j_{iq}\Gamma^i_{kp})\overset{*}{\vec{e}}_j = 0.$$

Pero los vectores $\overset{*}{\vec{e}}_j$ son linealmente independientes; luego aquella condición necesaria y suficiente se reduce a la anulación idéntica de

$$R^{\cdot\cdot j}_{pqk} \equiv \partial_p \Gamma^j_{kq} - \partial_q \Gamma^j_{kp} + \Gamma^j_{ip}\Gamma^i_{kq} - \Gamma^j_{iq}\Gamma^i_{kp}. \qquad [21]$$

Cabe demostrar con facilidad que el ente $R^{\cdot\cdot j}_{pqk}$ es un tensor, tensor que, conforme es sabido, ha recibido el nombre de *tensor de curvatura* de la conexión afín Γ^j_{ik}. El resultado obtenido puede enunciarse, pues, diciendo que el sistema [19, *a*] es integrable en un dominio $D_n \subset \mathfrak{R}_n$ siempre y sólo cuando el tensor de curvatura es idénticamente nulo en D_n. Ahora bien, ¿qué contenido geométrico hemos de atribuir a la integrabilidad de [19, *a*]? Si [19, *a*] es integrable, entonces y sólo entonces las referencias $R_n[\overset{*}{P}] = \mathfrak{T}(P_o, P; \Gamma) R_n[P; (x)]$, para P y P_o fijos, son equipolentes cualquiera que sea Γ. Y como el transladado de un vector u^i del $A_n(P)$ es el vector $u^i\overset{*}{\vec{e}}_i$ (Cf. § 4), los transladados de u^i desde $A_n(P)$ a $A_n(P_o)$ son asimismo equipolentes, cualquiera que sea la línea Γ a lo largo de la cual haya tenido lugar la translación. $R^{\cdot\cdot j}_{pqk} = 0$, es, por ende, la condición necesaria y suficiente para la integrabilidad de la translación de vectores, es decir, en último término, del sistema [19, *a*]. Pero $R^{\cdot\cdot j}_{pqk} = 0$ es condición sólo necesaria para que el sistema completo [19] sea integrable. Supongámosla satisfecha, con lo cual queda asegurada la existencia de la integral general de [19, *a*]

$$\overset{*}{\vec{e}}_k = \overset{*}{\vec{e}}_k(P;\ P_o, \vec{e}_k(P_o)) \quad (1).$$

(1) Aparte el ser $R^{\cdot\cdot j}_{pqk} = 0$, los parámetros Γ^j_{ks} de la conexión afín deben cumplir, conforme dijimos, un conjunto de condiciones analíticas que permitan la aplicación de los teoremas de existencia de la solución, por ejemplo ser funciones holomorfas de $x^1, x^2, \ldots, x^n$ consideradas como variables complejas.

Llevemos esta solución a [19, *b*]. Los segundos miembros han de ser diferenciales exactas, para lo cual es necesario y basta que

$$\partial_p \overset{*}{\vec{e}}_q = \partial_q \overset{*}{\vec{e}}_p,$$

o sea, dado que $\overset{*}{\vec{e}}_k$ es solución de [19, *a*],

$$\Gamma^j_{qp}\overset{*}{\vec{e}}_j = \Gamma^j_{pq}\overset{*}{\vec{e}}_j,$$

o bien

$$(\Gamma^j_{pq} - \Gamma^j_{qp})\overset{*}{\vec{e}}_j = 0.$$

La independencia lineal de los vectores de base $\overset{*}{\vec{e}}_k$ nos da entonces

$$S^{\cdot\cdot j}_{pq} \equiv \tfrac{1}{2}(\Gamma^j_{pq} - \Gamma^j_{qp}) = 0. \qquad [22]$$

Esta es, por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para que [19, *b*] sea integrable cuando en él se substituyan los $\overset{*}{\vec{e}}_k$ por la integral general de [19, *a*]. Ahora bien, $S^{\cdot\cdot j}_{pq}$ es el llamado *tensor de torsión* de la conexión afín Γ^j_{ks}. Luego sólo en las conexiones afines de torsión nula es integrable [19, *b*]. Pero es esencial advertir que $S^{\cdot\cdot j}_{pq} = 0$ no es, de suyo, condición suficiente para la integrabilidad de [19, *b*], sino únicamente si, a la vez, es $R^{\cdot\cdot j}_{pqk} = 0$. Muy otro es el comportamiento en este aspecto del tensor de curvatura. Vimos, en efecto, que su anulación era necesaria y bastaba para que la translación de los vectores desde un espacio afín tangente a otro fuese independiente del camino seguido. En cambio, para que

$$\overset{*}{P} = \mathfrak{T}(P_o, P;\ \Gamma)P$$

sea independiente de Γ, esto es, para que sea integrable la translación de los puntos de la variedad, tanto $R^{\cdot\cdot j}_{pqk} = 0$ como $S^{\cdot\cdot j}_{pq} = 0$ son condiciones necesarias, pero sólo el conjunto de las dos es suficiente. Finalmente, de ahí se sigue que la translación de los puntos es unívoca, es decir, es independiente de la línea Γ a lo largo de la cual tiene lugar, siempre y sólo cuando es unívoca la translación de los *puntos de* $\mathfrak{R}_n$. Lo segundo es inmediato, puesto que los puntos de $\mathfrak{R}_n$ son puntos de sus respectivos espacios tangentes. En cuanto a lo primero, dado que la integrabilidad de la translación de los puntos P de $\mathfrak{R}_n$ implica la de los vectores, dicho está con esto que si la translación de los puntos P es unívoca, unívoca es también la translación de $X = P + \vec{u}$, cualquiera que sea $X \in A_n(P)$.

Sin necesidad de acudir a las imágenes tangenciales cabía establecer directamente estos resultados partiendo de [5]. En efecto, supongamos que la translación de los puntos P de $\mathfrak{R}_n$ es unívoca. Entonces existen n funciones $X^i = X^i(x, \underset{o}{x})$ que se anulan en $P_o \equiv \{\underset{o}{x}^k\}$, *arbitrariamente elegido* en un cierto dominio $D_n \subset \mathfrak{R}_n$, y que satisfacen idénticamente en D_n al sistema de ecuaciones entre diferenciales totales

$$d X^j + (\Gamma^j_{kp} X^k + \delta^j_p)\, dx^p = 0. \qquad [\mathfrak{T}]$$

En cualquier $P \in D_n$, por lo tanto, será

$$\partial_q (\Gamma^j_{kp} X^k + \delta^j_p) = \partial_p (\Gamma^j_{kq} X^k + \delta^j_q)$$

o sea,

$$R_{pqk}^{\cdot\cdot\ j} X^k + 2\, S_{pq}^{\cdot\cdot\ j} = 0, \qquad [23]$$

donde X^n es el transladado a $A_n(P)$ del punto de contacto P_o de $A_n(P_o)$. En particular, en P_o se tiene $X^k(\underset{o}{x}, \underset{o}{x}) = 0$, es decir,

$$S_{pq}^{\cdot\cdot\ j} (P_o) = 0$$

y como P_o es cualquiera en D_n, el tensor de torsión es nulo en todo D_n,

$$S_{pq}^{\cdot\cdot\ j} (P) = 0, \qquad [24]$$

lo cual reduce [23] a

$$R_{pqk}^{\cdot\cdot\ j} X^k = 0. \qquad [23']$$

Esta relación nos dice que, a menos de ser $R_{pqk}^{\cdot\cdot\ j} = 0$ en cada $P \in D_n$, el transladado $\overset{*}{P}_o$ de P_o a $A_n(P)$ está en un hiperplano que pasa por P, hiperplano que es el mismo para todos los $P_o \in D_n$. Pero esto no es posible; luego se tiene necesariamente

$$R_{pqk}^{\cdot\cdot\ j} = 0. \qquad [25]$$

[24] y [25] son, pues, condiciones necesarias para que sea unívoca la translación de los puntos de la variedad. Y como de cumplirse éstas $(\mathfrak{T})$ es un sistema completamente integrable, la integrabilidad de la translación de los puntos $P \in \mathfrak{R}_n$ es suficiente para que sea integrable la translación de los puntos $X \in A_n(P)$.

Instituto de Optica Daza de Valdés.
Sección de Optica Teórica.

Madrid, abril de 1948.

BIBLIOGRAFIA

CARTAN, E.—Les variétés a connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. (Ann. Scient. Ecole Norm. Sup., 40, 1923, 325-412; 41, 1924, 1-25).

GOURSAT, E.—Cours d'analyse mathematique. (París, Gauthier-Villars, 1942, vol. II).

SCHOUTEN, J. A.—Der Ricci-Kalkül. (Berlín, Springer, 1924).