E. P. A. L. E. COteor 1.

Cuatro seminarios sobre

TEORIA ELEMENTAL DE LA PILA

por

J. Garcia Fité

y

R. Ortiz Fornaguera

Madrid, mayo de 1951.

I.- TEORIA DE LA PILA EN REGIMEN ESTACIONARIO

Dos seminafios por

J. Garcia Fité

I) PILA EN REGIMEN ESTACIONARIO

1.- Una pila consiste en una masa de uranio en la cual pueda producirse la reacción en cadena.

Consideremos un neutrón que incide sobre un núcleo de uranio. Aparte el choque elástico, pueden darse los siguientes procesos:

a) (n, n) choque inelástico

b) (n, γ) captura por resonancia

c) (n, f) escisión con producción de 1 a 3 neutrones.

Vemos, pues, que un neutrón (procedente de la radiación cósmica o de la escisión espontánea del U) puede iniciar una reacción en cadena. La ulterior historia de los neutrones producidos en esta primera escisión decidirá si la reacción en cadena prosigue o no.

En una masa de U natural existen los dos isotopos U238 y U235 en la proporción (*)

$$\frac{U238}{140} = \frac{U235}{1}$$

Ahora bien la probabilidad de escisión del U natural por neutrones rápidos (de energías ≥ 1 Mev) presenta el aspecto de la figura (1) y en cambio la probabilidad de escisión del U235 es la indicada esquemáticamente en la fig. (2).

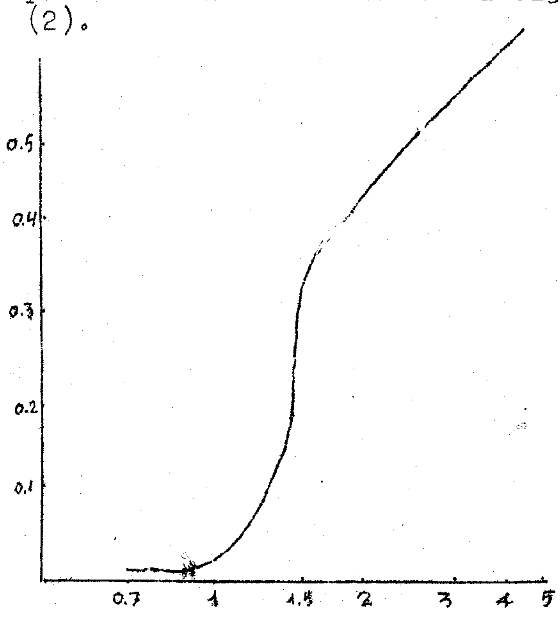


fig. 1

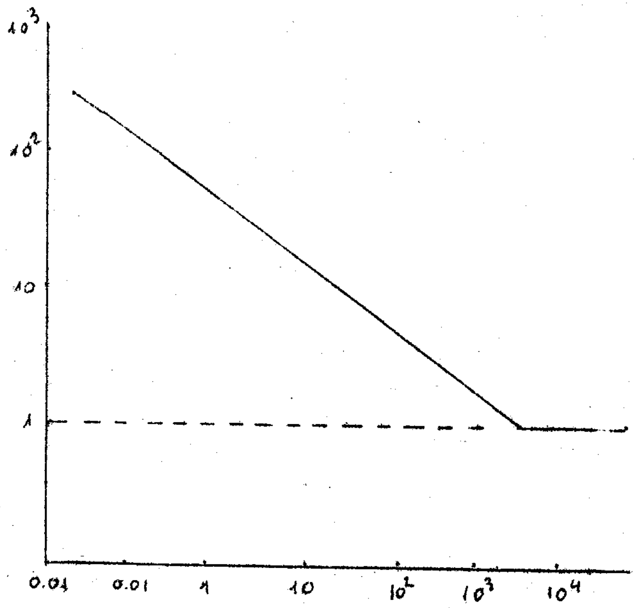


fig 2

En la siguiente tabla se dan las secciones eficaces de escisión, absorción por resonancia y dispersión (en barns) para el U235, U238 y U natural correspondientes a neutrones térmicos (de energías del orden de KT)

(*) En rigor, los isotopos son U238, U235 y U234 y sus abundancias 1:1/139:1/17000.

	U235	U238	U
σ_f	545	0	3,9
σ_c	100	2,6	3,3
σ_s	8,2	8,2	8,2

Por otra parte, el espectro energético de los neutrones instantáneos obtenidos por escisión del U235 viene dado por $e^{-E}.\mathrm{sh}\sqrt{2E}$, en donde E es la energía en Mev en el sistema de referencia fijo respecto del laboratorio y cuya curva es la representada en la fig. (3).

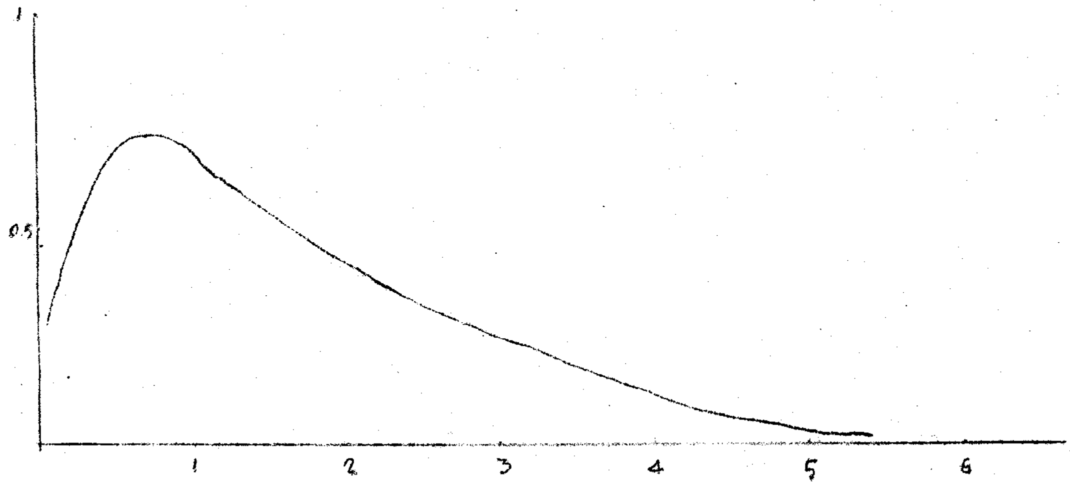


fig 3

Del examen de los anteriores datos y curvas se concluye que con U natural en el que los dos isotopos entren en la proporción indicada resulta muy poco probable otener una reacción en cadena (de hecho es imposible obtenerla).

Caben dos soluciones o bien aumentar la proporción de U235 (reactores rápidos) o bien mezclar convenientemente con el U natural una substancia que presente una gran sección eficaz de dispersión, al propio tiempo que una sección eficaz de captura lo más pequeña posible al objeto de que los neutrones, mediante choques elásticos, pierdan rápidamente su energía y se conviertan en neutrones térmicos para los cuales la probabilidad de escisión del U235 es muy elevada. Esta substancia recibe el nombre de "moderador" y su empleo es el procedimiento seguido para obtener reacciones en cadena en las pilas lentas o térmicas.

2.- Por término medio, el neutrón pierde la misma fracción de energía en cada choque. Medimos esta pérdida de energía mediante la <u>pérdida media logarítmica</u>,

$$(2.1) \qquad \xi = \overline{\log E_a - \log E_d} = \overline{\log \frac{E_a}{E_d}} ,$$

siendo E la energía antes del choque E después del mismo. La fórmula (2.1) vale en el supuesto de que la ley de dispersión respecto al centro de masa sea isótropa, en cuyo caso viene dada por la expresión

$$(2.2) \qquad \xi = 1 - \frac{(A-1)^2}{2A} \log \frac{A \quad 1}{A-1},$$

siendo A el número de masa del moderador. Una expresión aproximada en 1 % para núcleos de $A > 10$ es la siguiente:

$$(2.3) \qquad \xi = \frac{2}{A+2/3}$$

Para el H la pérdida media logarítmica es 1 de modo que la energía de un neutrón al chocar con un núcleo de H decrece, en promedio, en un factor e en cada choque; es decir, su energía despues del choque es sólo el 37 % de su energía incidente.

Por otra parte si A es muy grande, la pérdida media logarítmica es muy pequeña, de modo que para núcleos pesados, por ejemplo U238, prácticamente es $\xi \approx 0$.

Conocida ξ para un moderador, se puede calcular el número medio de choques para que en su proceso de moderación un neutrón rápido ($\approx$ 2Mev) se convierta en térmico ($\approx$ 1/30 eV)

$$\frac{\log 2 \cdot 10^6 - \log 1/30}{\xi} = \frac{\log 6 \cdot 10^7}{\xi} = \frac{18}{\xi}$$

Resumiendo: en la elección del moderador debemos tener en cuenta 1) una sección eficaz de captura lo más pequeña posible; 2) una sección eficaz de dispersión grande y 3) una ξ elevada.

La tabla dada a continuación nos permite seleccionar el D, C y Be; éste último elemento es rechazado como moderador, aparte de las dificultades de obtención, por su gran toxicidad.

Moderador	A	σ_c^t	ξ	$18/\xi$
H	1	0,31	1	18/
D	2	0,00085	0,725	25
C	12	0,0048	0,158	114
Be	9	0,0085	0,209	86

3.- Vamos ahora a seguir la historia de un neutrón que acaba de ser producido por escisión del U235 en una masa de Uranio natural convenientemente mezclada con un moderador, por ejemplo, el grafito.

Dividiremos su historia en tres intervalos energéticos 1^er^ intervalo.- Neutrones rápidos.

Es decir, neutrones con energía superior al umbral de escisión del U238.

Existe una pequeña probabilidad de que se produzca la captura del neutrón por parte del U, en cuyo caso la captura conduce principalmente a la escisión del U238, pero las colisiones elásticas con el carbón y las inelásticas con el U, tienden a reducir rápidamente su energía por debajo del umbral de escisión del U238, razón por la cual el neutrón invierte una fracción muy pequeña de su tiempo en este intervalo.

Este intervalo viene caracterizado por el "factor de reproducción rápida", ε , que representa el número de neutrones que traspasan el umbral de escisión del U238 por cada neutrón instantáneo producido. Según Fermi es $\varepsilon = 1{,}03$. De acuerdo con los más recientes datos, para una pila tipo "Gleep" (grafito) es $\varepsilon = 1{,}029$ y para una pila tipo "Zeep" (agua pesada) es 1.031.

2º . intervalo.- Neutrones epitérmicos.

Es decir, neutrones de energía inferior a la correspondiente al umbral de escisión del U238 y superior a la energía térmica 3/2 KT.

En la mayoría de los casos el neutrón no es capturado como rápido y se convierte en epitérmico. Este período es el más desfavorable. El proceso en él de mayor importancia es la captura por resonancia por parte del U238. La sección eficaz para este proceso es completamente irregular, presentando un considerable número de picos de resonancia. La captura por resonancia resulta preponderante por debajo de los 10 kev y aumenta al decrecer la energía de los neutrones.

Aquí es donde el moderador desempeña su más importante papel al reducir a grandes saltos, la energía de los neutrones, haciendo así mínima la probabilidad de que su energía coincida con una de las de resonancia.

Este período viene caracterizado por la "probabilidad de que un neutrón no sea capturado en este intervalo", probabilidad que designaremos por p.

3^er^ intervalo.- Neutrones térmicos.

Es decir, los que poseen la energía térmica KT propia del material de la pila, e intercambian su energía con los núcleos que constituyen dicho material.

Los procesos de captura por resonancia y escisión som ambos importantes y sus secciones eficaces siguen la ley 1/v, siendo por consiguiente su importancia relativa independiente de la velocidad.

Definamos el "factor de utilización térmica f" como la probabilidad de que un neutrón sea capturado por un núcleo de uranio:

$$f = \frac{\Sigma_c^u}{\Sigma_c} \qquad (3.1)$$

donde Σ_c^u la sección eficaz macroscópica de captura del Um y Σ_c la sección eficaz macroscópica de captura por parte del material de la pila, constituída por el uranio y el moderador: $\Sigma_c = \Sigma_c^m + \Sigma_c^u$

Definamos ahora η como el número de neutrones rápidos producidos por captura de un neutrón térmico por parte del U y ν como el número de neutrones rápidos producidos en la escisión (térmica) de un núcleo de uranio. Evidentemente

$$(3.2) \qquad \eta = \frac{\Sigma_f^u}{\Sigma_c^u} \cdot \nu \qquad (\nu = 2{,}5 \pm 0{,}1)$$

Por lo tanto, el número de neutrones rápidos obtenidos por captura de un neutrón térmico por parte del material de la pila vendrá dado por

$$(3.3) \qquad f.\eta = \frac{\Sigma_c^u}{\Sigma_c} \nu$$

En resumen, vemos que dada neutrón formado al escindirse un núcleo de U235 da lugar al final de su evolución a

$$(3.4) \qquad K_\infty = \varepsilon.p.f.\eta$$

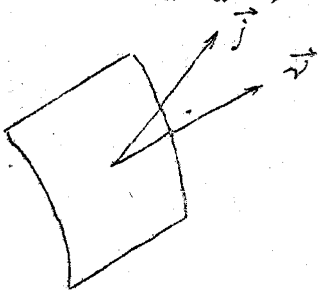
neutrones que repiten el ciclo. Se ha escrito K_∞ para indicar que no hemos tendio en cuenta las pérdidas de neutrones por fuga a través de la superficie y, por tanto, K_∞ representa la constante de multiplicación para una pila de tamaño infinito. Para que la reacción en cadena se mantenga en este caso, debe ser $K_\infty = 1$, pero claro está que cuando se trata de una pila de dimensiones finitas deberá tenerse $K_\infty > 1$ para compensar aquellas pérdidas.

4.- Difusión de neutrones térmicos.

De la teoría de la difusión elemental podemos trasladar a nuestro caso su hipótesis fundamental

$$(4.1) \qquad \vec{j} = - D.\mathrm{grad}\ n$$

en la que $n = n(\vec{x}t)$ es el número de neutrones por cm^3, D la constante de difusión y $\vec{j}$ la densidad de corriente neutrónica. El producto escalar $\vec{j} \times \vec{\nu}$ nos da el flujo de neutrones que atraviesan un elemento de superficie normal a $\vec{\nu}$ en el punto $\vec{x}$ y en el instante t.



Dicha hipótesis expresa, pues, que existe una corriente neutrónica provocada por la desigual distribución de neutrones a uno y otro lado del elemento de superficie considerado. Esta hipótesis es válida en el supuesto de que la variación de $n(\vec{x}, t)$ a lo largo de un libre camino medio es despreciable frente a $n(\vec{x}, t)$: $l_s\, \mathrm{grand}\ n \ll n$. En particular, no será válida si la probabilidad de captura no es mucho menor que la de dispersión elástica, es decir si no es $\frac{l_s}{l_c} \ll 1$. Para el grafito la anterior razón es aproximadamente igual a 10^{-3}. Aun cumpliéndose la anterior condición, dicha hipótesis tampoco será válida en la proximidad de los límites y de las fuentes.

El valor de la constante de difusión viene dado por

$$(4.2) \qquad D = \frac{l v}{3\left(1 - \frac{l}{l_s} \overline{\cos\theta}\right)}$$

fórmula en la que l el libre camino medio total definido por

$$(4.3) \qquad \frac{1}{l} = \frac{1}{l_c} + \frac{1}{l_s}$$

v la velocidad, aproximada constante, de los neutrones térmicos y $\overline{\cos\theta}$ el valor medio del cos. del ángulo de dispersión en el sistema de referencia fijo respecto del laboratorio.

Introduzcamos el libre camino medio de transporte,

$$(4.4) \qquad l_t = \frac{l_s}{1 - \overline{\cos\theta}}$$

el cual representa la distancia media recorrida por el neutrón después de un número infinito de choques y en la dirección inicial del movimiento. Si el choque es tal que predomina la dispersión en una dirección dada, por ejemplo hacia adelante, caso que tiene lugar en el supuesto de dispersión isótropa respecto del centro de masa, $\overline{\cos\theta} > 0$ y l_t es ligeramente mayor que l_s . Por ejemplo, en el grafito $l_s = 2,7$ cms. y el libre camino medio de transporte $l_t = 2,86$ cms. Puesto que $l_s \ll l_c$ aun cuando sea $l_t > l_s$ sigue verificándose que $l_t \ll l_s$ como salta a la vista en el caso del grafito. Expresemos D en función de l_t . Se tiene entonces

$$(4.5) \qquad D = \frac{l_t v}{3\left(1 + \frac{l_t}{l_c}\right)} \approx \frac{l_t v}{3}$$

puesto que $\frac{l_t}{l_s} \ll 1$

5.- Sentado esto, calculemos la variación de la densidad neutrónica con el tiempo en un volumen arbitrario de la masa del material. Dicha variación será igual al flujo de neutrones antrante a través de la superficie que limita dicho volumen, más el número de neutrones producidos, por cm^3 y por unidad de tiempo, por una fuente (distribuída), menos el número de los capturados por cm^3 y por unidad de tiempo. La expresión de dicho balance es

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{j} + Q - \frac{n}{\tau_c}$$

en la que Q representa la función puente (densidad de foco) y τ_c la vida media de los neutrones térmicos. Resultan así las ecuaciones fundamentales de la teoría de la difusión

$$\vec{j} = - D \operatorname{grad} n \qquad \frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n - \frac{n}{\tau_c} + Q$$

Suponiendo que n no depende de t, obtenemos las ecuaciones correspondientes a régimen estacionario

$$(5.1) \qquad \vec{j} = - D \operatorname{grad} n \qquad D . \Delta n - \frac{n}{\tau_c} = - Q$$

Haciendo ahora en la segunda ecuación $D.\tau_c = L^2$, resulta

$$\Delta n - \frac{n}{L^2} = Q\frac{\tau_c}{L^2} \tag{5.2}$$

L es la llamada longitud de difusión y tiene las dimensiones de una longitud

$$L^2 = D\tau_c = D.\frac{l_c}{v} = \frac{l_t l_c}{3}$$

y para la validez de la teoría de la difusión deberá tenerse

$$L = l_t\sqrt{\frac{l_c}{3l_t}} \gg l_t \gtrsim l_s$$

Salvo por el factor $1/\sqrt{3}$, por consiguiente, la longitud de difusión es la media geométrica entre el libre camino medio de transporte y el libre camino medio de captura. Para el grafito es

$$L = \sqrt{\frac{2,86.2700}{3}} \approx 50 \text{ cms.}$$

El significado de la longitud de difusión puede hallarse en el caso de una fuente puntual de neutrones térmicos en un medio infinito. Se obtiene en efecto, para el flujo neutrónico

$$vn(r) = C.\frac{e^{-\frac{r}{L}}}{r}$$

Hallemos la distancia cuadrática media recorrida por los neutrones en su difusión a través del medio, a partir del foco puntual. Evidentemente

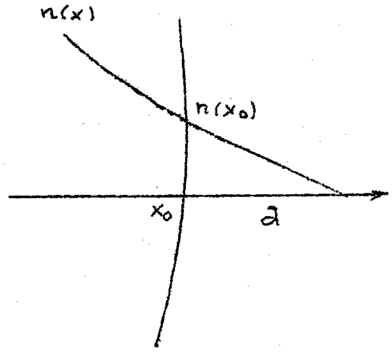
$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int r^2 nv.dV}{\int nv.dV} = \frac{\int_0^\infty r^2\frac{e^{-\frac{r}{L}}}{r}4\pi r^2.dV}{\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{r}{L}}}{r}4\pi r^2.dV} = \frac{6L^4}{L^2} = 6L^2$$

Luego, el cuadrado de la longitud de difusión L es igual a un sexto del cuadrado de la distancia cuadrática media recorrida por el neutrón, desde la posición de la fuente (punto en que los neutrones se convierten en térmicos) hasta el punto en donde son capturados.

La solución de la ecuación de difusión implica, dar unas determinadas condiciones en los límites. Como es lógico, en la superficie que limita el material de la pila la densidad neutrónica no será nula, antes tendrá un determinado valor $n(x_0)$ distinto de cero.

Para hallar la distancia, d, tomada normalmente a la superficie y a partir de la misma, a lo cual podemos considerar que la densidad neutrónica es nula, extrapolaremos linealmente mediante una recta tangente en x_0 a la curva de distribución $n(x)$:

$$n(x) = \left(\frac{dn}{dx}\right)_{x_0} x + n(x_0)$$



de donde

$$d = -\frac{n(x_0)}{\left(\frac{dn}{dx}\right)_{x_0}} = \left[\frac{n(x)}{\frac{dn(x)}{dx}}\right]_{x=x_0}$$

Se puede demostrar que, a partir de la teoría elemental, éste último cociente vales 2/3 lt y, por lo tanto

$$d = 2/3\ l_t.$$

Esta distancia es la llamada <u>distancia extrapolada</u>. Una más exacta formulación del problema, de acuerdo con la teoría del transporte, da como valor de la distancia extrapolada

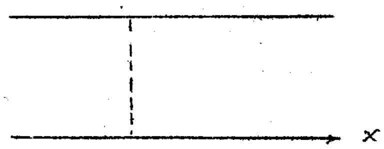
$$d = 0{,}71\ l_t.$$

6.- Teoría de la edad.

Se trata ahora de calcular la p. Usaremos para ello la teoría de la edad (*).

Definamos previamente "la densidad de moderación" que designaremos por q(u) como el número de neutrones que por cm^3 y por unidad de tiempo pasan un nivel de energía u. De la definición dicha resulta que q(u) es un flujo a lo largo del eje de las energías.

Consideremos lo que ocurre en el caso de un fluído. El número de partículas que atraviesan una sección recta de 1 cm^2 de área viene dado por



$$\rho \frac{dx}{dt}$$

Análogamente en nuestro caso, el flujo energético vendrá expresado por

$$q(u) = n(u) \cdot du/dt$$

Ahora bien du/dt es la pérdida de energía por unidad de tiempo; luego,

$$du/dt = v/l_s \quad (\text{nº. choques por unidad de tiempo}) \cdot \xi$$

Nos queda, pues,

$$(6.1) \qquad q(u) = n(u)\frac{v}{l_s}\xi \qquad\qquad (6.2) \qquad nv = q(u)\frac{l_s}{\xi}$$

(*) En lo que sigue tomaremos como escala de energías $u = \log E_0/E$ siendo E_0 la energía media de los neutrones rápidos que consideraremos aproximadamente igual a 1 Mev.

Pasemos ahora a considerar el proceso de la moderación, Supondremos:

1º) que el número de choques es lo suficientemente elevado para que el proceso pueda considerarse aproximadamente continuo, Es decir, ξ es pequeña. Este caso se da en el grafito, pero no en el D_2O.

2º) que l_s es aproximadamente constante o lentamente variable con la energía,

3º) que existe una fuente distribuída de neutrones rápidos (monoenergéticos) de energía E_o.

Prácticamente la teoría es suficientemente buena tomando para E_o un valor promedio (cf. 3.1).

Supongamos en primer lugar que no existe captura. En tales condiciones, el número de neutrones de energía comprendida entre u y u + du que penetran en un cm^3 por unidad de tiempo es

$$- \operatorname{div} \vec{j} = l_t v/3 \, \Delta n . du$$

y el exceso del número de neutrones que por unidad de tiempo entran en dicho intervalo energético sobre l número de los que salen, vendrá dado por

$$q(u) - q(u + du) = - \frac{\partial q}{\partial u} \, du$$

Por consiguiente, el aumento del número de neutrones de energía comprendido en u y u + du por unidad de tiempo en aquel cm^3 vendrá dado por

$$(6.3) \qquad \frac{\partial n}{\partial t} du = \frac{l_t v}{3} \Delta n . du - \frac{\partial q}{\partial u} . du$$

En régimen estacionario se tiene $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$ y la anterior ecuación se reduce a

$$\frac{l_t v}{3} \Delta n = \frac{\partial q}{\partial u}$$

Teniendo en cuenta la expresión de nv dada por (6.2) resulta

$$\frac{l_t l_s}{3\xi} \Delta n = \frac{\partial q}{\partial u}$$

y efectuando el cambio de variable independiente

$$(6.4) \qquad d\tau = \frac{l_t l_s}{3\xi} du$$

queda en definitiva

$$(6.5) \qquad \Delta q = \frac{\partial q}{\partial \tau}$$

ecuación, formalmente idéntica con la ecuación típica del calor, en la que τ desempeña el parpel del tiempo. τ recibe el nombre de <u>edad de Fermi</u> o sencillamente <u>edad</u>. Sus dimensiones son las de un área.

De (6.4) se sigue

$$(6.6) \qquad \tau = \int_0^u \frac{l_s l_t}{3\xi}\, du$$

La significación de τ resulta inmediatmaente al considerar el caso de una fuente monoenergética de neutrones rápidos en un moderardor infinito. Se demuestra que en tales condiciones

$$\tau = \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle$$

Es decir τ representa, salvo el factor $1/6$, el cuadrado de la distancia cuadrática media recorrida por el neutrón a partir de la fuente hasta alcanzar la energía u.

Consideremos ahora que en el proceso de moderación tenga lugar captura de neutrones y designemos por q'(u) la correspondiente densidad de moderación. Para tener en cuenta la captura en el intervalo energético (u, u + du) hay que añadir al segundo miembro de (6.3) el término $-\frac{n}{\tau_c}$ du, con lo que la ecuación en régimen estacionario resulta

$$\frac{l_t v}{3} \Delta n - n v \Sigma_c = \frac{\partial q'}{\partial u}$$

ecuación en la que expresabdo nv en función de q'(u) y haciendo el cambio (6.4) toma la forma

$$\Delta q' - \frac{3}{l_t l_c} q' = \frac{\partial q'}{\partial \tau}$$

Basta multiplicar ésta por $e^{\int_0^\tau \frac{3}{l_t l_c} d\tau}$ y efectuar el cambio de variable función

$$(6.7) \qquad q'(u) = q(u)\, e^{-\int_0^\tau \frac{3}{l_t l_c} d\tau}$$

para que se convierta en

$$\Delta q = \frac{\partial q}{\partial \tau}$$

que es la misma ecuación (6.5) ya obtenida.

Veremos el significado de la substitución (6.7) pasando en la integral de la variable τ a la u resulta

$$q'(u) = q(u)\, e^{-\int_0^u \frac{l_s}{\xi l_c} du}$$

y teniendo en cuenta los significados de q'(u) y q(u) llegamos a la conclusión de que el cociente

$$\frac{q'(u)}{q(u)} = e^{-\int_0^u \frac{l_s}{\xi l_c} du}$$

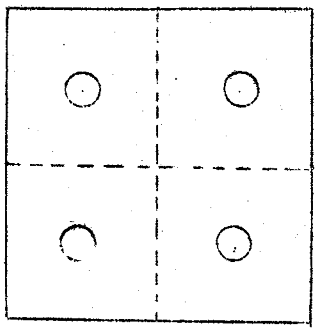
representa la probabilidad, $p(u)$, de que un neutrón alcance, sin ser capturado el nivel de energía u. Si hacemos u igual al umbral de las energías térmicas, u_t , la anterior probabilidad coincide con la p ya definida.

$$p = e^{\int_0^{u_t} \frac{l_s}{\xi l_c} du} \qquad (6.8)$$

Uno de los más importantes factores en el proyecto de una pila es precisamente esta probabilidad $p\ (u_t)$. Interesa, claro está, que sea lo mayor posible. Hemos considerado implicítamente el caso de una pila homogénea -esto es, mezcla homogénea de U natural y grafito. De la expresión (6.8) se deduce que obtendremos una p tanto mayor cuando mayor sea la concentración de grafito y menor la de uranio. Ahora bien, también interesa que el factor de utilización térmica f sea lo mayor posible lo que se consigue, como resulta de su propia definición, aumentando la concentración de U respecto a la de grafito. Es decir las variaciones de p y f con las concentraciones de U y grafito son antagónicas. Se procura hallar un valor óptimo del producto pf en función de aquellas concentraciones.

Para obtener un valor lo más elevado posible para el citado producto se recurre a la pila de estructura reticular. De hecho es imposible conseguir con una pila homogénea de U natural que K_∞ sea mayor que la unidad, es decir la reacción en cadena.

Una pila de estructura reticular consiste en un conjunto de esferas o barras de U dispuestos periódicamente entre los cuales se ha interpuesto el moderador. El que esta disposición pueda ser favorable puede comprenderse si se considera que al formarse un neutrón rápido como consecuencia de la escisión de un núcleo de U en una de las esferas, antes de que se haya convertido en epitérmico y pueda ser capturado por resonancia, habrá abandonado la esfera, y sufrido una reducción en su energía debido únicamente a choques con núcleos de carbón. En el peor de los casos penetrará en otra esfera siendo epitérmico y será capturado por los núcleos de uranio que constituyen la capa externa de dicha esfera, de tal modo que los núcleos interiores a dicha capa, no contribuyen en general a la captura por resonancia (autoblindaje). Desde luego no sólo se reduce la absorción por resonancia sino también la térmica, pero teóricamente puede hallarse y la experiencia lo confirma una constante d de la red y un radio r de las esferas o barras óptimas.



En el caso de una pila de estructura reticular, las definiciones y significados de las constantes de la pila ε, p , η y f como así-mismo τ_c siguen subsistiendo. La diferencia estriba en que ahora dependerán, principalmente la p y f de la constante de estructura d y del radio de las esferas o barras r y por lo tanto sus expresiones analíticas serán distintas que las dadas, aunque como se ha indicado, conservan su significado. Esto permite prescindir en una primera aproximación de la heterogeneidad de la pila, en lo que sigue, puesto que las constantes de la pila aparecerán en las diversas ecuaciones de un modo global, independientemente de su expresión analítica.

7.- Ecuaciones de la Pila: su régimen estacionario.

Para establecer las ecuaciones de la pila partiremos de las ecuaciones proporcionadas por la teoría de la difusión (5.1) para los neutrones térmicos dentro de la masa de la misma y la teoría de la edad (6.5) para los neutrones epitérmicos.

$$(7.1) \qquad \Delta n - \frac{n}{L^2} + Q\frac{\tau_c}{L^2} = 0$$

$$(7.2) \qquad \Delta q = \frac{\partial q}{\partial \tau}$$

e impondremos las condiciones límites

$$(7.3) \qquad \begin{aligned} \left[q\ (u)\right]_s &= 0 \\ \left[u\ (\vec{x})\right]_s &= 0 \end{aligned}$$

designando por s el límite geométrico de la masa de la pila aumentado en la distancia extrapolada. Se debe tener en cuenta que la vida media de captura τ_c que figura en la (7.1) y, por lo tanto, la longitud de difusión L son las correspondientes al material de la pila y no al moderador puro. Se demuestra que la τ_c del material de la pila está relacionado con la τ_c^m del moderador mediante

$$\tau_c \approx (1 - f)\,\tau_c^m$$

La Q que aparece en (7.1) representa una fuente de neutrones térmicos, es decir, el número de neutrones que por unidad de tiempo y por cm^3 traspasen el umbral térmico.

$$(7.4) \qquad Q(u_t) = q'(u_t) = q(u_t)\ p(u_t) = q_t p_t$$

Se trata ahora de calcular q_t. Para ello recordemos que

$$(7.5) \qquad f\cdot\eta = \frac{\Sigma_f^u}{\Sigma_c}\nu$$

representa el número de neutrones rápidos producidos por cm^3 y por unidad de tiempo por neutrón térmico capturado por el material de la pila. Ahora bien, puesto que $nv\Sigma_c$ es el número de neutrones térmicos capturados por unidad de tiempo

$$(7.6) \qquad nv\Sigma_c f\eta$$

representará el número de neutrones rápidos producidos por cm^3 y por unidad de tiempo.

La expresión (7.6) multiplicada por el factor de reproducción rápida ε nos dará el número de neutrones rápidos que traspasan el umral de energía, por cm^3 y unidad de tiempo, E_o, es decir, la densidad de moderación $q(0)$.

$$(7.8) \qquad q(0) = \varepsilon n v \Sigma_c f \eta$$

Ahora bien, el número de neutrones, de éstos $q(0)$ que alcanzan un determinado nivel u, será siempre una fracción de $q(0)$; designemos esta fracción por $\pi(u)$. Evidentemente debe ser tal que para $u = 0$, $\pi(0) = 1$.

$$(7.9) \qquad q(u) = q(0)\,\pi(u) = \varepsilon n v \Sigma_c f \eta\, \pi(u)$$

El significado de $\pi(u)$ es evidente. Representa la probabilidad de un neutrón rápido, en su proceso de moderación alcanza el nivel de energía $\underline{u}$ por no haberse fugado a través de la superficie límite de la pila.

Llevando la expresión (7.9) a la ecuación de la edad (7.2) se obtiene

$$\varepsilon \Sigma_c v f \eta\, \pi(\tau) \Delta n = \varepsilon n v \Sigma_c f \eta\, \pi'(\tau)$$

De donde dividiendo por $\varepsilon n v \Sigma_c f \eta\, \pi(\tau)$ resulta

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\pi'(\tau)}{\pi(\tau)} = -\mathcal{H}^2$$

es decir,

$$(7.10) \qquad \Delta n + \mathcal{H}^2 n = 0$$

$$(7.11) \qquad \frac{\pi'(\tau)}{\pi(\tau)} = -\mathcal{H}^2$$

las dimensiones de $\mathcal{H}$ son las de la inversa de una longitud. La (7.11) se integra inmediatamente

$$(7.12) \qquad \pi(\tau) = e^{-\mathcal{H}^2 \tau}$$

habiendo tenido en cuenta que $\pi(0) = 1$. Substituyendo esta expresión de $\pi(\tau)$ en (7.9) se obtiene

$$(7.13) \qquad q(\tau) = \varepsilon n v \Sigma_c f \eta\, e^{-\mathcal{H}^2 \tau}$$

en la que haciendo τ igual a la edad correspondiente a la energía térmica

$$q_t = \varepsilon n v \Sigma_c f \eta \, e^{-\mathcal{H}^2 \tau_t}$$

Obteniéndose finalmente

$$(7.14) \qquad Q_t = p_t q_t = \varepsilon n v \Sigma_c f \eta p \, e^{-\mathcal{H}^2 \tau_t} = n v \Sigma_c K_\infty e^{-\mathcal{H}^2 \tau_c}$$

Llevando ahora esta expresión de Q a la ecuación (7.1)

$$\Delta n - \frac{n}{L^2} + \frac{n}{L^2} K_\infty e^{-\mathcal{H}^2 \tau_t} = 0$$

y teniendo en cuenta la (7.10)

$$(7.15) \qquad 1 + \mathcal{H}^2 L^2 = K_\infty e^{-\mathcal{H}^2 \tau_t}$$

que constituye la "ecuación crítica" de la pila. La magnitud $\mathcal{H}$ es únicamente función de las constantes de la pila, L, K_∞ y τ_t cada una de las cuales es en principio calculable a partir de constantes nucleares. Para recordar el hecho de que $\mathcal{H}$ es función de los materiales de la pila y de su estructura interna designaremos por $\mathcal{H}_m$. La ecuación crítica (7.15) únicamente tiene soluciones reales si $K_\infty > 1$. En efecto, representemos esta ecuación gráficamente tal como se indica en la figura (4)

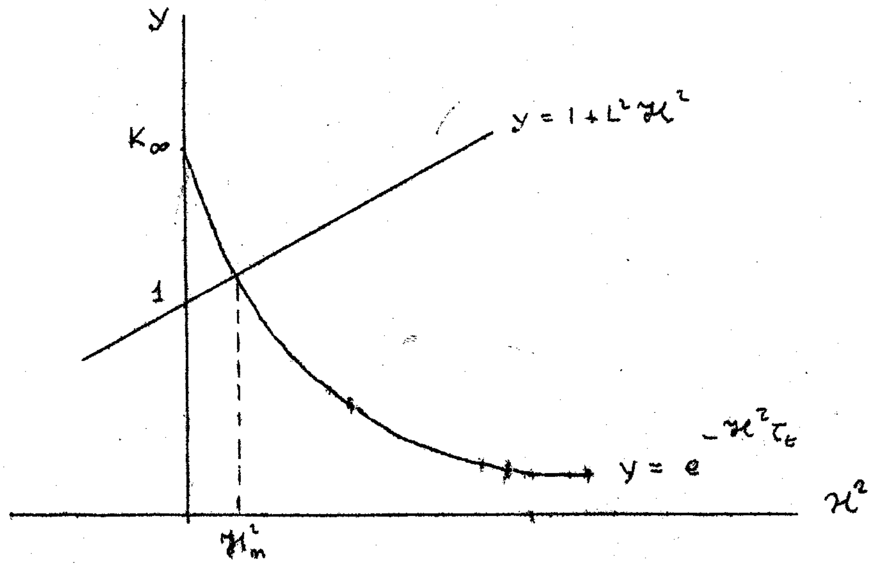


fig 4

Para $K_\infty > 1$ la ecuación crítica tiene una solución $\mathcal{H}_m$ real, mientras que para $K_\infty < 1$, la solución es imaginaria. Para $K_\infty = 1$, $\mathcal{H}_m$ es nula.

8.- Sigue en pie el problema de hallar las soluciones de la ecuación diferencial lineal

$$\Delta n + \mathcal{H}^2 n = 0$$

sujeta a la condición límite $(n)_s = 0$ también lineal. Estamos ante un problema de autovalores. Recordemos que un problema de autovalores se llamam "definido" cuando todos los autovalores son reales y del mismo signo. En particular si los autovalores son positivos se llama "definido positivo".

Si las condiciones de contorno son las naturales, nuestro problema de valores propios es definido positivo si $\sigma > 0$ lo que ocurre en nuestro caso tanto si se considera el límite geométrico de la pila o éste aumentando en la distancia extrapolada
$(n + 0{,}71\ \ell_t\, du/d\nu)_s = 0$

En efecto de la identidad

$$\operatorname{div}(n \operatorname{grad} n) = (\operatorname{grad} n)^2 + n\ \Delta\ n.$$

$$n\ \Delta\ n = \operatorname{div}\ (n \operatorname{grad} n) - (\operatorname{grad} n)^2$$

$$-\mathcal{H}^2 \int_\omega n^2\ d\omega = \oint_S n \operatorname{grad}\ n\, .\, ds - \int_\omega (\operatorname{grad}\ u)^2 d\omega =$$

$$= \oint_S n \frac{\partial n}{\partial \nu} \cdot ds - \int_\omega (\operatorname{grad} n)^2 d\omega$$

luego se tiene

$$\mathcal{H}^2 \int_\omega n^2 d\omega = \int_\omega (\operatorname{grad}\ n)^2 d\omega + \oint_S \sigma n^2 ds$$

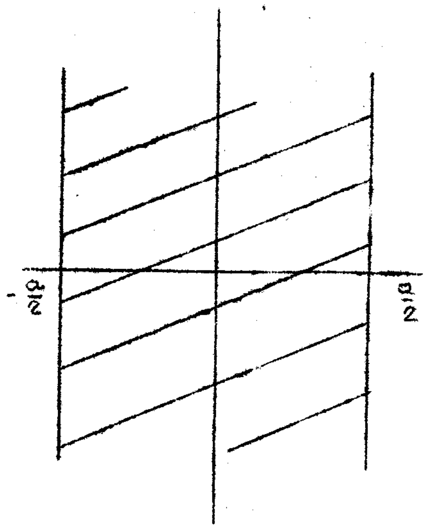
Si $\sigma > 0$ la anterior implica que $\mathcal{H}^2 > 0$

Sea ahora $\mathcal{H}_g^2$ el primer autovalor de nuestra ecuación diferencial para un dominio G dado. Se demuestra que la correspondiente función propia $n(x; \mathcal{H}_g^2)$ no presenta ningún modo en el interior de G. Como que cualquier función propia dorrespondiente a otro autovalor ha de ser ortogonal a $n(x; \mathcal{H}_g^2)$

$$\int_G n(x\, \mathcal{H}_g^2)\, n(x\, \mathcal{H}_g'^2)\, dx$$

dicha función propia debe anularse en el interior de G, pasando de positiva a negativa. En general una función propia correspondiente al K - ésimo valor propio divide el dominio G, mediante superficies nodales en dominios parciales cuyo número es $\leq K$. Además los valores propios de nuestra ecuación diferencial varían de un modo contínuo cuando se deforma G de modo contínuo. Cuando aumenta el volumen de G, el K - ésimo valor propio disminuye. Es decir si $G \leftrightarrow G'$ tal que $G < G'$ entonces $\mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}'^2$ tal que $\mathcal{H}^2 > \mathcal{H}'^2$

Ejemplo: Pila limitada por planos paralelos indefinidos



En este caso la ecuación diferencial lineal e

$$\frac{d^2a}{dx^2} + \lambda a = 0$$

y las condiciones de contorno

$$n(a/2) = n\,(-a/2) = 0$$

la integral general de la ecuación diferencial planteada es

$$n = A \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\,x + B \cos\sqrt{\lambda}\,x$$

Al considerar las citadas condiciones límites obtenemos el sistema de ecuaciones homogéneas

$$A \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\; a/2 \quad + \quad B \cos\sqrt{\lambda}\; a/2 = 0$$

$$-\,A \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\; a/2 \quad + \quad B \cos\sqrt{\lambda}\; a/2 = 0$$

cuya condición de compatibilidad es

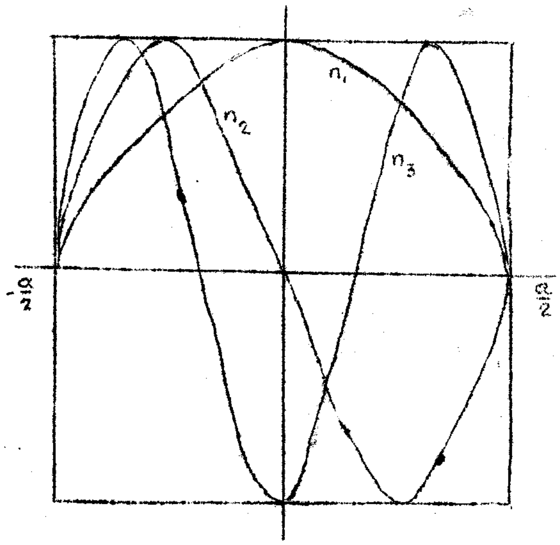
$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\; a/2 & \cos\sqrt{\lambda}\; a/2 \\ -\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\; a/2 & \cos\sqrt{\lambda}\; a/2 \end{vmatrix} = 2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\,a/2 \,.\, \cos\sqrt{\lambda}\,a/2 = \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\,a = 0$$

Por consiguiente los autovalores vienen dados por la condición

$$\sqrt{\lambda}.a = K\pi \qquad \lambda_K = K^2 .\, \pi^2/a^2 \qquad (K = 1,2\ldots)$$

Las funciones propias correspondientes a los tres primeros valores propios son:

Para $K = 1$	$\lambda_1 = \pi^2/a^2$	$n_1 = A \cos \frac{\pi}{a} x$
$K = 2$	$\lambda_2 = 4\pi^2/a^2$	$n_2 = -A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{a} x$
$K = 3$	$\lambda_3 = 9\pi^2/a^2$	$n_3 = -A \cos \frac{3\pi}{a} x$



Sea $\mathcal{H}_g^2$ el primer valor propio de nuestra ecuación diferencial y $\mathcal{H}_m^2$ la raiz real y positiva de la ecuación crítica. Si $\mathcal{H}_g^2 < \mathcal{H}_m^2$ el tamaño de la pila es mayor que el crítico. La pila es supercrítica. Si $\mathcal{H}_g^2 > \mathcal{H}_m^2$ el tamaño de la pila es menor que el crítico; la pila es subcrítica.

Una pila tendrá el tamaño crítico cuando

$$\mathcal{H}_g^2 = \mathcal{H}_m^2$$

y sólo en este caso será $n(x_i, \mathcal{H}_g^2)$ solución de las ecuaciones en la pila de regimen estacionario.

II.- CINEMATICA DE LA PILA

Dos seminarios por

R.Ortiz Fornaguera