

II.- CINEMATICA DE LA PILA

... ..  
Dos seminarios por

R.Ortiz Fornaguera

II) CINEMATICA DE LA PILA.

1.- Conforme se vió en la teoría de la pila en régimen estacionario, el comportamiento de la misma se puede caracterizar por un cierto número de constantes, de las cuales una es de carácter puramente físico mientras que las restantes dependen no sólo de ciertas propiedades físicas del material empleado, sino también de la estructura geométrica del sistema. Las constantes estructurales, o físico-geométricas, son:

- f = factor de utilización térmica para una pila infinita (número de neutrones térmicos absorbidos en U): (número de neutrones térmicos absorbidos en U + número de neutrones térmicos absorbidos en el resto del material de la pila),
- p = factor de transparencia en la zona de resonancia del U<sup>238</sup>, o probabilidad de escape a la captura (n,γ) en dicha zona,
- ε = número de neutrones rápidos producidos por neutrón rápido absorbido en U (generalmente el U<sup>238</sup> para uranio natural),
- τ<sub>t</sub> = vida media de los neutrones térmicos.

En una pila homogénea -mezcla homogénea de U moderador, p.e. grafito- estas constantes dependen de las concentraciones relativas de las componentes de la mezcla, aparte, claro está, de sus secciones eficaces para los diferentes procesos -captura, dispersión y escisión. En una pila heterogénea, en la cual el U se dispone formando una estructura reticular de, por ejemplo, barras o esferas, dichas constantes dependen de las dimensiones de los elementos reticulares de U (radio de las barras o esferas) y de la distancia entre ellos. Claro está que, en estas condiciones, no cabe hablar de la densidad neutrónica, n, o de la densidad factor de moderación, q, sin más, antes bien debiera en rigor distinguirse entre los correspondientes valores en el U o en el moderador. Sin embargo, cabe considerar los valores medios  $\bar{n}$  y  $\bar{q}$  de dichas magnitudes en cada celda, con lo que  $\bar{n}$  y  $\bar{q}$  variarán por modo quasi continuo en la pila. El efecto de la distribución no homogénea se hace recaer entonces en la evaluación de las constantes f, p, ε y τ<sub>t</sub>, mientras que n y q obedecen a las mismas ecuaciones que en el caso de la pila homogénea. La vida media de un neutrón térmico, pongamos por ejemplo, es

$$(1.1) \quad \tau_c = \frac{1}{v} \frac{l_c^u l_c^m}{l_c^u + l_c^m} = \frac{l_c}{v}$$

para una pila homogénea. En esta expresión  $l_c^u$  y  $l_c^m$  son los caminos libres medios de captura en uranio y moderador, respectivamente, y  $v$  la velocidad de los neutrones térmicos (\*). En cambio, indica Fermi (\*\*\*) que para una pila heterogénea se puede tomar, con aproximación suficiente,

$$l_c \approx (1-f) l_c^m$$

( ) Si las secciones eficaces de captura son de la forma  $\sigma = \frac{c}{v}$ , con constante,  $c$  es independiente, claro está, del valor de  $v$

( ) (3), pág. 212

de donde,

$$(1.2) \quad \tau_c \approx (1-f) \frac{l_c^m}{v}$$

Los segundos miembros de (1.1) y (1.2) coinciden cuando en la primera se tiene en cuenta la expresión de  $f$  para una pila homogénea. Pero mientras la primera es exacta, la segunda es sólo aproximada, y mientras en la primera nada alude a la disposición geométrica - en virtud de la propia homogeneidad del sistema - en la segunda la estructura reticular interviene por modo esencial a través del factor  $f$ . Es claro, en efecto, que  $f$  aumentará si se aumentan las dimensiones de los elementos de uranio o, si aun conservándolos de igual tamaño, se disminuyen las distancias que los separan. Obsérvese de paso que este comportamiento de  $f$  con relación a las características reticulares es antagónico con el del factor  $p$ : este disminuye cuando crece el tamaño de los elementos de uranio o cuando manteniendo constantes las dimensiones de los mismos, se disminuyen sus distancias mutuas. De ahí la importancia de ajustar los parámetros del retículo de U de tal manera que el producto  $pf$  sea el mayor posible, y ello con el fin de conseguir un valor máximo del factor de reproducción.

Finalmente, la quinta constante fundamental es puramente física:

$$\eta = \text{número de neutrones rápidos producidos por neutrón térmico absorbido en U} = \nu(\sigma_e(\sigma_e + \sigma_r)),$$

donde  $\sigma_e$  y  $\sigma_r$  son las secciones eficaces de escisión y captura del uranio en la zona térmica, respectivamente, y  $\nu$  el número medio de neutrones rápidos que resultan de la escisión (térmica) del  $U^{235}$ . El valor de  $\eta$  depende del grado de enriquecimiento del U empleado. Si se trata de uranio natural,

$$\eta = \frac{3,9}{3,9+3,3} \cdot 2,5 = 1,35$$

según los datos recientemente desclasificados por la A.E.C. norteamericana. Para dar una idea del orden de magnitud de esos diversos factores, tomamos de un ejemplo de Fermi (\*) los siguientes resultados correspondientes a una pila cúbica heterogénea:

$$l_t = 2,6 \text{ cm} \quad , \quad l_c = 350 \text{ cm} \quad , \quad \epsilon = 1,03$$

$$f \approx 0,86 \quad , \quad p \approx 0,91 \quad , \quad \tau_c \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ seg,}$$

a los que se puede añadir con vistas a los cálculos que seguirán

$$L^2 = 1/3 l_t \cdot l_c \approx 303 \text{ cm}^2, \quad \tau \approx 300 \text{ cm}^2,$$

$$H_c^2 \approx 8,7 \cdot 10^{-5}, \quad \tau H_c^2 \approx 0,026,$$

donde  $L$  es la longitud de difusión,  $\tau$  la "edad" de los neutrones al alcanzar el umbral térmico y  $H_c^2$  la constante crítica.

Conviene poner de relieve una vez más que tanto en la definición como en el cálculo de las constantes  $f$ ,  $p$ ,  $\epsilon$ ,  $\tau_c$ ,  $\eta$  y  $K_\infty$  para nada interviene (\*). (3) pág. 212

vienen las dimensiones o la forma de la pila, puesto que aquéllas se refieren esencialmente a una pila de dimensiones infinitas. Sólo dependen, pues, del comportamiento físico del uranio y del moderador y de la estructura geométrica del retículo de uranio -esto es, de los parámetros  $r$  ríctulares.

2.- El problema que se trata de resolver en la cinemática de la pila finita es el siguiente: dadas las constancias estructurales de un retículo de uranio dispuesto en un moderador, p.e. grafito, y las propiedades del moderador con relación a la captura y dispersión de los neutrones, determinar para una pila de forma y dimensiones dadas construída con dicho retículo+ moderador la densidad neutrónica  $n(x,t)$ , sabiendo que para  $t = 0$  la densidad neutrónica se reduce a  $n(x,0) = n_0(x)$ . Las hipótesis en que nos basamos son las siguientes:

- a) Todos los neutrones nacen simultáneamente en la escisión del  $U^{235}$  y con igual energía,  $E_0$ .
- b) El moderador es tal que el proceso de moderación puede describirse mediante una función  $q(x, t, \tau)$ , la densidad factor de moderación, que obedece a la "ecuación de la edad"

$$(2.1) \quad \frac{\partial q}{\partial t} = D \left( \Delta q - \frac{\partial q}{\partial \tau} \right),$$

en la que  $D = \frac{1}{3} l_t v$  es una función  $D(\tau)$  de la energía del neutrón y, por lo tanto, de la edad  $\tau = \int_0^u \frac{l_t l_s}{3E} du$  ( $u = -\text{Log}.E/E_0$ ).

- c) Existe una clase de neutrones, de energía media bien definida,  $\tau_t$ , reponsables de la escisión del  $U^{235}$ . Los llamaremos "neutrones térmicos". Su densidad,  $n(x, t)$ , obedece a la ecuación ordinaria de la difusión con captura

$$(2.2) \quad \frac{\partial n}{\partial t} = D_t \Delta n - \frac{n}{\tau_c} + p q(x, t, \tau_t),$$

en la que  $D_t = D(\tau_t)$ .

La hipótesis a) se verá modificada más adelante al tomar en cuenta el hecho de que, en la escisión, no todos los neutrones nacen a la vez, sino que una pequeña fracción de ellos (0,76%) viven en estado latente durante un cierto tiempo que es en promedio del orden de 10 segundos. Sin embargo, su importancia es fundamental en lo que concierne al control de la pila. Además, las densidades  $n$  y  $q$  son los valores medios de que se habló en §1, no los valores reales sujetos a rápidas fluctuaciones locales. Por otra parte, tampoco se considera aquí la posibilidad de disminuir el tamaño crítico rodeando la pila de un reflector.

Los datos indicados y las ecuaciones (2.1), (2.2) no bastan para resolver el problema. Se trata, en efecto, de un problema mixto y se deben añadir, por consiguiente, condiciones iniciales respecto de  $t$  y de  $\tau$  y condiciones de contorno para  $n$  y  $q$ . Las condiciones iniciales son

$$(2.3) \quad n(x, 0) = n_0(x), \quad q(x, t, 0) = \frac{k_{\infty}}{\rho \tau_c} n(x, t)$$

y las de contorno se escriben

$$(2.4) \quad [n(x,t)]_S = 0, \quad [q(x,t,\tau)]_S = 0.$$

De las (2.3), la segunda expresa el valor de la densidad factor de moderación para  $\tau = 0$ , es decir, el número de neutrones que atraviesan el umbral  $E_0$  por unidad de volumen en el entorno del punto  $x$  y unidad de tiempo en el instante  $t$  en función del número de neutrones capturados por segundo y unidad de volumen,

$$\frac{n(x,t)}{\tau_c}$$

en el contorno de  $x$  y en el instante  $t$ .  $k_{\infty} p = \frac{1}{\tau_c} \epsilon$  es, en efecto, el número de neutrones de energía  $E_0$  que se obtienen por neutrón capturado. Las (2.4) traducen la anulación de  $n$  y  $q$  en el entorno extrapolado  $S$  de la pila (cf. I, §5).

Dado que constantemente  $[q]_S = 0$ , es claro que  $q(x,t,\tau)$  será desarrollable en serie de funciones propias  $u_i$  del problema de valores propios

$$(2.5) \quad \Delta u(x) + \mathcal{H}^2 u(x) = 0, \quad [u]_{\partial V} = 0.$$

Es sabido, en efecto, que, para contornos suficientemente regulares, las soluciones de (2.5) forman un sistema completo, sistema que siempre podemos suponer constituido por funciones ortogonales y normalizadas. Los coeficientes del desarrollo de  $q(x,t,\tau)$  dependerán, naturalmente, de  $t$  y de  $\tau$ . Sea  $u$  una de las funciones propias normalizadas de (2.5) y  $\mathcal{H}^2$  el correspondiente valor propio. Asociada con  $u$  aparecerá una componente de  $q(x,t,\tau)$  que escribiremos en la forma

$$(2.6) \quad q_u = u(x)v(\tau)w(t).$$

La substitución en (2.1) nos da entonces

$$(2.7) \quad \frac{w'(t)}{w(t)} = -D\mathcal{H}^2 - D \frac{v'(\tau)}{v(\tau)} = \gamma,$$

donde  $\gamma$  es necesariamente una constante, puesto que el primer miembro depende sólo de  $t$  y el segundo depende de  $\tau$  solamente. La integración de (2.7) es inmediata:

$$(2.8) \quad w(t) = e^{\gamma t}, \quad v(\tau) = e^{-\mathcal{H}^2 - \gamma \tau}.$$

donde se ha hecho

$$(2.9) \quad t_0 = \int_0^{\tau} \frac{d\tau'}{D(\tau')} = \int_0^u \frac{l_s(u')}{v'} \frac{du'}{\xi},$$

y se han tomado iguales a la unidad las constantes de integración. El significado físico de  $t_0$  es obvio en la expresión que de él da el último miembro:

$$\frac{l_s(u')}{v'}$$

es el tiempo promedio que transcurre entre dos choques consecutivos de un neutrón de energía  $u'$ , tiempo durante el cual pierde la energía  $\xi$ . Luego

$$\frac{l_s(u')}{v'} \frac{du'}{\xi}$$

es el tiempo que un neutrón de energía  $u'$  tarda en alcanzar la energía  $u'+du'$  y, por lo tanto,  $t_0$  es el tiempo que, en promedio, emplea el neutrón en pasar de la energía  $u = 0$  a la  $u$ . Si se toma  $E_0 = 1 \text{ MeV}$ ,  $E = 1 \text{ eV}$  resulta para el grafito, supuesto constante  $\lambda$  e igual aproximadamente a  $2,6 \text{ cm}$ ,  $t_0 = 2,25 \cdot 10^{-5} \text{ seg}$ . Dado que, por otro lado, la vida media de un neutrón térmico,  $\tau_c$ , es del orden de  $10^{-3}$ , de la comparación de  $t_0$  y  $\tau_c$  se deduce que un neutrón en la pila vive la mayor parte de su vida como neutrón térmico.

De (2.6) y (2.8) se sigue que la componente  $u$  de  $q(x,t,\tau)$  es de la forma

$$(2.9) \quad q_u = u(x) e^{-\tau \mathcal{H}^2} e^{\gamma(t-t_0)}$$

con  $\gamma$  constante, y  $t_0$  es la función de  $\tau$  definida por (2.9). Precisamente el último factor pone de manifiesto en su exponente el efecto de retardo de  $t_0$ : las circunstancias que se presentan en el instante  $t$  para neutrones de edad  $\tau$  son la respuesta, no a las circunstancias que se daban en el instante  $t = 0$ , es decir  $t$  segundos antes, sino a las que regían el proceso en el instante  $t_0$ .

Ahora bien, la segunda condición inicial (2.3) vincula a la componente (2.9) de  $q(x,t,\tau)$  una componente  $n_u(x,t)$  de la densidad de neutrones térmicos

$$(2.10) \quad n_u(x,t) = \frac{\beta \tau_c}{k_{\infty}} u(x) e^{\gamma t}$$

ya que para  $\tau=0$  es también  $t_0 = 0$ . La substitución en (2.2) nos da entonces

$$\gamma \frac{\tau_c}{k_{\infty}} = -\frac{\tau_c}{k_{\infty}} D_t \mathcal{H}^2 - \frac{1}{k_{\infty}} + e^{-\tau t} \mathcal{H}^2 e^{-\gamma t_0(\tau)}$$

ecuación en la cual  $\tau_t$  es la edad de los neutrones térmicos. En lo que sigue, salvo en el caso que ello pudiera originar confusión, prescindiremos del subíndice  $t$  y así escribiremos la ecuación anterior simplemente en la forma

$$(2.11) \quad \gamma \tau_c = k_{\infty} e^{-\tau \mathcal{H}^2} e^{-\gamma t_0} - (1 + \mathcal{H}^2 L^2)$$

En ella,  $L$  es la longitud de difusión de los neutrones térmicos, para el retículo de uranio dado y el moderador utilizado, en el supuesto de pila infinita. Conforme vimos, es  $L^2 = (1-f)L_m^2$ , donde  $L_m$  = longitud de difusión en el moderador puro (Cf. (1.2) y  $f$  es el factor de utilización térmica.

La ecuación (2.11) tiene una raíz real  $\gamma(\mathcal{H}^2)$ , y sólo una, para cada valor propio  $\mathcal{H}^2$ . Si  $\mathcal{H}_1^2 < \mathcal{H}_2^2 < \mathcal{H}_3^2 < \dots$ , es el espectro del problema de valores propios (2.5), a cada valor propio  $\mathcal{H}_j^2$  corresponde así un valor de  $\gamma$ ,  $\gamma_j = \gamma(\mathcal{H}_j^2)$ , bien determinado -precisamente la única raíz real  $\gamma_j$  de (2.11) con  $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}_j^2$ . Pero, por otra parte, elegida una función propia  $u(x)$  existe, determinado y único, el correspondiente valor propio. Luego, a cada función propia  $u(x)$  corresponde una componente y sólo una de  $q(x,t,\tau)$  y  $n(x,t)$ , a saber

$$(2.12) \quad \begin{cases} q_u(x,t,\tau) = u(x) e^{-\tau \mathcal{H}^2} e^{\gamma(t-t_0)} \\ n_u(x,t) = \frac{\beta \tau_c}{k_{\infty}} u(x) e^{\gamma t} \end{cases}$$

determinada salvo un factor constante, el mismo para  $q_u$  y  $n_u$ . Cada una de las componentes (2.12) la llamaremos un modo asociado a la función propia  $u(x)$ , o simplemente un modo. Existe correspondencia biunívoca entre los modos -relativos a la densidad factor de moderación o relativos a la densidad de neutrones térmicos- y las funciones propias de (2.5), pero no, en general, entre los modos y los valores propios  $\mathcal{H}_j^2$ , ya que estos pueden ser degenerados. Cuando  $\mathcal{H}_j^2$  es degenerado, existen más de un modo asociados con  $\mathcal{H}_j^2$ , pero todos ellos varían con el tiempo y con la edad de igual manera, puesto que para todos ellos son iguales y  $\mathcal{H}_j^2$  y, por ende,  $\gamma_j$ .

3.- Consideremos ahora la variación de  $\gamma$  con  $\mathcal{H}^2$  cuando  $\mathcal{H}^2$  recorre el espectro  $\mathcal{H}_0^2, \mathcal{H}_1^2, \dots$ . En primer lugar, debe tenerse constantemente en cuenta que los valores propios  $\mathcal{H}_0^2, \mathcal{H}_1^2, \dots$  para nada dependen de propiedades físicas ni tan sólo estructurales de la pila. Los  $\mathcal{H}_j^2$  son, en efecto, valores propios de (2.5), problema paramétrico analítico en el que nada hace referencia a comportamiento físico y para el que sólo cuenta la superficie  $S$  sobre la cual debe anularse la función  $n(x)$ . Los  $\mathcal{H}_j^2$  dependen, pues, exclusivamente, de la forma y tamaño de la pila: ninguna constante física aparece en (2.5). No así el correspondiente valor  $\gamma_j$ . Sobre él repercuten, de una parte la forma y tamaño de la pila a través de  $\mathcal{H}_j^2$ , de otra parte las propiedades físicas del material de la pila y la manera como se ha dispuesto en la misma. En la correspondiente ecuación (2.11) aparecen, en efecto, junto a  $\mathcal{H}_j^2$ , las constantes físicas y estructurales  $k_\infty, \tau, t_0$  y  $L^2$ , que, por referirse a una pila de dimensiones infinitas, son independientes de la forma y tamaño de la pila.

El valor  $\gamma_j$  correspondiente a un cierto  $\mathcal{H}_j^2$  puede obtenerse como intersección de la recta  $y(\gamma) = \tau_c \gamma$  con la exponencial  $y(\gamma) = k_\infty e^{-\tau \mathcal{H}_j^2} e^{-\gamma t_0} - (1 + \mathcal{H}_j^2 L^2)$ . Esta corta el eje en el punto  $y_0 = k_\infty e^{-\tau \mathcal{H}_j^2} - (1 + \mathcal{H}_j^2 L^2)$  y admite como asíntota la recta  $y_\infty = -(1 + \mathcal{H}_j^2 L^2) < 0$ . Dado que la recta  $y = \tau_c \gamma$  pasa por el origen y es de pendiente positiva, es claro que la abscisa del punto de intersección de ambas líneas será positiva, cero o negativa según sea positiva, cero o negativa la ordenada en el origen,  $y_0$ , de la exponencial. En la fig. 1 se indica cualitativamente el comportamiento de  $\gamma$  con relación a  $\mathcal{H}_j^2$ . Se advierte en ella que existe un valor crítico  $\mathcal{H}_c^2$  tal que  $y_0$  es negativo (positivo) para todos aquellos valores propios  $\mathcal{H}_j^2$  que son mayores (menores) que  $\mathcal{H}_c^2$  y que  $y_0$  es cero para aquél valor propio (si existe) que coincide con  $\mathcal{H}_c^2$ . Se ha supuesto, además,  $k_\infty > 1$ . De otro modo no existiría posibilidad alguna de mantener la reacción en cadena, conforme se vió al estudiar la pila en régimen estacionario y veremos de nuevo seguidamente desde otro punto de vista. En efecto: todos los valores propios  $\mathcal{H}_j^2$  son positivos, cualesquiera que sean la forma y tamaño de la pila (cf. I, §8). Luego, si  $k_\infty \leq 1$ , dado que entonces  $\mathcal{H}_c^2 \leq 0$ , todos los  $\mathcal{H}_j^2$  serían mayores que  $\mathcal{H}_c^2$ , es decir, todos los  $\gamma_j$  serían negativos y todos los modos  $n_u(x, t)$  decaer-

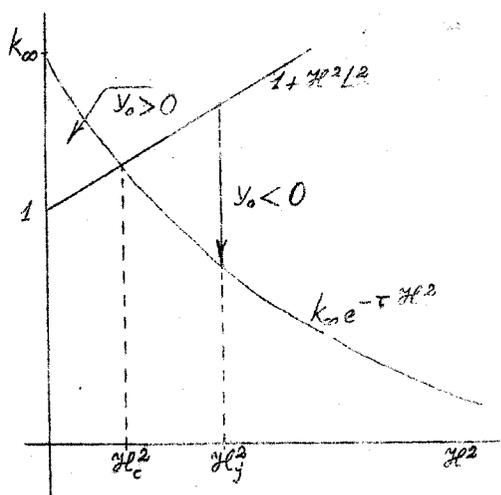


Fig. 1

rían con el tiempo exponencialmente y con ellos cualquier superposición de los mismos, esto es,  $n(x,t)$  tendería a cero cualquiera que fuera la distribución inicial.

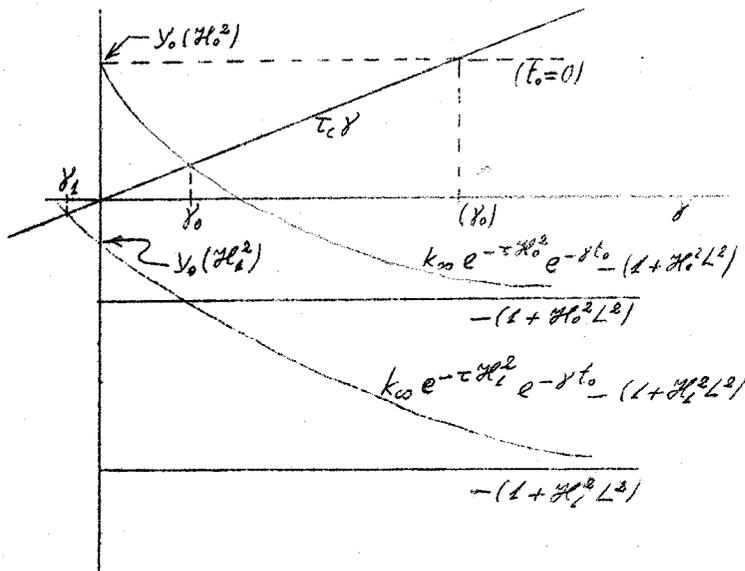
Sentado esto, y para fijar ideas, imaginemos que construimos una pila en forma de prisma recto de base cuadrada, disponiendo el uranio en el moderador según un retículo que da lugar a un  $k_{\infty} > 1$ . Si se mantienen constantes las dimensiones de la base, la distribución de los valores propios dependerá exclusivamente de la altura,  $h$ , de la pila  $\gamma$ , conforme se hizo notar (cf. I, §8), cada valor propio es función monótona del creciente de la altura  $h$ . En nuestro caso, por ejemplo, un cálculo elemental prueba que los valores propios son de la forma

$$(3.1) \quad \mathcal{H}^2 = \sigma^2 \left( \frac{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}{a^2} + \frac{\lambda_z^2}{h^2} \right);$$

relación en la que  $a$  es el lado del cuadrado base,  $h$  la altura del prisma, y  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$  tres enteros que pueden tomar cualesquiera de los valores 1, 2, ... . Un valor propio fijo, es decir, correspondiente a tres valores fijos  $(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$ , decrece cuando  $h$  aumenta, de acuerdo con la ley (3.1). Por consiguiente, para  $h$  suficientemente pequeño, todos los valores propios  $\mathcal{H}_i^2$  serán mayores que el valor crítico  $\mathcal{H}_c^2$  dado como raíz real única de la ecuación crítica

$$(3.2) \quad k_{\infty} e^{-\tau \mathcal{H}_c^2} - (1 + \mathcal{H}_c^2 L^2) = 0,$$

raíz cuyo valor depende exclusivamente de las constantes estructurales y físicas de la pila. A medida que  $h$  crece, los valores propios decrecen y atraviesan sucesivamente el valor  $\mathcal{H}_c^2$ . El primero en pasar por  $\mathcal{H}_c^2$  es, por su propia definición, el primer valor propio  $\mathcal{H}_0^2$ , etc. Supongamos, por ejemplo, la altura  $h$  tal que  $\mathcal{H}_c^2 < \mathcal{H}_0^2 < \mathcal{H}_1^2 < \mathcal{H}_2^2 < \dots$ . En estas condiciones,  $\gamma_0$  será positiva, mientras que las restantes  $\gamma_j$  serán todas negativas (fig. 2), es decir, la constante de crecimiento,  $\gamma_0$ , del primer modo (o modo fundamental) será positiva y negativas las constantes de crecimiento de todos los demás modos. Con otras palabras, la densidad neutrónica correspondiente al primer modo aumentará exponencialmente como  $e^{\gamma_0 t}$ . En cambio, las densidades neutrónicas relativas a modos otros que el fundamental tienden a desaparecer de acuerdo con la ley  $e^{\gamma_j t}$ ,  $\gamma_j < 0$ .



Obsérvese que el tiempo  $t_0$  empleado en promedio por los neutrones para pasar de la energía  $E_0$  a la energía térmica influye sobre los valores de las constantes de crecimiento  $\gamma_j$  en el sentido de dismi-

Fig. 2

nuirlas en su valor absoluto en relación con los valores ( $\gamma_j$ ) que resultarían de hacer  $t_0 = 0$  (fig. 2), es decir, los modos para los que  $\gamma_j > 0$  crecen más lentamente, y aquellos para los cuales  $\gamma_j < 0$  decrecen más lentamente de lo que correspondería a  $t_0 = 0$ . En cierto sentido puede decirse que el retardo  $t_0$ , como era de prever, tiende a estabilizar la pila, pero con todo hay que tener en cuenta que la diferencia entre  $\gamma_j$  y ( $\gamma_j$ ) es sumamente pequeña cuando es pequeño  $\gamma_j$  debido al orden de magnitud de  $t_0$  ( $10^{-5}$  seg.).

Cabe preguntar ahora en qué condiciones el modo fundamental es estacionario, esto es, cuando  $\gamma_0 = 0$ . Para ello es necesario y basta, evidentemente, que  $\gamma_0(\mathcal{H}_0^2) = 0$ , o sea que

$$k_\infty e^{-\tau \mathcal{H}_0^2} - (1 + \mathcal{H}_0^2 L^2) = 0$$

lo que a su vez implica, dado que esta ecuación admite una única raíz real, que  $\mathcal{H}_0^2$  coincida con el valor crítico  $\mathcal{H}_c^2$  en virtud de (3.2). Para aquellas formas y dimensiones de la pila para las cuales el valor propio  $\mathcal{H}_0^2$  coincida con la constante físico-estructural  $\mathcal{H}_c^2$ , el modo fundamental será estacionario, y por consiguiente, todos los otros modos presentarán constantes de crecimiento negativas. En el caso de la pila prismática es

$$(3.3) \quad \mathcal{H}_0^2 = \frac{2\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{h^2},$$

de donde resulta para la altura crítica

$$(3.4) \quad (h)_{\text{crit.}} = \frac{\pi}{\sqrt{\mathcal{H}_c^2 - \frac{2\pi^2}{a^2}}}$$

De ahí se deduce, en primer lugar, que no cabe elegir el lado  $a$  de la base del prisma arbitrariamente, sino que necesariamente debe ser

$$(3.5) \quad a > \frac{\sqrt{2} \pi}{\mathcal{H}_c}$$

Pero, por otro lado, tampoco conviene, por razones económicas, tomar  $a$  mucho mayor que el valor límite  $\sqrt{2} \pi / \mathcal{H}_c$  (que nos daría una altura crítica infinita) con el fin de disminuir  $(h)_{\text{crit.}}$  Interesa, en efecto, que el volumen  $ah^2$  de la pila sea el menor posible y es fácil ver, teniendo en cuenta la ecuación de condición  $\frac{2\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{h^2} = \mathcal{H}_c^2$ , que se alcanza dicho volumen cuando

$$(3.6) \quad (h)_{\text{crit.}} = a = \frac{\sqrt{3} \pi}{\mathcal{H}_c}$$

En esencia, así es como se ha procedido en la práctica: se han fijado las dimensiones de la base de acuerdo con (3.6) y la construcción de la pila se ha ido efectuando por capas reticulares aumentando  $h$  hasta alcanzar el valor crítico. Por razones obvias, éste, en realidad, sólo aproximadamente coincide con el dado por (3.6). Dado que  $\mathcal{H}_c$  crece con  $k_\infty$ ,

las dimensiones críticas decrecen cuando aumenta  $k_0$ , aunque no es prudente apartarse excesivamente del valor 1 por lo que se expondrá más adelante.

4.- Estamos ahora ya en condiciones de resolver el problema planteado en (2) y en las hipótesis allí indicadas. Prescindiendo de la condición inicial  $n(x,0) = n_0(x)$ , la solución más general para  $n(x,t)$  resulta por superposición de las componentes  $n_u(x,t)$  correspondientes a los diferentes modos dados por (2.12). Dicha solución será, pues,

$$(4.1) \quad n(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j u_j(x) e^{\gamma_j t},$$

donde  $A_j$  son constantes arbitrarias y  $\gamma_j$  es la constante de crecimiento del modo  $u_j(x)$ , raíz de (2.11) con  $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}_j^2$ . Haciendo en ella  $t = 0$ , el primer miembro debe reducirse a la distribución inicial dada,  $n_0(x)$ , lo que nos da

$$n_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j u_j(x).$$

Pero las funciones  $u_j(x)$ , que forman un sistema completo, son dos a dos ortogonales y normalizadas. Luego

$$\int_D n_0(x) u_m(x) dx = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \delta_{jm} = A_m$$

y, por consiguiente, la solución buscada es

$$(4.2) \quad n(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x) e^{\gamma_j t} \int_D n_0(x') u_j(x') dx'.$$

De (4.2) se deduce que, cualquiera que sea la distribución neutrálica en un instante  $t = 0$ , esta distribución: a) tiende a cero para  $t \rightarrow \infty$  cuando la forma y dimensiones de la pila son tales que el primer valor propio,  $\mathcal{H}_0^2$ , es menor que la constante crítica  $\mathcal{H}_c^2$  (pila subcrítica). Cada uno de los modos, en efecto, tiende exponencialmente a cero cuando  $t$  tiende a infinito; b) tiende al valor  $n(x,t) \sim u_0(x) \int_D n_0(x') u_0(x') dx'$ , independiente del tiempo, para  $t \rightarrow \infty$  cuando  $\mathcal{H}_0^2 = \mathcal{H}_c^2$ , con lo cual  $\gamma_0 = 0$  y  $\gamma_j < 0$  para  $j = 1, 2, \dots$  (pila crítica); c) tiende a infinito para  $t \rightarrow \infty$  cuando  $\mathcal{H}_0^2 > \mathcal{H}_c^2$ , ya que entonces un modo por lo menos, el fundamental, tiende exponencialmente a infinito ( $\gamma_0 > 0$ , pila supercrítica). Las proposiciones a) y b) valen, claro está, sólo para la densidad neutrálica procedente de la densidad inicial, prescindiendo de las densidades esporádicas debidas, por ejemplo, a escisión espontánea o provocada por algún agente exterior (v.g., radiación cósmica).

En cuanto a la densidad factor de moderación, resulta inmediatamente de (4.2) y (2.12):

$$(4.3) \quad q(x,t,\tau) = \frac{k_0}{p\tau_c} \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x) e^{\gamma_j(t-t_0)} e^{-\tau \mathcal{H}_j^2} \int_D n_0(x') u_j(x') dx',$$

Ahora bien,  $u_j(x)$  es función propia del operador laplaciano correspondiente al valor propio  $-\mathcal{H}_j^2$ ,  $e^{\gamma_j t}$  es función propia del operador  $-t \frac{\partial}{\partial t}$  corres-

diente al valor propio  $-t_0 \gamma_j$ . Por lo tanto

$$e^{\tau \Delta} \{u_j(x)\} = e^{-\tau \gamma_j^2} u_j(x), \quad e^{-t_0 \frac{\partial}{\partial t}} \{e^{\gamma_j t}\} = e^{\gamma_j(t-t_0)}$$

lo que permite escribir la solución (4.3) en la forma

$$(4.4) \quad q(x, t, \tau) = e^{\tau \Delta - t_0 \frac{\partial}{\partial t}} \left\{ \frac{k_{\infty}}{\rho} \frac{n(x, t')}{\tau_c} \right\},$$

relación ésta entre  $q(x, t, \tau)$  y  $n(x, t)$  independiente de la distribución neutrónica térmica inicial.

Como aplicación de (4.2), supongamos que  $n_0(x) = \delta(x-x_0)$ , es decir, que en el instante  $t = 0$  existe en la pila un sólo neutrón térmico y precisamente en el punto  $x_0$ . En tal caso

$$n(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x_0) u_j(x) e^{\gamma_j t},$$

puesto que

$$\int_D \delta(x-x_0) u_j(x) dx = u_j(x_0).$$

Para una pila crítica, se tendrá, por consiguiente,

$$n(x, t) = u_0(x_0) u_0(x) + u_1(x_0) u_1(x) e^{\gamma_1 t} + \dots$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} n(x, t) = u_0(x_0) u_0(x) = n(x, \infty).$$

Luego, el número total de neutrones en la pila crítica, al cabo de un tiempo infinito, que resultan del neutrón térmico inicial en  $x_0$  será

$$(4.5) \quad I(x_0) = u_0(x_0) \int_D u_0(x) dx = C u_0(x_0).$$

Este número se llama importancia de la posición  $x_0$  y, dado que  $C$  es una constante, podemos decir que la función importancia,  $I(x)$ , es proporcional a la distribución asintótica en equilibrio:

$$I(x) = C u_0(x) = C \frac{n(x, \infty)}{u_0(x_0)} = C_1 n(x; \infty).$$

Nótese que la importancia de una posición depende de factores físicos y geométricos, ya que se ha definido con relación a una pila crítica. El nombre función importancia está plenamente justificado, puesto que los efectos de la presencia de un sólo neutrón térmico en la pila y en un instante dado, dependen críticamente de la posición del mismo. Así, por ejemplo, si el neutrón se encuentra cerca del contorno, el número total de neutrones en la pila al cabo de un tiempo infinito será extraordinariamente pequeño, dada la anulación de  $u_0(x)$  en el contorno extrapolado.

Consideremos ahora una pila subcrítica en el interior de la cual se ha colocado un foco permanente de neutrones térmicos,  $Q(x)$ . La distribución neutrónica estacionaria,  $n(x)$ , será solución de

$$(L^2 \Delta + k_{\infty} e^{\tau \Delta} - 1) \frac{n(x)}{\tau_c} + Q(x) = 0, \quad [n(x)]_S = 0,$$

como resulta de (2.2) y de (4.4), teniendo en cuenta la presencia de la fuente permanente  $Q(x)$ . Dado que  $[n(x)]_S = 0$ , podemos escribir sin más

$$\frac{n(x)}{\tau_c} = \sum_{j=0}^{\infty} A_j u_j(x)$$

(cf. 2), lo que nos da

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j (-\mathcal{H}_j^2 L^2 + k_{\infty} e^{-\tau \mathcal{H}_j^2}) u_j(x) + Q(x) = 0,$$

de donde, dado que el sistema de las  $u_j(x)$  es un sistema ortogonal (ortogonal y normal),

$$A_j = \frac{\int_D Q(x) u_j(x) dx}{1 + \mathcal{H}_j^2 L^2 - k_{\infty} e^{-\tau \mathcal{H}_j^2}}$$

Ninguno de los denominadores de las expresiones que determinan los coeficientes  $A_j$  es cero, ya que por ser la pila subcrítica son todos ellos positivos (cf. fig. 1). Para fijar ideas, supongamos puntual el foco,  $Q$ , y de intensidad  $Q_0$ , es decir, supongamos  $Q(x) = Q_0 \delta(x-x_0)$  con lo cual

$$A_j = \frac{Q_0 u_j(x_0)}{1 + \mathcal{H}_j^2 L^2 - k_{\infty} e^{-\tau \mathcal{H}_j^2}}$$

La densidad neutrónica estacionaria vale, por lo tanto,

$$\frac{n(x)}{\tau_c} = Q_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j(x_0) u_j(x)}{1 + \mathcal{H}_j^2 L^2 - k_{\infty} e^{-\tau \mathcal{H}_j^2}}$$

Al ir aumentando lentamente las dimensiones de la pila -p.e., al aumentar la altura  $h$  de la pila prismática que antes consideramos  $\rightarrow H$  tenderá a  $H$  y, por consiguiente, cuando  $h \rightarrow (h)_{crit}$  y con ella  $\mathcal{H}_0^2 \rightarrow \mathcal{H}_c^2$ , aumentará  $\frac{n(x)}{\tau_c}$  tendiendo a infinito, aunque no exponencialmente, sino tan sólo como  $1/(h_{crit} - h)$ . Luego, si en función de  $h$  se traza la curva  $1/n = f(h)$ , el valor  $h_{crit}$  se obtendrá extrapolando  $1/n$  hasta el valor cero.

5.- Sea  $n_i(x, t) = A_i u_i(x) e^{\gamma_i t}$  uno de los modos propios de la pila. El número de neutrones térmicos asociados a este modo que escapan de la pila por segundo es

$$F_i = \oint_S \vec{j}_i \cdot d\vec{S} = -D \oint_S \text{grad} n_i \cdot d\vec{S} = -D \int_D \Delta n_i dV = D \mathcal{H}_i^2 \int_D n_i dV$$

y el número de los capturados por segundo en el material de la misma

$$C_i = \int_D \frac{n_i}{\tau_c} dV = \frac{1}{\tau_c} \int_D n_i dV$$

Luego, el número de neutrones térmicos capturados en la pila por neutrón térmico perdido sea por fuga, sea por captura, será

$$(5.1) \quad \frac{C_i}{C_i + F_i} = \frac{1}{1 + L^2 \mathcal{H}_i^2},$$

expresión que, en principio, se refiere esencialmente a cada uno de los modos, aunque en lo que sigue nos limitaremos a la correspondiente al modo fundamental. De ahí resulta que el número de neutrones capturados en uranio por neutrón térmico perdido es (para el modo fundamental)

$$(5.2) \quad f_{esp} = \frac{f}{1 + L^2 \mathcal{H}_0^2}$$

Este parámetro que, en oposición a  $f$ , depende también de la forma y tamaño de la pila a través de  $\mathcal{H}_0^2$ , es el llamado factor de utilización térmica efectiva. Por el propio significado de  $f$  y  $f_{ef}$  se comprende que sea  $f_{ef} < f$ . El factor  $f$  tiene en cuenta tan sólo la pérdida de neutrones térmicos por captura, proceso éste el único que puede provocarla en el caso de una pila infinita. En cambio,  $f_{ef}$  traduce la pérdida de dicha clase de neutrones como resultado de dos procesos en competencia -la captura en la pila y la fuga de neutrones térmicos a través de la superficie que limita la pila finita. Análogas consideraciones valen para el factor  $p$ . Este mide la probabilidad de que, en la pila infinita, el neutrón llegue a térmico salvando las resonancias del  $U^{238}$ . Dado que  $p$  se refiere a una pila de dimensiones infinitas, cabe interpretar  $p$  como probabilidad condicional -esto es, como probabilidad de que el neutrón alcance el umbral térmico escapando a la absorción por resonancia cuando de él se sabe que permanece en la pila. La probabilidad de que esto último ocurra vale la unidad en el caso de la pila infinita, pero dicha probabilidad se reduce a  $e^{-\tau \mathcal{H}_0^2}$  cuando la pila es finita debido a la posibilidad de que el neutrón escape de la misma por difusión a través de la superficie límite. Por consiguiente, la probabilidad de que un neutrón llegue a térmico en la pila es

$$(5.3) \quad p_{ef} = e^{-\tau \mathcal{H}_0^2} p.$$

Finalmente, dado que

$$\frac{1 + \mathcal{H}_0^2 L^2}{\tau_c} = \frac{A + F}{N}, \quad \left( N = \int_D n_0(x) dx \right),$$

es el número de neutrones térmicos que se pierden por segundo y neutrón,

$$(5.4) \quad \tau_{ef} = \frac{\tau_c}{1 + \mathcal{H}_0^2 L^2}$$

es la vida media efectiva de un neutrón térmico en la pila, menor que  $\tau_c$  como debía ser. Conviene no perder de vista que esos valores efectivos tienen sólo sentido con referencia a un modo propio determinado y que si bien  $f$ ,  $p$  y  $\tau_c$  son únicos para una estructura y material dados de la pila, los correspondientes valores efectivos dependen no ya de la forma y tamaño, sino también del modo de que se trate. Claro está, los más interesantes de esos valores efectivos son los vinculados al primer modo. La misma advertencia vale para lo que sigue.

Acabamos de ver que por cada neutrón térmico perdido,  $f_{ef}$  son capturados por el uranio. Estos neutrones originan neutrones rápidos, de los cuales sólo la fracción  $p_{ef}$  consigue llegar al umbral térmico sin ser capturado por el  $U^{238}$  ni escapar de la pila. La cantidad

$$(5.5) \quad k_{ef} = f_{ef} \eta \epsilon p_{ef} = \frac{k_{\infty} e^{-\tau \mathcal{H}_0^2}}{1 + \mathcal{H}_0^2 L^2},$$

el coeficiente de reproducción efectiva, nos da, por lo tanto, el número de neutrones térmicos que se gana por cada neutrón térmico que se pierde. La ganancia neta relativa

$$(5.6) \quad \rho = \frac{k_{ef} - 1}{k_{ef}} = \frac{1}{k_{\infty}} \{ k_{\infty} - (1 + \mathcal{H}_0^2 L^2) e^{\tau \mathcal{H}_0^2} \}$$

es la llamada reactividad de la pila -en rigor, reactividad del modo fundamental de la misma. La reactividad se anula cuando las dimensiones de la pila son las críticas ( $\mathcal{K}_0^2 = \mathcal{K}_c^2$ ) y tiende al valor límite  $(k_{\infty} - 1) : k_{\infty}$  al tender aquéllas a infinito ( $\mathcal{K}_0^2 \rightarrow 0$ ). El concepto de reactividad es quizá el más importante del estudio cinético de una pila conforme se irá viendo.

Indicamos ya que el retardo  $t_0$  debido al tiempo que en promedio necesita un neutrón para llegar a térmico era muy pequeño, del orden de  $10^{-5}$  seg. ( § 2). Por consiguiente, al calcular el valor de la constante de crecimiento relativa al modo fundamental, es decir, la raíz real única de (2.11) para  $\mathcal{K}^2 = \mathcal{K}_0^2$ , podrá prescindirse de los efectos de dicho retardo cuando  $\mathcal{K}_0^2$  es próximo al valor crítico  $\mathcal{K}_c^2$ , con lo que será pequeño  $\gamma_0$ . Además, carece de interés considerar el caso en que las cosas ocurren de otra manera, puesto que de no ser por los neutrones retardados la pila sería por completo incontrolable prácticamente ya para  $\gamma_0 \approx 10^{-4}$ . Resulta así para  $\gamma_0$  el valor

$$(5.7) \quad \gamma_0 = \frac{k_{\infty} e^{-\tau \mathcal{K}_0^2} - (1 + \mathcal{K}_0^2 L^2)}{\tau_c}$$

o bien, introduciendo la reactividad  $\rho$  (5.6),

$$\gamma_0 = \frac{k_{\infty}}{\tau_c} \rho e^{-\tau \mathcal{K}_0^2}$$

Supongamos que, por variación de las condiciones en los límites (prácticamente, retirando de la pila una porción de barra de control) se modifica  $\mathcal{K}_0^2$  y con él  $\rho$  (5.6) partiendo de las condiciones críticas ( $\mathcal{K}_0^2 = \mathcal{K}_c^2$ ,  $\rho = 0$ ) de manera que  $\rho$  pasa del valor cero al valor, digamos,  $\rho = 0,1$ . En tal caso la fórmula anterior nos da para  $\gamma_0$ , dado que  $\tau_c \approx 10^{-3}$  seg,  $k_{\infty} \approx 1,06$  y  $e^{-\tau \mathcal{K}_c^2}$  (cf. 2.1),  $\gamma_0 \approx 100$ ,

es decir, la densidad neutrónica inicial quedaría multiplicada en un segundo por  $e^{100} \approx 1043$ . Ahora bien, es claro que en un momento u otro la pila debe encontrarse en condiciones supercríticas, de otro modo no sería posible aumentar la densidad neutrónica hasta alcanzar el nivel requerido por la potencia a que se desee trabajar. La energía liberada en cada escisión es del orden de 200 MeV; luego, por centímetro cúbico y por segundo, la energía que se produce es del orden de  $200 \cdot \frac{1}{3} \frac{n}{\tau_c} = 6 \cdot 10^4 n$ , en MeV  $\text{cm}^{-3} \text{seg}^{-1}$ , ó 0,96n en ergs  $\text{cm}^{-3} \text{seg}^{-1}$ . La potencia específica es, pues, proporcional a n, y si la pila debe trabajar a un cierto nivel es necesario aumentar n hasta el valor adecuado. Esto es sólo factible manteniendo la pila en condiciones supercríticas durante un cierto tiempo, pero el resultado sería catastrófico si todos los neutrones procedentes de una escisión "nacieran" a la vez como se ha supuesto en el cálculo que precede. Veamos qué modificaciones introduce la presencia de los neutrones retardados.

6.- Es sabido que en la escisión de un núcleo de  $U^{235}$  provocada por un neutrón térmico se emiten, en promedio,  $\nu = 2,5 \pm 0,1$  neutrones. El proceso, en esquema, parece ser el siguiente: al ser capturado el neutrón por el núcleo de  $U^{235}$  se forma el núcleo compuesto  $U^{236}$ , a cuya energía de excitación contribuye el neutrón con los 6,8 MeV correspondientes a su energía de enlace (la contribución de la energía cinética es por completo despreciable, del orden de 1/40 eV). Esta energía es suficiente para salvar la barrera de potencial que separa el estado fundamental del  $U^{236}$  de aquella configuración en la que predomina la repulsión coulombiana y hace posible la es-

cisión en dos fragmentos, barrera cuya altura es del orden de 6 MeV. Es bastante probable que los neutrones emitidos en la escisión procedan en todo caso de estos fragmentos, más bien que liberados a la vez que se separan los dos fragmentos. Dichos neutrones se emiten, en su mayor parte, inmediatamente después de la escisión, pero una cierta fracción,  $\beta$ , de entre ellos se evaporan algo más tarde de los núcleos que aparecen y mueren sucesivamente por desintegración  $\beta^-$  de los dos fragmentos originales. Estos no son iguales, sino que los números de masa más frecuentes son  $A=96$

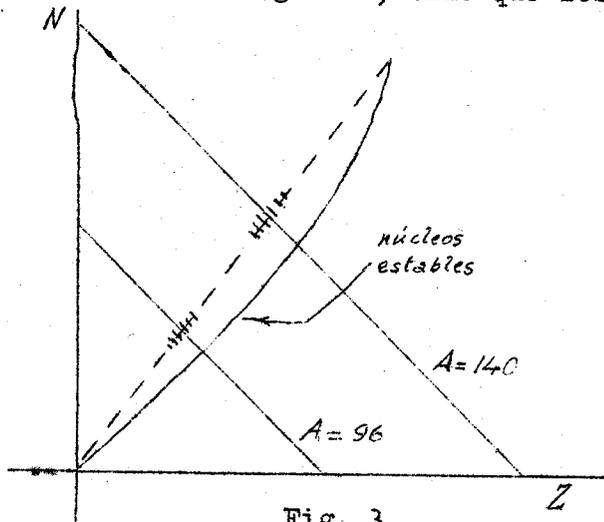
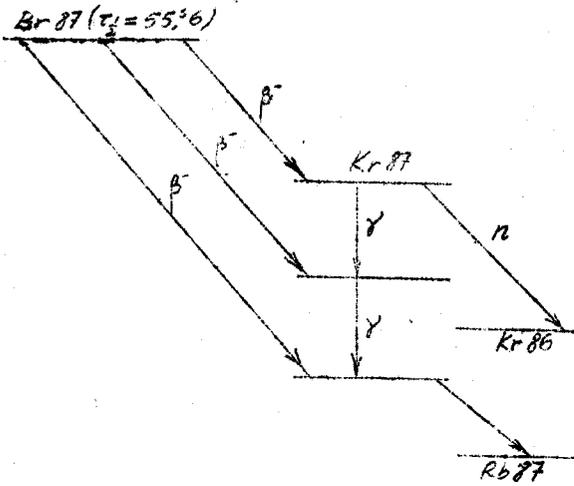


Fig. 3

y  $A=140$ , de lo que resulta que en la escisión de un gran número de núcleos de  $U^{236}$ , los números de masa de los fragmentos resultantes se adensarán en los entornos de dichos valores, (fig. 3). Los correspondientes números de protones son  $Z=38$  y  $Z=44$ , de donde resulta para el número de neutrones en la escisión más probable  $N=58$  y  $N=86$ .

Los indicados valores de  $Z$  corresponden a isótopos de Sr y Xe, respectivamente. Los isótopos Sr y Xe más pesados y estables son el  $Sr^{88}$  y el  $Xe^{136}$ . Por consiguiente los fragmentos más probables contienen, para  $A=96$ , ocho neutrones más y para  $A=140$  cuatro neutrones más de

los correspondientes a los isótopos estables más pesados, con lo cual experimentarán varias desintegraciones  $\beta^-$  en serie hasta alcanzar el número de neutrones y protones que convienen a los núcleos estables dados por el número de masa impuesto. Lo mismo ocurre aun cuando los fragmentos no correspondan a la forma de escisión de probabilidad máxima: su contenido de neutrones será tan elevado con relación al de los isótopos estables, que tenderán a la línea de máxima estabilidad por desintegración  $\beta^-$ . En el curso de ésta puede ocurrir que la transición  $\beta^-$  de uno de esos núcleos de número atómico  $Z$ , por ejemplo ricos en neutrones al estado fundamental del núcleo  $Z + 1$  sea una transición prohibida. En tal caso, el núcleo  $Z + 1$  se produce en un estado excitado y, si la energía de excitación es suficiente, puede transformarse en  $(A - 1, Z + 1)$  evaporando un neutrón. No hay que perder de vista que la energía de enlace de un neutrón a un núcleo con gran exceso neutrónico es relativamente pequeña, lo que facilita dicha evaporación. Pero, por otro lado, conviene tener en cuenta la posibilidad de que la energía de excitación se gaste en la emisión de radiación  $\gamma$ . Sea como fuere, el retardo en la emisión del neutrón por parte del núcleo-fragmento viene determinado por el proceso  $\beta^-$  que conduce al núcleo excitado  $(Z + 1)^*$ . Uno de esos procesos, bastante bien estudiado, se ha representado en la fig. 4. Se refiere a la desintegración  $\beta^-$  de uno de los tipos de fragmentos observados en la escisión, el  $Br^{87}$  (semiperíodo,  $\tau_{1/2} = 55,6$  segundos). La desintegración  $\beta^-$  del  $Br^{87}$  puede conducir: a) al estado fundamental del  $Kr^{87}$ , núcleo que es radioactivo  $\beta^-$  con  $\tau_{1/2} = 74 \text{ min}$  y se transforma así en el núcleo  $Rb^{87}$ , prácticamente estable ( $\tau_{1/2} = 5,8 \cdot 10^{10}$  años); b) a un primer estado excitado de  $Kr^{87}$ , el cual decae mediante un  $\gamma$  alcanzando el estado fundamental; c) a un segundo estado excitado del mismo  $Kr^{87}$ , estado a partir del cual entran en competencia dos procesos, desexcitación por emisión  $\gamma$  hasta el estado considerado en b) y evaporación de un neutrón, evaporación que conduce al elemento estable



Kr86. Este neutrón aparecerá, por lo tanto, unes 80<sup>3</sup>,3 después de formado el Br87 en la escisión.

Se conocen seis tipos de núcleos radioactivos producidos al escindirse el U236 (U235 + neutrón térmico). Sus características, según Hughes, son las indicadas a continuación

$\tau_{1/2}$	Fig. 4	$\lambda = \tau^{-1}$	$\beta_i \cdot 10^4$	$E_0$ (keV)
$55,6 \pm 0,2$	80,3	$1,245 \cdot 10^{-2}$	2.5	$250 \pm 60$
$22,0 \pm 0.2$	31.7	$3,15 \cdot 10^{-2}$	16.6	$560 \pm 60$
$4,51 \pm 0.1$	6.5	0.154	21.3	$430 \pm 60$
$1.52 \pm 0.05$	2.19	0.457	24.1	$620 \pm 60$
$0.43 \pm 0.05$	0.62	1.61	8.5	$420 \pm 60$
0.05	0.072	13.9	2.5	---

En este cuadro  $\lambda$  es la constante de desintegración,  $\beta_i$  la fracción del número total de neutrones resultantes de la escisión que viven como latentes  $\tau_i$  segundos en el núcleo radioactivo de especie  $i$ ,  $E_0$  la energía cinética promedia del neutrón al ser emitido por dicho núcleo. Obsérvese que esta energía es bastante inferior a la correspondiente a los neutrones instantáneos.

7.- Se trata ahora de resolver el problema planteado en el § 2, pero tomando ahora en cuenta el hecho de que no todos los  $\gamma$  neutrones que resultan de una escisión "nacen" simultáneamente. Se conservan, pero, las hipótesis b) y c). Sea  $n(x,t)$  la densidad de los neutrones térmicos,  $n(x,0) = n_0(x)$  la distribución inicial de los mismos. Para simplificar, supondremos, además, que en el instante  $t = 0$  no se han formado todavía neutrones latentes. Dado que constantemente  $n(x,t) = 0$  podemos desarrollar  $n(x,t)$  en serie de funciones propias del operador de Laplace correspondientes a la condición de contorno  $[u]_S = 0$  (cf. § 2). Basta, pues, considerar  $n(x,t)$  en la forma

$$(7.1) \quad n(x,t) = u(x) w(t),$$

es decir, la componente  $u(x)$  de la densidad neutrónica, donde  $u(x)$  es tal que  $\Delta u + H^2 u = 0, [u]_S = 0$ . Haciendo

$$(7.2) \quad N(t) = \int_D n(x,t) dx = w(t) \int_D u(x) dx = Cw(t),$$

sean:

- $Q_i$  = número de núcleos radioactivos de especie  $i$  presentes en la pila en el instante  $t$ ,  
 $\lambda_i$  = constante de desintegración de los núcleos de especie  $i$ ,  
 $P_{ef}^{(i)}$  = probabilidad de que un neutrón retardado emitido por un núcleo de especie  $i$  alcance el umbral térmico en la pila (cf. § 5),  
 $C_i$  = número de núcleos radioactivos de especie  $i$  formados por un neutrón térmico perdido,  
 $k_{ef}^{(0)}$  = neutrones instantáneos que alcanzan el umbral térmico por neutrón térmico perdido,  
 $\tau_{ef}$  = vida media de un neutrón térmico en la pila.

Simples consideraciones de balance nos dan, dado  $N(t)$  es el número total de neutrones <sup>que</sup> térmicos presentes en la pila en el instante  $t$ , las dos ecuaciones fundamentales de la cinemática de la pila:

$$(7.3) \quad \frac{dN}{dt} = \frac{k_{ef}^{(0)} - 1}{\tau_{ef}} N + \sum_{i=1}^m \lambda_i Q_i P_{ef}^{(i)}, \quad (*)$$

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{C_i}{\tau_{ef}} N - \lambda_i Q_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

En efecto,  $k_{ef}^{(0)} N / \tau_{ef}$  es el número de neutrones instantáneos que alcanzan el nivel térmico por segundo,  $N / \tau_{ef}$  es el número de neutrones térmicos que se pierden,  $\lambda_i Q_i$  es el número de núcleos radioactivos de especie  $i$  que mueren por segundo y, por lo tanto,  $\lambda_i Q_i P_{ef}^{(i)}$  es el número de neutrones retardados de especie  $i$  que, por segundo, atraviesan dicho umbral. Finalmente,  $C_i N / \tau_{ef}$  es el número de núcleos radioactivos de especie  $i$  que se forman en la unidad de tiempo.

El sistema (7.3) es un sistema  $m+1$  ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y de primer orden con coeficientes constantes, ya dispuesto en forma canónica. La integral general del mismo resulta por superposición de  $m+1$  integrales particulares que constituyen un sistema fundamental. Entre estas las hay de la forma

$$(7.4) \quad N = e^{\gamma t} \quad Q_i = a_i e^{\gamma t},$$

donde  $\gamma$  y las  $a_i$  son constantes que hay que determinar. La sustitución de (7.4) en las  $m$  últimas ecuaciones (7.3) nos da

$$(7.5) \quad a_i = \frac{\frac{C_i}{\tau_{ef}}}{\lambda_i + \gamma}$$

y llevando los valores (7.4), (7.5) a la primera de las ecuaciones (7.3) se obtiene la ecuación característica

$$(7.6) \quad \gamma = \frac{k_{ef}^{(0)} - 1}{\tau_{ef}} + \frac{1}{\tau_{ef}} \sum_{i=1}^m \frac{C_i \lambda_i}{\lambda_i + \gamma} P_{ef}^{(i)}$$

(\*) Hemos supuesto que  $m$  es el número de especies radioactivas diferentes. En la práctica es, pues,  $m=6$ .

ecuación algebraica de grado  $m + 1$  en  $\mathcal{H}^2$ , cuyas raíces son todas simples y que se discutirá más adelante. Cada una de ellas nos da, a través de (7.5), una solución de la forma (7.4) y es sabido que estas  $m + 1$  integrales particulares son linealmente independientes y constituyen, por lo tanto, un sistema fundamental.

Para fijar ideas, supongamos que se ha adoptado el modelo teoría de la edad-difusión, de acuerdo con lo dicho al empezar este párrafo, prescindiendo del retardo  $t_0$  (cf. § 2), pequeño respecto de los  $\tau_i$ . Merece hacerse notar que el sistema (7.3) es independiente del modelo adoptado, el cual repercute tan sólo en la evaluación de las constantes que aparecen en (7.3) a partir de los datos físico-geométricos relativos a la pila. Se tiene entonces, dado que  $\beta_i$  y  $Q_i$  están asociados a un modo al que va ligado el valor propio  $\mathcal{H}^2$  (cf. § 2),

$$(7.7) \quad k_{ef}^{(i)} = \frac{k_{\infty}(1-\beta) e^{-\tau \mathcal{H}^2}}{1 + \mathcal{H}^2 L^2} = k_{ef}(1-\beta), \quad \tau_{ef} = \frac{\tau_c}{1 + \mathcal{H}^2 L^2}, \quad (cf. \S 5)$$

$$C_i = \frac{k_{\infty} \beta_i}{(1 + \mathcal{H}^2 L^2) p}, \quad p_{ef}^{(i)} = p^{(i)} e^{-\tau^{(i)} \mathcal{H}^2},$$

ecuaciones en las que  $\beta = \sum_{i=1}^m \beta_i$ ,  $\tau^{(i)}$  es la "edad" de un neutrón retardado de especie  $i$  al llegar a térmico, edad que varía con la especie dado que de ésta depende la energía inicial  $E_0^{(i)}$  (cf. § 2, hipótesis b)), y  $p^{(i)}$  la probabilidad de escape a la captura  $(n, \gamma)$  para neutrones de dicha especie en la pila infinita, probabilidad que depende asimismo de la energía inicial, aunque muy poco sensiblemente en nuestro caso dados los valores de tal energía (cf. la tabla del § 6).

Aunque el espectro energético de los neutrones retardados difiere bastante del de los neutrones instantáneos, admitiremos para simplificar que las edades  $\tau^{(i)}$  son sensiblemente iguales a la edad  $\tau$  de los neutrones instantáneos. En cuanto a las  $p^{(i)}$ , con buena aproximación pueden tomarse iguales a la probabilidad  $p$  correspondiente a los neutrones de aquella clase, ya que la captura  $(n, \gamma)$  por el  $U^{238}$  interviene esencialmente muy por debajo de las energías  $E_0^{(i)}$ . En estas condiciones, la ecuación característica (7.6) se puede escribir en cualquiera de las formas equivalentes

$$(7.8) \quad \gamma = \frac{k_{ef}(1-\beta) - 1}{\tau_{ef}} + \frac{k_{ef}}{\tau_{ef}} \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i \lambda_i}{\lambda_i + \gamma}, \quad (a)$$

$$\gamma = \frac{k_{ef} - 1}{\tau_{ef}} - \frac{k_{ef}}{\tau_{ef}} \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i \gamma}{\lambda_i + \gamma}, \quad (b)$$

$$\gamma = \gamma^* - \frac{k_{ef}}{\tau_{ef}} \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i \gamma}{\lambda_i + \gamma}, \quad (c)$$

en la última de las cuales

$$\gamma^* = \frac{k_{ef} - 1}{\tau_{ef}}$$

es la constante de crecimiento, en ausencia de neutrones retardados (tomando las  $\beta_i = 0$ ), correspondiente al mismo modo  $(u, \mathcal{H}^2)$  y para una pila de parámetros y dimensiones iguales a los de la dada. (Cf. (2.11) y (5.5)). La expresión

$$(7.9) \quad Z(\gamma) \equiv \gamma \left\{ 1 + \frac{1}{\tau_{ef}} \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{\lambda_i + \gamma} \right\}$$

se llama impedancia natural de la pila. Sus raíces son los factores de crecimiento de la pila crítica respecto del modo considerado, dado que se tiene en general

$$(7.10) \quad \gamma^* = \frac{k_{ef} - 1}{\tau_{ef}} = \gamma \left\{ 1 + \frac{k_{ef}}{\tau_{ef}} \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{\lambda_i + \gamma} \right\}$$

y el último miembro se reduce a  $Z(\gamma)$  para  $k_{ef} = 1$ . Veremos seguidamente que la mayor algebraicamente de las raíces de la ecuación característica cumple la condición

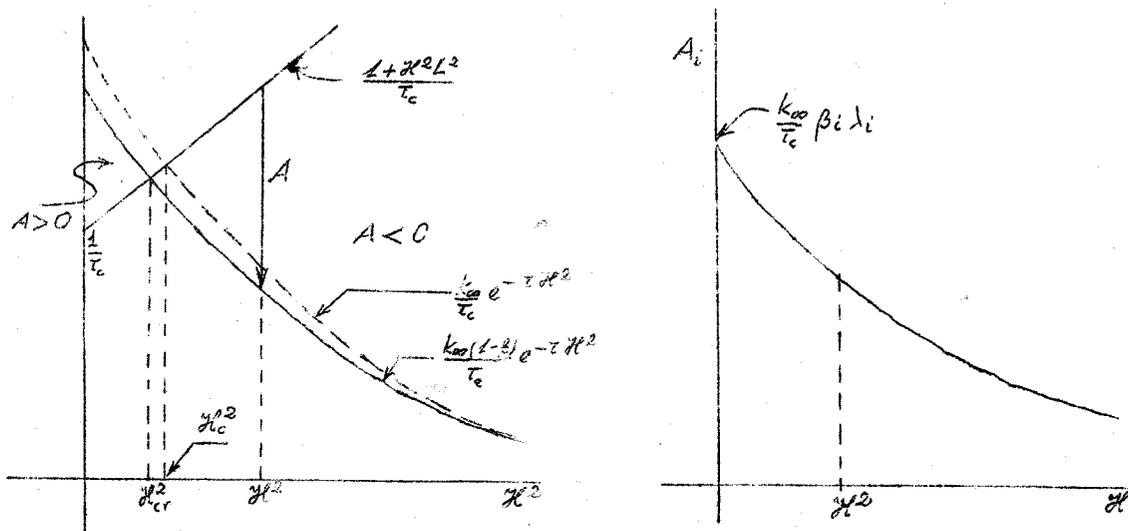
$$\gamma_0 > -\lambda_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

cualquiera que sea su signo. Luego, en virtud de (7.10) t y en cualquier caso será

$$|\gamma^*| > |\gamma_0|,$$

es decir, la densidad neutrónica crece (decrece) más lentamente en realidad de lo que crecería (decrecería) si todos los neutrones nacieran en la escisión a la vez.

8.- Pasemos ahora a la discusión de la ecuación característica (7.8) y, para simplificar la notación, hagamos de momento



Figs. 5 y 6

$$A = \frac{k_{ef}(1-\beta)-1}{\tau_{ef}} = \frac{k_{\infty}(1-\beta)e^{-\tau \mathcal{H}^2} - (1+\mathcal{H}^2 L^2)}{\tau_c},$$

$$A_i = \frac{k_{ef} \beta_i \lambda_i}{\tau_{ef}} = \frac{k_{\infty} e^{-\tau \mathcal{H}^2}}{\tau_c} \beta_i \lambda_i,$$

con lo cual dicha ecuación toma la forma

$$\gamma - A = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{\lambda_i + \gamma}$$

La marcha de los coeficientes A y A<sub>i</sub> en función del valor propio  $\mathcal{H}^2$  - en esencia, en función del tamaño de la pila para una estructura reticular dada - es la indicada cualitativamente en las figs. 5 y 6 ( $k_{\infty} > 1$ ).

Se advierte en ellas que A es negativo para todo valor propio  $\mathcal{H}^2 < \mathcal{H}_{cr}^2$ , donde  $\mathcal{H}_{cr}^2$  es la raíz real única de la ecuación

$$(8.1) \quad k_{\infty}(1-\beta)e^{-\tau \mathcal{H}^2} - (1+\mathcal{H}^2 L^2) = 0,$$

raíz para la cual es A=0. El hecho notable es que A es negativo incluso siendo  $\mathcal{H}^2$  mayor que el valor característico  $\mathcal{H}_c^2$  introducido en (3.2), con tal que se tenga  $\mathcal{H}_{cr}^2 < \mathcal{H}^2 < \mathcal{H}_c^2$ . Las constantes A<sub>i</sub> son positivas para todo valor de  $\mathcal{H}^2$ . Los valores asintóticos (dimensiones de la  $\mathcal{F} \rightarrow \infty$ ) son

$$A \approx \frac{k_{\infty}(1-\beta)-1}{\tau_c}, \quad A_i \approx \frac{k_{\infty}}{\tau_c} \beta_i \lambda_i.$$

Además

$$0 < \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{\lambda_i} \leq \frac{k_{\infty} \beta}{\tau_c}.$$

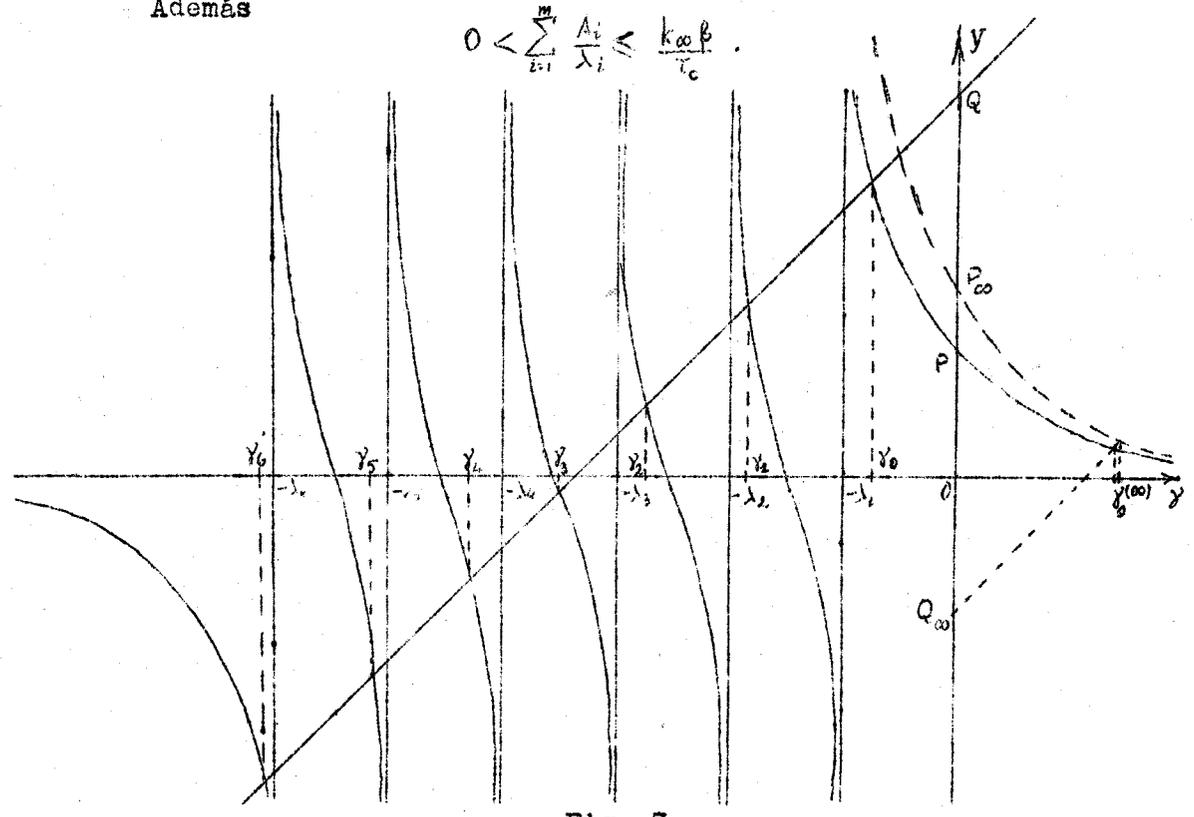


Fig. 7

Esto sentado, las raíces de la ecuación característica son las intersecciones de la recta  $y = \gamma - A$  con la curva  $y = \sum_{i=1}^n A_i / (\lambda_i + \gamma)$ . Esta se hace infinita en los puntos  $\gamma = -\lambda_i$  pasando de  $-\infty$  a  $+\infty$  cuando atraviesa el polo simple  $-\lambda_i$  en sentido creciente. Otras características de la curva se indican en la fig. 7.

Dicha figura pone de manifiesto los siguientes hechos: 1) todas las constantes de crecimiento  $\gamma$  asociadas al valor propio  $\mathcal{H}^2$  son negativas y distintas cualquiera que sea éste, salvo la mayor de entre ellas,  $\gamma_0$ , la cual es mayor que  $-\lambda_1$ ; 2) es negativa (positiva) cuando  $OP < OQ$  ( $OP > OQ$ ); 3) cuando  $\mathcal{H}^2 \rightarrow \infty$  (valor propio de orden muy elevado o pila infinitamente pequeña. Cf., por ejemplo, (3.3)), el punto P tiende al 0 y Q al punto del infinito del eje y; 4) para un valor propio de orden dado y a medida que aumenta el tamaño de la pila, el punto Q se mueve sobre el eje y tendiendo con monotonía al punto  $Q_\infty$  conservándose por encima de él, mientras que el punto P tiende monótonamente al punto  $P_\infty$  conservándose por debajo de él; 5) con el tamaño de la pila, aumenta la constante de crecimiento  $\gamma_0$  y tiende al valor  $\gamma_0^{(\infty)}$  cuando las dimensiones de la pila tienden a infinito.

Las consideraciones y resultados que proceden valen para cualquiera de los valores propios  $\mathcal{H}^2$ . Pero de unas y otros se sigue desde luego que el más importante en lo que concierne al comportamiento temporal de la pila será el menor de ellos, esto es, el valor propio  $\mathcal{H}_0^2$  correspondiente al modo fundamental (Cf. § 3). Atengámonos, pues, a éste y a la constante de crecimiento máxima,  $\gamma_0$ , vinculada a él. La constante  $\gamma_0$  es cero siempre y sólo cuando coinciden los punto P y Q, es decir, cuando

$$k_\infty(1-\beta) e^{-\tau \mathcal{H}_0^2} - (1 + \mathcal{H}_0^2 L^2) + k_\infty e^{-\tau \mathcal{H}_0^2} \beta = 0,$$

o sea

$$(8.2) \quad k_\infty e^{-\tau \mathcal{H}_0^2} - (1 + \mathcal{H}_0^2 L^2) = 0,$$

lo que a su vez implica  $\mathcal{H}_0^2 = \mathcal{H}_c^2$  (cf. (3.2)). Por consiguiente, para  $\mathcal{H}_0^2 < \mathcal{H}_c^2$ ,  $\gamma_0$  es negativa y con ella todas las constantes de crecimiento, tanto las correspondientes al modo fundamental como las asociadas a las restantes valores propios: por sí solo, el mecanismo de reacción en cadena es incapaz de mantener una distribución neutrónica inicial. Esta tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Para  $\mathcal{H}_0^2 = \mathcal{H}_c^2$ , la componente fundamental de la densidad neutrónica es estacionaria, mientras las demás tienden a cero a medida que el tiempo transcurre. Cuando  $\mathcal{H}_0^2 > \mathcal{H}_c^2$ , por lo menos la componente fundamental de la densidad neutrónica tiende a infinito, proporcionalmente a  $e^{\gamma_0 t}$  para grandes valores de t, aunque análogo comportamiento pueden presentar otras componentes. Luego, lo mismo si todos los neutrones nacen simultáneamente en la emisión, como si parte de ellos lo hacen con posterioridad a los demás, la cinemática de la pila está regida esencialmente por la constante físico-estructural  $\mathcal{H}_c^2$  y la constante geométrica  $\mathcal{H}_0^2$ . En particular, la condición que determina el tamaño crítico es la misma en ambos casos:

$$(8.3) \quad \mathcal{K}_c^2 = \mathcal{K}_c^2 \quad \text{o bien} \quad k_{ef} = 1.$$

Este último resultado era de prever: si la pila trabaja en régimen estacionario, poco importa que algunos de los neutrones nazcan más tarde que los restantes, de ahí que el tamaño crítico resulte independiente de la existencia o no existencia de neutrones retardados. No así cuando las condiciones no son estacionarias. Por ejemplo, si las dimensiones de la pila son críticas respecto de los neutrones instantáneos, es decir, si  $k_{ef}^{(0)} = k_{ef} \cdot (1 - \rho) = 1$ , la constante A será cero, el punto Q (fig. 7) coincidirá con el origen y el P se habrá apartado de él. La ecuación característica presentará entonces una raíz positiva - la pila trabajará con un factor de crecimiento positivo algo peligroso (cf. § 10).

Para que quede de manifiesto la influencia de los neutrones retardados, comparemos las constantes de crecimiento máximas,  $\gamma_0$  y  $\gamma_0^*$ , correspondientes, respectivamente, a presencia y ausencia de neutrones retardados y al mismo valor propio fundamental,  $\mathcal{K}_c^2$ . Se tiene, en virtud de (7.8 c)),

$$\frac{\gamma_0^*}{\gamma_0} = 1 + \sum_{i=1}^m \left| \frac{\beta_i}{\lambda_i + \gamma_0} \right| \frac{k_{ef}}{\tau_{ef}}$$

de donde

$$(8.4) \quad \lim_{\mathcal{K}_c^2 \rightarrow \mathcal{K}_c^2} \frac{\gamma_0^*}{\gamma_0} = 1 + \frac{1}{\tau_{ef}} \sum_{i=1}^m \beta_i \tau_i \quad (*)$$

Para la pila de grafito del Laboratorio Nacional de Argonne, es  $\tau_{ef} \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$  seg y como, de acuerdo con los datos de Hughes, es  $\sum \beta_i \tau_i = 92,365 \cdot 10^{-3}$  resulta  $\lim (\gamma_0 / \gamma_0^*) \approx 1,6 \%$ , es decir, para una misma desviación pequeña de  $\mathcal{K}_c^2$  a partir del valor crítico  $\mathcal{K}_c^2$ , la constante de crecimiento real  $\gamma_0$  es sólo el 1,6 % de la que se presentaría de no existir neutrones retardados. La presencia de éstos, por lo tanto, hace la pila controlable con relativa facilidad y permite aumentar la densidad neutrónica con lentitud suficiente de manera que en ningún momento la pila trabaje casi exclusivamente a base de los neutrones instantáneos. Sabemos ya, por otra parte, que este aumentar la densidad es indispensable para obtener un nivel de potencia adecuado (cf. § 5).

9.- Es frecuente presentar la ecuación característica (7.8) en las siguientes formas, más manejables en ocasiones:

$$(9.1) \quad \begin{aligned} k_{ef} &= \frac{1 + \tau_{ef} \gamma}{1 - \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i \gamma}{\lambda_i + \gamma}}, & a) \\ k_{ef} - 1 &= \gamma \left( \tau_{ef} + \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{\lambda_i + \gamma} \right) : \left( 1 - \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i \gamma}{\lambda_i + \gamma} \right), & b) \\ k_{ef} - 1 &= \gamma \left( \tau_{ef} + k_{ef} \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{\lambda_i + \gamma} \right). & c) \end{aligned}$$

(\*) Dado que  $\tau_{ef} = \tau_0 / (1 + \mathcal{K}_c^2 \rho)$ , en (8.4) el valor de  $\tau_{ef}$  es el correspondiente a  $\mathcal{K}_c^2 = \mathcal{K}_c^2$ . Sin embargo, se puede prescindir -y así lo haremos en todo lo que sigue- de la variación de  $\tau_{ef}$  con  $\mathcal{K}_c^2$  cuando éste mantiene en un pequeño entorno de  $\mathcal{K}_c^2$ .

Se advierte en ellas que hay una raíz,  $\gamma_0$ , y sólo una que tiende a cero cuando  $k_{ef} \rightarrow 1$ , es decir, para  $\mathcal{H}_0^2 \rightarrow \mathcal{H}_c^2$ . Por consiguiente, para valores suficientemente pequeños de  $\gamma_0$ ,  $\mathcal{H}_0^2$  es función uniforme de  $\gamma_0$ , y con  $\mathcal{H}_c^2$  lo son  $k_{ef}$  y  $\tau_{ef}$ . De ahí que en el entorno de las condiciones críticas (pequeños valores de  $\gamma_0$ ) se suele caracterizar el comportamiento de la pila por el valor de  $\gamma_0$ , o de su inverso  $T$ , parámetros éstos que tienen a su favor el ser susceptibles de relativamente fácil determinación experimental.

Introduzcamos el período de la pila  $T = 1/\gamma_0$  y las vidas medias  $\tau_i = 1/\lambda_i$  en la última de las ecuaciones (9.1). Resulta así

$$(9.2) \quad \frac{k_{ef} - 1}{k_{ef}} = \frac{\tau_{ef}}{k_{ef}} \frac{1}{T} + \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i \tau_i}{\tau_i + T},$$

de donde, multiplicando por  $T$  ambos miembros y hallando el límite para  $T \rightarrow \infty$ ,

$$(9.3) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} T(k_{ef} - 1) = \lim_{T \rightarrow \infty} T \frac{k_{ef} - 1}{k_{ef}} = \tau_{ef} + \sum_{i=1}^m \beta_i \tau_i = C'_1,$$

ya que, para  $T \rightarrow \infty$ , el coeficiente de reproducción  $k_{ef} \rightarrow 1$ . La ecuación (9.3) nos dice, de una parte, que el exceso de reproducción,  $k_{ef} - 1$ , es asintóticamente proporcional a  $1/T$ .

$$(9.4) \quad k_{ef} - 1 \approx \frac{C'_1}{T}.$$

Por otra parte, dado que la reactividad  $\rho$  se ha definido como ganancia neta relativa (cf. (5.6)),

$$\rho = \frac{k_{ef} - 1}{k_{ef}},$$

resulta de (9.3) que también la reactividad es inversamente proporcional al período  $T$  asintóticamente e igual, asintóticamente, al exceso de reproducción:

$$(9.5) \quad \rho \approx \frac{C'_1}{T}.$$

Teniendo en cuenta los valores arriba citados y para  $T = 3600$  seg resulta para  $\rho$  el valor (¡aproximado!)

$$\rho \approx \frac{C'_1 \cdot 1}{3600} = 2,6 \cdot 10^{-5} = C_1$$

Esta cantidad de reactividad ha recibido en los países anglosajones el nombre de "inhour". Nosotros la llamaremos "aroh". (\*) Conviene tener en cuenta, sin embargo, que  $C_1$  es un número sin dimensiones y que, por lo tanto, sería por completo carente de sentido escribir: reactividad en arohs =  $x$  horas<sup>-1</sup>. Lo que ocurre es que (para grandes valores del período  $T$ ) el número que "mide" la reactividad en arohs coincide con el inverso del número de horas del correspondiente período.

Las ecuaciones (9.4) y (9.5) valen sólo asintóticamente, de mane-

(\*) Existe el precedente:  

$$\text{conductancia} = \frac{1}{\text{resistencia}} = \text{mho} = \frac{1}{\text{ohm}}$$

ra que sólo aproximadamente 1 arón (1 ah) corresponde a un período de una hora, aunque la diferencia es pequeña, del orden de 0,5 %. Si se desea mayor precisión, lo cual es del todo necesario para períodos cortos, se puede adoptar la fórmula (9.2) con  $k_{ef} = 1$  y  $\tau_{ef} = \tau_{ef}$  crítico en el segundo miembro. Resulta así una expresión de la forma

$$(9.6) \rho = \frac{k_{ef} - 1}{k_{ef}} = C_1 \left( \frac{a_0}{T} + \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{T + \tau_i} \right), a_0 = \frac{\tau_{ef} \text{ crítico}}{C_1}, a_i = \frac{\beta_i \tau_i}{C_1}$$

con  $a_0$  y las  $a_i$  constantes. El paréntesis, por lo tanto, mide la reactividad en aróns. Tampoco esta fórmula es exacta, dado que  $a_0$ , en rigor, varía con T en tanto que igual a  $\tau_{ef}/C_1 k_{ef}$ , pero resulta suficientemente aproximada para los valores de T admisibles en la práctica. Este mismo carácter aproximado, a la vez que la dependencia de  $a_0$  respecto de las propiedades físico-estructurales y geométricas de la pila, explica por qué se encuentran en la literatura diferentes versiones de la fórmula (9.6) (inhour equation). Así, según Nordheim,

$$\rho = C_1 \left( \frac{54}{T} + \frac{33}{T+0,7} + \frac{1139}{T+6,5} + \frac{1793}{T+34} + \frac{585}{T+83} \right), C_1 \approx 2,5 \cdot 10^{-5};$$

según Fermi y colaboradores,

$$\rho = C_1 \left( \frac{64}{T} + \frac{245}{T+3,57} + \frac{688}{T+10,1} + \frac{1938}{T+34,5} + \frac{666}{T+83} \right), C_1 \approx 2,5 \cdot 10^{-5};$$

según Hughes y colaboradores,

$$\rho = C_1 \left( \frac{54}{T} + \frac{20,3}{T+0,62} + \frac{204}{T+2,19} + \frac{535}{T+6,5} + \frac{2036}{T+31,7} + \frac{787}{T+80,3} \right), C_1 \approx 2,6 \cdot 10^{-5}$$

Para un cálculo más y más aproximado del exceso de reproducción para un período dado, se puede utilizar la fórmula (9.1.b) como base de un proceso de aproximaciones sucesivas a partir de  $\tau_{ef} = \tau_{ef}$  crítica, proceso que resulta rápidamente convergente.

10.- Es sabido que el control de la pila se efectúa mediante la mayor o menor introducción de barras de un material que actúa como absorbente de neutrones térmicos, material que generalmente es cadmio. La introducción de una barra absorbente modifica las condiciones de contorno. Antes debía ser  $[n] = 0$ , mientras que ahora debe tenerse  $[n]_{S_b} = 0$ , donde  $S_b$  es la superficie de la porción de barra introducida en la pila. Esta condición es más restrictiva que la anterior y, por consiguiente, su efecto sobre los valores propios es aumentarlos respecto de los que corresponden a  $S_b = 0$ . En consecuencia, al introducir la barra en la pila disminuyen la reactividad y todas las constantes de crecimiento sin excepción, tanto más cuanto mayor es la penetración de la barra. Cabría pensar que este efecto puede calcularse simplemente evaluando el número de neutrones térmicos que se absorben en la barra. Pero esta apreciación pseudofísica olvida que la mera presencia de la barra perturba toda la distribución neutrónica, incluso en lo que concierne al número de neutro-

nes que se pierden por difusión a través de la superficie exterior de la pila. El problema es, pues, más complejo y su solución debe buscarse en el cálculo, aunque sea aproximado, de la variación de las  $\beta_i$  con la posición de la barra de control, principalmente la del valor propio fundamental  $\beta_0$ .

La fórmula (7.8)a) pone de manifiesto la contribución de los neutrones instantáneos al valor de la constante de crecimiento. Vimos que esta contribución puede resultar extremadamente peligrosa si es positiva, de donde la condición de seguridad

$$k_{ef}(1-\beta) - 1 < 0,$$

es decir,

$$(10.1) \quad \beta = \frac{k_{ef} - 1}{k_{ef}} < \beta = 7,55 \cdot 10^{-3}.$$

La condición (10.1) nos dice que el exceso de reproducción debe ser menor que el número de neutrones térmicos retardados por neutrón térmico perdido. Numéricamente:

$$(10.2) \quad k_{ef} < 1,00753.$$

La reactividad máxima  $\rho = 7,55 \cdot 10^{-3}$ , es decir, unos 300 arohs, corresponde a un período algo inferior a un segundo.

Conforme hemos indicado repetidas veces, el tamaño de la pila debe ser tal que resulte supercrítica, aunque conservándose  $k_{ef}$  siempre menor que la cota superior (10.2). Es precisamente este exceso de reactividad el que permite elevar la densidad neutrónica hasta el nivel requerido por la potencia que se pretenda producir (o el flujo neutrónico de que se quiera disponer). En sus rasgos esenciales, la puesta en marcha consta de las siguientes fases: Supongamos, para fijar ideas que la pila es crítica cuando las barras de control están por completo introducidas en ella y que  $k_{ef}$  es menor que 1,00753 cuando se han retirado por completo dichas barras, p.e.  $(k_{ef})_{m\acute{a}x} = 1,003$ . Con esto la pila no puede escapar a nuestro control, porque en ningún caso aparecerán constantes de crecimiento superiores a  $1/10 \text{ seg}^{-1}$ , es decir, períodos inferiores a 10 segundos. Si se retiran lentamente las barras de control, la densidad neutrónica aumentará y al alcanzar el nivel a que se desee trabajar se introducirán aquéllas nuevamente a fin de restablecer las condiciones críticas. Con esto, en general, la densidad bajará algo por debajo de dicho nivel, lo que exigirá retirar de nuevo ligeramente las barras, y así sucesivamente hasta llegar al nivel correcto.

11.- Quanto venimos diciendo se refiere a uno de los modos, cualquiera, de la densidad neutrónica, aunque por el papel que representa en la cinemática de la pila nos hayamos limitado a menudo a considerar el modo fundamental. Es menester ahora superponer todos estos modos a fin de satisfacer las condiciones iniciales, (cf. § 7). Antes, pero, hay que particularizar la solución general del sistema (7.3). Esta se escribe

$$(11.1) \quad \begin{aligned} N(t) &= \sum_{k=0}^m \alpha_k e^{\lambda_k t}, \\ Q_i(t) &= \frac{c_i}{\tau_{ef}} \sum_{k=0}^m \frac{\alpha_k}{\lambda_i + \lambda_k} e^{\lambda_k t}, \end{aligned}$$

en virtud de (7.4) y (7.5) y donde  $\gamma_k$  son las  $m+1$  raíces reales y distintas de la ecuación característica (7.6) o (7.8). Dado que el sistema (7.3) es lineal y homogéneo y que para  $t=0$  debe ser  $Q_i = 0$  -por la supuesta ausencia de neutrones latentes en el instante  $t=0-$ , cabe normalizar  $N$  de forma que  $N(0) = 1$ . Las  $m+1$  condiciones iniciales así fijadas nos dan el sistema de  $m+1$  ecuaciones lineales

$$(11.2) \quad \begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^m \alpha_k, \\ 0 &= \sum_{k=0}^m \frac{\alpha_k}{\lambda_i + \gamma_k}, \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

del que resulta, tras un cálculo algo laborioso,

$$(11.3) \quad \alpha_k = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{(\lambda_i + \gamma_k)^2}} \quad (k = 0, 1, \dots, m)$$

con  $A_i = \frac{k_{\infty} e^{-\tau \lambda_i^2}}{\beta \lambda_i}$  (cf. §7). Por consiguiente, la función  $w(t)$  de (7.1) y (7.2) será

$$(11.4) \quad w(t) = \frac{N(t)}{C} = \frac{1}{C} \sum_{k=0}^m \alpha_k e^{\gamma_k t},$$

con  $\alpha_k$  dado por (11.3). Luego, el modo  $n_j(x, t)$  correspondiente a la función propia  $u_j(x)$  será

$$n_j(x, t) = \frac{u_j(x)}{C_j} \sum_{k=0}^m \alpha_k^{(j)} e^{\gamma_k^{(j)} t}$$

y la solución buscada  $n(x, t)$  resultará de la superposición de todos estos modos:

$$n(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j u_j(x) \sum_{k=0}^m \alpha_k^{(j)} e^{\gamma_k^{(j)} t}.$$

La condición inicial  $n(x, 0) = n_0(x)$  nos da entonces, teniendo en cuenta (11.2),

$$n_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j u_j(x)$$

de la que se sigue

$$A_j = \int_D n_0(x) u_j(x) dx.$$

Por lo tanto, queda en definitiva

$$(11.5) \quad n(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x) \int_D n_0(x') u_j(x') dx' \sum_{k=0}^m \alpha_k^{(j)} e^{\gamma_k^{(j)} t}.$$

La relación (11.4) nos dice que el comportamiento temporal de cada uno de los modos está regido por una combinación lineal de exponenciales, una de las cuales corresponde a los neutrones instantáneos y las

restantes una a cada tipo de núcleo radioactivo resultante en la escisión. Dicho comportamiento es común a todos los modos asociados a un mismo valor propio  $\lambda_j^2$ , como es patente en (11.3) y (7.8). Si el modo fundamental es estacionario, es decir, si  $\gamma_0^{(0)} = 0$ , todas las restantes constantes de crecimiento,  $\gamma_k^{(j)}$ , son negativas y la expresión asintótica (para grandes valores de  $t$ ) de la densidad neutrónica será

$$n(x, t) \approx \frac{1}{1 + \frac{k_{ef} e^{-\tau \lambda_0^2}}{\tau_c} \sum_{i=1}^m \beta_i \tau_i} u_0(x) \int_D n_0(x') u_0(x') dx'$$

1/60 aproximadamente del valor asintótico que se obtendría para una misma distribución inicial y en el supuesto de que todos los neutrones fuesen instantáneos.

Finalmente haremos notar que (11.3) pone de manifiesto otra causa del aumento de la densidad neutrónica cuando  $k_{ef} > 1$ . Vimos que cuando  $k_{ef}$  es mayor que la unidad para el modo fundamental, la pila es divergente respecto de este modo (es decir,  $\gamma_0^{(0)} > 0$ ) y que la constante de crecimiento  $\gamma_0^{(0)}$  aumenta monótonamente con la reactividad. Pero es que, además, también el peso  $\alpha_0^{(0)}$  de la correspondiente exponencial

$$\alpha_0^{(0)} = \left( 1 + \frac{k_{ef} e^{-\tau \lambda_0^2}}{\tau_c} \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i \lambda_i}{(\lambda_i + \gamma_0^{(0)})^2} \right)^{-1}$$

crece evidentemente con  $\gamma_0^{(0)}$ . Luego, al aumentar la reactividad a partir del valor cero la componente divergente de  $n(x, t)$  aumenta por el doble motivo de crecer la correspondiente constante  $\gamma_0^{(0)}$  de la exponencial y de crecer el coeficiente  $\alpha_0^{(0)}$  de la misma.

---

Madrid, mayo de 1951.

## B I B L I O G R A F I A

- 1.- A.E.C.  
Nuclear data for low-power research reactors.  
(4 de diciembre de 1950)  
Information concerning low-power research re-  
actors. (24 de noviembre de 1950)
- 2.- H.C. ANDERSON, E. FERMI, A. WATTENBERG, G.L. WEIL,  
W.H. ZINN.  
Phys. Rev., 72, 16 (1947)
- 3.- E. FERMI  
Nuclear Physics. (Chicago Univ. Press, 1950)
- 4.- F.L. FREEDMANN  
Elementary pile theory. (Goodman, I, Cap. 5)
- 5.- C. GOODMAN  
Science and engineering of nuclear power.  
(M.I.T., Addison-Wensley, 1947-49, dos vol.)
- 6.- D.J. HUGHES, J. DABBS, A. CAHN, D. HALL  
Phys. Rev., 72, 16 (1947)
- 7.- H. HURWITZ, Jr.  
A.E.C.D.- 2438
- 8.- PLUTONIUM PROJECT  
Rev. of Mod. Phys., 18, 513 (1946)
- 9.- H.D. SMYTH  
Atomic energy for military purposes. (Rev. of  
M<sub>o</sub>d. Phys., 17, 351 (1945))
- 10.- H. SOODAK  
Pile kinetics. (Goodman, II, Cap. 8)  
Elementary pile theory. (J. Wiley & Sons, 1950)
- 11.- E.P. WIGNER  
Journ. Appl. Phys., 17, 857 (1948)