

Sobre la variancia de las magnitudes en el formalismo canónico

por

R. Ortiz Fornaguera

(PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. JOSÉ M.^a OTERO NAVASCUÉS)

El carácter covariante de las ecuaciones fundamentales de una teoría general de los campos exige la determinación previa de la variancia de las magnitudes que en ella intervienen. El objeto de este artículo, primero de una serie, es precisamente fijar el de las que se encuentran en el formalismo canónico. Se demuestra, además, que este formalismo no implica necesariamente la introducción de una métrica ni aun la de una conexión de tipo afin. El formalismo canónico queda subordinado simplemente a la elección de un campo de vectores contravariantes no tangentes a determinadas variedades n -dimensionales. Dicho campo es, por lo demás, completamente arbitrario.

1. Sea $\psi^\alpha(x)$ un campo definido con relación a un sistema de coordenadas (x) en una variedad X_{n+1} de $n + 1$ dimensiones considerada en sí. No es necesario suponer por el momento que X_{n+1} posea una estructura; es decir, X_{n+1} constituye un espacio amorfo. En cambio, por lo que toca a las componentes ψ^α del campo, hacemos la hipótesis de que en cada punto $P \in X_{n+1}$ el campo es base de una representación lineal homogénea de grado ν del grupo de las transformaciones afines en el espacio E_{n+1} tangente a X_{n+1} en P que conservan el punto P . Con otras palabras, si en el punto P pasamos del sistema de referencia local $R(P)$ en el que las componentes del campo son $\psi^\alpha(P)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, \nu$), al sistema de referencia $R'(P)$ definido por los nuevos vectores de base $\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_k a^k_i$, a^k_i ($\|a^k_i\| \neq 0$), las nuevas componentes ψ'^β son funciones lineales y homogéneas de las ψ^α , y recíprocamente:

$$\psi^\alpha = A^\alpha_\beta \psi'^\beta, \quad \psi'^\beta = B^\beta_\alpha \psi^\alpha, \quad [1]$$

donde los coeficientes A^a_{β} de la matriz de transformación no singular son funciones de los coeficientes a^k_i y B^{β}_a son los coeficientes de la matriz (B) inversa de la (A). En particular, cuando en X_{n+1} se efectúa una transformación de coordenadas regular

$$x^i = x^i(x'^0, \dots, x'^n), \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad [2]$$

ésta induce en las referencias locales $R[P; (x)]$ asociadas al sistema de coordenadas (x) el cambio

$$a^i_{\cdot k}(x') \equiv \partial'_{\cdot k} x^i, \quad b^i_{\cdot k}(x) \equiv \partial_{\cdot k} x'^i \quad (1)$$

y, por lo tanto, se obtiene un campo de transformaciones lineales $A^a_{\beta}(x')$, $B^{\beta}_a(x)$ entre las componentes $\psi^a(x)$ y sus transformadas $\psi'^{\beta}(x')$ vinculado a [2].

Sentado esto, admitamos que las ecuaciones del campo $\psi^a(x)$ derivan de un principio de *extremum*, y sea

$$W = \int_D^{(n+1)} \mathcal{L}(x^i, \psi^a, \psi^a_{\cdot k}) dx \quad (\psi^a_{\cdot k} \equiv \partial_{\cdot k} \psi^a) \quad [3]$$

la integral de acción. En ella, $dx \equiv dx^0 dx^1 \dots dx^n$ es una capacidad escalar y W , en tanto que magnitud no localizada en un espacio amorfo, debe ser un escalar si pretendemos que no dependa del sistema de referencia adoptado. Por lo tanto \mathcal{L} es necesariamente una densidad escalar—la densidad de acción lagrangiana. D es un dominio arbitrario del X_{n+1} limitado por una hipersuperficie σ , suficientemente regular como para que tengan sentido las operaciones que efectuaremos. De acuerdo con la notación de Roberts [1], llamaremos S a la superficie σ una vez dotada de un sistema de coordenadas curvilíneas u^1, \dots, u^n , es decir, a la superficie σ una vez *parametrizada*. En lo que sigue convendrá también distinguir dos tipos de transformacio-

(1) $\partial_k(\sigma \partial'_k)$ es el operador de derivación parcial respecto de x^k (σx^k); $\frac{\partial}{\partial x^k}$ es el operador de derivación total respecto de x^k . Un operador difiere del otro únicamente cuando se aplican a funciones compuestas.

nes, las transformaciones [2] de coordenadas, en el espacio ambiente de σ y las transformaciones regulares

$$u^r = u'^r(u'^1, \dots, u'^n) \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad [4]$$

de coordenadas curvilíneas en σ . El comportamiento tensorial de las diferentes magnitudes es distinto, por lo general, según se trate de unas u otras transformaciones. En el caso de las transformaciones [2], la variancia de los diferentes entes se llamará variancia- x ; en el caso de las transformaciones [4], variancia- u .

La variancia- x de la densidad \mathcal{L} está bien definida: es la variancia típica de las densidades escalares

$$\mathcal{L}(x^i, \phi^a, \psi^a_k) = \Delta' \mathcal{L}'(x'^i, \psi'^a, \phi'^a_k), \quad [5]$$

donde

$$\Delta' \equiv \frac{\partial(x'^0, \dots, x'^n)}{\partial(x^0, \dots, x^n)} = \frac{1}{\Delta} \quad [6]$$

es el jacobiano de la transformación inversa de la [2], igual al recíproco del jacobiano de ésta. No ocurre así en el caso de las componentes derivadas ψ^a_k . En efecto, de [1] se deduce como ley de transformación de éstas

$$\psi^a_i = A^\alpha_\beta b^k_i \psi'^\beta_k + \partial_i A^\alpha_\beta \psi'^\beta, \quad [7]$$

$$\psi'^\beta_k = B^\beta_\alpha a^i_k \psi^a_i + \partial'_k B^\beta_\alpha \psi^a. \quad [7']$$

O sea, en un cambio de coordenadas (x) , las componentes derivadas ψ^a_k no se transforman entre sí salvo en el caso de que los elementos de matriz A^α_β —y por ende los de la matriz inversa B^β_α —sean constantes.

2. Calculemos ahora la variación δW de la integral de acción W para una variación infinitesimal (deformación) del dominio de integración D y una variación infinitesimal arbitraria de las componentes del campo. En este proceso permanece fijo el sistema de coordenadas en X_{n+1} . Si aquellas variaciones son, respectivamente,

$$x^i \rightarrow x^i + \varepsilon v^i(x) \equiv \tilde{x}^i, \quad \phi^a(x) \rightarrow \phi^a(x) + \varepsilon \eta^a(x) \equiv \tilde{\phi}^a(x) \quad [8]$$

en las que ε es el parámetro infinitesimal de variación, un cálculo ya clásico conduce a la variación primera de $W^{(2)}$

$$\begin{aligned} \delta W &= \varepsilon \int_D \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha} \eta^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha_{,i}} \partial_i \eta^\alpha \right) dx + \varepsilon \oint_S \mathcal{L} \sigma_i v^i du \\ &= \varepsilon \int_D \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha_{,i}} \right) \right\} \eta^\alpha dx + \varepsilon \oint_S \left(\mathcal{L} \sigma_i v^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha_{,i}} \sigma_i \eta^\alpha \right) du, \end{aligned} \quad [9]$$

en la que $\sigma_i du$ es la componente i de la capacidad vectorial covariante- x que define un elemento de hipersuperficie de $S^{(3)}$. De las diferentes magnitudes que aparecen en [9], respecto de las transformaciones [2] η^α es cogrediente de ψ^α , y ambos están localizados en un mismo punto x y v^i es un vector contravariante, asimismo localizado en x , en tanto que εv^i es una deformación infinitesimal⁽⁴⁾. Por lo que concierne a la expresión

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^\alpha} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha_{,i}} \right), \quad [10]$$

en la que se reconoce desde luego la derivada variacional parcial respecto de ψ^α de W considerada como funcional de las componentes del campo ψ , es fácil ver ya en [9] que es una densidad contragrediente- x respecto de las ψ^α . Finalmente, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha_{,i}}$ es un ente de variancia mixta

$$\mathcal{P}^i_{,\alpha} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\delta \psi^\alpha_{,i}} \quad [11]$$

con el carácter de una densidad contragrediente respecto de ψ^α y contravariante con relación al índice i . Es claro que todas esas mag-

(2) Cf., por ejemplo, el excelente artículo de E. L. HILL, *Rev. of Mod. Phys.*, 23, 253 (1951).

(3) SCHOUTEN, pág. 95 y ss.

(4) Cf., por ejemplo, ORTIZ FORNAGUERA, [1], pág. 594.

nitudes son por completo independientes de la parametrización S de σ , es decir, escalares- u . En cambio σ_i , que es una capacidad vectorial covariante- x , depende esencialmente de la parametrización. Basta para verlo efectuar en la integral de superficie que aparece en [9] una transformación [4]. Se tiene entonces

$$\sigma_i du = \sigma'_i du',$$

esto es,

$$\sigma_i = \frac{\partial(u'^1, \dots, u'^n)}{\partial(u^1, \dots, u^n)} \sigma'_i = \frac{1}{\Delta_u} \sigma'_i \quad [12]$$

lo que prueba que cada componente σ_i es una densidad escalar- $u^{(5)}$. Las $n + 1$ cantidades σ_i no sólo dependen, pues, de la hipersuperficie σ base de S por cuanto definen el hiperplano tangente a σ en el punto P en que se las considere respecto de la referencia local $R(P)$, sino que para P fijo en σ y σ fija cada una de ellas varía con las transformaciones [4] de acuerdo con [12].

Volviendo a las magnitudes [10] y [11], es fácil comprobar directamente lo dicho acerca de su variancia sin necesidad de acudir a [9]. Así por ejemplo, de [5] y [7'] se deduce sin más

$$\mathcal{P}^i_{\alpha} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{\alpha}_i} = \Delta' \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi^{\beta}_k} \frac{\partial \psi^{\beta}_k}{\partial \phi^{\alpha}_i} = \Delta' B^{\beta}_{\alpha} a^{i,k} \mathcal{P}'^{k'}_{\beta}.$$

Ligeramente más complicado es el cálculo para $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{\alpha}}$. Derivando en [5] se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{\alpha}} &= \Delta' B^{\beta}_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^{\beta}} + \Delta' \partial'_k B^{\beta}_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^{\beta}_k}, \\ \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{\alpha}_i} \right) &= \Delta' B^{\beta}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{i,k}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^{\beta}_k} \right) + \Delta' \partial'_k B^{\beta}_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^{\beta}_k} \end{aligned} \quad [13]$$

sin más que utilizar la fórmula de derivación de determinantes

$$\partial'_k \Delta = \Delta b^{m,i} \partial'_k a^{i,m} = \Delta b^{m,i} \partial'_m a^{i,k}$$

(5) Roberts, en cambio, dice erróneamente que σ_i (N_{μ} en su notación) es una densidad *vectorial* para transformaciones de las u^{μ} , en abierta contradicción con [12]. (ROBERTS, [1], pág. 131.)

y la relación

$$\Delta' = \Delta^{-1}$$

De [13] se sigue inmediatamente

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^a} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^a} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^a_{,i}} \right) = \Delta' B^{\beta}_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi'^{\beta}},$$

como queríamos demostrar. Es sabido que las ecuaciones del campo son precisamente, en la forma de Lagrange, las que resultan de igualar a cero $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^a}$, esto es, recordando [11],

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^a} - \frac{\partial}{\partial x^i} \mathcal{P}^i_a = 0. \quad [14]$$

3. Y se plantea ahora un punto delicado que pasó por alto a algunos autores. Hasta aquí ninguna necesidad hubo de hacer hipótesis acerca de la estructura del espacio X_{n+1} . El formalismo es por completo covariante en cualquier caso. Pero supongamos que se trata de comparar por diferencia las componentes variadas $\bar{\psi}^a$ correspondientes al punto variado \bar{x} con las componentes iniciales ψ^a en el punto inicial x . El razonamiento que se suele hacer es el siguiente: sea

$$\varepsilon \zeta^a(x) \equiv \bar{\psi}^a(\bar{x}) - \psi^a(x). \quad [15]$$

De [8] se deduce

$$\bar{\psi}^a(\bar{x}) = \psi^a(\bar{x}) + \varepsilon \eta^a(\bar{x}) = \psi^a(x) + \varepsilon \left\{ \psi^a_{,k}(x) v^k(x) + \eta^a(x) \right\},$$

salvo infinitésimos de orden superior al primero en ε . Por lo tanto

$$\zeta^a(x) = \eta^a(x) + \psi^a_{,k}(x) v^k(x). \quad (6) \quad [16]$$

El error consiste en que carece de todo sentido en una teoría covariante comparar directamente dos magnitudes $\bar{\psi}^a(\bar{x})$ y $\psi^a(x)$ localizadas en puntos distintos, \bar{x} y x . Ahora bien, si pretendemos realizar aquella comparación, debemos poseer una ley que nos permita

(6) Cf. WEISS, [1], pág. ???; [2], pág. 105, y ROBERTS, [1], pág. 131.

trasladar una cualquiera de las dos magnitudes al punto de aplicación de la otra y entonces, referidas ya al mismo sistema local de coordenadas, efectuar la comparación. Por consiguiente, es menester contar con una ley de transporte paralelo, por lo menos para las componentes del campo. O con otras palabras, es necesario que el espacio X_{n+1} posea una estructura afín con relación a las ψ^α como mínimo.

Admitamos, pues, que en X_{n+1} se ha definido una ley de traslación para las componentes del campo

$$\overset{*}{\psi}^\alpha(x + \delta x) = \psi^\alpha(x) - \Lambda_{\beta k}^\alpha \psi^\beta \delta x^k, \quad [17]$$

donde $\overset{*}{\psi}^\alpha(x + \delta x)$ son las componentes del campo en x trasladadas al punto $x + \delta x$. En estas condiciones podemos formar con pleno sentido el ente cogrediente respecto del campo ψ^α

$$\varepsilon \zeta^\alpha(x) = \overset{*}{\psi}^\alpha(x) - \psi^\alpha(x), \quad [18]$$

expresión en la que $\overset{*}{\psi}^\alpha(x)$ es el traslado a x de $\bar{\psi}^\alpha(\bar{x})$ de acuerdo con la ley de traslación [17]. Salvo infinitésimos de orden superior al primero, [18] equivale a

$$\begin{aligned} \varepsilon \zeta^\alpha(x) &= \bar{\psi}^\alpha(x) - \psi^\alpha(x) + \Lambda_{\beta k}^\alpha \psi^\beta(x) \delta x^k \\ &= \varepsilon \eta^\alpha(x) + \delta x^k \nabla_k \psi^\alpha(x), \end{aligned}$$

es decir, en vez de [16] obtenemos

$$\zeta^\alpha(x) = \eta^\alpha(x) + v^k \nabla_k \psi^\alpha, \quad [19]$$

en la que $\nabla_k \psi^\alpha$ es la derivada covariante asociada a la ley de traslación [17]. La ecuación [19] difiere de la [16] por la sustitución de $\psi_{,k}^\alpha$ —que carece de variancia (cf. ec. [7])—por la derivada absoluta $\nabla_k \psi^\alpha$.

Sustituyendo $\eta^\alpha(x)$ por su valor deducido de [19] en la integral sobre la frontera S de D que aparece en [9], resulta:

$$\delta W = \varepsilon \int_D \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^\alpha} \eta^\alpha dx + \varepsilon \oint_S^{(n)} (\mathcal{T}_{,k}^i v^k + \mathcal{P}_{,a}^i \zeta^a) \sigma_i du \quad [20]$$

en la que

$$\mathcal{G}^i_k = \mathcal{L} \delta^i_k - \mathcal{P}^i_a \nabla_k \phi^a \quad [21]$$

es una densidad tensorial mixta de segundo orden. Es claro que, por el contrario, el ente definido por Weiss

$$\mathcal{U}^i_k = \mathcal{L} \delta^i_k - \mathcal{P}^i_a \phi^a_k \quad [22]$$

(cf. Weiss [2], pág. 106, ec. [3.5]) no es, *en general*, un tensor. En efecto, las leyes de transformación de \mathcal{L} y \mathcal{P}^i_a y las ecuaciones [7] permiten escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^i_k &= \Delta' a^i_m b^j_k (\mathcal{L}' \delta^m_j - \mathcal{P}'^m_\beta \psi^{\beta}_j) - \Delta' B^{\beta}_a \partial_k A^a_\gamma a^i_m \mathcal{P}'^m_\beta \psi'^\gamma \\ &= \Delta' a^i_m b^j_k \mathcal{U}'^m_j - \Delta' B^{\beta}_a \partial_k A^a_\gamma a^i_m \mathcal{P}'^m_\beta \psi'^\gamma, \end{aligned}$$

relación que pone de manifiesto la existencia, en general, de una parte parásita—el segundo término del segundo miembro. Esta desaparece en el caso de un espacio plano referido a coordenadas cartesianas generales, pero entonces $\mathcal{G}^i_k = \mathcal{U}^i_k$. Dado que las ecuaciones del campo [14] adoptan la misma forma en cualquier sistema de coordenadas, en el ente \mathcal{U}^i_k definido por [22] *en cada uno de ellos* cumple en cualquier caso la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \mathcal{U}^i_k = \partial_k \mathcal{L} \quad [23]$$

ya que ésta es consecuencia de [14]. En efecto, de [22] se sigue

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \mathcal{U}^i_k = \partial_k \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} \phi^a_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a_i} \partial_k \phi^a_i - \phi^a_k \frac{\partial}{\partial x^i} \mathcal{P}^i_a - \mathcal{P}^i_a \partial_i \phi^a_k,$$

ecuación que se reduce a [23] en virtud de las ecuaciones del campo y de ser

$$\partial_k \phi^a_i = \partial_i \phi^a_k.$$

En particular, si \mathcal{L} no depende explícitamente de las coordenadas, en cada sistema se «conservará» \mathcal{U}^i_k , esto es, en cada sistema será

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \mathcal{U}^i_k = 0.$$

Pero no hay que perder de vista que las componentes \mathcal{U}^i_k individualizan un objeto físico distinto del determinado con relación al sistema (x') por

$$\mathcal{U}^i_k = \mathcal{L}^i \delta^i_k - \mathcal{P}^i_a \psi'^a_k.$$

4. De [2] y [14] se deduce que la condición de que $\psi^z(x)$ satisfaga las ecuaciones del campo y la condición de hallar un sistema de funciones $\psi^z(x)$ tales que, para todo D y cualquier $\eta^z(x)$, sea

$$\delta W = \oint_S^{(n)} (\mathcal{G}^i_k v^k + \mathcal{P}^i_a \psi^a) \sigma_i d u, \quad [24]$$

son condiciones equivalentes. Puesta esta última en la forma

$$\delta W = \oint_S^{(n)} (\mathcal{G}^i_k \delta x^k + \mathcal{P}^i_a \delta \psi^a) \sigma_i d u,$$

permite reconocer en

$$s_k = \sigma_i \mathcal{G}^i_k, \quad \pi_\alpha = \sigma_i \mathcal{P}^i_\alpha \quad [25]$$

las derivadas funcionales de la acción W considerada como funcional de la frontera S—es decir, de las $x^k(u)$ —y de las ψ^z sobre S. Pero adviértase que $\delta \psi^a$ es la variación de ψ^a en la *hipersuperficie deformada* una vez trasladada dicha variación al punto inicial de la hipersuperficie sin deformar. La propiedad antes indicada de que gozan s_k y π_α , conduce a Weiss a definir como pares de variables conjugadas a los pares (s_k, x^k) y (π_α, ψ^a) .

En cuanto al carácter tensorial de s_k y π_α , [25] nos dice que s_k es un vector covariante- x y que π_α es meramente contragrediente respecto de ψ^a . Tanto una como otra son funciones de punto, porque tal son \mathcal{G}^i_k y \mathcal{P}^i_a , y de la orientación definida por σ_i . Pero hay más; s_k y π_α no sólo dependen de la orientación de la hipersuperficie σ en el punto considerado, sino también de la parametrización de σ , es decir, s_k y π_α dependen del punto y de la hipersuperficie parametrizada S que pase por éste. La fórmula [12] nos dice que al efectuar una transformación en las u^r , s_k y π_α cambian de acuerdo con

$$s_k = \sigma_i \mathcal{G}^i_k = \Delta'_\mu \sigma'_i \mathcal{G}^i_k = \Delta'_\mu s'_k$$

y análogamente

$$\pi_a = \Delta'_u \pi'_a.$$

Por lo tanto, con relación a las transformaciones- u cada componente de s_k y de π_x es una densidad escalar.

Pasemos ahora a considerar los sistemas locales de referencia subordinados en σ a las coordenadas curvilíneas S . La hipersuperficie σ considerada en sí constituye un espacio de n dimensiones. Si $x^i = x^i(u^r)$ son las ecuaciones paramétricas de S en el espacio ambiente X_{n+1} , es claro que los vectores u_r linealmente independientes y en número de n definidos respecto de $R[P; (x)]$ por las igualdades

$$u_r = e_i a^i_{,r}(u), \quad [26]$$

en las que $a^i_{,r}(u) \equiv \frac{\partial x^i}{\partial u^r}$, son tangentes a σ en el punto $P \equiv x(u)$.

Dichos vectores constituyen, pues, una referencia local $R_s[P; (u)]$ en el punto P para la variedad σ de n dimensiones. Pero no menos claro es que para ampliar $R_s[P; (u)]$ hasta conseguir un sistema de referencia local para el espacio ambiente X_{n+1} , es menester asociar a cada punto $P \in \sigma$ un vector contravariante linealmente independiente de los vectores u_r que corresponden a dicho punto, es decir, un elemento extraño a la variedad σ . En realidad, se trata del mismo problema que se plantea cuando de una función $F(x)$ se conocen sus valores sobre una hipersuperficie σ . Dado $F^*(u) \equiv F[x(u)]$, se conocen todas las derivadas interiores de la función $F(x)$ sobre σ , pero no es posible calcular las $n+1$ derivadas $\partial_i F$, ni aun sobre σ , si no se nos da para cada punto de σ la derivada de F en una dirección que salga de σ , esto es, una derivada exterior⁽⁷⁾.

Sea, por consiguiente, $X^i(u)$ un campo de vectores definido sobre S con la condición de que en cada punto $P \in \sigma$ el vector $X^i(u)$ sea independiente linealmente de los $u_r(u)$. $X^i(u)$ es, pues, un campo de seudonormales en el sentido de Schouten. Dado que

$$\sigma_i = (-1)^i S^{01\dots i-1, i+1\dots n}$$

donde $S^{01\dots i-1, i+1\dots n}$ es una componente cualquiera del n -vector

(7) Cf. COURANT-HILBERT, II, pág. 111 y ss.; pág. 346 y ss.

$[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$, $X^i(u)$ será independiente de las \mathbf{u}_r siempre y sólo cuando

$$X^i \sigma_i = \begin{vmatrix} X^0 & X^1 & \dots & X^n \\ a^0_1 & a^1_1 & \dots & a^n_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^0_n & a^1_n & \dots & a^n_n \end{vmatrix} = \tau \quad [27]$$

sea distinto de cero. Esta es la única restricción que imponemos al campo $X^i(u)$. Por lo demás, puede ser cualquiera. El producto contracto $\tau = X^i \sigma_i$ es una capacidad- x , pero una densidad- u . Fijado el campo $X^i(u)$, la referencia local ambiente $R[P; (x)]$ está ligada con la $R_s[P; (u)]$ ampliada con X^i por la matriz $a^i_k(u)$, cuyos elementos son

$$a^i_0 = X^i(u), \quad a^i_r = \frac{\partial x^i}{\partial u^r} \quad [28]$$

Es fácil ver que la matriz inversa $b^k_i(u)$ tiene por elementos

$$b^0_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_k X^k} = \frac{\sigma_i}{\tau}, \quad b^r_i = \frac{\sigma^r_{ik} X^k}{\sigma_k X^k} \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau} \sigma^r_{ik} X^k, \quad [29]$$

donde σ^r_{ik} es la capacidad covariante- x antisimétrica de segundo orden ligada al $n - 1$ vector $(-1)^r [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{r-1}, \mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_n]$:

$$\sigma^r_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} \sigma^0 & \dots & \sigma^{k-1} & \sigma^{k+1} & \dots & \sigma^{i-1} & \sigma^{i+1} & \dots & \sigma^n \end{vmatrix}_r \quad (k < i) \quad (8)$$

Las fórmulas [29] ponen de manifiesto que, como era de prever, los elementos b^k_i dependen del campo $X^i(u)$ elegido, pero mientras b^0_i dependen esencialmente del vector X^i , los elementos b^r_i dependen sólo de la *dirección* de X^i , en tanto que funciones homogéneas de grado cero de las componentes de dicho vector.

La interpretación geométrica de los elementos [29] como proyectores es inmediata: $P_i \doteq (b^1_i, \dots, b^n_i)$ proyecta sobre el plano π tangente a σ en P los vectores contravariantes de X_{n+1} paralelamente al vector X^i , es decir, hace corresponder a cada v^k aplicado en P el vec-

(8) Cf. ORTIZ FORNAGUERA, [1], § 4.

tor de π $v'' = b^i_i v^i$, proyección de v^i sobre π paralelamente a X^i . Es ésta otra razón para que las b^i_i no dependan de X^i , sino de su dirección. En cuanto a b^0_i , éstas permiten proyectar v^i paralelamente a π , con lo que salimos de la variedad σ a menos que $\sigma_i v^i = 0$, en cuyo caso la proyección es nula.

En una transformación- u y por su propia definición [28], a^i_0 es para cada i independiente de la parametrización, es decir, los a^i_0 son $n + 1$ escalares- u , mientras que los a^i_r —para i fijo—se transforman entre sí como las componentes de un vector covariante- u . Escalares- u lo son también los $n + 1$ elementos b^0_i , mientras que los b^r_i — i fijo—constituyen $n + 1$ vectores contravariantes- u .

5. Consideremos de nuevo las ecuaciones [14] del campo. Poniendo de manifiesto las derivadas implícitas en el símbolo $\frac{\partial}{\partial x^i}$, [14] toma la forma

$$-\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \psi^a_i \partial \psi^b_k} \psi^b_{i,k} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \psi^a_i \partial \psi^b_j} \psi^b_{i,j} + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^a_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^a} = 0. \quad [30]$$

Es decir, las ecuaciones del campo constituyen un sistema de ecuaciones *quasilineales entre derivadas parciales de segundo orden*. Supondremos la existencia de toda una categoría de hipersuperficies σ tales que si sobre una de ellas—o una parte de una de ellas—cualquiera se dan ψ^a y ψ^a_i , el sistema [30] determina unívocamente el campo $\psi^a(x)$. Dar la «cobertura» $\psi^a(u)$, esto es, los valores del campo sobre la hipersuperficie σ parametrizada, es dar a la vez $\frac{\partial \psi^a}{\partial u^r} \equiv \bar{\psi}^a_r(u)$, es decir, todas las derivadas interiores. Por lo tanto, una vez fijado el campo $X^i(u)$, sólo cabe dar las derivadas primeras de las ψ^a en la dirección de X^i , $\bar{\psi}^a_0 \equiv \psi^a_k X^k$. Es sabido que el formalismo canónico sustituye las n funciones $\bar{\psi}^a_0$ por los «impulsos» π_a . Nótese que por su propia definición [25], *válida en S*, éstos son independientes del campo $X^i(u)$. No así las derivadas exteriores $\bar{\psi}^a_0$, las cuales dependen esencialmente de X^i . Para introducir aquel formalismo es menester, pues, considerar referencias locales ligadas a X^i y S .

En lo que concierne a las referencias locales, cabe sustituir las que están vinculadas al sistema de coordenadas (x) en X_{n+1} , por las $[\vec{X}, \underset{1}{u}, \dots, \underset{n}{u}]$ o por las $[\vec{\mathcal{X}}, \underset{1}{u}, \dots, \underset{n}{u}]$, donde $\vec{\mathcal{X}}$ es la densidad vectorial contravariante- x definida respecto de $R[P; (x)]$ por las com-

ponentes $\mathcal{X}^i = \frac{X^i}{\tau}$ ($\tau = X^i \sigma_i$, ec. [27]). Estas últimas son las que, ya introducida la métrica, adoptan Weiss y Roberts. En tal caso, la coordenada (ν) es en rigor una pseudocoordenada ν del tipo capacidad. Adoptemos primero este punto de vista, es decir, en vez de las x^i , consideradas como parámetros, introduzcamos los $(n+1)$ parámetros ν, u^r mediante $(n+1)$ funciones $x^i = \varphi^i(\nu, u)$ sujetas a las condiciones de que para $\nu = 0$, esto es, *sobre* S , sea

$$\varphi^i(0, u) \equiv x^i(u), \quad \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial \nu} \right)_{\nu=0} \equiv \mathcal{X}^i(u), \quad \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial u^r} \right)_{\nu=0} \equiv \frac{\partial x^i}{\partial u^r} \equiv a_{i,r}^{\prime}(u).$$

Dado que el jacobiano de la transformación se reduce a la unidad para $\nu = 0$, cualesquiera que sean las u^r dentro del dominio de definición de $x^i(u)$, en virtud de

$$D(0, u) = \left\{ \frac{\partial (x^0, x^1, \dots, x^n)}{\partial (\nu, u^1, \dots, u^n)} \right\}_{\nu=0} = \mathcal{X}^i \sigma_i = 1, \quad [31]$$

también para valores suficientemente pequeños de ν será $D(\nu, u) \neq 0$ y existirá con seguridad la transformación inversa $(\nu, u) \rightarrow (x)$. Por ejemplo, cabe tomar

$$\varphi^i(\nu, u) = x^i(u) + \nu \mathcal{X}^i(u),$$

con lo que se cumplen evidentemente las condiciones antes indicadas. Pero no se pierda de vista que si bien en cada $P \in S$ el valor del jacobiano es la unidad, no será así, en general, en un entorno de P con puntos fuera de S . Sobre ésta se tiene

$$\frac{\partial x^i}{\partial \nu} = \mathcal{X}^i(u), \quad \frac{\partial x^i}{\partial u^r} = a_{i,r}^{\prime}(u), \quad \frac{\partial \nu}{\partial x^i} = \sigma_i(u), \quad \frac{\partial u^r}{\partial x^i} = b_{i,i}^{\prime}(u), \quad (\text{sobre } S), \quad [32]$$

donde las $a_{i,r}^{\prime}$ y $b_{i,i}^{\prime}$ están dadas por [28] y [29]. Ahora bien, en todo problema variacional ligado a una integral de la forma [3], junto a las transformaciones generales

$$x^i = x^i(x'^0, \dots, x'^n), \quad \psi^a = \psi^a(\psi'^1, \dots, \psi'^n; x'^0, \dots, x'^n)$$

cabe considerar en particular transformaciones en las que se conservan los parámetros y se someten a transformación las variables ψ^a y

transformaciones en las que, por el contrario, se expresan las x^i en función de $n + 1$ parámetros y se conservan las ψ^a ⁽⁹⁾. Esto último significa geoméricamente que el campo ψ^a se sigue refiriendo a los ejes locales primitivos, pero que se ha adoptado para los demás entes—en particular los puntos del espacio—un nuevo sistema de coordenadas. Por consiguiente, las componentes de campo se tratan *formalmente* como escalares. En estas condiciones, es claro que en un entorno suficientemente pequeño E de $P \in S$ se podrá escribir

$$\int_E^{(n+1)} \mathcal{L}(x, \psi^a, \psi^a_{,k}) dx = \int_E^{(n+1)} \bar{\mathcal{L}}(\bar{x}, \psi^a, \psi^a_{,k}) d\bar{x},$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(\bar{x}, \psi^a, \bar{\psi}^a_{,k}) &\equiv \frac{\partial(x)}{\partial(\bar{x})} \mathcal{L}(x, \psi^a, \psi^a_{,k}), \\ \bar{\psi}^a_{,k} &\equiv \frac{\partial \psi^a}{\partial \bar{x}^k} = \psi^a_{,i} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}. \end{aligned}$$

Las variables \bar{x} son los nuevos parámetros que sustituyen a las x . Tomemos en particular

$$\bar{x}^0 = v, \quad \bar{x}^r = u^r,$$

y hagamos

$$\dot{\psi}^a \equiv \frac{\partial \psi^a}{\partial v}, \quad \bar{\psi}^a_{,r} \equiv \frac{\partial \psi^a}{\partial u^r}.$$

Las ecuaciones del campo toman la forma

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\psi}^a} - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\psi}^a} \right) - \frac{\partial}{\partial u^r} \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \bar{\psi}^a_{,r}} \right) = 0, \quad [33]$$

siendo

$$\bar{\mathcal{L}} = D(v, u) \mathcal{L}$$

De esta última identidad se sigue

$$\bar{\mathcal{P}}^0_a \equiv \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\psi}^a} = D(v, u) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^a_{,k}} \frac{\partial v}{\partial x^k}$$

(9) Cf. DE DONDER, págs. 9 y 42, y en el apéndice, R. DALADRIÈRE, *La forme paramétrique ou homogène dans le calcul des variations*.

relación que *sobre* S toma la forma

$$(\bar{\mathcal{P}}^0_{\cdot a})_{v=0} = \mathcal{P}^k_{\cdot a} \tau_k = \pi_a(u)$$

en virtud de [25], [31] y [32]. Si se extiende la *definición* de $\pi_a(u)$ por fuera de S haciendo

$$\pi_a(v, u) \equiv \bar{\mathcal{P}}^0_{\cdot a}, \quad [34]$$

las ecuaciones [33] nos dicen que sobre la *hipersuperficie* S es

$$\frac{\partial \pi_a}{\partial v} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^a} \frac{\partial}{\partial u^r} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}^a_{\cdot r}} \right), \quad [35]$$

donde $\frac{\partial \pi_a}{\partial v}$ representa el valor de $\frac{\partial \bar{\mathcal{P}}^0_{\cdot a}}{\partial v}$ para $v = 0$.

Introduzcamos el ente P_k definido en cada referencia local sobre S por la igualdad análoga a [25]

$$P_k = \sigma_i \mathcal{U}^i_{\cdot k}. \quad [36]$$

Con relación a los ejes $[\bar{\mathcal{X}}_1, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$, la correspondiente definición será

$$\bar{P}_k = \bar{\sigma}_i \bar{\mathcal{U}}^i_{\cdot k} = \bar{\sigma}_i (\bar{\mathcal{L}} \delta^i_{\cdot k} - \bar{\mathcal{P}}^i_{\cdot a} \bar{\psi}^a_{\cdot k}).$$

Pero sobre S es

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_0 &= \sigma_j \frac{\partial x^j}{\partial v} = \sigma_j \mathcal{X}^j = 1, \\ \bar{\sigma}_r &= \sigma_j \frac{\partial x^j}{\partial u^r} = 0; \end{aligned}$$

por consiguiente

$$\bar{P}_k = \mathcal{L} \delta^0_{\cdot k} - \bar{\mathcal{P}}^0_{\cdot a} \bar{\psi}^a_{\cdot k} = \mathcal{L} \delta^0_{\cdot k} - \pi_a \bar{\psi}^a_{\cdot k}.$$

Generalmente se hace

$$\mathcal{H}(u) \equiv \bar{P}_0 = \mathcal{L} - \pi_a \dot{\psi}^a, \quad h_r(u) \equiv \bar{P}_r = -\pi_a \bar{\psi}^a_{\cdot r}. \quad [37]$$

Estas cuatro funciones—cuya variancia- u estudiaremos más adelante—son las llamadas *funciones hamiltonianas* (Cf. Weiss, [2], pág. 108, ec. 5.3; Roberts, [1], pág. 132, ec. 23). Dado que sobre la hipersuperficie S se tiene

$$\pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^a}, \quad [38]$$

se podrán despejar en [38] las $\dot{\psi}^a$ como funciones uniformes y derivables de las variables π_a si el determinante $\left\| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^a \partial \dot{\psi}^b} \right\|$ es distinto de cero. Pero es fácil ver que esta condición es la misma que debe cumplirse para que las ecuaciones del campo determinen unívocamente todas las derivadas segundas de las ψ^a , dadas que sean la «cobertura» $\psi^a(u)$ y $\frac{\partial \psi^a}{\partial v}$ sobre la hipersuperficie S . De las funciones hamiltonianas [37], la única realmente importante es la primera, $\mathcal{H}(u)$. Si se fijan sobre S las $2v$ funciones $\psi^a(u)$ y $\pi_a(u)$, las derivadas exteriores $\frac{\partial \psi^a}{\partial v}$ y $\frac{\partial \pi_a}{\partial v}$ están determinadas unívocamente por $\mathcal{H}(u)$ y las ecuaciones del campo. Basta para verlo efectuar la transformación de Legendre $\dot{\psi}^a \rightarrow \pi_a$, $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{H}$. Es fácil ver que, admitida la no anulación de $\left\| \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^a \partial \dot{\psi}^b} \right\|$, es

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi^a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^a}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a} = -\dot{\psi}^a, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\psi}^a_{,r}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}^a_{,r}},$$

y, por lo tanto,

$$\dot{\psi}^a \equiv \frac{\partial \psi^a}{\partial v} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a}, \quad \dot{\pi}_a \equiv \frac{\partial \pi_a}{\partial v} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi^a} - \frac{\partial}{\partial u^r} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\psi}^a_{,r}} \right) \quad [39]$$

con lo que queda completado el esquema canónico.

En resumen, dada una hipersuperficie σ y fijados: a) un sistema de coordenadas (x) en X_{n+1} ; b) un sistema de coordenadas curvilíneas u^r sobre σ , con lo que ésta se convierte en una hipersuperficie parametrizada S ; c) un campo de vectores contravariantes $X^i(u)$ sobre S y no tangentes a S , y d) $2v$ funciones $\psi^a(u)$, $\pi_a(u)$, componentes sobre S respecto del sistema de coordenadas elegido en X_{n+1} del campo ψ^a y del conjugado canónico π_a , quedan determinadas uní-

vocamente sobre S las derivadas primeras $\frac{\partial \psi^a}{\partial x^k}$ y $\frac{\partial \pi_a}{\partial x^k}$ en virtud de las ecuaciones [39]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^a}{\partial x^k} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a} \sigma_k + \frac{\partial \psi^a}{\partial u^r} b'_{r,k}, \\ \frac{\partial \pi_a}{\partial x^k} &= \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi^a} - \frac{\partial}{\partial u^r} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi^a_{,r}} \right) \right\} \sigma_k + \frac{\partial \pi_a}{\partial u^r} b'_{r,k}, \quad (\text{Sobre S}). \end{aligned}$$

De lo que precede se sigue que el formalismo canónico no implica necesariamente la introducción de una métrica en el espacio ambiente X_{n+1} y que basta para establecerlo la introducción de un campo de vectores exterior a S.

Consideremos ahora la variancia- u de las magnitudes [37]. Es fácil comprobar que

$$\mathcal{H} = \mathcal{U}^i_{,k} \sigma_i x^k, \quad h_r = \mathcal{U}^i_{,k} \sigma_i a'^k_r.$$

Pero, conforme vimos, cada componente σ_i es una densidad escalar- u , como también lo es evidentemente $\tau = X^i \sigma_i$. Por consiguiente, las componentes $\mathcal{X}^k = \frac{X^k}{\tau}$ son capacidades escalares- u , es decir,

$$\mathcal{H} = \sigma_i \mathcal{U}^i_{,k} \mathcal{X}^k$$

es un escalar- u ya que $\mathcal{U}^i_{,k}$ es independiente de la parametrización (cf. ec. [22]). Análogamente, dado que para cada valor i ($= 0, 1, 2, \dots, n$) $a'^i_{,r}$ es un vector covariante- u , el conjunto de las n funciones h_r constituyen en S un campo de densidades vectoriales covariantes- u . No es necesario insistir acerca de la variancia- u de las restantes magnitudes. Es claro que respecto de los cambios de parametrización ψ^a es una capacidad escalar, π_a un escalar y que $\psi^a_{,r}$ son vectores còvariantes en número de v .

El formalismo anterior se apoya en la elección de las referencias locales auxiliares $[\vec{\mathcal{X}}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$. Es precisamente esta elección lo que conduce a introducir la pseudocoordenada v y hace de \mathcal{H} un escalar respecto de los cambios de los parámetros u^r . Pero esto trae consigo que la funcional de $\psi^a(u)$ y $\pi_a(u)$

$$H = \int_S^{(n)} \mathcal{H} d u \quad [40]$$

dependa esencialmente de la parametrización, ya que si se adoptan nuevos parámetros u' , resulta

$$H = \int_S^{(n)} \mathcal{H}(u) du = \int_S^{(n)} \mathcal{H}(u) \frac{\partial(u)}{\partial(u')} du'$$

y siendo \mathcal{H} un escalar- u , este valor es distinto de

$$H' = \int_S^{(n)} \mathcal{H}' du' = \int_S^{(n)} \mathcal{H} du'.$$

Este inconveniente puede evitarse eligiendo como referencias locales auxiliares las $[\mathbf{X}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$. El cálculo se desarrolla en todos sus puntos de manera análoga al caso anterior, por lo cual no lo repetiremos limitándonos a indicar el resultado. Llamando u^0 a la coordenada asociada a \mathbf{X} , de suerte que sobre S $u^0 = 0$, se define

$$\pi_a(u^0, u) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi_{,0}^{'a}} = \frac{\partial(x)}{\partial(x, u)} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,k}^a} \frac{\partial u^0}{\partial x^k}$$

con lo que sobre S es también ahora

$$\pi_a(u, u) = \tau \mathcal{P}_{,a}^k \frac{\sigma_k}{\tau} = \pi_a(u)$$

(cf. [29]). En cambio, \bar{P}_k se sustituye por

$$P'_k = \sigma'_i \mathcal{U}_{,k}^{'i} = \delta_{,i}^0 (\mathcal{L}' \delta_{,k}^{'i} - \mathcal{P}_{,a}^{'i} \psi_{,k}^{'a}) = \mathcal{L}' \delta_{,k}^{'0} - \pi_a \psi_{,k}^{'a},$$

es decir,

$$\mathcal{H}^* \equiv P'_0 = \tau \mathcal{L} - \pi_a \frac{\partial \psi^a}{\partial u^0},$$

mientras subsisten las expresiones para las h_r , como era de prever. La función hamiltoniana \mathcal{H}^* que reemplaza a la anterior \mathcal{H} es una densidad escalar- u , con lo cual la funcional

$$H^* = \int_S^{(n)} \mathcal{H}^* du$$

es independiente de la parametrización. Con relación a \mathcal{H}^* , las ecuaciones del campo adoptan la forma canónica

$$\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial u^0} = - \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \phi^\alpha}, \quad \frac{\partial \pi_\alpha}{\partial u^0} = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \phi^\alpha} - \frac{\partial}{\partial u^r} \left(\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \phi'^\alpha_r} \right), \quad [41]$$

donde

$$\phi'^\alpha_r = \bar{\phi}^\alpha_{,r} = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial u^r}.$$

Sin embargo, tanto en un caso como en otro las n funcionales de $\phi^\alpha(u)$ y $\pi_\alpha(u)$

$$H_r = \int_s^{(n)} h_r(u) du \quad [42]$$

carecen de variancia definida, excepto cuando las transformaciones $u \rightarrow u'$ sean lineales. Se tiene, en efecto, en ambos casos

$$h_r(u) = \frac{\partial(u')}{\partial(u)} \frac{\partial u'^s}{\partial u^r} h'_s(u')$$

y, por lo tanto,

$$H_r = \int_s^{(n)} \frac{\partial(u')}{\partial(u)} \frac{\partial u'^s}{\partial u^r} h'_s(u') \frac{\partial(u)}{\partial(u')} du' = \int_s^{(n)} \frac{\partial u'^s}{\partial u^r} h'_s(u') du'.$$

Si

$$\frac{\partial u'^s}{\partial u^r} = \text{Cte} = B^s_r,$$

entonces

$$H_r = B^s_r H'_s$$

y H_r constituye un vector covariante- u .

Junta de Energía Nuclear
Sección Teórica

Madrid, junio de 1952.

BIBLIOGRAFÍA

- COURANT, R. y HILBERT, D.: *Methoden der mathematischen Physik*, vol. II. (Berlin, Springer, 1937.)
- DE DONDER, TH.: *Théorie invariante du calcul des variations*. (Paris, Gauthier-Villars, 1930.)
- HILL, E. L.: *Hamilton's principle and the conservation theorems of Mathematical Physics*. («Rev. of Mod. Phys.», 23, 253-260, 1951.)
- ORTIZ FORNAGUERA, R.: *Acerca de algunas nociones fundamentales en teoría de la elasticidad*. («Anales de Fis. y Quím.», 42, 581-608, 1946.)
- ROBERTS, A.: *On the quantum theory of elementary particles: Introduction and classical field dynamics*. («Proc. Roy. Soc.» (London), A204, 123-143, 1951.)
- SCHOUTEN, J. A.: *Der Ricci-Kalkül*. (Berlin, Springer, 1924.)
- WEISS, P. [1]: *On the quantization of a theory arising from a variational principle for multiple integrals*. («Proc. Roy. Soc.» (London), A156, 192-220, 1936.)
- — [2]: *On the Hamilton-Jacobi theory of quantization of a dynamical continuum*. (Ibid, A169, 102-118, 1939.)