El análisis funcional con relación al formalismo de Dirac para sistemas dinámicos localizables

por

R. Ortiz Fornaguera

(Presentado por el Académico Numerario D. José M.ª Otero Navascués)

Dada la importancia que para el formalismo relativista cuántico poseen las hipersuperficies espaciales parametrizadas, se examinan con alguna detención sus propiedades, como también el comportamiento de las mismas en las deformaciones infinitesimales. A continuación se estudian, desde el punto de vista del análisis funcional, los operadores introducidos por Dirac en su dinámica de los sistemas localizables y se determina el sentido de las relaciones de conmutación partiendo de una realización funcional de dichos operadores.

1.—Se demostró en un artículo anterior (1) que el formalismo canónico no exige en modo alguno atribuir al espacio ambiente X_{n+1} una estructura. Unicamente las fórmulas [I-20] y [I-21] obligaron a considerar una cierta conexión de tipo afín para las componentes del campo. Recordemos también que la posibilidad de llevar a cabo sobre S la transformación de Legendre

$$\dot{\psi}^\alpha \to \pi_\alpha, \quad \mathcal{L} \to \mathcal{H}, \left(\text{o bien} \quad \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^0} \to \pi_\alpha, \quad \mathcal{L} \to \mathcal{H}^* \right)$$

descansa en la no anulacicnio del determinante

$$\mathcal{G} = \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^\alpha \partial \dot{\psi}^\beta} \right\| \qquad [1]$$

(1) R. Ortiz Fornaguera, [3]. Citado en el texto como (I).

para la hipersuperficie S y las coberturas impuestas $\psi^\alpha(u)$, $\dot{\psi}^\alpha(u)$. Si en una región de S dicho determinante es cero, en una tal región no cabe efectuar la transformación de Legendre. Pero en tal caso, tampoco es posible despejar en las ecuaciones del campo referidas a los parámetros (ν. u^r) las derivadas segundsa de las ψ^α respecto de ν, como es fácil ver sin más que considerar que dichas ecuaciones son de la forma

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^\alpha \partial \dot{\psi}^\beta} \ddot{\psi}^\beta + \ldots = 0,$$

donde los puntos representan términos que no contienen derivadas de orden superior al primero respecto de ν, ni de orden superior al segundo respecto de las u^r. Es sabido que si en una región de S y para los datos $\psi^\alpha(u)$, $\dot{\psi}^\alpha(u)$ es $\mathrm{I} = 0$, dicha región se comporta como hipersuperficie característica para el sistema. El caso particularmente más interesante es aquel en que el sistema [I-30] puede substituirse por otro equivalente de la forma

$$g^{ik} \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial x^i \partial x^k} + \ldots = 0, \qquad [2]$$

es decir, por un sistema de ecuaciones diferenciales con la misma parte principal (2). En este supuesto, el paso en [2] a las variables ν, u^r definidas en (I, § 5), nos conduce a

$$(g^{ik} \sigma_i \sigma_k) \ddot{\psi}^\alpha + \ldots = 0 \qquad [3]$$

y las condiciones $\mathcal{J} \neq 0$ y $g^{ik} \sigma_i \sigma_k \neq 0$ son equivalentes. Se llega, por ejemplo, a la forma [2] cuando $\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha_{.i} \partial \psi^\beta_{.k}}$ se descompone en dos factores $g^{ik} \mathcal{A}_{\alpha\beta}$, con $\| \mathcal{A}_{\alpha\beta} \| \neq 0$. Basta entonces efectuar el producto contracto de

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha_{.i} \partial \psi^\beta_{.k}} \psi^\beta_{.ik} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha_{.i} \partial \psi^\beta} \psi^\beta_{.i} + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha_{.i}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha} = 0 \qquad [4]$$

con la matriz $\mathcal{B}^{\mu\alpha}$ inversa de la $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$. Pero en tal caso es

$$\left\| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^\alpha \partial \dot{\psi}^\beta} \right\| = \left\| (g^{ik} \sigma_i \sigma_k) \mathcal{A}_{\alpha\beta} \right\| = (g^{ik} \sigma_i \sigma_k)^\nu \left\| \mathcal{A}_{\alpha\beta} \right\|$$

(2) Cf., p. ej., COURANT-HILBERT, pág. 323.

y es claro que, siendo $\| \mathcal{A}_{\alpha\beta} \| \neq 0$, las condiciones $\mathcal{J} \neq 0$ y $g^{ik}\, \sigma_i\, \sigma_k \neq 0$ son, en efecto, equivalentes.

Los coeficientes g^{ik} de la forma cuadrática

$$F \equiv g^{ik}\, \sigma_i\, \sigma_k \qquad [5]$$

pueden depender, en principio, de todas las variables x, ψ^α y $\psi^\alpha_{\cdot k}$. Pero en los problemas que se plantean en teoría de campos, el caso más frecuente es aquel en que las g^{ik} son independientes del campo—eventualmente constantes—o dependen exclusivamente de las ψ^α—acaso coincidiendo con ellas. Sea como fuere, en los problemas dinámicos la forma cuadrática [5] es de tipo hiperbólico. La ecuación tangencial del hipercono característico

$$g^{ik}\, t_i\, t_k = 0 \qquad \left(t_i = \frac{\sigma_i}{\tau}\right) \qquad [6]$$

puede reducirse en tales circunstancias y para cada punto a la forma canónica

$$t_0^2 - \sum_{r=1}^{n} t_r^2 = 0\,. \qquad [6'$$

Es sabido que aquellas orientaciones para las qué el primer miembro, F, de [6′] es negativo se llaman *orientaciones temporales*, y aquellas otras para las que $F > 0$, *orientaciones espaciales*. Para las orientaciones tangentes al hipercono característico—o hipercono isótropo o hipercono de luz—, el valor de F es cero por definición.

En las aplicaciones es $n = 3$, y la hipersuperficie cerrada S que aparece, por ejemplo, en integrales de la forma

$$\delta W = \varepsilon \oint_S^{(3)} \left(\mathcal{T}^i_{\cdot k}\, v^k + \mathcal{P}^i_{\cdot \alpha}\, \zeta^\alpha\right) \sigma_i\, d u$$

(cf. [I-24]), está constituída por dos hipersuperficies espaciales—es decir, tales que en cada punto de ellas $g^{ik}\, \sigma_i\, \sigma_k > 0$—unidas por una hipersuperficie temporal frontera. En estas condiciones, y para problemas del tipo hiperbólico, los datos correctos son (cf. Weiss, [2], pág. 109 a 111): a) fijar los valores $\psi^\alpha(u)$, $\pi_\alpha(u)$ del campo ψ^α y el conjugado canónico π_α sobre *una* de las dos hipersuperficies espaciales; b) fijar los valores de ψ^α o de π_α en los límites espaciales, esto es, sobre la hipersuperficie temporal frontera (problema mixto). Si estos últimos se mantienen fijos—lo cual ocurre para cada categoría de problemas—la solución de las ecuaciones del campo es una funcional de los datos iniciales $\psi^\alpha(u)$, $\pi_\alpha(u)$.

En teoría de campos, g^{ik} es un tensor que coincide precisamente con el que define la métrica o por lo menos es una magnitud proporcional al mismo. Supondremos en lo que sigue que así ocurre en general, y admitiremos que el espacio-tiempo X_{3+1} es un espacio seudoeuclídeo. Con ello dejamos de lado la teoría de la relatividad general, pero no hay que perder de vista que, por el momento, poco interés presenta en las teorías microscópicas atribuir al espacio-tiempo una estructura métrica más complicada que la estructura seudoeuclídea que le atribuye la relatividad restringida (3). Además, los sistemas de coordenadas (x) serán coordenadas cartesianas ortogonales, es decir, vinculadas a referencias de Lorentz.

2.—Lo que precede justifica ya de suyo considerar, con alguna detención, el comportamiento de las hipersuperficies espaciales del espacio-tiempo desde el punto de vista de las relaciones físicas y métricas. Varios son los autores que han señalado la importancia de las mismas en la formulación relativísticamente invariante de la teoría de campos (4). Sin insistir en ello, por tanto, nos limitaremos a recordar que sobre una hipersuperficie de aquella naturaleza las condiciones físicas en un punto no pueden influir sobre las condiciones físicas en otro punto cualquiera de la misma sin violar la teoría de la relatividad especial. De ahí que el tipo más general de sistema de medicio-

---

(3) DIRAC, [3], pág. 392. Cf. también A. EDDINGTON, *Fundamental Theory* (Cambridge Univ. Press., 1948), pág. 12, nota.

(4) S. TOMONAGA, «Progress of Theoretical Physics», 1, 27-42 (1946); P. A. M. DIRAC, «Phys. Rev.», *73*, 1092-1103 (1948); J. SCHWINGER, «Phys. Rev.», *74*, 1439-1461 (1948); F. J. DYSON, «Phys. Rev.», 486-502 (1949). La idea se encuentra ya en germen en la electrodinámica multitemporal de DIRAC-FOCK-PODOLSKY («Physik. Z. Sowjetunion, 2, 468-479 (1932), o DIRAC [1], cap. IV). La sustitución del conjunto numerable de tiempos t_n, que encontramos en ésta asociados a coordenadas de espacio x_n de tal manera que (t_n, x_n) y $(t_{n'}, x_{n'})$ determinan siempre un vector espacial para todo par de índices n y n', por una función $t = t(x)$ que defina una hipersuperficie espacial, constituye la base de la electrodinámica supermultitemporal de Tomonaga.

nes compatibles, desde el punto de vista relativista cuántico, sea un sistema de mediciones sobre una hipersuperficie espacial. Un caso particular es el de medición simultánea, pero sólo en tanto que hace referencia a un hiperplano espacial.

Sean g_{ik} las componentes cartesianas ortonormales del tensor métrico, de suerte que $g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ y $g_{ik} = 0$ $(i \neq k)$. Dos definiciones cabe dar de hipersuperficie tridimensional del tipo espacio respecto de la métrica seudoeuclídea g_{ik}, una definición «en grande» y una definición «en pequeño». De acuerdo con la primera, la hipersuperficie σ es espacial cuando para todo par de puntos P_1 y P_2 de σ, el vector $P_2 - P_1$ es espacial, es decir, cuando para cualesquiera P_1 y P_2, puntos de σ, P_2 es exterior al hipercono isótropo $\Gamma(P_1)$ de vértice en el otro y recíprocamente. En una representación paramétrica S de σ, $x^i = x^i(u^r)$, esto implica que para todo par de puntos U_1 y U_2 del dominio $\mathcal{D}_u$ de las u^r en que está definida la representación S de σ se tenga

$$g_{ik}\left[x^i(\underset{2}{u}) - x^i(\underset{1}{u})\right]\left[x^k(\underset{2}{u}) - x^k(\underset{1}{u})\right] < 0 .$$

En particular, si las coordenadas de P_1 y P_2 difieren infinitamente poco (o, lo que es lo mismo, si tal ocurre con $\underset{1}{u}$ y $\underset{2}{u}$), deberá tenerse

$$g_{ik}\frac{\partial x^i}{\partial u^r}\frac{\partial x^k}{\partial u^s}\,d u^r\, d u^s < 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3; \quad r = 1, 2, 3)$$

para todo $P(u) \varepsilon \sigma$ y cualquiera que sea el corrimiento infinitesimal $d u^r$. Con otras palabras, la métrica en el espacio ambiente induce en σ una métrica riemanniana definida negativa

$$[d s^2]_{S} = G_{rs}\, d u^r\, d u^s < 0, \qquad G_{rs} = g_{ik}\, a^i_{\cdot r}\, a^i_{\cdot s}, \left(a^i_{\cdot r} \equiv \frac{\partial x^i}{\partial u^r}\right). \qquad [7]$$

Cualquier vector normal a σ en un punto P cualquiera es un vector temporal, pues si se toma como vector de base $\mathbf{e}'_0$ a este vector y para los restantes $\mathbf{e}'_r$ los vectores

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{e}_i \frac{\partial x^i}{\partial u^r},$$

resulta

$$\left\| G_{ij} \right\| = G_{00} \left\| G_{rs} \right\| = \Delta^2 \left\| g_{ij} \right\| = -\Delta^2, \qquad [8]$$

y como $\| G_{rs} \| < 0$, necesariamente es $e'_0 \cdot e'_0 \equiv G_{00} > 0$. Esta es la definición «en pequeño». Consideremos, por ejemplo, la seudonormal asociada a la parametrización $x^i = x^i(u)$ y sean σ_i sus componentes covariantes (cf. I, ec. [27] y § 5). Dado que si S es espacial «en pequeño» deberá tenerse

$$\left(\sigma_0(u)\right)^2 - \sum_{r=1}^{3} \left(\sigma_r(u)\right)^2 > 0,$$

en ningún punto de S cubierto por la red u^r podrá anularse $\sigma_0(u)$, es decir, para *todo* u^r de $\mathfrak{D}_u$ es

$$\sigma_0(u) \equiv \left\| \frac{\partial x^r}{\partial u^s} \right\| \neq 0.$$

De ahí se sigue que si para todos los valores u^r de un cierto dominio $\mathfrak{D}_u$ del espacio (u^1, u^2, u^3) las funciones uniformes, continuas y derivables $x^i = x^i(u)$ definen una hipersuperficie espacial S, las coordenadas u^1, u^2, u^3 son, sobre S, funciones uniformes continuas y derivables de las coordenadas de espacio x^1, x^2, x^3, y, por tanto, sin restringir en ningún caso la generalidad, puede tomarse

$$x^0 = x^0(x^1, x^2, x^3) \qquad [9]$$

y este resultado vale cualquiera que sea la referencia de Lorentz adoptada. Llegamos así a la consecuencia de que condición *necesaria* para que una hipersuperficie (5) sea espacial, es que sobre ella, y en *cualquier* referencia de Lorentz, el tiempo x^0 sea función uniforme de las coordenadas de spacio. Llamaremos a esta condición *condición a*). Además, dado que la seudonormal σ_i asociada a la representación [9] de σ, tiene por componentes $\sigma_0 = 1$, $\sigma_r = -\frac{\partial x^0}{\partial x^r}$, la condición $\sigma_i \sigma^i > 0$ nos da

$$(\text{grad } x^0)^2 < 1 \qquad |\text{grad } x^0| < 1$$

(5) Consideramos sólo hipersuperficies que admiten hiperplano tangente en cada uno de sus puntos.

en cualquier sistema de coordenadas de Lorentz (*condición b*)). Recíprocamente, sea σ una hipersuperficie en la que se cumplen las condiciones *a*) y *b*), y P_1, P_2 dos puntos arbitrarios de σ. El seudovector $\sigma_i = (1, -\operatorname{grad} x^0)_{P_1}$, ortogonal a σ en P_1, y la recta P_1, P_2 determinan un plano (6). Tomemos una referencia de Lorentz en la que dicho plano sea el $\bar{x}^2 = \bar{x}^3 = 0$. En esta referencia, la ecuación de la intersección de σ con $\bar{x}^2 = \bar{x}^3 = 0$ será $\bar{x}^0 = \bar{x}^0 (\bar{x}^1, 0, 0)$. Pero en virtud de la condición *b*), $\left| \dfrac{d \bar{x}^0}{d \bar{x}^1} \right| < 1$, y, por tanto,

$$\left| \underset{2}{\bar{x}^0} - \underset{1}{\bar{x}^0} \right| = \left| \int_{\underset{1}{\bar{x}^1}}^{\underset{2}{\bar{x}^1}} \frac{d \bar{x}^0}{d \bar{x}^1} \, d \bar{x}^1 \right| < \left| \underset{2}{\bar{x}^1} - \underset{1}{\bar{x}^1} \right|,$$

es decir $(\underset{2}{\bar{x}^0} - \underset{1}{\bar{x}^0})^2 - (\underset{2}{\bar{x}^1} - \underset{1}{\bar{x}^1})^2 < 0$, y el vector P_1, P_2 es espacial. Pero P_1 y P_2 eran cualesquiera en σ. Luego σ es espacial de acuerdo con la definición «en grande». Tenemos así que la definición «en grande» implica la definición «en pequeño»; ésta implica las condiciones *a*) y *b*), las cuales, a su vez, implican la definición «en grande». Por consiguiente, las tres definiciones—o condiciones—son equivalentes.

Estos resultados subsisten, claro está, para una familia de hipersuperficies espaciales $\varphi(x) = \lambda$ dependientes del parámetro λ, donde $\varphi(x)$ es una función uniforme y derivable. Fijado λ,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^0} \right)^2 - \sum_{r=1}^{3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^r} \right)^2$$

es positivo para todo x que satisfaga $\varphi(x) = \lambda$. Pero siendo λ arbitrario, aquella expresión es positiva para cualesquiera valores de las x^i, y, por consiguiente, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x^0} \neq 0$ para todo x y $x^0 = x^0 (\lambda ; x^r)$ es función uniforme y continua de (λ, x^r).

De ahí se sigue que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x^0}$ conservará necesariamente signo cons-

(6) Este plano contiene la tangente en P_1 a la intersección del mismo con σ, tangente que es una recta espacial. Además, si se cumple a), $\vec{\sigma}$ y P_1, P_2 no pueden coincidir.

tante, signo que podemos considerar siempre positivo sin restringir la generalidad. Además,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial x^0}{\partial \lambda} = 1$$

y x^0 es, para valores fijos de las x^r, función monótona creciente de λ. Si se toma $\varphi(x) \equiv x^0 - x^0(x^1, x^2, x^3)$, se obtienen de nuevo los resultados anteriores sin más que tomar $\lambda = 0$ (7).

Esto sentado, sea S una hipersuperficie espacial referida a tres parámetros u^r y sea $\mathcal{D}_u$ el dominio del espacio de las u^r, tal que cuando las u^r describen $\mathcal{D}_u$ el punto $x^i = x^i(u)$ describe toda S. El seudovector normal de componentes covariantes σ_i es tal que

$$\sigma_i \sigma^i \equiv |\sigma|^2 > 0,$$

o sea, $|\sigma|$ es real. El vector real n^i definido por

$$n^i = \frac{\sigma^i}{|\sigma|} \qquad [10]$$

es evidentemente unitario. Este vector, junto con los tres vectores linealmente independientes

$$\underset{r}{u^i} = \frac{\partial x^i}{\partial u^r} a^i_{.r} = (u),$$

define una referencia local—la *referencia natural*—que resulta como caso particular de la [I-28] sin más que tomar $X^i = a^i_{.0}(u) = n^i(u)$. Dicho de otra manera: las referencias locales antes introducidas, que estaban subordinadas a la parametrización y al campo de vectores X^i, se vinculan ahora intrínsecamente a la hipersuperficie σ tomando para X^i el vector unitario normal a σ en cada punto de σ. Esto es ahora posible en tanto poseemos una métrica y en ningún punto de σ es ésta tangente al hipercono isótropo de vértice en aquel punto: Es claro que, por su propia definición, n^i es independiente de la parametrización.

(7) Para casos más generales, cf. THOMAS, pág. 51. La demostración justifica la hipótesis de DYSON. *loc. cit.*, pág. 488.

Las componentes G_{ik} del tensor métrico con relación a la referencia local $(n^i, a^i_{\cdot r})$ son, evidentemente,

$$G_{00} = g_{ik}\, a^i_{\cdot 0}\, a^k_{\cdot 0} = n_k n^k = 1, \quad G_{0r} = n_i a^i_{\cdot r} = 0, \quad G_{rs} = g_{ik}\, a^i_{\cdot r}\, a^k_{\cdot s} \qquad [11]$$

con lo que la expresión local de $d\,s^2$ será

$$d\,s^2 = (d\,u^0)^2 + G_{rs}\, d\,u^r\, d\,u^s.$$

La forma cuadrática $G_{rs}\, d\,u^r\, d\,u^s$ define la métrica inducida sobre σ por la métrica seudoeuclídea ambiente, y G_{rs} es el primer tensor fundamental de σ en el espacio-tiempo X_{3+1}. Consideremos, además, el tensor mixto

$$P^i_{\cdot k} = \delta^i_{\cdot k} - n^i n_k, \qquad [12]$$

tensor que posee la propiedad típica de los operadores de proyección

$$P^i_{\cdot k}\, P^k_{\cdot j} = \left(\delta^i_{\cdot k} - n^i n_k\right)\left(\delta^k_{\cdot j} - n^k n_j\right) = \delta^i_{\cdot j} - n^i n_j = P^i_{\cdot j}$$

es decir, $P \cdot P = P$. Este tensor permite proyectar ortogonalmente cualquier tensor de espacio-tiempo sobre la variedad tridimensional plana $\pi\,(P)$ tangente a σ en el punto en que se considera $P^i_{\cdot k}$. Por ejemplo, si $\bar{v}^i$ es el transformado de v^k por $P^i_{\cdot k}$, se tendrá

$$\bar{v}^i \equiv P^i_{\cdot k}\, v^k = v^i - n^i n_k\, v^k,$$

o sea, $\bar{v}^i$ se obtiene a partir de v^k restando de éste su proyección ortogonal sobre el vector unitario n^i. Es obvio que las componentes de $P^i_{\cdot k}$ en la referencia local $R\,[P\,;\,(n,\,u)]$ serán

$$P'^i_{\cdot k} = \delta^i_{\cdot k} - \delta^i_{\cdot 0}\, \delta^0_{\cdot k}$$

de manera que en relación a $R\,[P\,;\,(n,\,u)]$ se anulan todas las componentes en que figura el índice 0 del transformado-P de un tensor cualquiera. Así, la proyección de g_{ik} sobre $\pi\,(P)$ nos da la métrica inducida en σ, esto es, la primera forma fundamental de σ:

$$\bar{g}_{ik} = g_{jh}\, P^j_{\cdot i}\, P^h_k = g_{ik} - n_i n_k$$

ó respecto de R [P ; (n, u)]

$$\overline{g}'_{ik} = G_{jh}\, P'^{\,j}_{\cdot i}\, P'^{\,h}_{\cdot k} = G_{ik} - \delta^0_{\cdot i}\,\delta^0_{\cdot k}$$

con lo que

$$\overline{g}'_{00} = \overline{g}'_{0i} = 0\,, \qquad \overline{g}'_{rs} = \mathcal{G}_{rs}\,.$$

Introducido el proyector $P^i_{\cdot k}$, la definición de la segunda forma fundamental de σ es inmediata. Esta, por definición, es la proyección sobre π (P) del tensor $\nabla_i\, n_k$ respecto del índice de derivación covariante (8):

$$h_{ik} = P^m_{\cdot i}\,\nabla_m\, n_k = P^m_{\cdot i}\,\partial_m\, n_k = \partial_i\, n_k - n_i\, n^j\,\partial_j\, n_k \qquad [13]$$

La sustitución de la derivada covariante $\nabla_m\, n_k$ por la derivación ordinaria $\partial_m\, n_k$ es posible por ser las coordenadas (x) coordenadas cartesianas en un espacio plano. En cambio, con relación a R [P; (n, u)], es necesario escribir

$$h'_{ik} = P'^{\,m}_{\cdot i}\,\nabla'_m\, n'_k = \left(\delta^m_{\cdot i} - \delta^m_{\cdot 0}\,\delta^0_{\cdot i}\right)\nabla'_m\, n'_k = \nabla'_i\, n'_k - \delta^0_{\cdot i}\,\nabla'_0\, n'_k$$

$$h'_{0k} = 0\,, \qquad h'_{rk} = \nabla'_r\, n'_k = -\,\Gamma'^{\,i}_{kr}\,\delta^0_{\cdot i} = -\,\Gamma'^{\,0}_{kr}$$

donde $\Gamma'^{\,i}_{kr}$ es el símbolo de Christoffel de segunda especie relativo al tensor G_{ik}. Las únicas componentes no nulas constituyen la expresión en R [P; (n, u)] de los coeficientes de la segunda forma fundamental

$$H_{rs} \equiv h'_{rs} = -\,\Gamma'^{\,0}_{sr} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\, G_{rs}}{\partial\, u^0} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\, G_{sr}}{\partial\, u^0} = H_{sr}$$

---

(8) En rigor, la definición de h_{ik} es

$$h_{ik} = P^m_{\cdot i}\, P^j_{\cdot k}\,\nabla_m\, n_j = P^m_{\cdot i}\,(\delta^j_{\cdot k} - n^j\, n_k)\,\nabla_m\, n_j = P^m_{\cdot i}\,\nabla_m\, n_k - n_k\, n^j\, P^m_{\cdot i}\,\nabla_m\, n_j$$

Pero es fácil cerciorarse de que en el último término $P^m_{\cdot i}\,\nabla_m\, n_j$ implica tan sólo derivaciones sobre S, y al contraer con n^j, el resultado es cero en virtud de ser sobre S $n^j\, n_j = 1$.

o también, en virtud de [13],

$$
\begin{aligned}
H_{rs} &= \left(\partial_i n_k - n_i n^j \partial_j n_k\right) a^i_{\cdot r} a^k_{\cdot s} = \frac{\partial n_k}{\partial u^r} a^k_{\cdot s} = \\
&= - n_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial u^r \partial u^s} = H_{sr} \quad (9)
\end{aligned}
\qquad [14]
$$

3.—Consideremos ahora una deformación infinitesimal de S definida por

$$\delta x^i = \varepsilon \left(n^i a^0 + a^i_{\cdot r} a^r\right) \qquad [15]$$

en la que a^0 y a^r son funciones continuas y derivables de los parámetros u^r y ε un infinitésimo. Las cuatro funciones (a^0, a^r) definen, con relación al campo de referencias locales R [P; (n, u)], un campo de vectores contravariantes. En el caso particular de ser $a^0 \equiv 0$, [15] no representa una verdadera deformación de σ, sino una mera deformación infinitesimal de la red de coordenadas curvilíneas sobre σ definidas por $x^i = x^i(u)$. Elijamos las funciones (a^0, a^r) de manera que se anulen en un punto P arbitrariamente elegido sobre σ. El punto P se conserva entonces en la deformación [15], pero no así la referencia local R [P; (n, u)], que experimenta una deformación infinitesimal con conservación del origen. En estas condiciones, si determinamos los coeficientes $A^i_{\cdot k}$ que definen la referencia local deformada respecto de la primitiva, se conocerán las leyes de transformación asociadas a [15] de las magnitudes tensoriales localizadas en P. Estas leyes intervienen por modo fundamental en ciertas reglas de conmutación que encontramos en el formalismo relativista de Dirac ([2], página 1102).

La referencia local R [P: (n, u)] está definida, respecto de la referencia ambiente R [P: (x)], por las relaciones

$$\underset{0}{\mathbf{u}} = \mathbf{e}_i n^i, \qquad \underset{r}{\mathbf{u}} = \mathbf{e}_i a^i_{\cdot r} \qquad \left(n^i \equiv a^i_{\cdot 0}\right)$$

y la referencia deformada lo estará por relaciones análogas

$$\underset{0}{\mathbf{u}'} = \mathbf{e}_i n'^i, \qquad \underset{r}{\mathbf{u}'} = \mathbf{e}_i a'^i_{\cdot r}.$$

(9) DIRAC, [2], toma $\gamma_{rs} = -G_{rs}$ y $\Omega_{rs} = H_{rs}$.

donde

$$n'^i = n^i + \delta n^i \quad , \quad a'^i_{\cdot r} = a^i_{\cdot r} + \delta a^i_{\cdot r}$$

y δn^i, $\delta a^i_{\cdot r}$ son las variaciones de n^i, $a^i_{\cdot r}$ inducidas por [15]. Es claro que, en virtud de éstas y por anularse en P a^0 y las a^r, las variaciones $\delta a^i_{\cdot r}$ valen

$$\delta a^i_{\cdot r} = \varepsilon \left(n^i \frac{\partial a^0}{\partial u^r} + a^i_{\cdot s} \frac{\partial a^s}{\partial u^r} \right) \tag{16}$$

y que de $n^i a_{ir} = n_i a^i_{\cdot r} = 0$, $n^i n_i = 1$ se deduce

$$\delta n^i a_{ir} = - n^i \varepsilon \left(a_{is} \frac{\partial a^s}{\partial u^r} + n_i \frac{\partial a^0}{\partial u^r} \right) = - \varepsilon \frac{\partial a^0}{\partial u^r} ,$$
$$\delta n^i n_i = 0 , \qquad \left(a_{is} = g_{ik} a^k_{\cdot s} \right) ,$$

de donde

$$\left. \begin{aligned} \delta n^i &= - \varepsilon \frac{\partial a^0}{\partial u^s} b^{si} = - \varepsilon \frac{\partial a^0}{\partial u^s} G^{sr} a^i_{\cdot r} , \\ \left(\delta n^i \right. &= \delta a^i_{\cdot 0} , \qquad \left. b^{si} = b^s_{\cdot k} g^{ki} \right) . \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

Por consiguiente, la referencia deformada Σ' está ligada *con la referencia ambiente* por los parámetros

$$\left. \begin{aligned} a'^i_{\cdot 0} &= a^i_{\cdot 0} - \varepsilon \frac{\partial a^0}{\partial u^s} b^{si} , \\ a'^i_{\cdot r} &= a^i_{\cdot r} + \varepsilon \left(n^i \frac{\partial a^0}{\partial u^r} + a^i_{\cdot s} \frac{\partial a^s}{\partial u^r} \right) . \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

Sean w^i, v^i y v'^i las componentes de un vector contravariante arbitrario localizado en P referido a R [P; (x)], $\Sigma \equiv$ R [P; (n, u)] y Σ', respectivamente. Se tendrá, llamando simbólicamente Σ y Σ' a las matrices de transformación $a^i_{\cdot k}$ y $a'^i_{\cdot k}$,

$$w = \Sigma v = \Sigma' v' \qquad \therefore \qquad v = \Sigma^{-1} \Sigma' v' ,$$

o sea, explícitamente,

$$A^i_{\cdot k} \equiv (\Sigma^{-1} \Sigma')^i_{\cdot k} = b^i_{\cdot j} a'^j_{\cdot k} = \delta^i_{\cdot k} + b^i_{\cdot j} \delta a^j_{\cdot k} .$$

Introduciendo los valores [16] y [17], resulta así

$$\left.\begin{aligned}
A^{0}_{\cdot 0} &= 1 + n_j\left(-\varepsilon\frac{\partial a^0}{\partial u^s}b^{sj}\right) = 1\,,\\
A^{0}_{\cdot r} &= n_j\,\varepsilon\left(n^j\frac{\partial a^0}{\partial u^r} + a^{j}_{\cdot s}\frac{\partial a^s}{\partial u^r}\right) = \varepsilon\frac{\partial a^0}{\partial u^r}\,,\\
A^{r}_{\cdot 0} &= -\,b^{r}_{\cdot j}\,\varepsilon\frac{\partial a^0}{\partial u^s}b^{sj} = -\,\varepsilon\frac{\partial a^0}{\partial u^s}G^{rs}\\
A^{r}_{\cdot s} &= \delta^{r}_{\cdot s} + b^{r}_{\cdot j}\,\varepsilon\left(n^j\frac{\partial a^0}{\partial u^s} + a^{j}_{\cdot t}\frac{\partial a^t}{\partial u^s}\right) = \delta^{r}_{\cdot s} + \varepsilon\frac{\partial a^r}{\partial u^s}.
\end{aligned}\right\}\qquad [19]$$

La transformación inversa $B^{i}_{\cdot k}$ resulta de [19] sin más que cambiar ε en $-\varepsilon$. De lo que precede se deduce que, para un vector contra variante, la variación de las componentes al pasar de la referencia natural inicial al sistema de referencia deformado, será

$$\delta v^0 = -\,\varepsilon\, v^r\frac{\partial a^0}{\partial u^r}\,,\qquad \delta v^r = \varepsilon\, v^0\frac{\partial a^0}{\partial u^s}G^{sr} - \varepsilon\, v^t\frac{\partial a^r}{\partial u^t}\qquad [19_1]$$

y para un vector covariante

$$\delta v_0 = \varepsilon\,{-}\,v_r\,G^{rs}\frac{\partial a^0}{\partial u^s}\,,\qquad \delta v_r = \varepsilon\, v_0\frac{\partial a^0}{\partial u^r} + \varepsilon\, v_s\frac{\partial a^s}{\partial u^r}.\qquad [19_2]$$

En particular, las cuaternas $(n^i, a^{i}_{\cdot r})$ se transforman para i fijo como las componentes de un vector covariante, es decir, de acuerdo con $[19_2]$ (cf. ecs. [16] y [17]).

Como segunda aplicación calculemos las variaciones $\delta\, G_{rs}$, $\delta\, G^{rs}$ experimentadas en el punto P por las componentes covariantes y contravariantes del tensor que define la métrica en σ cuando ésta se somete a la deformación [15]. Es claro que las componentes sobre la hipersuperficie deformada respecto de la correspondiente referencia local deformada serán, dado que las variaciones corresponden al primer orden en ε,

$$\begin{aligned}
G_{rs} + \delta\, G_{rs} = G_{ik}\,A^{i}_{\cdot r}\,A^{k}_{\cdot s} &= G_{pq}\left(\delta^{p}_{\cdot r} + \varepsilon\frac{\partial a^p}{\partial u^r}\right)\left(\delta^{q}_{\cdot s} + \varepsilon\frac{\partial a^q}{\partial u^s}\right)\\
&= G_{rs} + \varepsilon\left(G_{rq}\frac{\partial a^q}{\partial u^s} + \frac{\partial a^p}{\partial u^r}G_{ps}\right).
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$G^{rs} + \delta\, G^{rs} = G^{ik}\,B^{r}_{\cdot i}\,B^{s}_{\cdot k} = G^{rs} - \varepsilon\left(G^{rq}\frac{\partial a^s}{\partial u^q} + \frac{\partial a^r}{\partial u^p}G^{ps}\right)$$

y, por tanto,

$$\left.\begin{aligned}\delta G_{rs} &= \varepsilon\left(G_{rq}\frac{\partial a^q}{\partial u^s} + \frac{\partial a^p}{\partial u^r} G_{ps}\right),\\ \delta G^{rs} &= -\varepsilon\left(G^{rq}\frac{\partial a^s}{\partial u^q} + \frac{\partial a^r}{\partial u^p} G^{ps}\right).\end{aligned}\right\} \qquad [20]$$

De la primera de las [20] se deduce, desde luego, la variación δG del discriminante de la primera forma cuadrática diferencial, $G \equiv \| G_{rs} \|$. Se tiene, en efecto,

$$\| G_{ik} \| = G_{00} \| G_{rs} \| = G \qquad \text{(cf. ec. (11))}$$

y, como es sabido,

$$\| G_{ik} + \delta G_{ik} \| = \Delta^2 \| G_{ik} \|,$$

donde Δ es el determinante de la transformación infinitesimal [19]. Pero, de una parte, $\delta G_{00} = 0$, y, de otra,

$$\Delta = 1 + \varepsilon \frac{\partial a^r}{\partial u^r} \ \therefore \ \Delta^2 = 1 + 2\varepsilon \frac{\partial a^r}{\partial u^r}.$$

Por consiguiente,

$$G + \delta G = \left(1 + 2\varepsilon \frac{\partial a^r}{\partial u^r}\right) G$$

esto es,

$$\delta G = 2\varepsilon G \frac{\partial a^r}{\partial u^r} \qquad [21]$$

y también

$$\delta G^{\frac{1}{2}} = \varepsilon G^{\frac{1}{2}} \frac{\partial a^r}{\partial u^r}, \qquad \delta\left(G^{-\frac{1}{2}}\right) = -\varepsilon G^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial a^r}{\partial u^r} \qquad [21']$$

lo que nos da el comportamiento de las densidades y capacidades escalares con relación a la deformación [15]. En cuanto al tensor H_{rs}, su ley de deformación es por completo diferente. Para verlo, consideremos el caso particular de una deformación estacionaria en P; es decir, en P no sólo se anulan las componentes a^i de la deformación, sino también las derivadas primeras $\frac{\partial a^i}{\partial u^r}$. En este caso, se anulan las variaciones que hemos calculado, pero no la de H_{rs}. La razón estriba en que todas las magnitudes tensoriales a que aquéllas se refieren son tensores de un tipo especial del que hablaremos más adelante—tensores *localizados* en el sentido de Dirac. A esta clase no pertenece H_{rs}. En efecto, en el punto P y para una deformación *estacionaria* en P se tiene, en virtud de [14] y [17],

$$\delta H_{rs} = \frac{\partial \delta n_k}{\partial u^r} a^k_{.s} = -\varepsilon a^k_{.s} \frac{\partial^2 a^0}{\partial u^r \partial u^v} G^{vt} a_{kt}$$
$$= -\varepsilon \frac{\partial^2 a^0}{\partial u^r \partial u^v} G^{vt} G_{st} = -\varepsilon \frac{\partial^2 a^0}{\partial u^r \partial u^s},$$

expresión ésta no nula en general. Geométricamente esto era de prever, ya que en las anteriores magnitudes intervienen únicamente elementos de primer orden de S, mientras que H_{rs} está ligado con la curvatura de S en P. Si la deformación es estacionaria en P, aquéllas se conservan, pero no, en general, ésta.

4.—En el § 2 se estableció una correspondencia biunívoca entre las hipersuperficies espaciales y el espacio Ω de las cuaternas de funciones $\{ x^i (u) \}$ de tres variables u^r tales que $\sigma_k \sigma^k > 0$, donde

$$\sigma_k = (-1)^k \frac{\partial (x^0, \ldots x^{k-1}, x^{k+1}, x^3)}{\partial (u^1, u^2, u^3)} \qquad (10)$$

Por otra parte, en (I) se consideraron ciertas magnitudes que pertenecían a una de las dos siguientes clases generales: a) la de aquellas magnitudes $\mathcal{M}$ que variaban con la hipersuperficie σ considerada, pero que eran insensibles a los cambios de parametrización sobre σ, y b) la de aquellas magnitudes $\mathcal{M}_u$ cuyo valor (o valores) dependían esencialmente de los parámetros u^r utilizados en la definición paramétrica de σ. Desde el punto de vista funcional, las primeras son funcionales de σ, $M_0 = M_0 [\sigma]$; las segundas lo son de las hipersuperficies *parametrizadas* $M_u = M_u [S]$ (11). Convendrá también distinguir en

(10) Cf. ROBERTS, [1], pág. 133.
(11) Cf. VOLTERRA-PÉRÉS, págs. 7 y 8.

tre magnitudes vinculadas a un punto del espacio-tiempo y que son funcionales de la hipersuperficie espacial, σ o S, que se hace pasar por él (*funcionales localizados*) y magnitudes no vinculadas a un punto, definidas como funcionales en el espacio Ω (*funcionales no localizados*). Ejemplos muy sencillos de la primera categoría los proporcionan las magnitudes σ_i y n^i. Evidentemente, en un punto P fijo del espacio-tiempo son $\sigma_i = \sigma_i$ [S; P], $n^i = n^i$ [σ; P], donde S y σ pasan por P. Análogamente, es claro que $\mathcal{H} = \mathcal{H}$ [σ; P] mientras $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}^*$ [S; P] (cf. I, § 5). En cambio,

$$H^* = \int_S^{(n)} \mathcal{H}^* \, d\,u$$

es una funcional de σ no localizada. Desde un punto de vista más general, también las variables dinámicas de un sistema dinámico pueden clasificarse en localizadas o no localizadas, según describan las condiciones físicas en un punto del espacio-tiempo o en una región del mismo. Dirac define como *sistema dinámico localizable* un sistema para el que existe una representación en el que las variables dinámicas del correspondiente sistema completo de observables conmutables son todas ellas variables dinámicas localizadas. Constituye todavía problema el determinar si los sistemas microscómicos son o no localizables. Yukawa y otros investigadores han desarrollado una teoría de los *sistemas no-localizables* (12), pero aquí nos limitaremos a aquella primera clase.

Al igual que en la mecánica cuántica clásica, en la mecánica cuántica relativista de los sistemas localizables cabe adoptar, entre otras, las representaciones de Heisenberg y de Schrödinger (13). En ésta, el vector representativo del estado del sistema es una funcional de S, $| X, S >$, donde S es una hipersuperficie espacial parametrizada. En aquélla, al estado corresponde un vector fijo, y la evolución del sistema con S se hace repercutir en las variables dinámicas. Si nos colocamos en el caso de la representación de Schrödinger, hay que introducir el operador $\mathcal{A}$ análogo al operador $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ que encontra-

(12) H. Yukawa, «Phys. Rev.», 77, 219-226 (1950); J. Rayski, «Proc. Roy. Soc.» (London), *206*, 575 583 (1951).

(13) R. Ortiz Fornaguera, *Aspectos elementales de la representación de interacción*, 1950 (no publicado).

mos en la ecuación clásica $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$, operador que permite calcular la variación de $\psi(t)$ cuando se «deforma» el hiperplano $x^0 = c\,t$ pasando al $x^0 = c\,(t + \varepsilon)$ de acuerdo con

$$\psi(t+\varepsilon) - \psi(t) = -i\,\varepsilon\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(t) = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\psi(t).$$

En la teoría relativista, el papel representado por t lo está por una hipersuperficie espacial parametrizada S y se consideran deformaciones de S mucho más generales que las meras traslaciones. La expresión más general de una deformación infinitesimal de S es de la forma [15], si bien ahora no se impondrá a las cuatro funciones a^0, a^r la condición de anularse en un punto P de S. Se trata de calcular la variación de una funcional de S cuando se varían en

$$\delta x^k = \varepsilon\left(n^k a^0 + a^k_{\cdot r} a^r\right) \qquad [22]$$

las funciones argumento $x^i(u)$.

Sea F una funcional de S, continua y derivable. Por la propia definición de derivación funcional se tiene

$$\delta F = \int_S^{(3)} d u\, \delta x^k \frac{\delta F[S]}{\delta x^k(u)}, \qquad [23]$$

donde $\frac{\delta F[S]}{\delta x^k(u)}$ es la derivada funcional parcial de F [S] respecto de $x^k(u)$ en el punto u. La fórmula [23] nos dice que δF resulta de aplicar a F [S] el operador

$$\int_S^{(3)} d u\, \delta x^k \frac{\delta}{\delta x^k(u)}$$

que, adoptando la notación de Dirac, representaremos por $-i\,\varepsilon\,\mathcal{H}$, es decir, haremos

$$\mathcal{H} \equiv \frac{i}{\varepsilon}\int_S^{(3)} d u\, \delta x^k \frac{\delta}{\delta x^k(u)} = i\int_S^{(3)} d u\left(a^0 n^k + a^r a^k_{\cdot r}\right)\frac{\delta}{\delta x^k(u)}.$$

$\mathcal{A}$ es, por definición, el operador de deformación correspondiente a la deformación $\delta x^k (u)$. Este operador puede expresarse como integral sobre S de una combinación lineal de operadores independientes de la deformación. Se tiene, en efecto,

$$\mathcal{A} \underset{\sigma}{=} \int_S^{(3)} d\,u\,(a^0\,\Pi_0 + a^r\,\Pi_r) \tag{24}$$

donde

$$\Pi_0 \equiv i\,n^k \frac{\delta}{\delta x^k (u)}\,, \qquad \Pi_r \equiv i\,a^k_{\cdot r} \frac{\delta}{\delta x^k (u)} \tag{25}$$

son cuatro operadores de derivación funcional que simbólicamente podrían representarse en la forma

$$\Pi_j \equiv i \frac{\delta}{\delta u^j (u)}\,.$$

La fórmula [24], consecuencia inmediata de la que da la variación primera de una funcional, vale cualesquiera que sean las funciones a^0 y a^r, lo mismo si son meras funciones de punto que si dependen de elementos característicos de la métrica sobre S y de su relación con el espacio-tiempo. No es necesario, pues, el razonamiento de Dirac ([2], pág. 1098) para poder afirmar que, en cualquier caso, los coeficientes a^0 y a^r deben aparecer a la izquierda de los operadores Π_k En tal posición aparecen espontáneamente. La posición fuera de hecho indiferente si las a^k fueran funciones de u exclusivamente, pero hay casos en que las a^k son funciones de las componentes n^i de la normal a S y de las componentes G_{rs}, es decir, las a^k son funcionales de las $x^i (u)$. Por lo que concierne a la variancia, es claro que si $\mathcal{A}$ ha de depender de σ, pero no de la parametrización, Π_r debe ser una densidad vectorial covariante-u y Π_0 una densidad escalar-u. Veremos más adelante que así es en efecto.

Las definiciones [25] establecen evidentemente una correspondencia biunívoca entre los operadores $\frac{\delta}{\delta x^k (u)}$ y los cuatro operadores Π_k, los cuales no son sino los operadores producto por i de los transformados de aquéllos mediante la matriz regular $a^k_{\cdot j}$. Es claro que

$$\frac{\delta}{\delta x^k (u)} = - i \left(n_k\,\Pi_0 + b^r_{\cdot k}\,\Pi_r\right)$$

y siendo

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^j(u)}, \frac{\delta}{\delta x^k(u')}\right] = 0 \, . \quad ([\mathrm{A}, \mathrm{B}] \equiv \mathrm{A\,B} - \mathrm{B\,A}),$$

estas relaciones de conmutación nos darán, a su vez, las relaciones de conmutación existentes entre los operadores Π_k, relaciones que equivaldrán a las anteriores.

En lo que sigue deberemos aplicar las siguientes identidades, que se comprueban fácilmente:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \delta(x-x')}{\partial x'} = \frac{\partial \delta(x'-x)}{\partial x'} = -\frac{\partial \delta(x-x')}{\partial x}, \\ &\varphi(x') \frac{\partial \delta(x-x')}{\partial x} f(x) = \varphi(x) f(x) \frac{\partial \delta(x-x')}{\partial x} + f(x)\,\delta(x-x') \frac{d\varphi(x)}{dx} \\ &\qquad = \varphi(x') f(x') \frac{\partial \delta(x-x')}{\partial x} - \varphi(x')\,\delta(x-x') \frac{d f(x')}{dx'} \end{aligned}\right\} \quad [26]$$

en las que aparecen las «funciones» singulares de Dirac $\delta(x)$ y $\delta'(x)$. Es sabido que la teoría de distribuciones permite rigorizar el manejo de tales funciones, por lo que en este segundo artículo nos limitaremos a adoptar sin más las reglas ordinarias del algoritmo con funciones de dicho tipo (14).

El valor de $x^j(u)$ para un *valor fijo* de u es evidentemente una funcional de S cuya derivada funcional vale

$$\frac{\delta x^j(u)}{\delta x^k(u')} = \delta^j_{\ k}\,\delta(u-u'), \qquad [27]$$

relación ésta que pone de manifiesto el carácter de densidad-u del operador $\frac{\delta}{\delta x^k(u)}$, carácter introducido por la presentia en el segundo miembro del producto $\delta(u-u')$ de funciones δ de Dirac. La fórmula [27], con las identidades [26], constituye la base para el cálculo de los conmutadores $[\Pi_j(u), \Pi_k(u')]$. Para ello conviene calcular antes algunos otros conmutadores más simples.

---

(14) Agradecemos al Prof. Sanjuán sus indicaciones acerca de los trabajos de Schwarz en este campo, como también la discusión de algunos puntos del presente artículo.

En primer lugar, de [27] se deduce, sin más, que

$$\left[\Pi_0(u), x^j(u')\right] = \left[i\, n^k(u) \frac{\delta}{\delta x^k(u)}, x^j(u') \right] = i\, n^k(u) \frac{\delta x^j(u')}{\delta x^k(u)} = i\, n^j(u)\, \delta(u - u')$$

y de aquí, derivando respecto de u'^r,

$$\left[\Pi_0(u), a^j_{\cdot r}(u')\right] = i\, n^j(u) \frac{\partial \delta(u' - u)}{\partial u'^r} \qquad [28_0]$$

Análogamente

$$\left[\Pi_r(u), x^j(u')\right] = i\, a^j_{\cdot r}(u)\, \delta(u - u')$$

y, por tanto,

$$\left[\Pi_r(u), a^j_{\cdot s}(u')\right] = i\, a^j_{\cdot r}(u) \frac{\partial \delta(u' - u)}{\partial u'^s}. \qquad [28_r]$$

Por otra parte, tomando derivadas funcionales en las ecuaciones $n_j a^j_{\cdot r} = 0$, $n_j n^j = 1$, resulta:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\delta n_j(u')}{\delta x^k(u)} a^j_{\cdot r}(u') = - n_j(u') \frac{\delta a^j_{\cdot r}(u')}{\delta x^k(u)} = - n_j(u')\, \delta^j_{\cdot k} \frac{\partial \delta(u' - u)}{\partial u'^r} = \\ &\qquad = - n_k(u') \frac{\partial \delta(u' - u)}{\partial u'^r}, \quad \frac{\delta n_j(u')}{\delta x^k(u)} n_j(u') = 0 \end{aligned} \right.$$

y, por consiguiente,

$$\frac{\delta n_j(u')}{\delta x^k(u)} = - n_k(u')\, b^r_{\cdot j}(u') \frac{\partial \delta(u' - u)}{\partial u'^r}.$$

Pero las componentes g_{jk} del tensor métrico son constantes. Luego

$$\frac{\delta n^j(u')}{\delta x^k(u)} = - n_k(u')\, b^{rj}(u') \frac{\partial \delta(u' - u)}{\partial u'^r}$$

de donde se sigue, recordando [26],

$$\left[\Pi_0(u), n^j(u')\right] = i\, n^k(u) \left[\frac{\delta}{\delta x^k(u)}, n^j(u') \right] = i\, n^k(u) \frac{\delta n^j(u')}{\delta x^k(u)}$$

$$= - i\, n^k(u)\, n_k(u')\, b^{rj}(u') \frac{\partial \delta(u' - u)}{\partial u'^r} = - i\, b^{rj}(u') \frac{\partial \delta(u' - u)}{\partial u'^r}$$

ya que

$$\frac{\partial n^k(u')}{\partial u'^r}\, n_k(u') = 0 .$$

De la misma manera

$$\begin{aligned}\left[\Pi_r(u),\, n^j(u')\right] &= -\,i\, a^k_{\cdot r}(u)\, n_k(u')\, b^{sj}(u')\,\frac{\partial\,\delta(u'-u)}{\partial u'^s}\\ &= -\,i\,\frac{\partial a^k_{\cdot r}(u')}{\partial u'^s}\, n_k(u')\, b^{sj}(u')\,\delta(u'-u)\\ &= i\,\frac{\partial n^k(u')}{\partial u'^r}\left(\delta^j_{\cdot k} - n^j(u')\, n_k(u')\right)\delta(u'-u)\\ &= i\,\frac{\partial n^j(u')}{\partial u'^r}\,\delta(u'-u).\end{aligned}$$

Las fórmulas [28] y las que acabamos de obtener correspondientes a $n^j \equiv a^j_{\cdot 0}$

$$\left.\begin{aligned}\left[\Pi_0(u),\, n^j(u')\right] &= -\,i\, b^{rj}(u')\,\frac{\partial\,\delta(u'-u)}{\partial u'^r},\\ \left[\Pi_r(u),\, n^j(u')\right] &= i\,\frac{\partial n^j(u')}{\partial u'^r}\,\delta(u'-u)\,.\end{aligned}\right\} \qquad [29]$$

nos permiten calcular las reglas de conmutación de los operadores Π_k una vez conocidos los conmutadores

$$\left[\Pi_k(u),\, \frac{\delta}{\delta x^j(u')}\right].$$

La evaluación de éstos es inmediata. Se tiene

$$\left[\Pi_k(u),\, \frac{\delta}{\delta x^j(u')}\right] = i\left[a^h_{\cdot k}(u),\, \frac{\delta}{\delta x^j(u')}\right]\frac{\delta}{\delta x^h(u)} = -\,i\,\frac{\delta\, a^h_{\cdot k}(u)}{\delta x^j(u')}\,\frac{\delta}{\delta x^h(u)},$$

dado que se ha supuesto igual a cero el conmutador

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^h(u)},\, \frac{\delta}{\delta x^j(u')}\right].$$

Para $k = 0$ resulta así:

$$\begin{aligned}\left[\Pi_0(u),\, \frac{\delta}{\delta x^j(u')}\right] &= i\, n_j(u)\, b^{rk}(u)\,\frac{\partial\,\delta(u-u')}{\partial u^r}\,\frac{\delta}{\delta x^k(u)}\\ &= -\,i\, n_j(u)\, G^{rs}(u)\, a^k_{\cdot s}(u)\,\frac{\partial\,\delta(u-u')}{\partial u^r}\,\frac{\delta}{\delta x^k(u)}\end{aligned}$$

ya que

$$b^{rk} \equiv b^r_{\cdot j} g^{jk} = b^r_{\cdot j}\left(a^j_{\cdot s} a^k_{\cdot t} G^{st} + n^j n^k\right) = a^k_{\cdot s} G^{sr}.$$

En definitiva, pues,

$$\left[\Pi_0(u), \frac{\delta}{\delta x^j(u')}\right] = n_j(u) \frac{\partial \delta(u-u')}{\partial u^r} G^{rs} \Pi_s(u) \qquad [30_0]$$

y conforme se deduce de [27],

$$\left[\Pi_r(u), \frac{\delta}{\delta x^j(u')}\right] = -i \delta^h_{\cdot j} \frac{\partial \delta(u-u')}{\partial u^r} \frac{\delta}{\delta x^h(u)} = -i \frac{\partial \delta(u-u')}{\partial u^r} \frac{\delta}{\delta x^j(u)} \qquad [30_r]$$

Finalmente, de [28], [29] y [30] se sigue recordando [26]

$$\begin{aligned}
[\Pi_0(u), \Pi_0(u')] &= i\left[\Pi_0(u), n^j(u')\right] \frac{\delta}{\delta x^j(u')} + i n^j(u')\left[\Pi_0(u), \frac{\delta}{\delta x^j(u')}\right] \\
&= \frac{\partial \delta(u'-u)}{\partial u'^r} b^{rj}(u') \frac{\delta}{\delta x^j(u')} - \frac{\partial \delta(u-u')}{\partial u^r} b^{rk}(u) \frac{\delta}{\delta x^k(u)} \\
&= i \frac{\partial \delta(u-u')}{\partial u^r} \left\{ G^{rs}(u) \Pi_s(u) + G^{rs}(u') \Pi_s(u') \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\Pi_r(u)\, \Pi_s(u')] &= i\left[\Pi_r(u), a^j_{\cdot s}(u')\right] \frac{\delta}{\delta x^j(u')} + i a^j_{\cdot s}(u')\left[\Pi_r(u), \frac{\delta}{\delta x^j(u')}\right] \\
&= -a^j_{\cdot r}(u) \frac{\partial \delta(u'-u)}{\partial u'^s} \frac{\delta}{\delta x^j(u')} + a^j_{\cdot s}(u') \frac{\partial \delta(u-u')}{\partial u^r} \frac{\delta}{\delta x^j(u)} \\
&= -\frac{\partial \delta(u'-u)}{\partial u'^s} a^j_{\cdot r}(u') \frac{\delta}{\delta x^j(u')} + \frac{\partial \delta(u-u')}{\partial u^r} a^j_{\cdot s}(u) \frac{\delta}{\delta x^j(u)} \\
&= -i \frac{\partial \delta(u-u')}{\partial u^r} \Pi_s(u) - i \frac{\partial \delta(u-u')}{\partial u^s} \Pi_r(u').
\end{aligned}$$

En cuanto al conmutador $[\Pi_0(u), \Pi_r(u')]$, es fácil ver que

$$\begin{aligned}
[\Pi_0(u), \Pi_r(u')] &= -i\left[\Pi_r(u'), n^j(u)\right] \frac{\delta}{\delta x^j(u)} - i n^j(u)\left[\Pi_r(u'), \frac{\delta}{\delta x^j(u)}\right] \\
&= \frac{\partial n^j(u)}{\partial u^r} \delta(u-u') \frac{\delta}{\delta x^j(u)} - n^j(u) \frac{\partial \delta(u'-u)}{\partial u'^r} \frac{\delta}{\delta x^j(u')} \\
&= -\frac{\partial \delta(u'-u)}{\partial u'^r} n^j(u') \frac{\delta}{\delta x^j(u')} = i \frac{\partial \delta(u'-u)}{\partial u'^r} \Pi_0(u')
\end{aligned}$$

Queda así demostrado que las relaciones de conmutación entre derivadas funcionales

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^j(u)}, \frac{\delta}{\delta x^k(u')}\right] = 0 \qquad [31]$$

traen consigo las siguientes relaciones de conmutación entre los operadores $\Pi_r(u)$:

$$\left.\begin{aligned} [\Pi_0(u), \Pi_0(u')] &= i\,\frac{\partial\,\delta(u-u')}{\partial u^r}\left\{ G^{rs}(u)\,\Pi_s(u) + G^{rs}(u')\,\Pi_s(u')\right\}, \\ [\Pi_0(u), \Pi_r(u')] &= i\,\frac{\partial\,\delta(u'-u)}{\partial u'^r}\,\Pi_0(u'), \\ [\Pi_r(u), \Pi_s(u')] &= -\,i\,\frac{\partial\,\delta(u-u')}{\partial u^r}\,\Pi_s(u) - i\,\frac{\partial\,\delta(u-u')}{\partial u^s}\,\Pi_r(u'). \end{aligned}\right\} \qquad [32]$$

Pero estas relaciones implican, a su vez, las [31]. En efecto, éstas han intervenido en el cálculo de [32] únicamente en la evaluación de

$$\left[\Pi_k(u), \frac{\delta}{\delta x^j(u')}\right].$$

Si no se hace hipótesis alguna acerca del valor del primer miembro de [31], el conmutador anterior pasa a ser

$$\left[\Pi_k(u), \frac{\delta}{\delta x^j(u')}\right] = -\,i\,\frac{\delta\,a^{h}_{\cdot k}(u)}{\delta x^j(u')}\,\frac{\delta}{\delta x^h(u)} + i\,a^{h}_{\cdot k}(u)\left[\frac{\delta}{\delta x^h(u)}, \frac{\delta}{\delta x^j(u')}\right].$$

El término complementario añade, respectivamente, a los segundos miembros de [32] las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} &-\,n^j(u')\,n^h(u)\left[\frac{\delta}{\delta x^h(u)}, \frac{\delta}{\delta x^j(u')}\right], \\ &+\,n^j(u)\,a^{h}_{\cdot r}(u')\left[\frac{\delta}{\delta x^h(u')}, \frac{\delta}{\delta x^j(u)}\right], \\ &-\,a^{j}_{\cdot s}(u')\,a^{h}_{\cdot r}(u)\left[\frac{\delta}{\delta x^h(u)}, \frac{\delta}{\delta x^j(u')}\right]. \end{aligned}$$

Si se cumple [32], todas estas expresiones son nulas, como también la que resulta de la segunda sin más que cambiar u por u'. Y esto es lo mismo que decir que, para todo par de índices (i, k),

$$a^{h}_{\cdot k}(u)\,a^{j}_{\cdot i}(u')\left[\frac{\delta}{\delta x^h(u)}, \frac{\delta}{\delta x^j(u')}\right] = 0,$$

o sea, que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^h(u)}, \frac{\partial}{\partial x^j(u')}\right] = 0.$$

Por tanto, las relaciones [32] de Dirac (cf. [2], ecs. [35] a [37]) no dicen ni más ni menos que las relaciones de conmutación [31] y equivalen, en consecuencia, a ellas. Acerca de [31], es menester advertir—y lo mismo valdrá para [32]—que esta relación tomada en sí ni se cumple ni deja de cumplirse. El sentido de la relación [31] es que el operador que figura en el primer miembro aplicado a una funcional suficientemente regular la reduce a cero. La expresión análoga a [31], aunque relativa a funciones ordinarias de varias variables, $f(x^1, \ldots, x^n)$, diría

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0.$$

Pero es sabido que el que se cumpla o no esta relación depende esencialmente de la función a que se aplique el primer miembro, ya que no para *toda* función es

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] f \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = 0\text{:}$$

Sin embargo, dado que la teoría considera únicamente funcionales para las que, efectivamente, son permutables

$$\frac{\partial}{\partial x^j(u)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x^k(u')},$$

admitiremos sin más [31] y sus consecuencias en el sentido de que éstas valen por lo menos para aquellas funcionales F para las que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^j(u)\,\partial x^k(u')} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^k(u')\,\partial x^j(u)}.$$

Pero convendrá tener siempre presente esta limitación a una determinada clase de funcionales.

5.—Las fórmulas [28] y [29] permiten encontrar de nuevo los resultados obtenidos anteriormente al considerar el cambio infinitesimal de referencia local (n, u) inducido por una deformación infinitesimal de S nula en un punto P (cf. § 3). El operador general de deformación $\mathcal{A}$ definido en [24] está ligado con la variación [23] por la relación

$$\delta F = -i\varepsilon \mathcal{A} F,$$

pero hay que tener en cuenta que esta fórmula sólo vale cuando F no hace las veces de operador. Lo mismo ocurre cuando se aplica la fórmula

$$d f = \varepsilon \frac{d}{d x} \cdot f(x) .$$

Si se considera $f(x)$ no en tanto que función, sino como el operador «multiplicación por $f(x)$»—que es el caso general en mecánica cuántica cuando $f(x)$ no es la función de onda—, el *operador* $d f$—diferencial del *operador* $f(x)$—resulta de

$$d f = \varepsilon \left[\frac{d}{d x}, f \right] = \varepsilon \frac{d f}{d x} .$$

De la misma manera, cuando la funcional F se considera como operador—lo cual ocurre siempre que F no es la funcional de onda de la representación de Schrödinger—su variación está dada por

$$\delta F = -i\varepsilon [\mathcal{A}, F] \tag{33}$$

Este es el significado analítico de la afirmación de Dirac, según la cual $\delta F = -i\varepsilon \mathcal{A} F$ debe sustituirse por [33] cuando $\mathcal{A}$ y F se tratan como cantidades de un álgebra no conmutativa (Dirac, [2], pág. 1095).

Es claro que, para u fijo, los coeficientes

$$a^j_{\cdot k}(u) \equiv \frac{\partial x^j}{\partial u^k}$$

son funcionales de las $x^j(u)$, es decir, funcionales de S. De acuerdo con [33], su variación para la deformación [22] será

$$\delta a^j_{\cdot k}(u) = -i\varepsilon \left[\mathcal{A}, a^j_{\cdot k}(u)\right] = -i\varepsilon \int_S^{(3)} d u' \left\{ a^0(u') \left[\Pi_0(u'), a^j_{\cdot k}(u)\right] \right.$$
$$\left. + a^r(u') \left[\Pi_r(u'), a^j_{\cdot k}(u)\right] \right\} .$$

Así, por ejemplo, en virtud de [28], se obtiene el resultado trivial

$$\delta a^{j}_{\cdot s}(u) = -i\varepsilon \int\limits_{S}^{(3)} du' \left\{ i\, a^{0}(u')\, n^{j}(u') \frac{\partial\, \delta(u-u')}{\partial u^{s}} + i\, a^{r}(u')\, a^{j}_{\cdot r}(u') \frac{\partial\, \delta(u-u')}{\partial u^{s}} \right\}$$

$$= \varepsilon \frac{\partial}{\partial u^{s}} \left\{ a^{0}(u)\, n^{j}(u) + a^{r}(u)\, a^{j}_{\cdot r}(u) \right\} = \varepsilon \frac{\partial\, \delta x^{j}(u)}{\partial u^{s}}\,, \qquad [34]$$

que coincide con la segunda ecuación [18] si las $a^{j}(u)$ se anulan en u. No tan trivial es el resultado a que se llega al calcular $\delta a^{j}_{\cdot 0} = \delta n^{j}$. Se tiene, en virtud de [29],

$$\delta n^{j}(u) = -i\varepsilon \int\limits_{S}^{(3)} du' \left\{ -i\, a^{0}(u')\, b^{sj}(u) \frac{\partial\, \delta(u-u')}{\partial u^{s}} + i\, a^{r}(u') \frac{\partial n^{j}(u)}{\partial u^{r}}\, \delta(u-u') \right\}$$

$$= -\varepsilon\, b^{sj}(u) \frac{\partial a^{0}(u)}{\partial u^{s}} + \varepsilon\, a^{r}(u) \frac{\partial n^{j}(u)}{\partial u^{r}} = -\varepsilon\, G^{rs} \frac{\partial x^{j}}{\partial u^{r}} \frac{\partial a^{0}}{\partial u^{s}} + \varepsilon\, a^{r} \frac{\partial n^{j}}{\partial u^{r}}\,, \qquad [35]$$

expresión que coincide con la [23] de Dirac (cf. nota, ec. [14]). Si a^{r} se anula en el punto en cuestión, obtenemos la primera de las ecuaciones [18]. No merece la pena calcular para este caso las fórmulas relativas a G_{rs}, G^{rs} y G. El cálculo no presenta ninguna dificultad y conduce a las ecuaciones [20] y [21].

Fijada la hipersuperficie espacial S, queda asociada a cada punto P de S una referencia natural R [P ; (n, u)]. Si mantenemos fijo el punto P, esta referencia es una funcional de S definida en el conjunto de las hipersuperficies espaciales que pasan por P. De ahí se sigue que las componentes naturales en P de *un* tensor de espacio-tiempo serán funcionales de S cuyo dominio de definición será ese conjunto restringido de elementos de Ω. La ley de variación de estas funcionales resulta por un razonamiento ya clásico de las leyes correspondientes a los casos en que el tensor de espacio-tiempo sea un vector covariante o un vector contravariante, arbitrarios pero *fijos* en el espacio-tiempo. Dichas leyes son, conforme se deduce inmediatamente de [33], [34] y [35],

$$-i\varepsilon\, [\mathcal{H}_{0}, v^{0}] = -\varepsilon\, v^{r} \frac{\partial a^{0}}{\partial u^{r}}\,, \qquad -i\varepsilon\, [\mathcal{H}_{0}, v^{r}] = \varepsilon\, v^{0} \frac{\partial a^{0}}{\partial u^{s}}\, G^{sr} - \varepsilon\, v^{s} \frac{\partial a^{r}}{\partial u^{s}}\,, \qquad [36_{1}]$$

$$-i\varepsilon\, [\mathcal{H}, v_{0}]_{1} = -\varepsilon\, v_{r}\, G^{sr} \frac{\partial a^{0}}{\partial u^{s}}\,, \qquad -i\varepsilon\, [\mathcal{H}_{0}, v_{r}] = \varepsilon\, v_{0} \frac{\partial a^{0}}{\partial u^{r}} + \varepsilon\, v_{s} \frac{\partial a^{s}}{\partial u^{r}}\,, \qquad [36_{2}]$$

en perfecta coincidencia con [19_1] y [19_2]. El subíndice cero que afecta al operador $\mathcal{A}$ significa que la deformación asociada es arbitraria, pero nula en P. Cual debe ser, las variaciones de las funcionales en cuestión se anulan cuando la deformación es estacionaria en P.. Muy otras son las circunstancias cuando el tensor de espacio-tiempo referido a R [P; (n, u)] traduce propiedades geométricas de la hipersuperficie S que pasa por P. En tal caso, la ley de variación no puede deducirse de [36], ya que al deformar S, el tensor de espacio-tiempo será, en general, *otro tensor* distinto del primero y las componentes naturales habrán variado por doble motivo, por haberse modificado el propio tensor y por haber variado el sistema de referencia. Tal ocurre con las componentes H_{rs} de la segunda forma fundamental.

Tal vez sea conveniente advertir que el operador $\mathcal{A}$ (o el $\mathcal{A}_0$) se refiere a una variación de las funcionales F en tanto dependen *explícitamente* de S, es decir, de las $x^i(u)$. Pero al igual que en la mecánica cuántica clásica encontramos magnitudes que dependen explícitamente del tiempo y a la vez dependen implícitamente de él a través de ciertas variables dinámicas de la representación de Heisenberg—por ejemplo, las variables q_i—, también en la versión relativista cuántica una funcional operador lineal puede depender de S por doble motivo, de una parte explícitamente y de otra por modo implícito, al depender de variables dinámicas que varíen con S en virtud de las leyes dinámicas de evolución. Estas se introducen en la teoría como en la mecánica cuántica ordinaria (15) con ligeras variantes debidas a que el papel que en ésta representa el tiempo está representado ahora por las hipersuperficies espaciales parametrizadas S. Así, el estado del sistema sobre la hipersuperficie S es un vector $|X, S>$ que en la representación de Schrödinger se comporta como una funcional de S. Y de la misma manera que para los vectores de estado $|X, t>$ de la mecánica cuántica clásica existe un operador infinitesimal de evolución, H (t), tal que

$$\delta|X, t> = -\frac{i}{\hbar}\delta t\, H(t)\,|X, t>,$$

donde

$$\delta|X, t> \equiv |X, t+\delta t> - |X, t> \equiv \delta t \frac{d}{dt}|X, t>,$$

(15) Cf. Dirac, [1], cap. V; [2], págs. 1093-1096.

en el formalismo relativista se introduce en correspondencia con cada deformación infinitesimal [22] de S un operador lineal A [S] tal que

$$\delta \mid X, S > = - \frac{i}{\hbar} \varepsilon A [S] \mid X, S >,$$

donde

$$\delta \mid X, S > \equiv - i \varepsilon \mathcal{A} [S] \mid X, S > .$$

Las ecuaciones del movimiento adoptan entonces la forma de Schrödinger

$$\mathcal{A} \mid X, S > = - \frac{1}{\hbar} A [S] \mid X, S > \qquad [37]$$

y deben valer para una deformación arbitraria de la forma [22]. El operador A depende de variables dinámicas sobre un hipersuperficie inicial S_0, de la deformación y, eventualmente, de la propia S, mientras que $\mathcal{A}$ es independinte de toda consideración dinámica por su propia definición. Según [24], el operador $\mathcal{A}$ se expresa como combinación lineal de los operadores $\Pi_l(u)$, y puesto que [37] vale para una deformación [22] arbitraria, deben existir cuatro operadores *dinámicos* $P_t(u)$ para cada sistema de valores u^r, tales que el operador A correspondiente a la deformación [22] es

$$A = \int_S^{(3)} d\,n\,(a^0 P_0 + a^r P_r). \qquad [38]$$

Las ecuaciones del movimiento nos dan entonces

$$\Pi_j(n) \mid X, S > = \frac{1}{\hbar} P_j(u) \mid X, S >. \qquad [39]$$

Un razonamiento análogo al que conduce, en la mecánica cuántica clásica, de las variables dinámicas de Schrödinger a las de Heinsenberg, sustituyendo a la vez el vector de estado variable por un vector de estado fijo, permite introducir la representación de Heisenberg en la formulación relativista. Para una variable dinámica V—independiente de S en la representación de Schrödinger—las ecuaciones del movimiento toman entonces la forma

$$\delta V = \frac{i}{\hbar} \varepsilon [A, V], \qquad [40]$$

y, en general, un operador lineal Ω [S] varía al deformar S de acuerdo con

$$\delta\,\Omega\,[\mathrm{S}] = -\,i\,\varepsilon\,[\mathcal{A}, \Omega] + \frac{i\,\varepsilon}{\hbar}\,[\mathrm{A}, \Omega]. \qquad [41]$$

El primer término del segundo miembro toma en cuenta la dependencia explícita de Ω respecto de S; el segundo la dependencia implícita en las variables dinámicas de que acaso depende Ω, variables que obedecen a [40]. Cuando Ω no depende explícitamente de S, $\mathcal{A}$ y Ω conmutan y obtenemos [40]. Cuando Ω no depende de variables dinámicas, por ejemplo el operador «multiplicación por $n^t\,(u)$», Ω conmuta con A y [41] se reduce a [33]. La fórmula [41] da, pues, la variación *total* de Ω cuando se deforma S infinitamente poco.

Se hizo notar más arriba que la funcional de S ligada a un tensor de espacio-tiempo independiente en su definición de las propiedades geométricas de S y *aplicado* a un punto P de S, gozaba de la propiedad de que su variación primera se anulaba para toda deformación de S estacionaria en P. Generalizando esta noción, una variable dinámica V—no dependiente de S por modo explícito—es una *variable dinámica localizada* en P en el sentido de Dirac cuando el conmutador [A, V] se anula para toda deformación de S estacionaria en P. Cuando así sucede, el carácter tensorial de V—que puede poseer varias funcionales componentes respecto de la referencia natural R [P; (n, u)]—se reconoce formando el conmutador con el operador A_0 correspondiente a una deformación de S nula en P. Más general: si Ω es un operador lineal función de variables dinámicas localizadas en P y funcional de S, de tal naturaleza que [41] se anula para toda deformación estacionaria en P, el carácter tensorial de Ω se reconocerá examinando el resultado de [41] para una deformación arbitraria de S nula en P. Por ejemplo, si Ω [S] consta de cuatro componentes Ω^t tales que

$$-\,i\,\varepsilon\left[\mathcal{A}_0 - \frac{1}{\hbar}\,\mathrm{A}_0, \Omega^0\right] \doteq -\,\varepsilon\,\Omega^r\,\frac{\partial a^0}{\partial u^r}\,,$$

$$-\,i\,\varepsilon\left[\mathcal{A}_0 - \frac{1}{\hbar}\,\mathrm{A}_0, \Omega^r\right] = \varepsilon\,\Omega^0\,\frac{\partial a^0}{\partial u^s}\,\mathrm{G}^{sr} - \varepsilon\,\Omega^s\,\frac{\partial a^r}{\partial u^s}\,;$$

el operador Ω se comporta como un vector contravariante (cf. ecuaciones [36_1] y [36_2]). En cualquier caso, la naturaleza tensorial resulta de la comparación con los segundos miembros de [36] o sus combinaciones.

6.—Las ecuaciones [39] constituyen en rigor un sistema de cuatro ecuaciones entre derivadas funcionales parciales (cf. § 4), y su integrabilidad implica que los operadores P_i satisfagan a ciertas relaciones de conmutación descubiertas por Dirac. Estas se pueden obtener de una manera muy simple si se tiene en cuenta la naturaleza de operadores de derivación funcional que caracteriza a los operadores $\Pi_i(u)$ y las relaciones [32]. Vimos en el § 4 que éstas equivalen a las condiciones de conmutabilidad

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^j(u)}, \frac{\delta}{\delta x^k(u')}\right] = 0$$

y es sabido que la condición de integrabilidad de un sistema de la forma

$$\frac{\delta}{\delta x^j(u)} F = X_j(u) F,$$

donde $X_j(u)$ es un operador, es que

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^j(u)}, X_k(u')\right] = 0$$

cuando la funcional F no está sujeta a ninguna condición suplementaria. Si el sistema dinámico es tal que el estado $| X, S >$ puede elegirse arbitrariamente para una S particular, por lo demás cualquiera, la condición [32] nos da entonces, en virtud de [39],

$$\Pi_0(u) P_0(u') - \Pi_0(u') P_0(u) = i \frac{\partial \delta(u-u')}{\partial u'} \left\{ G^{rs}(u) P_s(u) + G^{rs}(u') P_s(u') \right\}$$

ya que aplicar una vez $\Pi_i(u)$ a $| X, S >$ es lo mismo que aplicarle una vez $\frac{1}{\hbar} P_i(u)$, y $| X, S >$ es arbitrario para una S dada. De la relación anterior se deduce, por las mismas consideraciones, que el primer miembro coincide con

$$-\frac{1}{\hbar} [P_0(u), P_0(u')] + P_0(u) \Pi_0(u') - P_0(u') \Pi_0(u) + \Pi_0(u) P_0(u') - \Pi_0(u') P_0(u)$$

y, por consiguiente, que los operadores $P_i(u)$ deben cumplir la condición

$$\frac{1}{\hbar}[P_0(u), P_0(u')] + [\Pi_0(u'), P_0(u)] - [\Pi_0(u), P_0(u')]$$
$$= -i\frac{\partial\,\delta(u-u')}{\partial u^r}\left\{G^{rs}(u)\,P_s(u) + G^{rs}(u')\,P_s(u')\right\}. \qquad [42_1]$$

El mismo procedimiento de sumar y restar a los primeros miembros de [32] los correspondientes conmutadores $[P_i(u), P_j(u')]$ y sustituir en cada término el primer operador de la derecha Π_i por P_i o recíprocamente—sustitución lícita a causa de [39]—nos da a partir de la segunda y tercera relaciones [32] las relaciones de conmutación

$$\frac{1}{\hbar}[P_0(u), P_r(u')] + [\Pi_r(u'), P_0(u)] - [\Pi_0(u), P_r(u')] = -i\frac{\partial\,\delta(u'-u)}{\partial u'^r}P_0(u'), \qquad [42_2]$$

$$\frac{1}{\hbar}[P_r(u), P_s(u')] + [\Pi_s(u'), P_r(u)] - [\Pi_r(u), P_s(u')] = i\frac{\partial\,\delta(u-u')}{\partial u^r}P_s(u)$$
$$+ i\frac{\partial\,\delta(u-u')}{\partial u^s}P_r(u'). \qquad [42_3]$$

Las leyes de conmutación [42] constituyen las condiciones de integrabilidad [49] a [51] de Dirac ([2], pág. 1101), y deben quedar idénticamente satisfechas si ha de ser integrable el sistema [39], en el supuesto que la naturaleza del sistema dinámico no imponga condiciones suplementarias.

Junta de Energía Nuclear
Sección Teórica

Madrid, julio de 1952.

Bibliografía

Courant, R. y Hilbert, D.: *Methoden der mathematischen Physik*, vol. II. (Berlin, Springer, 1937.)

Chang, T. S.: *Relativistic Field Theories.* («Phys. Rev.», 75, 967-971 (1949).)

De Donder, Th.: *Théorie invariantive du calcul des variations.* (Paris, Gauthier-Villars, 1930.)

Dirac, P. A. M.: [1] *The Principles of Quantum Mechanics.* (Oxford, 1947.)

— — [2] *Quantum Theory of Localizable Dynamical Systems* («Phys. Rev.», *73*, 1092-1103 (1948).)

— — [3] *Forms of relativistic dynamics.* («Rev. of Mod. Phys.», *21*, 392-399 (1949).)

DYSON, F. J.: *The radiation theories of Tomonaga, Schwinger and Feynman.* («Phys. Rev.», *75*, 486-502 (1949).)

ORTIZ FORNAGUERA, R.: [1] *Acerca de algunas nociones fundamentales en teoría de la elasticidad.* («Anales de Fís. y Quím., *42*, 581-608 (1946).)

— — [2] *Aspectos elementales de la representación de interacción.* (1950, no publicado.)

— — [3] *Sobre la variancia de las magnitudes en el formalismo canónico.* (REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS E., F. Y N., XLVI, 137-156.)

RAYSKI, J.: *Remarks on the non-local electrodynamics.* («Proc. Roy. Soc.» (London), *206*, 575-583 (1951).)

ROBERTS, A.: On the quantum theory of elementary particles: [1] *Introduction and classical field dynamics.* («Proc. Roy. Soc. (London), *A 204*, 123-143 (1951).)

— — [2] *Quantum field dynamics.* (Ibid., *A 207*, 228-251 (1951).)

SCHOUTEN, J. A.: *Der Ricci-Kalkül.* (Berlin, Springer, 1924.)

SCHWINGER, J.: *Quantum electrodynamics. I. A covariant formulation.* («Phys. Rev.», *74*, 1439-1461 (1948).)

THOMAS, T. Y.: *The differential invariants of generalized spaces.* (Cambridge Univ. Press, 1934.)

TOMONAGA, S.: *On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields.* («Progress of theoret. Phys.», Japón, *1*, 27-42 (1946).)

VOLTERRA, V. y PERES, J.: *Théorie Générale des fonctionelles*, vol. I. (Paris, Gauthier-Villars, 1936.)

WEISS, P.: [1] *On the quantization of a theory arising from a variational principle for multiple integrals.* («Proc. Roy. Soc.» (London), *A 156*, 192-220 (1936).)

— — [2] *On the Hamilton-Jacobi theory of quantization of a dynamical continuum.* (Ibid., *A 169*, 102-118 (1939))

YUKAWA, H.: *Quantum theory of non-local fields.* («Phys. Rev.», *77*, 219-226 (1950).)