Las ecuaciones fundamentales de la Relatividad General.

Sea $\overset{\circ}{\mathfrak{M}}$ una densidad escalar (1) función de los potenciales g^{ik} y de las derivadas màsivas $\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^i}, \frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^j \partial x^h}, \ldots$ hasta un cierto orden. Esta función, de momento indeterminada, tiene como argumentos tan sólo magnitudes características de la métrica del espacio-tiempo, es decir, elementos característicos del campo gravitatorio. La llamamos función característica de la gravitación o densidad escalar gravitatoria.

Pero, por otra parte, sabemos que la estructura métrica del universo depende de la presencia y de la distribución de la materia — y al decir materia no sólo nos referimos a la materia en tanto que forma contrapuesta a energía, sino tambien a la misma energía, salvo la llamada energia gravitatoria en la Física clásica. La intervención de la materia en la estructura métrica del espacio-tiempo se representa matemáticamente por medio de determinadas relaciones que vinculan la densidad escalar gravitatoria con una nueva densidad escalar, $\mathfrak{M}$, que depende en general de los potenciales g^{ik}, de sus derivadas hasta un cierto orden y de otras magnitudes, precisamente las que caracterizan el estado de la materia: velocidades y aceleraciones generalizadas, cantidades de movimiento, esfuerzos, presiones, etc. A este nexo íntimo de la magnitud $\mathfrak{M}$ con el modo de manifestarse la presencia de materia, alude el nombre de función característica fenomenal que le señala De Donder (2) realzando el aspecto de función. En tanto que magnitud, le llamaremos densidad escalar fenomenal.

Introducidas estas dos funciones, las leyes fundamentales de la relatividad general resultan de la siguiente extensión del principio de Hamilton: la variación primera de la integral

$$\int_\Omega (\overset{\circ}{\mathfrak{M}} + \mathfrak{M})\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4, \qquad (1)$$

extendida a un dominio cualquiera de universo, respecto de los potenciales g^{ik} es nula

(1) Brillouin, TM, pg. 47 y s.s.

(2) De Donder, TCh, pg. 3

supuesto que sobre la frontera las variaciones arbitrarias δg^{ik} sean nulas. O sea, en términos físicos, el valor que la integral (1) adquiere en el dominio Ω de la variedad x^i $(i=1,2,3,4)$ de acuerdo con la métrica del universo real y el que tomaría en un espacio-tiempo cuya métrica fuese infinitamente próxima a la de éste (universo quasi-aplicable al universo real) difieren entre sí en infinitésimos de orden superior al primero. La métrica del universo real atribuye, pues, a (1) un valor extremum.

Puede formularse una hipótesis equivalente a la anterior, pero más manejable, una vez introducida la noción de <u>derivada variacional</u> (1). Sea F una función cuyos argumentos son <u>n</u> funciones, u_k, de <u>r</u> variables x^i y las derivadas parciales de las u_k respecto de las x_i hasta un cierto orden. Representemos por

$$u_{k,j_1 j_2 \dots j_s}$$

la derivada de orden <u>s</u> de u_k:

$$u_{k,j_1 j_2 \dots j_s} \equiv \frac{\partial^s u_k}{\partial x_{j_1}\, \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_s}},$$

con lo cual $F = F(u_1, \dots, u_n; u_{1,1}, \dots, u_{1,r}; \dots; u_{n,1}, \dots, u_{n,r}; u_{1,11}, \text{—})$. Pues bien, <u>por definición</u>, la derivada variacional de F respecto de u_k es

$$\frac{\delta F}{\delta u_k} \equiv \frac{\partial F}{\partial u_k} - \sum_{j_1=1}^{r} \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{k,j_1}} \right) + \sum_{j_1, j_2=1}^{r} \frac{\partial^2}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{k,j_1 j_2}} \right) - \dots$$

En particular, si la variable x_i es única y F depende sólo de las u_k y de sus derivadas primeras respecto de x, resulta

$$\frac{\delta F}{\delta u_k} \equiv \frac{\partial F}{\partial u_k} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}_k} \right), \qquad \left(\dot{u}_k = \frac{du_k}{dx} \right),$$

es decir, se obtienen como derivadas variacionales los primeros miembros de las ecuaciones de Lagrange cambiados de signo. Las ecuaciones $\frac{\delta F}{\delta u_k} = 0$ equivalen patentemente a las condiciones

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} F(u_k, \dot{u}_k)\, dx = 0, \quad (\delta u_k)_{x_0} = (\delta u_k)_{x_1} = 0.$$

Sentado esto, la hipótesis a que aludíamos es la siguiente:

I.- <u>En cada punto de universo</u> $\dfrac{\delta(\mathfrak{M} + \mathfrak{M})}{\delta g^{ik}} = 0$, $(i, k = 1, 2, 3, 4)$.

Las diez ecuaciones $\frac{\delta(\mathfrak{M} + \mathfrak{M})}{\delta g^{ik}} = 0$ serán para nosotros las <u>ecuaciones fundamentales</u> de la teoría general (2), aunque no en esta forma, sino en la siguiente:

(1) <u>De Donder</u>, TCh, págs. 2 y 4

(2) <u>De Donder</u>, TCh, pág. 4

(2) $$\underset{\circ}{\mathfrak{T}}_{ik} = \mathfrak{T}_{ik},$$

siendo $\underset{\circ}{\mathfrak{T}}_{ik}$ y $\mathfrak{T}_{ik}$ dos pseudotensores de segundo orden covariantes del tipo densidad (1) definidos por las identidades

(3) $$\underset{\circ}{\mathfrak{T}}_{ik} \equiv \frac{\delta \underset{\circ}{\mathfrak{M}}}{\delta g^{ik}}, \qquad \mathfrak{T}_{ik} \equiv - \frac{\delta \mathfrak{M}}{\delta g^{ik}},$$

y que llamamos, respectivamente, <u>pseudotensor covariante gravitatorio</u> y <u>pseudotensor covariante fenomenal</u> o <u>energético</u>. El carácter de simetría de ambos pseudotensores deriva de la simetría de las componentes g^{ik} del tensor métrico.

La forma de la función $\underset{\circ}{\mathfrak{M}}$, indeterminada hasta ahora al igual que las variables de que depende, es objeto de una segunda hipótesis.

(II) La densidad escalar gravitatoria, $\underset{\circ}{\mathfrak{M}}$, depende sólo del invariante de curvatura, R, y del determinante $g = \| g_{ik} \| < 0$:

$$\underset{\circ}{\mathfrak{M}} = (a + bR)\sqrt{-g},$$

siendo <u>a</u> y <u>b</u> dos constantes universales y $R = g^{ik} R_{ik}$ (2)

Un cálculo laborioso que no reproducimos (5) da, para el pseudotensor covariante gravitatorio, el valor

$$\underset{\circ}{\mathfrak{T}}_{ik} = [b R_{ik} - \tfrac{1}{2}(a + bR) g_{ik}]\sqrt{-g}.$$

o bien

(4) $$\underset{\circ}{T}_{ik} = b R_{ik} - \tfrac{1}{2}(a + bR) g_{ik},$$

donde $\underset{\circ}{T}_{ik}$ es el tensor de segundo orden covariante simétrico

$$\underset{\circ}{T}_{ik} = (-g)^{-\frac{1}{2}} \underset{\circ}{\mathfrak{T}}_{ik}$$

producto del pseudotensor covariante del tipo densidad por la capacidad escalar $(-g)^{-\frac{1}{2}}$ (3).

Si introducimos el tensor de segundo orden covariante simétrico de Einstein $G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}$, la identidad (4) se escribe

$$\underset{\circ}{T}_{ik} = b\, G_{ik} - \tfrac{1}{2} a\, g_{ik}.$$

El segundo término del segundo miembro es el llamado <u>término cósmico</u>, añadido por Einstein en 1917 a la primitiva expresión que había adoptado para $\underset{\circ}{T}_{ik}$ en 1915: $\underset{\circ}{T}_{ik} = b\, G_{ik}$ (4).

Hechas estas hipótesis, las ecuaciones (2) podrán ser escritas

(1) Brillouin, TM, pg. 48

(2) $R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^r_{ir}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^r_{ik}}{\partial x^r} - \Gamma^r_{sr}\Gamma^s_{ik} + \Gamma^r_{sk}\Gamma^s_{ir} = \frac{\partial^2 \operatorname{Log}\sqrt{-g}}{\partial x^i \partial x^k} + \Gamma^s_{ir}\Gamma^r_{sk} - \frac{\partial \Gamma^r_{ik}}{\partial x^r} - \Gamma^r_{ik}\frac{\partial \operatorname{Log}\sqrt{-g}}{\partial x^r}$, (Tensor contraído de Ricci y Einstein).

(3) <u>Brillouin</u>, TM, pg. 109

(4) <u>Laue</u>, TR_2, pg. 261 y s.s.

(5) <u>De Donder</u>, GE, Nota 4, pg. 221

(5) $$b\left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}\right) - \frac{1}{2} a g_{ik} = T_{ik},$$

donde T_{ik} es el tensor energético, $T_{ik} = (-g)^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{T}_{ik}$. De las ecuaciones (5) se deduce, al contraer índices,

$$b R = -2a - T, \qquad T = g^{ik} T_{ik} = T_i^i,$$

y con ello las ecuaciones fundamentales de la relatividad general toman la forma

(6) $$b R_{ik} + \frac{1}{2} a g_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T$$

o también

(6') $$R_{ik} + \lambda g_{ik} = -\varkappa c \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T\right),$$

$$\lambda = \frac{a}{2b}, \quad \varkappa = -\frac{1}{bc}.$$

Conviene señalar cuatro importantes identidades a que satisface el tensor $T^i_{\cdot k} = g^{ij} T_{jk}$. Calculemos su divergencia tensorial, es decir, formemos la expresión $\mathrm{Div}_k T^i_{\cdot k} = \frac{D T^i_k}{D x^i}$. Se tiene:

$$\frac{D T^i_k}{D x^i} = \frac{D}{D x^i}\left[b\left(R^i_{\cdot k} - \frac{1}{2} g^i_k R\right) - \frac{1}{2} a g^i_k\right] = b \frac{D}{D x^i}\left(R^i_{\cdot k} - \frac{1}{2} g^i_k R\right)$$

y dado que, en virtud de las identidades de Bianchi,

$$\frac{D}{D x^i}\left(R^i_{\cdot k} - \frac{1}{2} g^i_k R\right) \equiv 0, \quad (1)$$

resulta ser en todo punto del universo

(7) $$\mathrm{Div}_k T^i_{\cdot k} = \frac{D T^i_k}{D x^i} = 0, \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

es decir, el tensor mixto gravitatorio T^i_k es conservativo.

Igual ocurre con el pseudo tensor mixto $\mathfrak{T}^i_k = (-g)^{\frac{1}{2}} T^i_k$, pues, como se deduce fácilmente del teorema de Ricci (2) $\frac{D\sqrt{-g}}{D x^i} = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, y por consiguiente

(8) $$\mathrm{Div}_k \mathfrak{T}^i_k = \sqrt{-g}\, \frac{D T^i_k}{D x^i} = 0. \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

A estas cuatro últimas identidades se suele dar otra forma que conviene poner de manifiesto. Para obtenerla, calculemos $\frac{D \mathfrak{T}^i_k}{D x^i}$ (3):

$$\frac{D \mathfrak{T}^i_k}{D x^i} = \frac{\partial \mathfrak{T}^i_k}{\partial x^i} - \Gamma^h_{ik} \mathfrak{T}^i_h = \frac{\partial \mathfrak{T}^i_k}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\left(\Gamma_{h,ik} + \Gamma_{i,hk}\right) \mathfrak{T}^{ih} = \frac{\partial \mathfrak{T}^i_k}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^k} \mathfrak{T}^{ih};$$

luego

(8') $$\frac{\partial \mathfrak{T}^i_k}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^k} \mathfrak{T}^{ih} = 0, \ (4) \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

(1) Brillouin, TM, pgs. 133 y 134

(2) Brillouin, TM, pg. 120, ec. (VII. 39 bis)

(3) Brillouin, TM, pg. 82 y 84.

(4) Weyl, RZ, pg. 214

Las cuatro identidades (8) ó (8') son las llamadas por De Donder *identidades fundamentales*. De ellas y de las ecuaciones fundamentales (2) se deducen inmediatamente el *teorema del pseudo tensor fenomenal* (1)

$$(9) \qquad \frac{\partial \mathfrak{T}_k^i}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^k}\mathfrak{T}^{ih} = 0,$$

que pone de manifiesto el carácter conservativo a que se ve sujeto dicho pseudo tensor. Las ecuaciones (9) equivalen, de acuerdo con lo antes dicho, a las siguientes:

$$(9') \qquad \frac{DT_k^i}{Dx^i} = 0$$

A unas y otras indistintamente las llamaremos *ecuaciones de conservación*

En este estadio de la teoría podemos emprender ya el estudio del *problema exterior*, es decir, el relativo a regiones de universo vacías de materia (2). En una tal región debe ser $\mathfrak{T}_{ik}\equiv 0$, con lo que las ecuaciones (6') se reducen a

$$(10) \qquad R_{ik} + \lambda g_{ik} = 0$$

Estas diez ecuaciones constituyen el *sistema de ecuaciones fundamental del problema exterior*.

---

(1) De Donder, TCh, pg. 7 y Weyl, RZ, pg. 214, (ec. 26).

(2) Recuérdese lo dicho acerca del concepto de materia en la pg. 1.

El problema exterior

Aunque algunas de las propiedades estructurales del espacio-tiempo que indicamos a continuación se dan asimismo en las regiones ocupadas por la materia, las estudiamos aquí por ser necesario su conocimiento para llegar a ciertos resultados que nos permitirán considerar con mayor comodidad el sistema (10) a que satisfacen los diez potenciales gravitatorios, g_{ik}, en el vacío.

Sea $ds^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k$ la forma cuadrática diferencial que define el cuadrado del intervalo de universo, forma que, como es sabido, se supone indefinida y de signatura -2 $(+---)$ o sea del tipo hiperbólico normal. La métrica que ella determina es, pues, una métrica pseudoriemanniana y el universo, por tanto, aparece desde este punto de vista como una variedad, $\mathcal{U}_4$, de tal naturaleza.

En el espacio pseudoeuclídeo tangente al $\mathcal{U}_4$ en un punto P consideremos el hipercono real de ecuación puntual

$$(11) \qquad g_{ik}\, X^i X^k = 0$$

y de ecuación tangencial

$$(11') \qquad g^{ik}\, \xi_i\, \xi_k = 0.$$

A este hipercono lo llamaremos hipercono isótropo y su ecuación reducida construida a partir de la métrica pseudoeuclídea tangente, $g_{ik}(P)$, (1), será

$$(C) \qquad (X^4)^2 - \sum_{i=1}^{3} (X^i)^2 = 0.$$

Al cortar con un hiperplano $X^4 = C^{te} = \bar{X}^4$ obtenemos como intersección la esfera

$$(E) \qquad (\bar{X}^4)^2 - \sum_{i=1}^{3} (X^i)^2 = 0.$$

Si X^1, X^2, X^3 hacen positivo al primer miembro, la generatriz PQ, $Q \equiv (X^1 X^2 X^3 \bar{X}^4)$, es interior al hipercono (C) pues $(X^1 X^2 X^3)$ es interior a la esfera (E). El hiperplano conjugado de dicha generatriz, que es normal a la dirección de ésta con arreglo a la métrica $g_{ik}(P)$, no corta al hipercono (C). Diremos en tal caso que la orientación de dicho hiperplano es una orientación espacial (2) y que la dirección conjugada es una dirección temporal. En cambio,

(1) Brillouin, TM, pg. 106

(2) Courant-Hilbert, M, pgs 355 y 451, Levi Civita, DK, pgs. 67, 210 y 214.

si X^1, X^2, X^3 hace negativo el primer miembro, $(X^1 X^2 X^3)$ es exterior a la esfera (E) y la generatriz PQ exterior al hipercono. El hiperplano conjugado de esta generatriz corta a (C) según un cono, su orientación se dirá <u>temporal</u> y la dirección conjugada es una <u>dirección espacial</u>. Luego, en el V_4 una dirección $u^i(P)$ será temporal o espacial según que

$$g_{ik}\, u^i u^k > 0,$$

o bien

$$g_{ik}\, u^i u^k < 0,$$

respectivamente. De ahí se sigue de modo inmediato que una orientación es espacial o temporal según sea

$$g^{ik}\, p_i\, p_k > 0 \qquad \text{o} \qquad g^{ik}\, p_i\, p_k < 0,$$

donde $p_i = g_{ik}\, u^k$ define la orientación conjugada de la dirección u^i.

Apliquemos las consideraciones que preceden a las geodésicas del V_4 que pasan por un punto. Concebidas como curvas autoparalelas, es decir como curvas a lo largo de las cuales el vector tangente $\dot{x}^i(\lambda)$ es estacionario, satisfacen al sistema de cuatro ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\frac{D\dot{x}^i(\lambda)}{D\lambda} = 0, \qquad \left(\dot{x}^i(\lambda) = \frac{dx^i}{d\lambda}\right)$$

o sea

$$(12) \qquad \ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\, \dot{x}^j \dot{x}^k = 0,$$

donde Γ^i_{jk} son las componentes de la conexión afín — que coinciden en nuestra variedad con los símbolos de Christoffel de segunda especie, $\left\{ {jk \atop i} \right\}$ — y λ el llamado <u>parámetro afín</u>.

La integración del sistema (12) introduce siete constantes arbitrarias esenciales; luego, las geodésicas que pasan por un punto dependen de tres parámetros. Ahora bien, dado que $g_{ik}\, \dot{x}^i \dot{x}^k$ es una integral primera del sistema (12), pues

$$\frac{d}{d\lambda}(g_{ik}\, \dot{x}^i \dot{x}^k) = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\, \dot{x}^j \dot{x}^i \dot{x}^k + g_{ik}\, \ddot{x}^i \dot{x}^k + g_{ik}\, \dot{x}^i \ddot{x}^k =$$
$$= \dot{x}^i \dot{x}^j \dot{x}^k \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \Gamma_{k,ij} - \Gamma_{i,kj} \right) \equiv 0 \quad [1],$$

aquellas de entre ellas a lo largo de las cuales es $g_{ik}\, \dot{x}^i \dot{x}^k = 0$ dependerán de dos parámetros. Por un punto P se puede así trazar una doble infinidad de geodésicas de intervalo nulo.

Resumiendo: las geodésicas que parten de P pertenecen a tres tipos: a) geodési-

[1] <u>Brillouin</u>, TM, pg 119.

cas temporales, G_+, interiores al hipercono isótropo de P y dependientes de tres parámetros; b) geodésicas espaciales, G_-, exteriores a dicho hipercono, dependientes igualmente de tres parámetros; c) geodésicas de intervalo nulo [1], G_0, tangentes al hipercono isótropo, las cuales dependen de dos parámetros. La hipersuperficie engendrada por las G_0 que parten de P presenta en P un punto cónico y constituye el que llamaremos conoide característico ligado a P

Además del hipercono isótropo se vincula a cada punto P un segundo hipercono de ecuación, en el espacio pseudoeuclídeo tangente,

$$(13)\qquad R_{ij}\, X^i X^j = 0,$$

el hipercono de Ricci. Las direcciones principales de éste, determinadas a partir de la métrica tangente $g_{ik}(P)$ son las llamadas por Ricci direcciones principales del espacio en el punto P [2]. Dado que las componentes covariantes del vector normal al hiperplano conjugado de la dirección X^i respecto de (13) son $\xi_i = R_{ik} X^k$, para que X^k sea una dirección principal debe ser $\xi_i = S g_{ik} X^k$, es decir, X^k debe ser solución del sistema lineal homogéneo

$$(L)\qquad (R_{ik} - S g_{ik}) X^k = 0, \qquad (i = 1,2,3,4),$$

lo que implica
$$(14)\qquad \| R_{ik} - S g_{ik} \| = 0$$

En una región del espacio-tiempo vacía de materia

$$(10)\qquad R_{ik} + \lambda g_{ik} = 0;$$

luego, en ella el determinante anterior se reduce a

$$(\lambda + S)^4 \| g_{ik} \| = 0$$

cuya única raíz es la $S = -\lambda$. Si se lleva este valor de S al sistema (L), éste se reduce a cuatro identidades, en virtud de (10): en el vacío, las direcciones del espacio principales están indeterminadas en todos los puntos.

Finalmente, otra figura que asociaremos a cada punto $P \in V_4$ será la hipercuádrica
$$(15)\qquad R X^i X_i - R_{ij} X^i X^j = 1$$

[1].- Definidas las geodésicas como curvas autoparalelas, no ofrece ninguna dificultad el considerar las que de entre ellas son de intervalo nulo. Se demuestra [Brillouin, TM, pg. 125] que, cuando una geodésica es de intervalo no nulo, el parámetro afín es una función lineal del intervalo s, pero la conclusión no subsiste para una G_0. [Cf, Levi-Civita, DK, pg. 215]

[2].- Ricci, DI, pgs. 1233 a 1239.

a que, siguiendo a Cartan [1], llamaremos cuádrica de Einstein. Consideremos un elemento de tres dimensiones normal al vector unitario u^i y de área $d\sigma$. La curvatura de dicho elemento puede representarse por un vector infinitesimal $q_i\, d\sigma$, siendo [2]

$$q_i = (g_{ij} R - R_{ij}) u^j$$

El hiperplano diametral conjugado de la dirección u^i respecto de la hipercuádrica (15) tiene por ecuación

$$[(g_{ij} R - R_{ij}) u^j] X^i = 0,$$

es decir

$$q_i X^i = 0,$$

que prueba que el vector q_i es normal a dicho plano.

Es fácil ver que las direcciones principales del espacio-tiempo en el punto P, que son las del hipercono de Ricci ligado a P, coinciden con las de la hipercuádrica de Einstein asociada a P. Las de ésta, en efecto, satisfacen al sistema lineal homogéneo

$$(L') \qquad [R_{ik} - (R+S) g_{ik}] X^k = 0,$$

donde S es raíz de la ecuación

$$(14') \qquad \| R_{ik} - (R+S) g_{ik} \| = 0.$$

Pero las raíces de (14') son las de (14) disminuidas en R; luego, los sistemas (L) y (L') son uno mismo y admiten así las mismas soluciones. Recordando el resultado antes obtenido se deduce de ello que en una porción de universo vacía de materia la hipercuádrica de Einstein es una hiperesfera y en dicha región el invariante de curvatura, R, o curvatura riemanniana escalar, debe ser constante [3].

Este resultado era de prever, pues de las ecuaciones (10), válidas en el vacío, se deduce

$$R^i_i + \lambda g^i_i = 0 \;\therefore\; R + 4\lambda = 0 \;\therefore\; R = -4\lambda = C^{te}$$

Pasemos ahora al examen de las ecuaciones (10) a que deben satisfacer los potenciales g_{ik} en todo problema exterior. Para facilitarlo elegiremos un especial sistema de coordenadas (coordenadas normalizadas) tal que las cuatro ecuaciones

$$(N) \qquad g^{\ell i} \Gamma_{j,\ell i} = 0, \quad (j = 1,2,3,4).$$

1- Cartan, ER, pg. 218

2- Cartan, ER, pg. 219

3- Cartan, ER, pg. 223

queden satisfechas idénticamente [1]. De ellas deducimos, dado que

$$\Gamma_{j,\ell i} = \left[{\ell i \atop j}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} - \frac{\partial g_{\ell i}}{\partial x^j}\right),$$

al derivar respecto de x^h

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{2} g^{\ell i}\left(\frac{\partial^2 g_{\ell j}}{\partial x^i \partial x^h} + \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^\ell \partial x^h} - \frac{\partial^2 g_{\ell i}}{\partial x^j \partial x^h}\right) + A_{jh} = 0,$$

ecuaciones en las que los términos A_{jh} no contienen ninguna derivada parcial de segundo orden de los potenciales de Einstein. Por otra parte

$$(\beta) \qquad R_{jh} = \frac{1}{2} g^{\ell i}\left(\frac{\partial^2 g_{\ell i}}{\partial x^j \partial x^h} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^\ell \partial x^h} - \frac{\partial^2 g_{\ell h}}{\partial x^j \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^\ell \partial x^i}\right) + B_{jh} \quad [2]$$

donde con las B_{jh} ocurre lo que con las A_{jh} antes introducidas.

Sumemos (α) y (β); se obtiene así:

$$R_{jh} = \frac{1}{2} g^{\ell i} \frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^\ell \partial x^i} + \frac{1}{2} g^{\ell i}\left(\frac{\partial^2 g_{\ell j}}{\partial x^i \partial x^h} - \frac{\partial^2 g_{\ell h}}{\partial x^i \partial x^j}\right) + B_{jh} + A_{jh}.$$

Pero

$$\frac{\partial \Gamma^i_{ji}}{\partial x^h} = \frac{\partial \Gamma^i_{hi}}{\partial x^j} \qquad y \qquad \Gamma_{\ell,ji} + \Gamma_{j,\ell i} = \frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x^i}. \qquad \text{(Brillouin, TH, pgs. 132 y 119);}$$

luego se podrá escribir

$$R_{jh} = \frac{1}{2} g^{\ell i} \frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^\ell \partial x^i} + K_{jh},$$

donde K_{jh} contiene sólo derivadas de primer orden, con lo que las ecuaciones (10) válidas en el espacio-tiempo libre de materia tomarán la forma

$$(16) \qquad \frac{1}{2} g^{\ell i} \frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^\ell \partial x^i} + H_{jh} = 0 \quad , \quad (H_{jh} = K_{jh} + \lambda g_{jh}).$$

Hemos conseguido así transformar el sistema (10) en otro equivalente en el cual cada ecuación contiene las derivadas segundas de <u>un solo potencial</u>. Los coeficientes de la parte principal

$$L[g_{jh}] = \frac{1}{2} g^{\ell i} \frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^\ell \partial x^i}$$

son los mismos en todas ellas y la ecuación de las hipersuperficies características

$$(17) \qquad g^{\ell i} \frac{\partial u}{\partial x^\ell} \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0,$$

[1].- <u>De Donder</u>, GE, pg 110 (ec. 117₂). || <u>Birkhoff</u> (R, pg. 125) las denomina coordenadas intrínsecas || <u>K. Lanczos</u> (KS, pg. 537) impone las condiciones $g^{\ell i}\Gamma^j_{\ell i} = 0$ equivalentes a las de De Donder.
[2].- <u>Brillouin</u>, TH pgs 131 y 132, <u>Appel-Thyri</u>, CT, pgs. 58 y 63. El tensor contraído de curvatura que utilizamos es el definido por $R_{\beta\gamma} = R^{\lambda}_{\cdot\beta\gamma\lambda}$ (De Donder, Appel-Thiry). Weyl, Brillouin y otros efectúan otra contracción: $R_{\beta,\delta} = R^{\lambda}_{\cdot\beta,\lambda\delta}$. La consecuencia de ello es un cambio de signo en las $R_{\beta\gamma}$ que procede de la antisimetría $(\alpha\beta)$ y $(\gamma\delta)$ del tensor $R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$

hipersuperficies que son tangentes en cada uno de sus puntos al hipercono característico correspondiente, precisamente al hipercono isótropo.

Determinemos las líneas características de la ecuación de primer orden (17). El sistema característico a ella asociado [1] es

$$(18)\qquad \frac{dx^i}{dt} = g^{ik} p_k, \qquad \frac{du}{dt} = g^{ik} p_i p_k, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^i} p_j p_k, \qquad \left(p_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}\right),$$

y una banda solución será característica si a lo largo de ella la integral primera de (18) $g^{ik} p_i p_k$ es nula. Las componentes covariantes del vector $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ son $v_i = g_{ik} v^k = p_i$, de donde resulta que a lo largo de una línea característica

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^i} v_j v_k;$$

pero
$$g^{jk} \cdot g_{jh} = g^k_h = \left\{ \begin{matrix} 0, & \text{si } k \neq h \\ 1, & \text{si } k = h \end{matrix} \right\} = \text{constante}$$

y, por consiguiente,
$$\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^i} = -g^{lk} g^{hj} \frac{\partial g_{lh}}{\partial x^i},$$

es decir
$$\frac{dv_i}{dt} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{lh}}{\partial x^i} v^l v^h = 0.$$

Estas cuatro identidades subsistentes a lo largo de una línea característica, junto con

$$0 = g^{ik} p_i p_k = g_{ik} v^i v^k,$$

prueban que las líneas características de (17) son geodésicas de intervalo nulo a lo largo de las cuales es $u = C^{te}$. Toda hipersuperficie integral de (17) puede ser engendrada, por consiguiente, por una familia de g_0 dependiente de dos parámetros. Siguiendo a De Donder [2], a las hipersuperficies $u = C^{te}$ cuyo primer miembro es solución de (17) las llamaremos <u>hipersuperficies de ondas gravitatorias</u> y a las líneas características — las geodésicas de intervalo nulo — <u>rayos gravitatorios</u>.

La significación de las condiciones complementarias (N) puede reconocerse del siguiente modo [3]: consideremos la ecuación entre derivadas parciales de segundo orden $\Delta V = 0$, siendo $V(P)$ un escalar y Δ el operador de Laplace generalizado

$$\Delta V = g^{ik}\frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial V}{\partial x^k}\left(g^{ik}\Gamma^h_{ih} + \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^i}\right) = g^{ik}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^k} - \Gamma^h_{ki}\frac{\partial V}{\partial x^h}\right) [4],$$

[1].- <u>Courant-Hilbert</u>, M, pg. 82

[2].- <u>De Donder</u> GE, pg. 110, (ec. 117_5 y 117_6)

[3].- <u>Darmois</u>, EG, pg. 16

[4].- <u>Brillouin</u>, TH, p. 121 y 119.

o sea, la ecuación

$$(19) \qquad g^{ik}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^k} - \Gamma^h_{ki}\frac{\partial V}{\partial x^h}\right) = 0.$$

Conforme demuestra el razonamiento anterior, las líneas bicaracterísticas de (19) son las geodésicas de intervalo nulo, las hipersuperficies características, las integrales de (7).[1] igualadas a una constante.

Sentado esto, sean V^1, V^2, V^3, V^4 cuatro integrales particulares independientes de la ecuación (19) y efectuemos el cambio de variables

$$(20) \qquad \bar{x}^i = V^i(x^1, x^2, x^3, x^4) \quad , \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

El primer miembro de (19) es un escalar cuya expresión en el sistema $\bar{x}$ será

$$\bar{g}^{ik}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} - \bar{\Gamma}^h_{ki}\frac{\partial V}{\partial \bar{x}^h}\right).$$

La ecuación transformada de la (19)

$$\bar{g}^{ik}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} - \bar{\Gamma}^h_{ki}\frac{\partial V}{\partial \bar{x}^h}\right) = 0$$

debe admitir las cuatro integrales particulares

$$V = \bar{x}^1, \qquad V = \bar{x}^2, \qquad V = \bar{x}^3, \qquad V = \bar{x}^4,$$

lo que exige que $\qquad \bar{g}^{ik}\bar{\Gamma}^h_{ik} \equiv 0, \qquad$ (condiciones de Lanczos)

es decir $\qquad \bar{g}^{ik}\bar{\Gamma}_{h,ik} \equiv 0. \qquad$ (condiciones de De Donder)

Resulta así que las coordenadas $\bar{x}^i$ ligadas con las primitivas por las ecuaciones (20) son coordenadas normalizadas en el sentido de De Donder. Recíprocamente, en un sistema de coordenadas normalizadas, $V = x^i$ es integral particular de $\Delta V = 0$. Un tal sistema está, pues, constituido por cuatro familias independientes de hiper-superficies $V = C^{te}$, siendo V integral de $\Delta V = 0$, y desempeña en el espacio-tiempo un papel análogo al que juegan las superficies isotermas en el espacio euclídeo de tres dimensiones.

Consideremos de nuevo las ecuaciones fundamentales (10). Si elegimos un sistema de coordenadas normalizadas, el sistema (10) toma la forma

$$(16) \qquad \frac{1}{2} g^{\ell i}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\ell \partial x^i} + H_{jk} = 0,$$

conforme sabemos. H_{jk} contiene sólo derivadas primeras de los potenciales g_{ik}.

El sistema (16) constituye un sistema de 10 ecuaciones entre derivadas parciales

[1].- Courant-Hilbert, II, pg. 351.

les de 2.º orden. Pero no todas ellas son independientes, pues las ecuaciones de conservación

$$Div_j\,(R^{\cdot j}_{\cdot h} - \tfrac{1}{2} g^j_h R) = 0\,, \qquad (h = 1,2,3,4),$$

ponen de manifiesto que entre los primeros miembros de (10) y, por consiguiente, entre los primeros miembros de (16), existen cuatro relaciones independientes, lo que reduce a seis el número de ecuaciones efectivas. Sin embargo, teniendo en cuenta que las variables adoptadas son normalizadas, al sistema (16) deben añadirse las condiciones complementarias

$$g^{li}\,\Gamma_{j,li} = 0, \qquad (j = 1,2,3,4),$$

que son ecuaciones entre derivadas parciales de primer orden, lineales respecto de éstas.

Sea $\varphi(x^1, x^2, x^3, x^4) = 0$ una hipersuperficie S a lo largo y a través de la cual los diez potenciales, como asimismo sus derivadas parciales de primer orden, son funciones continuas de las x^i. El razonamiento expuesto en Courant-Hilbert, II, pg. 356 es aplicable a cada una de las ecuaciones (16), es decir, si representamos por (f) la discontinuidad finita o salto (Sprung) de una función f al atravesar la hipersuperficie S yendo, por ejemplo, de la cara $(-)$ a la cara $(+)$, se tiene

$$\left(\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^l \partial x^i}\right) = \lambda_{jh} \frac{\partial \varphi}{\partial x^l} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\,,$$

$$(g^{li}) = 0\,, \qquad (H_{jh}) = 0\,,$$

con lo cual resulta

$$g^{li}\left(\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^l \partial x^i}\right) = 0.$$

Si una por lo menos de las discontinuidades existe efectivamente, la ecuación anterior obligará a que a lo largo de $\varphi = 0$ sea

$$g^{li} \frac{\partial \varphi}{\partial x^l} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = 0,$$

es decir, que $\varphi = 0$ sea una hipersuperficie característica.

Al mismo resultado se llega si las discontinuidades se suponen de orden superior al segundo, pues basta con derivar (16) hasta que aparezcan las derivadas del orden que se ha supuesto. Claro está que, en tal caso, ello es cierto si las derivadas de orden inferior son continuas a lo largo y a través de S. Resumiendo: las únicas superficies a través de las cuales puede presentarse un salto en los valores de las derivadas segundas o en las de orden superior, son las hipersuperficies características $u = C^{te}$, siendo u una integral de (17). Esto justifica el que se las haya llamado (pg. 11) hipersuperficies de onda gravitatoria, por el carácter de bases de discontinuidades que es común a ellas y a las superficies de onda de los fenómenos de propagación clásicos.(1)

El problema interior

Las ecuaciones que corresponden al problema interior exigen evidentemente la definición del tensor de energía T_{ik}, que constituye el esquema analítico que debe representar la intervención de la materia en los procesos físicos. Desde este punto de vista se comprende que surja una cierta indeterminación teórica en la elección de los elementos que deben figurar en dicho tensor. Pero esta indeterminación se reduce de hecho, al considerar que, a), en T_{ik} deben figurar aquellos elementos que en cada orden de fenómenos se han reconocido como más importantes desde el punto de vista experimental y, b), tales magnitudes han de poderse ligar con la experiencia directa a fin de que quepa una comprobación empírica de los resultados obtenidos.

Dado que en los fenómenos de carácter gravitatorio en sentido clásico, el papel principal lo atribuimos a la materia másica, prescindiremos en lo que sigue de aquellos términos que en T_{ik} traducen los efectos electromagnéticos [2] y eligiremos como función característica fenomenal (pg. 1)

$$(21) \qquad \mathfrak{M} = -g^{ik}(\mathfrak{N} u_i u_k + \mathfrak{L}_{ik})$$

en la que: a) u_i son las componentes covariantes del vector $u^i = \frac{dx^i}{ds}$, es decir

$$u_i = g_{ik}\frac{dx^k}{ds},$$

de modo que

$$W^2 = |u|^2 = u_i u^i = g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 1;$$

[1].- Acerca de este punto pueden consultarse las dos obras de J. Hadamard. « Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodinamique » (Paris, 1903) y « Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques » (Paris, 1932).

[2].- En caso contrario, véase, De Donder, TCh, pg. 52 (ec. 315) y pg. 56 (ec. 333).

se trata, pues, de un vector unitario (vector velocidad unitario) [1]; b) $\mathfrak{N}$ es una densidad escalar que está ligada desde luego con la masa específica (cantidad de masa por unidad de contenido volumétrico [2]) que obtendría un observador[S] que acompañara en su movimiento a la materia [3]; c) finalmente, $\mathfrak{P}_{ik}$ es un pseudotensor de segundo orden covariante simétrico que depende a la vez de las tensiones internas, de la cantidad de movimiento específica y de la energía específica determinadas por un tal observador. S.- Se trata de una magnitud macroscópica, de valor medio.

De (21) se deduce fácilmente el pseudotensor de energía, de acuerdo con su definición (3),

$$(22) \qquad \mathfrak{T}_{ik} = \mathfrak{N} u_i u_k + \mathfrak{P}_{ik},$$

como también el tensor energético

$$(22') \qquad T_{ik} = N u_i u_k + P_{ik},$$

donde N es el escalar $(-g)^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{N}$ y P_{ik} el tensor covariante $(-g)^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{P}_{ik}$. Entre N, T y $P = P_i^i$ existe la relación

$$T = N + P,$$

que se deduce inmediatamente de (22') y de $u_i u^i = 1$. Con ello, las ecuaciones fundamentales (6) se escribirán

$$(23) \qquad b R_{ik} + \frac{1}{2} a g_{ik} = N\left(u_i u_k - \frac{1}{2} g_{ik}\right) + P_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} P.$$

El sistema (23) es el <u>sistema de ecuaciones fundamental del campo gravitatorio másico</u>.

Recordemos que el pseudotensor $\mathfrak{T}_k^i$ debe ser conservativo (ec. 9), de modo que

$$(9) \qquad \frac{\partial \mathfrak{T}_k^i}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^k}\mathfrak{T}^{ih} = \frac{\partial \mathfrak{T}_k^i}{\partial x^i} - \Gamma^h_{ik}\mathfrak{T}^i_h = 0$$

Al substituir en las ecuaciones (9) $\mathfrak{T}_k^i$ por el valor particular que corresponde al campo másico, obtenemos

$$(24) \qquad \frac{\partial(\mathfrak{N} u_k u^i)}{\partial x^i} - \mathfrak{N}\Gamma^h_{ik} u^i u_h + \frac{\partial \mathfrak{P}^i_k}{\partial x^i} - \Gamma^h_{ik}\mathfrak{P}^i_h = 0.$$

Es fácil demostrar que, si $\mathfrak{A}_k^i$ es un pseudotensor mixto, $\frac{\partial \mathfrak{A}^i_k}{\partial x^i} - \Gamma^h_{ik}\mathfrak{A}^i_h$ es un pseudo=

[1].- <u>De Donder</u>, IG, pg. 46, (ec. 169 y 172), llama <u>velocidad contravariante</u> al vector cu^i (c=velocidad de la luz)

[2].- <u>Brillouin</u>, TM, pg. 110 (ec. 68)

[3].- <u>De Donder</u>, TCh, pg. 23.

vector covariante, de modo que es legítimo hacer

$$(A) \qquad \frac{\partial(\mathcal{M} u_k u^i)}{\partial x^i} - \mathcal{M}\Gamma^h_{ik} u^i u_h = \mathcal{M}_K, \qquad \frac{\partial \mathcal{P}^i_K}{\partial x^i} - \Gamma^h_{ik}\mathcal{P}^i_h = \mathcal{P}_K.$$

En función de estos dos nuevos pseudovectores, las ecuaciones (24) pueden escribirse simplemente

$$(24') \qquad \mathcal{M}_K + \mathcal{P}_K = 0,$$

o también, si introducimos la aceleración generalizada [1]

$$A_K = \frac{Du_K}{Ds} = \frac{du_K}{ds} - \Gamma^h_{iK} u^i u_h,$$

con lo cual

$$\mathcal{M}_K = \frac{\partial(\mathcal{M} u^i)}{\partial x^i} u_K + \mathcal{M} u^i \frac{\partial u_K}{\partial x^i} - \mathcal{M}\frac{du_K}{ds} + \mathcal{M} A_K = \frac{\partial(\mathcal{M} u^i)}{\partial x^i} u_K + \mathcal{M} A_K,$$

$$(24'') \qquad \mathcal{M} A_K + u_K \frac{\partial(\mathcal{M} u^i)}{\partial x^i} + \mathcal{P}_K = 0;$$

y dado que

$$A_K u^K = \frac{1}{2}\frac{dW^2}{ds} = 0,$$

multiplicando (24'') por u^K y contrayendo obtenemos la ecuación de continuidad generalizada

$$(25) \qquad \frac{\partial(\mathcal{M} u^i)}{\partial x^i} + \mathcal{P}_K u^K = 0.$$

Merced a ella, las ecuaciones (24'') pueden ser puestas en la forma

$$(24''') \qquad \mathcal{M} A_K + \mathcal{P}_K - u_K \mathcal{P}_h u^h = 0$$

o bien

$$(24''') \qquad \mathcal{M} A^K + \mathcal{P}^K - u^K \mathcal{P}_h u^h = 0,$$

en función de las componentes contravariantes.

Establecidas ya las ecuaciones fundamentales, consideremos en primer lugar el caso en que el campo gravitatorio es producido por partículas másicas independientes, algo así como una nube de polvo fino cuyas partículas integrantes no actúan entre sí [2]. El problema correspondiente es el problema interior esquematizado [3] o el del fluido incoherente [4]

La no interacción de las partículas se traduce en la anulación del pseudotensor $\mathcal{P}_{iK}$. Esta propiedad que atribuimos al fluido incoherente constituye su definición analítica.

Veamos a qué quedan reducidas las ecuaciones generales (23). Puesto que $\mathcal{P}_{iK} = 0$, serán cero P_{iK} y también $P = g^{iK} P_{iK}$. Luego, según (23),

$$(26) \qquad b R_{iK} + \frac{1}{2} a g_{iK} = M(u_i u_K - \frac{1}{2} g_{iK})$$

[1].- De Donder, TG, pg. 49, llama aceleración covariante a $c^2 A_K$.

[2].- Einstein, CR, pg. 46 [3].- Darmois, EG, pg. 22 [4].- De Donder, TCh, pg. 13

y, de acuerdo con (25)

$$(27) \qquad \frac{\partial(\mathcal{N}u^i)}{\partial x^i} = 0.$$

En aquellos puntos en los que $\mathcal{N} \neq 0$, la aceleración generalizada es nula en virtud de (24''), es decir, en dichos puntos

$$A^k = \frac{Du^k}{Ds} = 0;$$

las trayectorias de los diferentes puntos másicos —las líneas de corriente— son, pues, geodésicas de universo, de modo que a lo largo de cada una de ellas se conserva la dirección del vector tangente.

Consideremos en segundo lugar el problema relativo al campo gravitatorio originado por un sistema continuo en el que aparecen tensiones internas, limitándonos, con todo, a un estado de la materia másica en el que

$$(28) \qquad P^i_k = -\delta^i_k p,$$

donde p es un escalar función de punto y $\delta^i_k = 0$ si $i \neq k$, $\delta^i_k = 1$ si $i = k$. Por analogía con la hidrodinámica clásica, llamaremos a un fluido en dicho estado, un fluido perfecto.

Es fácil demostrar que la noción de fluido perfecto que deriva de (28) posee un sentido intrínseco ya que, supuesto que (28) se verifica en un cierto sistema de coordenadas x^i, en otro sistema $\bar{x}^i$ se tendrá

$$\bar{P}^i_k = \beta^i_r \alpha^s_k P^r_s = -\beta^i_r \alpha^s_k \delta^r_s p = -\delta^i_k p,$$

siendo,

$$\alpha^s_k = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k} \qquad y \qquad \beta^i_r = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}.$$

Sentado esto, las ecuaciones fundamentales del campo gravitatorio creado por un fluido perfecto se deducirán de (23) mediante la introducción del tensor (28):

$$(29) \qquad bR_{ik} + \frac{1}{2} a g_{ik} = N(u_i u_k - \frac{1}{2} g_{ik}) + g_{ik} p,$$

ya que

$$P_{ik} = -g_{ik} p, \qquad P = P^i_i = -\delta^i_i p = -4p.$$

En cuanto a la ecuación de continuidad (25), adquiere la forma

$$(30) \qquad \frac{\partial(\mathcal{N}u^i)}{\partial x^i} - \sqrt{-g}\,\frac{\partial p}{\partial x^k} u^k = 0,$$

dado que de la definición (A, pg. 16) de $\mathcal{L}_k$ se sigue que, en nuestro caso,

$$\mathcal{L}_k = -\sqrt{-g}\,\frac{\partial p}{\partial x^k} - p\,\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{ik}\sqrt{-g}\,p = -(-g)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial p}{\partial x^k}$$

El vector p_k no es, pues, más que el gradiente del escalar p. Finalmente, las ecuaciones (24'') pasan a ser las siguientes:

$$\mathcal{N} A_k + u_k \frac{\partial(\mathcal{N} u^i)}{\partial x^i} = (-g)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial p}{\partial x^k},$$

o bien

$$(31) \qquad N.\frac{Du^k}{Ds} + u^k \operatorname{div}(\mathcal{N} u^i) = p^k;$$

donde $\operatorname{div}(\mathcal{N} u^i)$ es la divergencia escalar

$$\operatorname{div}(\mathcal{N} u^i) = (-g)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial(\mathcal{N} u^i)}{\partial x^i}$$

y p^k las componentes contravariantes del vector grad p.

Las ecuaciones (31) son susceptibles de una sugestiva interpretación geométrica: sea R el radio de curvatura de la línea de corriente, n^k las componentes contravariantes de la normal principal ($n_k n^k = 1$). Se tiene [1]:

$$\frac{Du^k}{Ds} = \frac{n^k}{R};$$

luego

$$(31') \qquad \frac{N}{R} n^k + \operatorname{div}(\mathcal{N} \vec{u}).\, u^k = p^k;$$

es decir, en cada punto de una línea de corriente el vector grad p es resultante del vector $\frac{N}{R}\vec{n}$ cuya base es la normal principal y del vector $\operatorname{div}(\mathcal{N}\vec{u})\cdot\vec{u}$, del que lo es el vector tangente.

En los puntos en que $N \neq 0$, la ecuación (31) es equivalente a la

$$(31'') \qquad A^k = \frac{Du^k}{Ds} = \frac{1}{N} p_i (g^{ik} - u^i u^k),$$

de la que haremos uso en lo que sigue.

Conviene advertir que a las ecuaciones (28) suele aparecer adjunta una ecuación complementaria, que liga N y p, y que supondremos puesta en la forma.

$$(32) \qquad N - p = \varphi(p).$$

Según hemos ya visto, las líneas de corriente de un fluido incoherente son geodésicas del espacio-tiempo cuyo tensor métrico es el g_{ik}. En este orden de ideas, Eisenhart [2] demostró un teorema relativo a las líneas de corriente de un fluido perfecto según el cual éstas son geodésicas de un espacio de Riemann cuyo

[1].- Cartan, ER, pg. 99.

[2].- Eisenhart, Trans. of Amer. Math. Soc., 1924, pg. 206.

métrica es (33) $$d\bar{s}^2 = e^{2\varphi} ds^2,$$

siendo $$\varphi = \int \frac{dp}{N}$$

la energía específica de presión generalizada [1].

Para demostrarlo, veamos en qué se transforma $\frac{Du^k}{Ds}$ cuando se adopta la métrica definida por (33). Es fácil ver que, si $\bar{g}_{ik}$, $\bar{\Gamma}_{i,jk}$, etc. son las magnitudes correspondientes a g_{ik}, $\Gamma_{i,jk}$, etc., se tiene

$$g_{ik} = \bar{g}_{ik} e^{-2\varphi}, \qquad g^{ik} = \bar{g}^{ik} e^{2\varphi}, \qquad u^k = \bar{u}^k e^{\varphi}$$

y que $$\Gamma_{k,ij} = e^{-2\varphi}\left(\bar{\Gamma}_{k,ij} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\bar{g}_{ik} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\bar{g}_{kj} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\bar{g}_{ji}\right),$$

$$\frac{\partial u^k}{\partial x^i} = \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial x^i} e^{\varphi} + \bar{u}^k e^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}.$$

luego:

$$\frac{Du^k}{Ds} = \frac{Du^k}{Dx^i} u^i = \left(\frac{\partial u^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ij} u^j\right) u^i =$$

$$= e^{2\varphi}\left(\frac{\partial \bar{u}^k}{\partial x^i} + \bar{u}^k \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} + \bar{\Gamma}^k_{ij}\bar{u}^j - \frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\bar{g}^k_i \bar{u}^j - \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\bar{g}^j_k \bar{u}^j + \frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\bar{g}_{ji}\bar{g}^{kh}\bar{u}^j\right)\bar{u}^i$$

$$= e^{2\varphi}\left[\frac{D\bar{u}^k}{D\bar{s}} + (\bar{g}^{kh} - \bar{u}^k\bar{u}^h)\frac{\partial\varphi}{\partial x^h}\right] = e^{2\varphi}\frac{D\bar{u}^k}{D\bar{s}} + (g^{kh} - u^k u^h)\frac{1}{N}\frac{\partial p}{\partial x^h}$$

y, en virtud de (31") $$\frac{D\bar{u}^k}{D\bar{s}} = 0,$$

como queríamos demostrar.

Antes de pasar a la interpretación <u>en el espacio y en el tiempo</u> de los resultados obtenidos hasta aquí, señalaremos una anisotropía en la estructura geométrica del espacio-tiempo en el seno de un fluido frente a la estructura simétrica que se da en las regiones privadas de materia. Vimos que en éstas las direcciones principales en el sentido de Ricci estaban indeterminadas en cada uno de sus puntos. Consideremos, en cambio, una región ocupada por un fluido incoherente. En ella, y en virtud de (26),

$$b R_{ik} = N u_i u_k - \frac{a+N}{2} g_{ik},$$

de modo que las direcciones principales del hipercono de Ricci vendrán dadas por el sistema
$$[N u_i u_k - \left(\frac{a+N}{2} + S'\right) g_{ik}] X^k = 0,$$
donde S' es raíz de la ecuación característica

(*) $$\left\| N u_i u_k - \left(\frac{a+N}{2} + S'\right) g_{ik} \right\| = 0.$$

[1].- <u>Bruhat</u>, Mécanique, pg. 513, Paris, 1940 <u>Levi-Civita y Amaldi</u>, Compendio di Mecc. Razionale <u>vol II</u>, pg. 277, Bologna, 1938

Estas direcciones principales coinciden con las del hipercono $u_i u_k X^i X^k = 0$. En efecto, las de éste se obtienen, a partir de

$$(N u_i u_k - S g_{ik}) X^k = 0,$$

siendo S raiz de (C) $\| N u_i u_k - S g_{ik} \| = 0$.

Pero, si S_1 es una raiz de (C), $S_1' = S_1 - \frac{a+N}{2}$ lo será de (*) y para dichos valores los dos sistemas lineales homogéneos coinciden. Ahora bien, el hipercono $u_i u_k X^i X^k = 0$ se reduce a un hiperplano doble, ya que su ecuación puede escribirse $(u_i X^i)^2 = 0$. Luego, existe una sola dirección principal privilegiada – la del vector u^i, la de la línea de corriente que pasa por el punto P considerado – mientras que en el hiperplano $u_i X^i = 0$ las direcciones principales aparecen totalmente indeterminadas: todas las direcciones son equivalentes cuando pertenecen al hiperplano normal a la línea de corriente en el punto P.

Cabe el demostrar que esta estructura subsiste en el seno de un fluido perfecto.

Hablábamos en la página anterior de una interpretación en el espacio y en el tiempo. Con ello queremos significar que a una de las coordenadas – la x^4, p.e. – le atribuimos un papel especial considerándola como representante del tiempo t, mientras los otros tres parámetros x^1, x^2, x^3 se referirán al espacio. De acuerdo con esto haremos

$$x^4 = t, \quad v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt} \quad (\alpha = 1,2,3) \ [1], \quad v^4 = 1$$

$$V = \frac{ds}{dt} = (g_{ij} v^i v^j)^{\frac{1}{2}}, \quad u^4 = V^{-1}$$

de donde

$$v^i = V u^i,$$

$$A^i = V^{-1}\left[\frac{d}{dt}(v^i V^{-1}) + V^{-1} \Gamma^i_{jk} v^j v^k\right]$$

o también

$$A^i = V^{-2}\left[\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk} v^j v^k\right] - V^{-3}\frac{dV}{dt} v^i$$

La substitución de estos valores en (34) nos da,

$$(34) \quad \pi V^{-1}\left[v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(g_{jk} v^j V^{-1}) - \frac{1}{2} V^{-1} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} v^i v^j\right] -$$
$$- V^{-2}(R_i v^i) g_{jk} v^j + R_k = 0,$$

mientras que la ecuación de continuidad (l5) se escribe

$$(35) \quad \frac{\partial(\pi V^{-1} v^i)}{\partial x^i} + V^{-1} R_k v^k = 0.$$

[1].- En lo que sigue y salvo advertencia expresa, los índices latinos tomarán los valores 1, 2, 3, 4, los índices griegos los valores 1, 2, 3.

y las ecuaciones (24^{IV}) toman la forma

(36) $$V^{-1}\mathcal{N}\left[\frac{d}{dt}(V^{-1}v^i)+V^{-1}\Gamma^i_{jk}\,v^j v^k\right]-V^{-2}v^i(\mathcal{L}_k v^k)+\mathcal{L}^i=0$$

o, lo que es lo mismo,

(36') $$V^{-2}\mathcal{N}\left[\frac{d^2x^i}{dt^2}-\frac{d\operatorname{Log}V}{dt}v^i+\Gamma^i_{jk}v^j v^k\right]-V^{-2}v^i(\mathcal{L}_k v^k)+\mathcal{L}^i=0$$

Para $i=4$ esta ecuación se reduce a

$$V^{-2}\mathcal{N}\left(-\frac{d\operatorname{Log}V}{dt}+\Gamma^4_{jk}\,v^j v^k\right)-V^{-2}(\mathcal{L}_k v^k)+\mathcal{L}^4=0,$$

lo que permite escribir las ecuaciones (36) en la forma equivalente

(37) $$V^{-2}\mathcal{N}\left[\frac{d^2x^\alpha}{dt^2}+\left(\Gamma^\alpha_{jk}-v^\alpha\Gamma^4_{jk}\right)v^j v^k\right]+\mathcal{L}^\alpha-v^\alpha\mathcal{L}^4=0.$$

$$(\alpha=1,2,3\ ;\ j,k=1,2,3,4)$$

El sistema (37) constituye el sistema fundamental de la dinámica relativista de los fluidos másicos.

Consideremos, en particular, un fluido incoherente. En virtud de (36), en todos los puntos en que $N\neq 0$, será

(38) $$\frac{d}{dt}(V^{-1}v^i)+V^{-1}\Gamma^i_{jk}\,v^j v^k=0,$$

donde $\frac{d}{dt}$ es el operador $\frac{d}{dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{3}v^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ o derivada substancial [1], es decir, la derivada respecto del tiempo que surge al estudiar las variaciones de la magnitud que se considere asociada al elemento de volumen cuando se sigue a éste en su movimiento.

En cuanto a la ecuación de continuidad, queda reducida a

(39) $$\frac{\partial(\mathcal{N}V^{-1}v^i)}{\partial x^i}=0.$$

Sea $\mathcal{U}(x^1,x^2,x^3,x^4)$ un escalar cualquiera y $D(t)$ un dominio fijo en la materia. La derivada substancial respecto de t de la integral

$$\int_{D(t)}\mathcal{U}(x^1,x^2,x^3,t)\,dx^1dx^2dx^3$$

vale

$$\frac{d}{dt}\int_{D(t)}\mathcal{U}(x^1,x^2,x^3,t)\,dx^1dx^2dx^3=\int_{D(t)}\left[\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial(\mathcal{U}v^\alpha)}{\partial x^\alpha}\right]dx^1dx^2dx^3;$$

luego

$$\frac{d}{dt}\int_{D(t)}(\mathcal{N}V^{-1})\,dx^1dx^2dx^3=\int_{D(t)}\left[\frac{\partial(\mathcal{N}V^{-1})}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial(\mathcal{N}V^{-1}v^\alpha)}{\partial x^\alpha}\right]dx^1dx^2dx^3=$$

$$=\int_{D(t)}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial(\mathcal{N}V^{-1}v^i)}{\partial x^i}\,dx^1dx^2dx^3=0$$

[1].- Levi Civita, MRa, pg. 243.

cualquiera que sea $D(t)$. Si hacemos

$$(40) \qquad \delta m^* = \frac{\mathcal{N} V^{-1}}{c^2} dx^1 dx^2 dx^3,$$

el resultado que acabamos de obtener se escribirá:

$$(41) \qquad \frac{d}{dt}\int_{D(t)} (\delta m^*) = 0.$$

La magnitud $\int_{D(t)} \delta m^*$ es pues, un algo que se conserva en la evolución del fluido (a lo que podríamos llamar la materia contenida en $D(t)$)

Si multiplicamos por δm^* los dos miembros de (38), siendo $\frac{d}{dt}(\delta m^*) = 0$ según (41) obtendremos
$$\frac{d}{dt}(v^\alpha V^{-1}\delta m^*) + V^{-1}\delta m^* \, \Gamma^\alpha_{jk} v^j v^k = 0,$$
ecuaciones que al ser comparadas con las de la mecánica clásica del punto material
$$\frac{d}{dt}(\delta m \vec{v}) - \delta m \vec{K} = 0 \qquad (\vec{K} = \text{fuerza aplicada específica}),$$
conducen a interpretar el vector $-\Gamma^\alpha_{jk} v^j v^k$ como una fuerza aplicada específica y el vector $V^{-1}\delta m^* v^\alpha$ como una cantidad de movimiento. La analogía se hace más patente todavía si introducimos el escalar δm definido por
$$\delta m = \frac{c}{V}\delta m^* = \frac{\mathcal{N}}{c V^2} dx^1 dx^2 dx^3,$$
al que llamaremos masa contenida en $dx^1 dx^2 dx^3$.

Consideremos finalmente el caso de un fluido perfecto. Las ecuaciones (30) y (31) pasan a ser

$$(42) \qquad \frac{d}{dt}(\mathcal{N} V^{-1}) + \mathcal{N} V^{-1}\frac{\partial v^i}{\partial x^i} - V^{-1}(-g)^{-\frac{1}{2}}\frac{dp}{dt} = 0,$$
$$(43) \qquad V^{-1} N\left[\frac{d}{dt}(V^{-1}v^i) + V^{-1}\Gamma^i_{jk} v^j v^k\right] + V^{-2} v^i \frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial x^j} g^{ij} = 0.$$

De (42) se sigue inmediatamente que
$$\frac{d}{dt}\int_{D(t)} \mathcal{N} V^{-1} dx^1 dx^2 dx^3 = \int_{D(t)} V^{-1}\sqrt{-g}\left(\frac{\partial p}{\partial x^i} v^i\right) dx^1 dx^2 dx^3$$
o bien, si introducimos el escalar $c^2 \delta m^{**} = \mathcal{N} V^{-1} dx^1 dx^2 dx^3$ y la densidad vectorial covariante $\mathfrak{L}_i = -\sqrt{-g}\frac{\partial p}{\partial x^i}$,
$$\frac{d}{dt}\int_{D(t)} c^2 \delta m^{**} = -\int_{D(t)} V^{-1}(\mathfrak{L}_i v^i)\, d\tau \qquad (d\tau = dx^1 dx^2 dx^3)$$

Acerca del significado físico de las nociones introducidas y de lo demostrado no podemos extendernos más aquí (Véase, por ejemplo, De Donder, T.Ch, § 13). Hacemos notar, sin embargo, que, si O es un observador ligado a una partícula, si $d\varepsilon$ la energía que O localiza en el elemento de volumen $d\tau$ en torno del punto a que O está vinculado, la masa contenida en dicho elemento es, por definición,

$$dm = \frac{d\varepsilon}{c^2}$$

y la masa específica $\rho = \frac{dm}{d\tau}$.

En particular: en un fluido incoherente es, $\rho = \frac{N}{c^2}$

" " " perfecto ", $\rho = \frac{N-p}{c^2}$.

NOTA: Las ondas de gravitación

Supongamos que el campo gravitatorio debido a las masas en movimiento es tal que con una apropiada elección de sistema de coordenadas los potenciales difieren en cantidades muy pequeñas γ_{ik} de los valores $\mathring{g}_{ik}$ de un campo de Minkowski, de modo que

$$g_{ik} = \mathring{g}_{ik} + \gamma_{ik}$$

donde $\mathring{g}_{ik}$ es el tensor de Minkowski cuyas componentes reducidas son los elementos de la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

En este supuesto, cabe considerar el espacio-tiempo como euclídeo y dotado de la métrica de coeficientes constantes $\mathring{g}_{ik}\,dx^i dx^k$ y las γ_{ik} como las componentes de un tensor simétrico de segundo orden definido en él y tales que se puede prescindir de los productos de $\gamma_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu=1,2,3)$, $\frac{1}{c}\gamma_{\mu 4}$ y $\frac{1}{c^2}\gamma_{44}$, tomados dos a dos, frente a la unidad [1]

Elegido un sistema de coordenadas normalizadas, de modo que en cada punto

(N) $$g^{ik}\Gamma_{j,ik} = 0.$$

y

$$R_{jh} = \frac{1}{2} g^{li} \frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^l \partial x^i} + K_{jh} \quad \text{(Cf. pg. 10)},$$

las expresiones admitidas para las g_{ik} y las hipótesis hechas acerca de las γ_{ik} permiten escribir

$$R_{jh} \simeq \frac{1}{2} \mathring{g}^{li} \frac{\partial^2 \gamma_{jh}}{\partial x^l \partial x^i}$$

es decir

(44) $$R_{jh} \simeq \frac{1}{2} \mathring{g}^{ii} \frac{\partial^2 \gamma_{jh}}{(\partial x^i)^2} = -\frac{1}{2} \Box \gamma_{jh}$$

[1].- Einstein, Sitzgsb. Ak. Wiss., Berlin, 1916, pg. 688 a 696 || Laue, TRe, pg. 209 || De Donder, TCh, pg. 25

siendo $\Box$ el operador de d'Alembert

$$\Box = \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{(\partial x^4)^2}.$$

Substituyamos en (23) las componentes R_{jh} del tensor de curvatura contraido por las expresiones obtenidas en el caso particular a que nos referimos (ec. 44). Resulta así

$$\Box \gamma_{jh} = -2R_{jh} = -\frac{2}{b}\, g_{jk}\left[N g_{ih}\, u^k u^i + P^k_h - \frac{1}{2}(N+P+a)\, g^k_h\right]$$

y también, supuesto que las velocidades de las masas sean suficientemente pequeñas para que se pueda prescindir de $\frac{v^\alpha}{c}$, $(\alpha = 1,2,3)$ frente a la unidad con lo cual $u^i = v^i V^{-1} \simeq \frac{v^i}{c}$,

$$(45) \qquad \Box \gamma_{jh} = -\frac{2}{b}\, T^*_{jh},$$

donde

$$T^*_{jh} = \mathring{g}_{jj}\left[N \mathring{g}_{hh}\, \frac{v^j}{c}\frac{v^k}{c} + P^j_h - \frac{1}{2}\, \mathring{g}^j_h (N+P+a)\right]$$

La resolución de la ecuación lineal no homogénea (45) puede efectuarse siguiendo el método de la variación de las constantes [1], obteniéndose así (ec. 31 de la obra citada)

$$\gamma_{jh}(x^1, x^2, x^3, t) = \frac{1}{2\pi b} \iiint\limits_{r \leq ct} \frac{T^*_{jh}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t - \frac{r}{c})}{r}\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3,$$

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x_i - \xi_i)^2}.$$

Resulta, pues, que γ_{jh} se comporta como un <u>potencial retardado</u>, es decir, su expresión en función de las x^α $(\alpha = 1,2,3)$ y t coincide formalmente con la del potencial debido a una distribución de masas de densidad T^*_{jh} en torno del punto x^1, x^2, x^3, densidad, pero, que en cada punto (ξ^1, ξ^2, ξ^3) no debe ser considerada en su valor en el instante t, sino en un instante $t' = t - \frac{r}{c}$ tanto más anterior al t cuanto mayor sea el tiempo $\frac{r}{c}$ necesario para que el efecto se propague con velocidad c desde el punto ξ^α al punto x^α [2].

Resumiendo: los cambios en el valor de T^*_{jh} en un punto ξ^α repercuten en el de γ_{jh} en el punto x^α al cabo del tiempo $\frac{r}{c}$, pudiéndose hablar en este sentido de la <u>propagación</u> de un tal efecto a través del espacio con velocidad c.

---

[1]. <u>Courant - Hilbert</u>, M, pg. 164 y 165

[2]. <u>Weyl</u>, RZ, pg. 227 — <u>Laue</u>, TR_2, pg. 174.

Campos gravitatorios con simetría esférica.

Un campo gravitatorio diremos que posee simetría esférica, si existe un sistema de coordenadas respecto del cual el cuadrado del intervalo está dado por

$$(45) \qquad ds^2 = A\,dt^2 - B\,dr^2 - C\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta \cdot d\varphi^2),$$

donde A, B y C son funciones de r únicamente. Atribuimos así al campo gravitatorio un centro de simetría en el espacio-tiempo, es decir, de una simetría espacial y de una simetría en el tiempo [1]. Las variables r, θ, φ que permiten escribir ds^2 en la forma (45) se llamarán coordenadas polares, sin que con ello se pretenda más que una simple definición. Es claro que la estructura de la forma (45) subsiste si se substituye r por otra variable $\bar{r}$ ligada con r por una relación $r = \varphi(\bar{r})$

Acerca del significado físico que cabe atribuir a las variables r, θ, φ, t algo diremos más adelante. De momento adelantaremos que θ y φ son la colatitud y la longitud de una dirección cualquiera respecto de un triedro $Oxyz$ de origen en el centro de simetría O y de orientación invariable respecto de las estrellas en conjunto; r es una función cualquiera de la distancia OM; t representa un tiempo absoluto, válido para todo el espacio (tiempo cósmico) [2]

El que A, B y C dependan sólo de r corresponde a un universo estático, es decir, un universo en el que las g_{ik} son independientes de t (universo estacionario) y en el que los términos g_{ik} $(i \neq k)$ relativos a $dt\,dx$ son nulos [3]. Supondremos, además, que el sistema de referencia es un sistema de reposo respecto de las masas que crean el campo, de modo que $v^i = \frac{dx^i}{dt}$, $(i = 1,2,3)$ son nulas en cada punto [4]

La indeterminación de que está afectada la variable r, puede ser solventada introduciendo una condición complementaria. Se puede hacer $C = r^2$, con lo que se

[1].- Becquerel, Champ de gravitation d'une sphère matérielle (Paris, 1923); Painlevé, La gravitation dans la mécanique de Newton et dans la mécanique d'Einstein (C.R., t.174, pg. 1137)
[2].- Haag, PS, pg. 3
[3].- Levi-Civita, DK, pg. 211 y Weyl, RZ, pg. 218
[4].- Laue, TRe, pg. 193 y De Donder, GE, pg. 118

obtienen las <u>coordenadas de Schwarzschild</u>; se puede suponer $B=1$, lo que equivale a tomar para r la distancia radial; cabe también imponer la condición $C=Br^2$, resultando así las <u>coordenadas isotrópicas</u> con las que el elemento lineal <u>espacial</u> se presenta, salvo el factor B, en la forma euclídea [1]. La condición complementaria que impondremos será la de Schwarzschild: $\|g_{ik}\| = -c^2$, siendo c la velocidad de la luz en el vacío [2]

Hagamos

$$x_1 = \frac{1}{3} r^3, \quad x_2 = -\cos\theta, \quad x_3 = \varphi, \quad x_4 = t,$$

adoptando subíndices para designar las diferentes coordenadas en vez de superíndices por comodidad, y, además, escribamos

$$f_1 = \frac{1}{r^4} B, \qquad f_2 = C, \qquad f_4 = A.$$

Merced a ello será

$$ds^2 = f_4 dx_4^2 - f_1 dx_1^2 - \frac{f_2}{1-x_2^2} dx_2^2 - f_2(1-x_2^2) dx_3^2 \tag{46}$$

junto con la condición de Schwarzschild

$$\|g_{ik}\| = -f_1 f_2^2 f_4 = -c^2 \tag{47}$$

Las componentes no idénticamente nulas del tensor de Ricci-Einstein son:

$$\left\{\begin{aligned} R_{11} &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dx_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{df_1}{dx_1}\right) + \frac{1}{4}\frac{1}{f_1^2}\left(\frac{df_1}{dx_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{f_2^2}\left(\frac{df_2}{dx_1}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{f_4^2}\left(\frac{df_4}{dx_1}\right)^2, \\ R_{22} = R_{33} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dx_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{df_2}{dx_1}\right) - 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{f_1 f_2}\left(\frac{df_2}{dx_1}\right)^2, \\ R_{44} &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dx_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{df_4}{dx_1}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{f_1 f_4}\left(\frac{df_4}{dx_1}\right)^2, \end{aligned}\right. \tag{48}$$

en los puntos en que $\theta = \frac{\pi}{2}$, ($x_2 = 0$). El considerarlas únicamente en tales puntos simplifica las ecuaciones y ello es por lo demás legítimo en vistas a la determinación de los potenciales f desde el momento que éstos dependen sólo de r.

A las ecuaciones (48) debemos añadir la condición

$$\frac{1}{f_1}\frac{df_1}{dx_1} + \frac{2}{f_2}\frac{df_2}{dx_1} + \frac{1}{f_4}\frac{df_4}{dx_1} = 0 \tag{49}$$

deducida de la de Schwarzschild.

Supongamos que el campo gravitatorio es debido a un fluido perfecto inmóvil ($u^1 = u^2 = u^3 = 0$) distribuido simétricamente en torno de O. Con esto, las ecua-

[1].- <u>Haag</u>, PS, pg. 4 y <u>M.C. MacVittie</u>, Month. Not., Vol. 93, pg. 328, Londres, 1933, <u>M. Nuyens</u>, Étude synthétique des champs massiques à symétrie sphérique, Cap. IV, Bruselas, 1925

[2].- Esta condición conduce a introducir una variable R tal que $C = R^2$, conforme veremos más adelante.

ciones fundamentales (23), en las que substituiremos además N por

$$N = p + \rho c^2, \quad (V. \text{ pg. } 23),$$

se reducen, tras algunas transformaciones elementales, a

$$(50)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx_1}\left(\dfrac{1}{f_1}\dfrac{df_1}{dx_1}\right) - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{f_1^2}\left(\dfrac{df_1}{dx_1}\right)^2 - \dfrac{1}{f_2^2}\left(\dfrac{df_2}{dx_1}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{f_4^2}\left(\dfrac{df_4}{dx_1}\right)^2 = \varkappa c f_1 (\rho c^2 - p + a) \\ -\dfrac{d}{dx_1}\left(\dfrac{1}{f_2}\dfrac{df_2}{dx_1}\right) + 2\dfrac{f_1}{f_2} + \dfrac{1}{f_1 f_2}\dfrac{df_1}{dx_1}\dfrac{df_2}{dx_1} = \varkappa c f_1 (\rho c^2 - p + a) \quad , \quad \varkappa = -\dfrac{1}{6c}, \ (Cf. \text{ pg. } 4) \\ \dfrac{d}{dx_1}\left(\dfrac{1}{f_4}\dfrac{df_4}{dx_1}\right) - \dfrac{1}{f_1 f_4}\dfrac{df_1}{dx_1}\dfrac{df_4}{dx_1} = \varkappa c f_1 (\rho c^2 + 3p - a) \end{cases}$$

En cuanto a las ecuaciones (31), quedan en la forma

$$(51, a) \qquad -\frac{\rho c^2 + p}{2 f_4}\frac{df_4}{dx_1} = \frac{\partial p}{\partial x_1}$$

$$(51, b) \qquad \frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \quad y \quad \frac{du^4}{ds} = 0$$

Si $\rho = C^{te}$, de la ecuación (51, a) así escrita

$$\frac{\rho c^2 + p}{2\sqrt{f_4}}\frac{df_4}{dx_1} + \sqrt{f_4}\frac{dp}{dx_1} = 0,$$

se deduce que tambien $\quad (\rho c^2 + p)\sqrt{f_4} = C^{te}; \qquad (52)$

en particular si es $p = 0$ y $\rho \neq 0 \qquad f_4 = C^{te}. \qquad (53)$

Sentados estos preliminares, pasamos a resolver el Problema de Brillouin [1] -, que puede enunciarse en los siguientes términos: determinar el campo gravitatorio interior y exterior originado por una masa esférica en reposo y en la que ρ es una función dada de la distancia al centro.

A) Problema exterior

En la región exterior a la esfera másica haremos $p = \rho = 0$ con lo que los segundos miembros de (50) se reducen a $\varkappa a c f_1$, $\varkappa a c f_1$, $-\varkappa a c f_1$. Sumemos las dos primeras ecuaciones que así resultan y eliminemos entre la suma y la ecuación (49) el potencial f_1. Se obtiene de este modo

$$2\frac{d}{dx_1}\left(\frac{1}{f_4}\frac{df_4}{dx_1}\right) + \frac{3}{f_4^2}\left(\frac{df_4}{dx_1}\right)^2 = 0$$

o, lo que es equivalente,

$$\frac{d\left(\dfrac{1}{f_4}\dfrac{df_4}{dx_1}\right)}{\dfrac{1}{f_4^2}\left(\dfrac{df_4}{dx_1}\right)^2} + \frac{3}{2}\,dx_1 = 0$$

[1].- M. Brillouin, Champisotrope. Sphère fluide hétérogène (C. R. de l'Ac. des Sc. t. 174, pg. 1585). J. Haag ha estudiado el caso más general de una esfera másica cualquiera en la que ρ y las tensiones internas presentan la simetría esférica. ("Sur le problème intérieur de Swarzschild dans le cas d'une sphère hétérogène", C. R., t. 176, pg. 658, y también, Haag, PS, pg 10)

es decir
$$\frac{2\,dx_1}{3x_1+\beta}=\frac{df_2}{f_2}\qquad(\beta=\text{constante de integración})$$
de donde
$$f_2=C_2(3x_1+\beta)^{\frac{2}{3}}$$

Para determinar la constante C_2 impondremos la condición de haber de reducirse la forma cuadrática (46) a la correspondiente a un campo de Minkowski ($f_2=C=r^2$) para grandes valores de r, o lo que es lo mismo, para grandes valores de x_1. Ello implica
$$\lim_{r\to\infty}\frac{C_2(r^3+\beta)^{\frac{2}{3}}}{r^2}=1\ \therefore\ C_2=1.$$

Resulta, pues, en definitiva
$$f_{2e}=(3x_1+\beta)^{\frac{2}{3}},$$
donde la notación f_{2e} representa el potencial f_2 relativo al problema exterior.

El potencial f_{1e} puede obtenerse del siguiente modo. Restemos de la suma de la primera y tercera ecuaciones (50) el doble de la segunda y eliminemos, como antes, del resultado f_{4e} mediante (49). Queda así la ecuación
$$\frac{3}{f_{2e}^2}\left(\frac{df_{2e}}{dx_1}\right)^2+4\frac{f_{1e}}{f_{2e}}+\frac{2}{f_{1e}f_{2e}}\,\frac{df_{1e}}{dx_1}\,\frac{df_{2e}}{dx_1}=2\times c f_{1e}a=2\frac{a}{b}f_{1e},$$
en la cual efectuaremos el cambio de variables definido por
$$\begin{cases}R_e^3=3x_1+\beta,\\ f_{1e}=R_e^{-3}\varphi_e^{-1},\end{cases}$$
considerando φ_e como nueva variable función y R_e como variable independiente. Se tiene desde luego
$$f_{2e}=R_e^2,\,[1],\qquad\frac{df_{2e}}{dx_1}=\frac{2}{R_e},\qquad\frac{df_{1e}}{dx_1}=-\frac{1}{R_e^2}\left(3R_e^{-4}\varphi_e^{-1}+R_e^{-3}\varphi_e^{-2}\frac{d\varphi_e}{dR_e}\right),$$
de donde resulta la ecuación diferencial ordinaria que determina φ_e:
$$\frac{d\varphi_e}{dR_e}=1-\frac{a}{2b}R_e^2\quad\therefore\quad\varphi_e=R_e\left(1-\frac{\alpha}{R_e}-\frac{a}{6b}R_e^2\right)$$
o bien, introduciendo la <u>constante cósmica</u> $\lambda=\frac{a}{2b}$ (Cf. pg. 4)
$$\varphi_e=R_e\left(1-\frac{\alpha}{R_e}-\frac{\lambda}{3}R_e^2\right).$$

Los valores de los potenciales f_{1e}, f_{2e}, f_{4e} serán, por consiguiente,
$$f_{1e}=\frac{1}{R_e^4\left(1-\frac{\alpha}{R_e}-\frac{\lambda R_e^2}{3}\right)},\qquad f_{2e}=R_e^2,\qquad f_{4e}=\frac{c^2}{f_{1e}f_{2e}^2}=c^2\left(1-\frac{\alpha}{R_e}-\frac{\lambda R_e^2}{3}\right)$$

[1].- Esta es la condición que antes indicábamos.

y el cuadrado del intervalo valdrá en el espacio exterior

$$(54) \qquad ds^2 = c^2\left(1 - \frac{\alpha}{R_e} - \frac{\lambda R_e^2}{3}\right)dt^2 - \frac{dR_e^2}{1 - \frac{\alpha}{R_e} - \frac{\lambda R_e^2}{3}} - R_e^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2), \quad [1]$$

B) Problema interior

Análogamente a como hemos hecho en el párrafo anterior sumemos, por una parte, las ecuaciones (50_1) y (50_3) y, de otra, restemos de esta suma el doble de (50_2). Se obtienen así dos ecuaciones consecuencia de (50) de las cuales eliminaremos el potencial f_{4i} mediante (49), resultando finalmente

$$(55) \quad \begin{cases} -2\dfrac{d}{dx_1}\left(\dfrac{1}{f_{2i}}\dfrac{df_{2i}}{dx_1}\right) - \dfrac{3}{f_{2i}^2}\left(\dfrac{df_{2i}}{dx_1}\right)^2 = 2\varkappa c f_{2i}(\rho c^2 + p), \\[2ex] \dfrac{3}{f_{2i}^2}\left(\dfrac{df_{2i}}{dx_1}\right)^2 + 4\dfrac{f_{1i}}{f_{2i}} + \dfrac{2}{f_{1i}f_{2i}}\dfrac{df_{1i}}{dx_1}\dfrac{df_{2i}}{dx_1} = 2\varkappa c f_{2i}(a - 2p). \end{cases}$$

Sean R_i, ψ_i y γ tres nuevas variables ligadas con f_{1i}, f_{2i} y p por medio de las ecuaciones

$$f_{2i} = R_i^2, \qquad f_{1i} = \frac{1}{\psi_i R_i^3}, \qquad \gamma = \frac{c^2}{f_{2i}\sqrt{f_{1i}}}(\rho c^2 + p) = \frac{c^2\psi_i^{\frac{1}{2}}}{R_i^{\frac{1}{2}}}(\rho c^2 + p).$$

Al efectuar la substitución en las ecuaciones (55), resulta:

$$(56) \quad \begin{cases} 2\psi_i \dfrac{d}{dx_1}\left(3R_i^2\dfrac{dR_i}{dx_1}\right) = -3\varkappa\gamma c^{-1}\psi_i^{-\frac{1}{2}}R_i^{\frac{1}{2}}, \\[2ex] 3R_i^2\dfrac{dR_i}{dx_1}\dfrac{d\psi_i}{dx_1} = 3R_i^{-2} + 3\varkappa\gamma c^{-1}\psi_i^{-\frac{1}{2}}R_i^{\frac{1}{2}} - 3\varkappa\left(\rho c^3 + \dfrac{ac}{2}\right), \end{cases}$$

ecuaciones de las que se deduce fácilmente

$$\left(3R_i^2\frac{dR_i}{dx_1}\right)^2\frac{d\psi_i}{dx_1} + \psi_i \cdot 2\left(3R_i^2\frac{dR_i}{dx_1}\right)\frac{d}{dx_1}\left(3R_i^2\frac{dR_i}{dx_1}\right) = 9\left[\frac{dR_i}{dx_1} - \varkappa\left(\rho c^3 + \frac{ac}{2}\right)R_i^2\frac{dR_i}{dx_1}\right],$$

es decir

$$(57) \qquad \psi_i\left(3R_i^2\frac{dR_i}{dx_1}\right)^2 = 9\left[R_i - \varkappa\int_0^{R_i}\left(\rho c^3 + \frac{ac}{2}\right)R_i^2\, dR_i + \mu\right]. \qquad (\mu = C^{te})$$

Finalmente, la eliminación de ψ_i entre la primera de las ecuaciones (56) y la (57) y una ulterior integración entre los límites R_i y A_i — el último de los cuales corresponde a la superficie, S, de la esfera — conduce a la ecuación

$$(58) \quad \frac{2}{\left(R_i^2\frac{dR_i}{dx_1}\right)_{R_i}} - \frac{2}{\left(R_i^2\frac{dR_i}{dx_1}\right)_S} = -\varkappa c^{-1}\int_{R_i}^{A_i}\frac{\gamma R_i^{\frac{5}{2}}\, dR_i}{\left[R_i - \varkappa\int_0^{R_i}\left(\rho c^3 + \frac{ac}{2}\right)R_i^2\, dR_i + \mu\right]^{\frac{3}{2}}}$$

[1].- Cf. Haag, PS, pg. 42; Nuyens, „Sphère massique dans les univers d'Einstein et de de Sitter„ (Bull. Ac. R. de Belgique, 1925, pg. 113) y „Champs gravifique dû à une sphère massique en tenant compte de la constante cosmique„ (C. R., t. 175, pg. 1376); Sanz, TR₂, pg. 267.

Los valores de las constantes de integración introducidas hasta aquí resultan al efectuar el enlace del campo exterior con el campo interior. La cuestión, tomada en general es delicada [1], por lo que nos limitaremos a indicar las condiciones que impone De Donder en nuestro caso particular: supone éste que los tres potenciales f_1, f_2, f_4 y sus derivadas primeras varían de modo continuo al atravesar la superficie S, que en el centro de la esfera es $R_i = 0$ y que en él se conserva finito y distinto de cero el potencial

$$f_{4i} = \frac{c^2}{f_{1i} f_{2i}^2} = \frac{c^2 \psi_i}{R_i} ;$$

Obtiene así $\quad (R_e)_S = (R_i)_S = A, \quad \left(\frac{dR_i}{dx_1}\right)_S = \frac{1}{A^2}, \quad \left(\frac{d\psi_i}{dR_i}\right)_S = 1, \quad \alpha = A - \psi_S, \; \mu = 0, \; \beta = (R_e^3)_0.$

Pasemos ahora a la determinación de los potenciales. De la ecuación (58) se deduce al integrar entre R_i y el valor A, límite común de R_i y de R_e en la frontera,

$$(59) \qquad \left(\frac{R_e}{R_i}\right)^2 \frac{dR_e}{dR_i} = 1 - \frac{\varkappa c^{-1}}{2} \int_{R_i}^{A} \frac{\gamma R_i^{\frac{5}{2}} dR_i}{\left[R_i - \varkappa \int_0^{R_i} (\rho c^3 + \frac{a c}{2}) R_i^2 dR_i\right]^{\frac{3}{2}}},$$

pues, además de (58), se tiene

$$\left(\frac{dR_i}{dx_1}\right)_S = \frac{1}{A^2}, \quad (R_i)_S = A, \quad \mu = 0$$

$$3x_1 + \beta = R_e^3 \quad \therefore \quad R_e^2 dR_e = dx_1$$

y con ello

$$f_{4i} = \frac{c^2 \psi_i}{R_i} = \frac{c^2}{R_i} \frac{(R_e^2 dR_e)^2}{(R_i^2 dR_i)^2} \left[R_i - \varkappa \int_0^{R_i} (\rho c^3 + \frac{a c}{2}) R_i^2 dR_i\right] =$$

$$(60) \qquad f_{4i} = \frac{c^2 \omega}{R_i} \left(1 - \frac{\varkappa c^{-1}}{2} \int_{R_i}^{A} \frac{\gamma R_i^{\frac{5}{2}} dR_i}{\omega^{\frac{3}{2}}}\right)^2,$$

donde, siguiendo a Brillouin, se ha hecho

$$(61) \qquad \omega = R_i - \varkappa \int_0^{R_i} (\rho c^3 + \frac{a c}{2}) R_i^2 dR_i ,$$

y es claro que f_{4i} quedará determinado en cuanto se conozca γ en función de R_i. La función $\gamma = \gamma(R_i)$ satisface a la ecuación diferencial lineal de M. Brillouin

$$(62) \qquad \frac{d}{dR_i}\left(\sqrt{\frac{R_i}{\omega}} \frac{\gamma'}{\rho'}\right) = \frac{\varkappa c^3}{2} \frac{R^{\frac{5}{2}}}{\omega^{\frac{3}{2}}}.$$

En efecto: $\quad \gamma = (\rho c^3 + p c)\sqrt{f_{4i}} \quad \therefore \quad \gamma' = (\rho' c^3 + p' c)\sqrt{f_{4i}} + (\rho c^3 + p c)\frac{f'_{4i}}{2\sqrt{f_{4i}}} ;$

pero, según (51, a) $\qquad p' = -(\rho c^2 + p)\frac{f'_{4i}}{2 f_{4i}}$

[1].- Darmois, EG, pg. 29; De Donder, GE, pg. 243.

de donde $\qquad \gamma' = \rho' c^3 \sqrt{f_{4i}}$,

es decir, en virtud de (69

$$(63) \qquad \gamma' = \rho' c^4 \omega^{\frac{1}{2}} R_i^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\chi c^{-1}}{2} \int_{R_i}^{A} \frac{\gamma R_i^{\frac{5}{2}} dR_i}{\omega^{\frac{3}{2}}} \right).$$

De esta última ecuación, se deduce inmediatamente al derivar respecto de R_i la ecuación de M. Brillouin.

Las dos constantes de integración que aparecen en la integral general de (62) se determinan a partir de las condiciones en la superficie:

$$(64) \qquad \gamma_s = \rho_s c^4 \sqrt{\frac{\psi_s}{A}}, \qquad \gamma_s' = \rho_s' c^4 \sqrt{\frac{\omega_s}{A}},$$

que se deducen de la definición de γ, de la ecuación (63) y de ser en la superficie $p=0$.

Determinado f_{4i}, el valor de f_{1i} resulta de la relación

$$f_{1i} = \frac{c^2}{R_i^4 f_{4i}}.$$

Finalmente, la presión p se calcula partiendo de

$$\gamma = (\rho c^3 + p c)\sqrt{f_{4i}} = (\rho c^3 + p c) \frac{1}{c^3} \frac{\gamma'}{\rho'}$$

de lo que se deduce

$$(65) \qquad p = -\rho c^2 + \rho' c^2 \frac{\gamma}{\gamma'}$$

Bastará substituir en (65) γ por su valor deducido de (62) y de las condiciones en la superficie (64) para obtener la expresión de p.

El problema de Schwarzschild

Este problema, que fué famoso hace ya bastantes años, [1], consiste en determinar el campo gravitatorio de una esfera másica homogénea fija. Se trata evidentemente de un caso particular del problema de Brillouin. Bastará, pues, para resolverlo hacer, en las ecuaciones obtenidas en el párrafo anterior, $\rho = C^{te}$. Prescindiremos además del término cósmico ($\lambda = 0$ o, lo que es lo mismo, $a = 0$).

En el campo exterior, el cuadrado del intervalo vale, según (54),

$$(66) \qquad ds^2 = c^2\left(1-\frac{\alpha}{R_e}\right)dt^2 - \frac{dR_e^2}{1-\frac{\alpha}{R_e}} - R_e^2\left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta \, d\varphi^2\right).$$

En cuanto al campo interior, la condición $\rho = C^{te} \therefore \rho' = 0$ implica junto con (64), $\gamma' = 0$, es decir, $\gamma = C^{te}$. El valor de γ viene dado, pues, por la ecuación

$$\gamma = \rho c^4 \sqrt{\frac{\varphi_S}{A}}$$

en función de φ_S. Pero, para $\rho = C^{te}$,

$$\varphi_S = A - \frac{\varkappa c^3}{3}\rho A^3,$$

de donde

$$\gamma = \rho c^4 \sqrt{1 - \frac{\varkappa c^3}{3}\rho A^2}.$$

Síguese de este resultado que, de acuerdo con (60),

$$f_{4i} = c^2\left(1 - \frac{\varkappa c^3}{3}\rho R_i^2\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1-\frac{\varkappa c^3}{3}\rho A^2}{1-\frac{\varkappa c^3}{3}\rho R_i^2}}\right)^2$$

o, lo que es lo mismo,

$$f_{4i} = c^2\left[\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{\varkappa c^3}{3}\rho A^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{\varkappa c^3}{3}\rho R_i^2}\right]^2$$

y, por consiguiente,

$$f_{1i} = \frac{c^2}{R_i^4 f_{4i}} = R_i^{-4}\left[\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{\varkappa c^3}{3}\rho A^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{\varkappa c^3}{3}\rho R_i^2}\right]^{-2}$$

Finalmente, de (59) deducimos

$$dx_1 = R_i^2\left[\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1-\frac{\varkappa c^3}{3}\rho A^2}{1-\frac{\varkappa c^3}{3}\rho R_i^2}} - \frac{1}{2}\right] dR_i$$

[1].- Planteado y resuelto aproximadamente por Einstein („Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzb. Berlin, 1915, pg 831), fué resuelto rigurosamente por Schwarzschild (Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie (Sitz. Berlin, 1916, pg 189 y 424).

y con ello y las expresiones de f_{1i} y f_{4i} el valor del cuadrado del intervalo en el campo interior

$$(67)\qquad ds_i^2 = c^2\left[\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{\varkappa c^3}{3}\rho A^2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{\varkappa c^3}{3}\rho R_i^2}\right]^2 dt^2 -$$

$$-\frac{dR_i^2}{1-\frac{\varkappa c^3}{3}\rho R_i^2} - R_i^2\left(d\theta^2+\operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2\right).$$

La constante α que figura en (66) resulta de las condiciones en la frontera

$$\alpha = A - \psi_s = A - A\left(1-\frac{\varkappa c^3}{3}\rho A^2\right) = \frac{\varkappa c^3}{3}\rho A^3.$$

La constante α está, pues, ligada con la pseudomasa, m, de la esfera, es decir con la masa que le atribuiríamos si fuese euclídea:

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho A^3 = \frac{4\pi\alpha}{\varkappa c^3}.$$

Un cálculo fácil da para la presión p el valor

$$(68)\qquad p = \frac{1}{c}\left(\frac{r}{\sqrt{f_{4i}}}-\rho c^3\right) = \rho c^2\,\frac{\sqrt{1-\frac{\varkappa c^3}{3}\rho R_i^2}-\sqrt{1-\frac{\varkappa c^3}{3}\rho A^2}}{3\sqrt{1-\frac{\varkappa c^3}{3}\rho A^2}-\sqrt{1-\frac{\varkappa c^3}{3}\rho R_i^2}}$$

que será finito para todo valor de R_i comprendido entre 0 y A si y sólo si

$$3\sqrt{1-\frac{\varkappa c^3}{3}\rho A^2} > 1,$$

o sea, si

$$(69)\qquad \rho < \frac{8}{3\varkappa c^3 A^2}$$

Con esto la condición de realidad de los coeficientes del ds_i^2: $\frac{\varkappa c^3}{3}\rho A^2 < 1$, o bien $\alpha < A$, queda, a la vez, evidentemente satisfecha.

La desigualdad (69) indica que la masa específica no puede sobrepasar un cierto límite crítico, límite que, en el caso del Sol, dista mucho de ser alcanzado.

Con vistas a las aplicaciones a algunos problemas astronómicos, indicaremos la expresión del ds_e^2 en coordenadas isotrópicas. Para llegar a ella introduzcamos en (66) en vez de R_e una función $f(r_e)$ indeterminada de momento, de la misma variable r_e. Con ello (66) toma la forma

$$(66')\qquad ds_e^2 = c^2\left(1-\frac{\alpha}{f(r_e)}\right)dt^2 - \frac{f'(r_e)^2 dr_e^2}{1-\frac{\alpha}{f(r_e)}} - f(r_e)^2\left(d\theta^2+\operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2\right).$$

y la función $f(r_e)$ se determinará con la condición de isotropía $C = BR_e^2$, es decir

$$\frac{f'^2 r_e^2}{1-\frac{\alpha}{f}} = f^2$$

de donde

$$f(r_e) = \frac{(C_1 r_e + \alpha)^2}{4 C_1 r_e},$$

siendo C_1 una constante de integración. Resulta así como nueva forma de ds_e^2

$$(70) \qquad ds_e^2 = c^2\left(\frac{1-\frac{\alpha}{4r_e}}{1+\frac{\alpha}{4r_e}}\right)^2 dt^2 - \left(1+\frac{\alpha}{4r_e}\right)^2 (dr_e^2 + r_e^2 d\theta^2 + r_e^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2).$$

Pasemos ahora a la interpretación física de los resultados que acabamos de obtener. Consideremos un observador situado a una distancia R_e muy grande del centro de la esfera. En estas condiciones

$$ds_e^2 \simeq c^2 dt^2 - (dR_e^2 + R_e^2 d\theta^2 + R_e^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2)$$

o bien, haciendo $x = R_e \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$, $y = R_e \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$, $z = R_e \cos\theta$

$$ds_e^2 \simeq c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

es decir, para $R_e = \infty$ el intervalo toma la forma de Minkowski. En otros términos, a gran distancia de la esfera, el campo es un campo de Minkowski [1]. Ante este hecho, diremos que los números R_e, θ y φ han sido obtenidos con los patrones de Minkowski o cósmicos [2].

Consideremos, en cambio, un observador S exterior a la esfera y a distancia finita; el cuadrado del elemento lineal deducido de (66) es, en el entorno del punto $\bar{R}_e, \bar{\theta}, \bar{\varphi}$,

$$d\sigma_e^2 = \frac{dR_e^2}{1-\frac{\alpha}{\bar{R}_e}} + \bar{R}_e^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\bar{\theta}\, d\varphi^2)$$

la unidad de longitud local de dicho observador, en reposo respecto del campo, no coincide ya con el patrón de Minkowski: entre dos puntos del entorno situados radialmente $(d\theta = d\varphi = 0)$, aquél encuentra una distancia

$$(71) \qquad (d\sigma_e)_{R_e} = \frac{dR_e}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{R_e}}},$$

de modo que su patrón de longitud colocado longitudinalmente es $\sqrt{1-\frac{\alpha}{R_e}}$ veces menor que el de éste. Por el contrario, la unidad de longitud colocada transversalmente coincide

[1].- De Donder, IG, págs. 2 y 5

[2].- De Donder, GE, pág. 159

con la de Minkowski (contracción de Lorentz generalizada).

La distancia radial medida por aplicación masiva de los patrones de longitud locales vale, por consiguiente, en virtud de (71)

$$(72) \qquad \sigma_e = \int_{R_e'}^{R_e''} \frac{dR_e}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{R_e}}} = \left[\sqrt{R_e(R_e-\alpha)} + \alpha \log \sqrt{R_e-\alpha} + \sqrt{R_e}\right]_{R_e'}^{R_e''}$$

cantidad que es real dada la relación $\alpha < A \leq R_e$.

Veamos ahora qué ocurre con la unidad local de tiempo. La relación (66) escrita en la forma
$$ds_e^2 = c^2\left(1-\frac{\alpha}{R_e}\right)dt^2 - d\sigma_e^2$$
prueba que el patrón de tiempo del observador S situado en $(\bar{R}_e, \bar{\theta}_e, \bar{\varphi}_e)$ es $\sqrt{1-\frac{\alpha}{R_e}}$ veces mayor que el de Minkowski (dilatación de Einstein generalizada), supuesto, claro está, que se ha elegido la unidad local de tiempo de forma que se encuentre como velocidad de la luz la constante universal c [1]. Si esta velocidad se midiese con las unidades cósmicas – cual lo haría un observador muy alejado – es decir, a partir de los números R_e, θ, φ y t, la velocidad de la luz no sería ya una constante sino que se obtendría

$$\text{velocidad radial}, \left(\frac{dR_e}{dt}\right)_{\bar{R}_e} = c\left(1-\frac{\alpha}{R_e}\right),$$

$$\text{velocidad transversal}, \left(R_e\frac{d\theta}{dt}\right)_{\bar{R}_e} = c\sqrt{1-\frac{\alpha}{R_e}}.$$

Supongamos ahora a nuestro observador, S, en el interior de la esfera. El cuadrado del elemento lineal vale, si $\bar{R}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\varphi}$ son las coordenadas de espacio de S,
$$d\sigma_i^2 = \frac{dR_i^2}{1-\frac{\varkappa c^2}{3}\bar{\rho}R_i^2} + \bar{R}_i^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

y el patrón local de longitud dispuesto radialmente es $\sqrt{1-\frac{\varkappa c^2}{3}\rho \bar{R}_i^2}$ veces menor que el de Minkowski, de forma que la distancia radial σ_i entre dos puntos interiores

[1]- De Donder, IG, pg. 12; Lane, TR$_2$, pg. 232. Téngase en cuenta que la luz sigue en su propagación una geodésica de intervalo nulo en el espacio-tiempo. Puede imaginarse que la determinación de la velocidad de la luz se efectúa localmente enviando una señal electromagnética a un espejo situado a una distancia local $\frac{1}{2}d\sigma$ y leyendo en un reloj en reposo respecto de S de cuánto se han movido las manecillas hasta que se reciba la señal reflejada. El intervalo emisión–recepción es nulo, de donde resulta $d\tau = \sqrt{1-\frac{\alpha}{R_e}}\,dt$. En la teoría de la Relatividad restringida, el cociente $ds:c$ entre dos sucesos que ocurren en un mismo lugar para un cierto observador, mide el tiempo propio transcurrido entre ellos. A gran distancia, pues, el tiempo cósmico, t, el tiempo local y el propio coinciden.

la esfera, distancia medida con los patrones locales, será

$$(73) \qquad \sigma_i = \int_{R_i'}^{R_i''} \frac{dR_i}{\sqrt{1-\frac{\varkappa c^3}{3}\rho R_i^2}} = \sqrt{\frac{3}{\varkappa c^3 \rho}} \left[\operatorname{arc\,sen} R_i \sqrt{\frac{\varkappa c^3}{3}\rho} \right]_{R_i'}^{R_i''}$$

de donde, en particular, resulta la distancia radial al centro de la esfera ($R_i'=0$)

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{\varkappa c^3 \rho}} \operatorname{arc\,sen} R_i \sqrt{\frac{\varkappa c^3}{3}\rho}$$

o bien, en función de α y del valor A de R_i que corresponde a la superficie

$$(74) \qquad \sigma_i = \sqrt{\frac{A^3}{\alpha}} \operatorname{arc\,sen} R_i \sqrt{\frac{\alpha}{A^3}}$$

Aproximadamente, el valor medible del radio de la esfera es, por tanto,

$$(74') \qquad (\sigma_i)_A \cong A + \frac{\alpha}{6}$$

Es fácil ahora hallar un valor aproximado de la distancia radial medible desde el centro O a un punto M exterior. De (72) se deduce

$$\sigma_e \simeq R_e'' - R_e' + \frac{\alpha}{2} \operatorname{Log} \frac{R_e''}{R_e'};$$

luego, haciendo $R_e'' = R_e$ y $R_e' = A$ y recordando (74')

$$(75) \qquad \sigma = R_e + \frac{\alpha}{6} + \frac{\alpha}{2} \operatorname{Log} \frac{R_e}{A}.$$

NOTA El movimiento planetario

El movimiento de un planeta en el campo gravitatorio exterior al Sol puede considerarse esquemáticamente como el de una partícula en el campo de una esfera másica homogénea, campo que se supone no perturbado por la presencia de la partícula, de manera que coincide con el campo exterior de Schwarzschild antes estudiado. En estas condiciones, la partícula se mueve libremente a lo largo de una geodésica del espacio tiempo: la aceleración generalizada A^κ es nula (Cf. pg 17).

En rigor, la partícula interviene en la estructuración del espacio-tiempo. Pero cabe demostrar que el tubo de universo correspondiente a ella — no ya la línea de universo — puede considerarse, con gran aproximación, como constituido por geodésicas del campo total. En este sentido, el esquema adoptado puede concebirse como límite de lo que rigurosamente debiera ser.

Adoptaremos, pues, la métrica exterior de Schwarzschild

$$ds^2 = -\frac{dR^2}{1-\frac{\alpha}{R}} - R^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2) + c^2\left(1-\frac{\alpha}{R}\right)dt^2$$

Las ecuaciones diferenciales de las geodésicas las tomaremos en la forma

$$\frac{Du_k}{D\lambda} = \frac{du_k}{d\lambda} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}u^i u^l = 0, \quad u^i = \frac{dx^i}{d\lambda}, \quad \text{(Cf. Brillouin, TM, pg 124)}$$

Resulta así:

$$(76)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\alpha}{(R-\alpha)^2}\left(\frac{dR}{d\lambda}\right)^2 - \frac{R}{R-\alpha}\frac{d^2R}{d\lambda^2} + R\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + R^2\operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 - \frac{c^2\alpha}{R^2}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = 0, \\ 2R\frac{dR}{d\lambda}\frac{d\theta}{d\lambda} + R^2\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} - R^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = 0, \\ 2R\operatorname{sen}^2\theta\frac{dR}{d\lambda}\frac{d\varphi}{d\lambda} + 2R^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{d\theta}{d\lambda}\frac{d\varphi}{d\lambda} + R^2\operatorname{sen}^2\theta\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} = 0 \\ \frac{c^2\alpha}{R^2}\frac{dR}{d\lambda}\frac{dt}{d\lambda} + c^2\left(1-\frac{\alpha}{R}\right)\frac{d^2t}{d\lambda^2} = 0 \end{cases}$$

De estas cuatro ecuaciones la segunda queda satisfecha para $\theta = \frac{\pi}{2}$. Si la trayectoria espacial fuese plana, eligiendo los ejes espaciales de modo que durante el movimiento fuese $\theta = \frac{\pi}{2}$ el sistema (76) se simplificaría notablemente. Y, en efecto así es: puede demostrarse ello a partir de (76), pero queda justificado por razón de simetría. Admitido para θ el valor constante $\frac{\pi}{2}$, las ecuaciones (76_3) y (76_4) nos dan las integrales primeras

$$(77)\quad \begin{cases} R^2\frac{d\varphi}{d\lambda} = C_1 \\ \frac{R-\alpha}{R}\frac{dt}{d\lambda} = C_2. \end{cases}$$

La constante C_2 que aparece en la primera de estas ecuaciones puede suponerse igual a la unidad, puesto que ello equivale a substituir el parámetro afín λ por $C_2\lambda$.

En cuanto a la ecuación (76_1) la substituiremos por la integral primera

$$(76'_1)\qquad g_{ik}u^i u^k = C_3$$

que expresa la conservación del módulo del vector $u^i(\lambda)$ tangente a la geodésica $x^i(\lambda)$ (Cf. Brillouin, TM, pg. 122). La constante C_3 es positiva para las geodésicas temporales, negativa para las espaciales (Cf. pg. 7). La ecuación $(76'_1)$ se escribe en nuestro caso

$$(77_3)\quad c^2\frac{R-\alpha}{R}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{R}{R-\alpha}\left(\frac{dR}{d\lambda}\right)^2 - R^2\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = C_3$$

Para obtener la ecuación diferencial de la trayectoria en el espacio, eliminemos $d\lambda$ y dt entre las ecuaciones (77). Si hacemos $u = \frac{1}{R}$, se obtiene

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2}{C_1^2} - (1-\alpha u)\left(u^2 + \frac{C_3}{C_1^2}\right)$$

o bien (78) $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2 - C_3}{C_1^2} + \frac{C_3\alpha}{C_1^2}u - u^2 + \alpha u^3$

ecuación de primer orden que se integra rigurosamente mediante una función $\wp$ de Weierstrass, [1].

Dado que la teoría de Newton debe resultar de la de Einstein como primera aproximación y que en ella la ecuación (78) se reduce a

(78') $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{E}{C^2} + \frac{2km}{C^2}u - u^2,$ k = cont. de la gravitación. m = masa del Sol.

nos vemos conducidos a identificar los tres primeros del segundo miembro de (78) con los de (78') de forma que

$$\frac{c^2 - C_3}{C_1^2} = \frac{E}{C^2}, \qquad \frac{C_3\alpha}{C_1^2} = \frac{2km}{C^2}.$$

Hagamos $\alpha = \frac{2km}{c^2}, \quad \frac{C_3}{C_1^2} = \frac{c^2}{C^2}.$

de donde $$\frac{c^2}{C_1^2} = \frac{E + c^2}{C^2}$$

La energía mecánica $T+V$ de la partícula – energía que es negativa en las órbitas elípticas y positiva en las hiperbólicas – es, en el caso del sistema solar, pequeña respecto de c^2. Resulta así $C_1 \simeq C$ = constante de las áreas.

Nótese que siendo

$$[k] = M^{-1}L^3T^{-2}, \quad [c^2] = L^2T^{-2}, \quad [\alpha] = L,$$

las dimensiones de m son las de una masa y las de las constantes universales

$$\chi = \frac{4\pi\alpha}{c^3 m} = \frac{8\pi k}{c^5} \quad y \quad b = -\frac{1}{\chi c}$$

son

$$[\chi] = M^{-1}L^{-2}T^3, \quad [b] = MLT^{-2}$$

Luego, tomando $k = 6{,}675 \cdot 10^{-8}$ gr. cm³ seg⁻², $m = 1{,}94 \cdot 10^{33}$ gr,

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm seg}^{-1}$$

resultan $\alpha \simeq 2{,}88 \cdot 10^5$ cm, $\chi = 6{,}90 \cdot 10^{-59}$ gr⁻¹ cm⁻¹ seg³

$$b = -4{,}85 \cdot 10^{47} \text{ gr. cm. seg}^{-2}$$

Sentados estos valores, pasemos a la integración aproximada de la ecuación (78)

[1].- A. R. Forsyth, Note on the central differential equations in the relativity theory of gravitation (Proc. London, t. 99, pg 123); W. B. Morton, The forms of planetary orbits on the theory of relativity (Phil. Mag. 6ª serie, t. 41, pg 511); De Donder, AG, pg 23.

De ella se deduce, al derivar respecto de φ

$$(79) \qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{km}{C^2} + \frac{3}{2}\alpha u^2.$$

Si se prescinde del término $\frac{3}{2}\alpha u^2$ se obtiene la órbita Kepleriana

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1+e\cos\varphi}{p}, \qquad p = \frac{C^2}{km}.$$

Substituyamos este valor aproximado de u en el término correctivo de (79); se tendrá

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} + \frac{3\alpha}{p^2}\left(1 + 2e\cos\varphi + e^2\cos^2\varphi\right)$$

ecuación lineal con segundos miembros que admite la integral particular

$$u = \frac{1}{r} + \frac{1+\bar{e}\cos\varphi}{\bar{p}} + \frac{3km\bar{e}}{c^2\bar{p}^2}\operatorname{sen}\varphi\left(\varphi + \frac{e}{3}\operatorname{sen}\varphi\right),$$

donde $\bar{e}$ y $\bar{p}$ son dos constantes tales que los cocientes $\frac{\bar{e}}{e}$, $\frac{\bar{p}}{p}$ difieren de la unidad en cantidades del orden de $\frac{km}{c^2p}$. En el caso de Mercurio

$$\alpha = 5{,}78\cdot 10^{12}\ \text{cm}, \qquad e = 0{,}2$$

$$\frac{km}{c^2p} = \frac{\alpha}{2p} \simeq \frac{1{,}44\cdot 10^5}{5{,}78\cdot 10^{12}\cdot 0{,}96} \simeq 2{,}6\cdot 10^{-8}$$

Si convenimos en llamar *perihelios* de un planeta una posición en la que u pasa por un máximo, la anomalía verdadera φ_ϖ, evaluada a partir de un eje fijo, que corresponde a un perihelio figurará entre los valores de φ que anulen $\frac{du}{d\varphi}$, es decir, entre las raíces de la ecuación

$$(80) \qquad -\operatorname{sen}\varphi + \frac{3km}{c^2\bar{p}}\left(\varphi\cos\varphi + \frac{2e}{3}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\right) = 0.$$

La primera de ellas es $\varphi = 0$, valor que es fácil comprobar que corresponde a un mínimo de r. La raíz siguiente que esté en iguales condiciones es de la forma $\varphi = 2\pi + \Delta\varphi_\varpi$, siendo $\Delta\varphi_\varpi$ del orden de $\frac{km}{c^2p}$. Tomando esta cantidad como de primer orden y prescindiendo de las de segundo, se deduce de (80) que

$$-\Delta\varphi_\varpi + \frac{3km}{c^2p}\cdot 2\pi = 0$$

o sea

$$(81) \qquad \Delta\varphi_\varpi = \frac{6\pi km}{c^2p},$$

que es la famosa *fórmula de Einstein* que da el corrimiento del perihelio en cada revolución. Introduzcamos el semieje mayor de la órbita del planeta como también la excentricidad e; obtenemos así como expresión del *corrimiento secular* del perihelio de un planeta (81') $(\Delta\varphi_\varpi)_s = 2\pi \frac{3km}{c^2 a(1-e^2)} \cdot \frac{36525}{T}$,

donde T es la duración aproximada de la revolución en días medios.

En particular resulta:

Planeta	a	e	T	$(\Delta\varphi_\varpi)_s$ calculado	observado
☿	0,3871	0,2056	87,97	42",9	43"
♀	0,7233	0,0068	224,70	8",62	
♁	1	0,0167	365,25	3",83	
♂	1,5237	0,0933	686,98	1",35	8"

Acerca de los valores $\Delta\varphi_\varpi$, debe tenerse presente que no corresponden al valor observado del corrimiento del perihelio, sino que es el resto observación – cálculo que resulta de comparar las observaciones con el corrimiento teórico calculado teniendo en cuenta las perturbaciones de los demás planetas de acuerdo con la mecánica celeste clásica. En rigor, a las perturbaciones del movimiento del planeta que se deducen de la teoría de Newton, deberían añadirse las perturbaciones relativistas de las mismas, pero tales correcciones se consideran despreciables [1].

---

[1].- Un análisis comparativo de estos resultados con las determinaciones experimentales puede verse en G. Darmois, "La théorie Einsteinienne de la gravitation. Les vérifications expérimentales", pg 17 (Act. Scient. et Ind. XLIII, Paris, 1932)