

JUNTA DE ENERGIA NUCLEAR

MÉTODOS DE SÍNTESIS DE CAMPOS NEUTRÓNICOS

por

R. Ortiz Fornaguera

Parte.B

MÉTODOS DE SÍNTESIS DE CAMPOS NEUTRÓNICOS

por

R. Ortiz Fornaguera

Parte.B

PARTE. B

Casos particulares. Métodos no variacionales

INDICE

B. Casos particulares. Métodos no variacionales

IV. Otros métodos de síntesis

1. Coeficientes de influencia continuos.
2. ¿Por qué funciones de prueba continuas?

IV. Otros métodos de síntesis

1. Coeficientes de influencia continuos.

El método de síntesis que se expone a continuación no es esencialmente diferente del que consideramos en la sección III, pero permite poner de manifiesto ciertos aspectos conceptuales que podrían parecer un tanto a priorísticos - en particular, en lo que concierne al uso de las funciones características Δ_{ni} y Δ'_{ni} , que son elementos fundamentales de las funciones de prueba.

En la funcional (II.9) adoptaremos como término de su - perficie un término de la forma (II.11), de modo que

$$\begin{aligned} \Omega[F^+, F] = & \int_R \left\{ \phi^+ (\text{div } \underline{j} + \Delta \phi) + \underline{j}^+ \cdot (\text{grad } \phi + D^{-1} \underline{j}) \right\} dV \\ & + \int_{S_1} \underline{j}_v^+ (\alpha j_v - \phi) ds - \int_{S_2} \phi \underline{j}_v ds. \end{aligned} \quad (\text{IV.1})$$

La superficie S_1 está formada por la base superior $S_{(1)}$ del sistema, y por la parte S_{11} de la superficie lateral $S_{(1)}$; la superficie S_2 lo está por la base inferior $S_{(2)}$ y por el complemento de S_{11} en $S_{(1)}$.

En cuanto a las funciones de prueba, la forma elegida para ellas es la siguiente:

$$\phi(x, y, z) = \sum_m \phi_m(x, y) a_m(z), \quad (\text{IV.2})$$

$$\underline{j}(x, y, z) = \sum_m \phi_m(x, y) \underline{k}_m(z) + \sum_m \underline{j}_m(x, y) c_m(z),$$

donde las $\phi_m(x,y)$ son funciones continuas y derivables en cualquier sección transversal σ de R ($j_m = -D_m \text{grad}_2 \phi_m$) y las funciones $a_m(z)$ y $b_{z,m}(z)$ se suponen continuas en toda la altura del reactor, con derivadas primeras continuas en cada zona de continuidad de las características nucleares. En cada una de estas zonas son también continuas $c_m(z)$ y $b_{2,m}(z)$. Como en (III.2), impondremos la condición $\delta\Omega = 0$ para variaciones arbitrarias de $c_m^+(z)$, $b_{2,m}^+(z)$, $b_{z,m}^+(z)$ y $a_m^+(z)$, que son los coeficientes de influencia correspondientes a las funciones de prueba para la importancia ϕ^+ y su corriente j^+ . (*) Dado que el cálculo sigue una marcha análoga al desarrollado en (III.2), nos limitaremos a esbozarlo en el presente caso.

Es fácil ver que la condición $\delta\Omega = 0$ para $\delta c_m^+(z)$ arbitraria conduce a la relación

$$\left\{ (j_1^+ \text{grad}_2 \phi)_\sigma - (j_1^+ \phi)_{s_1} \right\} a + \left\{ (j_1^+ D^{-1} \phi)_\sigma + (j_1^+ \alpha \phi)_{s_1} \right\} \cdot b_2 + \left\{ (j_1^+ D^{-1} j)_\sigma + (j_1^+ \alpha j)_{s_1} \right\} c = 0, \quad (\text{IV.3})$$

donde (...) σ significa integración sobre la sección σ y (...) representa la integral curvilínea a lo largo del arco de la frontera de σ perteneciente a S_{11} , todo ello a la altura z . Obsérvese que en (IV.3) los vectores $a_m, b_{x,m}, b_{y,m}$ y c_m son funciones de z y que mientras las matrices coeficientes de b_2 y de c dependen en general de z (a través de α y del coeficiente de difusión D), la matriz coeficiente de a es independiente de z . (**) Además,

(*) El nombre de coeficientes de influencia procede del hecho que estos coeficientes determinan hasta qué punto influyen las $\phi_m(x,y)$ en lo que ocurre a la cota z .

(**) Se supone que el arco s_1 no depende de z .

aquellas matrices son discontinuas (como funciones de z) en los planos transversales de discontinuidad de D (o de α).

Análogamente, $\delta\Omega = 0$ para $\delta j^+ = \phi_m^+ \delta b_{2,m}^+(z)$ nos da las dos ecuaciones vectoriales (x,y)

$$\left\{ (\phi^+ g \nabla^2 \phi)_\sigma - (\nabla \phi^+ \phi)_{s_1} \right\} a + \left\{ (\phi^+ D^{-1} \phi)_\sigma + (\nabla \phi^+ \otimes \nabla \alpha \phi)_{s_1} \right\} b_2 + \left\{ (\phi^+ D^{-1} j)_\sigma + (\nabla \phi^+ \otimes j v)_{s_1} \right\} c = 0. \quad (IV.4)$$

Para las matrices que aparecen en (IV.4) vale, evidentemente, todo lo dicho acerca de las que aparecen en (IV.3).

La comparación de (IV.3-4) con (III.7,7'-13,13') pone de manifiesto las siguientes analogías y diferencias: el hecho de que las funciones de prueba (IV.2) sean funciones continuas y derivables respecto de (x,y) para cada z , hace desaparecer en (III.7,13) los términos de acoplamiento entre canales a través de superficies interiores, ya que éstas no existen en tanto que superficies de discontinuidad de $\phi_m(x,y)$ o de $j_m(x,y)$; en cambio, en (IV.3-4) aparecen automáticamente los términos de superficie característicos de los canales frontera en (III.7',13'). Todo ocurre, pues, como si hubiera un sólo canal, necesariamente canal frontera. Al igual que en (III.3), las ecuaciones (IV.3-4) permiten despejar b_2 y c en función de a mediante la introducción de una matriz B , cuadrada $3GM \times 3GM$, y una matriz A , rectangular $3GM \times GM$, tales que (cf. (III.18) y (III.19))

$$Bf = \frac{1}{2} Aa, \quad (IV.5)$$

donde la matriz A no depende de z y la matriz $B(z)$ es discontinua en los puntos z_i para los que $z=z_i$ es un plano de discontinuidad de D . El "vector" f es el definido por

$$f(z) = \begin{pmatrix} b_2(z) \\ c(z) \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, supuesto continua $a(z)$, las funciones $b_2(z)$ y $c(z)$ son, en general, discontinuas en los puntos $z=z_1$ y sólo en ellos.

Pasemos ahora a la variación de la componente longitudinal $b_{z,m}^+(z)$. El principio de variación conduce entonces a la ecuación diferencial lineal

$$(\phi^+ \phi)_\sigma \frac{da}{dz} + (\phi^+ D^{-1} \phi)_\sigma b_z = 0, \quad 0 < z < H, \quad (\text{IV.6})$$

(H es la altura del sistema R) y a la condición de contorno

$$(\phi^+ \alpha \phi)_\sigma b_z - (\phi^+ \phi)_\sigma a = 0, \quad \text{para } z = H,^{(*)} \quad (\text{IV.7})$$

Salta a la vista que (IV.6) es la versión continua para $h_1 \rightarrow 0$ de (III.15), y (IV.7), la de (III.15'). Claro está, si b_z es continua, la derivada $\frac{da}{dz}$ presenta saltos en los puntos $z=z_1$.

Consideremos, finalmente, los efectos de la variación de $a_m^+(z)$. Un cálculo fácil conduce a la ecuación diferencial lineal

$$(\phi^+ \phi)_\sigma \frac{db_z}{dz} + (\phi^+ \Lambda \phi)_\sigma a + \left\{ (\phi^+ g \text{grad}_2 \phi)_\sigma - (\phi^+ \phi)_{s_2} \right\} \cdot b_z + \left\{ (\phi^+ \text{div}_2 j)_\sigma - (\phi^+ j_v)_{s_2} \right\} c = 0, \quad (\text{IV.8})$$

versión continua de (III.17) para un canal frontera, y a la condición de contorno

(*) Si también sobre $S_{(2)}$ fuera $\alpha j_v - \phi = 0$, a la condición de contorno (IV.7) se hubiera añadido otra igual para $z=0$.

$$(\phi + \phi)_\sigma b_z(0) = 0, \text{ es decir, } b_z(0) = 0. \quad (\text{IV.9})$$

Obsérvese que los términos de superficie en (IV.8) corresponden a los (III.17') del modelo discreto.

Como en (III.21), escribiremos los términos que en (IV.8) contienen b_z y c en la forma $\frac{1}{2} Mf$, donde M es una matriz rectangular $GM \times 3GM$ cuya estructura se deduce fácilmente de la identificación con los elementos correspondientes de (IV.8). Teniendo en cuenta (IV.5) queda entonces la ecuación en a, b_z :

$$(\phi^+ \phi)_\sigma \frac{db_z}{dz} + \left\{ (\phi^+ \Lambda \phi)_\sigma + \frac{1}{4} M B^{-1} A \right\} a = 0, \quad (\text{IV.10})$$

con la condición de contorno (IV.9). Con esto el problema de determinar el "mejor" ϕ, j de la forma (IV.2) queda reducido a la integración del sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales de primer orden (IV.6,10) con las condiciones de contorno (IV.7,9). Se trata, pues, de un problema de valores propios.

He aquí otro ejemplo que puede resultar particularmente instructivo. Si entre las ecuaciones fundamentales (I.23) eliminamos el vector corriente j , el problema queda reducido a resolver la ecuación en ϕ

$$-\text{div } D \text{ grad } \phi + \Lambda \phi = 0 \quad (\text{IV.11})$$

con la condición de contorno

$$\underline{n} \cdot D \text{ grad } \phi + \beta \phi = 0, \text{ sobre } S, \quad (\text{IV.11}')$$

donde $\beta = \alpha^{-1}$. La función incógnita ϕ , además, debe ser continua en R , y sobre cada superficie de discontinuidad de D la componente normal de $D \text{ grad } \phi$ ha de ser continua. Para aplicar el principio de variación, cabría pensar en hacer en (II.9) $j = \pm D \text{ grad } \phi$, simplemente, lo que conduciría a la funcional (*)

$$\Omega[\phi^+, \phi] = \int_R \phi^+ (-\text{div } D \text{ grad } \phi + \Lambda \phi) + \oint_S \phi^+ (\beta \phi + D \partial_\nu \phi) dS. \quad (\text{IV.12})$$

Y, en efecto, la condición $\delta \Omega = 0$ para $\delta \phi^+$ cualquiera conduce a (IV.11, 11') como también a las condiciones de continuidad señaladas. Sin embargo, se presenta en la práctica una dificultad al intentar utilizar (IV.12) con una función de prueba de la forma (IV.2):

$$\phi(x, y, z) = \sum_m \phi_m(x, y) a_m(z).$$

La dificultad consiste en que, si bien para cada ϕ_m hay una matriz coeficiente de difusión D_m tal que $D_m \text{ grad}_2 \phi_m$ es de componente normal continua sobre cada superficie de discontinuidad de D_m (el coeficiente de difusión utilizado en el cálculo bidimensional de ϕ_m), no es continua, en general, la componente de $\sum_m (D \text{ grad}_2 \phi_m) a_m$ normal a las superficies de discontinuidad de D , lo que introduce términos singulares en la integral de volumen de (IV.12). Para evitarla, cabe reemplazar la funcional (IV.12) por otra que le es equivalente cuando ϕ^+ y ϕ son funciones cualesquiera de la clase C_R , pero que no presenta aquel inconveniente.

(*) Es fácil ver que si α tiene inversa, el término de superficie en (II.9) se puede substituir por $\oint_S \phi^+ (\beta \phi - j_\nu) dS$ con $\beta = \alpha^{-1}$.

niente. Se comprueba con facilidad que, en efecto, (IV.12) equivale a

$$\Omega[\phi^+; \phi] = \int_R (q \text{grad } \phi^+ \cdot D q \text{grad } \phi + \phi^+ \Delta \phi) dV + \oint_S \phi^+ \beta \phi dS \quad (\text{IV.12}')$$

y es obvio que el integrando de esta funcional es del todo regular cuando ϕ y ϕ^+ son elementos de la clase restringida (IV.2). La substitución de ϕ por $\sum_m \phi_m(x,y) a_m(z)$ en (IV.12') y la correspondiente variación de ϕ^+ da entonces

$$\sum_{m'} \int_R \left\{ q \text{grad}_2 \phi_m^+ \delta a_m^+ \cdot D q \text{grad}_2 \phi_m a_{m'} + \phi_m \frac{d}{dz} (\delta a_m^+) D \phi_m \frac{da_{m'}}{dz} + \phi_m^+ \delta a_m^+ \Delta \phi_m a_{m'} \right\} dV + \sum_{m'} \oint_S \phi_m^+ \delta a_m^+ \beta \phi_m a_{m'} dS = 0.$$

Ahora bien, se tiene

$$\sum_{m'} \int_R \phi_m \frac{d}{dz} (\delta a_m^+) D \phi_m \frac{da_{m'}}{dz} dV = \sum_{m'} \int_R \frac{\partial}{\partial z} (\phi_m^+ \delta a_m^+ D \phi_m \frac{da_{m'}}{dz}) dV - \sum_{m'} \int_R \phi_m^+ \delta a_m^+ \frac{\partial}{\partial z} (D \phi_m \frac{da_{m'}}{dz}) dV.$$

Por lo tanto, y dada la arbitrariedad de δa_m^+ deberá tenerse :

$$-\frac{d}{dz} (\phi^+ D \phi)_\sigma \frac{da}{dz} + \left\{ (q \text{grad}_2 \phi^+ \cdot D q \text{grad}_2 \phi)_\sigma + (\phi^+ \beta \phi)_{s_2} + (\phi^+ \Delta \phi)_\sigma \right\} a = 0, \quad (\text{IV.13})$$

$$(\phi^+ D \phi)_\sigma \frac{da}{dz} + (\phi^+ \beta \phi) a = 0 \text{ en } z=0 \text{ y } z=H. (*) \quad (\text{IV.13}')$$

siendo, además, funciones continuas de z en $(0,H)$ tanto las $a_m(z)$ como la corriente ponderada $(\phi^+ D \phi)_\sigma \frac{da}{dz}$. El método de síntesis

(*) Si el plano $z=0$ es un plano de simetría, en él es $\beta = 0$ y (IV.13') se reduce a $\frac{da}{dz} = 0$ para $z=0$.

sis basado en (IV.13,13') es precisamente el propuesto por Kaplan,⁹ método cuya versión numérica se encuentra en ¹⁰. El sistema lineal (IV.13) de segundo orden se reduce a uno de primero análogo al (IV.6,10) sin más que introducir la corriente ponderada

$$b_z = - (\phi^+ D \phi) \frac{da}{dz}.$$

La analogía formal entre ambos sistemas es entonces patente.

2. ¿Por qué funciones de prueba continuas?

Después de haber comprobado que el método variacional conduce a una solución bien determinada para la clase de funciones de prueba (IV.2) -incluso cuando ésta se limita al propio flujo ϕ y su adjunto ϕ^+ - cabe preguntarse por qué utilizar funciones de prueba discontinuas cuando ha quedado demostrado que existen soluciones aproximadas tales que el flujo $\phi(x,y,z)$ y la componente longitudinal de la corriente $j(x,y,z)$ son continuas, como lo son en la solución exacta del problema de contorno (I.23,25). Se esconde aquí una sobreestimación, que hay que desvelar, de la bondad de lo continuo en la representación de los fenómenos físicos. He aquí un ejemplo. Supongamos que se trata de describir, mediante la teoría de la difusión, la marcha del flujo neutrónico en un sistema con dos regiones A y B de características físicas muy diferentes. Puede ocurrir que, realmente, el flujo experimente una brusca caída al atravesar la superficie C que separa A y B. En estas condiciones, una solución en la aproximación de difusión que sea discontinua al atravesar C (con discontinuidad igual al salto que realmente experimenta el flujo) tendrá en muchos casos un intervalo de validez mayor que la que resulta de imponer las condiciones tradicionales de con-

Pues bien, si se piensa un poco en las razones que hacen plausible la elección de las funciones de prueba del tipo (IV.2) se llega a la conclusión de que la más importante procede de la idea de que, a cada nivel z , el flujo y la corriente pueden representarse como medias ponderadas de ciertas distribuciones de flujo y de corriente típicas de determinadas zonas. Los coeficientes $a_m(z)$, $b_m(z)$ y $c_m(z)$ son precisamente los elementos que determinan la influencia, al nivel z , de dichas distribuciones. Pero, de hecho, un reactor tiene una estructura menos heterogénea en sentido longitudinal que en sentido transversal. En estas condiciones, cabe esperar un comportamiento más regular del flujo en el primer sentido que en el segundo. Dicho de otra manera: si se considera un corte transversal σ del reactor practicado al nivel z , sobre esta sección habrán regiones de naturaleza física muy diferente -canales de combustible, moderador, secciones de elementos de control, etc.- y no parece muy acertada la idea de representar el flujo en todas ellas por una misma combinación lineal (IV.3). Ciertamente es que las propias funciones $\phi_m(x,y)$ reflejan aquella heterogeneidad transversal, pero lo hacen a ciertas cotas que se consideran típicas y cabe pensar que su influencia a un nivel dado z puede depender de la región de σ de que se trate. Esto sugiere una descomposición de σ en regiones más o menos homogéneas σ_n y el atribuir a cada σ_n un sistema propio de coeficientes de influencia. Es decir, esto sugiere hacer depender dichos coeficientes, no sólo de z , sino de la región σ_n . La elección de las σ_n de manera que sean independientes de z lleva directamente a la idea de la descomposición del reactor en canales verticales. Cada coeficiente de influencia pasa, entonces, a ser una función de z , dependiente del índice n que fija el canal. Con ello, el flu-

h	n		7	H	L
e	o	i	1	m	A
e	p	U	8	H	T
e	p	U	1	H	N
a	e	i	6	H	f
e		U	0	H	P
d	e		9	H	I

jo $\phi(x, y, z)$ deja de ser función continua de (x, y) para z da-
do y en vez de (IV.2) tenemos representaciones de la forma

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m, n} \delta_n(x, y) \phi_m(x, y) a_{mn}(z),$$

$$\underline{j}(x, y, z) = \sum_{m, n} \delta_n(x, y) \left\{ \phi_m(x, y) \underline{b}_{mn}(z) + \underline{j}_m(x, y) c_{mn}(z) \right\}, \quad (\text{IV.15})$$

donde $\delta_n(x, y)$ es la función característica del canal C_n .

Es inmediato determinar qué modificaciones introduce en (IV.3-10) la introducción de los factores discontinuos $\delta_n(x, y)$. En (IV.3-4) todas las matrices pasan a depender del canal, ya que la integración se extiende sólo a σ_n , no a toda la sección σ ; en particular, los términos de superficie(...) s_1 desaparecen para los canales que no son canales frontera. Además, se añaden a los primeros miembros los términos de acoplamiento entre canales contiguos que resultan de los factores discontinuos $\delta_n(x, y)$. Estos términos son

$$\frac{1}{2} \sum_{n' \neq n} (\underline{v} \cdot \underline{j}^+ \phi)_{nn'} \left\{ a_{n'}(z) - a_n(z) \right\}$$

en el caso de (IV.3) y

$$\frac{1}{2} \sum_{n' \neq n} (\underline{v} \phi^+ \phi)_{nn'} \left\{ a_{n'}(z) - a_n(z) \right\}$$

en el de (IV.4). La relación (IV.5) subsiste formalmente, aunque con un significado de las matrices B y A algo distinto: la B es

diagonal respecto del índice de canal; no así la matriz A, que contiene los coeficientes de acoplamiento. Tampoco se modifican ni (IV.6) ni (IV.7) en tanto que aplicadas a cada canal; las integrales se extienden a σ_n en vez de σ y las funciones a y b_z dependen del índice n .

En cuanto a (IV.8), desaparecen los términos de superficie $(\dots)_{s_2}$ cuando el canal no es un canal frontera y, además, se añaden al primer miembro los términos de acoplamiento canal-canal:

$$\frac{1}{2} \sum_{n \neq n'} (\psi \phi^+ \phi)_{nn'} \cdot \left\{ b_{z,n'}(z) - b_{z,n}(z) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n \neq n'} (\psi \phi^+ j)_{nn'} \cdot \left\{ c_{n'}(z) - c_n(z) \right\}.$$

Los únicos efectos de ello se manifiestan en la definición de la matriz M que deja de ser diagonal respecto de n , si bien siguen siéndolo $(\phi_n^+ \phi)$ y $(\phi_n^+ \wedge \phi)$. Resumiendo, la introducción de los canales no modifica la estructura ni de la ecuación fundamental (IV.6), ni de la condición de contorno (IV.7) ni de la condición de contorno (IV.9) que valen para cada canal con independencia de los demás. La otra ecuación fundamental, en cambio, la (IV.10), acopla los diferentes canales entre sí a través de la matriz $MB^{-1}A$. Pero, desde un punto de vista formal, el sistema de ecuaciones y las condiciones de contorno que determinan $a_{mn}(z)$ y $b_{z,mn}(z)$ son exactamente las mismas que en el caso de las funciones de prueba (IV.2). La solución del problema es un conjunto de funciones $a_{mn}(z)$, $b_{z,mn}(z)$ continuas para $0 < z < H$ que satisfacen un sistema de ecuaciones de la forma

$$\varphi \frac{da}{dz} + Qb = 0, \quad (IV.16)$$

$$\varphi \frac{db}{dz} + Pa = 0$$

con condiciones de contorno $b(0)=0$, $\alpha b - \varphi a = 0$ para $z=H$. Las matrices Q, α y φ son diagonales respecto de n , pero la P es no diagonal. Q y P son acaso discontinuas en los puntos $z=z_i$, pero sólo en ellos pueden serlo.

Para integrar numéricamente el sistema (IV.16) podemos seguir el siguiente método (cf.¹ Cap.8). Sobre el eje z dispongamos una red de puntos $z=z_i$ ($i=0,1,\dots,Z+1$) de la manera indicada en la fig.2 e integremos la componente n de la segunda ecuación (IV.16) entre $z_{i-\frac{1}{2}}$ y $z_{i+\frac{1}{2}}$. Se tendrá

$$\varphi(b_{i+\frac{1}{2}} - b_{i-\frac{1}{2}}) + \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} dz Pa = 0^{(*)} \quad (IV.17)$$

Integrando la misma ecuación entre $i-\frac{1}{2}$ y z , se obtiene:

$$b(z) = b_{i-\frac{1}{2}} - \varphi^{-1} \int_{i-\frac{1}{2}}^z dz' Pa.$$

La substitución de este valor de $b(z)$ en la primera ecuación (IV.16) y la integración ulterior entre z_{i-1} y z_i conduce a la igualdad:

$$\varphi(a_i - a_{i-1}) + \left(\int_{i-1}^i dz Q \right) b_{i-\frac{1}{2}} - \int_{i-1}^i dz Q \varphi^{-1} \int_{i-\frac{1}{2}}^z dz' Pa = 0$$

(*) Para simplificar la notación, hemos prescindido del índice n y escrito $i-\frac{1}{2}$ en vez de $z_{i-\frac{1}{2}}$. Obsérvese que esta operación equivale a integrar en lo que se llamó G_{ni} (cf. III.1).

de donde

$$b_{i-\frac{1}{2}} = - \left(\int_{i-1}^i dz Q \right)^{-1} \mathcal{P}(a_i - a_{i-1}) + \varepsilon_i \quad (\text{IV.18})$$

En las condiciones supuestas (continuidad de Q y de P salvo acaso en los nudos $z=z_i$), la corrección ε_i es de primer orden de pequeñez comparada con el primer término. Prescindiendo de ella y substituyendo en (IV.17) queda, con igual aproximación,

$$-\mathcal{P} \frac{1}{h_i} Q_{i+\frac{1}{2}}^{-1} \mathcal{P}(a_{i+1} - a_i) + \frac{1}{h_{i-1}} Q_{i-\frac{1}{2}}^{-1} \mathcal{P}(a_i - a_{i-1}) + \frac{1}{2} (h_{i-1} + h_i) \bar{P}_i a_i = 0, \quad (\text{IV.19})$$

que es precisamente el resultado obtenido en (III.23). Lo que se llamó allí a_{ni} es el valor (estimado) de $a_n(z)$ en $z=z_i$; lo que se definió como $b_{z,ni}$ es el valor (estimado) de $b_{z,n}(z)$ en $z = z_{i+\frac{1}{2}}$. Hay, sin embargo, una diferencia: en (IV.18) los elementos $(\phi^+ \phi)_n$ de \mathcal{P} son independientes de z y, por consiguiente, del índice i ; en (III.23), los elementos análogos dependen de i . Ello se debe a que, en el formalismo basado en las funciones (III.1,2), las funciones ϕ_m y j_m que contribuyen a lo que ocurre en G_{ni} , G'_{ni} dependen de i , condición que no tendría sentido imponer en (IV.15). Con todo, bastaría suponer en (IV.18, 19) que algunos a_{mni} y los correspondientes $b_{z,mni}$ son nulos para los m que no pertenecen a determinado sistema de valores $m(i)$ para que (IV.18) coincida del todo con (III.23).

3. Métodos no variacionales

Para terminar, presentaremos rápidamente unos pocos

métodos más, utilizados también en la práctica, los de promedios con un sólo canal y el método multicanal.

Métodos de promedios

Los métodos de promedios con un sólo canal⁹ se basan en la idea siguiente. Las ecuaciones variacionales (IV.13), con las condiciones de contorno (IV.13'), podrían haberse obtenido directamente multiplicando por $\phi_m^+(x,y)$ el resultado de substituir en

$$-\text{div } D \text{ grad } \phi + \Lambda \phi = 0, \quad D \partial_n \phi + \beta \phi = 0, \quad \text{sobre } S_1, \quad (\text{IV.20})$$

$$\alpha D \partial_z \phi + \beta \phi = 0, \quad z = 0, \quad z = H$$

por $\sum_m \phi_m^+(x,y) a_m(z)$ e integrando luego sobre las secciones transversales σ del reactor R a las cotas $z, z=H$ y $z=0$, respectivamente. En realidad, y a pesar de la afirmación de Kaplan, por las razones antes apuntadas de discontinuidad de $D \sum_m \phi_m(x,y) a_m(z)$ sobre ciertas superficies cilíndricas verticales, las ecuaciones que se obtienen no son exactamente las (IV.13), sino las (IV.13) con ciertos términos correctivos debidos a dichas discontinuidades. Si γ_n son las trazas de dichas superficies sobre la sección transversal $\sigma(z)$, en vez de (IV.13) se obtiene

$$\frac{d}{dz} (\phi^+ D \phi)_\sigma \frac{da}{dz} + \left\{ (\text{grad}_2 \phi^+ D \text{grad}_2 \phi)_\sigma + (\phi^+ \beta \phi)_{S_2} + \sum_n (\phi^+ [D \partial_n \phi])_{\gamma_n} + (\phi^+ \Lambda \phi)_\sigma \right\} a = 0, \quad (\text{IV.21})$$

donde $(\phi^+ [D \partial_n \phi])_{\gamma_n}$ es la matriz cuyos elementos (m, m') están definidos por

$$\int_{\gamma_n} \phi_m^+ [D \partial_n \phi_{m'}] dl.$$

En estas integrales la normal ν a γ_n se orienta de manera

que su sentido positivo queda a la derecha al describir γ_n en el sentido elegido (arbitrario) y el salto $[D\phi_m]$ corresponde a ese sentido positivo de γ . Si sobre γ_n fuera discontinua ϕ_m^+ , en el integrando hay que entender por ϕ_m^+ el valor medio límite a la derecha y a la izquierda de γ_n . En cuanto a las condiciones en los límites $z=0$ y $z=H$, coinciden con las (IV.13')^(*).

Pues bien, desde este punto de vista, esto es, considerando (IV.21) no como ecuaciones variacionales para una clase restringida de funciones de prueba, sino como promedios ponderados de las ecuaciones (IV.20) con las funciones ϕ_m^+ como funciones de peso, cabe preguntarse por qué utilizar como a tales las importancias ϕ_m^+ y no funciones de peso $W_m(x,y)$, linealmente independientes, elegidas arbitrariamente y en número igual al de funciones $\phi_m(x,y)$. Claro está, se obtendrían así sistemas de ecuaciones para determinar las $a_m(z)$ que coincidirían formalmente con el (IV.21), pero con otra significación de las matrices coeficiente. Es evidente que si la solución exacta fuera precisamente de la forma $\sum_m \phi_m(x,y)a_m(z)$, todos estos sistemas conducirían a las mismas $a_m(z)$, cualesquiera que fueran las funciones de peso $W_m(x,y)$. Pero cuando la verdadera solución no es de dicha forma, no se dispone de una teoría completa que indique cuál es el sistema de funciones W_m óptimo en el sentido de conducir a una mejor aproximación a la solución exacta. Para cada problema dado, la elección debe basarse en pruebas empíricas, en experimentos numéricos para determinar la precisión conseguida, y también en consideraciones de conveniencia

(*) Es fácil comprobar que las ecuaciones (IV.21) son las que resultan de aplicar el principio variacional a la funcional (IV.12) con las funciones de prueba $\phi = \sum_m \phi_m a_m$. Los términos singulares de que antes se habló conducen precisamente a los términos correctivos que aparecen en (IV.21) y que no aparecen en (IV.13).

desde el punto de vista de tiempo de cálculo.

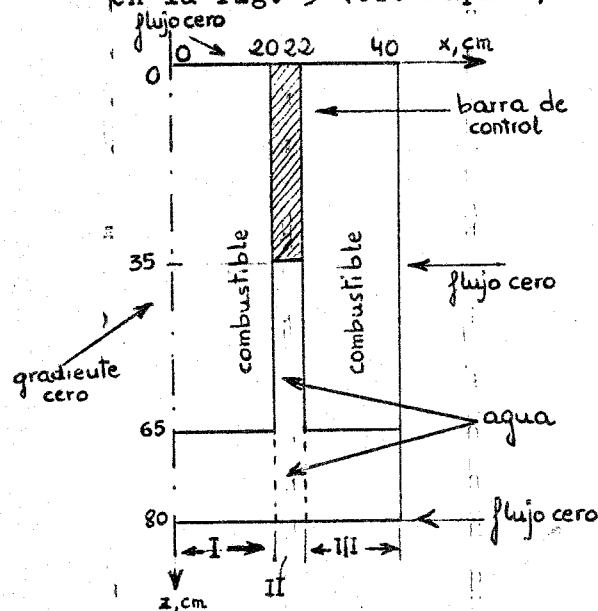
Los métodos de síntesis por promedios suelen recibir nombres diferentes según sea el sistema adoptado de funciones de peso $W_m(x,y)$. En particular, la síntesis variacional corresponde al caso $W_m = \phi_m^+$. Otro método, con antigua tradición en la matemática aplicada, es el método de Galerkin, en el que como funciones de peso se adoptan las propias funciones de base ϕ_m . Particularmente cómodo por el hecho de conducir a matrices fácilmente calculables (hasta cierto punto, claro está) es el método llamado de integración parcial o de balance por regiones. En este método se parte de la elección de N canales longitudinales en número igual al de funciones de prueba. Estos $N=M$ canales determinan sobre cada sección transversal, $\sigma(z)$, M regiones σ_m que no se solapan y cuya unión puede, en principio, no coincidir con $\sigma(z)$. Si $G_m(x,y)$ es la función característica de σ_m (esto es, $G_m(x,y)=1$ si $(x,y) \in \sigma_m$ y $G_m(x,y)=0$ si $(x,y) \notin \sigma_m$), en el método de balance por regiones se adoptan como funciones de peso precisamente las funciones $G_m(x,y)$. (*) Con esta elección de las funciones de peso, las correspondientes ecuaciones (IV.21), con G_m en vez de ϕ_m^+ , expresan que, para cada grupo neutrónico y a cada cota z , el número total de neutrones que nacen en σ_m es igual al número total de remociones y de fugas de neutrones del grupo en dicha región. Dicho de otra manera, el balance de neutrones se cumple rigurosamente en cada región σ_m . Finalmente, elegidas M rectas verticales, que determinan en cada $\sigma(z)$ M puntos (x_m, y_m) , tomar $W_m(x,y) = \delta(x-x_m)\delta(y-y_m)$ equivale a imponer la condición de balance neutrónico en cada uno de aquellos puntos y para todo z , de aquí el nombre de balance por puntos (multiple spot me -

(*) Obsérvese que, en general, $W_m(x,y)$ es una matriz diagonal-g, con elementos diagonales en general distintos. Al adoptar como funciones W_m las funciones características $G_m(x,y)$, todos los elementos diagonales son iguales entre sí, iguales precisamente a $G_m(x,y)$.

method), o de balance local. El cálculo de las matrices no requiere, en este caso, integración alguna y el sistema de ecuaciones diferenciales que permiten determinar las $a_m(z)$ se escriben, simplemente,

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{dz} \sum_{m'} \left\{ D(x_m, y_m, z) \phi_{m'}(x_m, y_m) \right\} \frac{da_m}{dz} + \sum_{m'} \left\{ -\text{div}_2 D(x_m, y_m, z) \text{grad}_2 \phi_{m'}(x_m, y_m) + \Lambda(x_m, y_m, z) \phi_{m'}(x_m, y_m) \right\} \\ & a_m = 0, \quad \sum_{m'} \left\{ D(x_m, y_m, z) \phi_{m'}(x_m, y_m) \right\} \frac{da_m}{dz} + \sum_{m'} \left\{ \beta(x_m, y_m, z) \phi_{m'}(x_m, y_m) \right\} a_m = 0 \quad (\text{IV.22}) \\ & (z=0, z=H), \end{aligned}$$

con $m=1,2,\dots,M$. La eficacia de este método depende considerablemente de cuan "inteligente" haya sido la elección de los ejes longitudinales $x=x_m, y=y_m$. En el ejemplo que se presenta en la fig. 5 (cf. Kaplan, loc.cit.), las zonas adoptadas fueron:



Z_1 =combustible-barra de control-combustible; Z_2 =combustible-agua-combustible; Z_3 =agua; los canales fueron los indicados con cifras romanas. Para el balance local, como ejes longitudinales se adoptaron los que pasan por $x=9$ cm, $x=21$ cm y $x=30$ cm. Obsérvese que uno de estos ejes se ha elegido interior a la barra de control a fin de tener en cuenta la presencia de esta barra.

Método multicanal

Un posible camino para introducir los conceptos en que se basa este método puede ser el siguiente. Como en todo

lo que precede, consideremos un reactor cilíndrico R (acaso una porción cilíndrica de un reactor real) con condiciones de contorno bien definidas sobre su frontera y supongamos que los planos $z=z_{\mu-1}$ y $z=z_{\mu}$ determinan en él una zona longitudinalmente homogénea Z_{μ} , es decir, una zona en la que las propiedades nucleares son independientes de z (o porque realmente lo son o porque pueden considerarse prácticamente tales -por ejemplo, mediante homogeneización). De la ecuación fundamental

$$-\text{div } D \text{ grad } \phi + A \phi = \frac{1}{\lambda} F \phi \quad (\text{IV.23})$$

se deduce, integrando respecto de z entre $z_{\mu-1}$ y z_{μ} ,

$$-\text{div}_2 D_{\mu-\frac{1}{2}}(x,y) \text{grad}_2 \int_{z_{\mu-1}}^{z_{\mu}} \phi(x,y,z) dz + \left(-D \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=z_{\mu}} - \left(-D \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=z_{\mu-1}} + A_{\mu-\frac{1}{2}}(x,y) \int_{z_{\mu-1}}^{z_{\mu}} \phi(x,y,z) dz = \frac{1}{\lambda} F_{\mu-\frac{1}{2}}(x,y) \int_{z_{\mu-1}}^{z_{\mu}} \phi(x,y,z) dz, \quad (\text{IV.24})$$

donde el subíndice $\mu-\frac{1}{2}$ indica que las matrices en cuestión son las correspondientes a la zona $(z_{\mu-1}, z_{\mu})$, independientes de z en dicha zona. El término

$$\left(-D \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=z_{\mu}} - \left(-D \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=z_{\mu-1}}$$

es tal que su componente g -ésima da la fuga longitudinal total de neutrones del grupo g fuera de la zona $\mu-\frac{1}{2}$ por unidad de superficie en torno de (x,y) . Representando esta fuga por el vector $f_{\mu-\frac{1}{2}}$ e introduciendo el flujo medio

$$\phi_{\mu-\frac{1}{2}}(x,y) = \frac{1}{z_{\mu} - z_{\mu-1}} \int_{z_{\mu-1}}^{z_{\mu}} \phi(x,y,z) dz, \quad (\text{IV.25})$$

la ecuación (IV.24) puede escribirse en la forma

$$-\text{div}_2 D_{\mu-\frac{1}{2}} \text{grad}_2 \phi_{\mu-\frac{1}{2}} + A_{\mu-\frac{1}{2}} \phi_{\mu-\frac{1}{2}} + \frac{1}{z_{\mu}-z_{\mu-1}} \int_{\mu-\frac{1}{2}}^{\mu} \phi_{\mu-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\lambda} F_{\mu-\frac{1}{2}} \phi_{\mu-\frac{1}{2}}, \quad (\text{IV.26})$$

donde $\phi_{\mu-\frac{1}{2}}(x,y)$ cumple sobre la frontera lateral de la zona las mismas condiciones de contorno (independientes en ella de "z, por hipótesis) que el propio flujo $\phi(x,y,z)$. Supongamos que se conocen exactamente las fugas $\int_{\mu-\frac{1}{2}}^{\mu} \phi_{\mu-\frac{1}{2}}(x,y)$. Existen dos posibilidades para representarlas: la representación mediante una laplaciana y la representación mediante coeficientes de acoplamiento de zona. Examinemos la primera posibilidad.

Para ello introduzcamos una matriz diagonal $B_{z,\mu-\frac{1}{2}}^2$ tal que

$$(B_{z,\mu-\frac{1}{2}}^2)_{qq} = \frac{(\int_{\mu-\frac{1}{2}}^{\mu} \phi_{\mu-\frac{1}{2}})^2}{\sum_{q=1}^n (D_{\mu-\frac{1}{2}})_{qq} \int_{z_{\mu-1}}^{z_{\mu}} \phi_q(x,y,z) dz}, \quad (\text{IV.27})$$

con lo cual, por definición,

$$\frac{1}{z_{\mu}-z_{\mu-1}} \int_{\mu-\frac{1}{2}}^{\mu} \phi_{\mu-\frac{1}{2}} = B_{z,\mu-\frac{1}{2}}^2 D_{\mu-\frac{1}{2}} \phi_{\mu-\frac{1}{2}}.$$

La ecuación (IV.26) se reduce entonces a una simple ecuación de difusión en dos dimensiones:

$$-\text{div}_2 D_{\mu-\frac{1}{2}} \text{grad}_2 \phi_{\mu-\frac{1}{2}} + (A_{\mu-\frac{1}{2}} + B_{z,\mu-\frac{1}{2}}^2 D_{\mu-\frac{1}{2}}) \phi_{\mu-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\lambda} F_{\mu-\frac{1}{2}} \phi_{\mu-\frac{1}{2}}; \quad (\text{IV.28})$$

junto con las condiciones de contorno, permite determinar el valor propio λ y el valor medio del flujo en la zona Z_{μ} . Este tipo de representación adolece del inconveniente que, en zonas poco reactivas, las fugas longitudinales totales pueden ser negativas, lo que da para la correspondiente lapla -

ciana un valor negativo y esto, a su vez, puede conducir a una falta de convergencia de los procesos iterativos usuales. Otro inconveniente es que si la zona no contiene materiales fisibles, el segundo miembro de (IV.28) desaparece y el problema no puede resolverse en una aproximación multigrupo. Esta, en efecto, supone o una fuente de fisión (problema homogéneo) o una fuente impuesta no nula (problema no homogéneo). Estos inconvenientes pueden evitarse acudiendo a la representación por acoplamiento de zonas.

Consideremos dos zonas adyacentes $(z_{\mu-1}, z_{\mu}), (z_{\mu}, z_{\mu+1})$. La componente longitudinal $j_{\mu-\frac{1}{2}, \mu+\frac{1}{2}}^+$ de la corriente de neutrones que sale de la zona Z_{μ} para penetrar en la $Z_{\mu+1}$ atravesando la superficie frontera común en un entorno del punto (x, y, z_{μ}) depende de la forma del flujo y de su nivel y es posible definir un coeficiente de acoplamiento $p_{\mu-\frac{1}{2}, \mu+\frac{1}{2}}$ (en general, función de x, y) por la relación

$$j_{\mu-\frac{1}{2}, \mu+\frac{1}{2}}^+ = \phi_{\mu-\frac{1}{2}} p_{\mu-\frac{1}{2}, \mu+\frac{1}{2}} \quad (IV.29)$$

donde $\phi_{\mu-\frac{1}{2}}$ es el flujo medio definido en (IV.25). En estas condiciones, es claro que el valor de la fuga total $j_{\mu-\frac{1}{2}}$ que aparece en (IV.26) es

$$j_{\mu-\frac{1}{2}} = \phi_{\mu-\frac{1}{2}} p_{\mu-\frac{1}{2}, \mu+\frac{1}{2}} - \phi_{\mu+\frac{1}{2}} p_{\mu+\frac{1}{2}, \mu-\frac{1}{2}} + \phi_{\mu-\frac{1}{2}} p_{\mu-\frac{1}{2}, \mu-\frac{3}{2}} - \phi_{\mu-\frac{3}{2}} p_{\mu-\frac{3}{2}, \mu-\frac{1}{2}}$$

y que, por lo tanto, $\phi_{\mu-\frac{1}{2}}$ es solución de

$$-\text{div}_2 D_{\mu-\frac{1}{2}} \text{grad}_2 \phi_{\mu-\frac{1}{2}} + (A_{\mu-\frac{1}{2}} + \frac{1}{h_{\mu-1}} p_{\mu-\frac{1}{2}, \mu+\frac{1}{2}} + \frac{1}{h_{\mu+1}} p_{\mu-\frac{1}{2}, \mu-\frac{3}{2}}) \phi_{\mu-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\lambda} F_{\mu-\frac{1}{2}} \phi_{\mu-\frac{1}{2}} + Q_{\mu-\frac{1}{2}} \quad (IV.30)$$

ecuación no homogénea en $\phi_{\mu-\frac{1}{2}}$, con un término de fuente no negativo

$$Q_{\mu-\frac{1}{2}} = \frac{1}{h_{\mu-1}} \left\{ \phi_{\mu-\frac{3}{2}} p_{\mu-\frac{1}{2}, \mu-\frac{1}{2}} + \phi_{\mu+\frac{1}{2}} p_{\mu+\frac{1}{2}, \mu-\frac{1}{2}} \right\} \geq 0, \quad (IV.31)$$

en la que se ha hecho $h_{\mu-1} = z_{\mu} - z_{\mu-1}$. Si se conoce λ y la fuente $Q_{\mu-\frac{1}{2}}$, el flujo medio $\phi_{\mu-\frac{1}{2}}$ se determina mediante (IV.30) y las condiciones de contorno sobre la superficie lateral. Dado que la fuente es no negativa (con una componente no nula por lo menos) no se presentan dificultades de convergencia al aplicar los diferentes métodos iterativos para resolver (IV.30). Desde un punto de vista puramente físico, la representación de las fugas por acoplamiento entre zonas se ajusta mas a la realidad que la basada en el concepto de la -placiana: cuanto más importante es el ingreso de neutrones en una zona, mayores serán los efectos de la forma de los flujos en las zonas adyacentes. Además, la representación por acoplamiento no plantea dificultades en el caso de zonas sin elementos fisiónables, ya que en tal caso lo único que ocurre es que en (IV.30) no existe la fuente de fisión, pero subsiste la fuente $Q_{\mu-\frac{1}{2}}$. La resolución de (IV.30) no requiere entonces iteración alguna.

Admitamos ahora que existe en R un canal C_n transversalmente homogéneo, es decir, un canal tal que las propiedades nucleares son las mismas en cada una de sus secciones transversales, aunque variables, en general, de una sección a otra. La integración de (IV.23) extendida a la sección transversal $\sigma_n(z)$ de C_n a la cota z da

$$\oint_{\ell_n} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dz} D_n(z) \frac{d}{dz} \int_{\sigma_n} \phi(x, y, z) dx dy + A_n(z) \int_{\sigma_n} \phi(x, y, z) dx dy \quad (IV.32)$$

$$= \frac{1}{\lambda} F_n(z) \int_{\sigma_n} \phi(x, y, z) dx dy,$$

ecuación en la que el subíndice n indica que las matrices coeficientes (que son, en general, funciones de z) son las que corresponden al canal C_n , independientes de (x,y) en el mismo, y l_n es el contorno de C_n . También aquí existen dos posibilidades para representar las fugas. Así, por ejemplo, cabe introducir una "laplaciana transversal, definida, como matriz diagonal-g, por la relación (cf.IV.27)

$$\oint_{l_n} j_z \cdot \nu \, dl = \sigma_n B_{t,n}^2 D_n \phi_n \quad (\text{IV.33})$$

en la que

$$\phi_n(z) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{C_n} \phi(x,y,z) \, dx \, dy \quad (\text{IV.33}')$$

es el valor medio del flujo en C_n a la cota z . Con esto, (IV.32) se reduce a un problema P_{1-} multigrupo en una dimensión:

$$-\frac{d}{dz} D_n \frac{d}{dz} \phi_n + (A_n + B_{t,n}^2 D_n) \phi_n = \frac{1}{\lambda} F_n \phi_n, \quad (\text{IV.34})$$

con las mismas condiciones de contorno en $\sigma_n(0)$ y $\sigma_n(H)$ que las impuestas a $\phi(x,y,z)$.

Otra posibilidad consiste en introducir coeficientes de acoplamiento entre canales, definidos de manera análoga a como se definieron los coeficientes de acoplamiento entre zonas (cf.(IV.29)): si $j_{nn'}^+$, son los neutrones que pasan del canal C_n a un canal contiguo $C_{n'}$ a través de la parte común de frontera $l_{nn'}$, el coeficiente de acoplamiento de $C_{n'}$ con C_n , $p_{nn'}$, (en general, función de z), se define por la igualdad

$$j_{nn'}^+ = \phi_n p_{nn'}. \quad (\text{IV.35})$$

De acuerdo con esta definición, las fugas que aparecen en

(IV.32) pueden expresarse así:

$$\oint_{l_n} j_z \cdot \underline{v} dl = \sum_{n' \neq n} (\phi_n p_{nn'} - \phi_{n'} p_{n'n}), \quad (IV.36)$$

donde la suma respecto de n' se extiende a todos los canales C_n , con frontera común con C_n . Esta representación del término de fugas permite escribir (IV.32) en la forma

$$-\frac{d}{dz} D_n \frac{d}{dz} \phi_n + (A_n + \frac{1}{\sigma_n} \sum_{n' \neq n} p_{nn'}) \phi_n = \frac{1}{\lambda} F_n \phi_n + Q_n, \quad (IV.37)$$

igualdad en la que la fuente

$$Q_n = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{n' \neq n} \phi_{n'} p_{n'n}, \quad (IV.38)$$

tiene todas sus componentes no negativas, con por lo menos una positiva.

Todo lo dicho antes con relación a la representación de las fugas longitudinales por una laplaciana o por coeficientes de acoplamiento entre zonas vale también para las fugas transversales y sus representaciones (IV.33) y (IV.36). No es necesario, pues, insistir acerca de sus ventajas e inconvenientes. Pasemos ahora a la aplicación práctica de lo que precede, al modelo multicanal, (Ref.⁸, Cap.4, Sect.4.4.C, y ¹¹).

El primer paso consiste en descomponer el reactor R en zonas longitudinalmente homogéneas y en canales transversalmente homogéneos. Claro está, no se trata de que la homogeneidad de zonas y canales sea una homogeneidad estricta.

En general, es más fácil localizar en un reactor zonas que son longitudinalmente homogéneas en sentido estricto que localizar canales que sean, en realidad, transversalmente homogéneos. Pero de lo que sí se trata es de que la estructura real sea susceptible de una homogeneización aceptable en zonas y canales de tal manera que las propiedades nucleares sean las mismas en todos los puntos (interiores) de la intersección de una zona y un canal. Esto no excluye que, para un canal dado, varíen con la zona, y que para una zona dada, varíen con el canal. Hecho esto, se procede a un primer cálculo longitudinal de la siguiente manera.

Supongamos conocidos los coeficientes de acoplamiento entre canales p_{nn} , correspondientes a cada zona. La integración numérica de (IV.37) se efectúa entonces, no en la forma (IV.37), sino con el término de fuente Q_n pasado al primer miembro, es decir, resolviendo el sistema, no canal a canal, sino para todos los canales a la vez. Los flujos ϕ_n se calculan para valores $z=z_i$ ($i=1,2,\dots,N$) tales que cada plano z frontera de zona está en un $z=z_i$, pero pueden haber más de un plano $z=z_i$ en una misma zona. Los valores z_i son los mismos para todos los canales. La discretización del sistema (IV.37) conduce entonces a un sistema de ecuaciones entre diferencias finitas que es de la forma

$$\left\{ \sigma_n \left(\frac{1}{h_{i-1}} D_{n,i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{h_i} D_{n,i+\frac{1}{2}} \right) + \sigma_n \bar{A}_{ni} + \bar{p}_{ni} \right\} \phi_{n,i} - \sum_{n' \neq n} \bar{p}_{n',i} \phi_{n',i} - \frac{\sigma_n}{h_{i-1}} D_{n,i-\frac{1}{2}} \phi_{n,i-1} - \frac{\sigma_n}{h_i} D_{n,i+\frac{1}{2}} \phi_{n,i+1} = \frac{1}{\lambda} \bar{F}_{ni} \phi_{n,i}, \quad (IV.39)$$

sistema en el que el valor medio \bar{M}_i en $z=z_i$ de una magnitud M se define aquí por la relación (*)

(*) Esta relación difiere en un factor $\frac{2}{h_{i-1}+h_i}$ de la introducida en (III.7) para definir D_i^{-1} .

$$\bar{M}_i = \frac{h_1-1}{2} M_{i-1} + \frac{h_1}{2} M_{i+1}$$

Además, se ha hecho $\bar{p}_{n,i} = \sum_{n' \neq n} \bar{p}_{nn',i}$.

Las ecuaciones entre diferencias finitas (IV.39) pueden escribirse en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} B_1 & -C_1 & & & \\ -C_1 & B_2 & -C_2 & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{z-1} \\ \psi_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} F_1 & & & & \\ & F_2 & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & F_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{z-1} \\ \psi_z \end{pmatrix} \quad (IV.40)$$

Las "componentes" ψ_i son, en realidad, vectores cuyas componentes son los valores medios del flujo en los diferentes canales y a la cota z_1 :

$$\psi_i = \begin{pmatrix} \phi_{1,i} \\ \phi_{2,i} \\ \vdots \\ \phi_{N,i} \end{pmatrix}$$

Análogamente, los "elementos" B_i, C_i, F_i de estas matrices son a su vez matrices cuadradas $N \times N$, donde N es el número de canales (en rigor, de orden $GN \times GN$ si se tiene en cuenta que los coeficientes en (IV.39) son matrices $G \times G$). Así, por ejemplo,

$$B_i = \begin{pmatrix} b_{1i} + \bar{p}_{1i} & -\bar{p}_{21,i} & -\bar{p}_{31,i} & -\bar{p}_{N1,i} \\ -\bar{p}_{12,i} & b_{2i} + \bar{p}_{2i} & -\bar{p}_{32,i} & -\bar{p}_{N2,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\bar{p}_{1N,i} & -\bar{p}_{2N,i} & -\bar{p}_{3N,i} & b_{Ni} + \bar{p}_{Ni} \end{pmatrix}, \quad (IV.41)$$

donde

$$b_{ni} = \sigma_n \left(\frac{1}{h_{i-1}} D_{n,i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{h_i} D_{n,i+\frac{1}{2}} \right) + \sigma_n \bar{A}_{ni}. \quad (\text{IV.42})$$

Las matrices C_i y F_i , en cambio, son matrices diagonales -n:

$$(C_i)_{nn} = \frac{\sigma_n}{h} D_{n,i+\frac{1}{2}}, \quad (F_i)_{nn} = \bar{F}_{n,i} \quad (\text{IV.43})$$

La coincidencia formal de (IV.40) y (III.30) nos evita entrar en los pormenores de la resolución de (IV.40); vale para ella lo mismo que para la resolución de (III.30).

Lo que precede descansa en la hipótesis de que se conocen, para cada zona, los coeficientes de acoplamiento p_{nn} , entre canales contiguos. Estos coeficientes se pueden obtener a partir de cálculos bidimensionales del tipo (IV.28) o (IV.30), uno para cada zona, cálculos que suponen la mayor parte del tiempo de máquina total, ya que los cálculos longitudinales (IV.40) corresponden a una sola dimensión. Por ejemplo, si se conoce el flujo $\phi_{\mu-\frac{1}{2}}(x,y)$ correspondiente a la zona $Z_\mu (z_{\mu-1} < z < z_\mu)$, para todos los planos transversales z_i de la misma se toma (en la aproximación adoptada):

$$p_{nn}^{(\mu-\frac{1}{2})} = \frac{\sigma_n \int_{l_{nn}} \left\{ \frac{1}{4} \phi_{\mu-\frac{1}{2}}(x,y) - \frac{1}{2} D_{\mu-\frac{1}{2}} \partial_\nu \phi_{\mu-\frac{1}{2}}(x,y) \right\} dl}{\int_{\sigma_n} \phi_{\mu-\frac{1}{2}}(x,y) dx dy}, \quad (\text{IV.44})$$

donde ν designa la normal exterior a σ_n en cada punto de la frontera común l_{nn} con σ_n . Pero es claro que, a su vez, el cálculo de estos flujos bidimensionales supone por su parte un conocimiento (o estimación) de las fugas longitudinales.

(*) Aunque en (IV.26) se ha supuesto que las fronteras transversales de una zona corresponden a valores z_i consecutivos, la integración numérica de (IV.37) puede exigir más de un nudo z_i por zona, conforme se ha señalado ya.

Existe, pues, una interrelación entre ambos tipos de cálculos y una posible estrategia de cálculo puede ser la que se resume a continuación.

Se comienza el cálculo por la fase longitudinal (problema (IV.39)) tomando como coeficientes de acoplamiento entre canales los definidos por

$$p_{nn} = \frac{1}{4} l_{nn}, \quad (\text{IV.45})$$

donde l_{nn} , es la longitud del arco común a las fronteras de G_n y de G_n . Esto equivale a suponer en (IV.44) que el flujo medio en G_n es igual al flujo sobre l_{nn} , y, además, que se puede prescindir (en la aproximación de orden cero) del término en $\partial_v \phi$. El tipo de acoplamiento (IV.45) se llama acoplamiento perimétrico. La hipótesis (IV.45) permite un primer cálculo del valor propio λ y de los flujos promedios de canal $\phi_n(z)$ en cada cota $z=z_i$ de los que se deducen, mediante (IV.27), valores de la laplaciana dependientes del canal de que se trate (y, claro está, del grupo neutrónico). Más exactamente: en la intersección del canal C_n y la zona Z_μ se toma un valor constante de la laplaciana igual a

$$\left(B_{z, \mu - \frac{1}{2}}^{2(n)} \right)_{gg} = \frac{\left(-D \frac{d\phi_n}{dz}(z_\mu) \right)_g - \left(-D \frac{d\phi_n}{dz}(z_{\mu-1}) \right)_g}{\sum_{g'=1}^{G_1} (D_{\mu-1})_{gg'} \int_{z_{\mu-1}}^{z_\mu} \phi_n(z)_{g'} dz}. \quad (\text{IV.46})$$

Con estos valores, se efectúa una serie de cálculos transversales de los $\phi_{\mu-1/2}(x,y)$ (uno por zona), que permiten luego, mediante (IV.44), calcular estimaciones de los coeficientes de acoplamiento entre canales más precisas que las de acoplamiento perimétrico y, por consiguiente, una mejor estimación de las distribuciones $\phi_n(z)$ y del valor propio λ .

Dado que en la segunda serie de cálculos transversales se cuenta con los resultados de la primera, al llevarlos a cabo puede adoptarse ya el modelo de acoplamiento entre zonas, substituyendo en el segundo miembro de (IV.30), en vez de λ , el valor propio obtenido en el cálculo longitudinal precedente, y en vez de Q , los valores que resultan de substituir en (IV.31) los flujos de zona de la primera serie de cálculos transversales para las dos zonas adyacentes a la considerada. En cuanto a los coeficientes de acoplamiento entre zonas, si la zona Z_μ está limitada por los planos $z=z_{\mu-1}$ y $z=z_\mu$, el coeficiente de acoplamiento de $Z_{\mu+1}$ con Z_μ en el canal C_n se calcula mediante la fórmula (análoga a (IV.44)).

$$p_{\mu-\frac{1}{2}, \mu+\frac{1}{2}}^{(n)} = \frac{(z_\mu - z_{\mu-1}) \left\{ \frac{1}{4} \phi_n(z_\mu) - \frac{1}{2} D_n(z_\mu) \frac{d\phi_n}{dz}(z_\mu) \right\}}{\int_{z_{\mu-1}}^{z_\mu} \phi_n(z) dz} \quad (\text{IV.46'})$$

A estos cálculos transversales sigue una nueva serie de cálculos longitudinales, y así sucesivamente hasta llegar a resultados coherentes entre cálculos consecutivos de uno y otro tipo. En esta técnica precisamente se basa el programa KLAG (Ref.¹¹), preparado para la Philco-2000.

Obsérvese que las fórmulas (IV.44), que atribuyen un valor independiente de z a p_{nn} , en la zona Z_μ , al igual que las (IV.46'), que hacen a $p_{\mu-\frac{1}{2}, \mu+\frac{1}{2}}$ independiente de (x, y) en el canal C_n , son únicamente estimaciones promedias de $p_{nn}(z)$ y de $p_{\mu-\frac{1}{2}, \mu+\frac{1}{2}}(x, y)$ que coincidirían con los valores exactos si en la intersección del canal C_n con la zona Z_μ ($n=1, 2, \dots, N; \mu=1, 2, \dots, Z$) se pudiera representar el flujo real $\phi(x, y, z)$ por un producto de la forma

dedujeron los parámetros transversales; c) partiendo de éstos, se repitió el cálculo longitudinal. Los resultados obtenidos con el KLAG para λ ($=k_{ef}$) fueron los siguientes:

$$\begin{aligned} (k_{ef})_3 \text{ canales, KLAG} &= 1,010, \\ (k_{ef})_5 \text{ canales, KLAG} &= 1,0128. \end{aligned}$$

La aplicación del programa bidimensional KARE a este mismo caso condujo a

$$(k_{ef})_{KARE} = 1,0133 \pm 0,0004.$$

La marcha de los flujos se reproduce en la fig. 6. Como se ve en ella, los resultados obtenidos por síntesis multicanal son satisfactorios.

Finalmente, obsérvese que el método multicanal se reduce al método de Meyer¹² cuando el número total de canales estudiados queda limitado a sólo uno y las fugas se representan mediante laplacianas, longitudinales y transversales. Claro está, la reducción a un sólo canal obliga a homogeneizar transversalmente la intersección de cada zona con el único canal considerado para efectuar los cálculos longitudinales. Como en (IV.25) y (IV.33') se introducen los valores medios

$$\phi_{\mu-\frac{1}{2}}(x,y) = \frac{1}{z_{\mu}-z_{\mu-1}} \int_{z_{\mu-1}}^{z_{\mu}} \phi(x,y,z) dz, \quad \phi_i(z) = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} \phi(x,y,z) dx dy, \quad (IV.47)$$

donde σ es la sección del canal por el plano z (independiente de z). El valor medio del flujo en la intersección del canal considerado con la zona $(z_{\mu-1}, z_{\mu})$ vale, evidentemente,

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= \frac{1}{(z_{\mu}-z_{\mu-1})\sigma} \int_{z_{\mu-1}}^{z_{\mu}} dz \int_{\sigma} \phi(x,y,z) dx dy \\ &= \frac{1}{z_{\mu}-z_{\mu-1}} \int_{z_{\mu-1}}^{z_{\mu}} \phi_i(z) dz = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} \phi_{\mu-\frac{1}{2}}(x,y) dx dy \end{aligned} \quad (IV.48)$$

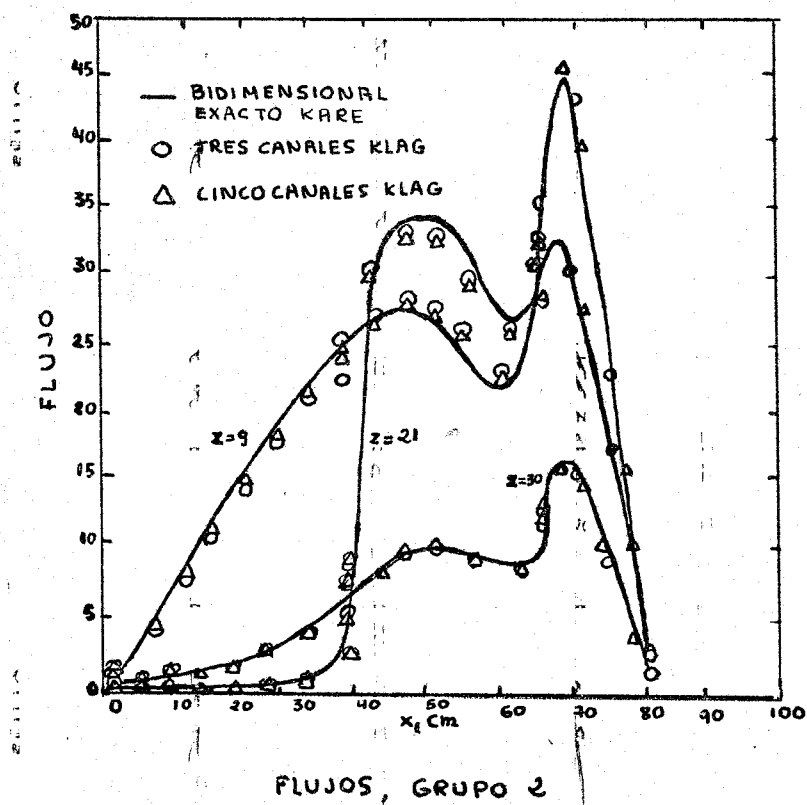
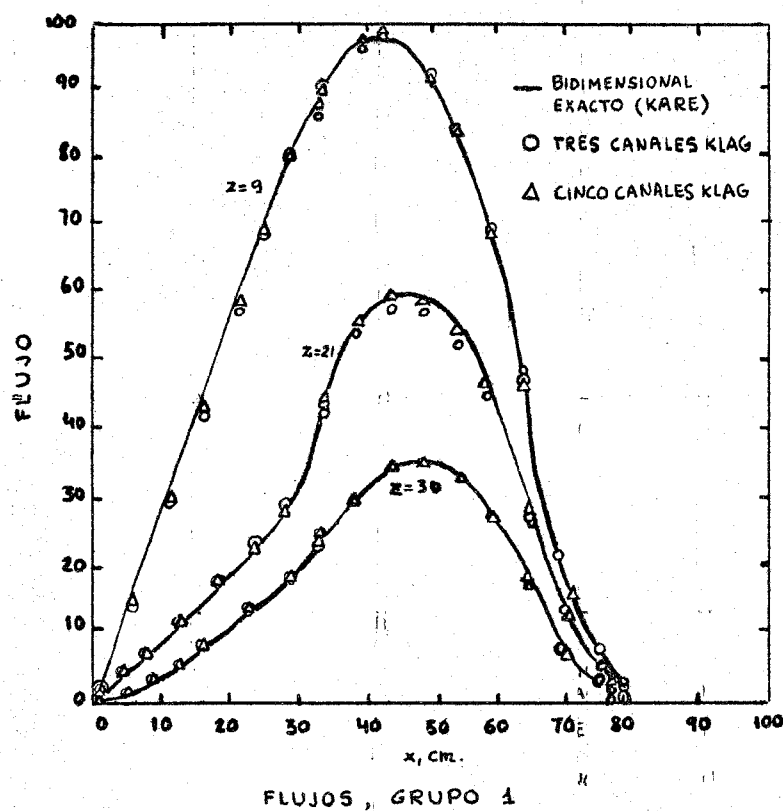


FIGURA 6

y para el valor medio en dicha región de una propiedad nuclear independiente de z se tiene

$$\bar{M}_{\mu-\frac{1}{2}} = \frac{\int_{\sigma} M(x,y) \phi_{\mu-\frac{1}{2}}(x,y) dx dy}{\int_{\sigma} \phi_{\mu-\frac{1}{2}}(x,y) dx dy} \quad (\text{IV.49})$$

En particular, si M es una matriz respecto de los grupos de neutrones $M_{gg'}(x,y)$, el elemento $\bar{M}_{gg'}$, se define por

$$\bar{M}_{gg'} = \frac{\int_{\sigma} M_{gg'} \phi_{g', \mu-\frac{1}{2}} dx dy}{\int_{\sigma} \phi_{g', \mu-\frac{1}{2}} dx dy} \quad (\text{IV.49}')$$

con lo que, en notación matricial,

$$\bar{M} \int_{\sigma} \phi_{\mu-\frac{1}{2}} dx dy = \int_{\sigma} M \phi_{\mu-\frac{1}{2}} dx dy \quad (\text{IV.49}'')$$

La aplicación de (IV.27) a este caso exige su promedio en cada zona. Se obtiene así como valor de la laplaciana longitudinal única (independiente de x,y) para la zona $(z_{\mu-1}, z_{\mu})$ en el canal elegido:

$$-\bar{D}_{\mu-\frac{1}{2}} \int_{z_{\mu-1}}^{z_{\mu}} \frac{d^2 \phi_1}{dz^2} dz = B_{x, \mu-\frac{1}{2}}^2 \bar{D}_{\mu-\frac{1}{2}} \int_{z_{\mu-1}}^{z_{\mu}} \phi_1(z) dz, \quad (\text{IV.50})$$

expresión que se simplifica notablemente cuando D es una matriz diagonal, ya que entonces puede prescindirse del factor (matricial) $\bar{D}_{\mu-\frac{1}{2}}$.

Análogamente, en la ecuación (IV.34) para el cálculo longitudinal hay que entender ahora por D_n , A_n y F_n los va

lores medios $\bar{D}_{\mu-\frac{1}{2}}$, $\bar{A}_{\mu-\frac{1}{2}}$ y $\bar{F}_{\mu-\frac{1}{2}}$. En cuanto a la laplaciana transversal (la misma para toda la zona considerada), el correspondiente promedio de (IV.33) conduce a la relación

$$-\int_G \text{div}_2 D_{\mu-\frac{1}{2}} \text{grad}_2 \phi_{\mu-\frac{1}{2}} dx dy = B_{t,\mu-\frac{1}{2}}^2 \bar{D}_{\mu-\frac{1}{2}} \int_G \phi_{\mu-\frac{1}{2}} dx dy. \quad (\text{IV.51})$$

Acerca de las fórmulas (IV.50) y (IV.51) para el cálculo de las laplacianas conviene advertir que es más conveniente utilizar para ello, en vez de los primeros miembros, las expresiones que para ellos se deducen de las propias ecuaciones longitudinales y radiales. Así, en vez de (IV.50) se aplicará la condición de balance neutrónico que se deduce de (IV.34)

$$B_{z,\mu-\frac{1}{2}}^2 \bar{D}_{\mu-\frac{1}{2}} \int_{z_{\mu-1}}^{z_\mu} \phi_1 dz = \left[\frac{1}{\lambda_2} \bar{F}_{\mu-\frac{1}{2}} - (\bar{A}_{\mu-\frac{1}{2}} + B_{t,\mu-\frac{1}{2}}^2 \bar{D}_{\mu-\frac{1}{2}}) \right] \int_{z_{\mu-1}}^{z_\mu} \phi_1 dz, \quad (\text{IV.50}')$$

y en vez de la (IV.51), la que resulta de (IV.28)

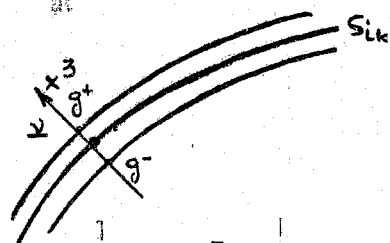
$$B_{t,\mu-\frac{1}{2}}^2 \int_G D_{\mu-\frac{1}{2}}^2 \phi_{\mu-\frac{1}{2}} dx dy = \left[\frac{1}{\lambda t} \int_G F_{\mu-\frac{1}{2}} \phi_{\mu-\frac{1}{2}} dx dy - (A_{\mu-\frac{1}{2}} + B_{z,\mu-\frac{1}{2}}^2 D_{\mu-\frac{1}{2}}) \int_G \phi_{\mu-\frac{1}{2}} dx dy \right] \quad (\text{IV.51}')$$

Teniendo en cuenta que $B_{t,\mu-\frac{1}{2}}^2$ se requiere para un cálculo longitudinal, para el que son necesarios los valores medios $\bar{F}_{\mu-\frac{1}{2}}$, $\bar{A}_{\mu-\frac{1}{2}}$ y $\bar{D}_{\mu-\frac{1}{2}}$, conviene observar que en (IV.51') aparecen precisamente estos valores. En efecto, según (IV.49'), la igualdad (IV.51') puede escribirse en la forma

$$B_{t,\mu-\frac{1}{2}}^2 \bar{D}_{\mu-\frac{1}{2}} \int_G \phi_{\mu-\frac{1}{2}} dx dy = \left[\frac{1}{\lambda t} \bar{F}_{\mu-\frac{1}{2}} - (\bar{A}_{\mu-\frac{1}{2}} + B_{z,\mu-\frac{1}{2}}^2 \bar{D}_{\mu-\frac{1}{2}}) \right] \int_G \phi_{\mu-\frac{1}{2}} dx dy.$$

Apéndice 1

La integral de $\underline{f} \cdot \text{grad } g$ o de $g \text{ div } \underline{f}$ extendida al interior de cada R_k es un concepto matemático bien definido. En cuanto a la contribución de la superficie S_{ik} , en la práctica esta superficie será siempre tal que o existe un sistema de coordenadas (en general curvilíneas) en el que la ecuación de S_{ik} es $x^3 = \text{const}$, o es posible descomponer S_{ik} en un número finito de partes para cada una de las cuales se cumple esta condición. De los tres términos de $\underline{f} \cdot \text{grad } g$ o de $g \text{ div } \underline{f}$



sólo el correspondiente a la coordenada x^3 contribuye a la integral extendida al estrato $P + \epsilon \underline{v} (-\epsilon' \leq \epsilon \leq \epsilon'', \epsilon' > 0, \epsilon'' > 0)$, $P \in S_{ik}$, término que contiene la derivada

respecto de x^3 (es decir, la derivada según la normal \underline{v}) de la función discontinua. Pero esta derivada, por ejemplo, la $\partial_v g$, puede representarse por

$$\partial_v g = (g^+ - g^-) \delta(\epsilon),$$

con lo que dicha contribución vale

$$\int_{S_{ik}} dS \int_{-\epsilon'}^{\epsilon''} f_v(P + \epsilon \underline{v}) (g^+ - g^-) \delta(\epsilon) d\epsilon = \int_{S_{ik}} \frac{1}{2} (f_v^+ + f_v^-) (g^+ - g^-) dS = \int_{S_{ik}} [g]_{,ik} dS$$

Apéndice 2

$$(\bar{B}_i)_{nn'} = \delta_{nn'} \begin{pmatrix} (\phi_i^+ \bar{D}_i^{-1} \phi)_n & 0 & (\phi_i^+ \bar{D}_i^{-1} j_{xi})_n \\ 0 & (\phi_i^+ \bar{D}_i^{-1} \phi)_n & (\phi_i^+ \bar{D}_i^{-1} j_{yi})_n \\ (j_{xi}^+ \bar{D}_i^{-1} \phi)_n & (j_{yi}^+ \bar{D}_i^{-1} \phi)_n & (j_i^+ \bar{D}_i^{-1} j_i)_n \end{pmatrix}$$

(matriz GMNxGMN)

o introduciendo la matriz diagonal a bloques \bar{B}_i

$$\bar{B}_i = \begin{pmatrix} \bar{B}_{1i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{B}_{2i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{B}_{Ni} \end{pmatrix}$$

En cuanto a la matriz A_i , es fácil ver que

$$(A_i)_{nn'} = \begin{pmatrix} \left\{ -2(\phi_i^+ \partial_x \phi)_n + \sum_{n'' \neq n} (v_x \phi_i^+ \phi_i)_{nn''} \right\} \delta_{nn'} - (v_x \phi_i^+ \phi_i)_{nn'} (1 - \delta_{nn'}) \\ \left\{ -2(\phi_i^+ \partial_y \phi)_n + \sum_{n'' \neq n} (v_y \phi_i^+ \phi_i)_{nn''} \right\} \delta_{nn'} - (v_y \phi_i^+ \phi_i)_{nn'} (1 - \delta_{nn'}) \\ \left\{ -2(j_i^+ \text{grad} \phi)_n + \sum_{n'' \neq n} (j_i^+ \phi_i)_{nn''} \right\} \delta_{nn'} - (j_i^+ \phi_i)_{nn'} (1 - \delta_{nn'}) \end{pmatrix}$$

(matriz 3GMNxGMN)

Finalmente, para M_i se tiene

$$(M_i)_{nn'} = \left\{ 2(\phi_i^+ \partial_x \phi)_n - \sum_{n'' \neq n} (v_x \phi_i^+ \phi_i)_{nn''} \right\} \delta_{nn'} + (v_x \phi_i^+ \phi_i)_{nn'} (1 - \delta_{nn'})$$

$$\left\{ 2(\phi_i^+ \partial_y \phi)_n - \sum_{n'' \neq n} (v_y \phi_i^+ \phi_i)_{nn''} \right\} \delta_{nn'} + (v_y \phi_i^+ \phi_i)_{nn'} (1 - \delta_{nn'})$$

$$\left\{ 2(\phi_i^+ \text{div} j_i)_n - \sum_{n'' \neq n} (j_i^+ \cdot j_i)_{nn''} \right\} \delta_{nn'} + (j_i^+ \cdot j_i)_{nn'} (1 - \delta_{nn'})$$

(matriz GMNx3GMN)

Apéndice 3

Resolución del sistema

$$Q_1 \alpha_1 + R_1 \alpha_2 = S_1, P_i \alpha_{i-1} + Q_i \alpha_i + R_i \alpha_{i+1} = S_i (2 \leq i \leq Z-1), P_Z \alpha_{Z-1} + Q_Z \alpha_Z = S_Z,$$

donde P_i, Q_i, R_i son matrices dadas, los S_i son Z vectores dados y se trata de determinar los vectores α_i .

De la primera se deduce

$$\alpha_1 + W_1 \alpha_2 = k_1, \text{ donde } W_1 = Q_1^{-1} R_1, k_1 = Q_1^{-1} S_1.$$

De ésta y de la ecuación con $i=2$ resulta a su vez

$$\alpha_2 + W_2 \alpha_3 = k_2, \text{ donde } W_2 = (Q_2 - P_2 W_1)^{-1} R_2, k_2 = (Q_2 - P_2 W_1)^{-1} (S_2 - P_2 k_1)$$

Así siguiendo se llega a

$$\alpha_{Z-1} + W_{Z-1} \alpha_Z = k_{Z-1}$$

que junto con $P_Z \alpha_{Z-1} + Q_Z \alpha_Z = S_Z$ da

$$\alpha_Z = (Q_Z - P_Z W_{Z-1})^{-1} (S_Z - P_Z k_{Z-1}) = k_Z.$$

Este es el proceso de eliminación progresiva. La substitución regresiva da entonces

$$\alpha_{Z-1} = k_{Z-1} - W_{Z-1} \alpha_Z, \dots, \alpha_1 = k_1 - W_1 \alpha_2.$$

BIBLIOGRAFIA

1. G.I. Marchuk, Metody rascheta jadernyj reaktorov, Gosatomizdat, Moskva, 1961, Cap.16.
2. B. Davison, Neutron transport theory, Oxford, Clarendon Press, 1957, Cap.XI
3. V.S. Vladimirov, Matematicheskie zadachi odnoskorostnoj teorii perenosa chastits, Tr. Matem. in-ta im. V.A. Steklova AN SSSR. M., Izd- vo AN SSSR, No 59, 1961
4. R.S. Varga, Matrix iterative analysis, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1962
5. R. Courant, D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Berlin, Springer, 1931, Vol.I, Cap.4, § 5.
6. L.V. Kantorovich, V.I. Krylov, Approximate methods of higher analysis, New York, Interscience Pub., 1958, Cap. 4.
7. E.L. Wachspress, M. Becker, Variational multichannel synthesis with discontinuous trial functions, KAPL-3095 (Feb. 1965).
8. Naval Reactors Physics Handbook, Vol.I, Selected Basic Techniques, United States AEC, 1964, Cap.7, § 72.
9. S. Kaplan, Some new methods of flux synthesis, Nucl.Sci. and Eng., 13, 22-31(1962);
10. S. Kaplan, O.J. Marlowe, W.R. Cadwell, Equations and programs for solutions of the neutron group diffusion equations by synthesis approximations (WAPD-TM-377, December 1963)
11. E.L. Wachspress, Digital computation of space-time variation of neutron fluxes, KAPL-2090, October, 1960.

12. J.E. Meyer, Synthesis of three-dimensional power shapes-
a flux-wlighting synthesis technique (Geneva Proceedings
1958, P/636, Vol.II, pg. 519).