UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

ESTUDIS MATEMÀTICS DE PIETRO MENGOLI (1625-1686):

TAULES TRIANGULARS I QUASI PROPORCIONS COM A DESENVOLUPAMENT DE L'ÀLGEBRA DE VIÈTE.

Mª ROSA MASSA ESTEVE

TESI DOCTORAL DIRIGIDA PEL DR. ANTONI MALET TOMÀS
ABRIL 1998. DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES.
CENTRE D'ESTUDIS D'HISTÒRIA DE LES CIÈNCIES.

Certifico que aquesta memòria ha estat realitzada per Mª Rosa Massa Esteve i dirigida pel Doctor Antoni Malet Tomàs, professor titular del Departament d'Humanitats de la Universitat Pompeu Fabra i tutorada pel Doctor Albert Dou Masdexexàs, catedràtic emèrit del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, vint-i-vuit d'Abril de 1998.

El director,

Antoni Malet.

El tutor,

Albert Dou

ESTUDIS MATEMÀTICS DE PIETRO MENGOLI(1625-1686):

Taules triangulars i quasi proporcions com a desenvolupament de l'àlgebra de Viète.

PRÒLEG

Aquesta tesi és el resultat de sis anys d'investigació sobre les matemàtiques del segle XVII i en particular sobre l'obra de Pietro Mengoli (1625-1686), matemàtic i deixeble de Cavalieri (1598-1647).

El meu interès per a un treball de recerca sobre quadratures en el segle XVII va sorgir en cursar l'assignatura "El mètode dels indivisibles al segle XVII" amb el Dr. Antoni Malet. En aquell curs vaig estudiar algunes obres de diferents autors i vaig fer-ne alguns resums. Veure com uns autors buscaven les àrees utilitzant indivisibles i d'altres infinitesimals era apassionant. Després d'investigar acuradament el mètode dels indivisibles de Cavalieri, el Dr. Malet em va suggerir que estudiés Pietro Mengoli (1625-1686), deixeble de Cavalieri, ja que era un autor poc estudiat. El curs 1993 ja vaig presentar el treball de Mestratge sobre Pietro Mengoli i la seva teoria de "quasi proporcions", primer pas del que seria el present estudi més general.

L'agost de 1993 en el XIXth International Congress of History of Science a Saragossa vaig assitir al simposium titulat: *Algebra and Geometry around 1600*. Les idees que em van aportar Bos, Giusti, Andersen i d'altres, sobre l'articulació de l'àlgebra i la geometria al segle XVII van donar un nou enfoc al meu treball. Ja en el treball de Mestratge, m'havia adonat que Mengoli no emprava el mètode dels indivisibles del seu mestre i, en canvi, si utilitzava l'àlgebra de Viète en les seves quadratures. Així el meu treball queda enmarcat dins dos grans debats historiogràfics, el de les quadratures del segle XVII i el de les relacions entre l'àlgebra i la geometria en aquest segle.

Per fer aquesta investigació he utilitzat còpies microfilmades de la Bodleian Library d'Oxford de les obres de Mengoli i les fonts primàries i secundàries de la biblioteca del Centre d'Estudis d'Història de les Ciències de la Universitat Autònoma de Barcelona i d'altres biblioteques.

Particularment, haig de reconèixer que si bé és cert que he trobat un gran nombre de dificultats en la meva recerca, també ho és el fet que he tingut la sort de poder comptar amb l'ajut de moltes persones, professionals i amics, que m'han aconsellat, orientat, ajudat i animat; no hi ha dubte que sense elles aquest treball no hauria estat possible. Vull citar, en primer lloc, el meu gran agraïment al Dr. Antoni Malet que, amb molta fe amb mi, m'ha dirigit tant el treball de Mestratge com aquesta tesi. L'acurada lectura, correcció i crítica dels originals, les seves orientacions metodològiques i les suggestives lectures que m'ha aconsellat m'han ajudat a millorar i enriquir tant el fons com la forma d'aquest treball.

Un agraïment molt especial al Dr. Albert Dou que va acceptar ser el meu tutor en aquesta tesi, la qual cosa li ha portat molts més maldecaps dels que esperàvem. El Dr. Dou ha tingut la paciència d'aguantar-me molts matins, unes vegades fent traduccions del llatí i altres fent demostracions matemàtiques. La seva disposició i les enriquidores converses que hem tingut sense límit de temps m'han ajudat extraordinàriament.

També vull agrair al professor Josep Mª Tatjer les moltes tardes que m'ha dedicat en la difícil traducció llatina de Mengoli. La seva disposició i dedicació m'han ajudat a descodificar els versos de l'*Algebra especiosa* aportant dades molt valuoses per la meva investigació.

Un agraïment molt especial al Dr. Josep Vaquer, que des dels primers anys de la meva llicenciatura de matemàtiques, fa més de vint anys, m'ha encoratjat a no defallir en el camí de l'aprenentatge continuat i del rigor intel.lectual. Els seus consells i reflexions segueixen estan fonamentals tant en la meva formació acadèmica com en la meva vida professional.

Un agraïment molt especial també al Dr. Josep Pla que sempre m'ha animat en la meva recerca sobre la història de les matemàtiques. Ja en la meva primera publicació, sobre Cavalieri, els seus comentaris i crítiques van millorar considerablement aquell article. També em va ajudar en la presentació del treball de Mestratge i, a més, em va donar l'oportunitat d'explicar part d'aquest treball en el curs de mestratge, la qual cosa va ser molt enriquidora, ja que em va aclarir aquells aspectes matemàtics que no tenia prou clars.

Em sento en deute, també, amb altres institucions o persones que d'alguna manera han contribuit a fer possible aquest estudi. Al Dr. Garcia Doncel que ha fet realitat aquest Centre d'Estudis d'Història de les Ciències que m'ha proveït del material, sense el qual aquest treball no s'hagués pogut fer. També li vull agrair els seus suggeriments per millorar aquest treball. A la Mireia Bachs, bibliotecaria de la Universitat Autònoma (U.A.B.) a qui agraeixo sincerament la seva col.laboració en la tasca de trobar articles i llibres de difícil localització. Al Dr. Xavier

Roqué, al Dr. Agustí Nieto i a Joaquim Pla per llurs comentaris i observacions sobre el meu treball.

També he rebut l'ajut de persones totalment desconegudes. Així, després de publicar l'article sobre Mengoli, vaig rebre una carta del Dr. Edwards que havia escrit el llibre *Pascal's Arithmetic Triangle* i havia trobat el meu article molt interessant. Aquest llibre sobre el triangle aritmètic va ser una troballa per a mi i ha contribuït a perfeccionar aquesta tesi.

Vull també agrair l'ajut que he rebut des de l'estranger de les persones que vaig conèixer al *Centre Internationale de Recherche de Matematiques* de Luminy (Marsella), en assistir a un col.loqui l'any 1994. Aquesta fou una experiència summament enriquidora que m'apropà a les grans línies internacionals i metodològiques de recerca en història de la matemàtica. Allà vaig conèixer la Dra. Sabine Koelblen amb qui a més de compartir habitació vaig compartir moltes estones d'estudi que m'han estat de gran utilitat en aquesta investigació. Per a ella, el meu agraïment més profund. També al Dr. Niccolo Gicciardini, professor de Bolonya, que m'ha proporcionat, sense demanar-li, referències sobre la Universitat de Bolonya, al temps de Mengoli, les quals m'han servit per contextualitzar el meu treball. Al Dr. Eberhard Knobloch que també m'ha enviat, sense demanar-li, fotocòpies on apareix citat Mengoli, per Leibniz, i, a més, em va fer agudes observacions, sobre el meu article de Mengoli. El meu agraïment també a la Dra. Catherine Goldstein que, a Marsella, també es va llegir el meu article i em va aconsellar a fi de millorar-lo substancialment.

En ocasions he tingut ajuts inesperats, com és el cas del Dr.

Victor Navarro a qui vaig conèixer a les *Trobades d'Història* d'Alcoi. El meu reconeixement a ell, que de seguida se'm va oferir i em va proporcionar, desinteressadament, un article molt interessant sobre les matemàtiques de Bolonya en el temps de Mengoli. També vull fer constar el meu reconeixement a Ugo Baldini, a qui vaig conèixer en una conferència organitzada per la Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica. En explicar-li que estava fent la meva recerca sobre Pietro Mengoli, em va subministrar un article seu sobre matemàtics italians contemporanis de Mengoli que m'ha estat de molta utilitat.

I és clar, haig d'agrair a tots els amics i companys de l'I. E. S. Carles Riba que m'han animat i, a vegades, substituït en les meves feines docents. Un agraïment especial a la professora de Llatí Teresa Mejón, que, sobretot al començament d'aquesta recerca, em va refrescar les bases de la gramàtica llatina per fer-ne les traduccions. També a la meva gran amiga Pilar Crivillés, professora d'italià, que m'ha ajudat en la traducció i, a més, m'ha dedicat moltes hores a fi de millorar la redacció d'aquest treball.

Per fi, aquesta recerca no hagués estat possible sense l'ajut de la meva família, en particular, del meu marit que sempre ha estat disposat a cuidar-se de tot mentre jo passava hores escrivint a l'ordinador o estudiant de matinada. A ell i al meu fill, dedico aquest treball que pretén sobretot donar a conèixer més acuradament l'obra del matemàtic bolonyès Pietro Mengoli (1625-1686).

INTRODUCCIÓ

A final del segle XVI, d'una banda, les recerques geomètriques sobre temes arquimedians van experimentar una revifalla, en particular, aquelles que tracten del càlcul d'àrees i volums i, d'altra banda, l'aparició de l'obra de Viète, *In Artem Analyticam isagoge* (1591) va introduir la utilització dels símbols dins la matemàtica posant en connexió l'àlgebra amb la geometria. Aquest camí de Viète seria aprofundit més tard per Descartes amb la *Géométrie* (1637) i per Fermat amb les seves obres. Si l'efervescència de les matemàtiques en el segle setze i disset és extensament deguda a les traduccions llatines dels textes grecs, hem d'assenyalar que introduia en els seus mètodes el pensament geomètric classic de característiques oposades al pensament algebraic que estava començant.[1] Al segle disset trobem els primers intents de resoldre els problemes antics mitjançant aquest nou simbolisme algebraic que, no només opera amb lletres sinó amb estructures definides per relacions matemàtiques. Entre els matemàtics que al segle XVII van desenvolupar l'àlgebra en la seva matemàtica hem de citar Pietro Mengoli (1625-1686), que d'aquesta manera va prendre un camí diferent del seu mestre Cavalieri. Mengoli no utilitza per calcular les àrees el mode tradicional de geometria grega, tampoc el mètode dels indivisibles del seu mestre sinó el mode modern d'aplicació de l'àlgebra a la geometria. La recerca que aquí es

---

[1] Vegeu Mahoney, "The beginnings of algebraic thought..." *Descartes'philosophy, mathematics and physics,* Gaukroger, S., ed., Totowa/Brighton, Barnes and Noble/Harvester, 1980, 141-156.

presenta tracta d'aquests estudis de l'obra de Mengoli, matemàtic poc estudiat, que mereix un lloc important dins la història de les matemàtiques.

Pel que fa a la historiografia hem de dir que molts historiadors (Kline, Hall, etc.) ni citen Mengoli. Els que el citen o diuen que és massa complicat, com Montucla, o bé, com Boyer i Loria, remarquen que va demostrar la divergència de la sèrie harmònica i va quadrar el cercle de manera similar a la de Wallis, i poc més.[2]

Durant dos segles no se'n va saber res de Mengoli. Les petites referències que trobem són degudes al primer estudi de les seves obres matemàtiques (de començaments de segle) que van fer que comencés a ser valorat, especialment per la seva obra sobre la teoria de sèries infinites. Així G. Eneström (1912), G. Vacca (1915) i A. Agostini (1941) han mostrat que Mengoli va ser el primer en calcular a la *Novae quadraturae arithmeticae* (1650) la suma de sèries infinites altres que les sèries geomètriques, en enunciar el concepte general de convergència i divergència, i en demostrar que la sèrie harmònica és divergent. Aquest últim resultat fou tornat a demostrar el 1689 per J. Bernoulli, al qual

---

[2] C. B. Boyer, *Historia de la matemática,* Madrid, Alianza Universidad, 1968, pàg. 467, G. Loria, *Storia delle matematiche,* Hoepli, Milano, 1946, pp. 525-526, E. Montucla, *Histoire des Mathématiques*, "No tinc més que algunes paraules a dir de Mengoli, professor de Matemàtiques a Bolonya. Si se'l jutja pels titols de les seves diverses obres, es veu que serveix a la geometria en allò que és més difícil i rellevant. Fins i tot pot haver-hi en les seves obres coses noves; però sembla haver volgut envoltar-se d'un llenguatge seu particular. El seu nom ha quedat en l'oblit i ho ha merescut" Vol. II, 1960, pàg. 92.

ha estat sempre atribuït el mèrit de la prioritat.[3] L'única referència més actualitzada és un article de Giusti, però es limita només a l'anàlisi d'aquesta mateixa obra.[4]

Agostini (1925) va estudiar alguns capítols de la segona obra matemàtica de Mengoli, *Geometriae speciosae elementa* (Bolonya, 1659). Agostini ha permès de restablir la importància de Mengoli a la història del concepte de límit i de la integral definida.[5] Aquest investigador analitza la seva obra però dóna els resultats de cada capítol sense lligar i traduint-los a notació actual. També hi ha parts fonamentals de l'obra com ara les taules triangulars, la construcció dels sumatoris, la fòrmula per la suma de potències, les taules de quadratures, la idea de variable, el llenguatge algebraic, etc que no hi són ni mencionades. Cassina (1936) fa un estudi sobre el capítol tercer de la *Geometriae* i transcriu les definicions de la teoria de quasi proporcions i algunes proposicions, tot entenent-la com una

[3] G. Eneström, "Zur Geschichte der unendlinchen Reihen um die Mitte des siebzehnten", *Bibliotheca mathematica*, 1912, 135-148; G. Vacca, "Sulle scoperte di Pietro Mengoli", *Atti dell'Accademia Nazionale dei Licei-Rendiconti,* vol. XXIV, 5, 1915, pp. 508-13, 617-20; A. Agostini, "La serie sommate da Pietro Mengoli", *Bollettino della Unione Matematiche Italiana,* ser 2, vol. 3, 1941, 231-251.

[4] E. Giusti, "Le primer ricerche di Pietro Mengoli: la somma delle serie", en *Geometry and Complex Variables: Proceedings of an International Meeting on the Occasion on the IX Centennial of the University of Bologna*, ed. S. Coen, Nova York: Dekker, 1991, 195-213.

[5] A. Agostini, "La teoria dei limiti in P. Mengoli, *Periodico di Matematiche,* ser. 4, 5, 1925, pp. 18-30; "Il concetto di integrale definito in P. Mengoli", *Periodico di Matematiche,* ser. 4, 5, 1925, pp. 137-146.

teoria de límits de funcions generals.[6] Naux (1971) explica la seva teoria de logaritmes també traduint-la a llenguatge actual.[7] Com podem veure els pocs estudis de les matemàtiques de Mengoli fets fins ara són merament descriptius, no donen tots els resultats, alguns els donen molt simplificats, en notació actual, i sense analitzar el procés de desenvolupament ni el pensament global de l'autor.[8]

Un dels objectius de les nostres investigacions és l'anàlisi de les obres matemàtiques de Pietro Mengoli (1625-1686). Aquesta anàlisi pretén aportar a la història de les matemàtiques un coneixement més profund dels conceptes que va investigar. Mengoli fa un recorregut molt extens per diferents camps matemàtics, però els seus resultats, encara que a diferents obres, queden tots lligats per la idea global de calcular quadratures i, en particular, la quadratura del cercle. Podem trobar a l'obra de Mengoli la suma de sèries infinites, que fa amb la intenció de sumar després aquests valors com quadratures per trobar-ne de noves; la construcció dels sumatoris; la seva gran eina de càlcul, les taules triangulars; la suma finita de

---

[6] U. Cassina, "Storia del concetto di limite", *Periodico di Matematiche*, ser. 4, 1936, pp. 89-101. Bortolotti també parla de les sèries infinites de Mengoli i cita que ha fet una teoria de límits, "Lo sviluppo del concetto di limite ed i primi algoritmi infinit nel rinascimento italiano", *Memoria Acc. dell'Istituto di Bologna,* ser 9, vol. 6, 1939, pp. 113-141.

[7] Naux, *Histoire des logarithmes,* llibre II, Paris: Blanchard, 1971, pp. 44-54.

[8] Recentment sí s'han publicat alguns treballs molt interessants sobre les obres dels seus últims anys, període més fosc pels seus contemporanis. Aquests articles es troben detallats en el capítol primer ja que tracten d'altres obres de Mengoli fora de la meva investigació.

potències que li afavorirá poder calcular després el límit d'aquesta suma quan el nombre de sumands sigui molt gran tot aplicant la teoria de quasi proporcions; i la teoria de quasi proporcions, la seva gran eina de demostració que fonamenta en la teoria de proporcions d'Euclides. Aquesta teoria de quasi proporcions l'aplica a la geometria per fer quasi raons entre figures i demostrar alhora infinites quadratures, i, en particular, la quadratura del cercle. Tot això és contingut en tres obres de Mengoli, la *Novae Quadraturae Arithmeticae* (1650), la *Geometriae Speciosae Elementa* (1659) i el *Circolo* (1672).

Per altra banda, amb les mostres investigacions ens proposem identificar allò que l'obra de Mengoli va aportar al procés d'articulació de l'àlgebra amb la geometria que havia començat als voltants del 1600. Per completar aquesta anàlisi hem estudiat part d'una altra obra de Mengoli, *Via Regia ad Mathematicas per Arithmeticam, Algebram Speciosam, & Planimetriam* (Bolonya, 1655) on Mengoli descriu l'àlgebra especiosa i els seus usos. Mengoli desenvolupa l'àlgebra de Viète emprant-la en les taules triangulars, en la teoria de quasi proporcions i, finalment, en la geometria. Mengoli és un bon exemple dels matemàtics de segle XVII que estan en la línia de considerar l'àlgebra un complement de la geometria i no dues disciplines enfrontades.

Els estudis de les obres de Mengoli són pocs. Són obres de lectura difícil i ingrata, atesa la poca claredat en les expressions de Mengoli i la complicació constant de les notacions, tot deixant de banda que les obres estan escrites en llatí.[9] Mengoli no ajuda tampoc a l'investigador ja que no reflexiona mai sobre el seu mètode matemàtic, ni fa valoracions sobre el què representa.

En la tesi, Mengoli és molt citat i traduït i això, de tant en tant, fa que la lectura sigui pesada. Hem hagut de fer-ho així per mostrar amb claretat el pensament matemàtic i les idees de Mengoli que, d'altra manera, queden amagades sota interpretacions actuals. El llatí original apareix sempre en la nota a peu de pàgina i les traduccions que són nostres, a vegades, són fruit de llargues discussions. És molt difícil simplificar la reconstrucció de les matemàtiques de Mengoli tot i que hem procurat alleugerir-la, i alhora mantenir-nos fidels a la notació i al pensament de l'autor.

Els principals resultats de la nostra investigació es troben repartits al llarg de la tesi, que té l'estructura següent: el capítol u està dedicat a presentar la figura de Mengoli per situar-lo dins la seva època. Aquest capítol, que no conté material propi de la investigació s'ha fet necessari ja que Mengoli no ha sigut encara objecte d'un treball complet. Hem dibuixat en primera aproximació el seu perfil encara que sigui amb fonts secundàries.

En el capítol dos s'analitza per primera vegada el paper de les taules triangulars dins l'obra de Mengoli. Destaquem com a resultats importants la construcció de les taules triangulars,

---

[9] Així Naux en el seu article sobre els logaritmes diu: "fa un abús de les definicions orals que hom ha de saber de memòria per seguir-lo i és un pecat molt personal que grava pesadament l'estudi del seu llibre." Naux, *Histoire des logarithmes*, 1971, pàg 50.

la construcció dels sumatoris i la demostració de la regla de la suma de potències.

El capítol tres està dedicat a l'estudi de la teoria de quasi proporcions de Mengoli. Analitzem les seves definicions de quasi un nombre, quasi zero, quasi infinit i quasi l'igualtat. També mostrem la idea mengoliana de variable i de successió. Pel que fa als càlculs de quasi raons concretes, destaquem la demostració on compara infinits de diferent ordre i el càlcul de la quasi raó que li permetrà fer quadratures en el capítol quatre. Cal assenyalar l'ús de l'infinit, per part de Mengoli, que esdevé una eina més dins la seva matemàtica.

El capítol quatre analitza el mètode de quadratures de Mengoli. Aquì es fa palesa l'aplicació de l'àlgebra a la geometria. L'estudi descriu el sistema de coordenades de Mengoli, les figures que construeix, la construcció de la taula de figures i una nova interpretació de la demostració de les quadratures d'aquestes figures. Cal assenyalar la construcció de les taules de quadratures i el mètode mostrat per Mengoli per construir-ne de noves.

El capítol cinquè estudia la quadratura del cercle que Mengoli va calcular en el *Circolo* (1672). Els resultats més importants d'aquest capítol són la construcció de les taules triangulars interpolades, la fitació del nombre pi per productes infinits i els càlculs de Mengoli per obtenir la computació del nombre pi amb onze decimals. Que nosaltres sapiguem, aquest és el primer estudi que hom publica sobre aquesta obra.

El capítol sisè analitza els fonaments de la matemàtica de Mengoli: Euclides, Cavalieri i Viète. En ell presentem la font euclidiana de Mengoli i la teoria de proporcions d'Euclides com un dels principals fonaments de la matemàtica de Mengoli. La comparació entre la demostració de Mengoli i el principi de Cavalieri mostra l'originalitat de Mengoli en refusar l'ús dels infinitesimals i fonamentar el mètode dels indivisibles. Pel que fa a Viète, estudiem les fonts algebraiques, analitzem el llenguatge "especiós" de Mengoli tot comparant-lo amb el de Viète i per fi descrivim l'aplicació mengoliana de l'àlgebra a la geometria.

Finalment, en l'epíleg, fem una valoració dels resultats obtinguts obrint portes a noves investigacions.

CAPITOL 1

VIDA I OBRA DE PIETRO MENGOLI (1625-1686)

1 Notes biogràfiques de Pietro Mengoli.[1]

No se sap amb certessa l'any del seu naixement, que situarem el 1625 o el 1626 tenint en compte que cronistes com Fantuzzi o Manzetti declaren que el 7 de juny de 1686 va morir als 60 o 61 anys.[2] Malgrat no tenir massa dades sobre la seva vida, sí es tenen referències de la seva relació amb la Universitat de Bolonya (Studio di Bologna).[3] El nom de Mengoli apareix en el

---

[1] Per les dades de la biografia he utilitzat Natucci, *Dictionary of Scientific Biography* (ed. C. C. Gillispie), Nova York, vol. 9, 1971, pp. 303-4 i la introducció de M. Cavazza a *La Corrispondenza*, Editorial Leo S. Olschki, Florència, 1986, pp. 1-22.

[2] Fantuzzi, *Notizie degli scrittori bolognesi*, Bologna, Stamperia di S. Tommaso d'Aquino, 1788. També Serafino Mazzetti, *Repertorio di tutti i professori antichi e moderni della celebre Università e del celebre Istituto delle Scienze di Bologna*, Bologna, Tipografia di S. Tommaso d'Aquino, 1847.

[3] Es troben ressenyes de les seves sol.licituds per una "lectura" d'Aritmètica i més tard per la càtedra de Matemàtiques. Vegeu Giusti, "Le prime ricerche...", *Geometry and Complex Variables: Proceedings of an International Meeting on the Occasion on the IX Centennial of the University of Bologna*, ed.

registre d'aquesta Universitat des de 1648 al 1686. Va estudiar amb Bonaventura Cavalieri (1598-1647), al qual va succeir en la seva càtedra. El curs 1648-49 va ser titular de *Ad aritmeticam*, el 1650-51 passà a ocupar la plaça que ja tenia Cavalieri de *Ad Mechanicas*, i el 1678 obtingué *Ad Mathematicam* de la qual se'n va ocupar fins la seva mort. El programa de *Ad Mechanicas* durava solament uns quants anys i es tractaven els temes de més actualitat. Així els títols eren: *Legant librum aequaepoderis Archimedis, Legant mechanicas marchionis Guidubaldi a Monte, Legant de centro gravitatis.* El programa de *Ad Mathematicam* era sempre el mateix: *EUCLIDE, la teoria dei planeti, l'astronomia di TOLOMEO.*[4]

Mengoli es va graduar en filosofia el 1650 i 3 anys més tard en lleis canòniques i civils. En aquesta primera època va escriure tres obres matemàtiques: *Novae quadraturae arithmeticae seu De Additione Fractionum,* (Bolonya, 1650), *Via Regia ad Mathematicas per Arithmeticam, Algebram Speciosam & Planimetriam* (Bolonya, 1655) i *Geometriae speciosae elementa*, (Bolonya, 1659).

El 1660 va ser ordenat sacerdot i fins la seva mort va ser prior de l'església de Santa Maria Magdalena de Bolonya. Del 1660 al 1670 no va publicar res, però a partir de 1670 amb la *Refrattioni e parallase solare* (Bolonya, 1670) i la *Speculationi di Musica* (Bolonya, 1670) va recomençar les seves publicacions. El 1672 va publicar el *Circolo* (Bolonya, 1672). Ja en les pàgines inicials, Mengoli explicava que aquest resultat, la quadratura

---

S. Coen, Nova York: Dekker, 1991, pp. 195-199.

[4] Veure Agostini: "L'opera matematica di Pietro Mengoli", *Arch. Int. Hist. Sci.,* 1950, pp. 817-818.

del cercle, l'havia trobat el 1660 sense donar-lo a conèixer i ara es decidia a publicar-lo perquè el necessitava per les regles dels solsticis i els equinoccis. Sembla que Mengoli havia canviat radicalment de direcció en el seu pensament i solament volia donar a conèixer les matemàtiques que li servien per justificar fenòmens naturals.[5] En la introducció de *La Corrispondenza*, Marta Cavazza explica que probablement això fou degut al seu nomenament com a prior de Santa Magdalena.[6] Sembla que la nova idea de Mengoli és no fer més recerca de matemàtica pura sinó fer-la de matemàtica "mixta": astronomia, cronologia, música. A més, tot el seu treball estaria emmarcat dins un precís projecte apologètic de la fe catòlica en què voldria oferir justificació els escrits bíblics. Mengoli va escriure en aquesta nova línia l'*Anno* (Bolonya, 1675) sobre cosmologia i cronologia bíblica. A *la Protesta dell'Autore* impressa a l'*Anno* diu:

> Escric amb tots els mitjans de què disposo per conservar i aconseguir que creguin en la Santa Fe Romana, que jo professo i predico, aquells que busquen la veritat únicament a través de raonaments humans.[7]

També publicà l'*Arithmetica Rationalis* (Bolonya, 1674), l'*Arithmetica Realis* (Bolonya, 1675) i *Messe* (Bolonya, 1681) sobre lògica i metafísica en la mateixa direcció.

---

[5] *Circolo,* pàg. 1.

[6] Baroncini i Cavazza (eds), *La Corrispondenza di Pietro Mengoli*, Florència: Leo S. Olschki, 1986, pp. 5-7.

[7] Ibid, pp. 7-8.

2 Mengoli i els seus contemporanis. Difusió de l'obra de Mengoli.

Hem de considerar la vida científica de Mengoli dividida en dues parts, fins a 1660 i de 1670 en endavant, moment en què Mengoli, apart de canviar de camí, comença a deixar de ser citat quedant aïllat cada vegada més dels seus contemporanis.

La *Novae Quadraturae Arithmeticae*, obra de 1650, apareix citada en moltes cartes dels europeus i provoca una discussió entre Leibniz i Oldenburg sobre les sèries que va sumar Mengoli.[8] Robinet en situar Leibniz a Bolonya, identifica Mengoli com una de les fonts crucials per a la invenció leibniziana en matemàtiques.[9] Leibniz coneix Mengoli a través d'Ozanam i del problema que aquest li va proposar. Existeix un comentari manuscrit de Leibniz al *Theorema Arithmeticum* de 1674 de Mengoli. En aquest primer escrit Mengoli no va saber solucionar el problema d'Ozanam, però ho va fer més tard.[10] Aquest fet de publicar la solució errònia el va molestar perquè es va sentir perseguit i, a més, li va fer perdre prestigi entre els europeus. En una carta, del 2 de juny de 1674, a Alessandro Marchetti (1632-1714), matemàtic, amic i corresponsal de Mengoli,

---

[8] Henry Oldenburg (1615-1677),secretari de la Royal Society de Londres procurava mantenir-se en contacte amb els científics d'altres països i obtenir tots els llibres que sortien publicats.

[9] Robinet, *G. W. Leibniz. Iter Italicum*, Florència: Olschki, 1987, pàg. 329.

[10] Vegeu Nastasi-Scimone, "Pietro Mengoli and the Six-Square Problem", *Historia Mathematica*, 1994, pp. 10-27 i Leibniz, *Mathematische Schriften*, nº 37, 39, 40 i 75, 1990. Sembla que durant uns quants anys Leibniz va intentar trobar una solució general al problema que el 1674 va proposar Ozanam a Mengoli i a altres matemàtics europeus, entre ells al mateix Leibniz.

ho explica: "la meva persona és perseguida a França per desacreditar-me".[11]

Leibniz, segons Knobloch, va llegir molt acuradament l'obra de Mengoli i segurament deuria utilitzar els seus resultats, però no tenim més referències que la correspondència entre Leibniz i Oldenburg parlant sobre els resultats de les sèries, el problema d'Ozanam i les explicacions de Robinet.

En la correspondència trobem una primera carta on Leibniz pregunta per Mengoli a Oldenburg i aquest li contesta enviant-li una carta de Collins on explica que Mengoli sap sumar sèries infinites que tenen per denominadors nombres figurats però en canvi no sap sumar els quadrats.[12] També li proposa que Leibniz els ajudi per entendre la *Via Regia* que és la segona obra matemàtica de Mengoli. Leibniz contesta dient que no creu que Mengoli hagi sumat la sèrie infinita sinó que segurament serà una suma finita i afegeix que si Mengoli ho ha fet, ell també, i ja se sap que pot haver-hi coincidències.[13]

Després de la *Novae*, la segona obra més citada en la correspondència europea és la *Speculationi di Musica* (Bolonya, 1670), on comença la part més filosòfica de la carrera de Mengoli. Aquí és on parla per primera vegada dels motius de la seva filosofia natural. L'obra té 300 pàgines, dividides en 25 capítols que anomena "especulacions". En ella hi podem trobar una

---

[11] Vegeu, *La Corrispondenza,* nº 7, 1986, pàg. 43, Giusti, "Sette lettere...", *L'Educazione Matematica* (3), 1, nº 2 suppl., 1990, pàg. 9.

[12] Leibniz a Oldenburg Vol IX, 26/ Febrer/1673, 488-498. Oldenburg a Leibniz, Vol IX, 6/4/1673, 556-563.

[13] Vegeu correspondència Oldenburg, Vol. IX, 648-652; 664-665.

original teoria del so, el refús de la teoria de la consonància de Galileo i l'extraordinaria fisiologia de la percepció musical que Mengoli fonamenta sobre l'existència de dos timpans a l'orella humana. Per demostrar-la Mengoli fa una dissecció de l'orella amb Galeatio Manzio.[14] Per justificar la seva teoria del so Mengoli utilitza els logaritmes. Aquesta obra va ser comentada i parcialment traduïda a les *Philosophical Transactions*, nº 100, després d'una espera impacient dels científics londinenses per aquest llibre anunciat pel Malpighi a Oldenburg.[15]

També apareix citada en la correspondencia de Collins amb Gregorie i amb Newton, on Collins descriu Mengoli com: "un excel.lent matemàtic i músic".[16]

El 26 de desembre de 1676, Malpighi anuncia a Oldenburg que li torna a enviar els llibres de música i l'*Anno* (1675), que s'havien perdut. Després de cinc anys d'espera Oldenburg

---

[14] G.Manzio és un mestre d'anatomia de la Universitat de Bolonya.

[15] *Philosophical Transactions*, (9 de febrer del 1674), 6194-7000. Pel que fa a les cartes, el 28 d'abril de 1671, Oldenburg li comunica a Sluse que ha aparegut el llibre de música i que l'està buscant. El 8 de juliol de 1671, Sluse li contesta que no en sap res, també, el 22 d'octubre de 1671, Malpighi li diu que està en la imprenta i el 20 de febrer de 1672 Collins li diu que no el té. El 4 de Març de 1672, Oldenburg torna a preguntar-li a Sluse si sap quelcom dels 4 volums de música que estaven en una imprenta de Roma. El 29 de Maig de 1672, Sluse li contesta que els llibres allà són desconeguts. Totes aquestes cartes sobre l'*Especulationi* es troben a la *Correspondence of Oldenburg*, vol. VIII, 15-22, 145-151, 308-310, 545-547, 571-577, vol. IX, 77-80.

[16] Aquí a més d'enviar-li l'*Especulationi de Musica*, Collins envia a Newton el *Circolo*. Vegeu Rigaud, *Correspondence of Scientific Men of the Seventeenth Century*, llibre 2, Oxford, 1841, pp. 299-301, pp. 319-321.

aconsegueix finalment el llibre de música.[17]

Però no totes les cites sobre Mengoli eren positives. És interessant assenyalar les referències a l'obra de Mengoli en la correspondència entre Barrow i Collins. El 12 de Novembre de 1664, Barrow li agraeix a Collins el llibre que li ha enviat sobre Mengoli, suposem que es refereix a la *Geometriae Speciosa* que ha publicat el 1659. Barrow diu que Mengoli utilitza un llenguatge nou, que no és necessari escriure de manera tan complicada, i que això és un defecte de l'escriptor.[18] També en una altra carta, del 1 Febrer de 1666, Barrow li comenta que llegir les obres de Mengoli era més dur que l'àrab.

Tanmateix, en aquestes cartes és palès que les obres de Mengoli eren conegudes i esperades a Europa.[19] Les seves obres eren molt apreciades pels matemàtics europeus mentre encara vivia, però

---

[17] Marcello Malpighi (Bolonya, 1628- Roma, 1694), anatomista i metge, s'ocupà de l'estudi dels teixits amb microscopi. És el corresponsal italià d'Oldenburg i el que li envia els llibres i manté el contacte amb els europeus. Vegeu *Correspondence of Oldenburg*, vol XIII, 167-169.

[18] "No he tingut temps durant aquesta temporada de considerar-lo seriosament; però castiga els meus ulls. Pel que jo percebeixo està afectat per l'ús abundant de noves definicions i termes desconeguts, per això hom ha d'aprendre nous llenguatges per arribar al seu significat, encara que potser només quelcom ordinari és amagat sota d'ells. Estimo això una gran falta en qualsevol escriptor, treballar durant molt temps sense aconseguir el propósit que necessitava, ja que hi ha poc a la ciència però pot ser suficientment explicat en la manera usual de parlar." (pàg. 40). Totes aquestes cartes de Barrow a Collins es troben a Rigaud, *Correspondence of Scientific Men of Seventeeth-Century*, llibre II, 1841, pp. 33-40-46.

[19] En la pàg. nº 49, carta nº 1 de Collins a Gregory, J. Gregory, *Tercentenary memorial Volume*, Herbert Westren Turnbull, G. Bell & Sons Ltd, London, 1939.

sembla que va morir aïllat i ignorat.[20]

Durant els anys que van de 1660 al 1670 s'obre un període obscur del que sabem molt poc ja que Mengoli no va publicar res. En aquells anys la nova filosofia experimental va ser introduïda a Bolonya d'una manera organitzada.[21] Intentant emular la Royal Society of London, el 1665, el matemàtic Montanari fundà l'Accademia della Traccia.[22] En una carta a la Royal explica que "a partir dels experiments obtindran els axiomes i a partir dels axiomes, nous descobriments". El metge Malpighi i l'astronom Cassini també en formen part. Què fa Mengoli? Mengoli està retirat a la seva església de Sta Mª Magdalena i la única activitat en la que col.labora és en l'astronomia. Mengoli feia observacions sobre els astres, eclipses, cometes,... per trobar el "curs" del sol, amb la meridiana de S. Petronio.[23] Devia ser un observador poc acurat ja que quan va escriure el 1670, *Refrattione e parallasse solare* s'havia equivocat en les taules,

---

[20] Vegeu cartes a J. Gregory, *Tercentenary Memorial Volume*, Herbert Westren Turnbull, G. Bell & Sons Ltd, London, 1939, pp. 179-186-203-231-232-236.

[21] Vegeu Cavazza, "Bologna and the Royal...", *Notes and Records of the Royal Society of London*, vol. 35, nº 2, 1980, pp. 105-123.

[22] Geminiano Montanari (Modena, 1633- Padua, 1687), astrònom, geofísic, biòleg, va ocupà la càtedra de Matemàtiques de Bolonya, el 1664 i els catorze anys passats allà van ser els més fructífers de la seva vida. Per més referències vegeu, Giorgio Tabarroni, *Dictionary of Scientific Biography* (ed. C. C. Gillispie), Nova York, 1971, pp. 485-487.

[23] De fet en el *Circolo* (1672) explica que la quadratura la vol per descriure els equinoccis i solsticis a través del *gnomone* de S. Petronio.

la qual cosa Cassini li va fer observar.[24] La càtedra bolonyesa d'astronomia que tenia Cassini comportava l'obligació d'ensenyar als estudiants a trobar les "direccions" i d'escriure-les en un anuari. Les relacions de Cassini amb Mengoli no van ser sempre cordials. Cassini va criticar durament el mètode i les conclusions del llibre de Mengoli, *Refrattioni e parallasse solare* en la tercera carta de les tres que, amb el títol complexe *De solaribus hypothesibus et refractionibus epistolae tres*, van ser publicades el 1692 a la *Miscellanea italica physico-mathematica* a Bolonya. Però Malpighi el 1672 va enviar a Oldenburg aquesta carta que va ser publicada en les *Philosophical Transactions*.[25] Malgrat l'incident Mengoli, el 1677, opina bé de Malpighi: "Aquest és el més honrat literat del món, virtuós i humil.."[26]

A partir dels 1670 Mengoli deixa de ser citat i les seves últimes obres sembla que no van interessar a Europa.

A través de les cartes editades fa pocs anys per Baroncini i Cavazza podem saber quelcom més sobre els pensaments de Mengoli en aquest últim període. Les cartes editades (64) són totes de Mengoli, no hi ha les respostes, i 54 d'elles estan dirigides a

---

[24] Giandomenico Cassini (Perpignano 1625-Parigi 1712) va ser professor d'astronomia en el *Studio di Bologna* del 1650 al 1669, quan va marxar a París cridat per Colbert per dirigir el nou observatori real.

[25] *Ph. Tr.*1672, VII, pp. 5001-5002. Per més referències, Cavazza, "L"oscurità" di Pietro Mengoli e i suoi difficili rapporti con i contemporanei", *Atti della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Cl. di Scienze Morale. Memoria,* LXXVII, 1979/80, pàg. 58, nota 7. Aquesta explicació sobre Cassini l'he trobada a Baroncini i Cavazza (eds), *La Corrispondenza*, 1986, pàg. 37, nota 2.

[26] Cavazza, "L"oscurità" di..", 1979/80, pàg. 59 nota 8.

la mateixa persona, Magliabechi. Aquest personatge era el bibliotecari de Florència i d'alguna manera era el contacte entre Mengoli i el món científic italià del moment, ja que molts estudiosos li enviaven les seves obres perquè en donés l'aprobació. Era un personatge molt influent de l'època. Les cartes comencen el 1674 i acaben el 1686 que és el segon període de Mengoli, fora de la nostra investigació. Però en llegir-les veiem que Mengoli al final de la seva vida està molt sol i molt desesperat pensant que les seves obres no les llegirà ningú, sobretot en referència al seu gran projecte, *Arithmetica Realis* que segons ell "és un complet sistema de lògica, de metafísica, i de física". Baroncini ha escrit un article sobre aquesta obra "Introduzione ad una teologia matematica del tardo Seicento: l'Arithmetica Realis (1675) di Pietro Mengoli".[27] En aquest treball Baroncini no vol mostrar l'origen ni la veritat del sistema mengolià sinó "descriure les evolucions i transformacions dels plantejaments doctrinals que conflueixen en el gènere "teologia matemàtica", segons l'articulació feta en el text mengolià". Els temes tractats en l'article són: teologia matemàtica, pitagorisme hermètic, cabalístic, lul.lisme, dionigisme, etc. També es refereix a personatges relacionats amb aquestes temàtiques: Giordano Bruno, Mersenne, Kepler, Fludd, Galileu, etc.

"Qui llegirà això?" es pregunta Mengoli al començament de

---

[27] G. Baroncini, "L'"Arithmetica Realis" di Pietro Mengoli", en l'apèndix del llibre: *La corrispondenza,* 1986, pp. 155-188 i "Introduzione ad una teologia matematica del tardo Seicento: l'Arithmetica Realis (1675) di Pietro Mengoli, en *Studi e Memorie per la Storia dell'Università di Bologna,* Bolonya, 1983, pp. 315-392.

l'*Anno* (Bolonya, 1675). Durant quasi dos segles el nom de Mengoli va romandre ignorat. Els motius no acaben de quedar clars. És possible que la seva manera d'escriure confosa i enrevessada, i la seva notació, fessin difícil la lectura de les seves obres. En l'article "L'"oscurità" di Pietro Mengoli e i suoi difficili rapporti con i contemporanei", Cavazza assenyala que la raó del seu aïllament no la troba ni en l'obscuritat lingüística de les seves obres, ni en la incomprensibilitat dels temes i dels conceptes sinó en una incompatibilitat ideològica de fons. Remarca la Cavazza tres temes: l'interès per l'astrologia, la concepció auxiliar de la ciència i la teologia matemàtica. Ens mostra el propòsit de Mengoli de servir-se dels seus coneixements mecànics, astronòmics, matemàtics, per explicar el model del món revelat en l'escrit de la Biblia. En l'*Anno* diu:

> En aquest meu *Anno*, no suposo altre, sinó que la terra està feta primer que el Sol, i que tots els altres cossos del Món: en conseqüència...: que la Terra és inmòbil; que el Món gira; que el Sol es mou,...[28]

I Cavazza conclou dient: "l'aïllament de Mengoli i la incomprensió d'aquells que l'envolten pot ser explicat amb el rol objectiu d'enemic de la sol.licitud vital d'autonomia de la ciència moderna en el difícil ambient creat per la contrareforma dels seus últims anys de vida".

Els últims anys han aparegut altres articles sobre aquest últim període que és el més fosc de Mengoli. Així L. Pepe, limitant la seva interpretació a l'*Elemento primo* de

---

[28] *Anno* , Bolonya, 1673, *Protesta dell'Autore,* pàgs. no numerades.

l'*Arithmetica rationalis* (1674) i advertint que la intenció de Mengoli era completar la lògica d'Aristòtil i posar les bases d'un sistema metafísic propi, l'ha vist "quasi com una teoria dels conjunts *ante litteram* traduïble literalment al llenguatge matemàtic modern".[29] Una altra tentativa interessant per descodificar la fosca terminologia mengoliana en clau teòrica moderna es deu a M. Matteuzzi, que considera l'*Arithmetica rationalis* una obra clarament inspirada en "un programa de matematització de la lògica" i precursora de l'àlgebra de la lògica de Boole. A l'*Arithmetica realis* i precisament en l'*Apex primus* de la part editada, veu "la construcció d'una lògica proposicional model, que no té precedents, per la perspectiva en la qual es col.loca i per la completitud del tractat, a l'antiguitat i a la tradició medieval".[30] No vull deixar de citar estudis més recents com els de G. Baroncini, "L'"Arithmetica Realis" di Pietro Mengoli". Fa pocs anys també ha aparegut un treball molt interessant de Paolo Gozza sobre l'*Especulationi di musica* (1670).[31] Gozza hi explica l'original teoria del so de Mengoli i de quina manera refusava la teoria de la consonància de Galileu. També hi descriu còm Mengoli, en la seva obra, justifica fisiològicament l'existència de dos tímpans

---

[29] Luigi Pepe, "L'elemento primo dell' "Aritmetica razionale" di Pietro Mengoli.",en *Bolletino della Unione Matematiche Italiana,* (5), 16-A, 1979, pp. 201-209.

[30] M. Matteuzzi, "L'Arithmetica realis e la confusa genialità di Pietro Mengoli", *Studi e Memorie per la Storia dell'Università di Bologna,* Bolonya, 1983, pp. 393-408.

[31] Paolo Gozza: "Atomi ,"spiritus", suoni: le "speculationi di musica" (1670) del "galileano" Pietro Mengoli", *Nuncius,* vol. 5, 1991, pp. 75-98.

a l'orella humana.[32]

Per acabar citarem un article molt interessant de la Baroncini, "Un itinerario galileiano: Pietro Mengoli dalla Meccanica alla teologia matematica", que fa un recorregut per totes les obres, sense entrar en aspectes tècnics, i intenta situar Mengoli dins les corrents filosòfico-científiques de l'època.

3 Mengoli matemàtic.

Mengoli "matemàtic bolonyès", nom amb el que es coneixia en aquella època, era realment un matemàtic de primera fila. La vida de Mengoli queda enmarcada totalment entre l'aparició de la *Géométrie* (1637) de Descartes i el càlcul infinitesimal de Leibniz (1684). Mengoli, com es desprendrà de l'estudi que fem, coneixia les obres matemàtiques més importants de l'època i els seus treballs matemàtics estan en línia amb les tendències del moment. Les matemàtiques de Mengoli estan explicades bàsicament en quatre obres que aparentment no tenen res a veure, si només mirem els títols, però analitzant el seu contingut comprovem que com a mínim, tres d'elles estan totalment lligades. Les investigacions que fins ara s'han fet són sobre parts d'una de les obres o d'una d'elles, sense intentar trobar la connexió. La nostra investigació es centra en el conductor de les seves obres matemàtiques, les quadratures i la quadratura del cercle, i en les eines que li proporcionen les taules triangulars, les quasi

[32] Hi ha un llibre també de Gozza: *La musica nelle rivoluzione scientifica del seicento*, Bolonya, 1989.

proporcions i l'àlgebra de Viète.[33]

L'obra que queda deslligada és la segona que va escriure, cronològicament parlant, *Via Regia ad Mathematicas per Arithmeticam, Algebram Speciosam & Planimetriam*. En les seves 45 pàgines escrites en vers, Mengoli ens mostra com entenia les matemàtiques i quines parts considerava importants.[34] Escrita el 1655, per encàrrec i amb motiu de la visita de la Reina Cristina de Suecia, Mengoli explica a la Reina un "camí reial" per entendre les matemàtiques. Està dividida en tres parts: aritmètica (pp. 7-18), àlgebra especiosa (pp. 19-35) i planimetria (pp. 31-45).

El contingut de l'aritmètica és: els nombres, les fraccions, els nombres decimals, les regles de sumar i restar, la taula pitagòrica, les regles de multiplicar i dividir per un o dos nombres, els nombres primers i compostos, el màxim comú divisor, el mínim comú multiple, la suma i resta de fraccions, les potències, les taules de potències i de productes, el triangle aritmètic, les potències d'un binomi i d'un polinomi, l'extracció d'arrels, raons, proporcions, propietats de les proporcions, les raons compostes, les proporcions contínues, els logaritmes, la taula dels logaritmes, l'ús de la taula dels logaritmes, la construcció de la taula dels logaritmes.

---

[33] Mengoli escriu la seva obra *Arithmetica Realis* (1675) concebuda com una "gran òpera Lògica, Metafísica i Física que ha donat a conèixer al món tres conceptes del tipus *intel.ligibilium* i dos conceptes del tipus *sensibilium*." Segons Mengoli els primers són les quasi raons, el cercle i l'*Aritmètica Rationalis*, i els segons són l'*Speculationi di Musica* i l'*Anno*.

[34] Al llarg de les altres obres trobem alguna cita de les seves definicions.

Mengoli fa un segon apartat dedicat a l'àlgebra especiosa, on la presenta com un llenguatge i compara metafòricament les formes lingüístiques amb símbols algebraics: consonants, vocals, síl.labes, puntuació, paraules, frases, texts i versos, amb dades, incògnites, expressions algebraiques d'una sola lletra, regles d'addició, subtracció,..., expressions algebraiques de vàries lletres, igualtats i equacions respectivament. Aquest apartat està extensament tractat en el capítol sis de la tesi.

La tercera part, anomenada planimetria, s'ocupa de mesures especioses del continu, línia recta, superfície plana, angles, graus, minuts, teorema dels angles, paral.leles, concurrents, teorema de les paral.leles, triangle pla, teorema dels angles d'un triangle, teorema de triangles congruents, teorema del triangle equilàter, figures quadrilàteres, quadrat, altura dels triangles i dels paral.lelograms, dimensions dels triangles i dels paral.lelograms, la raó dels triangles i dels paral.lelograms, triangles semblants, triangle rectangle, cercle, angles en el cercle, tangent al cercle, dues rectes concurrents dins del cercle, concurrents fora del cercle, dues rectes fora del cercle concurrent amb una recta tangent, cinc línies trigonomètriques, cinc taules trigonomètriques, en un triangle pla donats tres costats trobar els angles.[35]

La primera obra de Mengoli, *Novae Quadraturae Arithmeticae* (Bolonya, 1650), és la que li ha donat més renom com a matemàtic. Tracta de la teoria de sèries, sumant-les i donant les seves propietats. Tanmateix el títol ens fa pensar que Mengoli fa quadratures, el nostre fil conductor, i en realitat, com veurem,

---

[35] No hi ha referències a figures sòlides.

Mengoli està pensant en fer quadratures. En la *Geometriae Speciosae* utilitza aquestes sumes infinites per sumar quadratures i trobar-ne d'altres, i Mengoli explica clarament que aquest és el seu objectiu. Aquestes explicacions es troben analitzades en el capítol quatre d'aquesta tesi.

En el prefaci de la *Novae Quadraturae* (12 pàgs s.n.), Mengoli demostra la divergència de la sèrie harmònica adelantant-se quasi quaranta anys a Bernoulli. A més del prefaci, l'obra està composta de tres llibres en els quals els resultats estan presentats en ordre creixent de dificultat.

En el primer llibre (pp. 1-59) es tracten les sèries de fraccions que els seus denominadors són $n.(n+1)$ (ell en diu nombres plans), sent n qualsevol nombre natural. Mengoli assenyala en la portada les proposicions que demostren les sumes de sèries (finites) i les que calculen les veritables quadratures (sumes de sèries infinites). Algunes de les proposicions que calculen les veritables quadratures són les que després farà servir per obtenir altres quadratures en l'element sisè de la *Geometriae*, com veurem en el capítol quatre. En el segon llibre (pp. 60-100) estudia les sèries de fraccions que tenen per denominadors $n.\ (n+1).\ (n+2)$ (ell en diu nombres sòlids), sent n qualsevol nombre natural. En el tercer llibre (101-131) venen estudiades sèries molt més generals. Mengoli necessita per fer les seves recerques resultats demostrats en les proposicions de la *Novae*, és per això que incloïm aquesta obra dins la idea de Mengoli de fer quadratures encara que nosaltres no la analitzem en detall.

La tercera obra de Mengoli, cronològicament parlant, *Geometriae Speciosae Elementa* (Bolonya, 1659) és la que aquí analitzem acuradament i la que ens proporciona les eines del seu mètode de quadratures: les taules triangulars i la teoria de quasi proporcions. El contingut de l'obra no està fora dels corrents de l'època sinó que toca força temes d'actualitat. El que és més innovador és la manera de tractar-los i els resultats als que arriba. L'obra té 472 pàgines i està composta de sis capítols, que ell anomena elements, i una introducció titulada *Lectori Elementario.* Aquesta introducció té 80 pàgines i en elles explica cada un dels capítols per separat. En aquesta explicació no hi ha demostracions ni teoremes, tanmateix hi ha exemples dels resultats obtinguts en cada capítol. El primer element, *De potestatibus, à radice binomia, et residua.* (pp. 1-19), dóna les potències d'un binomi expressades amb lletres tant pel que fa a la suma com pel que fa a la resta. El segon, *De inumerabilibus numerosis progressionibus* (pp. 20-94), calcula nombroses sumes de potències i productes de potències, amb una notació pròpia i demostra algunes identitats. En el tercer, *De quasi proportionibus* (pp. 95-147), defineix raó "quasi nul.la", "quasi infinita" i "quasi un nombre". Amb aquestes definicions construeix una teoria de quasi proporcions basant-se en la teoria de proporcions del llibre V dels *Elements* d'Euclides. En el quart, *De rationibus logarithmicis* (pp. 148-200), construeix anàlogament al llibre V dels *Elements* d'Euclides una teoria completa de proporcions logarítmiques. En el cinquè, *De propriis rationum logarithmis* (pp. 201-347), construeix el logaritme i les seves propietats utilitzant els resultats anteriors. En el sisè, *De innumerabilibus quadraturis* (pp. 348-392), calcula les quadratures de corbes que corresponen a les funcions que avui representem $y = x^m. (t- x)^n$. Mengoli ho fa amb la teoria de quasi proporcions explicada a l'*Elementum tertium*. A més a més, calcula baricentres de les àrees d'aquestes corbes.

L'estudi dels dos primers elements d'aquesta obra constitueix el capítol dos; el tercer element constitueix el capítol tres; el quart element es troba comentat en el capítol sis, on remarco la influència d'Euclides; i el sisè element està analitzat en el capítol quatre, on estudio les quadratures.

La quarta obra, *Circolo* (Bolonya, 1672), pertany a la segona època de Mengoli que en justifica la seva publicació pels càlculs astronòmics. El *Circolo* ens dóna la quadratura del cercle mitjançant l'àrea de la figura descrita per l'expressió algebraica (escrita en notació actual) $y = x^{1/2}. (1- x)^{1/2}$ i l'eix d'abscisses, que és el semicercle de radi 1/2. El *Circolo* té 60 pàgines i una estructura diferent de la de la *Geometriae,* sense definicions, teoremes i problemes. Conté 160 paràgrafs numerats, sense cap demostració, només hi han taules, càlculs i explicacions, sense cap figura. Expressa el nombre pi afitat entre dos productes infinits. Troba una regla per fer aproximacions del nombre pi i després fa esmenes a la regla per acostar-s'hi més arribant a calcular-ne onze decimals exactes. És molt complicat d'entendre i dificultós d'explicar i encara que Mengoli n'és conscient i fa les esmenes per arreglar-ho, no troba el camí fàcil que promet al començament: "el meu càlcul és més fàcil [que el dels altres] perquè no procedeix per addició i subtracció sinó per multiplicació i divisió." Aquesta obra es troba analitzada en els capítols quatre i cinc de la tesi.

CAPITOL 2

LES TAULES TRIANGULARS DE MENGOLI[1]

1 Introducció.

El Triangle aritmètic és el conjunt de nombres més famós de la matemàtica, utilitzable dins molts camps. Els nombres que el formen van ésser coneguts, ja en l'antiga Grècia, com a nombres figurats: triangulars, tetraèdrics,... Després els trobem com els termes d'un desenvolupament binomial, i en alguns casos s'identificaven explícitament amb els anteriors, i més tard, ja amb Pascal, s'aplicaven també a la combinatoria. Podem donar doncs tres interpretacions d'aquests nombres segons el context on es trobin: Els nombres *figurats*, que pertanyen a una certa família de nombres que s'obtenen com a suma dels nombres figurats anteriors. Els nombres *binomials*, que són els coeficients dels desenvolupaments binomials. I els nombres *combinatoris*, que

[1] Part d'aquest capítol i el següent van ser publicats per l'autora a *Historia Mathematica* **24** (1997), 257-280, amb el títol "Mengoli on "Quasi Proportions"".

representen el nombre de combinacions de *n* coses preses de *r* en *r*. Pascal va ser el primer que després de definir el triangle escriu tractats diferents on especifica l'ús d'aquests nombres en cadascuna d'aquestes interpretacions.[2] Aquest conjunt de nombres ha estat estudiat des de l'antiguitat i a moltes civilitzacions.[3] La fascinació que provoquen les moltes propietats i aplicacions del triangle aritmètic queda reflectida en moltes frases dels matemàtics que el van estudiar. Diu Faulhaber en *Mysterium Arithmeticum* (1615): "Una rica mina d'informació en forma de TAULA la qual revela els secrets més profunds de l'Aritmètica";[4] Oughtred, a la *Clavis Mathematicae* (1631), explica "Aquesta taula plena dels misteris més bonics";[5] Briggs (*Trigonometria Britannica*, 1633) deia de la taula: "Una calculadora útil per tot". Més tard, Pascal (*Potestatum numericarum summa*, 1654) deia: "És una cosa estranya com és de fèrtil en propietats". No és el nostre propòsit estudiar el

---

[2] Blaise Pascal, *Traité du Triangle arithmétique, avec quelques autres petits traités sur la même matière. Usage du Triangle Arithmétique pour les ordres numériques, pour les combinaisons, pour trouver les puissances des binômes et des apotomes...* (Paris ,1665).

[3] Bosmans, "Sur l'oeuvre mathématique de Blaise Pascal", *Mathesis* **38** Supplément (1924), pp. 1-59; Cassina, "Storia del triangolo aritmetico", *Bolletino di matematica*, 2d ser.,**2** (1923), pp. 33-39, aquí es cita: Stifel, Tartaglia, Oughtred, Brasser, Scheubelius, Briggs, Harriot, Faulhaber, Van Schooten, etc. Vegeu també Dou, *Comentario a la "combinatoria de Sebastian Izquierdo" del P. Ramón Ceñal, S. J.* sobre el triangle en S. Izquierdo. Més referències sobre les civilitzacions que van tractar el triangle i sobre el triangle a *Pascal's Arithmetical Triangle* de A. W. F. Edwards, Nova York, 1987.

[4] Totes aquestes referències són tretes del llibre d'Edwards acabat de citar. De Faulhaber: "Inexhaustae Scientiae TABULA secretissima Arithmetices Arcana pandens."

[5] "Plena haec mysteriis pulcherrimis tabella"

triangle aritmètic (vegeu al respecte els treballs de Edwards, Bosmans, Cassina i d'altres), però si que hem d'explicar que la intensa i exhaustiva utilització d'aquesta eina esdevé un dels fonaments de les matemàtiques de Mengoli.

Emprant aquest triangle, Mengoli construeix taules triangulars per calcular desenvolupaments binomials, sumes de potències, límits d'aquestes sumes, quadratures d'infinites paràboles i la quadratura del cercle. De les tres interpretacions abans descrites, Mengoli parla de nombres figurats i de nombres binomials, però mai no cita els nombres combinatoris ni problemes relacionats amb la combinatoria.[6] Comença pel desenvolupament del binomi i utilitza taules triangulars amb lletres que donen el desenvolupament binomial per exponents enters positius. Tanmateix en el *Circolo* (1672) aplica les propietats dels nombres figurats com si fossin conegudes sense identificar els nombres binomials amb els nombres figurats. Mengoli amb les propietats dels nombres del triangle aritmètic demostra i calcula la suma de les p-potències dels primers $t - 1$ enters en funció de potències de t i en fa una deducció independentment dels altres matemàtics de l'època. Per fer-ho, introdueix l'àlgebra de Viète en el triangle aritmètic cosa que li permet una certa generalització de la fórmula. Després d'elaborar una nova teoria de límits, anomenada de "quasi proporcions", Mengoli utilitza les

[6] M. Matteuzi a la pàg. 89 del seu article "Mengoli e l'algebra della logica" *Atti della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Cl. di Scienze Morale. Memoria,* vol. LXXVII, 1979/80, pp. 79-98, sobre l'*Arithmetica rationalis elementa quatuor*, 1674, identifica els nombres combinatoris quan diu: "bidistinsctio non ést plus quam quadrimembris", o sigui la suma de les combinacions de dos elements val quatre, pàg. 24 de la *rationalis*.

taules per calcular alhora infinits límits, també construeix taules de quadratures i les calcula.[7] Aquestes taules de quadratures no es troben a d'altres matemàtics de l'època excepte a Wallis. La principal originalitat de Mengoli és en l'ús que fa de les taules amb lletres cosa que li permet generalitzar i trobar regles que es poden aplicar per qualsevol exponent.

En aquest capítol després de presentar la notació de Mengoli, explicarem, primer, les taules pel desenvolupament d'un binomi; segonament, la construcció dels sumatoris i de les taules de sumatoris de potències i productes de potències, demostrant la regla que permet trobar el valor d'aquests sumatoris; i exposarem finalment, l'aplicació de les taules a les quadratures. En un apèndix donarem una interpretació moderna de la regla de la suma de potències demostrada per Mengoli.

2 La notació.

Un dels problemes per poder entendre l'obra de Mengoli és la notació, que és original i es va complicant al llarg del llibre.[8] Cal recordar que en aquella època no hi havia criteris unificats pel que fa a les diferents alternatives simbòliques.[9]

[7] Mengoli utilitza la paraula "innombrables" en l'accepció d'infinits no en l'accepció d'incomptables.

[8] L'article de Vacca "Sulle scoperte di Pietro Mengoli", *Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei-Rendiconti*, XXIV, 5, 1915, pp. 617-20, va subratllar i explicar l'originalitat de la notació de Mengoli.

[9] Més referències sobre aquest tema a A. Malet i J. Paradís, *Els origens i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica*, Edicions de la Universitat de Barcelona, Barcelona, 1984, pp.

En l'*Elementum primum* de la *Geometriae Speciosae Elementa* fixa les notacions en tres sentits: representa els símbols amb els quals operarà, explica les lletres i els noms de les expressions que utilitzarà, i situa aquestes expressions algebraiques en unes taules triangulars, com veurem en el següent apartat.

Després de les definicions, en una pàgina apart i sota el títol *Explicationes quarundam notarum*, Mengoli explica les notacions bàsiques que utilitzarà al llarg del llibre.[10] Comença amb l'addició que serà representada amb una creu, la subtracció amb una línia,[11] la igualtat amb dos punts, la raó amb punt i coma i la igualtat entre raons utilitzant els punts i comes com a signes de raó i els dos punts com a signe igual entre raons.[12] Per exemple, escriu

$$a \; ; \; r \; : \; a2 \; ; \; ar$$

per representar

159-176.

[10] En l'element primer fa una excepció i després de les definicions no dóna els teoremes sinó que abans dóna un full amb explicació de les notacions.

[11] Els signes + i - sembla que eren els únics acceptats unànimament i havien sigut introduits per l'escola alemanya el segle anterior. Tanmateix Mengoli diu que utilitza els mateixos símbols que Viète, el signe igual no coincideix, Viète fa servir un abreujament de la paraula *aequalis*. F. Viète, *Opera Mathematica* per Francisci A. Schooten, Georg Olms Verlag Hildesheim, New York, 1970, "Isagoge in Artem Analyticam", pàg. 5.

[12] Com fa notar Cajori aquesta va ser una notació esporàdica, *A History of Mathematical Notations*, vol. 1, Open Court, Chicago, 1928, pàg. 289.

$$a:r=a^2:ar$$

Més endavant, en l'element cinquè distingeix la raó de la fracció entre dos nombres i escriu el denominador entre parèntesi. El símbol del numerador de la fracció se escriu davant del parèntesis, per exemple en el símbol de la fracció *b (a)*, el numerador és *b*. I el denominador, que se escriu entre parèntesis, és *a*.[13] O sigui, Mengoli escriu *5 (2)* per representar 5/2.

La composició de dues raons la representa amb una coma i després una creu. Per exemple, escriu

u ; a2, +u ; r3 : u ; a2r3

per representar

$$[1:a^2].[1:r^3]=1:[a^2.r^3]$$

Mengoli es preocupa de distingir que no està sumant sinó fent la composició de raons. Aquesta representació de la composició la utilitza molt al llarg del llibre. La representació de la unitat per la lletra *u* s'explica a les pàgines següents.

Representa la potència d'una raó amb la paraula *triplicata, duplicata*, etc segons convingui i escriu

a3 ; r3 : triplicata a ; r [14]

per representar

---

[13] "Numerator fractionis cuius character scribetur ante parentheses, ut in charactere fractionis *b (a)*, numerator est *b*. Denominator fractionis, cuius character, scribetur interparentheses, ut in charactere fractionis *b (a)*, denominator est *a*." [Geo, 208]

[14] Primer dóna la notació i després en el teorema 3 de l'*Elementum primum* demostra que la notació representa la potència. [Geo,10]

$$a^3 : r^3 = [a : r]^3$$

En les definicions, fixa les lletres amb les quals representarà les quantitats. A la definició quarta diu:

> 4. La quantitat des de la qual una progressió contínuament proporcional és ordenada en infinit es dirà racional (*rationalis*) i és representada amb la lletra *u*.[15]

Aquí Mengoli vol deixar clar que considera nombres en proporció contínua indefinidament a partir de la unitat. Així,

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5, \ldots$$

Al llarg de l'*Elementum tertium* Mengoli es refereix a aquesta quantitat, que representa amb la lletra *u*, com la unitat. Per exemple, quan en un enunciat diu *tota quantumlibet ordinata ad unitatem,* aquesta afirmació la representa algebraicament *t3 ; u,* ja que quan diu, qualsevol exponent, treballa en un cas concret, el símbol *;* representa la raó i *u* representa la unitat. També, en les demostracions, quan multiplica *u* per un nombre posa com a resultat aquest nombre.[16] Les altres quantitats les representa amb les lletres de l'alfabet i les seves potències, escrivint al costat el seu exponent; així en les definicions cinquena i sisena diu:

---

[15] "4. Quantitas, unde progressio continuè proportionalium, ordinatur in infinitum, dicetur, Rationalis.& significabitur, charactere u."[Geo,4]

[16] Vegeu pàg. 54 d'aquest capítol.

5. I la primera (quantitat) que succeeix a la racional es dirà arrel (*Radix*), o bé potència primera, i es representarà amb els caràcters de les lletres de l'alfabet.[17]

6. I la resta (de quantitats) que segueixen es diran potències segona, tercera, etc de l'arrel, ordenades d'aquesta manera. I es representarà cada una, amb la mateixa lletra de l'arrel, i l'ordre amb un nombre. Per exemple: arrel *a*, segona potència *a2*, tercera *a3* i així successivament.[18]

L'expressió *a3*, que és la tercera potència d'*a,* l'anomena *tertia potestas.* Aquesta definició no dóna solament el nom i el símbol, sinó la relació amb la resta de nombres. A la definició quarta, Mengoli explica que forma nombres en progressió contínua proporcional; per tant, quan utiliza la definició sisena escriu:

$$r \;;\; u : r2 \;;\; r : r3 \;;\; r2....$$

per representar

$$r:1=r^2:r=r^3:r^2....$$

Més interessant és la definició setena, que ens fa pensar que per a Mengoli la unitat és una potència de l'arrel ordenada en una unitat menys que la primera, o sigui zero. És el

[17] "5. Et prima consequens à rationali, dicetur, Radix, vel Potestas prima. & significabitur, charactere cuiusq; litterae alphabeti."[Geo, 4]

[18] "6. Et reliquae consequentes, dicentur Potestates radicis, Secunda, Tertia, & deinceps, iuxta suum cuiusque ordinem. Et significabitur unaquaeque, eâdem litterâ suae radicis, adscriptoque ordinis numero. vt radicis a, secunda potestas a2, tertia a3, &sic deinceps." [Geo, 4]

que avui escriuriem $a^0 = u = 1$. No parla en cap moment del zero, ni com a exponent ni com a nombre. Només diu que la unitat està ordenada en una unitat menys que la primera potència.

> 7. La quantitat racional, encara que no tingui nombre d'ordre com les potències, també es considerarà ordenada i es dirà ordenada en una unitat menys que la primera potència.[19]

Fem notar que per representar x^2 escriu *x2*, una notació que procedeix del francès Pierre Hérigone i que Mengoli va copiar, tal com ell mateix diu:[20]

> A aquells símbols, utilitzats per Viète, Hérigone, ..., els donarem nom a la nostra conveniència.[21]

Aquí es refereix als noms que a continuació explicarem. El producte de dues quantitats l'escriu amb una lletra al costat de l'altra. Si aquestes quantitats no tenen exponents, l'anomena *uniprimam, ar.*[22] Si la primera està al quadrat i la segona no, en diu *biprimam, a2r.* I així successivament: *Triprimam (a3r), quadriprimam (a4r),* etc. Si la primera es manté sense exponent i la segona va augmentant, l'anomena *uniprimam (ar), unisecundam*

---

[19] "7. Rationalis, licet nomen ordinis non habeat inter potestates; tamen habebitur pro ordinata: & dicetur, unitate minùs ordinata, quàm sit prima potestas." [Geo, 4]

[20] Sobre les notacions d'Hérigone vegeu F. Cajori, *A history of Mathematical Notations,* Open Court, Chicago, 1928, pàg. 345.

[21] "Quibus characteribus à Vietta, Herigonio,...usitatis, convenientia nos adinvenimos nomina." [Geo, 12]

[22] *Lectori Elementario,* de la *Geometriae Speciosae,* pàg. 12.

(ar2), unitertiam (ar3), etc. Quan totes dues tenen exponents, fa una barreja dels dos noms: *sextiquartam* per *a6r4*, *nonisecundam* per *a9r2*, etc. Quan vol anomenar el producte d'un nombre multiplicat pels productes anteriors, escriu: *dupla uniprima (2ar), tripla biprima (3a2r), sescupla bisecunda (6a2r2), quadrupla unitertia (4ar3), etc.*[23]

3 El binomi de Mengoli.

En l'*Elementum primum* Mengoli defineix tres taules triangulars. Una d'elles correspon a la taula dels nombres combinatoris, o triangle aritmètic, la qual, d'acord amb Bosmans, Cassina i Edwards, creiem que era d'ús freqüent entre els matemàtics a mitjan segle disset i de la qual ja hem parlat a la introducció.[24] Aquest triangle ha passat a la història sota el nom de triangle de Pascal perquè ell va explicar i va demostrar les seves propietats en un estil molt clar.[25] Mengoli probablement no coneixia el tractat de Pascal perquè va ésser publicat el 1665, però Mengoli havia llegit la font del tractat

---

[23] Ibid, pàgs. 18-19. Escric els exponents al costat tal com fa Mengoli però a partir de l'apartat següent els escriuré a dalt.

[24] Vegeu sobre la difusió d'aquest triangle Bosmans, "Sur l'oeuvre mathématique de Blaise Pascal", *Mathesis* **38** Supplément (1924), pàg. 23; Cassina, "Storia del triangolo aritmetico", *Bollettino di Matematica*, 2d ser., 2, 1923, pàg. 33 i Edwards, *Pascal's Arithmetical triangle*, Griffin, London, Oxford University Press, Nova York, 1987, especialment els capítols 3 i 4, pp. 27-50.

[25] Veure Pascal, *Oeuvres*, (1665), pàg. 360 i Bosmans, referència anterior, pàg. 21.

de Pascal, Hérigone, com hem dit abans. Mengoli ja havia mencionat el principi d'aquesta taula en un llibre anterior, la *Via Regia ad Mathematicas* (1655), i en la introducció de la *Geometriae* diu que els analistes l'anomenaven *tabula multiplicium*. Més tard, en el *Circolo* (1672), quan menciona una altra vegada aquesta taula, cita les *Ad Angulares Sectiones* de Viète com a font.[26]

En referència a una altra de les taules, la *Tabula proportionalium,* Mengoli remarca la seva similitud a una mostrada en Euclides.[27] A més en la dedicatòria de l'*Elementum primum*, enuncia que aquestes taules triangulars es troben en la primera lliçó de l'*Algebra Speciosa*.[28] És difícil per nosaltres saber exactament quina ha sigut la font de Mengoli però podem assumir que aquestes taules de nombres, sobretot el triangle aritmètic, eren conegudes per molts matemàtics d'aquell temps. Tanmateix l'originalitat de Mengoli prové no de la definició d'aquestes taules sinó del seu tractament. Per una banda utilitza aquestes

---

[26] "Aquí es pot veure afegint-hi la unitat als costats, i a dalt, com en el primer element de la meva Geometria Speciosa jo la represento, i la defineixo, i explico les seves propietats, i en el segon, tercer, i sisè, també l'utilitzo, i el Viète que en va ser l'autor, a l'Algebra Speciosa, i en el seu Llibre de les Seccions angulars." [*Circolo*, 3].
Dins l'obra de Viète he trobat taules similars a "Ad Angulares Sectiones", *The Analytic Art,* T. R. Witmer tr., Kent State University Press, Kent, Ohio, 1983, pp. 297-299.

[27] Tornarem sobre aquest punt més avall.

[28] No sé a quina Algebra Speciosa es refereix Mengoli, però és possible que estigui mencionant el segon volum del llibre de text d'Herigone: *Cursus Mathematici. Tomus secundus... Tome second du Cours de Mathématiques. Contenant l'Arithmetique pratique: Le Calcul Ecclésiastique: et L'Algèbre tant vulgaire que spécieuse, avec la méthode de composer et faire les démonstrations par le retour ou répétition des vestiges de l'Analyse*. París, 1634.

taules i l'àlgebra de Viète per crear altres taules amb lletres que expressen sumes de potències i productes de potències; per altra banda, empra les relacions entre els sumatoris i els nombres combinatoris del triangle aritmètic per probar un dels resultats importants d'aquest llibre, la suma de les *p*-potències dels primers $t-1$ enters. Considerem ara les tècniques de Mengoli per construir aquestes taules.

La primera, la taula "dels proporcionals" (*Proportionalium*) (vegeu Fig. 1a) ens dóna els nombres, expressats en lletres, de manera que de dos en dos tinguin sempre la mateixa raó. Mengoli explica que la construeix de la mateixa manera que Euclides en la proposició 2 del llibre 8 dels *Elements*.[29] No he trobat aquesta taula en els *Elements* d'Euclides, només l'enunciat de la proposició, però hi ha una referència a Bosmans i a Cassina d'una taula similar, en una edició llatina d'aquesta obra, del segle 14, publicada per Johan Ludvig Heiberg i H. Menge.[30]

Quan considerem els nombres d'aquesta taula per files la raó és $a : r$. O sigui, a la segona fila, $a : r = a^2 : ar = ar : r^2$. A la tercera fila, $a : r = a^3 : a^2r = a^2r : ar^2 = ar^2 : r^3$, i així successivament. També tenen la mateixa raó en els costats o diagonals, $1 : a$ i $1 : r$, respectivament (recordem que la lletra *u* del vèrtex de la taula triangular representa la unitat).[31] O

[29] "Proposició 2.8. Trobar nombres en proporció contínua, tants com es poden trobar i els més petits que siguin en una raó donada." [Heath, 346].

[30] Bosmans, "Sur l'oeuvre mathématique de Blaise Pascal", *Mathesis* 38 Supplément (1924), pàg. 22 i Cassina, "Storia del triangolo aritmetico", pàg. 35.

[31] "Pro charactere autem unitatis, litteram *u* collocavimus in vertice triangularis tabulae" [Geo, 13].

sigui en el primer costat *1, a,* a^2, a^3, a^4,..,els seus termes, de dos en dos, tenen sempre la raó $1 : a$. També en el segon costat, $1 : a = r : ar = ar : a^2r = a^2r : a^3r$... En l'últim costat *1, r,* r^2, r^3, r^4,..,els seus termes, de dos en dos, tenen sempre la raó $1 : r$.[32] També en el penúltim costat, etc. Així Mengoli ordena els nombres en proporció contínua i els col.loca de tal manera que li és fàcil la seva identificació.[33]

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&u&&&& \\ &&&a&&r&&& \\ &&a^2&&ar&&r^2&& \\ &a^3&&a^2r&&ar^2&&r^3& \\ a^4&&a^3r&&a^2r^2&&ar^3&&r^4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \end{array}$$

Tabula proportionalium — *Tabula multiplicium*

a — b

FIGURA 1[34]

[32] Aquestes proporcions que verifiquen els elements de la taula proporcional les demostra en els teoremes 4 i 5 de l'*Elementum primum*.

[33] Per poder reconèixer els elements del mig de la taula dóna nom als costats. Així les diagonals dels primers termes són costat primer, les dels segons, segon,...i també les diagonals dels últims termes són el costat últim, el penúltim,.. Així el trobar un terme que estigui en el tercer costat i en el costat sisè començant per la cua, de la fila set, serà a^5r^2, o sigui, una unitat menys ja que l'últim comença per *u*, el penúltim per *a*, el tercer per la cua per a^2,...,el sisè per la cua per a^5,... i el primer costat per *u*, el segon costat per *r*, el tercer costat per r^2,... Si és tercer serà r^2 i el sisè començant per la cua serà a^5. Els elements de la fila serien: a^7, $a^6.r$, $a^5.r^2$, $a^4.r^3$, $a^3.r^4$. $a^2.r^5$, $a.r^6$, r^7. També demostra que l'element $a^m.r^n$ es troba en el costat $(n+1)$ i en el $(m+1)$-costat per la cua. Aquestes demostracions Mengoli les fa en els Teoremes 6 i 7 de l'*Elementum primum*.

[34] Aquestes taules són idèntiques a les del text de Mengoli. La única diferència és que Mengoli escriu els exponents al costat de les lletres i a baix. [Geo, 7]

Pel que fa a la segona taula, "de múltiples" (*Multiplicium*), és la taula triangular dels nombres combinatoris ja mencionada. Mengoli la defineix com una taula triangular que té al vèrtex i als costats primer i últim la unitat i els termes de la qual són la "suma dels dos que té en front com dues banyes".[35] A la *Via Regia* defineix també la taula d'aquesta manera, i en el *Circolo*, quan cita dos avantatges d'aquesta taula, el primer torna a ser la definició que acabem de dir. El segon avantatge que nomena d'aquesta taula és que, en cada fila, la raó del primer terme al segon dóna la raó dels altres termes afegint una unitat a l'antecedent i restant del conseqüent una unitat. En notació actual, aquests "avantatges" serien:

$$\binom{m}{n}=\binom{m-1}{n-1}+\binom{m-1}{n}$$

$$\frac{\binom{m}{n}}{\binom{m}{n+1}}=\frac{1+n}{m-n}$$

Encara, en el *Circolo*, quan es refereix a aquesta taula identifica els nombres dels costats com a nombres figurats donant les seves propietats,

> ..els nombres del tercer i del tercer abans de l'últim costat, són els nombres Triangulars 1, 3, 6, 10, 15, 21, que són la meitat dels productes de 1 per 2, 2 per 3, 3 per 4, 4 per 5, 5 per 6, 6 per 7,...; els nombres del quart i del quart abans de l'últim costat, són els nombres

[35] De fet Pascal també el defineix així: "Le nombre de chaque cellule est égal à celui de la cellule qui la précède dans son rang perpendiculaire, plus à celui de la cellule qui la précède dans son rang parallèle." I en la conseqüència primera igual que Mengoli també estableix que tots els termes del lateral són igual a la generatriu, en aquest cas la unitat. *Oeuvres*, pp. 98-99.

> Tetraèdrics 1, 4, 10, 20, 35, que són la sexta part dels productes de 1 per 2 per 3, 2 per 3 per 4, 3 per 4 per 5,...[36]

Així els nombres triangulars: 1, 3, 6, 10, 15,... s'obtenen com semiproductes de dos enters, 1.2, 2.3, 3.4, 4.5, 5.6,... però a més són suma dels enters anteriors la qual cosa ens dóna:[37]

1 = 1 = 1/2 (1.2);

1 + 2 = 3 = 1/2 (2.3);

1 + 2 + 3 = 6 = 1/2 (3.4);

1 + 2 + 3 + 4 = 10 = 1/2 (4.5);

1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = 1/2 (5.6),...

De les dues propietats es pot deduir que la suma dels n primers enters val $1/2.n.(n + 1)$.

Igualment, els nombres tetraèdrics: 1, 4, 10, 20, 35,..., que s'obtenen com la sisena part de productes de tres enters, 1.2.3, 2.3.4, 3.4.5,..., són suma dels nombres triangulars anteriors: 1=1; 1 + 3 = 4; 1 + 3 + 6 = 10; 1 + 3 + 6 + 10 = 20;... De les dues propietats i del resultat anterior es podria deduir la suma dels quadrats dels n primers enters, deducció que farem en notació actual:

$$\sum_{a=1}^{n} \frac{(a^2+a)}{2} = \frac{n.(n+1).(n+2)}{6}$$

[36] *Circolo*, pàg. 10.

[37] Pascal en diu nombres de primer ordre: 1, 1, 1,...,de segon ordre: 1, 2, 3, 4,..., de tercer ordre o triangulars: 1, 3, 6, 10,...,de quart ordre o piramidals: 1, 4, 10, 20,..., de cinquè ordre o triangles-triangulars: 1, 5, 15, 35,... *Oeuvres*, pàg. 108.

D'aquí aïllem la suma dels quadrats multiplicant per 2 el segon membre i posant el valor de la suma dels primers enters:

$$\sum_{a=1}^{n} a^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

Així podríem anar deduint les sumes de potències dels primers enters. Encara que Mengoli coneixia aquestes propietats dels nombres figurats, no les utilitza per trobar aquestes sumes de potències en aquest sentit i, com veurem en l'apartat següent, s'inventa una altra construcció.

En l'*Elementum secundum*, demostra dues propietats més d'aquesta taula dels múltiples. La primera constitueix el Teorema 23: la suma dels termes de cada fila és una potència de 2 d'exponent el nombre d'ordre de la fila. Pascal va exposar també aquest resultat en la conseqüència vuitena del seu tractat sobre el triangle aritmètic, citant que la suma de cada base dóna una progresió doble que comença per la unitat: 1, 2, 4, 8,... No en fa cap demostració i enuncia: "La primera base és la unitat. La segona és doble de la primera, doncs és 2. La tercera és doble de la segona, doncs és 4. I així en infinit." Pascal pot deduir el resultat perquè ha demostrat que la suma de cada base val el doble de l'anterior. Això deriva de la pròpia definició del triangle: els extrems de la base són iguals, valen 1 i cada nombre dels del mig és suma de dos dels de dalt per construcció del triangle aritmètic.[38] Mengoli ho demostra de manera molt diferent: com que ja ha demostrat les potències del binomi, dóna

---

[38] Pascal, *Oeuvres*, pàg. 101.

valors a=1 i r=1 i calcula el valor de cada fila, elevant el binomi als exponents corresponents.[39] Un dels precursors d'aquesta suma sembla que va ser Cardano (1501-1576).[40] En notació actual:

$$\sum_{a=2}^{n} \binom{n}{a} = 2^n - 1 - n$$

La segona propietat constitueix el Teorema 25: el producte d'un nombre qualsevol d'una fila per l'ordre de la fila augmentat en una unitat és més petit que una potència de tres d'exponent l'últim nombre. En notació actual:

$$(m+1) \cdot \binom{m}{n} < 3^{(m+1)}$$

Aquest resultat és utilitzat després per obtenir desigualtats entre els sumatoris i potències de $t - 1$ i de $t + 1$. Una d'elles, és la proposició 30, que després empra en els problemes de les quasi proporcions (en notació actual):

---

[39] [Geo, 75]. També Mengoli en la pàg. 28 de l'*Arithmetica Rationalis elementa quatuor*, diu que si la suma de les combinacions de dos elements són la segona potència de dos i les de tres són la tercera potència, similarment es demostrarà que les de quatre són la quarta i les de cinc, la quinta i així indefinidament. També ho enuncia de manera general dient que la suma de les combinacions de molts elements són una potència de dos que té per exponent el nombre d'elements que combinem. Referència trobada a M. Matteuzi "Mengoli e l'algebra della logica", *Atti della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Cl. di Scienze Morale. Memoria*, vol. LXXVII, 1979-1980, pàg. 91.

[40] A la *Practica Arithmetice* (1539) Cardano va demostrar que el nombre de combinacions de n coses preses de dues en dues o més a la vegada valen $2^n - 1 - n$. Edwards, *Pascal's Arithmetical triangle*, 1987, pàg. 22.

$$(t-1)^{(m+1)} < (m+1).\binom{m}{n}\sum_{a=1}^{(t-1)} a^{n}.(t-a)^{(m-n)} < (t+1)^{(m+1)}$$

La tercera taula triangular, que anomena "dels noms" (*nominum),* és el resultat de la combinació de les dues taules anteriors. Mengoli la utilitza per obtenir les potències d'un binomi, tant pel que fa a l'addició com a la subtracció. Els elements d'aquesta taula de noms són els termes dels desenvolupaments de les potències del binomi $a + r$ o $a - r$. Cada fila ens dóna el desenvolupament d'una potència del binomi. Mengoli ho remarca considerant $t = a + r$, la primera fila t, la segona t^2, la tercera t^3,... i les anomena "base primera", "base segona", "base tercera",... segons sigui el binomi, el binomi al quadrat, el binomi al cub... A diferència d'altres matemàtics, Mengoli escriu la taula dels desenvolupaments complets en lletres i no només els coeficients.[41]

					u					
Base primera				a		r				
Base segona			a^2		$2ar$		r^2			
Base tercera		a^3		$3a^2r$		$3ar^2$		r^3		
Base quarta	a^4		$4a^3r$		$6a^2r^2$		$4ar^3$		r^4	

Tabula nominum

FIGURA 2

Mengoli demostra aquests desenvolupaments en els teoremes 8,

[41] Segons Bosmans, "Sur l'oeuvre mathématique de Blaise Pascal", *Mathesis* **38** Supplément (1924), pàg. 26, només Oughtred escriu els termes complets dels desenvolupaments. De moment no ho he trobat, l'obra es diu *Clavis Mathematicae* (London, 1631).

9 i 10 de l'*Elementum primum*. Demostra el binomi-suma al quadrat aritmèticament, i no geomètricament com era habitual, a partir de les proporcions dels costats de la taula dels proporcionals i de les propietats de les proporcions:[42]

$1 : a = a : a^2 = r : ar = a + r : a^2 + ar$

$1 : r = a : ar = r : r^2 = a + r : ar + r^2$

I ara sumant els conseqüents i deixant els mateixos antecedents dóna: $1 : a + r = a + r : a^2 + 2ar + r^2$.

Per tant aplicant la propietat de les proporcions queda:

$(a + r)^2 = a^2 + 2ar + r^2$.

Tanmateix aquestes taules de l'*Elementum primum* no solament li serveixen per aquest desenvolupament i per col.locar els nombres formant proporcions, sinó també per construir les taules de sumatoris de l'*Elementum secundum*.[43]

4 Les taules triangulars de sumatoris. La suma de potències.

En l'*Elementum secundum* Mengoli construeix uns sumatoris de forma molt original. Per obtenir el seu càlcul, els disposa en unes altres taules triangulars que defineix utilitzant les anteriors.

---

[42] Mengoli parla de la taula dels proporcionals i en aquest cas és irrelevant. Podria fer servir per la demostració la progressió contínua proporcional que formen els nombres.

[43] Fins aquí Mengoli no ha parlat en cap moment de nombres figurats sinó únicament de nombres binomials. Els nombres figurats els utilitza per fer les sumes de potències sense dir-ho i els cita i els empra en el *Circolo* per fer les taules interpolades de quadratures.

Mengoli considera un nombre qualsevol, l'anomena *tota,* el representa per la lletra *t,* i el divideix en dues parts *a* i $r = t-a$,[44]

> 2. Les parts de les *totes* s'anomenaran part separada [*abscissa*] i part restant [*residua*], i la part separada es representarà amb la lletra *a* i la restant amb *r*.[45]

A continuació pren la *tota* igual a 1, 2,...i posa exemples fins a 10. És a dir, si *t* és 2, l'*a* és 1 i la *r* és 1. Si *t* és 3, l'*a* pot ser 1 o 2 i llavors la *r* és 2 o 1, respectivament. Si *t* és 4, l'*a* pot ser 1, 2 o 3, i llavors la *r* és 3, 2 o 1, respectivament, i així indefinidament. També calcula els quadrats i els cubs de les *a*, els productes entre *a* i *r*, entre els quadrats d'*a* i *r*,etc.

A més, en la Definició quarta Mengoli explica que tots els nombres que separa, *a*, d'un mateix nombre, *t,* així com les restes, *r,* que li queden, els anomenarà "sinònims" [*synonymae*]. Així si *t* és 3, els *synonimae* són 1 i 2; si *t* és 4, els *synonimae* són 1, 2 i 3, etc. Després suma els *synonimae*,

---

[44] Mengoli parla de nombre qualsevol però aquí només posa exemples de nombres enters i parts enteres del nombre enter. Més endavant en fer les quadratures divideix la unitat en *t* parts de mida $1/t$, o sigui $a=1/t$ i $r=1-1/t$.

[45] "1. Quantitas utcunque divisa in duas partes, dicetur, Tota, & significabitur, charactere t. 2. Et partes Totae, dicentur, Abscissa, & Residua: & significabitur abscissa, charactere a; & residua, r." [Geo, 21]

$$O.a = \text{tots els sinònims de } t = \sum_{a=1}^{t-1} a$$

que Mengoli anomena *massa de totes les abscisses*. Així, si *t* és 3, el sumatori [*massa*] valdrà 3, que és la suma de 1 i 2. Si *t* és 4, el sumatori valdrà 6, que és la suma de 1, 2 i 3, etc.

Mengoli ordena tots aquests sumatoris que resulten de la suma dels *synonimae* com en la taula dels proporcionals [*proportionalium*], i obté una nova taula triangular que anomena taula "dels símbols" [*Tabula Speciosa*].

					$O.u$				
Base primera				$O.a$		$O.r$			
Base segona			$O.a^2$		$O.ar$		$O.r^2$		
Base tercera		$O.a^3$		$O.a^2r$		$O.ar^2$		$O.r^3$	
Base quarta	$O.a^4$		$O.a^3r$		$O.a^2r^2$		$O.ar^3$		$O.r^4$

Tabula speciosa

FIGURA 3

Els elements d'aquesta nova taula, que són sumatoris com ara

$$O.u = (t-1)$$
$$O.a = 1+2+3+...+[t-1]$$
$$O.r = (t-1)+(t-2)+(t-3)+...+1$$
$$O.a^2 = 1^2+2^2+3^2+...+[t-1]^2$$
$$O.ar = 1.(t-1)+2.(t-2)+...+(t-1).1, \text{etc.},$$

Mengoli els anomena *species*.[46] Mengoli considera el vèrtex de la taula "d'ordre zero", i anomena la primera fila de la taula triangular "d'ordre u", la segona "d'ordre dos", etc. i assigna nombres ordinals a les files o bases.[47]

Mengoli composa aquesta taula de símbols amb la taula dels nombres combinatoris, o taula dels múltiples [*multiplicium*], per obtenir la taula "subquadratriu" [*subquadratrix*], i els seus elements els anomena "subquadratrius" [*subquadratrices*].

					$O.u$				
Base primera				$O.a$		$O.r$			
Base segona			$O.a^2$		$O.2ar$		$O.r^2$		
Base tercera		$O.a^3$		$O.3a^2r$		$O.3ar^2$		$O.r^3$	
Base quarta	$O.a^4$		$O.4a^3r$		$O.6a^2r^2$		$O.4ar^3$		$O.r^4$

Tabula subquadratrix

FIGURA 4

A partir d'aquesta taula construeix una tercera taula multiplicant les files de la taula "subquadratriu", que ell anomena bases, per un nombre una unitat més gran que l'ordre de la fila. Així multiplica tots els elements de la primera fila per 2, els de la segona fila per 3, els de la tercera fila per 4, etc. Aquesta nova taula, així definida, Mengoli l'anomena taula "quadratriu" [*quadratrix*], i els seus elements, "quadratrius"

[46] El nom vé clarament de Viète i la seva *Logistica speciosa*, ja que es refereix constantment a Viète i als analistes. Nosaltres anomenarem aquestes espècies, sumatoris.

[47] En la taula de nombres, Mengoli anomena les bases primera, segona,... d'acord amb l'ordre del desenvolupament de la binomial.

[quadratrices].[48]

			$O.u$		
Base primera		$O.2a$		$O.2r$	
Base segona		$O.3a^2$	$O.6ar$	$O.3r^2$	
Base tercera	$O.4a^3$	$O.12a^2r$		$O.12ar^2$	$O.4r^3$
Base quarta	$O.5a^4$	$O.20a^3r$	$O.30a^2r^2$	$O.20ar^3$	$O.5r^4$

Tabula quadratrix

FIGURA 5

Mengoli troba i demostra el valor d'aquests termes "quadratrius" (sumatoris) utilitzant el nombre t com a punt de partida per la seva construcció. Aquests càlculs donen el valor de la suma de les m-potències de $t-1$ enters, una fòrmula que efectivament no era nova. El primer reconeixement com a regla general aparentment va ser fet el 1636 per Fermat, qui va anunciar que havia solucionat "el que és potser el problema més bonic de tota l'aritmètica", és a dir, donada qualsevol progressió aritmètica, trobar la suma de qualsevol potència. Fermat va establir les regles però no va escriure la fórmula ni la demostració.[49] Aquestes regles deriven del fet que en el triangle aritmètic, la suma de tots els nombres figurats de

---

[48] Les paraules quadratriu i subquadratriu són una traducció lliure de l'autora i corresponen a les expressions algebraiques acabades d'explicar.

[49] Vegeu Fermat, *Oeuvres* Vol. III, pp. 69-70, pp. 83-84; Mahoney, *The mathematical career of Pierre de Fermat,* Princeton, Princeton University Press, 1973, pàg. 291; Boyer, "Pascal's Formula for the Sums of Powers of the Integers" *Scripta Mathematica* 9, 1943, pp. 238-239; Bosmans, "Sur l'oeuvre mathématique de Blaise Pascal", *Mathesis* 38 Supplément (1924) pp. 39-40; Baron, *The origins of the Infinitesimal Calculus*, Nova York: Dover, 1987, pp. 197-198; L. Tits, "Sur la sommation des puissances numériques, *Mathesis*, 37, 1923, pp. 353-355.

qualsevol ordre s'expressa en termes del nombre figurat de l'ordre proper més alt, com ja hem explicat en l'apartat anterior.[50]

Divuit anys més tard Pascal va arribar independentment a una conclusió similar. A *Potestatum mumericarum summa* (1654) va probar les regles per quatre termes d'una suma i per la potència $n = 3$, però va argumentar que la prova serveix per tot n.[51] Va enunciar les regles verbalment i no va escriure la fòrmula.

Roberval, en el *Traité des indivisibles* (1634, publicat el 1693), i Wallis, en l'*Arithmetica infinitorum* (1655), també van expressar aquests sumatoris per les primeres potències i van deduir el valor d'aquestes expressions quan el nombre de termes creix indefinidament. Roberval no va escriure les regles o les fòrmules per potències més grans que 4, i Wallis no va passar de 6, però tant un com l'altre no van donar cap demostració sinó que ho van comprobar o bé amb exemples geomètrics o bé donant valors.[52]

L'alemany Johann Faulhaber va publicar a *Academia algebrae* (Augspurg, 1631) les fòrmules de les sumes de potències fins a

---

[50] Més tard Jacob Bernoulli(1654-1705), en *Ars Conjectandi* (1713) va deduir i va escriure la fòrmula general sobre la base d'aquestes regles dels nombres figurats. Veure el tercer volum de *Die Werke*, 3 vols., Basel: Birkhäuser Verlag, 1975, pp. 164-168 i la traducció del Llatí a pp. 85-90.

[51] Vegeu Pascal, *Oeuvres*, pàg. 360; i referències sobre Boyer, 239; Bosmans, 36-41 i Baron, 197 a la nota 49 anterior.

[52] Veure per Roberval, Walker, *A Study of the Traité des Indivisibles of ..Roberval*, Nova York: Columbia Univ. Press, 1986, pp. 171-173; Auger, *Un savant méconnu: Gilles Personne de Roberval (1602-1675)*, París: Blanchard, 1962, pp. 18-21 i per Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, pp. 373-384 i Scott, *The Mathematical Work of John Wallis, D. D., F. R. S. (1616-1703)*, Nova York: Chelsea, 1981, pp. 30-34.

l'exponent 17, i a més va indicar el procediment per trobar les restants. Tanmateix sembla que quasi ningú no se'l va llegir.[53]

Mengoli arriba a aquests resultats independentment dels altres matemàtics, utilitzant l'àlgebra de Viète per expressar els sumatoris i obtenir-ne una generalització. Com Pascal i Fermat, troba el valor de la suma de les *m*-potències després de determinar la suma de les *(m - 1)* potències, *(m - 2)* potències, etc. Tanmateix a més d'establir la regla, Mengoli la demostra en el Teorema 4 i l'empra en el Teorema 5 per trobar 36 càlculs tot acabant amb la sentència:

> I en infinit, pot ser demostrat, amb el mètode mostrat més amunt, cada sumatori és igual a alguna *totae*.[54]

Mengoli posa els sumatoris en la taula triangular, i així els pot obtenir indefinidament gràcies a la forma general en la que ho expressa en el Teorema 22 (vegeu més endavant).
La regla que Mengoli utilitza per calcular aquests sumatoris és:

---

[53] El meu coneixement sobre Faulhaber vé d'una carta rebuda d'Edwards que es va llegir el meu treball a *Historia Mathematica*. Edwards m'enviava el seu treball sobre aquest matemàtic i em citava el seu llibre sobre el triangle aritmètic que m'ha aclarit moltes coses i on he trobat moltes referències d'estudis sobre el triangle. La referència del treball d'Edwards sobre Faulhaber és "A quick route to sums of powers", *American Mathematical Monthly*, vol. 93, nº6, 1986, pp. 451-455. Encara que ja coneixia quelcom de Faulhaber a través de la cita de Bernoulli en la seva *Ars conjectandi*.

[54] "Et in infinitum, eadem methodo supra tradita, potest demonstrari, qualiter acceptis totis, quaeque massa est aequalis." [Geo, 44]

Teorema 4. Proposició 4.

Qualsevol *tota* [elevada a qualsevol exponent] és igual a la suma de les *especies* formades per *abscisses*, elevades a graus més petits que l'ordre de la *tota* i la unitat, multiplicades pels nombres de la taula dels "multiples" que correspon a la base que té un ordre igual a la potència de la *tota*.[55]

En notació moderna, s'escriuria

$$t^m = [\sum_{a=1}^{a=t-1} \binom{m}{1} a^{m-1}] + \ldots\ldots\ldots + [\sum_{a=1}^{a=t-1} \binom{m}{m} a^0] + 1^m.$$

En el Teorema 1, estableix la simetria de les taules de sumatoris i demostra la identitat que avui se expressaria com

$$(m+1) \sum_{a=1}^{a=t-1} \binom{m}{n} a^n . (t-a)^{m-n} = (m+1) \sum_{a=1}^{a=t-1} \binom{m}{n} (t-a)^n . a^{m-n}.$$

Mengoli la comprova en tres casos:

O. $a^3 =$ *O.* r^3 ;

O. $a^2\, r =$ *O.* $a\, r^2$;

O. 12 $a^2 r =$ *O. 12* $a\, r^2$.

En el Teorema 2, troba dues diferències, les qual anomena *incrementum*. La primera pels elements del lateral de la taula

[55] "Tota quaelibet, est aequalis, aggregatis omnibus minùs ordinatarum abscissarum speciebus, & unitati, acceptis secundum numeros multiplices, in base sibi aequeordinata iacentes." [Geo, 36]

speciosa (fig. 3) és:

$$[\sum_{a=1}^{a=t} a^m] - [\sum_{a=1}^{a=t-1} a^m] = t^m,$$

i, utilitzant els *residua,* mostra la segona

$$[\sum_{a=1}^{a=t} ((t+1)-a)^m] - [\sum_{a=1}^{a=t-1} (t-a)^m] = \sum_{a=1}^{a=t-1} \binom{m}{1} a^{m-1} + \ldots + \sum_{a=1}^{a=t-1} \binom{m}{m} a^0 + 1^m.$$

Com que ja ha probat que ambdós *incrementa* són igual (Teorema 1), resulta el teorema 4, és a dir,

$$t^m = [\sum_{a=1}^{a=t-1} \binom{m}{1} a^{m-1}] + \ldots\ldots + [\sum_{a=1}^{a=t-1} \binom{m}{m} a^0] + 1^m.$$

Per entendre millor aquests resultats, considerem l'exemple de $t^5 = O.\ 5a^4 + O.\ 10a^3 + O.\ 10a^2 + O.\ 5a + O.\ u + u$. Aquí, $O.$ representa el sumatori des de $a = 1$ fins $a = t - 1$, i 5, 10, 10, 5 són els nombres de la cinquena fila de la taula dels múltiples (fig. 1b). Les primeres potències de t són

$t = O.\ u + u,$

$t^2 = O.\ 2a + O.\ u + u,$ (1)

$t^3 = O.\ 3a^2 + O.\ 3a + O.\ u + u,$ i

$t^4 = O.\ 4a^3 + O.\ 6a^2 + O.\ 4a + O.\ u + u.$

Utilitzant aquestes expressions, en el Teorema 5 calcula

$O.\ 2a = t^2 - t,$

$O.\ 6a^2 = 2t^3 - 3t^2 + t,$

$O.\ 4a^3 = t^4 - 2t^3 + t^2,$ fins a trenta-sis termes de la taula quadratrix (fig. 5). Per exemple, Mengoli deriva el valor de

$O.\ 4a^3$ des de (1) com segueix

$O.\ 4a^3 = t^4 - 2t^3 + t^2.$

Demostració

4.h	$O.\ 4a^3 + O.\ 6a^2 + O.\ 4a + O.\ u + u = t^4$
Sup. p	$O.\ u = t - 1$
Sup. 2	$O.\ 4a = 2t^2 - 2t$
Sup. 3	$O.\ 6a^2 = 2t^3 - 3t^2 + t$

$O.\ 4a^3 + 2t^3 - t^2 = t^4$

$O.\ 4a^3 = t^4 - 2t^3 + t^2$. *Quod &c.* [Geo, 40]

Mengoli calcula

$O.\ 6ar = t^3 - t,$

$O.\ 2772a^5r^5 = t^{11} - 22t^5 + 231t^3 - 210t,$ utilitzant similar *incrementa* pels elements del mig de la taula.[56] Tot seguit generalitza aquests sumatoris en el Teorema 22[57]

Teorema 22. Proposició 22.

Qualsevol quadratriu és igual a la *tota* elevada una unitat més que l'ordre de la base [on la quadratriu es troba], menys la suma d'altres *totae* no elevades per sobre d'aquest ordre.[58]

---

[56] Per identitats similars amb notació actual i sense demostració, vegeu Agostini, "Rileggendo la "Geometria speciosa" di Pietro Mengoli", *PM*, ser 4, vol. 20, 1940, pàg. 315.

[57] Segons Mengoli aquest teorema es pot demostrar per inducció a partir dels càlculs trobats amb les quadratrius (sumatoris). Mengoli, a més de la demostració per inducció, fa una altra demostració. Geo, pp. 74-75.

[58] "Quaelibet quadratrix est aequalis totae unitate plus ordinatae, demptis, additisque aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quàm sit eius basis." [Geo, 74]

En notació moderna, el Teorema 22 és equivalent a

$$(m+1)\sum_{a=1}^{a=t-1}\binom{m}{n}.a^{n}.(t-a)^{m-n} = t^{m+1}-P(t^{m}).$$

on $P(t^m)$ és un polinomi de grau m o més petit que m, amb coeficients tipus "els nombres de Bernoulli" que depenen del nombre combinatori. Considerant únicament les quadratrius del lateral de la taula quadratriu (fig. 5), s'expressaria[59]

$$(m+1)\sum_{a=1}^{a=t-1} a^{m} = t^{m+1}-P(t^{m}).$$

Mengoli no escriu els sumatoris amb el signe + i punts suspensius sinó que, influenciat per Viète, representa els nombres amb lletres i s'inventa una construcció original i avantatjosa d'aquests sumatoris que a més li permet el seu càlcul. A continuació els col.loca en les taules triangulars, obtenint unes relacions noves dels seus termes que li'n faciliten, tot i no aconseguir una regla comuna, els valors d'aquests sumatoris per qualsevol exponent sencer positiu. Així Mengoli en haver-los col.locat a les taules pot continuar calculant sumatoris de potències indefinidament. Mengoli utilitza les taules com eina generalitzadora i no calcula, com molts

[59] Els "nombres de Bernoulli" els va donar ell mateix en *Ars conjectandi* i no són de càlcul fàcil:

$$\sum_{a=1}^{a=t} a^{m} = \frac{t^{m+1}}{m+1} + 1/2.t^{m} + m/2.A.t^{m-1} + \frac{m.(m-1).(m-2)}{2.3.4}.B.t^{m-3} + ...$$

on $A = 1/6$, $B = -1/30$,...*Die Werke*, pàg. 166.

altres matemàtics, els sumatoris de potències per uns quants valors a fi d'obtenir una regla general. Mengoli no emfasitza l'aplicació d'aquest teorema per calcular el valor quan t tendeix a infinit (com Fermat i Pascal havien fet). Això no obstant, en el *Elementum tertium*, usarà la noció de quasi raó per estudiar a què tendeixen aquests valors quan els termes es fan molt grans. Mengoli, després de demostrar aquest teorema, continua fent càlculs similars per $(t - 1)$ i $(t + 1)$, trobant fins a 37 teoremes.[60]

6 Una mirada cap endavant: l'ús de les taules triangulars a l'anàlisi.

En l'*Elementum secundum*, Mengoli es dedica a calcular el valor dels sumatoris de la taula quadratriu, dels quals després, en l'*Elementum tertium*, en calcularà les quasi raons, com veurem amb més detall en el capítol següent. En l' aplicació de les quasi proporcions als elements de les taules es fa més palesa la utilització d'aquestes taules com a eina de generalització dels

[60] Entre aquests teoremes cal destacar el Teorema 31 i 32 de la *Geometriae* on demostra

$$(m+1)\binom{m}{n}\sum_{a=1}^{t-1} a^{n}.(t-a)^{(m-n)} = (t+1)^{(m+1)} - P(t+1)^{m}.$$

$$(m+1)\binom{m}{n}\sum_{a=1}^{t-1} a^{n}.(t-a)^{(m-n)} = (t-1)^{(p+1)} - P(t-1)^{m}$$

Els polinomis tipus el de Bernoulli amb base *t+1* i *t-1* de graus més petits o iguals que m tenen coeficients que depenen de n.

resultats. Així, en el Teorema 42 d'aquest *Elementum Tertium* demostra que el sumatori (en notació actual),

$$[m+1]\sum_{a=1}^{a=t-1}\binom{m}{n}.a^{n}.[t-a]^{m-n}$$

és quasi igual a $t^{(m+1)}$ quan t tendeix a infinit. Això ho fa calculant que el sumatori i la *tota* elevada a una unitat més gran que l'ordre de la seva base són quasi iguals. Això vol dir que, quan el nombre de termes es fa molt gran, la raó dels dos membres tendeix a la unitat. Però aquest resultat no el fa per un sumatori concret, sinó per infinits sumatoris de potències, per qualsevol quadratriu i per qualsevol valor de l'exponent sencer positiu.

En el Teorema 47 de l'*Elementum tertium,* quan Mengoli demostra que totes les quadratrius en la mateixa base són quasi iguals, està dient que, quan el nombre de termes es fa molt gran tots aquests sumatoris, on la suma d'exponents val el mateix, tendeixen al mateix valor. Per tant, també obté el resultat per infinits sumatoris, és a dir, per sumes de qualsevol ordre sencer positiu de potències i de productes de potències. I així podríem analitzar totes les quasi raons que Mengoli calcula utilitzant els elements de les taules de sumatoris.

Aquestes tres taules que li serveixen per calcular quasi raons indefinidament, les emprarà en l'*Elementum sextum* per formar tres noves taules que representen les figures entre 0 i 1 determinades per les expressions algebraiques de les taules anteriors. Igual que ha fet en l'*Elementum secundum* compon la primera taula (sense coeficients) amb la taula de nombres combinatoris, i finalment multiplica tots els elements de la fila per un nombre una unitat més gran que l'ordre de la fila (aquesta construcció està descrita en el capítol 4 d'aquesta tesi). En l'*Elementum sextum* Mengoli calcula el valor de les àrees d'aquestes figures mitjançant aquestes noves taules, trobant que són iguals a l'àrea del quadrat que es troba al vèrtex de la taula, o sigui la unitat. Escrit en notació actual calcula amb m i n naturals $(m > n)$,[61]

$$\int_0^1 (m+1) \cdot \binom{m}{n} \cdot x^n \cdot (1-x)^{(m-n)}\, dx = 1$$

Com veurem, a més d'aquestes taules de figures, Mengoli fa taules interpolades de figures per trobar la quadratura del cercle. En aquestes taules les expressions algebraiques interpolades són les mateixes, però amb m i n racionals de denominador dos. Però Mengoli fa més. Utilitzant les propietats dels nombres del triangle aritmètic, també dóna un procediment per la construcció de les taules de valors de les quadratures per qualsevol interpolació. Mengoli explica que aquestes taules li permeten trobar alhora totes aquestes quadratures i a més seguir calculant-les indefinidament ja que les taules poden ser esteses tant com vulguem.

[61] De fet Mengoli estudia les funcions que tenen per àrees les que s'anomenen Betes d'Euler. Mengoli calcula alhora totes aquestes àrees donant una certa generalització gràcies a les taules triangulars i a l'àlgebra de Viète.

APENDIX. Formulació moderna de la suma de potències de Mengoli.

Igual que fa Edwards amb la fórmula de la suma de potències que obté Bernoulli, mostrarem una interpretació moderna dels teoremes que demostra Mengoli, utilitzant matrius.[62] Emprarem el que Edwards anomena les "matrius de Pascal", que són una familia de matrius triangulars infinites amb elements derivats dels coeficients del triangle aritmètic de Pascal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & . & . \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & . & . \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

A partir d'aquesta matriu construim la família de matrius triangulars iguals posant a la diagonal el terme penúltim del desenvolupament binomial, 1, 2, 3, 4,...n.

[62] Vegeu Edwards "Sums of powers of integers: a little of the history", *The Mathematical Gazette*, 66, 1982, 22-28.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & . & . \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Si tenim en compte que $u = 1$ i que $O.$ representa el sumatori des de $a = 1$ fins $a = t - 1$, la regla de la qual parteix escrita en forma matricial és:

$$\begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \\ .. \\ t^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ 1 & 2 & 0 & \ldots 0 \\ 1 & 3 & 3 & \ldots 0 \\ . & . & . & \ldots \\ 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & \ldots n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} O.u \\ O.a \\ O.a^2 \\ \ldots \\ O.a^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ u \\ u \\ \ldots \\ u \end{pmatrix}$$

Si operem aquestes matrius per files ens dóna

$t = O.\ u + u.$

$t^2 = O.\ u + 2\ O.\ a + u.$

$t^3 = O.\ u + 3\ O.\ a + 3\ O.\ a^2 + u$

...

$t^n = O.\ u + n\ O.a + (n^2-n)/2\ O.a^2 + \ldots + n\ O.a^n + u$

Desenvolupant els sumatoris:

$t = (t-1) + 1.$

$t^2 = (t-1) + 2\ (1 + 2 + \ldots + (t-1)) + 1.$

$t^3 = (t-1) + 3\ (1 + 2 + \ldots + (t-1)) + 3\ (1^2 + 2^2 + \ldots + (t-1)^2) + 1.$

...

$t^n = (t-1) + n\ (1 + 2 + \ldots + (t-1)) + (n^2-n)/2\ (1^2 + 2^2 + \ldots + (t-1)^2)$

$+ \ldots + n\ (1^n + 2^n + \ldots + (t-1)^n) + 1.$

Aquest resultat és equivalent al Teorema 4 de Mengoli. Calculem la matriu inversa de la matriu triangular de nombres combinatoris, i multipliquem-la als dos membres de la igualtat a fi d'aïllar els sumatoris en funció de les potències de t. Mengoli fa aquests càlculs en el Teorema 5, i troba, un per un, 36 sumatoris dels infinits que té la taula quadratriu. Feta la computació de la matriu inversa, trobem que és una matriu $\{b_{ij}\}$ que ha de verificar les següents condicions:

1) té zeros a la part de sobre de la diagonal o sigui $b_{ij} = 0$ quan $j > i$.

2) $b_{11} = 1$.

3) $b_{(i+1,j+1)} = (i\ /\ (j+1))\ b_{ij}$

4) La suma de tots els coeficients de la fila valen 0.

Veiem un exemple amb quatre files.

$$\begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \\ t^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} O.u \\ O.a \\ O.a^2 \\ O.a^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ u \\ u \\ u \end{pmatrix}$$

Busquem la inversa i dóna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (-1/2) & (1/2) & 0 & 0 \\ (1/6) & (-1/2) & (1/3) & 0 \\ 0 & (1/4) & (-1/2) & (1/4) \end{pmatrix}$$

Multipliquem els dos membres de la igualtat anterior per aquesta matriu i alliberem els sumatoris. Quedarà:[63]

$O.\ u = t - 1$

$O.\ a = 1 + 2 + \ldots + (t-1) = (1/2)t^2 + (-1/2)t$

$O.\ a^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + (t-1)^2 = (1/3)t^3 + (-1/2)t^2 + (1/6)t$

$O.\ a^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + (t-1)^3 = (1/4)t^4 + (-1/2)t^3 + (1/4)t^2.$

[63] Si comparem aquests resultats amb Mengoli veiem que són els mateixos, evidentment Mengoli no coneixia els algoritmes matricials però en llegir les interpretacions matricials de Edwards sobre Bernoulli i Faulhaber he volgut fer el mateix amb els resultats de Mengoli. El treball d'Edwards sobre Bernoulli és: "Sums of powers of integers: a little of the history", *The Mathematical Gazette*, **66**, 1982, pp. 22-28; i sobre Faulhaber: "A quick route to sums of powers", *American Mathematical Monthly*, vol. 93, nº6, 1986, pp. 451-455. Una referència a aquest resultat fet amb computadores, és B.L. Burrows i R. F. Talbot: "Sums of powers of integers", *American Mathematical Monthly*, **91**, 1984, pp. 394-403.

CAPITOL 3

LA TEORIA DE QUASI PROPORCIONS

1 Introducció.

L'objectiu d'aquest capítol és analitzar la teoria de "quasi proporcions" de Pietro Mengoli. No és la nostra intenció fer la història del concepte de límit, però per tal d'enmarcar la teoria de Mengoli sí que donarem unes pinzellades sobre les diferents vies on trobem idees matemàtiques sobre aquest concepte.[1]

El mètode d'exhaustió va ser des d'Eudox (360 a. C.) fins al començament del segle XVII la única tècnica coneguda que s'utilitzava per fer quadratures i el seu principal avantatge era que defugia les tècniques que plantejaven problemes amb l'infinit. En el mètode d'exhaustió la idea d'un límit geomètric quedava amagada dins les successions de polígons inscrits i circumscrits que es construeixen per trobar l'àrea de la corba. Durant molts segles els matemàtics es van dedicar a millorar

---

[1] Vegeu Bortolotti, "Lo sviluppo del concetto di limiti ed i primi algoritmi infiniti nel rinascimento italiano", *Memoria Acc. dell'Istituto di Bologna,* ser 9, vol. 6, 1939, pp. 113-141; Cassina, "Storia del concetto di limite", *Periodico di Matematiche,* ser 4, 1936, pp. 1-19, 82-103, 144-167.

aquest mètode per fer quadratures, o bé intentant generalitzacions del mètode o bé substituint la seva laboriosa demostració per una de més senzilla. En aquests intents trobem les primeres proposicions sobre límits com les de Simon Stevin (1548-1620) a *Hypomnemata Mathematica*(1608), i les de Luca Valerio (1552-1618) a *De Centro Gravitatis solidorum* (1604).

Destaquem també una segona via no geomètrica sinó aritmètica que comporta l'estudi de sèries infinites, fraccions contínues i productes infinits. A tall d'exemple podem citar el *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri* (Bologna, 1613) de Pietro Antonio Cataldi (1548-1626). A la *Novae Quadraturae Arithmeticae* (Bologna, 1650) Mengoli demostrava que algunes sèries infinites tenien suma finita i altres com la sèrie harmònica no. Dels enunciats d'aquestes proposicions i de les demostracions ja podem deduir que el concepte de límit aritmètic era clar per Mengoli nou anys abans d'escriure la seva teoria de límits.

Molts matemàtics del segle XVII per poder fer quadratures de paràboles intentaven demostrar el límit:

$$lím\left[\frac{1^m+.........+t^m}{t^{m+1}}\right]=\frac{1}{m+1}$$

quan t tendeix a infinit. Feien aquest límit generalitzant a partir d'uns quants valors i després l'aplicaven a calcular àrees.

Mengoli concretament calculà que el sumatori, amb m, n naturals

$$[m+1]\sum_{a=1}^{t-1}\binom{m}{n}.a^{n}.[t-a]^{m-n}$$

és quasi igual a $t^{(m+1)}$quan t es fa molt gran.[2] Per tant la raó entre les dues expressions tendirà a la unitat. Però Mengoli en l'*Elementum tertium* de la *Geometriae Speciosae*, construeix com una teoria de límits, que anomena de quasi proporcions, per calcular les raons que tendeixin a zero, a la igualtat, a un nombre o a l'infinit.[3]

Al començament, en una carta dedicada a D. Fabio Alamandino, Mengoli qualifica aquesta teoria d'inèdita i hàbil

> En [el tema de] les Quasi proporcions, he establert un element geomètric fins ara desconegut, per a resoldre fàcilment teoremes difícilissims: dels que van freqüentar la meva escola, excepte tu, oh jove il.lustríssim! no considero a ningú suficientment preparat perquè entengui aquesta cosa subtilíssima.[4]

En aquest capítol, primer analitzarem les definicions de quasi raó; en segon lloc, explicarem les propietats de les quasi

---

[2] La diferència entre els dos càlculs està en que Mengoli té *t-1* sumands, però si li sumem *t* elevat a un exponent més petit que *m+1* a fi de tenir el mateix nombre de sumands, en fer la quasi raó el resultat no varia, ja que els termes d'una potència menys que *m+1* es menyspreen.

[3] Aquest *Elementum* conté sis definicions, i 61 proposicions de les quals 52 les anomena també teoremes i les 9 últimes, problemes.

[4] "De quasi proportionibus, inauditum hucusque Geometricum elementum, ad theoremata, cateroqui difficillima, facili negotio soluenda, cum instituerim: ex ijs, qui meam scholam frequentarunt, praeter te, Invenis Illustrissime, neminem habeo satis dispositum; qui rem subtilissimam valeat intelligere." [Geo, 95].

proporcions i transcriurem algunes demostracions, per centrar-nos en els càlculs de les quasi proporcions que fa Mengoli. Com a cloenda analitzarem el límit que li permet després fer quadratures. En un apèndix trobareu els enunciats de totes les propietats de les quasi proporcions que Mengoli demostra i també alguns problemes que resol.

2 Les quasi proporcions. Propietats de les quasi proporcions.

Quan comença l'*Elementum tertium* de la *Geometriae* sembla que realment haguem canviat d'obra, ja que Mengoli fa sis definicions sorprenents i que, aparentment, no tenen res a veure amb el que ha calculat fins aquest punt. A fi d'entendre aquestes definicions, és necessari primer analitzar el significat mengolià d'alguns conceptes nous que hi apareixen.

La primera definició comença amb les paraules *Ratio indeterminata determinabilis*, que són molt difícils d'interpretar. Què s'entenia en el segle XVII per raó indeterminada determinable? En la introducció, Mengoli vol clarificar aquesta noció:

> Quan escric *O.a*, després del capítol precedent tinc immediatament "la massa de totes les abscisses". Però quin valor és aquesta massa, encara no ho saps, si no escrius de quin nombre és la massa. Però ho saps si assignes que *O.a* és la massa del nombre *t*. I d'aquesta manera no saps quant és, si al mateix temps no assignes quin és el valor de la

lletra *t*. Però quan et permeti que fixis un valor qualsevol per la lletra *t*, i tu, utilitzant aquest permís, diguis que val 5, a l'instant certament assignaràs que *O.a* val 10, que t^2 val 25, que t^3 val 125, i que *O.r* val 10, i si les lletres *t* són determinades les quantitats *O.a, O.r*, t^2, t^3 seran determinades. Pel que, abans que tu hagis utilitzat el permís donat, tenies certament *O.a, O.r*, t^2, t^3, quantitats [que són] determinables però [quantitats] indeterminades.[5]

Per tant, és clar que els sumatoris són nombres indeterminats, però que queden determinats quan coneixem el valor de *t*. Assignant diferents valors de *t*, Mengoli introdueix el concepte de variable, una noció que era nova en aquell temps. També subratlla la dependència entre el valor de *t* i el valor del sumatori; tanmateix el pensament de Mengoli suggereix una idea de successió encara queda lluny del concepte general de funció. Mengoli segueix:

Però si vull saber quina és la raó de la massa *O.a*, del nombre *t*, a t^2, o bé la raó de la massa *O.2a* a t^2, o bé de *O.a* a *t*, o bé de *O.a* a t^3, de les quals tinc certament

---

[5]"Cum scriptero O.a, statim ex praecedenti capite habes massam ex omnibus abscissis: sed quota sit haec massa, nondum habes, nisi scriptero, cuius numeri sit massa. Quod si assignavero O.a, numeri t massam esse; neque sic habes, quota sit, nisi simul assignavero, quotus est numerus, valor litterae t.....Cum verò licentiam dedero, ut quotum quemque litterae t valorem taxes; tuque huiusmodi usus licentia dixeris, t valere quinario: statim profecto assignabis & O.a, valere 10; & t^2,valere 25; & t^3, valere 125; & O.r, valere 10; & determinatae litterae t, determinatas esse quantitates O.a, O.r, t^2, t^3·Quare data licentia antequam usus fueris, habebas profecto O.a, O.r, t^2, t^3, quantitates indeterminatas determinabiles." [Geo,61]

dubtes,... quan li assigno valors a t, llavors queden assignades raons determinades, però no sempre iguals respostes, per iguals preguntes. Si el valor 3 és donat a la lletra t, per la raó $O.a : t^2$ contestaràs 3 a 9; si li donessis el valor 4 a la lletra t, a la mateixa pregunta contestaràs 6 a 16, la qual no és la mateixa raó que 3 a 9. També per altres valors, ens donarien altres raons. I per tant, donat el permís per assignar-li valors a la lletra t, abans d'assignar-los, tenim que la raó $O.a$ a t^2 és indeterminada [però] determinable.[6]

Per tant el valor de la raó és també indeterminat però és determinable donants valors a t. La raó efectivament no assumeix aquest valor, el qual podem interpretar com el seu valor actual; més aviat, tendeix a ell a mesura que augmenta t. És en aquest sentit que Mengoli entén l'expressió "raó indeterminada determinable".

Mengoli continua donant exemples i clarifica la seva noció de "raó quasi un nombre". Considera valors fins a 10. Per la raó $O.a$ a t^2, argumenta que està més a prop de 1/2 que qualsevol altra raó, i anomena aquesta raó quasi 1/2:

---

[6]"Sed si quaesiero, quaenam sit ratio Massae O.a, cuiuspiam numeri t, ad t^2; aut Massae O.2a, ad t^2; aut Massae O.a, ad t; aut Massae O.a ad t^3: ad has profectò interrogationes, data licentia usus, cum taxaveris litterae t valorem, tunc determinatam assignabis rationem; sed non eamdem semper, ad eamdem quaestionem. Siquidem litteram t, taxaveris valere 3; pro ratione O.a, ad t^2, respondebis, 3 ad 9: qui si taxaveris litteram t valere 4; ad eamdem quaestionem respondebis 6 ad 16: quae non est eadem ratio 3 ad 9: item pro alijs valoribus, aliam respondebis rationem. Itaque data licentia taxandi litteram t, antequam taxaveris, habes rationem O.a ad t^2 indeterminatam determinabilem." Ibid, pàg 62.

> ...per diferents valors de la lletra t, ordenats sempre en una creixent [seqüència] hi ha diferents [raons] i sempre ordenades de manera creixent [la seqüència] però sempre més petites que la raó 1/2; efectivament acostant-se sempre més a prop a la mateixa 1/2. Això és, si la pregunta pogués ser proposada per algun valor donat respondria que la raó esdevé més a prop a 1/2 que qualsevol altra raó [donada], [i] serà anomenada la mateixa raó indeterminada $O.a$ a t^2, quasi 1/2.[7]

D'aquesta manera, la raó pren diferents valors a mesura que el valor de t augmenta. A més, aquests valors són més a prop de 1/2 que qualsevol altra raó donada. La diferència entre 1/2 i la raó, la qual és determinada quan el valor de t augmenta, és així més petita que la diferència entre 1/2 i qualsevol altra raó donada.[8] El límit d'aquesta successió de raons o d'aquesta raó, en la mida en què es així determinable, és 1/2 i Mengoli denomina el limit raó quasi 1/2. La idea de "raó quasi un nombre" suggereix, encara que de manera imprecisa, el concepte modern de límit.[9]

Mengoli utilitza dues altres frases en les definicions de l'*Elementum tertium* que també requereixen una anàlisi especial.

---

[7] "pro varijs litterae t valoribus, ordinatim semper maioribus; varias, & semper ordinatim maiores esse: dimidia quidem ratione semper minores; ad ipsam verò dimidiam semper propiùs accedentes. Quod si propositae quaestione potuerit, pro quodam valore assignabili responderi ratio propior dimidiae, quàm alia quaelibet; dicetur ipsa indeterminata ratio $O.a$ a t^2, quasi dimidia."[Geo, 62]

[8] Mengoli considera la raó donada sempre diferent de 1/2.

[9] En la seva obra *Circolo* de 1672, Mengoli de nou utilitza quasi raons i explica: "Disi quasi, e volsi dire, che vadino acostandosi ad essere precisamente tali".[Cir, 49]

La primera, "*Quatenus ita determinabilis*", és traduïda aquí com "en la mida [en que és] així determinable" (o "en la mida en què es va determinant") en el sentit de " a mesura que va prenent determinacions més grans". Subratllem que Agostini tradueix les definicions deixant-se la frase *quatenus ita determinabilis*.[10] La segona, "*Raó quasi aequalitas*", deriva del concepte euclidià de raó d'igualtat. L'*aequalitas* d'una raó no és més que la igualtat dels seus termes, això és, la unitat. Mengoli utilitza el terme en aquest sentit al llarg del llibre. La *inaequalitas* d'una raó designa un nombre diferent de la unitat i així les raons *minor inaequalitas* i *maior inaequalitas* corresponen a nombres més petit i més gran que la unitat, respectivament. Donades aquestes interpretacions, Mengoli dóna les definicions següents en l'*Elementum tertium:*

1. Una raó indeterminada determinable, que en determinar-se, pot ser més gran que qualsevol [raó] donada, en la mida en què es va determinant, es dirà <u>quasi infinita</u>.
2. I si pot ser més petita que qualsevol [raó] donada, en la mida en què es va determinant, es dirà <u>quasi nul.la</u>.
3. I si pot ser més petita que qualsevol raó més gran que la igualtat; i més gran que qualsevol raó més petita que la igualtat, en la mida en què es va determinant, es dirà quasi la igualtat. O bé dit d'una altra manera, que pugui

[10] A. Agostini, "La teoria dei limiti in Pietro Mengoli", *Periodico di Matematiche,* ser 4, vol 5, 1925, p. 21. Cassina sí que tradueix i interpreta aquesta frase referida al camp d'aplicabilitat d'una funció f i als valors més petits que el límit. U. Cassina, "Storia del concetto di limite", *Periodico di Matematiche,* ser 4, 1936, p. 92.

esser més a prop de la igualtat, que qualsevol raó donada que no sigui la igualtat, en la mida en què sigui tal, es dirà quasi d'igualtat.

4. I si pot ser més petita que qualsevol raó més gran que una raó proposada; i més gran que qualsevol raó més petita que la mateixa raó proposada, en la mida en què es va determinant, es dirà quasi igual a aquesta raó. O bé d'una altra manera, que pugui ésser més a prop de qualsevol raó proposada que qualsevol altra raó que no sigui igual a aquesta, en la mida en què sigui tal, es dirà quasi igual a la raó proposada.

5. I els termes de raons quasi iguals entre sí es diran quasi proporcionals.

6. I els termes de raons que són quasi d'igualtat es diran quasi iguals.[11]

La definició sisena i última, a la llum de la definició tercera, es podria traduir així:

[11] "1. Ratio indeterminata determinabilis, quae in determinari, potest esse maior, quam data, quaelibet, quatenus ita determinabilis, dicetur, Quasi infinita." "2. Et quae potest esse minor, quàm data quaelibet, quatenus ita determinabilis, dicetur, Quasi nulla." "3. Et quae potest esse minor, quàm data quaelibet maior inaequalitas; & maior, quàm data quaelibet minor inaequalitas, quatenus ita determinabilis, dicetur, Quasi aequalitas. Vel aliter, quae potest esse propior aequalitati, quàm data quaelibet non aequalitas, quatenus talis, dicetur, Quasi aequalitas." "4. Et quae potest esse minor, quàm data quaelibet maior, proposita quadam ratione; & maior, quàm data quaelibet minor, propositâ eâdem ratione, quatenus ita determinabilis, dicetur, Quasi eadem ratio. Vel aliter, quae potest esse propior cuidam propositae rationi, quàm data quaelibet alia non eadem, quatenus talis, dicetur, Quasi eadem." "5. Et rationum quasi earundem inter se, termini dicentur, Quasi proportionales." "6. Et quasi aequalitatum, dicentur, Quasi aequales." [Geo, 97-98]

I els termes de raons que són més properes a la igualtat que qualsevol raó donada diferent de la igualtat, **en la mida en què aquestes raons es van determinant**, es diran quasi iguals.

Aquesta última traducció només difereix del lema I del llibre primer dels *Principia* de Newton[12] en què aquest parla d'un cert temps finit mentre Mengoli diu "en la mida en què es va determinant". Però ambdues definicions expressen substancialment la mateixa idea i representen els primers intents de donar una definició del concepte de límit.

Després d'aquestes sis definicions, Mengoli presenta 61 teoremes que podem separar en tres grans blocs d'acord amb el seu contingut. En els teoremes 1 al 33 demostra les propietats de les quasi proporcions, del 34 al 52 calcula quasi proporcions concretes i del 53 al 61 que els anomena problemes demostra l'existència d'un valor amb el qual pot construir potències i sumatoris de potències que "tendeixin" a raons donades .

En els sis primers teoremes, en els quals no intervenen expressions "quasi", Mengoli demostra que les propietats que verifiquen les proporcions en els *Elements* d'Euclides també es verifiquen quan es posa el signe més gran o més petit en comptes de l'igual. Mengoli fa servir els mateixos noms que Euclides amb

[12] "Quantitates, ut & quantitatum rationes, quae ad aequalitatem tempore quovis finito constanter tendunt, & ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quam pro data quavis differentia, fiunt ultimo aequales." Es traduiria per: "les quantitats, així com les raons de quantitats, que tendeixen a la igualtat constantment en un cert temps finit i abans del límit d'aquest temps s'acosten mútuament més que una diferència donada, al final es fan iguals." I. Newton, *Principia,* ed. J. Maclehose, repr. W. Thomson i H. Blackburn, Glasgow, 1821, pàg. 28.

el mateix significat. Així el Teorema 1

> Si raons desiguals unes més grans que les altres, *permutando*, es conserven més grans, també si *componendo* i si *dividendo*, són més grans.[13]

$a : b > c : d$ *permutando* $a : c > b : d$. (1)

$a : b > c : d$ *componendo* $a + b : b > c + d : d$. (1)

$a : b > c : d$ *dividendo* $a - b : b > c - d : d$. (1)

També els teoremes següents fins al sisè verifiquen propietats del llibre cinquè d'Euclides utilitzant desigualtats,

$a : b > c : d$ *convertendo* $b : a < d : c$ (2)

$a : b > c : d$ *per conversionen rationis* $a : a - b < c : c - d$. (3)

El Teorema 4 està explicat més avall[14] i el Teorema 5, que més tard utilitza en els problemes, explica que donades dues quantitats una més gran que l'altra, la seva raó (és més gran que la unitat), quant més gran sigui l'ordre de la seva potència més gran serà. O sigui:

si $a > b$ llavors $a^3 : b^3 > a^2 : b^2$ (5)

El teorema 6, expressat en termes mengolians, és

$a : b > c : d$

$a : c = e : f$ i $b : d = g : h$

---

[13]"Inaequalium rationum maior, permutando, est maior item componendo, & dividendo, est maior." Aquí Mengoli clarament es refereix, en quant al nom, a les definicions 12, 14 i 15 d'Euclides. Euclides, The Elements, Thomas Heath trad., Dover, vol. 2, Nova YorK, 1956, pp. 114-5. Pel que fa a la verificació d'aquestes propietats en les proporcions, Euclides ho fa, en l'element cinquè, en la prop. 16 (*permutando*), en la prop. 18 (*componendo*) i en la prop. 17 (*dividendo*).

[14] La verificació d'aquestes propietats en les proporcions, Euclides la fa en el llibre cinquè, en la prop. 7 (*convertendo*), en la prop. 19 (*per conversionem rationis*) i en la prop. 22 (*ex aequali*).

Llavors $e : g > f : h$ (6)

Per comprendre millor les manipulacions de les idees de Mengoli transcriurem el Teorema 4. La prova del Teorema 4 dóna un sentit de com Mengoli verifica propietats de les proporcions quan el signe de la proporció és "més gran que" o "més petit que".

Teorema 4. Proposició 4.

De raons unes més grans que les altres, fent el producte, la raó composta també serà més gran: i si [les raons] són més petites, [serà] més petita.[15]

Hipòtesi.

$a : b > c : d.$

$e : f > g ; h.$

Dic que $a : b, + e : f > c : d, + g : h.$

Preparació.

$a : b = i : d.$

$e : f = d : l.$

$g : h = d : m.$

Demostració.

constr.	$a : b = i : d$
hipote.	$a : b > c : d$
13.5	$i : d > c : d$
10.5	$i > c$
constr.	$e : f = d : l$
hipote.	$e : f > g : h$
13.5[16]	$d : l > g : h$

[15] "Ex maioribus rationibus, ex aequali, maior est ratio composita: & ex minoribus, minor." *Geo*, pàg. 100.

[16] Mengoli posa 23.5 però ja es dedueix en analitzar la demostració que és 13.5.

constr.	$g : h = d : m$
13.5	$d : l > d : m$
10.5	$l < m$
8.5	$i : l > c : m$
p. p.[17]	$a : b, + e : f = i : d, + d : l = i : l$
p. p.	$c : d, + g : h = c : d, + d : m = c : m$

$a : b, + e : f > c : d, + g : h$.*Quod &c. Quare &c.*[Geo,100]

Aquí veiem com utilitza el llibre cinquè dels *Elements* d'Euclides. Primer, de la hipòtesi i de la preparació, utilitzant les Proposicions 13[18] i 10[19] del llibre cinquè dels *Elements,* dedueix que $i > c$ i $l < m$. Després utilitzant la proposició 8[20] del llibre cinquè dues vegades, obté $i:l > c:m$. Finalment fent la composició i simplificant arriba a que:

$a:b \, . \, e:f = i:l > c:m = c:d \, . \, g:h.$

A continuació, demostra, del teorema 7 fins al 33, totes les propietats i relacions de la nova expressió quasi, basant-se en les sis definicions i en aquests sis primers teoremes. Com que ha demostrat del Teorema 1 fins al 6 que les propietats (*convertendo, componendo, per conversionem rationis,* etc..) que Euclides havia demostrat certes per proporcions, es poden aplicar

[17] "p. p." indica la proposició primera del primer element on demostra que el producte de raons iguals és igual.

[18] Algebraicament la prop. 13 del llibre cinquè diu: a:b = c:d i c:d > e:f llavors a:b > e:f. Euclides, *The elements*, Thomas Heath trad.,Dover, vol. 2, Nova York, 1956, pàg. 161.

[19] Algebraicament la prop 10 del llibre cinquè dels *Elements* diu: si i:d > c:d llavors i>c i també si d:l > d:m llavors l< m.

[20] Podríem dir que és la recíproca de la prop. 10. Diu la prop. 8 del llibre cinquè dels *Elements*: si i > c llavors i:l > c:l i també si l < m llavors c:l > c:m. Euclides, *The elements*, 1956, pp. 149-53.

a desigualtats, Mengoli estableix en els teoremes 7 al 33 que es continuaran verificant encara que la raó es faci tan gran com es vulgui (raó quasi infinita), o bé tan petita com es vulgui (raó quasi nul.la) o bé tan a prop d'una raó com es vulgui (raó quasi un nombre). Podeu veure-les en un apèndix al final d'aquest capítol.

El Teorema 8 il.lustra com Mengoli verifica la propietat *componendo* quan la raó és molt gran. La demostració de Mengoli en el Teorema 8. Proposició 8 és singular per la seva argumentació,

> Raó quasi infinita, *componendo*, és quasi infinita: també *dividendo*, és quasi infinita.[21]
>
> *Hipòtesi.*
>
> Sigui raó A a B quasi infinita.[22]
>
> Dic que *componendo* $A + B$ a B, és quasi infinita.[23]
>
> *Preparació.*
>
> Suposem qualsevol raó c a d: en la que si c és més gran, que d; l'excés sigui e.
>
> *Demostració.*
>
> Si c és igual o més petit que d, és evident, que
>
> 8.5 $A + B$ a B pot ser més gran, que c a d. Ara bé, si
>
> def.1. c és més gran que d: com que A a B, pot ser més

---

[21] "Ratio quasi infinita, componendo, est quasi infinita: item dividendo est quasi infinita." [Geo, 103]

[22] Remarquem que aquí Mengoli utilitza majúscules quan són quantitats que prenen valors i van variant i minúscules quan són quantitats donades, però més endavant quan dóna valors a la *tota* la representa amb *t*.

[23] Farem solament el primer resultat, anàlogament es demostraria l'altre.

p. h. gran que e a d : llavors *componendo*, $A + B$ a B,
prepar. pot ser més gran que $e + d$ a d : però $e + d$ és
def. 1. c, per consegüent $A + B$ a B, pot ser més gran, que c a d. Per tant $A + B$ a B, és una raó quasi infinita. *Quod &c.*[Geo, 103]

En aquesta prova, Mengoli torna utilitzar Euclides, emprant 8.5 per anar de $A + B > A$ a $A + B : B > A : B$. Això li permet argumentar, basat en la Definició 1, que des que $A : B > c : d$ llavors $A + B : B > c : d$.

En les Proposicions 53 a la 61, Mengoli demostra l'existència de nombres amb els quals pot construir raons que verifiquin les definicions de les quasi proporcions, i les anomena problemes.[24] En els problemes no s'utilitza cap expressió ni cap definició quasi. Es basen solament en els sis primers Teoremes, on Mengoli ha comprovat que es verifiquen totes les propietats de les proporcions si, en comptes del signe igual hi ha una desigualtat. Aquests problemes li serveixen a Mengoli per veure que hi ha *totes* que compleixen les definicions de les quasi proporcions i això li dóna seguretat en la seva nova teoria. Són un complement necessari per assegurar-se l'existència d'aquestes quasi raons ja que, en cas contrari, es podria pensar en una teoria ben estructurada, lògica, però no real.

El primer problema i el segon són eines per resoldre els

---

[24] Aquestes proposicions no s'anomenen teoremes sinó problemes, ja que en elles emprant relacions conegudes de nombres podem construir raons que verifiquin les definicions donades de les quasi raons. Els problemes, segons Caveign, es distingeixen dels teoremes en que, aquests constaten o donen a conèixer una propietat i en canvi, en aquells hi ha que construir per posar de manifest, això que en un cert sentit, no existeix. Introducció dels *Elements* d'Euclides, Vol I, B. Vitrac trad.,1990-1994, París PUF, Bibliothèque d'histoire des sciences, pp. 134-135.

següents. En el primer Mengoli demostra que donada una raó $a:b$ i un nombre c parell, existeix una raó $a:f$ tal que $(a:f)^c = a:b$. Per la demostració no utilitza ni expressions quasi ni cap proposició d'aquest element, fa mitjanes proporcionals i composicions de raons.[25] El problema 2 l'utilitza en el problema 6 i en el 4.

Problema 2. Proposició 54

> Donada una raó diferent de la igualtat; i proposat un nombre d'ordre de potència: trobar un nombre *[t]*, pel qual la *sesquitota* (d'aquest nombre) *[t+1]*, i la *semitota* (d'aquest nombre) *[t-1]*, elevades al mateix ordre, són entre elles properes a la igualtat.[26]

Per la demostració utilitza el resultat anterior i construeix una raó entre la *sesquitota* i la *semitota* més petita que la raó arrel del problema 1.[27] Donada $a : b = a^c : f^c$, construeixo $(t+1) : (t-1) < a : f$. Elevant els dos membres a una potència donada més petita que la potència parella $n<c$ arriba a que

$(t+1)^n : (t-1)^n < a^n : f^n < a^c : f^c = a : b$

La resta de problemes, del tercer al novè, els classificaré, segons el contingut, en dos grups. El primer grup el formen el

---

[25] Només cal prendre $f = (a^{(c-1)}.b)^{(1/c)}$.

[26] "Data ratione inaequalitatis; & proposito numero ordinis potestatum: numerum invenire, pro quo sesquitota, & semitota aequeordinatae, sunt ad invicem propiores aequalitati." [Geo, 139]

[27] En l'*Elementum secundum* en les definicions 18 i 19, explica dos nombres nous: *sesquitota* i *semitota*. Els representa amb els caràcters q i m respectivament, i el seu valor és $q = t + 1$ i $m = t - 1$, sent t *tota*, un nombre qualsevol. Geo, pàg. 23.

sisè i el novè, on demostra que donats sumatoris [quadratrius] que es troben a la mateixa base i donada una raó, podem trobar un nombre de tal manera que la raó dels sumatoris que construim s'apropin a la raó donada; en el sisè la raó entre els sumatoris s'apropa a la igualtat i en el novè a una raó qualsevol. El segon grup, format per la resta de problemes, el tercer, quart, cinquè, setè i vuitè, tracten de trobar nombres amb els quals podem construir raons més grans que una donada, expressió que defineix les raons que s'apropen a l'infinit. En aquest cas en el 3, 4 i 5 fa raons entre potències diferents de totes *(t)*, semitotes *(t-1)* i sesquitotes *(t+1)*; en el 7 i el 8 construeix raons entre sumatoris de potències i productes de potències [quadratrius] que no es troben a la mateixa base i que són més grans que una raó donada sent el grau de l'antecedent més gran que el del conseqüent. A tall d'exemple n'explicaré dos, un de cada grup, la resta de problemes es troba en l'apèndix del final del capítol.

Del primer grup he triat el problema sisè on es tracta de trobar un nombre amb el qual es poden construir sumatoris (del tipus quadratriu) que estiguin a la mateixa base o fila (o sigui que la suma dels seus exponents sigui la mateixa) i que la raó entre ells sigui més propera a la igualtat que qualsevol raó donada.

Problema 6. Proposició 58.

Donada una raó diferent de la igualtat, i donats dos sumatoris [quadratrius] que es troben a la mateixa fila [base], trobar un nombre [*t*], pel qual la raó dels sumatoris [quadratrius] proposats, sigui més propera a la igualtat que la raó donada.[28]

Veiem quin és el raonament. Donada la raó $a:b$ no igual a 1, i $a>b$, i siguin dues quadratrius c i d, en la mateixa base de la taula quadratriu, per exemple la cinquena. Trobar la *tota* per la qual la raó d'aquests sumatoris, que es construeixen a partir d'aquesta *tota* és quasi la igualtat, o sigui, segons la Definició Tercera, s'han de construir quadratrius (c i d) que la seva raó $c:d$ sigui a la vegada més gran que $b:a$ i més petita que $a:b$ i que la seva inversa $d:c$ també verifiqui les mateixes desigualtats, sabent que $a:b$ és més gran que la unitat. És a dir, en una mateixa base de la taula quadratriu, existeix un nombre (t) pel qual les quadratrius c i d es poden apropar una a l'altra, tant com es vulgui. La demostració es basa en que ambdues quadratrius són alhora més petites que una potència de la *sesquitota*, $(t+1)^6$ i més grans que una potència de la *semitota*, $(t-1)^6$, essent 5 l'ordre de la base de la quadratriu. Aquest resultat Mengoli l'havia demostrat en el Teorema 30 de l'*Elementum secundum*. Per tant la raó entre aquestes quadratrius i la inversa d'aquesta raó entre quadratrius, també és més petita que la raó

$(t+1)^6 : (t-1)^6$, i més gran que la raó $(t-1)^6 : (t+1)^6$:

$(t-1)^6 < c < (t+1)^6$ i $(t-1)^6 < d < (t+1)^6$ llavors

$(t-1)^6 : (t+1)^6 < c : d < (t+1)^6 : (t-1)^6$ i

$(t-1)^6 : (t+1)^6 < d : c < (t+1)^6 : (t-1)^6$

Però com ha demostrat en el problema 2 podem trobar una t de tal manera que aquesta última raó entre potències de la

[28]"Data ratione inaequalitatis; & propositis duabus in eadem basi iacentibus quadratricibus: numerum invenire, pro quo quadratrices propositae, sunt propiores aequalitati, quàm in data ratione." [Geo, 142]

sesquitota i *semitota* la podem construir més gran que la donada $b:a$ i més petita que la donada $a:b$; per tant, les quadratrius són més a prop de la igualtat que qualsevol raó donada.

Del segon grup he escollit el problema tercer on trobem un nombre tal que la raó entre les seves potències és més gran que una donada,

Problema 3. Proposició 55.

> Donada una raó i proposats ordres de potències desiguals, trobar un nombre [t], tal que, la raó de la potència més gran [d'aquest nombre] a la potència més petita, és més gran que la raó donada.[29]

El problema el que fa és trobar una *tota* que verifiqui l'existència d'aquesta raó més gran que una donada i, si això pensem que pot passar, sempre que anem donant valors a aquest nombre, voldrà dir que aquesta raó és quasi infinita. El procediment de Mengoli és considerar la successió de potències cúbiques més grans que 1 o sigui: 8, 27, 64, 125,.... Donada una raó qualsevol sempre trobarem una raó d'una potència cúbica a la unitat més gran que la raó donada. Com que el que volem comparar és una potència cinquena (el cinc és un valor donat) amb una potència segona (el dos també és un valor donat), hem trobat una base d'una potència cúbica de manera que, la raó de la potència cinquena a la potència segona d'aquesta base, continuarà sent més gran que la raó donada i així queda demostrat el problema. Si les potències cinquena i segona són unes altres considerarem una

[29] "Data ratione; & propositis ordinibus potestatum inaequalibus: numerum invenire, pro quo, plus ordinata potestas, ad minùs ordinatam, maior est, quàm in data ratione."[Geo, 140]

altra successió de potències quadrades, quartes, quintes, etc.. de manera que en elevar les dues s'obtingui aquesta relació. Tornem a veure que el trobar aquesta raó més gran que una donada és independent de cap propietat de l'expressió quasi una raó.

3 Càlculs de quasi proporcions.

Després d'haver definit les quasi raons i d'haver demostrat les seves propietats, del Teorema 34 i fins al 52, Mengoli es dedica a calcular els quasi un nombre, quasi infinit,... associats a un nombre *t* que va augmentant el seu valor emprant els resultats anteriors. Podríem pensar que calcula a què tendeixen, en augmentar la base, les raons de polinomis, depenent del grau del numerador i del denominador. Mengoli calcula la primera quasi raó en el Teorema 34 el qual a primer cop d'ull sembla elemental, encara que no ho és. A partir d'aquest teorema canvia totalment el contingut de l'*Elementum tertium* ja que Mengoli prenent-lo com a fonament calcula tot tipus de quasi proporcions,

Teorema 34. Proposició 34.

La raó de *tota* a la unitat, és quasi infinita.[30]

Sense hipòtesi ni preparació, la demostració diu:

> Pel que fa a *tota*, com que no es diu quin nombre és, *tota* és indeterminat, i per això la raó de *tota* a la unitat és indeterminada. Però com que aquest [nombre] és

---

[30] "Tota ad unitatem, quasi est infinita." Geo, 125.

determinable, podríem dir quin nombre és *tota*, i per això la raó de la *tota* a la unitat és determinable. Finalment, com que podríem dir que aquest nombre *tota* és més gran que la raó d'un nombre a la unitat, que sigui qualsevol raó donada, aquest nombre, que és la *tota*, serà la raó de la *tota* a la unitat i serà més gran que qualsevol raó donada. Així doncs la raó de la *tota* a la unitat, és quasi infinita.[31]

Per tant, Mengoli suposa que com que la *tota* és indeterminada, sempre pot trobar un valor de la *tota* que sigui més gran que una raó donada, i així la raó de la *tota* a la unitat (que no és més que ella mateixa) podria ser més gran que qualsevol raó donada. Així, per la Definició 1, pot dir que aquesta raó és quasi infinita. Actualment diríem que si un nombre positiu va augmentant cap a l'infinit, la raó d'aquest nombre a la unitat tendeix a infinit o,

$$\lim_{t\to\infty} \left[\frac{t}{1}\right] = \infty$$

El Teorema 34 és esencial pels càlculs de les quasi raons ja que totes les altres són deduïdes d'aquest. Per ser més precísos, Mengoli demostra els següents teoremes:

Teorema 35. Les raons *(t-1):1* i *(t+1):1* són quasi

---

[31] "Nam tota, cum non dicatur, cuius numeri tota sit; est indeterminata: ideoque totae ad unitatem, ratio est indeterminata. Cumque possit dici, cuius numeri tota sit; est determinabilis: ideoque totae ad unitatem, ratio est determinabilis. Cum denique possit dici eius numeri tota, qui maior sit, quàm vt ad unitatem, habeat quamlibet rationem datam; qui numerus, ipsa sui ipsius est tota: erit ratio totae ad unitatem, maior, quàm data quaelibet. Ergo tota ad unitatem, quasi est infinita." Ibid, pp. 125-6.

infinites.[Geo, 126]

Teorema 36. Les raons $t:(t-1)$, $t:(t+1)$, $(t-1):(t+1)$ són quasi iguals.[Geo, 126]

Teorema 37. Les raons $t^m:1$, $(t-1)^m:1$, $(t+1)^m:1$ són quasi infinites.[Geo, 127]

Més interessant és el teorema 38 que podríem entendre com: "la raó entre les dues potències d'un nombre que tendeix a infinit, sent el grau del numerador més gran, tendeix a infinit." o bé com una comparació entre infinits de diferent ordre,

Teorema 38. Proposició 38.

De *totes* ordenades desiguals, la raó de la que té l'ordre més gran a la que té l'ordre més petit, és quasi infinita.[32]

Hipòtesi.

$t^5 > t^3$

Dic $t^5 : t^3$ *quasi* infinita.

Demostració.

34.h	$t : u$ *quasi* infinita.
def. 6. p.	$t^5 : t^4 = t : u.$
def. 6. p.	$t^4 : t^3 = t : u.$
13.5	$t^5 : t^4$ *quasi* infinita.
13.5	$t^4 : t^3$ *quasi* infinita.
12.h	$t^5 : t^3$ *quasi* infinita. *Quod &c.*

Analitzarem les passes de la demostració. Parteix del teorema 34 abans esmentat. On posa definició 6. p. es refereix a la Definició sisena de l'*Elementum primum*, en el qual defineix les

[32] "Totarum inaequaliter ordinatarum, magis ordinata, ad minùs ordinatam, quasi est infinita." [Geo, 127]

potències ordenades com raons de t a la unitat. És a dir, $t^3 : t^2 = t : u$ i així successivament. Per tant, el segon i el tercer pas són evidents. En el quart i cinquè pas utilitza la proposició 13 del llibre cinquè dels *Elements* d'Euclides, que algebraicament seria:

si $a : b = c : d$ i $c : d > e : f$, llavors
$a : b > e : f$.

Comparem-ho amb la hipòtesi que utilitza Mengoli per aplicar aquesta proposició d'Euclides. Algebraicament, el que fa Mengoli és:

si $t^5 : t^4 = t : u$ i $t : u$ *quasi* infinita, llavors
$t^5 : t^4$ *quasi* infinita. Recordem que u representa la unitat.

De fet Mengoli pensa que, en haver demostrat (teorema 34) que $t : u$ és quasi infinita, pot dir (Definició 1) que, en determinar-se, pot ser més gran que una raó qualsevol donada; llavors, aplicant la proposició 13.5 cada vegada, $t^5 : t^4$ també pot ser més gran que aquesta raó qualsevol donada; per tant $t^5 : t^4$ és quasi infinita. Aquí es veu com Mengoli passa de la desigualtat (més gran) al concepte quasi. Per tant, la idea de Mengoli és veure com es verifiquen totes les propietats i relacions de les desigualtats, quan la raó es fa molt gran, tan gran com puguem. L'últim pas en el qual aplica el teorema 12, és fer la composició de raons quasi infinites.

El següent teorema és conseqüència directa de l'anterior i s'expressa com:

Teorema 39. Les raons $t^m:(t-1)^m, t^m:(t+1)^m, (t-1)^m:(t+1)^m$ són quasi iguals.[Geo, 128]

També es dedueix fàcilment el 40, en el qual el denominador no és un sol nombre, sinó una suma de *totes* elevades a exponents més petits que el del numerador,

Teorema 40. Amb $m > n$,la raó

$$t^m : \sum_{n<m} t^n \text{ és quasi infinita}$$

Evidentment, la raó és com la de dos polinomis on el grau del numerador és més gran que el denominador i per tant és quasi infinita.

En el Teorema 41, Mengoli igual que Roberval i Wallis diu que potències més petites poden ser ignorades en augmentar *t*.[33] Mengoli prova aquest resultat només a partir de les propietats de les quasi raons:

Teorema 41. Proposició 41.

La *tota* elevada a exponents més gran i la mateixa [*tota*] sumada amb altres *totes* elevades a exponents més petits, o bé restades, són quasi iguals.[34]

Hipòtesi.

La *tota* elevada a l'exponent més gran és *A:* les altres *totes* sumades, elevades a exponents més petits, són *B* i les [*totes*] restades són *C*.

[33] Per Roberval, vegeu Auger, *Un savant méconnu: Gilles Personne de Roberval (1602-1675)*, París: Blanchard, 1962, pàg. 19 i Walker, *A Study of the Traité des Indivisibles of... Roberval*, Nova York: Columbia Univ Press, 1986, pàg. 172. Per Wallis, vegeu *Arithmetica Infinitorum*, pp. 382-384 i Scott, *The mathematical work of John Wallis, D. D., F. R. S. (1616-1703)*, Nova York: Chelsea, 1981, pàg. 32.

[34] "Tota magis ordinata, sibi ipsi, & alijs minùs ordinatis, additis, vel subtractis, quasi est aequalis." [Geo, 129]

Dic que *A, A + B, A - C, A + B - C,* són quasi iguals.[35]

Demostració.

40.h *A:B* és quasi infinita.

8.h *A+B:B* és quasi infinita (*componendo*).

9.h *A+B:A* és quasi igual (*per conversionem rationis*).

Quod &c.

Mengoli va demostrar les altres igualtats de la mateixa manera, basant les seves proves en el Teorema 9 on *per conversionem rationis*, si *E:F* és quasi infinita llavors *E:E-F* és quasi igual.[36] Des que la raó *E : F* és quasi infinita, per la Definició 1, pot ser més gran que qualsevol raó donada, és a dir, *c : c-d*. Pel Teorema 3, les raons més grans unes que les altres esdevenen *per conversionem rationis* més petites unes que les altres. Llavors *per conversionem rationis*, *E : E-F* pot ser més petita que la raó *c : d,* la qual havia sigut triada més gran que la igualtat; és a dir, *E : E - F* pot ser més a prop de la igualtat que qualsevol altra raó donada diferent de la igualtat. Llavors, de la Definició 3, *E : E - F* és una raó de quasi la igualtat.

Així Mengoli estableix raons entre tot tipus de sumatoris, quadratrius, subquadratrius,...i el nombre *t*. (Recordem que aquests són tots formats utilitzant *t* i que aquests sumatoris tenen *t - 1* sumands amb diferents exponents). Mengoli calcula a què tendeixen aquestes raons quan el nombre es fa molt gran,

---

[35] "Tota vel semitota, vel sesquitota magis ordinata esto *A*: quacum additae minùs ordinatae, sunto *B*: & subtractae *C*. Dico *A, A + B, A - C, A + B - C,* quasi aequales esse." [Geo, 129]

[36] Una raó *a:b* esdevé *per conversionem rationis a:a-b*. En el Teorema 41, una raó *A + B : B* quasi infinita esdevé *per conversionem rationis A + B : A* quasi igual.

obtenint d'aquesta manera totes les quasi raons possibles.[37] Tot seguit analitzarem el Teorema 42 que és molt important ja que aquest resultat és el que utilitza Mengoli en l'*Elementum sextum* per trobar les quadratures de les infinites paràboles. Aquesta quasi raó va ser demostrada per molts matemàtics de l'època intuïtivament o bé donant valors ja que els hi era necessària per trobar les quadratures de les figures, com explicarem més avall. Mengoli també la demostra però com hem vist prèviament ha construït una teoria nova, les quasi proporcions, que fonamenti els seus raonaments.

Teorema 42. Proposició 42.

Qualsevol quadratriu[38]

[37] En el Teorema 43 Mengoli explica a quin valor s'apropara la raó, si l'antecedent és la quadratriu, i el conseqüent el nombre (*tota*) elevat a un exponent no més gran que l'ordre de la base on es troba la quadratriu, utilitzant el Teorema 38, la raó, en determinar-se, serà quasi infinita. Els Teoremes 47 i 48 ens diuen que les quadratrius i les subquadratrius són quasi iguals, quan les prenem en la mateixa base (mateixa fila). Això és evident ja que tenen el mateix grau. I continua comparant els graus en els Teoremes 49 i 50. En aquests casos, considerats en bases diferents i sent el numerador en grau més gran que el denominador. La raó continua sent quasi infinita, tant si és una quadratriu (49), com si és un sumatori sense coeficients, massa (50). Menció apart, mereixen els Teoremes 51 i 52 que es refereixen a la taula especiosa i a les raons entre les espècies. Si per formar la taula subquadratriu hem de multiplicar els sumatoris de la taula especiosa pels nombres de la taula de nombres combinatoris, *multiplicium,* i les subquadratrius són quasi iguals entre sí en la mateixa base (Teorema 48), llavors els sumatoris seran quasi inversament proporcionals a aquests nombres.

[38] Recordem que la taula quadratriu (veure figura 5 del capítol anterior) és la que s'obté amb els sumatoris de les parts separades d'un mateix nombre, ordenats segons la taula dels noms (subquadratrius), multiplicats per un nombre, $p + 1$, una unitat més gran que el que sigui el nombre d'ordre de la seva base p.

$$[m+1]\sum_{a=1}^{t-1}\binom{m}{n}.a^{n}.[t-a]^{m-n}$$

és quasi igual a la *tota* elevada a una unitat més gran que l'ordre de la base on es troba la quadratriu.[39]

Hipòtesi.

A és la quadratriu i sigui *B* *tota* elevada una unitat més gran que l'ordre de la base de la quadratriu *A*.

Dic que *A* i *B*, són quasi iguals.[40]

Demostració.

22.2 *A* és igual a *B*, menys la suma d'altres *totes*, elevades a exponents més petits o iguals que l'ordre de la base on es troba *A* [segons el teorema 22 demostrat en el capítol anterior].[41]

Hipot. Però *B* és la *tota* elevada a un exponent que és una unitat més gran que l'ordre de la base de *A*, i per això les *totes* elevades a exponents més petits que l'ordre de la base de *A*, estan elevades a exponents més petits que l'exponent de *B*. Resultant que *A* és igual a *B*, menys la suma

41.h d'altres *totes*, elevades a menys ordre que *B*. Però *B*, menys la suma d'altres *totes* elevades a

[39] "Quaelibet quadratrix quasi est aequalis ad totam unitate plus ordinatam, quàm sit eius basis." [Geo, 130]

[40] "Esto quadratrix A : & esto tota B, unitate plus ordinata, quàm basis quadratricis A.Dico A ad B, quasi aequalem esse." [Geo, 130]

[41] Recordem que Mengoli considera el vèrtex de la taula quadratriu d'ordre zero, la primera fila d'ordre u i l'anomena base primera, la segona d'ordre dos i l'anomena base segona, i així successivament amb totes les files o bases.

menys ordre que B, és quasi igual a B.

18.h En conseqüència, A és quasi igual a B. *Quod &c.*[42]

Analitzant aquesta demostració veiem que es basa en el Teorema 22 de l'*Elementum secundum* i en el Teorema 41. El Teorema 18 només es fa servir com a transitiva. La primera t està elevada a un ordre una unitat més gran que el de la seva base ($m+1$) i l'anomena B. A és la quadratriu en la base m i $P(t^m)$ és un polinomi de grau més petit o igual que m. Llavors, pel teorema 22,

$$A = B-P(t^m),$$

però, pel Teorema 41,

$$B \textit{ is quasi equal } B-P(t^m),$$

i llavors aplicant el Teorema 18 (transitiva) dóna que A és quasi igual a B. En notació actual aquest resultat s'expressa com

$$[m+1]\sum_{a=1}^{t-1}\binom{m}{n}.a^n.[t-a]^{m-n}$$

tendeix a t^{m+1}, quan t tendeix a infinit, ja que el valor de l'exponent més gran de t és sempre una unitat més gran que l'ordre de la base on es troba. En fer la quasi raó del sumatori i de la potència de t tendirà a la unitat.

Considerant només les quadratrius del lateral de la taula quadratriu (figura 5 del capítol anterior), això és, $O.a^m$,

---

[42] "A, est aequalis ipsi B, demptis, additisque aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quàm basis A. Sed B, est tota unitate plus ordinata, quàm basis A: ideòque totae, non plus ordinate, quàm basis A, sunt minùs ordinatae, quàm B. Ergo A; est aequalis ipsi B, demptis, additisque aliqualiter acceptis totis, minùs ordinatis, quàm B. Sed & B, demptis, additisque aliqualiter acceptis totis, minùs ordinatis, quàm B, quasi est aequalis ipsi B. Ergo A, quasi est aequalis ipsi B. Quod & c." Geo, 130.

aquesta quasi raó és reminiscent de l'equació

$$\lim \frac{\sum_{a=1}^{a=t} a^m}{t^{m+1}} = \frac{1}{m+1}$$

quan t tendeix a infinit. Roberval i Wallis van anunciar resultats similars pels casos m= 1, 2, i 3, dels quals s'infereix la validesa de la llei general.[43] En relació amb aquesta demostració, Roberval en el seu *Traité des indivisibles* (1634, publicat el 1693), argumentava que

$$1+2+3+\ldots.+t=(1/2)\,t^2+(1/2)\,t$$

i que l'últim terme podia ser ignorat quan t és molt gran. Argumentava de la mateixa manera en relació a la suma de quadrats

$$1^2+2^2+\ldots..+t^2=(1/3)\,t^3+(1/2)\,t^2+(1/6)\,t,$$

afirmant que els dos últims termes podien ser ignorats quan t és molt gran. Roberval no va donar cap tipus de justificació o prova matemàtica d'aquestes afirmacions, però només va verificar que eren veritat donant valors i presentant exemples geomètrics tals com triangles o cubs. Igualment, en la seva discussió de la raó

$$\frac{0^2+1^2+3^2+\ldots\ldots.+t^2}{t^2+t^2+t^2+\ldots\ldots..+t^2},$$

[43] Vegeu per Roberval, Walker, *A Study of the Traité des Indivisibles of... Roberval*, Nova York: Columbia Univ. Press, 1986, pp. 171-173 i Auger, *Un savant méconnu: Gilles Personne de Roberval(1602-1675)* París: Blanchard, 1962, pp. 19-20 i per Wallis, vegeu *Arithmetica Infinitorum*, pp. 382-384 i Scott, *The Mathematical Work of John Wallis, D. D., F. R. S. (1616-1703)*, Nova York: Chelsea, 1981, pp. 32-34.

Wallis va concloure "que la raó buscada era més gran que 1/3, i que l'excés sobre 1/3 disminueix a mesura que el nombre de termes que constitueixen les sèries augmenta". Ambdós Roberval i Wallis van utilitzar directament aquests resultats per trobar àrees. Mengoli, en contradicció, no va verificar aquests sumatoris donant valors o presentant exemples geomètrics. Les diferències entre el treball de Roberval i Wallis per una banda i Mengoli per l'altra són 1) Roberval i Wallis fan els càlculs només per m petit, mentre Mengoli considera m, qualsevol nombre natural; i 2) Roberval i Wallis sumen t termes, mentre Mengoli suma només $t-1$ termes. Tanmateix, pel que fa a aquest segon punt, en el límit els resultats són els mateixos ja que les potències de graus més petits són ignorades.

Cavalieri, en la *Proposition XXIII* de l'*Exercitatione quarta* també va probar aquest resultat general geomètricament, i Mengoli clarament coneixia aquest treball del seu mestre molt bé.[44] Pascal i Fermat van deduir aquest resultat directament de la suma de potències, analitzada en el capítol anterior, i van mencionar la seva utilitat per fer quadratures. També Mengoli en la seva demostració utilitza el Teorema 22 que expressa la suma de potències en general, però Mengoli havia demostrat el Teorema 22 i a més ha establert la nova teoria de quasi proporcions per justificar el resultat, que per descomptat ja coneixia. Quan en el Teorema 42, Mengoli calcula que la quadratriu i el nombre t elevat a una unitat més gran que la base de la quadratriu són

[44] Vegeu Cavalieri, *Exercitationes geometricae sex*, Bolonya, 1647, pàg. 279 i també Bosmans, "Un chapitre de l'oeuvre de Cavalieri", *Mathesis* 36 (1922), pàg. 450 i Struik, *A source Book in Mathematics, 1200-1800*, Cambridge, Mass: Harvard University Press, 1969, pàg. 217.

quasi iguals, hom pensa que, com altres matemàtics, Mengoli farà servir directament aquesta quasi igualtat per calcular l'àrea de la corba associada a la quadratriu. Però no és així. Mengoli no intenta trobar l'àrea d'aquesta figura directament, per mig del valor del sumatori quan el nombre de línies o rectangles es fa molt gran i en aquest sentit s'estalvia els problemes que va tenir Cavalieri per justificar si "totes les línies" són la figura o no. Mengoli, a diferència de Cavalieri, no compara mai dues figures mitjançant la comparació de les línies ni fa mai superposició de figures, però sí que estableix quasi raons entre figures com veurem en el capítol següent.

4 Conclusions.

La gran originalitat de Mengoli és establir aquesta nova teoria numèrica, la qual incorpora la nova idea de quasi raó que fa possible calcular límits i a més fer quadratures. Mengoli ja qualifica aquesta teoria que anomena de quasi proporcions com desconeguda, hàbil i molt útil.

Còm estableix aquesta teoria? Mengoli comença construint i calculant uns sumatoris que expressen la suma finita dels $t-1$ primers nombres, de potències d'aquests nombres i fins i tot de producte de potències d'aquests nombres. Tot seguit utilitza la original idea de quasi raó per estudiar el valor de les raons d'aquests sumatoris quan el nombre de termes de la suma "augmenta". I una vegada més no ho fa donant valors sinó que per convertir aquestes raons en quasi raons comprova a què tendeixen els diferents resultats de la raó quan els termes es fan molt grans i dóna unes definicions on anomena quasi raó als valors als quals tendeixen les raons entre sumatoris i nombres, quan el nombre de sumands es fa molt gran o quan els nombres es fan molt grans. Després de les definicions vol comprovar que les propietats que verifiquen les raons en el llibre V dels *Elements* d'Euclides també les verifiquen les quasi raons tot i sent conceptes nous. Per això, primer comprova totes les propietats de les proporcions quan en comptes del signe igual hi ha una desigualtat.(Prop. 1 a la 6). I basant- se en aquestes proposicions i les definicions anteriors, també comprova que les propietats de les proporcions es verifiquin a les quasi proporcions.(De la prop. 7 a la 33). Però, Mengoli va més enllà i estableix quasi raons entre els sumatoris i el nombre una unitat més gran que l'últim sumand, o bé entre els sumatoris i potències d'aquest nombre, etc., quan aquest nombre es fa molt gran, calculant així totes les quasi raons possibles (de la prop. 34 a la 52). A més a més, en els nou problemes del final (de la prop. 52 a la 61), demostra que existeixen nombres amb els quals pot construir raons que verifiquin les definicions d'aquestes quasi raons i així arrodoneix la seva teoria.

Aquesta teoria de quasi proporcions no comporta cap identificació geomètrica, ni calculística i juga amb variables que es fan grans a mesura que augmenta el nombre de termes de la suma. En fer les quasi proporcions Mengoli no usa mai l'expressió "en l'infinit" o quan el nombre "es faci infinit" i en canvi utilitza l'expressió "pot ser més gran que una raó donada".

Mengoli no té por a l'infinit i l'utilitza contínuament, ja en la seva primera obra *Novae* quan diu, "Quantitats disposades en infinit i sumades" o bé "compostes en infinit" o bé "s'anul.lin en l'infinit".[45] Aquestes expressions les utilitza per calcular les sumes de sèries infinites. Aquí també ho fa quan defineix la raó quasi infinita, o quan calcula la raó "*Tota ad unitatem quasi est infinita*", o més endavant quan fa la suma infinita d'àrees per trobar una nova àrea, i en fi, quan fa fitacions del producte infinit per trobar la quadratura del cercle. Per Mengoli l'infinit és un element més dins la seva matemàtica i opera amb ell fàcilment. Podríem pensar que l'infinit de Mengoli és potencial, en el sentit que comprova a què tendeix una expressió quan el nombre creix indefinidament però és possible que Mengoli, sense dir-ho, tingui la idea d'un infinit actual, ja que, com hem vist, compara infinits de diferent ordre, suma infinits, etc. Mengoli tampoc parla mai de dimensions. En canvi, quan fa les quasi proporcions menysprea tots els termes d'una potència menys, la qual cosa fa que es pugui identificar el límit calculat pels matemàtics de l'època amb la quasi raó del teorema 42 de l'*Elementum tertium*. També quan fa raons entre expressions de diferent grau demostra que si l'antecedent té grau més gran, la raó es farà quasi infinita i si els graus són iguals la raó es farà de quasi igualtat.

Aquesta nova teoria de quasi proporcions, conjuntament amb les taules triangulars són les dues eines fonamentals de la

---

[45] "Unitates denominatae planis omnium numerorum ab unitati in infinitum disposita" [Novae, 21], "pro infinita extensione", "quantitates decrescentes in infinitum evanescunt"[Prefaci, 2 s.n.]

matemàtica de Mengoli. Mengoli, com hem vist, utilitza les taules triangulars i l'Algebra de Viète per generalitzar els seus resultats. Així quan diu que les raons entre quadratrius col.locades en bases diferents, sent l'antecedent la quadratriu d'ordre més gran, són quasi infinites, està donant, alhora, el resultat per infinits sumatoris amb qualsevol exponent natural. En estar representats els sumatoris per lletres i en estar col.locats a les taules triangulars, les variables que calcula (són infinites) no depenen de valors concrets.

Com veurem, Mengoli va aplicar les quasi proporcions i les taules triangulars a la geometria, per a demostrar que totes les àrees de figures limitades per corbes del tipus

$$y = (m+1)\binom{m}{n} \cdot x^n \cdot (1-x)^{m-n},$$

amb m i n naturals, i l'àrea del quadrat de costat 1 són iguals. Mengoli va fer-ho en un moment en què els mètode geomètrics eren encara dominants i pocs matemàtics introduïen elements algebraics per fer geometria.

APÈNDIX. Més propietats de les quasi proporcions.

Podríem fer dos grups de proposicions on Mengoli dóna les propietats: de la 7 a la 17, que parteixen d'una raó "que tendeix a una quantitat", sigui infinita, nul.la o la igualtat i de la 19 a la 30 que parteixen de "raons que tendeixen a la mateixa raó o quantitat".

En el primer grup, parteix de raons que són quasi infinites o quasi zero o quasi la igualtat (suposa que existeixen), i demostra el que passa quan apliquem les propietats que havia demostrat Euclides a aquestes raons.

Proposició 7.

A : B és quasi infinita invertendo [convertendo] B : A és *quasi nul.la.* [46]

Proposició 8.

A : B és quasi infinita componendo A+B : B és quasi infinita.

A : B és quasi infinita dividendo A-B : B és quasi infinita.

Proposició 9.

A : B és quasi infinita per conversionem rationis A : A-B és quasi la igualtat.

Proposició 10.

A : B és quasi nul.la invertendo B : A és quasi infinita.

Proposició 11.

A : B és quasi nul.la componendo A+B : B és quasi la igualtat.

---

[46] Mengoli diu *convertendo* però correspon a la propietat *invertendo* d'Euclides.