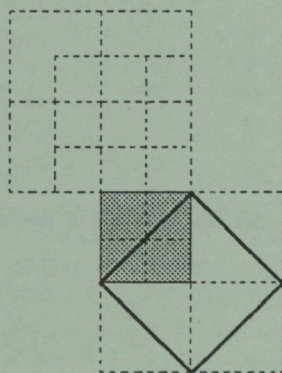


Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales en la resolución de problemas de matemáticas



Tesis doctoral de Pedro Cobo Lozano
Dirigida por el Dr. Josep M. Fortuny

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals de
la **Universitat Autònoma de Barcelona**

Enero de 1998

**ANÁLISIS DE LOS PROCESOS COGNITIVOS Y DE LAS
INTERACCIONES SOCIALES ENTRE ALUMNOS (16-17) EN LA
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE COMPARAN ÁREAS DE
SUPERFICIES PLANAS. UN ESTUDIO DE CASOS**

Tesis doctoral de Pedro Cobo Lozano
Dirigida por el Dr. Josep M. Fortuny

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals de
la Universitat Autònoma de Barcelona

Enero de 1998

¡Ojalá Raúl y Albert mantengan siempre su interés por la práctica del deporte, de la lectura, de la música y de las matemáticas! A ellos y a Mari dedico este trabajo.

ÍNDICE

Agradecimientos.....	11
INTRODUCCIÓN	13
CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA	
1.1. Planteamiento del problema	15
1.2. ¿Qué tipo de problemas utilizamos?	16
1.3. Ámbito de estudio	18
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO	
2.1. Dimensiones y antecedentes de la investigación	19
2.2. Interacciones entre alumnos en la resolución de problemas por parejas.....	22
2.2.1. Las unidades dialogales	22
2.2.1.1. Intervención	23
2.2.1.2. Intercambio	23
2.2.1.3. Interacción	23
2.2.2. Dimensión interlocutiva del discurso	24
2.2.3. Tipología de intercambios	27
2.2.3.1. Intercambios de una intervención	27
2.2.3.2. Intercambios de dos intervenciones	28
2.2.3.3. Intercambios de tres intervenciones	31
2.2.3.4. Otros tipos de intercambios	34
2.3. Aproximación al concepto de metacognición	36
2.4. Base de conocimientos.....	39
2.4.1. Sobre los conocimientos factuales y conceptuales. Aspectos generales y específicos	39
2.4.2. Sobre los conocimientos procedimentales. Aspectos generales y específicos	43
2.4.3. Oportunidades de aprendizaje	47
2.5. Actividades cognitivas	50
2.5.1. Problemas y ejercicios. Caracterización y clasificación	50
2.5.2. Espacio básico de un problema	51
2.5.3. Proceso de resolución de problemas.	52
CAPÍTULO 3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN	
3.1. Concreción de los objetivos de la investigación	53
3.2. Sobre la metodología a seguir	54
3.2.1. Recogida de datos escritos	56
3.2.2. Técnica de recogida de datos orales. Análisis de protocolos	57
3.3. Contexto experimental	58

3.4. Normas de transcripción de protocolos audiovisuales	60
3.5. Esquemas de análisis de los datos orales	61
3.5.1. Identificación de intercambios	62
3.5.2. Partición del protocolo en episodios	62
3.5.3. Análisis microscópico de cada episodio	67
3.5.4. Visión general del proceso de resolución	69

CAPÍTULO 4. CARACTERIZACIÓN DE LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS IMPLICADOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE COMPARAN ÁREAS DE SUPERFICIES PLANAS (PCASP).

4.1. Introducción	73
4.2. Delimitación de los PCASP	75
4.3. Contenidos matemáticos relacionados con aspectos geométricos de la comparación de áreas	76
4.3.1. Congruencia de figuras planas	76
4.3.2. Equivalencia geométrica de figuras planas	78
4.3.2.1. Equivalencia por descomposición.....	79
4.3.2.2. Equivalencia por complemento	81
4.3.2.3. Comparación por descomposición de polígonos en diferentes unidades de medida. Utilización de geoplanos de mallas poligonales	83
4.4. Contenidos matemáticos relacionados con aspectos aritméticos de la comparación de áreas	83
4.4.1. Equivalencia aritmética. Aplicación de fórmulas de áreas de figuras geométricas u otras relaciones métricas	84
4.4.1.1. Aplicación de fórmulas	84
4.4.1.2. Cuadratura de polígonos	86
4.4.1.3. Otras relaciones métricas	86
4.4.2. Reducción de la comparación de superficies a la de magnitudes longitudinales	87
4.4.2.1. Reducción de polígonos cualesquiera a rectángulos estándares equivalentes	87
4.4.2.2. Semejanza de polígonos	90
4.5. Mapa conceptual de los contenidos matemáticos implicados en los PCASP	91

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS DE LOS PROBLEMAS SELECCIONADOS

5.1. Introducción	93
5.2. Esquema de trabajo para identificar los contenidos matemáticos involucrados en la resolución de problemas	94
5.3. Presentación de problemas e identificación de sus contenidos matemáticos	95
5.3.1. Problema del paralelogramo	96
5.3.2. Problema del hexágono	101
5.3.3. Problema del triángulo	106

5.3.4. Problema del cuadrado	110
------------------------------------	-----

CAPÍTULO 6. SOBRE LA VALORACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS IMPLICADOS EN LA RESOLUCIÓN DE LOS PCASP

6.1. Introducción	117
6.2. Antecedentes sobre técnicas de evaluación de conocimientos implicados en los procesos de resolución de problemas. Técnicas de evaluación de los trabajos escritos.....	117
6.2.1. Sobre la evaluación de conocimientos conceptuales	119
6.2.2. Sobre la evaluación de conocimientos procedimentales	120
6.3. Presentación de las pruebas.....	122
6.3.1. Ítem 1	123
6.3.1.1. Presentación del ítem	123
6.3.1.2. Contenidos matemáticos que involucra	124
6.3.1.3. Criterios de valoración y categorización de los cono- cimientos	126
6.3.2. Ítem 2	128
6.3.2.1. Presentación del ítem	128
6.3.2.2. Contenidos matemáticos involucrados	129
6.3.2.3. Criterios de valoración y categorización de los cono- cimientos	129
6.3.3. Ítem 3	130
6.3.3.1. Presentación del ítem	131
6.3.3.2. Contenidos matemáticos involucrados	131
6.3.3.3. Criterios de valoración y categorización.....	132
6.3.4. Ítem 4	134
6.3.4.1. Presentación del ítem	134
6.3.4.2. Contenidos matemáticos que involucra	134
6.3.4.3. Criterios de valoración y categorización de los cono- cimientos	135
6.3.5. Ítem 5	137
6.3.5.1. Presentación del ítem	137
6.3.5.2. Contenidos matemáticos que involucra	138
6.3.5.3. Criterios de valoración y categorización de los cono- cimientos	138
6.3.6. Ítem 6	140
6.3.6.1. Presentación del ítem	140
6.3.6.2. Contenidos matemáticos que involucra	141
6.3.6.3. Criterios de valoración y categorización de los cono- cimientos	141
6.3.7. Ítem 7	141
6.3.7.1. Presentación del ítem	142
6.3.7.2. Contenidos matemáticos que involucra	143
6.3.7.3. Criterios de valoración y categorización de los cono- cimientos	144
6.3.8. Presentación de los ítems 8, 9 y 10.....	146
6.3.9. Problemas 8A y 8B.	146

6.3.9.1. Enunciados	147
6.3.9.2. Identificación de enfoques	147
6.3.10. Problemas 9A y 9B	150
6.3.10.1. Enunciados	150
6.3.10.2. Identificación de enfoques	150
6.3.11. Problema 10	153
6.3.11.1. Enunciado	154
6.3.11.2. Identificación de enfoques	154
6.3.12. Criterios de valoración	154

CAPÍTULO 7. CARACTERÍSTICAS COGNITIVAS DE LOS ALUMNOS

7.1. Introducción	157
7.2. El caso de Rosa y Anna.....	157
7.2.1. Respuestas de Rosa y Anna a la prueba inicial. Niveles de conocimiento.....	158
7.2.1.1. Análisis de las respuestas de Rosa a la prueba inicial.....	160
7.2.1.2. Análisis de las respuestas de Anna a la prueba inicial.....	163
7.3. El caso de Laia y Jaume.....	165
7.3.1. Respuestas de Laia y Jaume a la prueba inicial. Niveles de conocimiento.....	165
7.3.1.1. Análisis de las respuestas de Laia a la prueba inicial.....	167
7.3.1.2. Análisis de las respuestas de Jaume a la prueba inicial.....	170
7.4. El caso de Pere y Lluís.....	173
7.4.1. Respuestas de Pere y Lluís a la prueba inicial. Niveles de conocimiento.....	174
7.4.1.1. Análisis de las respuestas de Pere a la prueba inicial.....	176
7.4.1.2. Análisis de las respuestas de Lluís a la prueba inicial.....	178
7.5. Resumen de las características de los alumnos.....	181

CAPÍTULO 8. ANÁLISIS DE LOS PROCESOS DE RESOLUCIÓN

8.1. Introducción.....	183
8.2. Análisis de los procesos de resolución de Rosa y Anna.....	183
8.2.1. Actuación de Rosa y Anna en la resolución del problema del paralelogramo.....	183
8.2.1.1. Transcripción del proceso de resolución.....	183
8.2.1.2. Microanálisis del proceso de resolución.....	188
8.2.1.3. Características generales del proceso de resolución.....	194
8.2.2. Actuación de Rosa y Anna en la resolución del problema del hexágono.....	200
8.2.2.1. Transcripción del proceso de resolución.....	200
8.2.2.2. Microanálisis del proceso de resolución.....	202
8.2.2.3. Características generales del proceso de resolución	205
8.2.3. Actuación de Rosa y Anna en la resolución del problema del triángulo.....	208
8.2.3.1. Transcripción del proceso de resolución.....	208
8.2.3.2. Microanálisis del proceso de resolución.....	212

8.2.3.3. Características generales del proceso de resolución.....	218
8.2.4. Actuación de Rosa y Anna en la resolución del problema del cuadrado.....	223
8.2.4.1. Transcripción del proceso de resolución.....	223
8.2.4.2. Microanálisis del proceso de resolución.....	229
8.2.4.3. Características generales del proceso de resolución.....	239
8.3. Análisis de los procesos de resolución de Laia y Jaume.....	245
8.3.1. Actuación de Laia y Jaume en la resolución del problema del paralelogramo.....	245
8.3.1.1. Transcripción del proceso de resolución.....	245
8.3.1.2. Microanálisis del proceso de resolución.....	248
8.3.1.3. Características generales del proceso de resolución.....	254
8.3.2. Actuación de Laia y Jaume en la resolución del problema del hexágono.....	259
8.3.2.1. Transcripción del proceso de resolución.....	259
8.3.2.2. Microanálisis del proceso de resolución.....	265
8.3.2.3. Características generales del proceso de resolución.....	270
8.3.3. Actuación de Laia y Jaume en la resolución del problema del triángulo.....	276
8.3.3.1. Transcripción del proceso de resolución.....	276
8.3.3.2. Microanálisis del proceso de resolución.....	282
8.3.3.3. Características generales del proceso de resolución.....	289
8.3.4. Actuación de Laia y Jaume en la resolución del problema del cuadrado.....	295
8.3.4.1. Transcripción del proceso de resolución.....	295
8.3.4.2. Microanálisis del proceso de resolución.....	302
8.3.4.3. Características generales del proceso de resolución.....	311
8.4. Análisis de los procesos de resolución de Pere y Lluís.....	318
8.4.1. Actuación de Pere y Lluís en la resolución del problema del paralelogramo.....	318
8.4.1.1. Transcripción del proceso de resolución.....	318
8.4.1.2. Una solución inmediata.....	319
8.4.2. Actuación de Pere y Lluís en la resolución del problema del hexágono.....	321
8.4.2.1. Transcripción del proceso de resolución.....	321
8.4.2.2. Microanálisis del proceso de resolución.....	326
8.4.2.3. Características generales del proceso de resolución.....	342
8.4.3. Actuación de Pere y Lluís en la resolución del problema del triángulo.....	347
8.4.3.1. Transcripción del proceso de resolución.....	347
8.4.3.2. Microanálisis del proceso de resolución.....	349
8.4.3.3. Características generales del proceso de resolución.....	353
8.4.4. Actuación de Pere y Lluís en la resolución del problema del cuadrado.....	357
8.4.4.1. Transcripción del proceso de resolución.....	357
8.4.4.2. Análisis microscópico del proceso de resolución.....	364
8.4.4.3. Características generales del proceso de resolución.....	372
8.5. Comentarios generales sobre los procesos de resolución.....	378

CAPÍTULO 9. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS A LA PRUEBA FINAL.
EVOLUCIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS DE LOS ALUMNOS.

9.1. Introducción	381
9.2. Análisis de las respuestas de Rosa y Anna a la prueba final y evolución de sus conocimientos.....	381
9.2.1. Diferencias entre las respuestas de Rosa a las pruebas inicial y final.....	381
9.2.2. Diferencias entre las respuestas de Anna a las pruebas inicial y final.....	386
9.3. Análisis de las respuestas de Laia y Jaume a la prueba final y evolución de sus conocimientos.....	391
9.3.1. Diferencias entre las respuestas de Laia a las pruebas inicial y final.....	391
9.3.2. Diferencias entre las respuestas de Jaume a las pruebas inicial y final.....	395
9.4. Análisis de las respuestas de Pere y Lluís a la prueba final y evolución de sus conocimientos.....	400
9.4.1. Diferencias entre las respuestas de Pere a las pruebas inicial y final.....	400
9.4.2. Diferencias entre las respuestas de Lluís a las pruebas inicial y final.....	404
9.5. Comentarios generales sobre la evolución de conocimientos	409

CAPÍTULO 10. MODELOS INTERACTIVOS EN LOS PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS POR PAREJAS

10.1. Introducción.....	411
10.2. Interacciones cooperativas. Características del trabajo cooperativo.....	412
10.3. Interacciones basadas en intercambios de tres intervenciones	
Características del trabajo dirigido	415
10.4. Caracterización de las situaciones de trabajo en paralelo.....	417
10.4.1. Trabajo en paralelo indiferente	418
10.4.2. Trabajo en paralelo competitivo	419
10.5. Características del trabajo alternativo	420
10.6. Modelo interactivo de complementariedad de funciones	423
10.7. Modelo interactivo de relanzamiento del proceso de resolución.....	424
10.8. Características de los intercambios de desacuerdo	425

CAPÍTULO 11. CONCLUSIONES. LIMITACIONES EXPECTATIVAS
IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

11.1. Establecimiento de conclusiones	431
11.2. Limitaciones y expectativas de ampliación de la investigación	434
11.3. Reflexiones sobre las implicaciones didácticas	435

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	439
----------------------------------	-----

Agradecimientos

Debo expresar mi gratitud a Josep M. Fortuny por sus constantes muestras de apoyo y sus estimulantes consejos y críticas. Reconozco la deuda que tengo con él.

Igualmente, estoy muy agradecido a Jordi Deulofeu y a Amparo Tusón por sus importantes comentarios acerca de un borrador de este trabajo y porque sus críticas han contribuido a estimular el desarrollo de muchas de las ideas que aquí explico.

En los inicios de este trabajo, los comentarios de Luís Puig me sirvieron de guía y me impulsaron por la senda de la investigación sobre la resolución de problemas. Mi reconocimiento y admiración hacia él.

No puedo dejar de resaltar también la valiosa ayuda de Maite Periel, Julio Angosto y Bernardo Cobo que han contribuido a mejorar la redacción de muchas de las partes de este trabajo.

Las páginas que siguen a continuación no hubieran sido posibles sin la colaboración y la comprensión de M^a Antonia Molina, que ha sabido escucharme y animarme en los momentos más difíciles de su elaboración.

INTRODUCCIÓN

El trabajo que presentamos es un estudio de casos sobre resolución de problemas con un contenido matemático específico en el ámbito escolar.

El auge que ha tenido la investigación en resolución de problemas se pone de manifiesto con la rápida evolución de las investigaciones en los últimos años, que ha ido desde el estudio de los elementos que determinan la dificultad de los problemas hasta la introducción de la metacognición, y la más reciente incorporación del estudio de las influencias sociales.

Este trabajo sigue la línea de investigación sobre resolución de problemas que habíamos iniciado cuando analizábamos los efectos de la utilización de gráficos en la traducción algebraica de problemas verbales (Cobo, 1995b) y cuando comparábamos las actuaciones de alumnos en la resolución de problemas (Cobo, 1995a, 1996).

Aquellas aproximaciones al tema de la resolución de problemas, que, según decíamos entonces, estaban motivadas por la necesidad y por la dificultad de transmitir a los alumnos nuestras propias vivencias cuando resolvíamos problemas de matemáticas, las ampliamos ahora con la presentación de esta investigación, en la que, siguiendo las últimas tendencias, estudiamos las interacciones que se producen entre alumnos que resuelven problemas de matemáticas y la influencia que tienen en sus procesos cognitivos.

Más concretamente, consideramos problemas de matemáticas que hemos llamado “problemas que comparan áreas de superficies planas” (PCASP), caracterizados por la utilización de determinados conceptos y procedimientos en su resolución; analizamos los procesos de resolución de los alumnos desde el punto de vista cognitivo, metacognitivo e interactivo; y estudiamos la influencia que determinados procesos de resolución de los problemas antes citados tienen en la evolución del conocimiento de los alumnos.

Para tratar de conseguir los objetivos que perseguimos, planteamos una investigación con tres componentes: teórico, metodológico y empírico.

a) Por lo que se refiere al componente teórico, en el Capítulo 2 resaltamos las tres dimensiones de la investigación —interactiva, metacognitiva y cognitiva—, situándolas en el contexto de las investigaciones más recientes y concretando el marco teórico correspondiente a cada una de ellas:

- Los aspectos teóricos de la dimensión interactiva en los procesos de resolución de problemas (apartado 2.2) los enfocamos identificando y definiendo —desde el punto de vista del contenido matemático de las intervenciones y de la dimensión interlocutiva del discurso— los tipos de intercambios que se producen en los casos de resolución de problemas por parejas que analizamos.

- Concretamos (apartado 2.3) los aspectos de la metacognición que consideramos del modelo de Schoenfeld (1985b) —en particular, los relacionados con el control que los alumnos ejercen sobre sus propios procesos cognitivos en la resolución de problemas— y los situamos en el marco del modelo teórico de la actividad metacognitiva de J. Mayor, A. Suencas y J. González (1993).

- En el aspecto cognitivo (apartado 2.4), diferenciamos entre conocimientos conceptuales y procedimentales e identificamos los tipos de contenidos matemáticos (involucrados en la resolución de los PCASP) que son objeto de conocimiento por parte de los alumnos. En el Capítulo 4 presentamos un amplio estudio teórico de dichos contenidos matemáticos que nos sirve para justificar los resúmenes que previamente hemos incluido en los apartados correspondientes a los conocimientos conceptuales y procedimentales del Capítulo 2.

El componente teórico de esta investigación tiene su continuación en los Capítulos 10 y 11. En el primero de ellos abstraemos los modelos interactivos que se producen en los procesos de resolución de los casos que analizamos. Estos modelos de interacción son formas de actuar de los alumnos caracterizadas por sucesiones de intercambios comunicativos. En el Capítulo 11, además de las conclusiones, reflexionamos sobre las limitaciones de esta investigación y sobre las implicaciones didácticas que nos ha sugerido.

b) Los aspectos generales del componente metodológico los desarrollamos en el Capítulo 3, en el que presentamos el diseño de la investigación y delimitamos y justificamos los tipos de datos que recogemos y las técnicas que utilizamos en su recogida, el contexto en el que se recogen, las características generales de los alumnos que intervienen, y finalizamos con la propuesta de un esquema de análisis cualitativo de los datos orales que comprende e integra las tres dimensiones de la investigación y que hemos dividido en cuatro fases: identificación de los tipos de intercambios en las transcripciones (protocolos escritos) que hacemos de los procesos de resolución; división de cada transcripción en episodios y calificación de los mismos; análisis microscópico de cada episodio desde el punto de vista cognitivo, metacognitivo e interactivo; y visión general del proceso de resolución.

El componente metodológico lo completamos en los Capítulos 5 y 6. En el primero de ellos proponemos y analizamos los problemas que hemos seleccionado, cuya resolución por cada pareja de alumnos nos permite obtener los procesos de resolución (datos orales). En el segundo, analizamos los antecedentes de las técnicas de evaluación de los conocimientos implicados en la resolución de problemas y proponemos dos pruebas, cuya resolución individual y por escrito, por parte de los alumnos, nos permite obtener los datos escritos.

c) El componente empírico de la investigación lo desarrollamos en los Capítulos 7, 8 y 9, en los que seguimos el esquema de analizar la actuación de cada pareja por separado, especificando para cada una de ellas, en primer lugar (Capítulo 7), las características cognitivas de cada uno de sus miembros —a partir de los datos escritos obtenidos de la prueba inicial y del conocimiento que sobre los alumnos tiene su profesor—; en segundo lugar (Capítulo 8), el análisis de las cuatro transcripciones de los procesos de resolución orales; y, por último (Capítulo 9), los resultados de la prueba final y su comparación con los de la inicial.

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA

¿Por dónde debo empezar? Empiece por el enunciado del problema.

¿Qué puedo hacer? Trate de visualizar el problema como un todo, tan claramente como pueda. No se ocupe de los detalles por el momento.

¿Qué gano haciendo esto? Comprenderá el problema, se familiarizará con él, grabando su propósito en su mente.

G. Polya (1975)

1.1. Planteamiento del problema

En el campo de la Psicología de la Educación Matemática, F. K. Lester (1994) marca el inicio del estudio de las influencias sociales en la resolución de problemas en 1990, el mismo año en que N. Balacheff (1990) sugiere que las investigaciones se han de orientar hacia el estudio de las relaciones entre las características de las interacciones y la conducta cognitiva de los alumnos. La verdad es que investigaciones como las de E. Forman (1989) y N. M. Webb (1989), esta última iniciada anteriormente (N. M. Webb, 1984), están en la línea de las propuestas de N. Balacheff.

El interés por analizar el comportamiento del profesor para identificar su eficacia docente se desplaza hacia el proceso mismo de la interacción profesor-alumno y los factores de distinta naturaleza que convergen en él (Coll y Colomina, 1990). Pero dentro de esta línea de análisis en profundidad de las influencias sociales en la resolución de problemas de matemáticas, en los últimos años hay una tendencia a prestar interés a las relaciones que se establecen entre los procesos cognitivos¹ y las interacciones que se producen entre iguales² cuando trabajan conjuntamente en la resolución de problemas de matemáticas. En esta línea

¹ De acuerdo con el tipo de alumnos que consideramos y los contenidos matemáticos implicados en los problemas que resuelven, los procesos cognitivos a los que nos referimos los asociamos al pensamiento matemático de orden superior, es decir, "procesos tales como representar, visualizar, generalizar, clasificar, conjeturar, inducir, analizar, sintetizar, abstraer, formalizar" (Azcarate, 1995, p.54), aunque algunos de ellos se muestren de forma muy incipiente en nuestros alumnos. A. Bell (1976) utiliza problemas con diferentes contenidos matemáticos para estudiar los procesos, que él llama estrategias generales, de generalización, abstracción, demostración, etc.

² E. A. Forman y C. B. Cazden (1984) sitúan las interacciones entre iguales en un continuo "de acuerdo con la distribución de conocimiento o la habilidad entre los niños y, por tanto, de acuerdo con los roles que pueden adoptar uno respecto al otro" (p. 140). B. Rogoff (1993) habla de la importancia de la oportunidad que tienen los iguales de asumir indistintamente el control de la conversación en comparación con las conversaciones profesor-alumno en las que casi siempre lo asume aquél. Nosotros nos referiremos a las interacciones entre iguales simplemente como interacciones entre alumnos.

están las investigaciones citadas en el párrafo anterior y las de D. V. Lambdin (1993), T. Wood (1996) y P. Cobb y W. Whitenack (1996), sobre las que volveremos a incidir en los capítulos siguientes.

Partiendo de la base de que a lo largo del proceso de resolución de un problema se pueden producir diferentes modalidades interactivas entre los alumnos que participan y teniendo en cuenta que, según C. Coll y R. Colomina (1990), “lo importante no es la cantidad de interacción, sino la calidad de la misma” (p. 339), planteamos una investigación que pretende analizar la naturaleza y calidad de las interacciones que se producen en los procesos de resolución de problemas de matemáticas entre alumnos.

Para estudiar la naturaleza de las interacciones hemos de profundizar en los tipos de intercambios que se producen y en la forma como se combinan durante el proceso de resolución; en cambio, para valorar la calidad de las interacciones hemos de relacionarlas no sólo con los conocimientos que cada alumno utiliza, la forma de utilizarlos y cómo evolucionan, sino también con el control que cada alumno ejerce, en cada momento, sobre el proceso de resolución.

Tratamos, pues, de analizar los aspectos cognitivos, metacognitivos e interactivos de la resolución de problemas y lo hacemos a través de los “rasgos propios de los intercambios comunicativos en una conversación: se explica, se convence, se pregunta, se consulta, se hace burla, se interrumpe, se muestra superioridad, ...” (Puig, 1996, p. 68), cuando dos alumnos resuelven conjuntamente problemas de matemáticas.

Para profundizar en el aspecto cognitivo —entre otros motivos, que especificamos en el apartado siguiente—, hemos decidido utilizar un determinado tipo de problemas —aquellos que comparan áreas de superficies planas³— y caracterizar de ellos —como señala N. Balacheff (1990)— la naturaleza de los contenidos matemáticos que determinan los cambios epistémicos que sus resoluciones producen en los alumnos.

El planteamiento que acabamos de hacer sitúa este trabajo en la línea de las investigaciones que analizan microscópicamente los procesos de resolución entre alumnos para relacionar las interacciones y sus procesos cognitivos.

Una vez hecho el planteamiento general del problema que queremos investigar, en el resto del Capítulo, además de seguir concretando la interpretación que damos a algunos de los conceptos que vamos utilizando (otros se especifican en el Capítulo 2, y, en particular, en el apartado 2.5), justificamos la elección del tipo de problemas de matemáticas que consideramos, y damos una visión general de las características educativas de los alumnos que intervienen.

1.2. ¿Qué tipo de problemas utilizamos?

Nos planteamos en este momento dos preguntas relacionadas con la clase de problemas que utilizamos como tópico en esta investigación: ¿por qué elegimos problemas con un contenido matemático concreto?, y ¿por qué problemas que comparan áreas de superficies planas (PCASP)?

³ Utilizamos en este trabajo la abreviatura PCASP cuando nos referimos a los problemas que comparan áreas de superficies planas. En el Capítulo 4 identificamos los contenidos matemáticos implicados en la resolución de este tipo de problemas.

Respondemos a la primera de ellas utilizando dos tipos de argumentos:

- Por un lado, seguimos las indicaciones del International Group for the Psychology of Mathematics Education, que aconseja investigar sobre “cuestiones de contenido específico relacionadas con procesos de aprendizaje en el contexto de la enseñanza de las matemáticas” (Balacheff, 1990, p. 136); es decir, en palabras de L. Puig (1996), que cita a Bauersfeld & Skowronek, “no se debería comenzar desde una teoría general y neutral respecto del contenido, y derivar de ella una teoría específica para el caso de las matemáticas, sino que, por el contrario, se debería comenzar por el estudio de los procesos específicos de cada contenido” (p. 12).

- Por otro, no hemos considerado oportuno utilizar problemas cuya resolución se apoyara en diferentes contenidos matemáticos, ya que al incluir en la investigación el estudio de la influencia que las interacciones tienen en la evolución del conocimiento de los alumnos, la evaluación de los conocimientos —sobre todo conceptuales— de los alumnos se hubiera complicado en exceso y no habiéramos obtenido, a cambio, ninguna ventaja, por tanto hemos decidido centrarnos en algún tipo de problemas que involucren contenidos matemáticos específicos.

En referencia a la segunda pregunta que formulamos —¿por qué elegimos los PCASP?—, hemos de decir que la idea inicial de considerarlos surgió de la utilización que hicimos de ellos en un trabajo previo (Cobo, 1995a). Una amplia diversidad de razones nos animaron al inicio de esta investigación a profundizar en su estructura y a caracterizar los contenidos matemáticos implicados en su resolución, entre ellas:

- El lugar destacado que los problemas de comparación de áreas han tenido en la historia de las matemáticas⁴, sobre todo antes de la introducción de los métodos infinitesimales, como ponemos de manifiesto en el Capítulo 4.

- La ausencia de investigaciones específicas sobre la comparación de áreas, aunque sí las haya sobre determinados conceptos asociados; no olvidemos, por ejemplo, los estudios de Rogalski (1982), Woodward (1982), y Woodward y Byrd (1983) sobre el concepto de área, y los más recientes de M. L. Fiol (1993) sobre la proporcionalidad y de A. Gutiérrez y A. Jaime (1996) sobre el análisis de las imágenes del concepto de altura de un triángulo, entre otros.

- Se pueden obtener fácilmente problemas que se adapten al nivel de los alumnos de diferentes edades⁵ simplemente modificando el enunciado, como observamos en el Capítulo 5. Además, los PCASP son problemas cuya resolución generalmente se puede enfocar de varias formas, lo que puede facilitar la riqueza de los procesos de resolución.

- Los PCASP no se suelen utilizar en las clases de matemáticas, es decir, no hay un apartado específico en el que se estudien —ni siquiera cuando se aborda el cálculo de

⁴ En la portada de este trabajo hacemos una interpretación gráfica de la resolución que Platón propone — en el Menon— al problema de obtener un cuadrado cuya área sea doble de la de otro dado.

⁵ Incluso se pueden hacer propuestas de PCASP que tengan como finalidad la construcción gráfica de figuras entre cuyas áreas haya una relación determinada, aunque los problemas que proponemos en esta investigación no son de esta naturaleza (apartado 4.2). Por ejemplo, el problema de la duplicación de un cuadrado dado es de bastante dificultad —como hemos tenido oportunidad de comprobar en nuestras clases— si se plantea a los alumnos en los términos en los que lo hace Platón, es decir, si se pide la representación de un cuadrado cuya área sea el doble de la de otro dado, y, por el contrario, tiene mucha menos dificultad si se plantea en términos algebraicos de obtener el lado de un cuadrado cuya área sea el doble de la de otro dado.

áreas—, a pesar de involucrar contenidos matemáticos —sobre todo conceptuales: congruencia y semejanza— incluidos en el currículo de matemáticas en los últimos cursos de EGB.

1.3. **Ámbito de estudio**

La naturaleza de la investigación, orientada hacia la comprensión profunda de realidades concretas, hace que nos inclinemos por un estudio de casos (Capítulo 3) en el que participan alumnos de tercero de BUP y de COU del Instituto de Enseñanza Secundaria Pius Font i Quer de Manresa.

Para tener una idea global de las características educativas de nuestros alumnos de tercero de BUP y de COU —sin entrar en aspectos individualizados que serán tratados en el Capítulo 7— resaltamos: *a)* algunos de los contenidos de los programas que se desarrollan, y *b)* los rasgos fundamentales de la metodología que se ha utilizado en las clases en los últimos cursos.

a) Los alumnos han cursado la asignatura de matemáticas durante al menos 10 años y no han seguido, en dicha asignatura ni en ninguna otra, un aprendizaje específico sobre la resolución de problemas; por el contrario, la enseñanza se enfoca desde el punto de vista de la resolución de ejercicios de aplicación o de problemas contextualizados en el estudio de conceptos matemáticos concretos. El enfoque que se da a la geometría en BUP y COU es puramente analítico, siendo los cursos de EGB los últimos en los que los alumnos estudian conceptos y procedimientos relacionados con la geometría euclídea, en general, y con el cálculo de áreas, en particular —desde una perspectiva de aplicación de fórmulas o descomposición de las figuras en otras más sencillas. Los alumnos de tercero de BUP han empezado el estudio de la trigonometría y tienen, por tanto, una cierta tendencia a utilizar los métodos propios de esta rama de las matemáticas.

b) Sobre la metodología que se sigue en las clases de matemáticas —que son de entre 35 y 40 alumnos—, hemos de decir que se combinan las fases expositivas del profesor con una amplia propuesta de ejercicios de aplicación de los conceptos matemáticos que se acaban de introducir y con propuestas muy concretas y reducidas de problemas que en el contexto que se hacen —inmediatamente después de explicar los procedimientos de resolución— pierden su carácter de verdaderos problemas. Los alumnos gozan de un amplio grado de libertad para comentar los ejercicios y problemas con los compañeros más cercanos, y las actividades que se les presentan no están enfocadas a que los alumnos descubran conceptos o procedimientos, sino a que traten de comprenderlos una vez expuestos por el profesor.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

El momento más significativo en el curso del desarrollo intelectual es cuando el lenguaje y la actividad práctica, dos líneas de desarrollo antes totalmente independientes, convergen.

Vygotski (1988)

2.1. Dimensiones y antecedentes de la investigación

En este apartado indicamos las dimensiones de nuestra investigación —que serán ampliadas en los apartados siguientes—, identificamos el marco teórico en el que se encuadra y la situamos en el contexto de las investigaciones más recientes.

El presente trabajo tiene por objetivo, en líneas generales, la caracterización de las interacciones que se producen en la resolución de problemas por parejas y el análisis de su influencia en los procesos cognitivos de los alumnos. La investigación que pretendemos realizar tiene tres dimensiones: la cognitiva —en cuanto que analizamos la evolución de los conocimientos de los alumnos en relación con los contenidos matemáticos de los problemas que resuelven (apartado 2.4)—; la interactiva, puesto que identificamos los intercambios comunicativos que se producen durante la resolución de problemas (apartado 2.2); y la metacognitiva, de la que consideramos los aspectos relacionados con el control que los alumnos ejercen sobre el proceso de resolución y los utilizamos como elementos de análisis y como base para establecer las fronteras de las interacciones en los procesos de resolución de problemas (apartados 2.2.1.3 y 2.3).

Independientemente del tipo de interacción —con expertos y entre alumnos¹—, Vygotski y Piaget tienen dos concepciones diferentes de cómo la conversación externa afecta al pensamiento interno. Vygotski considera que el pensamiento —o habla interna— tiene su origen en las interacciones sociales (Cazden, 1991), donde el lenguaje, como medio que se utiliza en dichas interacciones, desempeña un papel fundamental en el proceso de interiorización, es decir, en el paso de la regulación interpsicológica —mediante la cual el

¹ E. A. Forman (1989) utiliza dos criterios para caracterizar las interacciones con expertos y entre iguales: por una parte, la diferencia de conocimiento entre los interlocutores, y, por otra, el grado de responsabilidad que cada uno de ellos tiene en la fijación de los objetivos de la tarea y en la elección de las estrategias. Estas diferencias dan lugar a un mayor o menor grado de complementariedad y a un menor o mayor grado de reciprocidad en la realización de la tarea, respectivamente.

niño sólo hace y conoce a través de las indicaciones de un adulto— a la intrapsicológica, en la que el niño es capaz de hacer y conocer por sí mismo (Coll y Colomina, 1990).

En cambio, la teoría de Piaget muestra cómo, a través de la generación de conflictos cognitivos entre iguales cuando realizan determinadas tareas, se originan desequilibrios internos que provocan reorganizaciones cognitivas. Las interacciones influyen, de esa forma, en el desarrollo mental de los alumnos. En esta línea, las investigaciones de A. N. Perret-Clermont (1984) y de E. A. Forman (E. A. Forman y C. B. Cazden, 1984) concluyen que las interacciones entre compañeros, en las que se produce confrontación de puntos de vista moderadamente divergentes, aumentan el desarrollo del razonamiento lógico medido al principio y al final de la actividad que proponen, pero ninguno de ellos analiza con detalle los tipos de interacciones que se producen durante dicha actividad.

Las investigaciones que relacionan las interacciones sociales y el desarrollo cognitivo individual han seguido, en los últimos años, la tendencia de estudiar sistemática y pormenorizadamente las interacciones que se producen durante la resolución de problemas. En esta línea están, entre otros, los trabajos de los siguientes autores: N. M. Webb (1984, 1989 y 1991), que elige como objeto de su análisis las interacciones verbales que se producen entre compañeros cuando trabajan en grupos pequeños, centrando su atención en los comportamientos de recibir, dar y solicitar ayuda, y en el nivel de elaboración de la ayuda dada y recibida; E. A. Forman (1989), que analiza cómo dos alumnas con “habilidad intelectual comparable, pero con una actitud algo diferente hacia la tarea de resolver problemas, se pueden ayudar a incorporar a su repertorio nuevas estrategias de razonamiento y de enfoque de los problemas” (p. 67); y D. V. Lambdin (1993), que estudia cómo el trabajo cooperativo afecta a la resolución de problemas de matemáticas, utilizando en su análisis el modelo cognitivo-metacognitivo de J. Garofalo y F. K. Lester (Lester, 1985, Garofalo y Lester, 1985).

Así mismo, T. Wood (1996) presenta un estudio sobre cómo un análisis detallado de lo que ocurre en una clase de matemáticas puede darnos una idea de los procesos por los que los alumnos construyen individualmente los significados matemáticos; y E. Yackel, P. Cobb y T. Wood (1991) y P. Cobb y J. W. Whitenack (1996) tratan de estudiar la relación entre los procesos psicológicos y sociales entre alumnos y la unión que se produce entre ellos, como consecuencia de que uno de los alumnos interprete las acciones del otro y reorganice su actividad.

D. Kroll, J. Masingila y S. Mau (1992) y K. Stacey (1992) consideran en sus investigaciones diversas formas de agrupar a los alumnos en la resolución cooperativa de problemas de matemáticas. Las primeras estudian cómo calificar los esfuerzos de los alumnos cuando se agrupan de dos formas diferentes: tutoría entre compañeros (*peer tutoring*), e investigación en grupo (*group investigation*). En cambio, K. Stacey analiza protocolos obtenidos por la interacción de dos (o tres) alumnos y compara sus resultados con resoluciones de problemas individuales.

En otra línea más teórica y con una mayor influencia del profesor se encuentran los trabajos de J. Voight (1985), que construye un modelo teórico, basado en la definición de conceptos tales como “módulo interactivo” y “rutina”, para describir las regularidades de “los procesos típicos que se dan en la solución de los problemas matemáticos en el contexto del diálogo formal en clase” (p. 69); y de F. Seeger (1991), que propone un marco teórico que tiene en cuenta “la complementariedad de los conceptos de saber e interacción” (p.

126), integrando el modelo interactivo profesor-alumno de J. Voigt y el de profesor-contenido de R. Bromme y H. Steinbring (Seeger, 1991).

Nuestro trabajo se enmarca dentro de las tendencias en las que se analizan microscópicamente tanto las interacciones entre alumnos en los procesos de resolución de determinados problemas de matemáticas, como su influencia en los cambios cognitivos de dichos alumnos. Pero se diferencia de otras investigaciones en la forma de identificar el papel comunicativo que desempeñan los alumnos, cuando tomamos como marco de referencia determinados aspectos de la actividad metacognitiva de la resolución de problemas, y en la manera de analizar las interacciones, basada en la identificación de intercambios que construimos sobre la base de la dimensión interlocutiva del discurso y de los contenidos matemáticos de las intervenciones.

La investigación que presentamos se puede encuadrar dentro de la corriente constructivista de la Psicología de la Educación Matemática, ya que, a partir de los conocimientos iniciales de los alumnos, analizamos cómo, en la resolución de problemas, las interacciones provocadas por la verbalización de conceptos y procedimientos permiten a “los alumnos y alumnas negociar el significado de éstos en situaciones de actividad compartida, confrontar sus ideas, pudiendo resolver dudas y usarlos de modo funcional, y estudiar su utilidad en diferentes contextos” (T. Mauri, 1997, p. 95), lo que puede llegar a producir cambios en sus estructuras cognitivas. Desde esa perspectiva constructivista del conocimiento, la resolución de problemas nos proporciona un ejemplo en el que se evidencia, posiblemente mejor que con otras actividades, la idea de E. Fischbein (1990) de que “la actividad matemática es esencialmente un proceso constructivo” (p. 7).

Puesto que el aprendizaje entendido como construcción del conocimiento supone un aumento no sólo de la cantidad de información, sino de la calidad de la misma, en el apartado 2.4 diferenciamos entre los diversos contenidos matemáticos que son objeto del aprendizaje de los alumnos y establecemos niveles de calidad en las estructuras de conocimiento.

En la medida en que las interacciones que se producen en la resolución de problemas se evidencian a través de los comportamientos comunicativos de los alumnos, nuestra investigación se situará dentro del Análisis del Discurso, entendido como “el estudio de cualquier realización de la lengua, producida por personas concretas que hablan, con una intencionalidad y dentro de un contexto” (Calsamiglia y otros, 1997, p. 18), y que abarca el análisis de los componentes verbales y no verbales.

Profundizando más en el Análisis del Discurso, podemos decir que el presente trabajo tiene un componente etnometodológico² puesto que tratamos de identificar regularidades — y teorizar sobre ellas— en el funcionamiento de un determinado tipo de interacciones sociales, el que se produce entre alumnos que resuelven problemas de matemáticas.

² Uno de los principios de la etnometodología, según C. Kerbart-Orecchioni (1990), es el hecho de que “las observaciones no son interesantes en sí mismas, sino sólo en la medida en que pueden servir de base al trabajo de teorización y permiten el descubrimiento de regularidades en el funcionamiento de las interacciones sociales” (p. 63). Los métodos etnográficos para el estudio de las influencias sociales en la resolución de problemas se empiezan a utilizar a comienzos de los años 90 (Lester, 1994), como se pone de manifiesto en el repaso de investigaciones que hemos hecho en la página anterior.

Mientras que nuestros alumnos sean comunicativamente competentes³ (dentro de las matemáticas) podrán construir realmente aprendizajes matemáticos, según J. Richards (1991), y lo serán siempre que sus diálogos se produzcan dentro del domino consensual de la matemática indagativa (J. Richards, 1991) —argumentando las afirmaciones que introduzcan, utilizando razonamientos lógicos basados en resultados obtenidos previamente o en conceptos y procedimientos conocidos, conjeturando y refutando, etc—.

El marco teórico que hemos presentado lo complementamos en el resto del presente capítulo, donde estudiamos, en primer lugar, las interacciones que se producen en la resolución de problemas por parejas. Continuamos, después, dando una aproximación al concepto de metacognición y concretando, de ella, los componentes que forman parte de esta investigación y la forma de enfocarlos. Puesto que el objeto de la actividad metacognitiva es el propio conocimiento, analizamos, más tarde, los diferentes tipos de conocimientos relacionados con los contenidos matemáticos de los problemas que hemos seleccionado —a lo que M. L. Callejo (1994) llama “base de conocimientos”—. Por último, precisamos diversos términos —problema, espacio y espacio básico de un problema y proceso de resolución— que son los más usados en esta investigación.

2.2. Interacciones entre alumnos en la resolución de problemas por parejas

Para analizar las interacciones entre alumnos en la resolución de problemas por parejas introducimos, primero, los diferentes conceptos relacionados con el tema y precisamos, después, los aspectos de la dimensión interlocutiva del discurso que consideramos y los tipos de intercambios que hemos identificado, así como las características fundamentales de cada uno de ellos.

2.2.1. Unidades dialógicas: intervenciones, intercambios e interacciones

Puesto que los conceptos “intervención”, “intercambio” e “interacción” los utilizamos con frecuencia en esta investigación, trataremos de precisar, en los párrafos siguientes, lo que entendemos cuando nos referimos a cada uno de ellos.

C. Kerbrat-Orecchioni (1990), siguiendo a Roulet, propone un modelo de análisis del discurso basado en la construcción de unidades de análisis de un determinado “rango” a partir de unidades de rango inferior. Ella diferencia cinco rangos, que son, de mayor a menor grado de generalidad, la interacción, la secuencia, el intercambio, la intervención y el acto de lengua. E. Roulet (1987) describe la estructura jerárquica del discurso centrándose en el intercambio y la interacción.

Las características del análisis que proponemos, de acuerdo con los objetivos de la investigación, hacen que centremos nuestra atención en tres de ellos: interacción, intercambio e intervención, sin diferenciar entre interacción y secuencia ni entre acto de lengua e intervención.

³ Gumperz y Hymes (1972) definen la competencia comunicativa (concepto clave de la etnografía de la comunicación) como: “Lo que un hablante necesita saber para comunicarse de manera eficaz en contextos socialmente significantes” (p. vii). Damos, de esta forma, a la competencia comunicativa un enfoque de acuerdo con la situación cultural específica que consideramos —comunicación que se produce en la resolución de problemas de matemáticas—.

2.2.1.1. *Intervención*

Podemos adoptar la definición de intervención que dan Calsamiglia y otros (1997) —“aportación temática de un individuo al desarrollo de aquello que se habla y sobre lo que dará información o tomará posición” (p. 50)—, en la que no hacen referencia ni a la unidad dialogal inferior (acto de lengua) ni a la superior (intercambio).

Hemos de destacar, por la importancia que tendrá a la hora de identificar los intercambios en los diálogos de los alumnos y de acuerdo con la definición que hemos adoptado, que en un turno de palabra puede haber varias intervenciones, pero no al revés, es decir, el cambio de turno de palabra supone un cambio de intervención.

Además, con la finalidad de marcar los límites del intercambio, distinguimos, como lo hacen Calsamiglia y otros (1997), entre intervenciones problematizadas, que son las que convierten el tema en objeto de debate” (p. 50) —y entre ellas las directivas que “introducen uno o diversos temas y proponen un objeto de discusión” (p. 51)—, y las no problematizadas, que “no aportan nada al tema de discusión y hacen referencia exclusiva bien a la gestión o a la estructura de la comunicación o bien a la relación entre los participantes” (p. 51).

2.2.1.2. *Intercambio*

Los intercambios los introducimos en términos de acción-(re)acción⁴ y los definimos de la siguiente forma: la intervención del sujeto A produce una (re)acción en el sujeto B si en la intervención de B hay alguna referencia (implícita o explícita) al contenido de la intervención de A o a alguno de sus elementos.

En el caso de que la intervención de A no produzca una (re)acción en B, puede ocurrir que B tome o no la palabra: si la toma, consideramos que su intervención no será consecuencia de la de A; si no la toma, se producirá simplemente una continuación en el discurso por parte de A.

2.2.1.3. *Interacción*

Podemos considerar las interacciones como una sucesión de intercambios. Esta definición es incompleta si no precisamos los límites de cada interacción. C. Kerbrat-Orecchioni (1990) propone tres formas de delimitar las fronteras de las interacciones: a) lo que ella llama “esquema participacional”, en el que las interacciones tienen sus límites cuando se encuentran y se separan los dos interlocutores o cuando se modifica el número y la naturaleza de los participantes; b) “unidad de tiempo y de lugar”, si la delimitación se basa en rupturas temporales y espaciales; y c) “criterio temático”, en el que se utiliza como referencia la homogeneidad temática.

En nuestro caso, para coordinar el análisis metacognitivo e interactivo, proponemos una delimitación de las interacciones basada, no en un criterio exactamente temático, sino en la homogeneidad de la naturaleza y finalidad de las acciones que tienen lugar en cada

⁴ Entendemos por (re)acción la respuesta a un estímulo (acción) que se puede transformar, a su vez, en una nueva acción. Con la introducción del término (re)acción queremos significar la posibilidad de continuación del discurso.

momento del proceso de resolución. Es decir, asociamos los límites de las interacciones con los de los episodios resultantes de dividir el proceso de resolución, entendiendo por episodio —como señala A. H. Schoenfeld (1985b)— los períodos de tiempo durante los cuales los resolutores producen acciones que persiguen el mismo objetivo (por ejemplo, cuando están tratando de ejecutar un plan que acaban de proponer, cuando están evaluando una parte de la resolución, cuando su finalidad es comprender el enunciado del problema, etc. —véase apartado 3.5.2—).

2.2.2. Dimensión interlocutiva del discurso

Independientemente del contenido de las intervenciones de los dos interlocutores, pensamos que en el desarrollo del diálogo que entre ellos se produce tiene un papel muy importante lo que L. Nussbaum y A. Tusón (1995) llaman “dimensión interlocutiva” del discurso, es decir, “la mecánica de la comunicación y de los comportamientos comunicativos de cada interlocutor” (p. 98).

Cuando ambas autoras se refieren a esta dimensión interlocutiva del discurso distinguen entre: *a)* capital verbal, que da una visión general del discurso, desde un punto de vista numérico, pues considera aspectos tales como las veces que cada interlocutor toma la palabra y el tiempo que pasa en el uso de la misma; *b)* orígenes en los turnos y modos de tomar de palabra, donde se tiene en cuenta si los individuos toman la palabra por iniciativa propia (autoselección) o como consecuencia de una solicitud de otros individuos (heteroselección) y las formas en que se producen las transiciones (si hay pausas, solapamientos, interrupciones, etc.); y *c)* comportamientos (o papeles) comunicativos, que abarcan aspectos relacionados con las operaciones lingüísticas de cada locutor en relación a los otros y cómo gestiona la comunicación.

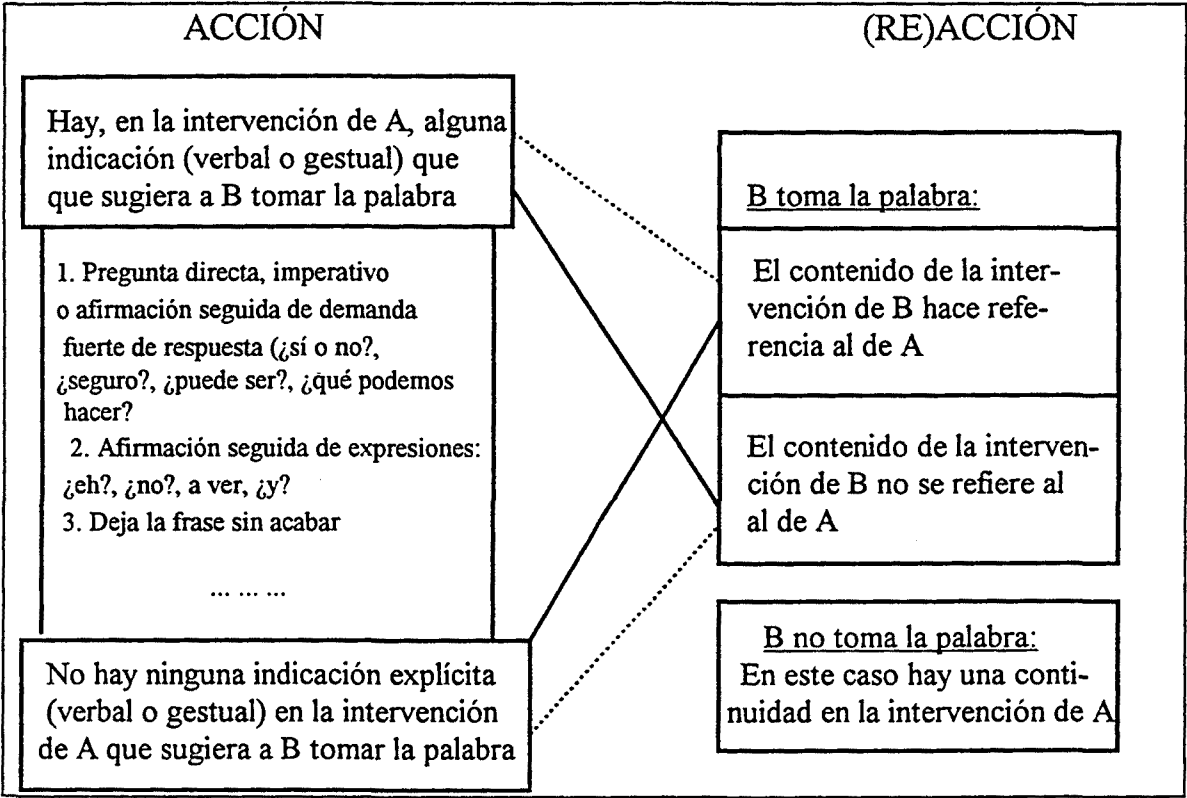
En la resolución de problemas por parejas, entendemos que no tiene mucho sentido hacer un estudio numérico de las veces que cada interlocutor toma la palabra, ya que cuando uno acaba un turno el otro se ve en la necesidad de continuar, excepto cuando se produce una pausa y es el mismo locutor el que vuelve a tomar la palabra. Suele haber, por tanto, un cierto equilibrio en el número de veces que cada locutor toma la palabra.

Haremos referencia al tiempo en que cada locutor está en el uso de la palabra cuando observemos que hay entre ellos una diferencia significativa y daremos una interpretación desde una perspectiva global del proceso de resolución, es decir, teniendo en cuenta todos los aspectos que analizamos del proceso.

Por lo que se refiere a los orígenes de las tomas de palabra, centraremos nuestra atención en los dos casos extremos que se pueden producir y sobre los que incidiremos cuando hagamos los análisis globales de los procesos de resolución.

- Puede ocurrir que en la intervención de uno de los individuos —A— haya alguna indicación (verbal o gestual) que sugiera al otro —B— tomar la palabra; si B no toma la palabra o si la toma, pero el contenido de su intervención no está relacionado con el de A, será un indicio claro de que B no está atento a lo que dice A. En ese caso, en el diálogo de los dos interlocutores hay un cierto grado de desconexión (Cuadro 2.2.1).
- Por el contrario, si en la intervención de A no hay ninguna indicación explícita (verbal o gestual) que sugiera a B tomar de palabra y, a pesar de ello, B la toma y

el contenido de su intervención está relacionado con el de A, será indicativo de que se está produciendo una atención especial de B hacia lo que dice A.



Cuadro 2.2.1

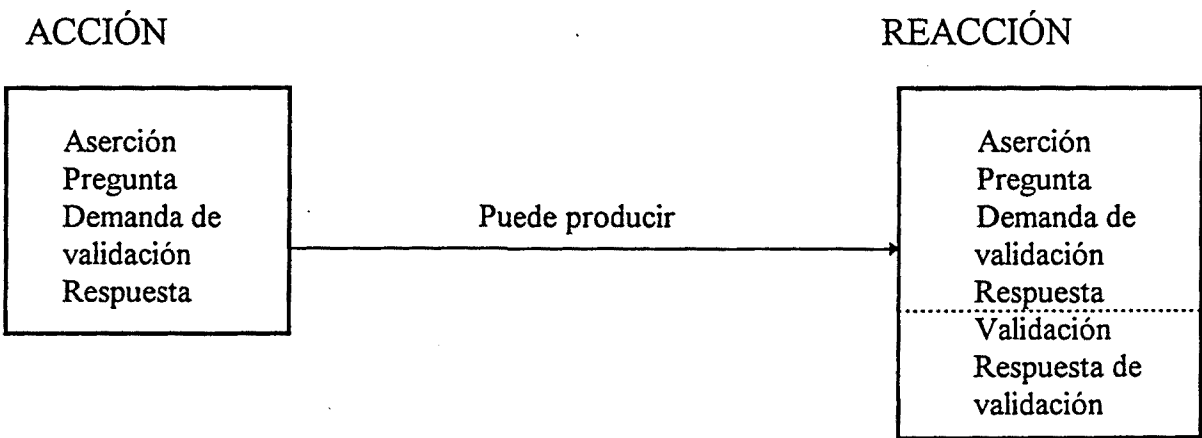
Ahora bien, no hemos de olvidar que en el lenguaje ordinario, la separación entre el hecho de que haya o no alguna indicación en la intervención de A que sugiera tomar la palabra a B no es dicotómica, es decir, puede haber una gama de matices a la hora de valorar las indicaciones que sugieren tomar palabra, que van desde una pregunta directa hasta dejar la frase sin acabar (Cuadro 2.2.1), y en las que también influirá la entonación que se dé a la frase y el gesto, si es que lo hay, que la acompañe.

Así pues, fijaremos especialmente nuestra atención en las (re)acciones que se produzcan en B y que surjan sin indicación explícita por parte de A y en las intervenciones de B que no respondan a indicaciones explícitas de A. Estos casos nos pueden dar una idea del grado de atención que un alumno presta a otro o de la independencia de éste respecto de aquél.

Aunque un análisis exhaustivo de los papeles comunicativos de los alumnos —desde el punto de vista de la identificación de las categorías que proponen Calsamiglia y otros— sobrepasaría las pretensiones de esta investigación, sí que tendremos en cuenta algunos aspectos de los papeles comunicativos que desempeñan los alumnos para, a partir de ellos, elaborar los tipos de intercambios, que consideramos en el apartado 2.2.3, para el análisis interactivo. Nos referimos, en concreto, a aspectos relacionados con las formas sintácticas de las intervenciones (indicios contextualizadores, en la terminología de Gumperz, según Calsamiglia y otros), a la relación de unas intervenciones con otras (indicios

conversacionales) y a sus contenidos matemáticos (que relacionamos con las características cognitivas de cada alumno).

De las categorías que Calsamiglia y otros identifican, la de gestión⁵ merece en nuestros análisis una consideración aparte, por ser enunciados que marcan las direcciones del proceso de resolución, estando, por tanto, asociados a la actividad metacognitiva que precisamos en el apartado 2.3. Del resto de categorías —que resumimos en los apartados siguientes—, nos fijamos especialmente (Cuadro 2.2.2) en aquellas que pueden ser a la vez acciones y reacciones y en las que sólo son reacciones para caracterizar determinadas formas de interacción.



f) Respuesta de validación: repuesta por la que B acepta o rechaza la información dada, con reservas, por A (Calsamiglia y otros, 1997).

2.2.3. Tipología de intercambios

El doble enfoque que damos a los intercambios, desde el punto de vista del contenido de las intervenciones y de la dimensión interlocutiva del discurso, nos permite construir un marco teórico basado en la identificación —a través de los análisis empíricos de los datos recogidos en protocolos escritos de los procesos de resolución— y en la definición de los intercambios que se producen en la resolución de problemas por parejas, cuyas combinaciones dan lugar a diferentes modelos de interacciones.

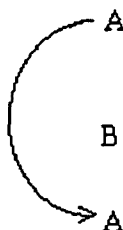
Los intercambios que proponemos han sido suficientes para caracterizar el diálogo que se ha producido en la resolución de los problemas que hemos analizado.

Clasificamos los intercambios en función del número de intervenciones que los componen, diferenciando entre los que están compuestos sólo por una intervención —que nos sirven para caracterizar el tipo de diálogo que llamamos “en paralelo”—; los que se componen de dos intervenciones —diferenciando entre los que el peso del diálogo recae sobre ambos interlocutores por igual o si la iniciativa la lleva, principalmente, sólo uno de ellos—; los que están formados por tres intervenciones —caracterizados por el hecho de que la intervención inicial del locutor A tiene una continuación, no sólo por parte de B, sino también por el propio A—; y aquellos intercambios que pueden estar formados por más de tres intervenciones —entre los que tenemos en cuenta los diálogos en los que se producen desacuerdos entre los interlocutores—.

2.2.3.1. Intercambios de una intervención

Ocurre a veces que un locutor (A) produce una intervención que no da lugar a ninguna reacción por parte de su interlocutor (B); tenemos en este caso lo que Kerbrat-Orecchioni (1990) llama un intercambio truncado. Nos interesa analizar lo que ocurre después de la intervención de B, con la finalidad de caracterizar un tipo de diálogo, muy frecuente, en los procesos de resolución de problemas, como es el que tiene lugar cuando los alumnos trabajan por separado sin que las intervenciones de cada uno de ellos produzcan reacciones en su interlocutor. Para ello introducimos los intercambios en paralelo que definimos a continuación.

El intercambio que llamaremos “en paralelo” lo representamos de la siguiente forma:



Diremos que se produce un intercambio “en paralelo” o, simplemente, no hay intercambio entre A y B, si la intervención de A no produce reacción en B y hay una continuación del discurso por parte de A. Si no hubiera tal continuación consideraríamos ‘aislada’ la intervención de A.

Es necesario aclarar dos aspectos de esta definición. Primero, el hecho de que haya una continuidad en el discurso por parte de A no quiere decir que B no tome la palabra, sino que A ignora el contenido de su intervención. En segundo lugar, la continuación del discurso por parte de A se puede producir en términos de simple repetición —o de explicación— de su intervención anterior, o bien puede seguir las reglas que establecemos en la página siguiente para los intercambios cooperativos, o bien establecerse entre los interlocutores algún tipo de competencia que les lleve a aportar ideas sin tener en cuenta lo que dice o hace el otro. En cualquier caso, el análisis que hagamos de los intercambios de este tipo tendrá que valorar el nivel de progresión, si es que lo hay, en la continuación del discurso “en paralelo” de ambos interlocutores.

Calificaremos como trabajo en paralelo determinadas situaciones en las que observemos en las grabaciones que los alumnos trabajan por separado —por ejemplo, cuando resuelven ecuaciones en voz alta—, aunque parezca que los contenidos de las intervenciones puedan tener elementos comunes.

Un ejemplo del intercambio en paralelo sería⁶:

- 
- A: *Aquesta és paral.lela a aquesta* [traza por E una paralela a AB, Figura 8.2.26].
 B: *Si continuem amb aquesta d'aquí, si la diagonal la continuem* [vuelve a insistir en la prolongación de FE por E] *i això...* [prolonga también AB por B].
 A: *Fem això, una paral.lela a aquesta* [representa en la Figura 8.2.25 una paralela a AB que pasa por E], *així, o no? I això d'aquí [DBE] és igual a això [MDE], o no?*

En este ejemplo, A traza una paralela y trata de comparar los nuevos triángulos que se obtienen, mientras que B pretende prolongar la diagonal.

2.2.3.2. Intercambios de dos intervenciones

Los intercambios que constan de dos intervenciones los representamos de la siguiente forma:



⁶ Los ejemplos que incluimos son fragmentos de transcripciones de los procesos de resolución que analizamos en el Capítulo 8, por eso, mantenemos aquí el idioma en el que los alumnos se expresan.

y se caracterizan porque la (re)acción de B aporta alguna información nueva, válida o repite la intervención de A o responde a alguna pregunta efectuada por A. Puesto que las características de cada una de estas (re)acciones —en el caso de la respuesta de validación ni siquiera la hemos considerado (re)acción— son tan diferentes, y para precisar las características de cada una de ellas, diferenciamos tres tipos de intercambios de dos intervenciones:

1) *Intercambios de tipo “cooperativo”*

Se produce un intercambio “cooperativo” si la intervención de B modifica de alguna forma el contenido de la intervención de A, ya sea:

- a) introduciendo alguna información equivalente a la de la intervención de A;
- b) aportando alguna información nueva que complementa la de la intervención de A;
- c) introduciendo en el diálogo algún elemento nuevo.

Consideramos implícito en esta definición el hecho de que en los tres casos —a, b y c— que hemos diferenciado, B acepta el contenido de la intervención de A. En cualquier caso, tal como indica H. P. Grice (Castellà, 1992), “los dos interlocutores están comprometidos a construir conjuntamente el intercambio y a contribuir a él en cada momento de la manera más conveniente” (p. 153), de la forma que ellos consideren más conveniente, añadiríamos nosotros.

Ejemplos ilustrativos de cada uno de los apartados de la definición podrían ser los siguientes:

- (A: *L'àrea del trapezi...?* [recordando], *base de sota més la de sobre per l'alçada, pot ser?*
 ↪ B: *Però l'àrea del trapezi la podem buscar tenint l'àrea dels tres triangles* [indica los triángulos equiláteros que componen el trapecio]. *Fem les àrees dels tres triangles, les sumem i ja tindrem l'àrea del trapezi...*

En este primer ejemplo, B aporta una información equivalente a la aportada por A, ya que muestra una forma de calcular el área del trapecio diferente de la propuesta por A.

- (A: *L'hexàgon regular té els sis costats iguals, no?*
 ↪ B: *I els angles també són iguals.*

En este segundo ejemplo, B introduce en el diálogo una información nueva —que los ángulos de un hexágono regular también son iguales— que complementa la información aportada por A.

- (A: *L'hexàgon regular té els sis costats iguals, no?*
 ↪ B: *I els seus angles?*

En el tercer ejemplo, B —simplemente y no es poco— introduce en el diálogo un elemento nuevo —pregunta sobre los ángulos del hexágono— sobre el que reflexionar.

2) Intercambios “de validación”

Se produce un intercambio “de validación” si B se limita sólo:

a) a validar positivamente (sí, vale, de acuerdo, etc.) el contenido de la intervención de A;

b) a valorar positivamente (muy bien, etc.) el contenido de la intervención de A;

c) a repetir, con las mismas u otras palabras, el contenido de la intervención de A;

y, además, en la continuación del discurso por parte de A, si es que la hay, éste no haga referencia a su intervención anterior⁷.

En la definición introducimos el condicional sobre la continuación del discurso porque la respuesta de validación dada por B no ha sido considerada en sí misma como (re)acción. Puede ocurrir que el intercambio continúe con alguna intervención por parte de A que haga referencia a la última que ha producido, en ese caso lo consideramos como intercambio de tres intervenciones.

Ejemplos que ilustrarían el intercambio de validación serían los siguientes:


 A: *Dues alçades del triangle* [indica FD], *dues alçades del triangle* [FEG],
 sí?
 B: *Vale, vale, vale, molt bé, ja ho he vist.*

Como se observa, B simplemente valida el contenido de la intervención de A.


 A: ... *Aquest* [FMD] *és el mateix que aquest* [MDG] *i aquest* [HMB] *és el mateix que aquest* [MBE].
 B: *Sí. Aquest i aquest és el mateix* [FMD y MDG], *i aquest i aquest és el mateix* [MBE y HMB].

En este ejemplo la afirmación de A es repetida por B en su intervención.

3) Intercambios del tipo “pregunta-respuesta”

Decimos que se produce un intercambio del tipo “pregunta-respuesta” si B se limita a responder a la pregunta efectuada por A, cuyo contenido no haga referencia al de intervenciones anteriores.

Un ejemplo de este tipo de intercambio sería:

⁷ No incluimos en esta definición las validaciones negativas porque no aparecen en los diálogos que hemos analizado.

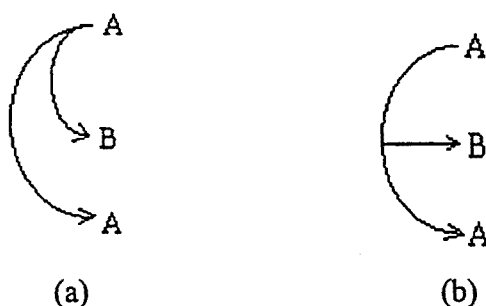
- A: *Sí. [Continúa leyendo], si FE és la diagonal del paral.lelogram..., què és un paral.lelogram?*
 B: *Aquest d'aquí [indica el DECF].*

Consideramos dentro de esta categoría aquellos intercambios en los que A solicite, por medio de una pregunta, alguna información a su interlocutor. Es decir, no clasificamos como intercambios del tipo pregunta-respuesta los que A haga una demanda de validación —hace una proposición de manera hipotética— y espera que se confirme. Este tipo de intercambios serán de validación si la respuesta sólo valida, o cooperativos si la respuesta se produce en los términos que corresponden a esta categoría.

La respuesta a la pregunta puede aportar información nueva en el contexto global del proceso de resolución o no.

2.2.3.3. Intercambios de tres intervenciones

Identificamos intercambios de tres intervenciones que podemos representar de dos formas distintas:



Los intercambios correspondientes a la representación (a) se caracterizan porque A vuelve a tomar la palabra haciendo referencia a su intervención anterior. Diferenciamos — en los apartados 1 y 2 de la página siguiente— dos tipos de intercambios de esta naturaleza en función de la incidencia que tenga en ellos la intervención de B.

Como en el caso de la interacción paralela, la continuación del discurso por parte de A se puede producir en términos de simple repetición, explicando el contenido de su intervención anterior sin aportar nada nuevo, en cuyo caso tendríamos un intercambio que podríamos llamar “estancado” o “repetitivo”, o bien siguiendo las reglas que hemos establecido para un intercambio “cooperativo”, es decir, aportando alguna información equivalente, complementaria, o introduciendo algún elemento nuevo, en este caso tendríamos un intercambio que podríamos llamar “progresivo”. Como hemos dicho antes, en el análisis de las interacciones de este tipo hemos de poner de manifiesto en qué términos se produce la progresión en el discurso por parte de A, de acuerdo con los contenidos de sus intervenciones.

El intercambio que representamos de la forma (b), y que definimos en el apartado 3 (p. 33), se caracteriza porque A —en la tercera intervención— responde a una pregunta

hecha por B —segunda intervención— con la finalidad de aclarar algún punto oscuro de la primera intervención de A.

1) Intercambios del tipo “validación-continuación”

Se produce un intercambio del tipo “validación-continuación” si B se limita a validar el contenido (o simplemente a repetir una parte del mismo con la intención de confirmarlo) de la intervención de A y éste continúa el discurso haciendo referencia a su última intervención.

La validación producida por B, en cierta forma produce una “retroalimentación del discurso”, es decir, una indicación de B para que A continúe el diálogo. Corresponde al análisis del contexto en el que se produce la validación para decidir si es una validación real o es una demanda de continuación de B para al final dar su opinión.

Un ejemplo de este tipo de intercambio sería:

- 
- A: *D'aquí fins aquí és un costat i mig* [vuelve a repetir].
 B: *Sí.*
 A: *Tres mitjos, tres costats partits per dos, no?, i això [FD] són dues altures.* [se refiere a las alturas de los triángulos GEF y EGD].

Como se puede observar en este ejemplo, B valida el contenido de la intervención de A y éste produce una nueva cuyo contenido está relacionado con el de su intervención anterior.

Consideramos dentro de esta categoría los intercambios en los que el alumno A afirma una proposición y demanda validación, se produce la validación por parte de B, y A vuelve a hacer referencia a la afirmación de su intervención anterior.

- 
- A: *Sí, si agafem els dos triangles aquests [indica el rombo], és ben bé..., ho parteixes per la meitat [BD], sí o no?*
 B: *Sí*
 A: *Això queda clar que és la meitat [indica el triángulo BGF y se refiere a la mitad del rombo].*

2) Intercambios del tipo “interrupción”

Diremos que se produce un intercambio del tipo “interrupción” si B produce alguna intervención cuyo contenido está relacionado con el de A, pero éste le interrumpe para dar lugar a una intervención que ignora la de B y está relacionada con la última que ha producido él.

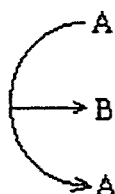
Un ejemplo ilustrativo de este intercambio sería:

- 
- A: *Sí* [Pone letras a los vértices del hexágono y los une con el centro].
 B: [Observa lo que hace A] *Mira, em sembla que ja ho sé, ja està* [une también los vértices con el centro].
 A: == *Mira, mira, així, no?* [refiriéndose a dos de los triángulos equiláteros en que ha quedado dividido el hexágono, Figura 8.4.6].

La primera intervención de A consta de dos partes: una válida —*Sí*— alguna intervención anterior; la otra —que es gestual— es la acción que da lugar al intercambio que ejemplificamos. Así pues, observamos cómo A —en su segunda intervención— interrumpe la intervención de B para fijarse sólo en dos triángulos de los seis en que había dividido el hexágono (primera intervención).

3) Intercambios del tipo “aclinatorio”

Los intercambios del tipo “aclinatorio” los representamos de la siguiente forma:



Decimos que se produce un intercambio del tipo “aclinatorio” si B se limita a pedir explicación (o bien confirmación) del contenido de la intervención de A (o de alguno de sus elementos) y A responde a dicha demanda.

La respuesta producida por A puede ser una simple repetición de la primera intervención de A o ser realmente una respuesta explicativa. Por tanto, el intercambio aclinatorio se puede producir en los mismos términos que el de validación-continuación, es decir, puede ser repetitivo o progresivo, y, dentro de este caso, local o global, según sea el contenido de la respuesta de A.

Ciertos tipos de intercambios cooperativos —los obtenidos al introducir en el discurso elementos y preguntar sobre ellos— los diferenciamos de los intercambios aclinatorios —hechos generalmente en forma de pregunta, pero no necesariamente siempre de esa forma— por la novedad del elemento introducido.

Presentamos a continuación dos ejemplos. En el primero, B pregunta sobre uno de los elementos de la intervención de A —el radio— y éste le responde explicándole claramente qué significa para él el radio de un hexágono.

- 
- A: *Ja, si ho partim per la meitat* [se refiere al hexágono y señala la diagonal AC de su figura], *això [AC] són dos costats, si aquests [FEG] són triangles equilàters, el radi...* [FG], *bueno, per dir-ho així, el radi és un costat.*
 B: *El radi?*
 A: *Bueno, la distància d'un vèrtex al centre és un radi, no?*

En el segundo, B no pide explicación sobre un elemento del contenido de la intervención de A, sino que su intervención tiene el sentido de pedir explicación a A sobre la utilidad de lo que ha expuesto. Así pues, la pregunta: “I...?” la podríamos traducir de la forma: ¿Y con eso qué?, o ¿qué quieres decir con eso?



A:

... Fem les àrees dels tres triangles, les sumem i ja tindrem l'àrea del trapezi. Els tres triangles equilàters, fem la seva àrea, les sumem i punt.

B:

I...?

A:

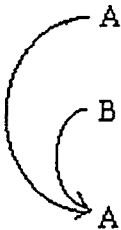
I tindrem l'àrea del trapezi, la multipliquem per dos i ja tindrem l'àrea de tot l'hexàgon.

2.2.3.4. Otros tipos de intercambios

Agrupamos bajo este título intercambios que pueden estar formados por tres o más intervenciones, es decir, no exactamente por tres. Entre los intercambios de este tipo hemos identificado los que definimos a continuación.

1) Intercambios del tipo “cogenerativo”

Los intercambios del tipo “cogenerativo” los representamos de la siguiente forma:



Se produce un intercambio del tipo “cogenerativo” si los contenidos de dos intervenciones anteriores producen, simultáneamente, alguna reacción en uno de los individuos.

Identificamos las intervenciones cogeneradas porque en sus contenidos se hace referencia a dos o más intervenciones anteriores. Muchas veces —como en el ejemplo que presentamos— las dos intervenciones que cogeneran la tercera no son consecutivas. En el contexto del diálogo tendremos que identificar las intervenciones que cogeneran y la cogenerada y explicar las razones en las que nos basamos para justificar tal asociación.

- A: *L'àrea de l'hexàgon la podem fer com sis vegades l'àrea d'un triangle equilàter de dins.*

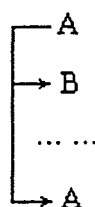
- B: *== Mira, mira, així, no?* [refiriéndose a dos de los triángulos equiláteros en que ha quedado dividido el hexágono, Figura 8.4.6].

- A: *O sigui, si agafem els dos triangles...* [indica las líneas BG y BD. Se refiere a los triángulos BGD y BDC, Figura 8.4.6], *o no?*

2) Intercambios de "desacuerdo"

Introducimos el intercambio del tipo "desacuerdo" basándonos en la idea de Roulet (Kerbrat-Orecchioni, 1990) sobre "completitud interactiva" (o apremio del doble acuerdo), que indica la necesidad de que "para que la negociación, y consecuentemente el intercambio, pueda ser cerrada es preciso que la reacción del interlocutor y la evaluación del locutor sean positivas" (p. 237).

Utilizamos como representación de los intercambios de desacuerdo la siguiente:



Se produce un intercambio de "desacuerdo" cuando el contenido de la intervención de A no es aceptado (o es evaluado negativamente) por B. El intercambio se cerrará cuando, después de una negociación (si es necesaria) entre ambos interlocutores, se llegue a un acuerdo mutuo⁸.

Un ejemplo ilustrativo de este intercambio sería:

- A: *Però aquí / Ah vale!* [escribe: $3c.A_2 = A_1.1.5$], *llavors es tatxa* [el 3 con el 1.5 y pone 2], *no, el c no es tatxa, amb què es tatxa el c?*
- B: *Un costat i mig* [indica $A_1.1.5$], *vale?*
- A: *El c no es tatxa.*
- B: *Sí.*
- A: *No, on es tatxa?*
- B: *Tres costats* [indica $3c.A_2$] *i aquí un costat i mig* [indica $A_1.1.5$].
- A: *Ah!* [pone c en la expresión $3c.A_2 = A_1.1.5$, obteniendo, $3c.A_2 = A_1.1.5.c$ y tacha], *ja està, ja està, vale!*

⁸ En los procesos de resolución que hemos analizado en el Capítulo 8, sólo un intercambio de desacuerdo no acaba en acuerdo mutuo entre los interlocutores. Más que un mantenimiento de posturas irreconciliables, lo que se pone de manifiesto en ese intercambio son las dudas de los interlocutores sobre el contenido matemático que provoca el desacuerdo, lo que les lleva a cambiar de tema sin manifestarse explícitamente sobre el origen de la disensión (véase apartado 10.8).

3) Intercambios encajados

En el análisis de las interacciones de los procesos de resolución de problemas que consideramos se presentan, a veces, intercambios que abarcan a su vez a otros. Pueden tener las formas siguientes:



Tiene lugar un intercambio “encajado” si después de producirse un intercambio — encuadrado en alguna de las categorías precedentes—, uno de los interlocutores hace referencia a alguna intervención —suya o de su compañero— anterior a dicho intercambio.

Ejemplo:

- A: *O sigui, si agafem els dos triangles...* [indica las líneas BG y BD. Se refiere a los triángulos BGD y BDC, Figura 8.4.6], *o no?*
 A: *Què volies dir tu?*
 B: *L'àrea de l'hexàgon és el mateix que si agafem els sis triangles equilàters i ja està, vale!, i l'àrea aquesta d'aquí* [ACE, Figura 8.4.5], *la del triangle petit, la de dins, a veure...!*
 A: [Insiste en su idea original]. *Si agafem els dos triangles* [indica BGD y DCB, se refiere al rombo BGDC, Figura 8.4.6] *i partim per la meitat, és la diagonal* [indica BD].

El intercambio del centro es del tipo “pregunta-respuesta”. Después de dicho intercambio, A ignora la respuesta producida por B y continúa el diálogo haciendo referencia a su primera intervención.

2.3. Aproximación al concepto de metacognición⁹

En este apartado nos proponemos concretar los aspectos de la metacognición que consideramos en esta investigación sobre la definición que de ella da A. H. Schoenfeld (1987) y para asociarlos con los componentes de un modelo, más amplio, como el que proponen J. Mayor, A. Suencas y J. González (1993).

En los años 80, J. Garofalo y F. K. Lester (1985) y A. H. Schoenfeld (1985b y 1987) adaptan y aplican la definición de Flavell¹⁰ sobre metacognición a la resolución de

⁹ Consideramos sinónimos los conceptos de metacognición, metaconocimiento y actividad metacognitiva.

¹⁰ “Metacognición” se refiere al conocimiento propio relativo a nuestros propios procesos cognitivos o a cualquier cosa relacionados con ellos, esto es, las propiedades de aprendizaje relevante de información o datos... Metacognición se refiere, entre otras cosas, al control activo y regulación y orquestación

problemas. Introducen en su tratamiento aspectos no cognitivos como son las creencias e intuiciones.

Dichos investigadores dan a la metacognición un significado parecido a “reflexión sobre la cognición” o “pensamiento sobre nuestro propio pensamiento”, y distinguen en él tres categorías:

“1. Tu conocimiento sobre tus propios procesos de pensamiento. ¿Cómo eres de preciso para describir tu propio pensamiento?

2. Control o autorregulación. ¿Cómo controlas lo que haces cuando (por ejemplo) resuelves problemas y cómo utilizas (si es que lo haces) las experiencias de tus observaciones para guiar tus acciones en la resolución de problemas?

3. Creencias e intuiciones. ¿Qué ideas, sobre matemáticas, aportas a tu trabajo en matemáticas, y cómo influye eso en la manera como haces matemáticas?” (Schoenfeld, 1987, p. 190).

La visión general de la metacognición, relacionada con la resolución de problemas, se completa cuando McLeod (cf. Callejo, 1994) extiende los aspectos no cognitivos —como son las creencias del sujeto sobre las matemáticas, en general, o sobre la propia tarea de resolver problemas, en particular— a los afectos, diferenciando tres aspectos de la afectividad —creencias, actitudes y emociones— y ordenándolos en un continuo “según que predomine la componente cognitiva o la componente afectiva y que la respuesta sea más o menos intensa o más o menos estable” (p. 38).

De todos los aspectos que abarca el concepto de metacognición relacionado con la resolución de problemas, en esta investigación nos centramos en los que tienen que ver con el control que los alumnos ejercen sobre sus propios procesos cognitivos en la resolución de problemas. Entraría, pues, nuestro trabajo dentro del apartado 2 —control— de la definición que A. H. Schoenfeld (1987) da de metacognición. Es por eso que adaptamos, de este autor, su modelo de análisis del componente del conocimiento y de la conducta relacionado con la gestión (Schoenfeld, 1985b) al caso concreto de los problemas que estudiamos —problemas que comparan áreas de superficies planas— y al tipo de alumnos que participan —alumnos de 16-17 años—.

Ahora bien, los aspectos de la metacognición que consideramos se pueden encuadrar en el modelo abstracto —desvinculado del sujeto de conocimiento y de la actividad que éste realiza— de J. Mayor, A. Suencas y J. González (1993). Este modelo está basado, igual que las definiciones anteriores, en la metacognición entendida como conocimiento de nuestro propio conocimiento, es decir, consideran la actividad metacognitiva como actividad cognitiva, pero en la que el objeto del conocimiento es el propio conocimiento. Dichos autores estudian por separado tanto los componentes propios de la actividad metacognitiva como los del conocimiento que es objeto de esa actividad, integrándolos todos ellos para obtener el modelo de metacognición que proponen.

Nosotros resumimos brevemente la parte correspondiente a la actividad metacognitiva para, relacionándola con la definición de A. H. Schoenfeld, identificar en ella los componentes de nuestra investigación.

consecuentes de estos procesos en relación a los objetos cognitivos sobre los que ellos se aplican, normalmente al servicio de algunos objetivos o fines concretos” (cf. Garofalo y Lester, 1985, p. 163).

La actividad metacognitiva en el modelo de J. Mayor, A. Suengas y J. González (1993) incorpora: *a)* el componente de control —diferenciando entre autocontrol, control ejecutivo y acción dirigida a metas—; *b)* el componente consciente —diferenciando en él tres subcomponentes: la introspección, la intencionalidad y los niveles de conciencia—, no incorporado de forma explícita en las definiciones de Favell, Garofalo y Lester o de Schoenfeld¹¹; *c)* y, además, un nuevo componente que los autores llaman “autopoiesis”, al que dan el significado de la capacidad que tiene la actividad metacognitiva de volver sobre sí misma (“auto”) y de ir más allá de lo dado (“poiesis”), es decir, crear algo distinto de lo ya existente.

Los citados autores representan su modelo de forma tridimensional, como en la Figura 2.3.1, para resaltar la manera como interactúan los diversos subcomponentes que identifican.

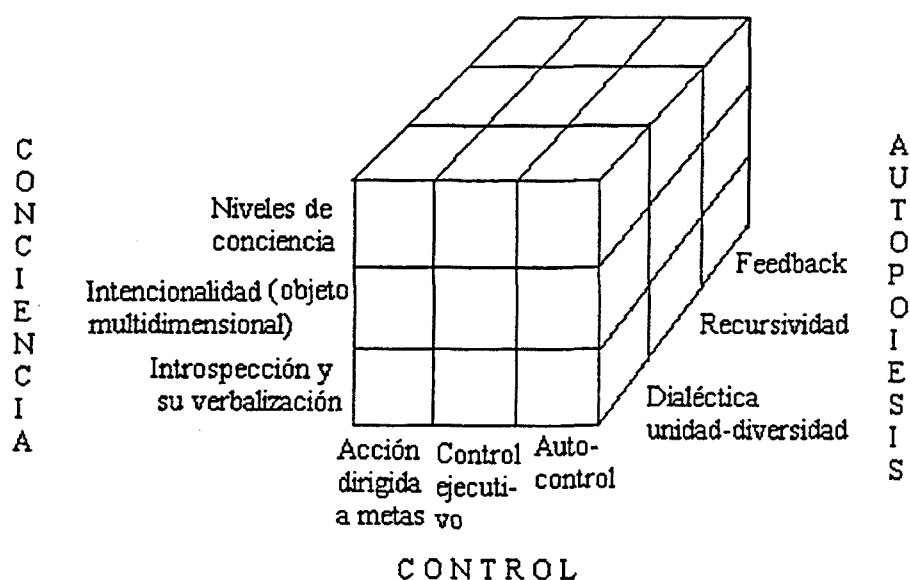


Figura 2.3.1 Modelo de los componentes metacognitivos (de J. Mayor A. Suengas y J. González, 1993, p. 57)

Por otra parte, profundizando más en el componente de control de la actividad metacognitiva, podemos decir que el modelo de A. H. Schoenfeld para analizar la conducta de los alumnos en la resolución de problemas —y por tanto la adaptación que proponemos en el apartado 3.5.2— tiene una parte, la que se refiere sobre todo a los episodios de análisis, exploración y de planificación, que se identifica con el subcomponente de “acción dirigida a metas” del modelo metacognitivo de J. Mayor, A. Suengas y J. González (1993), ya que, según estos autores, dentro de ese subcomponente del control “se concibe al sujeto como responsable de la selección y propuesta de sus propios fines, con lo que el sujeto no

¹¹ En la definición de A. H. Schoenfeld ya se incorpora, aunque de forma implícita, el componente consciente, ya que difícilmente se puede conocer o pensar sobre nuestros propios procesos de pensamiento si no es teniendo un cierto grado de conciencia. Grado de conciencia que es necesario aumentar si queremos mejorar los procesos metacognitivos. M. L. Callejo (1994) hace referencia a la metarreflexión como proceso que “hace emerger los fenómenos que se producen en nuestra mente a nivel inconsciente y semiconsciente y que éstos pasen de un plano implícito a un plano explícito” (p. 37).

controla sólo la ejecución (...), sino que controla toda la acción, incluyendo la fijación de objetivos y la elaboración de la respuesta” (p. 59), aunque la “acción dirigida a metas” pueda tener también una interpretación más amplia, como es el caso de la resolución de problemas abiertos.

Los otros episodios del modelo de A. H. Schoenfeld —en especial los de ejecución, verificación, evaluaciones locales, etc.— están más en consonancia con la interpretación que J. Mayor, A. Suencas y J. González dan del subcomponente de control ejecutivo.

2.4. Base de conocimientos

Consideramos la base de conocimientos como el objeto de la actividad metacognitiva y precisamos la definición que de ella da M. L. Callejo (1994)¹² como el conjunto de conocimientos, de que dispone el alumno, que tienen que ver tanto con los contenidos matemáticos de los problemas que resuelven como con determinadas heurísticas que se pueden utilizar en su resolución, abarcando, con ello, dos de los componentes del conocimiento y de la conducta que A. H. Schoenfeld (1985b) identifica —“recursos”¹³ y “estrategias heurísticas”—.

Siguiendo el uso y la nomenclatura que se hace en la actualidad de este tipo de conocimientos, los diferenciamos —y analizaremos por separado— en conocimientos sobre hechos y conceptos y sobre procedimientos¹⁴, y definimos lo que entendemos por oportunidad de aprendizaje de ambos tipos de conocimientos.

2.4.1. Sobre los conocimientos factuales y conceptuales. Aspectos generales y específicos

El conocimiento factual se caracteriza por ser un conocimiento de piezas aisladas de información, es decir, de informaciones que no están relacionadas con otras ni tienen el apoyo de ninguna estructura conceptual.

Los hechos o proposiciones formarán parte del conocimiento conceptual en la medida en que el sujeto sea capaz de establecer relaciones entre ellos, es decir, en la medida en que

¹² “Es el conjunto de conocimientos que están disponibles en la memoria del sujeto para ser utilizados: hechos, definiciones, algoritmos, métodos de resolución, heurísticas, etc.” (p. 34).

¹³ Según A. H. Schoenfeld (1985b y 1992), los aspectos del conocimiento básico que son relevantes en una actuación competente de un dominio son: “el conocimiento informal e intuitivo sobre el dominio; hechos, definiciones y semejantes; procedimientos algorítmicos; procedimientos rutinarios; competencias relevantes; y conocimiento sobre las normas del discurso en el dominio” (1992, p. 349).

¹⁴ Son muchos los autores que hacen una clasificación diferente del conocimiento matemático, como, por ejemplo, A. J. Baroody y H. P. Ginsburg (1986), que diferencian, en aritmética, entre el conocimiento significativo o semántico —conocimiento explícito o implícito de conceptos y principios— y el mecánico —conocimiento de hechos y procedimientos (normas y algoritmos)—, señalando, con ejemplos, la dificultad que supone distinguir, en cada caso, entre uno y otro. Por el contrario, A. H. Schoenfeld (1986) habla de las aproximaciones deductiva e intuitiva empírica al descubrimiento en matemáticas y argumenta que la construcción del conocimiento se consigue por la interacción entre ambas; y P. W. Thompson (cf. Dreyfus, 1990) propone un esquema teórico interesante en el que el conocimiento matemático está caracterizado en términos de “procesos” y “objetos”. En cambio, J. Mayor, A. Suengas y J. González (1993) indican que el conocimiento, en general, se ha tratado de organizar de formas muy diversas, como declarativo y procedimental, analógico y proposicional, explícito e implícito, basado en esquemas o en modelos mentales, etc.

formen parte de una red de conexiones significativas en las que dichas conexiones sean tan importantes como las piezas discretas de información que conectan (Hiebert y Lefevre, 1986). Así pues, lo que prima en los conocimientos conceptuales son las relaciones que se establecen entre hechos y proposiciones —o entre los propios conceptos, dando lugar, en este caso, a lo que se llama principios y teorías—.

Por tanto, teniendo en cuenta que lo que diferencia a ambos tipos de conocimientos —factual y conceptual— es la cantidad (y la calidad, como veremos más adelante) de las conexiones que se pueden establecer, los situaremos en un continuo que va desde las piezas aisladas de información —conocimiento factual— a la relación múltiple y abstracta de diferentes conceptos dentro de un mismo campo conceptual, pasando por lo que J. I. Pozo (1992) llama “conceptos específicos”.

La decisión de considerar los conocimientos conceptuales, en general (de teorías, principios y conceptos específicos), y factuales en un continuo, en la medida que estén más o menos inmersos en una tela de araña en la que primen las conexiones significativas entre ellos, la basamos en la dificultad que supone, en muchos casos, diferenciar entre ambos tipos de conocimientos, ya que “no reside tanto en el objeto que el alumno debe aprender (...), sino en lo que hace para aprender (los procesos), que en definitiva determina si ha adquirido datos (aprendizaje literal sin comprensión) o conceptos (aprendizaje con significado)” (Pozo, 1992, pp. 28-29). Este componente subjetivo del conocimiento es el que hace que no se pueda trazar una línea divisoria clara entre los diferentes tipos de conocimientos.

Por ejemplo, la fórmula tradicional del área de un triángulo —base por altura partido por dos— puede ser almacenada en la memoria como un hecho aislado de información —conocimiento factual— o, por el contrario, llegar a formar parte de una red de conexiones con otros conceptos, como el de área de un paralelogramo, de un rombo, otras formas del área de un triángulo, etc., en cuyo caso formaría parte del conocimiento conceptual¹⁵.

Por otra parte, es importante reflexionar sobre la naturaleza de las conexiones que se establecen entre hechos y proposiciones para originar los conceptos. Así, J. Hiebert y P. Lefevre (1986) diferencian entre dos tipos de conexiones: *a*) las de nivel primario, que son aquéllas en las que “la conexión de la información está construida al mismo (o menor) nivel de abstracción en el que la propia información está representada” (p. 4) y, por tanto, están ligadas al contexto específico que se considera; y *b*) las relaciones de nivel reflexivo (*reflective level*), que son las construidas a un nivel de abstracción más alto que el de las piezas de información que conectan, es decir, menos ligadas al contexto de la información dada.

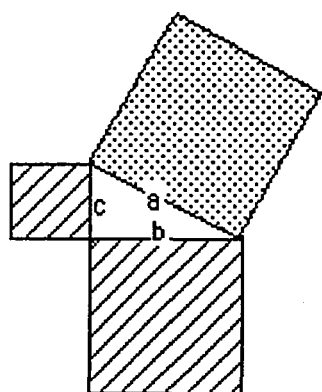
A continuación mostramos con un ejemplo una manera de construir conexiones que estén ligadas con los contenidos conceptuales involucrados en los problemas que comparan áreas de superficies planas.

¹⁵ El carácter subjetivo que damos al conocimiento conceptual concuerda con la diferencia que N. Balacheff (1990) establece entre “concepto y el resultado del proceso de formación del concepto en la memoria del individuo” (pp. 237-238), es decir, diferencia entre la existencia de un “conocimiento del estudiante” y un “conocimiento de referencia” —que podría ser el que una persona experta tiene de un concepto. Otros investigadores —citados por N. Balacheff— analizan esa diferencia considerando los términos “concepto y concepción” (Grenier), “imagen objetiva y subjetiva” (Hirabayashi y Shigematsu), y “definición de concepto” e “imagen del concepto” (Vinner y Hershkowitz).

Cuando los alumnos de la Enseñanza Secundaria utilizan el teorema de Pitágoras generalmente lo hacen considerando su dimensión métrica longitudinal (cálculo de la longitud de la hipotenusa a partir de la longitud de los catetos en un triángulo rectángulo), pero una de las cosas que se espera de dichos alumnos es que lo relacionen con el concepto de área de un cuadrado. En la medida en que esta relación se produzca, dando lugar a un enunciado más geométrico del teorema —si se suman las áreas de los cuadrados contruidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo se obtiene el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa (Figura 2.4.1)—, el alumno estará produciendo entre ambas informaciones un tipo de conexión a nivel primario, ya que dicha conexión no es más abstracta que las informaciones que el alumno relaciona (Cuadro 2.4.1, p. 42).

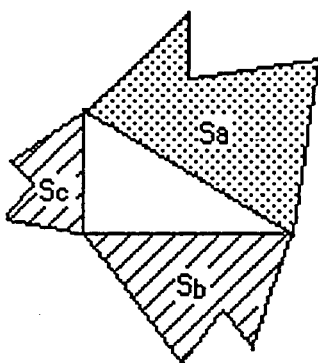
En cambio, en la medida en que los alumnos sean capaces de liberar la conexión del contexto específico, es decir, de descontextualizar la información y aumentar el grado de abstracción del conocimiento para, de esta forma, aumentar también el grado de abstracción de las conexiones, en esa medida estarán comenzando a crear conexiones de nivel reflexivo.

En nuestro ejemplo hemos generalizado, por una parte, el teorema de Pitágoras (Figura 2.4.3) y, por otra, las figuras que construimos sobre los lados del triángulo (Figura 2.4.2), de esa forma se producen conexiones —más generales que las de nivel primario— entre las nuevas informaciones que se originan, como mostramos en el Cuadro 2.4.1 (p. 42).



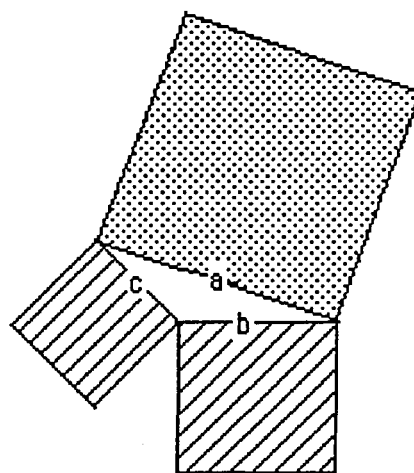
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Figura 2.4.1



$$S_a = S_b + S_c$$

Figura 2.4.2



$$a^2 > b^2 + c^2$$

Figura 2.4.3

Por tanto, la cantidad y la calidad de conexiones que los alumnos son capaces de producir cuando relacionan dos o más informaciones, nos da una idea de la capacidad que tienen para desligar los conocimientos del contexto específico en el que son presentados.

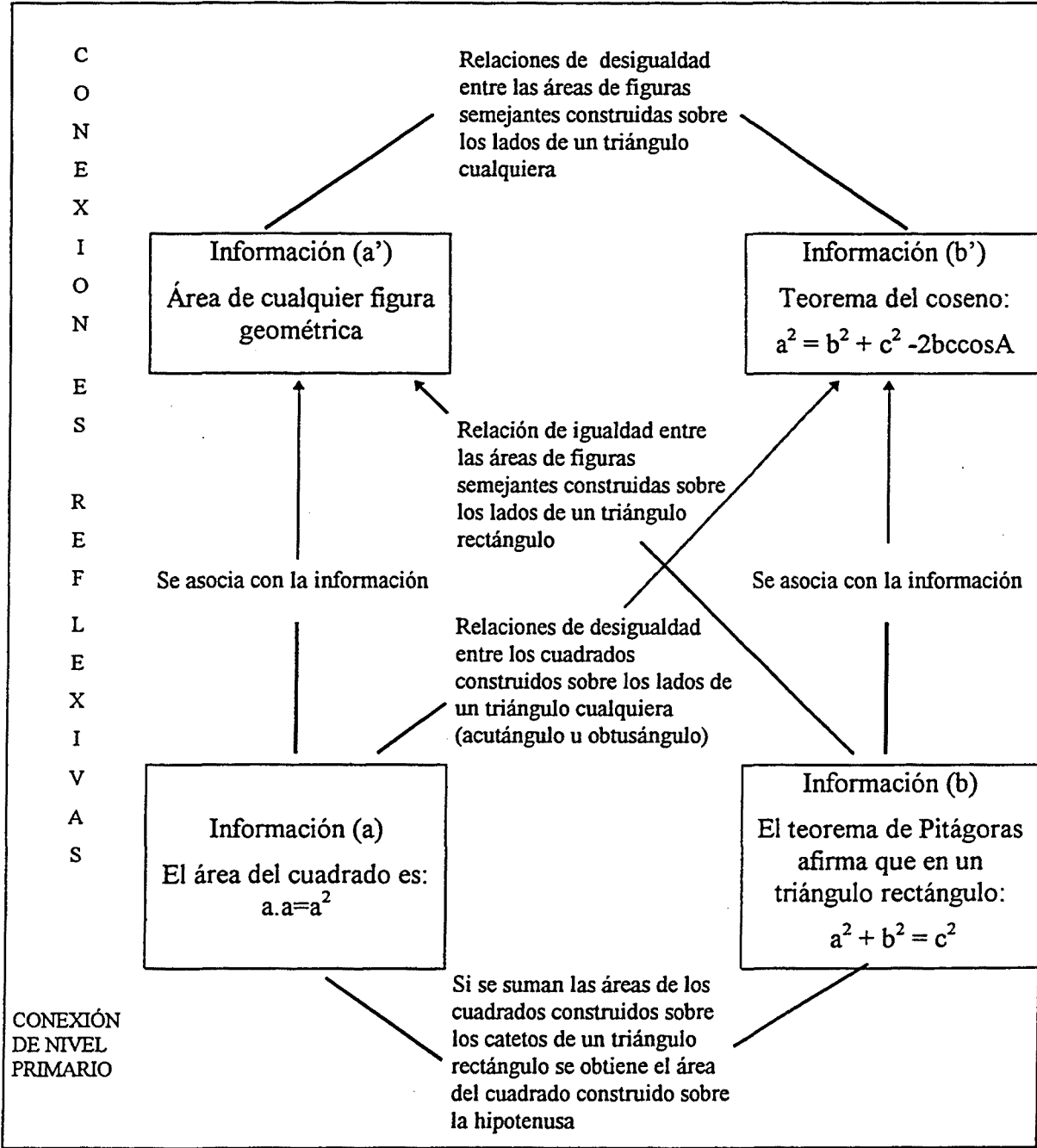
Evaluar el incremento en la cantidad y calidad de dichas conexiones, después de un periodo instructivo, exige la elaboración de instrumentos lo suficientemente “finos” como para detectar los cambios que se produzcan.

De cualquier forma, volviendo al inicio de este apartado, no debemos olvidar la importancia de los conocimientos factuales, ya que, como es obvio, las relaciones entre

piezas aisladas de información no pueden construirse si el conocimiento de tales piezas no existe (Hiebert y Lefevre, 1986), o como afirma J. I. Pozo (1992), “sin una buena ‘base de datos’ o un conocimiento factual será poco lo que podamos entender de...” (p. 21).

Algunos de los contenidos matemáticos relacionados con la categoría de conocimientos factuales y conceptuales en la resolución de PCASP y que analizamos en los Capítulos 4, 5 y 6 son:

- expresiones de las áreas de superficies planas (fórmulas de las áreas de triángulos, paralelogramos, polígonos regulares, etc.);



Cuadro 2.4.1

- relaciones métricas en triángulos rectángulos (teorema de Pitágoras, teorema del cateto, teorema de la altura, etc.) o no rectángulos (teorema de Tales);
- relaciones entre los ángulos determinados por rectas paralelas cortadas por una secante;
- razones y relaciones trigonométricas (senos, cosenos, etc., teorema de los senos, teorema del coseno, expresiones del área de un triángulo en función de razones trigonométricas);
- elementos y propiedades de polígonos (triángulos de cualquier tipo, número de alturas, cuadrados, paralelogramos, hexágonos, etc.);
- congruencia de polígonos;
- equivalencia de polígonos;
- semejanza de polígonos (regulares);
- relaciones entre los conceptos de congruencia, equivalencia y semejanza;
- criterios de igualdad de triángulos;
- relación entre los elementos lineales correspondientes y las áreas de dos figuras semejantes.

2.4.2. Sobre los conocimientos procedimentales. Aspectos generales y específicos

C. Coll y E. Valls (1992) dan una definición general de procedimiento —“un conjunto de acciones ordenadas, orientadas a la consecución de una meta” (p. 84)— que podemos aplicar, en concreto, a la resolución de problemas. Los autores destacan de este concepto los tres aspectos que aparecen en su definición: que es un conjunto de acciones; que no son acciones cualesquiera sino que han de ser ordenadas; y que persiguen un fin.

Por otra parte, J. Hiebert y P. Lefevre (1986) consideran que el conocimiento procedimental tiene dos componentes: “el lenguaje formal o sistema de representación simbólico”, por un lado, y “los algoritmos y normas para completar las tareas matemáticas” (p. 6), por otro. Esta composición nos parece acertada por lo que se refiere a la consideración de los sistemas de representación simbólica —que nosotros extendemos no sólo al conocimiento de las reglas que rigen el manejo de símbolos en el lenguaje formal en matemáticas, sino a toda la estructura de la representación simbólica (Cuadro 2.4.2)—, pero, en cambio, es poco explícita por lo que se refiere a algoritmos y normas, debido a que los procedimientos algorítmicos son los de más frecuente uso en el tipo de ejemplos que, sobre la aritmética escolar, manejan los autores.

Pensamos que una diferenciación entre procedimientos técnicos (o técnicas), que incluyen los algorítmicos y los que están relacionados con los contenidos matemáticos de los problemas que se resuelven, y las heurísticas, nos daría una idea más completa de las características del conocimiento procedimental asociado a la resolución de los problemas que consideramos, quedando desligado dicho conocimiento, al menos parcialmente, de la idea de J. Hiebert y P. Lefevre de que un procedimiento es ejecutado linealmente y de forma predeterminada, refiriéndose a procedimientos algorítmicos.

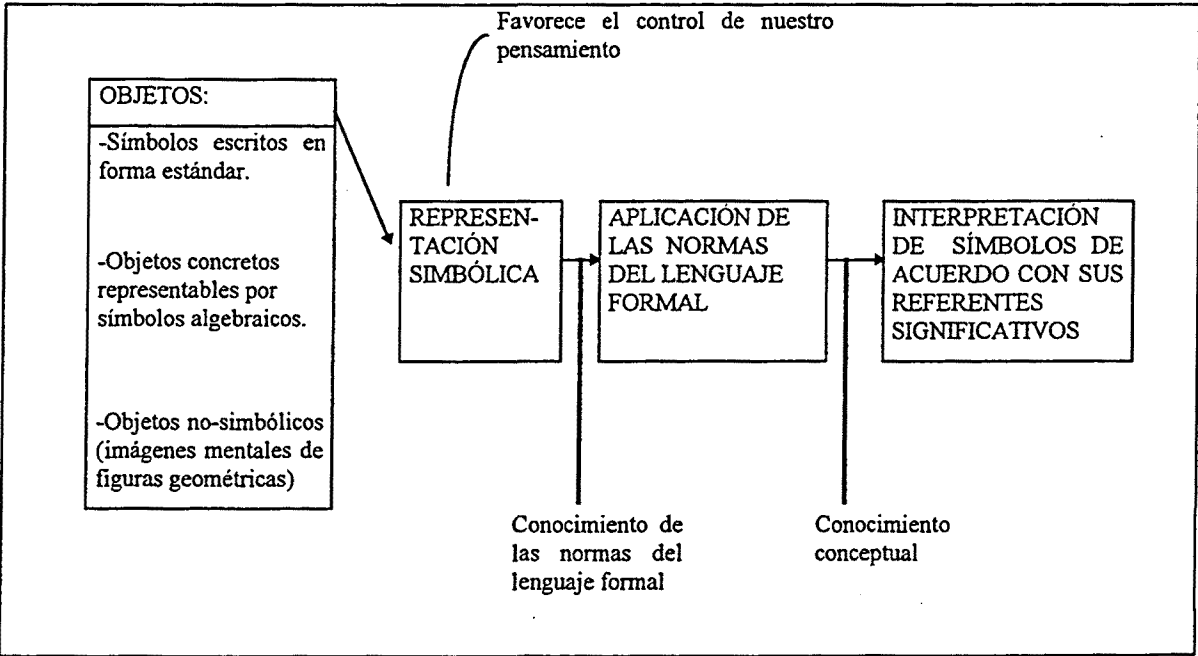
Hacemos a continuación una breve descripción de cada uno de los componentes del conocimiento procedimental considerados anteriormente y distinguimos entre conocimiento de la representación simbólica y conocimiento de procedimientos algorítmicos y técnicos —

la mayoría de los cuales manipula símbolos, aunque otros pueden no operar directamente sobre ellos— y heurísticos (y el concepto de enfoque de un problema).

a) Sistemas de representación simbólica

Partiendo de la base de las categorías —objeto, símbolo y concepto— derivadas de la concepción epistemológica del significado matemático de R. Bromme y H Steinbring (cf. Seeger, 1991) y centrándonos en la relación objeto-símbolo, pensamos que, en la resolución de problemas de matemáticas, el conocimiento del proceso de simbolización de objetos, en general, y el de las normas que rigen el lenguaje formal, en particular, son muy útiles, ya que favorecen el control de los procesos de resolución (conocimiento metacognitivo), utilizan el conocimiento conceptual en algunas fases de su aplicación (Cuadro 2.4.2), y nos permiten manejar, de forma relativamente fácil, ideas complejas manipulando símbolos que están sujetos a determinadas normas sintácticas (Hiebert y Lefevre, 1986).

Ahora bien, en el componente simbólico del conocimiento procedimental, que, como hemos dicho antes, nosotros extendemos a todo el proceso de simbolización, aunque algunas partes de dicho proceso no sean del dominio exclusivo de tal conocimiento, podemos distinguir tres aspectos clave (Cuadro 2.4.2) :



Cuadro 2.4.2

- Los objetos sobre los que opera este tipo de conocimientos, agrupados en tres clases: por una parte, símbolos escritos en forma estándar (4, /, $\tilde{A}$, +, etc.); por otra, objetos concretos representables por símbolos algebraicos —nos referimos a objetos que aparecen en problemas que se resuelven por traducción al lenguaje algebraico; y, por último, objetos, como las imágenes mentales de figuras geométricas, cuya representación simbólica se ha de hacer por medio de objetos concretos, como, por ejemplo, cuando nos

piden que demostremos alguna propiedad válida para cualquier hexágono regular (como es el caso del problema del hexágono que analizamos en el Capítulo 5)¹⁶. En este caso representamos gráficamente un hexágono regular concreto y para demostrar tal propiedad podemos seguir el camino de considerar los elementos del hexágono (lados, ángulos, etc.) como objetos concretos y representarlos por medio de símbolos algebraicos, o bien hacer una demostración independiente de la magnitud de los elementos del hexágono.

En cualquier caso, está claro que la utilización de este tipo de objetos puede conducir a confusiones —confusión símbolo/objeto de la que habla Pimm (1990)— si los alumnos pretenden demostrar una propiedad genérica utilizando sólo magnitudes concretas.

- Las normas que rigen la manipulación de los símbolos en el lenguaje formal. Este aspecto está más relacionado con los tipos de procedimientos que describimos en las páginas siguientes.

Las normas del lenguaje formal comienzan a enseñarse ya en los primeros años de la escuela y son, según L. B. Resnick (1987), una de las causas que dificultan el aprendizaje de las matemáticas al producirse en los alumnos un choque entre sus propias intuiciones matemáticas — desarrolladas en la edad preescolar— y el aprendizaje de tales normas.

- La interpretación de los símbolos, de acuerdo con sus referentes significativos, se apoya necesariamente en conocimientos conceptuales. Resaltamos un aspecto de esta interpretación, el que L. B. Resnick (1987) llama la “construcción de significados”, que consiste en interpretar las expresiones aritméticas¹⁷ y algebraicas en el contexto en el que se consideren, siendo la ignorancia de tales significados otra de las causas, según la autora, de la dificultad del aprendizaje de las matemáticas.

Los procesos que dan lugar a las representaciones simbólicas tienen que ver, en esta investigación, no sólo con la utilización del lenguaje algebraico como medio para resolver determinados PCASP, sino también con la utilización de las representaciones que se manejan de las figuras y las interpretaciones que de ellas se hacen a la hora de razonar de forma genérica o concreta sobre determinada simbología.

b) Procedimientos técnicos y algorítmicos

En los procedimientos algorítmicos están establecidas de antemano las normas que los desarrollan, siendo este tipo de conocimiento procedimental bastante parecido al factual por lo que se refiere a su enseñanza, aprendizaje y evaluación, hasta el punto de que algunos autores (Baroody y Ginsburg, 1986) lo consideran de la misma naturaleza (conocimientos mecánicos). A. H. Schoenfeld (1985b) considera entre los procedimientos algorítmicos todas las construcciones estándares con regla y compás (trazado de las alturas de un triángulo, de la bisectriz de un ángulo, etc.), el cálculo de derivadas, etc.

¹⁶ Todos los problemas que planteamos en esta investigación tienen como objetivo la búsqueda de relaciones entre áreas que sean independientes de la elección del punto que se considere (como en el problema del triángulo —véase Capítulo 5—), de la longitud de los lados, aunque se tengan que verificar determinadas relaciones entre segmentos o áreas (problema del cuadrado y problema del triángulo —véase Capítulo 5—, etc.).

¹⁷ Uno de los ejemplos típicos —propuesto por A. H. Schoenfeld (1991)— donde se pone de manifiesto la ausencia de significado de la simbología utilizada por parte de los alumnos —incluso por algunos que cursan Enseñanza Secundaria, como hemos tenido ocasión de comprobar— es el siguiente problema: ¿cuántos autobuses, de 36 plazas cada uno, se necesitan para transportar a 1128 soldados?

Los procedimientos rutinarios se caracterizan por un cierto grado de libertad a la hora de elegir las variables que intervienen en la resolución de los problemas en los que hay que aplicarlos, aunque el esquema del procedimiento sea, en todos los casos, bien conocido.

Algunos procedimientos algorítmicos y rutinarios que se utilizan en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas, y que serán analizados en los Capítulos 4, 5 y 6, son los siguientes:

- identificación y representación de las alturas de los triángulos;
- reconocimiento de la rectangularidad de triángulos (por aplicación del teorema de Pitágoras y de las razones trigonométricas);
- aplicación (o comparación) de fórmulas (ya sea por aplicación directa de fórmulas para el cálculo o comparación de áreas, o por aplicación de fórmulas para el cálculo de algunos elementos de las figuras);
- aplicación de la razón de semejanza a la comparación de áreas de superficies planas;
- aplicación de criterios de congruencia de polígonos (triángulos);
- aplicación de los criterios de igualdad y de semejanza de triángulos;
- aplicación del teorema de Tales.

A lo largo de este trabajo utilizamos con frecuencia la palabra “técnica”; con ella nos referimos tanto a los procedimientos que acabamos de nombrar, como a los que resultan de la aplicación sucesiva de dos o más de ellos, o a los que, estando relacionados con los contenidos matemáticos específicos de los problemas que se resuelven, su aplicación está basada en descomposiciones previas de las figuras y aplicación posterior de algún procedimiento algorítmico o rutinario. Nos referimos en concreto a las técnicas que analizamos en el Capítulo 4, como son:

- triangulación de polígonos;
- cuadratura de polígonos;
- utilización de mallas poligonales (triangulares, cuadrangulares, etc.);
- técnicas de equivalencia por descomposición (con o sin utilización de mallas poligonales) y por complemento;
- transformación de rectángulos en otros equivalentes.

c) Procedimientos heurísticos

No es nuestra intención realizar un estudio sobre la heurística, como han hecho L. Puig (1996) y A. H. Schoenfeld (1985b), pero concretamos la definición que adoptamos de ella, puesto que en determinados momentos de esta investigación hacemos referencia a los procedimientos heurísticos.

L. Puig (1993) da de la heurística una definición que nos permite delimitar perfectamente los procedimientos que han de llevar ese calificativo¹⁸: “Lo que es propio de

¹⁸ A. H. Schoenfeld da una definición, desde nuestro punto de vista más ambigua, de las “estrategias heurísticas”: “reglas empíricas para resolver con éxito los problemas, sugerencias generales que ayudan a un individuo a comprender mejor un problema o a hacer progresos hacia su solución” (p. 23). Otros autores (Carrillo, 1985, Coll y Valls, 1992, entre otros) consideran los procedimientos estratégicos, o estrategias generales, como aquellos que consisten en “ir seleccionando, combinando, relacionando conocimientos diversos que se evocan, con la intención de inventar o construir el camino de resolución que antes no

la heurística es el estudio de los *modos* de comportamiento al resolver problemas y los *medios* que se utilizan en el proceso de resolverlos que *son independientes del contenido* y que *no suponen garantía* de que se obtenga la solución” (p. 38)

Esta definición, según indica el autor, deja fuera de los procedimientos heurísticos aquellos que para describirlos es necesario hacer referencia al contenido del problema, es decir, a los relacionados con los elementos específicos del dominio del problema que se resuelve. Los procedimientos heurísticos abren, pues, vías para poder resolver un problema que pueden ser recorridas de diferente forma utilizando distintas técnicas, pero que no suponen garantía de que se obtenga la solución.

Más que procedimientos heurísticos, nosotros analizamos los enfoques —entendidos como posibles caminos por los que se puede llegar a obtener la solución de un problema— que los alumnos seleccionan y el grado de desarrollo que consiguen de ellos.

El concepto de enfoque da a entender que se puede llegar a la solución de un problema utilizando:

a) Directamente determinadas técnicas, como ocurre en la resolución del problema de la comparación de las áreas de los triángulos rayados de la Figura 2.4.4 (problema del paralelogramo —véase Capítulo 5—), en el que se puede utilizar la técnica de aplicar (o comparar) las fórmulas de las áreas de los triángulos habiendo identificado en ellos la base común y la misma altura.

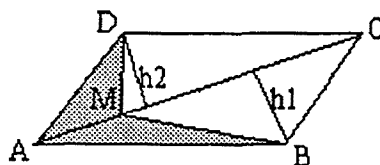


Figura 2.4.4

b) Una combinación de heurísticas y técnicas, como ocurre, por ejemplo, en el mismo problema, cuando se utiliza la herramienta heurística (en la terminología de L. Puig) “consideración de casos particulares, límite o singulares” y se resuelve el problema que se obtiene, para observar si la técnica que se ha aplicado vale para el problema original.

En los problemas que los alumnos resuelven por parejas (véase Capítulo 5) identificamos enfoques que tienen que ver con las técnicas que hemos mencionado anteriormente y con procedimientos tales como:

- identificaciones simbólicas (utilización y manipulación de notaciones algebraicas);
- organización de la información (construcción de tablas). Procedimientos inductivos;
- procedimientos de ensayo-error y de generalización;
- búsqueda de casos particulares (límites o singulares);

existía” (Coll y Valls, p. 95), que abarcarían, desde nuestro punto de vista, tanto los procedimientos heurísticos como algunos aspectos del control en los metaconocimientos.

- búsqueda de regularidades (o exploración de simetrías —en nuestro caso geométricas— para dividir el problema en partes).

2.4.3. Oportunidades de aprendizaje

Una investigación como ésta, en la que analizamos la influencia de la interacción social de los alumnos en la construcción del conocimiento, no puede dejar de identificar y analizar las situaciones, que se den en los procesos de resolución, en las que a los alumnos se les presente la oportunidad de reorganizar sus estructuras conceptuales, es decir, de aumentar sus conexiones —primarias o reflexivas— o de relacionarlas con el aprendizaje de nuevas formas de proceder en la resolución del tipo de problemas que utilizamos en esta investigación.

La idea de oportunidad de aprendizaje —y la consiguiente de aprendizaje¹⁹ matemático— ha sido considerada por P. Cobb y J. W. Whitenack (1996) cuando tratan de estudiar la relación entre los procesos psicológicos y sociales en niños de nueve años y la unión indirecta que se produce entre ellos como consecuencia de que uno de los alumnos interprete las acciones del otro y reorganice su actividad matemática. En particular, para dichos investigadores, “la noción de oportunidad de aprendizaje indica que el aprendizaje matemático es visto como un proceso de autoorganización conceptual así como de enculturación” (p. 218).

En nuestro caso, pensamos que para que se produzca una oportunidad de aprendizaje para un alumno es necesario que en su base de conocimientos no esté el contenido que tiene oportunidad de aprender, por tanto no consideramos tales oportunidades aquellas en las que no tengamos evidencia de que el alumno en cuestión desconoce el contenido del diálogo en el que se producen.

Entendemos que un alumno desconoce un contenido cuando se le ha preguntado (por ejemplo, en la prueba inicial) y su respuesta ha sido incorrecta, o si manifiesta explícitamente desconocerlo durante el proceso de resolución (ya sea porque hace una pregunta, por un desacuerdo o, simplemente, porque lo dice). Sobre la base de estas reflexiones, consideramos que las oportunidades de aprendizaje se presentan no sólo en los momentos en los que el alumno interpreta las acciones de su compañero —como indican P. Cobb y J. W. Whitenack—, sino también cuando se producen:

- Situaciones de desacuerdo sobre alguna cuestión concreta²⁰, es decir, situaciones en las que uno de los dos alumnos (o los dos) se ven obligados a explicar su pensamiento ante los desafíos de su compañero. Al final, si hay dos puntos de vista distintos sobre una determinada cuestión, uno de los dos alumnos ha de rectificar y readaptar su pensamiento a la nueva situación.

Un ejemplo ilustrativo es el que se produce cuando, en el episodio de ejecución del proceso de resolución del problema del cuadrado, Rosa trata de hacer una simplificación con la que Anna no está de acuerdo.

¹⁹ Utilizamos aquí el término “aprendizaje” no sólo con la acepción de adquisición del conocimiento, sino también con la de su uso, entendido este uso como “manipulación del conocimiento y aplicación del mismo a situaciones planteadas como problemáticas” (Mayor, Suengas y González, 1993, p. 17).

²⁰No consideramos situaciones en las que el desacuerdo se produzca por errores superficiales, como, por ejemplo, los que resultan al copiar un resultado obtenido previamente, entre otros.

- 115.Rosa: [Vuelve a escribir de nuevo el sistema y lo resuelve fijándose en lo que Anna ya ha hecho]. *Ara l'AB, que seria menys $n/2$* [se refiere al resultado de la expresión $n^2 - \frac{n^2 + n}{2}$].
- 116.Anna: *No, dóna això $[\frac{n^2 - n}{2}]$.*
- 117.Rosa: *No, perquè aquest n^2 amb aquest* [trata de simplificar los n^2 de la expresión $n^2 - \frac{n^2 + n}{2}$], *se'n va.*
- 118.Anna: *Com que se'n va?*
- 119.Rosa: *Queda un* [se refiere a un n^2]. *Ah sí!, sí, vale....*

- Situaciones en las que hay indicaciones explícitas por parte de alguno de los alumnos sobre la comprensión de un determinado aspecto del proceso de resolución. Esto les ocurre, por ejemplo, a Pere y Lluís en el episodio de evaluación local del proceso de resolución del problema del hexágono, en el que Lluís reconoce explícitamente su desconocimiento sobre una determinada relación.

22. Pere : *Això és el doble d'això* [indica FC y AB sobre el trapecio].
23. Lluís: *Com? La base aquesta d'aquí és el doble d'aquesta?*
24. Pere: *Sí.*
- 25.Lluís: *Sí? Això no ho sabia jo.*
26. Pere: *Ja, si ho partim per la meitat* [se refiere al hexágono y señala la diagonal AC de su figura], *això [AC] són dos costats, si aquests [FEG] són triangles equilàters, el radi... [FG], bueno, per dir-ho així, el radi és un costat.*

- Situaciones en las que uno de los alumnos pregunta sobre una determinada cuestión y la respuesta introduce algún elemento nuevo desconocido para él. Esto les ocurre, por ejemplo, a Laia y Jaume en el episodio de evaluación local del proceso de resolución del problema del paralelogramo.

22. Jaume: *Quina és l'altura llavors? Com seria l'altura? Cap aquí* [indica el segmento AM].
23. Laia: *És aquesta d'aquí* [vértice B], *cap aquí* [sigue el segmento BA], *ah no!, és aquesta* [indica desde B perpendicularmente a MC].
24. Jaume: *Sí, sí, si agafem el triangle aquest de baix [ABM] i la base és aquesta [AM], l'altura quina és?* [dándole la vuelta al folio y mirandoselo con la base horizontal].
25. Laia: *És aquesta* [indica la de antes].
26. Jaume: *D'aquest triangle?* [indica ABM muy extrañado].
- 27.Laia: *Sí, vols dir que no?, ja, però baixa cap aquí* [segmento MC] *perquè ha d'anar perpendicular, bueno, ha d'anar cap a la base, és igual que aquesta d'aquí!* [señala las alturas de los triángulos rayados sobre el lado AM en la figura del enunciado].

Durante la resolución de los problemas, se podrán producir aprendizajes que no detectemos como oportunidades explícitas, estos serán debidos a la reestructuración cognitiva que se pueda producir como consecuencia de reflexiones no explícitas durante los procesos de resolución de los problemas, o de reflexiones individuales posteriores a los procesos de resolución.

2.5. Actividades cognitivas

En este apartado precisamos el sentido que damos a otros términos utilizados con frecuencia en esta investigación. Nos referimos, en particular, a lo que entendemos por problema, a la diferencia entre espacio y espacio básico de un problema, y a la definición de proceso de resolución de un problema.

2.5.1. Problemas y ejercicios

No es nuestra intención llegar a construir una definición del concepto de problema, ni siquiera hacer una revisión de las interpretaciones que del término han hecho las diferentes corrientes psicológicas²¹, sino reflexionar sobre las características que, creemos, se tendrían que resaltar cuando hablamos de problemas matemáticos en el contexto escolar.

Si tuviéramos que adoptar una definición objetiva de problema, en el sentido que fuera suficientemente amplia como para abarcar problemas de muchos tipos, quizás elegiríamos la que hace R. E. Mayer (1986): “Cualquier definición de ‘problema’ debería consistir en tres ideas: 1) el problema está actualmente en un estado, pero 2) se desea que esté en otro estado, y 3) no hay una vía directa y obvia para realizar el cambio” (pág. 19).

Pero esta definición, posiblemente por ser demasiado general, no tiene en cuenta los cuatro aspectos que consideramos esenciales en nuestra idea de problema de matemáticas ligado al ámbito escolar.

Los dos primeros aspectos, tarea y sujeto, están relacionados hasta el punto de que, como indica A.H. Schoenfeld (1985b), “ser un problema no es una propiedad inherente de una tarea matemática. Más bien es una relación entre el individuo y la tarea lo que hace de la tarea un problema para esta persona” (p. 74).

Un tercer aspecto que es necesario considerar es el contexto en el que se presenta el problema, ya que un mismo problema en un contexto determinado puede tener todas las características de un verdadero problema, pero en otro se puede reducir a una aplicación rutinaria de procedimientos, cuando estos se acaban de enseñar.

Hay un cuarto aspecto que queremos comentar. La denominación de problemas matemáticos debería estar reservada para problemas en los cuales la conexión entre los estados inicial y final se tuviera que producir mediante la búsqueda de algoritmos, el establecimiento de relaciones o la implicación de afectos, como indica M. L. Callejo (1994), y dejar de lado los que utilizaran sólo grandes cálculos numéricos para encontrar la solución.

²¹ Todo un abanico de definiciones de “problema”, contextualizadas en las diferentes teorías psicológicas, se pueden encontrar en L. Puig (1996).

En el ámbito escolar se habla con mucha frecuencia de la diferencia entre ejercicio y problema, siendo dicha diferenciación difícil debido al carácter subjetivo de ambos conceptos. La clasificación que hace Butts (cf. L. Puig, 1993) puede ser esclarecedora en lo que se refiere al establecimiento de una línea de separación entre ambos conceptos.

Butts, según L. Puig, diferencia entre: “ejercicios de reconocimiento” —si el alumno ha de buscar en su memoria el resultado—; “ejercicios algorítmicos” —si el alumno sólo utiliza un algoritmo de forma automática—; “problema de aplicación” —si el alumno conoce el procedimiento, pero ha de justificar que es adecuado, o si su ejecución ha de ir acompañada de una argumentación—; “problema de búsqueda” —si se ha de crear el procedimiento para llegar a la solución—; y “situaciones problemáticas”, que son aquéllas en las que no quedan claros los objetivos.

Los problemas que hemos seleccionado para este trabajo se podrían encuadrar dentro de la categoría de problemas de búsqueda, siempre que se consideren desde el punto de vista del alumno.

2.5.2. Espacio y espacio básico de un problema

La simulación por ordenador de la resolución de problemas contribuyó de forma importante a la introducción y el desarrollo teórico de algunos conceptos relacionados con el tema. Así, fueron Newell y Simon (cf. Mayer, 1986) los que introdujeron, en 1972, la idea de espacio de un problema, definida, en palabras de Mayer, como “conjunto de todos los estados (o todas las secuencias posibles de operadores) que conoce el que resuelve el problema”²²(p. 202).

Ahora bien, los problemas que se tratan por ordenador llevan explícito en su enunciado el estado inicial, el estado final y los operadores para pasar de unos estados a otros, con lo cual se reducen a una sencilla búsqueda de posibilidades. En cambio, los problemas de matemáticas que se trabajan en el contexto escolar —siempre que no sean aplicaciones inmediatas de conceptos que se acaban de explicar en clase— no llevan explícitas las normas de transformación para pasar de unos estados a otros, que dependerán de la naturaleza del problema y de los conocimientos y las experiencias de los alumnos.

Así pues, la resolución de uno de estos problemas se ha de centrar en la búsqueda de las normas de transformación, en la que se mezclan conocimientos específicos, de heurísticas, etc., siempre con la mirada puesta en llegar a solucionar el problema.

Por otra parte, es importante señalar la diferencia que R. E. Mayer (1986), citando a Newell y Simon, establece entre el espacio del problema, que tiene como punto de referencia un resolutor particular, y el espacio básico del problema que es “el espacio del problema generado por alguien que resuelve perfectamente el problema”(p. 202), ya que ambos pueden no coincidir cuando el resolutor sea, por ejemplo, un alumno.

²² J. F. Richard (1985) relaciona esta idea de espacio de un problema —entendida, según él, como “el grafo de los estados accesibles dada la interpretación que el sujeto tiene del estado inicial, del estado final y de los operadores” (p. 277)— con la idea de representación —que este trabajo no considera— diciendo: “Espacio-problema, desde el punto de vista de un sujeto, es la representación interna de la situación objetiva (*task environment*)” (p. 277).

Una vez hechas estas observaciones, pensamos que la idea que utilizamos en este trabajo, tanto de espacio como de espacio básico de un problema, no se corresponde exactamente con las ideas sugeridas por Newell y Simon; es por eso que las adaptamos a nuestra situación.

Consideramos el espacio de un problema como el conjunto de posibilidades que tiene el resolutor de resolver un problema, que dependen, entre otros factores, de los conocimientos de que disponga y de los que utilice en la resolución y de los enfoques que sea capaz de identificar.

Al espacio de un problema hecho por el resolutor experto lo denominamos espacio básico del problema.

2.5.3. Proceso de resolución de problemas

Podemos aplicar a nuestro estudio, con ligeras modificaciones, la definición que hacen L. Puig y F. Cerdán (1988) sobre el proceso de resolución de problemas: “La actividad mental desplegada por el resolutor desde el momento en que, siéndole presentado un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea” (p. 21).

Sobre esta definición hemos de hacer dos observaciones de distinta naturaleza. En primer lugar, la asunción, por parte de los alumnos, de que lo que tienen delante es un problema, resaltada por L. Puig y F. Cerdán, es, en nuestro caso, un hecho obvio desde el momento en que los alumnos saben *a priori* que lo que han de resolver es un problema y asumen su resolución voluntariamente. En segundo lugar, que dicha definición corresponde al proceso de resolución desarrollado por un resolutor; habría que adaptarla, por tanto, al caso de dos o más resolutores que actúen en colaboración. Así pues, a la actividad mental desplegada por cada uno de los resolutores añadiríamos las interacciones que se producen entre ellos, que influyen en el desarrollo del proceso, y la necesidad de un acuerdo mutuo para dar por finalizada la tarea.

CAPÍTULO 3

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Al fin y al cabo el hombre es, conforme a su habitual estilo, un conocedor muy competente y el conocimiento cualitativo del sentido común no puede ser reemplazado por el conocimiento cuantitativo. Por el contrario, el conocimiento cuantitativo ha de basarse y alzarse sobre el cualitativo, incluyendo la percepción corriente.

Campbell (cf. T. D. Cook y CH. S. Reichardt, 1986)

3.1. Concreción de los objetivos de la investigación

La investigación que presentamos es un estudio sobre los procesos cognitivos de alumnos de 16 y 17 años de un centro de Enseñanza Secundaria en la resolución de problemas de matemáticas por parejas.

En ella consideramos, por una parte, problemas asociados a una estructura conceptual determinada, de los que analizamos los contenidos matemáticos que son relevantes para su resolución, los que los alumnos utilizan y la manera de usarlos; por otra, los aspectos metacognitivos relacionados con la gestión que hacen del proceso de resolución, especialmente cómo seleccionan los enfoques que implementan, si hacen evaluaciones locales o globales y las consecuencias que tienen para la resolución, etc.; y, finalmente, los tipos de interacciones que se producen, así como su análisis desde el punto de vista de algunos aspectos de la dimensión interlocutiva del discurso —sobre todo los que tienen que ver con los papeles comunicativos de los alumnos— y de los contenidos matemáticos de las intervenciones de cada alumno.

Los objetivos que perseguimos están relacionados con los elementos citados en el apartado anterior —*conocimientos* de los alumnos sobre los contenidos matemáticos, *gestión* del proceso de resolución e *interacciones* de dos alumnos cuando resuelven conjuntamente problemas que comparan áreas de superficies planas—, así como, con la forma en que todos esos elementos interactúan en los procesos de resolución de problemas y con la influencia que ejercen en la construcción del conocimiento.

Así pues, pretendemos:

1. Caracterizar las interacciones de pares de alumnos en los procesos de resolución de problemas en función de los papeles comunicativos de cada uno de ellos y de los contenidos matemáticos de sus intervenciones.

2. Establecer un método de análisis de los procesos de resolución de problemas que tenga en cuenta las tres dimensiones que consideramos en esta investigación: las aportaciones que hace cada alumno, las interacciones que se producen entre ellos y la gestión que hacen de dichos procesos.
3. Identificar las características de la clase de problemas que utilizamos y la naturaleza de los contenidos matemáticos que resultan relevantes en las resoluciones que hacen los alumnos.
4. Analizar la influencia de los procesos de resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas en la evolución del conocimiento de los alumnos.

3.2. Sobre la metodología a seguir

Como indica M. T. Anguera (1988), la no diferenciación entre la observación como método y como técnica y la falta de una definición clara de la observación como método han sido algunas de las razones fundamentales del error tradicional de considerar la metodología observacional como precientífica, en contraposición a la experimental, que siempre ha sido considerada como científica y, por tanto, mucho más valorada. La definición que M. T. Anguera da de la metodología observacional¹ como un procedimiento, “implica el seguimiento de todas las fases propias del método científico (delimitación del problema u objetivos, recogida de datos y su optimización, análisis de datos, e interpretación de resultados de acuerdo con los objetivos)” (p. 8).

La utilización de una metodología observacional está plenamente justificada para conseguir la mayor parte de los objetivos de esta investigación, puesto que lo que pretendemos es analizar los procesos cognitivos de los alumnos a través de sus comportamientos observables, en particular a través de los intercambios comunicativos que tienen lugar en los procesos de resolución de problemas por parejas.

La naturaleza de la investigación y las características de los objetivos planteados, orientados hacia una comprensión profunda de realidades concretas y con la idea de identificar modelos de actuación de pares de alumnos en la resolución de problemas mediante la observación de su conducta espontánea, nos llevan a la consideración de un estudio de casos que analizamos desde una perspectiva cualitativa, dependiente de la obtención de datos escritos y orales.

Esta investigación se centra en la observación y el análisis de las conductas de los alumnos en la resolución, por parejas, de problemas que comparan áreas de superficies planas (PCASP), por tanto para empezar a cubrir los objetivos que nos hemos propuesto, en particular el 3, es necesario un análisis en profundidad, previo a la recogida de datos, tanto de la naturaleza de los contenidos matemáticos implicados en los PCASP (Capítulo 4), como de los cuatro problemas que hemos seleccionado (Capítulo 5) para la obtención de los datos orales.

¹ Metodología observacional: “Procedimiento encaminado a articular una percepción deliberada de la realidad evidente con su interpretación adecuada, a fin de captar de ella el significado, de manera que, mediante un registro objetivo, sistemático y específico de la conducta generada de forma espontánea en un contexto determinado y el sometimiento de este registro a una adecuada codificación y análisis, se obtengan resultados válidos dentro de un marco específico de conocimiento” . M. T. Anguera (1988) (pp. 6-7).

ALUMNOS	RECOGIDA DE INFORMACIÓN	AGRUPA - CIÓN DE ALUMNOS	FINALIDAD DE LA RECOGIDA DE INFORMACIÓN	DURACIÓN DE LA OBSERVA- CIÓN
Seis alumnos de entre 16 y 17 años: cuatro son de 3º de BUP y dos de COU	Información general procedente del profesor de los alumnos		Características generales de los alumnos	Tres o cuatro días para cada pareja de alumnos
	Recogida de datos escritos Respuesta a una prueba inicial	Individual	Evaluación inicial de conocimientos	
	Recogida de datos orales Resolución de cuatro PCASP: -Problema del paralelogramo -Problema del hexágono -Problema del triángulo -Problema del cuadrado	Por parejas	Análisis de los procesos de resolución desde el punto de vista cognitivo, metacognitivo e interactivo	
	Recogida de datos escritos Respuesta a una prueba final	Individual	Evaluación final de conocimientos. Evolución de conocimientos	

Tabla 3.2.1

Para la consecución de los otros objetivos —1, 2, 4 y la segunda parte del 3—, diseñamos la investigación de la forma que mostramos en la Tabla 3.2.1. En ella concretamos el tipo de alumnos y la clase de problemas que consideramos, así como la finalidad de los datos que recogemos. En particular, los seis alumnos que participan lo hacen de la siguiente forma:

- a) Resuelven individualmente una prueba elaborada para evaluar sus conocimientos iniciales sobre los contenidos matemáticos de la comparación de áreas. Sus resultados, junto con las observaciones del profesor —que coincide con el investigador— en las clases de matemáticas, nos permiten hacernos una idea general de las características cognitivas de los alumnos (véanse apartados 7.2, 7.3 y 7.4).
- b) Los alumnos, agrupados por parejas, resuelven en voz alta cuatro problemas, cuyos procesos son grabados y analizados en profundidad desde las perspectivas interactiva, cognitiva y metacognitiva.
- c) Los mismos alumnos resuelven, otra vez individualmente, una segunda prueba para valorar si se ha producido algún tipo de evolución en sus conocimientos respecto a los que identificábamos con la prueba inicial.

En los apartados siguientes explicamos detalladamente y razonamos las decisiones que hemos tomado para diseñar esta investigación.

3.2.1. Recogida de datos escritos

Para detectar la influencia que los procesos de resolución orales tienen en evolución epistémica de los alumnos es necesario identificar, previa y posteriormente, los conocimientos de los alumnos respecto a los contenidos matemáticos de los tipos de problemas que utilizamos. Para ello elaboramos una prueba inicial y otra final que los alumnos resuelven individualmente y por escrito. Ambas pruebas, que se diferencian sólo en dos ítems (problemas), las analizamos en el Capítulo 6.

Los contenidos matemáticos de los ítems de las pruebas están estrechamente relacionados con los de los problemas que los alumnos resuelven oralmente.

Ambas pruebas constan de dos partes: una de ellas común (apartados 6.3.1 a 6.3.7), con la que evaluamos las estructuras conceptuales de los alumnos y el conocimiento que tienen de determinadas técnicas relacionadas con la resolución de PCASP, y la otra, que consta de tres problemas (apartados 6.3.8 a 6.3.11) —uno de ellos común a las dos pruebas y los otros dos similares, en el sentido de que pueden resolverse utilizando los mismos enfoques—, con la que identificamos el enfoque que utilizan y el grado de desarrollo de la ejecución que realizan.

Mantenemos el tercer problema de la segunda parte de la prueba como consecuencia de los deficientes resultados que hemos detectado en pruebas experimentales realizadas con alumnos que no participaron en la resolución oral. Estas pruebas experimentales nos sirven además para elaborar los niveles de conocimientos que establecemos para cada ítem en el Capítulo 6 y para adecuar el vocabulario de los enunciados a las características de los alumnos.

A los alumnos seleccionados se les explica el procedimiento que hay que seguir, pero en ningún momento se les habla del contenido de las pruebas y todos aceptan el compromiso de no comentar ni consultar nada sobre ellas ni durante ni después de su realización. Este compromiso es importante si queremos analizar la repercusión de los procesos de resolución en la evolución de los conocimientos de los alumnos (objetivo 4).

El sistema de utilizar, prácticamente, la misma prueba inicial que final fue utilizado por E. Forman (Forman y Cazden, 1984) en sus investigaciones, aunque su estudio preveía un intervalo de tres meses entre ambas. Este sistema tiene ventajas e inconvenientes.

Las ventajas se centran, principalmente, en que una misma prueba nos permite identificar con mayor exactitud los cambios que se producen en los alumnos, ya sea como consecuencia directa de las interacciones en los procesos de resolución orales, o de las interiorizaciones y reflexiones individuales que tienen lugar después de dichos procesos.

Los inconvenientes tienen que ver con posibles consultas bibliográficas o a otros compañeros durante los tres o cuatro días que dura la experiencia para cada pareja. Pensamos que estos están minimizados tanto por las consignas que damos antes de empezar, como por el desconocimiento de los alumnos del contenido de ambas pruebas. En cualquier caso, la mejora en los resultados de la segunda prueba, cuando se produce, casi siempre tiene su justificación en algún momento de alguno de los procesos de resolución orales, como veremos en los Capítulos 8 y 9.

3.2.2. Técnica de recogida de datos orales. Análisis de protocolos

Una vez justificada la utilización de la metodología observacional es necesario especificar las técnicas de observación que utilizamos (“medios de observación”, según M. Postic y J.M. De Ketele, 1992), consideradas como herramientas que nos permiten la recogida de información.

Superadas las discusiones que se produjeron en los años 70 sobre la validez de los datos orales obtenidos de la resolución de problemas, ya sea de forma simultánea al proceso de resolución o de forma retrospectiva, son muchos los autores que aplican diferentes técnicas para recoger este tipo de datos. Nos agrada especialmente la taxonomía que M. Goos i P. Galbraith (1996) hacen de ellas, según: *a)* que la verbalización sea o no simultánea a la realización de la tarea (tiempo de verbalización), *b)* el tipo de intervención del observador (observación intervencionista o no), y *c)* las instrucciones que reciben los alumnos para producir la verbalización (clasificadas como “informar” o “explicar”). Seguimos esa clasificación para justificar la selección de la técnica que utilizamos.

Sobre la base del conocimiento de las características y limitaciones de cada técnica y con la finalidad de conseguir una máxima adecuación técnica-objetivo, hemos decidido analizar las actuaciones de los alumnos en la resolución de problemas observándolos directamente, es decir, recoger datos orales obtenidos simultáneamente a la realización de la tarea, por lo que el alumno ha de exteriorizar sus pensamientos al mismo tiempo que resuelve el problema.

La razón principal que nos ha inclinado a tomar la decisión de que la exteriorización sea simultánea al proceso de resolución —descartando de esta forma técnicas que como la del recuerdo estimulado podrían haber complementado a la anterior— es la dificultad de los alumnos de estas edades para expresar retrospectivamente —de forma oral o escrita— sus pensamientos.

Esa dificultad fue evidente en pruebas que hicimos con entrevistas retrospectivas en las que pedimos a los alumnos —al mismo tiempo que visualizaban los registros efectuados— aclaraciones sobre lo que pensaban en momentos de la resolución que considerábamos claves. Las respuestas, cuando se produjeron, estaban más en función del desarrollo posterior del proceso que no del análisis de los procesos cognitivos en la situación concreta por la que preguntábamos.

La decisión, que también hemos tomado, sobre la no intervención del observador en el proceso de resolución tiene opiniones a favor y en contra. Mientras hay investigadores, como A. H. Schoenfeld (1985b), que piensan que cualquier intervención, por pequeña que sea y mucho más si las interrupciones se producen con frecuencia, modifica el proceso de resolución, otros, como L. Puig (1996), piensan que intervenciones puntuales sobre aspectos muy concretos —para incidir, por ejemplo, en una operación mal hecha o una fórmula mal escrita— pueden ayudar a que el proceso no se pare por razones a las que no dan importancia en sus investigaciones.

En nuestro caso, la importancia que hemos dado a los aspectos relacionados con los conocimientos que tienen los alumnos así como a los de control del proceso de resolución, en el sentido de que queremos ver la capacidad de revisión y de verificación y, por tanto, de posible rectificación, nos ha inclinado por la obtención de un proceso sin ninguna intervención exterior.

La obligación —que hemos impuesto— de hablar al mismo tiempo que se resuelve el problema y la introducción de las interacciones como objeto de estudio hacen que la observación de sólo un alumno —pensando en voz alta— sea una situación bastante anormal.

El estudio de la literatura sobre las ventajas e inconvenientes de la consideración de parejas en la resolución de problemas y el hecho de empezar a introducir la influencia de las interacciones, nos ha llevado a observar la resolución por parejas, dejando para posteriores investigaciones el estudio de las interacciones en la resolución de problemas con más de dos interlocutores.

En cualquier caso, la actuación por parejas compromete a cada alumno a mantener un diálogo en el que van informando sobre el devenir de su pensamiento. En este sentido, las indicaciones, previas a la observación, del investigador a los alumnos se centraron en la necesidad de que exteriorizaran lo que pensaban en cada momento.

Así pues, nuestra propuesta estaría centrada en el análisis de lo que M. L. Callejo (1994) denomina “registro de los fenómenos que han sucedido a lo largo del proceso de resolución de un problema, aunque no se haya llegado a obtener la solución” (p. 81), es decir, el análisis de lo que se denomina protocolo, entendido como la transcripción del registro —efectuado en vídeo— de los fenómenos que han ocurrido a lo largo del proceso de resolución de un problema —desarrollado por dos alumnos que actúan conjuntamente sin intervención exterior— y de las anotaciones tomadas por el observador.

La recogida de datos se completa, como hemos indicado en el apartado 3.2.1, con las respuestas de los alumnos, por escrito y de forma individual, a dos pruebas —una antes y otra después de los procesos de resolución— que abarcan, en profundidad, aspectos relacionados con los contenidos matemáticos de los problemas propuestos y que analizamos con detalle en el Capítulo 6. El análisis de los datos obtenidos de esta forma nos sirve para detectar la evolución del conocimiento de los alumnos.

3.3. Contexto experimental

En este apartado hacemos una referencia breve a los problemas sobre los que trabajamos —que serán estudiados en profundidad en los Capítulos 4 y 5—, al tipo de alumnos que participan —cuyas características cognitivas serán ampliamente analizadas en el Capítulo 7—, y concretamos, sobre todo, las particularidades de la situación de observación y del registro que hacemos de las observaciones.

a) No es nuestra intención profundizar aquí en los tipos de los problemas que consideramos en esta investigación —problemas que comparan áreas de superficies planas (PCASP)—, pero sí llamamos la atención, brevemente, sobre algunas características generales que son importantes por la incidencia que pueden tener en el desarrollo de los procesos de resolución.

Nos referimos, por una parte, a la importancia que damos a los contenidos matemáticos implicados en la resolución de los problemas y, por tanto, a los conocimientos que los alumnos han de tener de ellos para afrontar dichas resoluciones con un mínimo de garantías, y, por otra, a que en los enunciados de los problemas —que pueden contener o no partes gráficas— no quedan explícitamente establecidas las normas de transformación, que son propias de los procedimientos matemáticos relacionados con los aspectos básicos

de esa materia y con técnicas específicas asociadas a la comparación de áreas. En dichos problemas tampoco es posible, por su gran número, precisar todos los estados intermedios por los que puede pasar su resolución, esto nos ha llevado a introducir (Capítulo 2) el concepto de espacio básico de un problema.

b) Por lo que se refiere a los alumnos, el presente diseño contempla que la investigación se lleve a cabo con alumnos de entre 16 y 17 años de un centro público de Enseñanza Secundaria. Las razones principales que justifican que los alumnos sean de estas edades son dos: el mejor conocimiento que tenemos sobre ellos, y el intento por tratar de rellenar el vacío de estudios que hay con alumnos de estas edades y sobre el tema de resolución de problemas.

Este trabajo es un estudio de casos —tres parejas de alumnos resuelven cuatro problemas cada una—. Los alumnos que intervienen los hemos seleccionado teniendo en cuenta tres condiciones: *a)* son abiertos y expresivos; *b)* los alumnos de cada pareja tienen conocimientos similares sobre los contenidos matemáticos de los PCASP, aunque no necesariamente de la misma naturaleza (uno puede tener una visión geométrica de la resolución de los problemas y el otro la puede tener algebraica); y *c)* en todos los casos los alumnos de cada pareja se sientan juntos en las clases de matemáticas, con la finalidad de que la confianza entre ellos facilite el diálogo.

Sobre las características educativas generales de los alumnos entre los que han sido seleccionados los que participan en esta investigación nos remitimos al apartado 1.3 y sobre las características cognitivas generales y específicas de cada alumno, a los apartados 7.2, 7.3 y 7.4.

c) Por lo que se refiere a la situación de observación, centramos nuestras observaciones en un contexto en el que dos alumnos interactúan para resolver problemas. La limitación de la situación de observación a este contexto experimental se compensa con una mayor profundización en el análisis de las conductas relacionadas más directamente con las características de los problemas planteados y de los alumnos específicos considerados para, en definitiva, profundizar más en los aspectos relativos a los procesos de pensamiento deducidos a través de los intercambios comunicativos.

Aunque la situación que analizamos sea diferente a la de una clase de matemáticas, hay aspectos que son trasladables, sobre todo si la selección de los alumnos se hace como hemos indicado en el apartado anterior y si tenemos en cuenta que la forma normal de trabajo de los alumnos en muchas clases es la de dialogar con el compañero que tienen al lado. Algunos de los aspectos trasladables de una situación a otra serían: la reproducción de diferentes estereotipos de comportamiento, como, por ejemplo, la forma de comportamiento profesor-alumno, y la influencia que ejercen unos alumnos sobre otros en función de sus características cognitivas y del reconocimiento social que cada uno de ellos tenga. Esta influencia repercute decisivamente en la forma de enfocar y de ejecutar los problemas independientemente de la situación en la que se encuentren los alumnos.

Con todo esto queremos indicar la importancia que tiene la situación de observación y la necesidad de que quede perfectamente delimitada. En nuestro caso la situación de observación tiene las características siguientes:

- Dos alumnos resuelven conjuntamente cuatro problemas que comparan áreas de superficies planas —en un tiempo de aproximadamente 25 minutos cada

problema— en presencia de un observador, de una cámara de vídeo y de un magnetófono que registran todo el proceso de resolución.

- Todas las observaciones se hacen en un mismo lugar.
- Las sesiones de observación se efectúan sin ninguna intervención exterior, ni por parte del observador (observación no intervencionista), ni por cualquier otra causa.

d) El registro de las observaciones, como concretamos al final de este apartado, se lleva a cabo con el soporte de una cinta de vídeo, un medio que nos sirve para conseguir los protocolos escritos que analizamos desde las tres vertientes que hemos indicado al comienzo: cognitiva, metacognitiva e interactiva.

En cualquier caso, las notas tomadas por el observador durante el proceso de resolución nos permiten aclarar algunos puntos oscuros de la resolución y nos ayudan a obtener los protocolos escritos a partir de los audiovisuales.

Para conseguir una máxima homogeneidad en el registro hemos de tener en cuenta, según M. T. Anguera (1988), dos aspectos, temporización y recursos, que pasamos a comentar.

Por lo que se refiere a la temporización, y teniendo en cuenta que no se trata de un estudio longitudinal de conductas, la observación de las actuaciones de los alumnos ha de prever una temporización suficientemente corta para garantizar que otros factores externos no influyan en los posibles cambios cognitivos que queremos detectar. Por eso, una vez hecho el diseño de la investigación y elegidos los alumnos que participan y los problemas que han de resolver, consideramos que tres o cuatro días para cada pareja, como máximo, puede ser un tiempo adecuado para llevar a cabo las observaciones.

Por lo que se refiere a los recursos, utilizamos una cámara fija, con la posibilidad de modificar el encuadre —para registrar situaciones que el observador considere interesantes y que, debido a algún cambio respecto de la posición inicial, puedan quedar fuera—, que registre lo que los alumnos hacen y dicen durante los procesos de resolución. Eso nos dará una visión detallada y precisa de la evolución de los citados procesos con la posibilidad de poder volver a verlos tantas veces como necesitemos.

Las anotaciones hechas por los alumnos durante el proceso, que son recogidas al final de cada resolución, nos ayudarán a completar los protocolos escritos.

3.4. Normas de transcripción de protocolos audiovisuales

El análisis de los datos orales recogidos comienza al tomar las decisiones que nos permiten transcribir los protocolos audiovisuales, puesto que, de alguna forma, con la transcripción estamos interpretando la actuación de los alumnos

Las normas que seguimos para hacer las transcripciones las mostramos a continuación.

a) Hacemos las transcripciones en el idioma en el que se expresan los interlocutores; representamos en cursiva los diálogos de los alumnos e introducimos signos de puntuación.

b) Numeramos, en el margen izquierdo de la transcripción, las tomas de palabra de cada alumno. Puede ocurrir que en una toma de palabra haya dos intervenciones (o más)

que nos interese diferenciar, en ese caso identificamos la segunda intervención con el mismo número que la primera, pero añadiéndole una “tilde” (o dos).

c) Utilizamos seudónimos para referirnos a los alumnos que participan en la resolución de los problemas.

d) El signo / indica una pausa breve de menos de 5 segundos y <pausa()>, una pausa más larga. Entre paréntesis indicamos los segundos que dura.

e) El símbolo ==, al comienzo de una intervención, indica que no ha habido pausa después de la anterior o incluso que se ha interrumpido la intervención anterior.

f) Entre los signos = ... = se recoge una palabra o frase que se solapa con otra del otro interlocutor que también reproducimos entre estos signos.

g) Los corchetes [] abarcan las descripciones que hacemos de los fenómenos no léxicos, tanto vocales como no vocales. En especial describimos los gestos que acompañan a los deícticos, los elementos interactivos, si se observan (por ejemplo, los momentos en que los alumnos escriben o trabajan por separado), las referencias gestuales al señalar los dibujos realizados por ellos o por sus compañeros, si escriben o no en el mismo folio, etc.

h) En aquellos procesos de resolución en los que los alumnos trabajen en paralelo durante periodos de tiempo significativos respecto a la duración del total del proceso, insertamos segmentos verticales en los márgenes izquierdos de las transcripciones (acompañados de referencias temporales) que abarquen todas las intervenciones en paralelo. Un ejemplo ilustrativo de esta norma lo tenemos en la transcripción del proceso de resolución del problema del cuadrado que mostramos en el apartado 8.2.4.1, pp. 221-227).

i) La continua utilización de deícticos para referirse a los elementos de las figuras nos obliga a introducir en cada transcripción tres tipos de gráficos:

- La figura del enunciado, si la hay.
- Una figura realizada por nosotros que nos sirve de referente de las indicaciones de los alumnos. No podemos utilizar la del enunciado porque, en muchos casos, durante los procesos de resolución los alumnos construyen figuras que nada tienen que ver con aquélla.
- Las figuras más representativas que los alumnos realizan durante el proceso de resolución para hacernos una idea real de su forma y precisión, ya que, como veremos, la visualización desempeña un papel importante en el desarrollo del proceso.

3.5. Esquemas de análisis de los datos orales

El esquema de análisis de los protocolos escritos que proponemos está construido teniendo en cuenta los aspectos teóricos que introducimos en el Capítulo 2 y los objetivos de la investigación que hemos indicado al principio de este capítulo.

Aparte de la valoración de la prueba final —realizada después de la resolución conjunta de los cuatro problemas por parte de los alumnos—, que nos determinará la evolución de conocimientos (objetivo 4), proponemos un esquema de análisis de cada protocolo que consta de cuatro fases: identificación de los intercambios que se producen a lo largo del proceso; división del protocolo en episodios; análisis microscópico de los

aspectos cognitivos, metacognitivos e interactivos en cada episodio, y análisis global del proceso. El método de análisis que proponemos no consiste en la aplicación lineal de esas cuatro fases, sino que hemos de volver sobre las fases anteriores si los análisis (o microanálisis) posteriores así lo exigieran.

3.5.1. Identificación de intercambios

La primera fase del análisis consiste en identificar los tipos de intercambios que se producen a lo largo de todo el proceso de resolución, de acuerdo con las categorías que hemos definido en el Capítulo 2. Dichas categorías las hemos obtenido, a su vez, del análisis empírico que habíamos hecho previamente de los protocolos, fijándonos expresamente en algunos aspectos de la dimensión interlocutiva del discurso y en el contenido matemático de las intervenciones, como se puede observar en las definiciones de los intercambios. Esa nueva identificación de intercambios nos sirve para precisar y concretar la interpretación que damos de cada uno de ellos.

3.5.2. Partición del protocolo en episodios

El sistema de categorías que A. H. Schoenfeld (1985b) construye para analizar el componente del conocimiento y de la conducta relacionado con las tareas generales del gestor no contempla los intercambios comunicativos de los miembros de la pareja, aunque, a veces, los tipos de interacciones que se den pueden influir en la calificación de los episodios, sobre todo si los alumnos trabajan en paralelo.

Adaptamos el sistema de categorías de A. H. Schoenfeld (1985b) al tipo de alumnos y de problemas que consideramos en esta investigación, para ello hacemos cuatro modificaciones esenciales que resumimos en los párrafos siguientes.

- Introducimos en los episodios breves referencias interactivas que pueden influir tanto en la calificación de los mismos como en su desarrollo, aunque las interacciones dentro de cada episodio serán estudiadas en profundidad en el análisis microscópico que presentamos en el apartado 3.5.3.
- Separamos los aspectos relacionados con las evaluaciones (o revisiones) locales, que A. H. Schoenfeld incluye en otras categorías, y los incluimos dentro de la categoría de “evaluación (revisión) local”. Por tanto, ésta abarca, entre otras cosas, las revisiones, si se producen, de los diferentes episodios y las referencias de los alumnos a sus conocimientos y a los contenidos matemáticos de los problemas.
- Consideramos la categoría de “planificación” (o elaboración de un plan) separada de la ejecución. Ésta es una decisión que tomamos para enfatizar en la importancia tanto de una explicitación clara de un plan, como en la decisión, también explícita, de ponerlo en práctica.
- Establecemos una diferencia —sobre todo en problemas geométricos como los que consideramos— entre hacer un esquema representativo de los datos del problema —incluido en la subcategoría L5—; hacer un gráfico con la intención de buscar enfoques para resolver el problema —subcategoría A2—; o hacer un gráfico con la intención de búsqueda, poco estructurada, de información relevante, que se puede considerar como búsqueda exploratoria.

Los episodios que consideramos son los siguientes:

LECTURA Y FAMILIARIZACIÓN CON EL PROBLEMA

Tiene que ver no sólo con la lectura inicial del enunciado del problema sino también con las interacciones posteriores que permitan a los alumnos familiarizarse con el enunciado y con los elementos que intervienen en él.

- L1: Lectura del enunciado del problema.
- L2: Silencios posteriores a la lectura debidos a:
 - contemplaciones silenciosas del enunciado;
 - relecturas totales o parciales del enunciado y verbalización de algunas palabras aisladas;
 - intercambios producidos por diferentes interpretaciones del enunciado o de alguno de sus elementos, cuya finalidad sea la comprensión de dicho enunciado en su conjunto, de la terminología que se utiliza y de los contenidos matemáticos que se nombran.
- L3: Intentos de expresar el problema —total o parcialmente— con sus propias palabras.
- L4: Anotación de los datos del problema y del objetivo.
- L5: Realización de cualquier esquema gráfico que se utilice para representar los datos del problema o para comprender el enunciado.

ANÁLISIS

Incluimos en este episodio la comprensión plena, las posibles reformulaciones y la introducción de elementos o informaciones pertinentes que puedan contribuir a la elaboración de un plan, siempre que se haga de forma estructurada y de manera que las acciones tengan alguna finalidad. Además tenemos en cuenta si los elementos de análisis, que detallamos a continuación, son introducidos de forma individualizada por los alumnos o se producen como consecuencia de intercambios cooperativos y si son asumidos por ambos resolutores.

- A1: Introducción —de forma estructurada— de elementos o informaciones diferentes de las que aparecen en el enunciado.
- A2: Búsqueda de enfoques para resolver el problema dirigidos por las condiciones o por el objetivo del problema, mediante intentos de:
 - descomposición en partes de las figuras representadas;
 - superposición de figuras;
 - reducción del problema a alguno semejante;
 - elección de una representación simbólica o notación adecuada;
 - expresión de fórmulas.
- A3: Intentos de búsqueda de enfoques locales para resolver objetivos intermedios.

A4: Búsqueda de alguna relación entre las condiciones y el objetivo del problema.

La búsqueda de enfoques o de relaciones en las categorías A2, A3 y A4, y la introducción de elementos en la categoría A1 se producen:

- por la aportación aislada de ideas por parte de cada alumno (pudiéndose producir competencia entre ambos);
- por las aportaciones de uno solo de los alumnos;
- como consecuencia de la cooperación entre ambos.

A5: Valoración de los enfoques identificados para la selección de uno de ellos:

- la elección del enfoque se hace explícitamente o por omisión de otros;
- la elección del enfoque se hace de forma consensuada o no;
- las acciones están dirigidas por las condiciones del problema;
- las acciones están dirigidas por los objetivos del problema.

EXPLORACIÓN

Tiene que ver con la búsqueda, a través del espacio del problema, de información que sea pertinente para incorporarla a la secuencia análisis-plan-ejecución. La búsqueda ha de ser poco estructurada y sin una finalidad concreta.

E1: Hay intentos de búsqueda desordenada de alguna información pertinente dirigida por:

- las condiciones del problema;
- el objetivo del problema.

E2: La aportación de información se hace:

- con o sin control;
- de forma cooperativa o de cada alumno por separado.

La búsqueda de información en las categorías E1 y E2 se produce:

- por la aportación aislada de ideas por parte de cada alumno (pudiéndose producir competencia entre ambos);
- por las aportaciones de uno solo de los alumnos;
- como consecuencia de la cooperación entre ambos.

PLANIFICACIÓN

P1: Aparición de forma explícita de la planificación:

- hay acuerdo en el establecimiento de la planificación;
- los intercambios que se producen introducen modificaciones de la planificación propuesta.

- P2: No hay una planificación explícita y debe ser inferida de la conducta de los resolutores.
- P3: Evidencia de que la planificación ha surgido de la elección del enfoque que se considera más adecuado.
- P4: El plan es pertinente para la solución, es apropiado, está bien estructurado.
- P5: Hay una decisión explícita (aceptada mutuamente o no) de ejecutar el plan.

EJECUCIÓN (IMPLEMENTACIÓN) O REALIZACIÓN DEL PLAN

- E1: Identificación de relaciones entre los elementos lineales de las figuras inducida por el plan propuesto con la finalidad de utilizar expresiones algebraicas.
- E2: Planteamiento y resolución de ecuaciones y sistemas, aplicación de fórmulas y realización de cálculos.
- E3: Ejecución geométrica: identificación de relaciones entre componentes de las figuras, argumentaciones y justificaciones.
- E4: La puesta en práctica sigue el plan establecido, se desarrolla de forma cooperativa por parte de los dos alumnos. Hay consenso en el desarrollo de la ejecución.
- E2: La ejecución es coherente con la planificación propuesta.

VERIFICACIÓN

Evaluación del proceso seguido en la resolución, de la solución por la que se ha optado y del resultado obtenido.

V1: Verificación del resultado obtenido:

- comprobación del resultado. Hay acuerdo en la validez del resultado obtenido;
- coherencia del resultado con las condiciones locales o globales del problema;
- confianza en el resultado.

V2: Verificación de la solución obtenida:

- coherencia del plan elegido con las acciones locales llevadas a cabo;
- repaso de diferentes pasos seguidos en la solución obtenida. El repaso se hace en colaboración o en paralelo.

V3: Verificación del proceso:

- verificación de las acciones o planes globales propuestos. Hay acuerdo o no en esa verificación;
- coherencia de los planes propuestos con los objetivos del problema;
- revisión de la selección del plan elegido. La revisión se hace en colaboración o en paralelo. Hay acuerdo o no en la revisión efectuada.
- coherencia de las revisiones locales efectuadas.

TRANSICIÓN

Indica la fase de la resolución donde hubo un cambio significativo en la dirección del desarrollo del proceso.

T1: Se abandona un camino como consecuencia de:

- una evaluación del estado actual de la resolución;
- una reflexión silenciosa e individual o una pausa que produce la reorientación del proceso.

T2: Se salvan o almacenan las cosas que pueden haber sido valiosas o se consideran interesantes en el camino seguido. Las retenciones se hacen de forma consensuada o por uno solo de los alumnos.

T3: Se evalúan los efectos a corto y/o a largo plazo de la resolución de tomar la nueva dirección o, sencillamente, se salta al nuevo enfoque sin valorar los próximos movimientos. La evaluación es consensuada o no.

T4: Efectos locales y globales sobre la solución de la presencia o ausencia de evaluación al embarcarse en el nuevo camino.

EVALUACIÓN (REVISIÓN) LOCAL

R1: Evaluaciones locales de los episodios de la resolución:

- evaluación de cada uno de los episodios de la resolución (lectura, análisis, exploración, etc.);
- evaluación de los resultados locales obtenidos para conseguir objetivos intermedios;
- consecuencias para la solución de las revisiones locales, tanto si las hay como si no las hay;
- valoración de la nueva información aportada en los apartados anteriores.

R2: Referencias explícitas a los conocimientos conceptuales o procedimentales relacionados con el problema que se resuelve:

- valoración del estado actual de los conocimientos referidos;
- intercambios producidos como consecuencia de dicha valoración y de la necesidad de la relevancia de su aplicación en el contexto en el que se producen.

R3: Referencias a los avances obtenidos en el desarrollo del proceso de resolución.

L. Puig (1996) identifica dos esquemas para dividir el protocolo en episodios. Nosotros seguimos el segundo de ellos, que consiste en buscar los puntos de ruptura — pausas largas, estancamientos, transiciones, intervenciones directivas, etc.— en el protocolo escrito o en el protocolo audiovisual. Para la calificación de dichos episodios tenemos en cuenta tanto la visión general del episodio como las características de los intercambios que

se producen, ya que puede ocurrir que los dos alumnos estén en episodios diferentes si, por ejemplo, trabajan en paralelo.

3.5.3. Análisis microscópico de cada episodio

A partir de este momento hacemos un microanálisis cualitativo de los diferentes episodios desde tres puntos de vista:

a) Cognitivo, en el que identificamos y analizamos los enfoques que aportan los alumnos, los conocimientos nombrados y utilizados por cada uno de ellos y su naturaleza —conceptos o procedimientos (según el apartado 2.4.1 y 2.4.2)—, y las oportunidades de aprendizaje que se les presentan (Cuadro 3.5.1, p. 68), de acuerdo con los elementos teóricos que hemos considerado en el apartado 2.4.3.

b) Metacognitivo, en el que describimos las características de cada uno de los episodios de acuerdo con los componentes de control que los definen (apartado 3.5.2). Por ejemplo, si el episodio es de verificación, interpretamos si los alumnos verifican la resolución, la solución y/o el resultado y de qué forma lo hacen; si es de análisis o de exploración, observamos cómo seleccionan el enfoque que implementan y cómo desarrollan la búsqueda —a partir de las condiciones del problema o del objetivo—, etc.; si es de ejecución, argumentamos si siguen el plan propuesto, suponiendo que lo haya, o si hay un plan implícito que se pueda inducir de la ejecución que desarrollan; si es de evaluación local, identificamos si lo es de un episodio determinado o si está relacionada con la evocación de algún tipo de contenido matemático, etc. (véase Cuadro 3.5.1, p. 68).

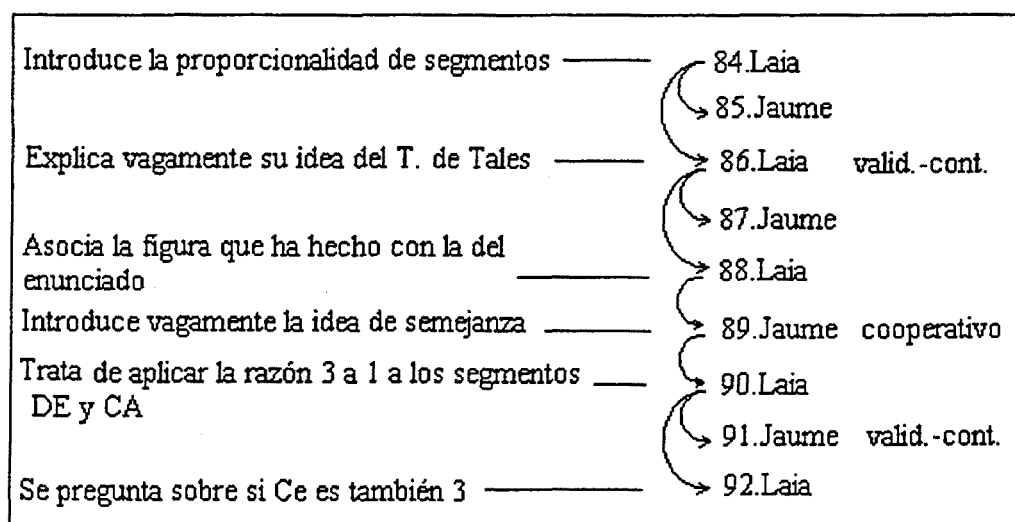
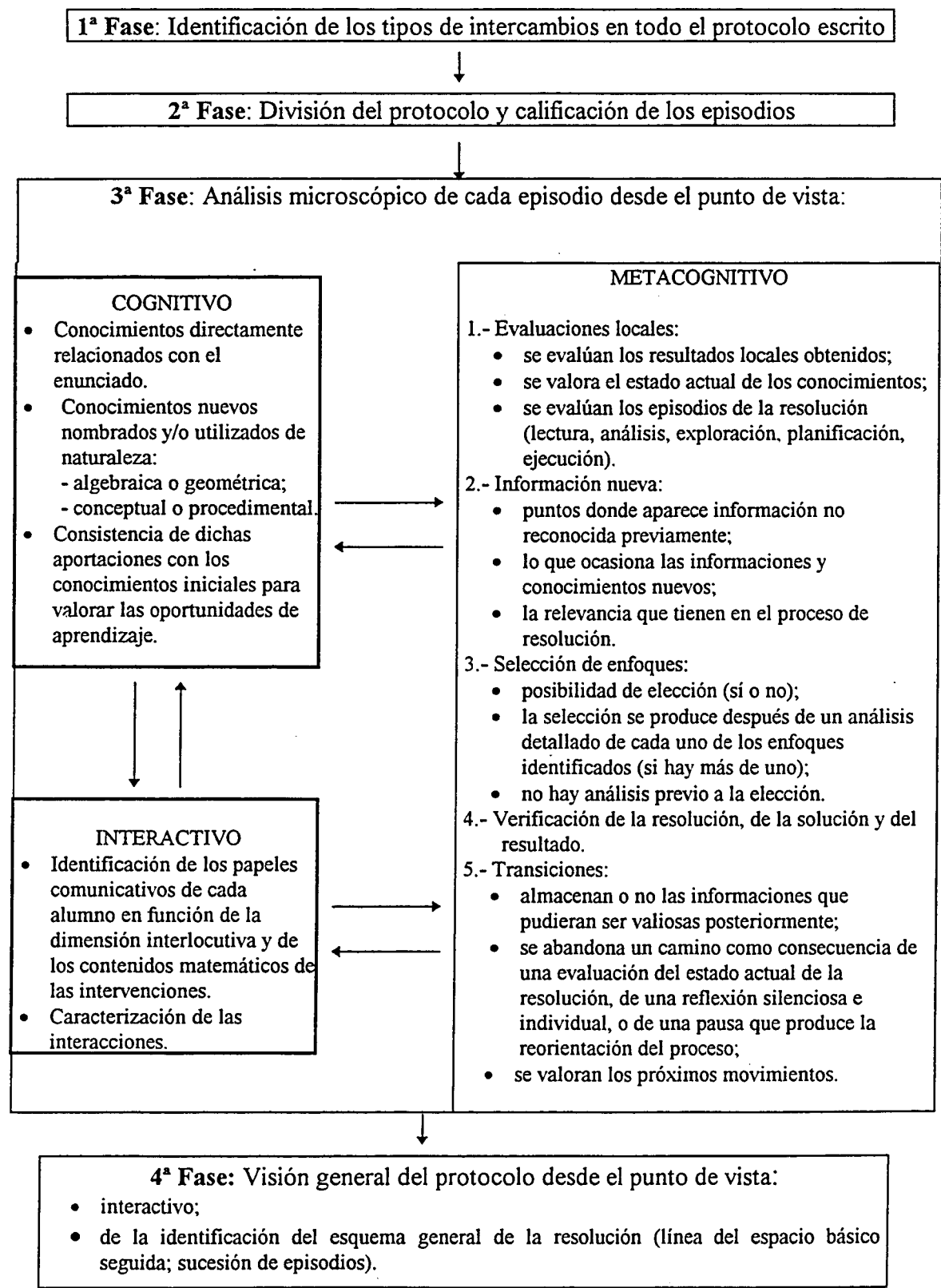


Figura 3.5.1

c) Interactivo, en el que identificamos los intercambios que se producen y analizamos las características de la interacción en cada episodio.

Analizamos cada episodio teniendo en cuenta no sólo los aspectos cognitivo, metacognitivo e interactivo por separado, sino también cómo interactúan y cómo influyen cada uno en los otros, de manera que para caracterizar, por ejemplo, una interacción consideramos los papeles comunicativos, las aportaciones de cada alumno y los elementos de gestión, si los hay.



↓

4ª Fase: Visión general del protocolo desde el punto de vista:

Cuadro 3.5.1

La visualización de la forma en que interactúan todos los componentes anteriores la facilitamos con la realización de gráficos que relacionan las acciones llevadas a cabo por cada alumno con los tipos de intercambios que se producen (véase Figura 3.5.1, que corresponde al episodio de evaluación local del proceso de resolución del problema del triángulo que desarrollan Laia y Jaume).

El análisis de la forma en que interactúan los diferentes componentes que tenemos en cuenta en el proceso de resolución nos da una idea local sobre el porqué del abandono, en un momento determinado, de un enfoque o de la consideración, o no, de una determinada información.

3.5.4. Visión general del proceso de resolución

Afrontamos la visión general del proceso de resolución desde dos puntos de vista diferentes: uno más centrado en la dinámica interlocutiva, que nos que permite hacernos una idea general de los papeles comunicativos de cada alumno; y otro, más global, que abarca el análisis de la evolución de los episodios y la integración de los aspectos cognitivo, metacognitivo e interactivo.

a) Para el análisis de los papeles comunicativos de cada miembro de la pareja, presentamos los datos del proceso ordenados en diferentes tablas. Por ejemplo, en las Tablas 3.5.1 y 3.5.2 —extraídas del proceso de resolución del problema del hexágono desarrollado por Jaume y Laia (apartado 8.3.2)— identificamos el número y el tipo de intercambios de dos y de tres intervenciones, respectivamente. En ambos casos, mostramos el número total de intercambios de la naturaleza que se indica y, entre paréntesis, los que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución, es decir, los que, siendo del tipo cooperativo, pregunta-respuesta o progresivo en el contexto local del propio intercambio (apartados 2.2.3.2 y 2.2.3.3), el contenido de sus intervenciones no ha aparecido previamente (véase Cuadro 3.5.2).

	COOPERATIVO	VALIDACIÓN	PREGUNTA-RESPUESTA	TOTAL
Laia-Jaume	18(14)*	1	2(1)	21(15)
Jaume-Laia	19(15)	1	2(1)	22(16)
TOTAL	37(29)	2	4(2)	43(31)

* Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.

Tabla 3.5.1. Intercambios de dos intervenciones

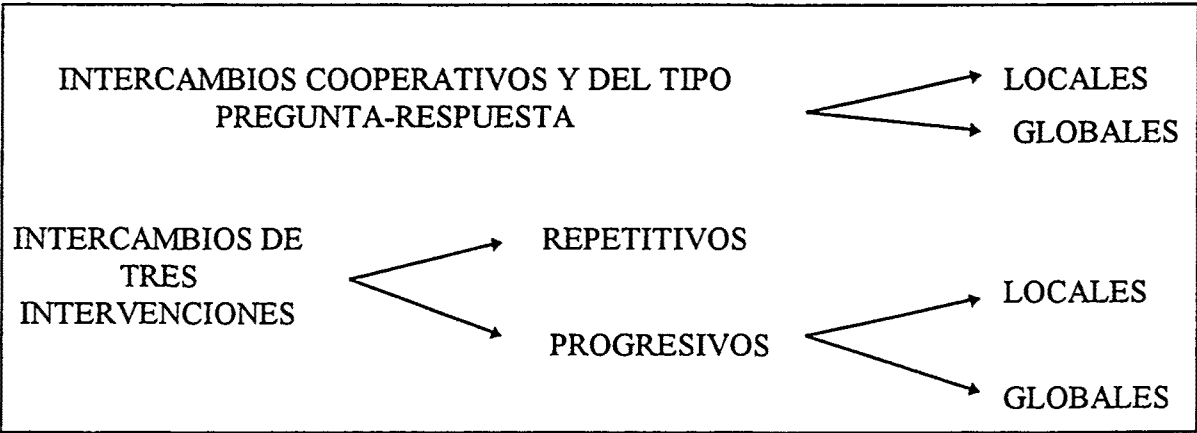
La finalidad de la elaboración de este tipo de tablas es obvia si observamos que, en ellas, separamos los intercambios encabezados por cada uno de los alumnos. Eso nos permite identificar quién asume la responsabilidad de la continuación de los diferentes tipos de diálogos y si lo hacen repitiendo, o no, contenidos matemáticos citados anteriormente. El proceso de resolución será más dinámico en la medida en que esa continuación se produzca

con intervenciones globalmente novedosas, y lo será menos si hay una predominancia de intercambios localmente cooperativos o progresivos que se limiten a repetir elementos de contenido que ya han aparecido previamente.

	VALIDACIÓN-CONTINUACIÓN		ACLARATORIO		INTERRUPCIÓN		TOTAL	
	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.
Laia-Jaume-Laia	6(4)*	2	2(2)	1	0	0	8(6)	3
Jaume-Laia-Jaume	4(2)	2	0	1	0	1	4(2)	4
TOTAL	10(6)	4	2(2)	2	0	1	12(8)	7

* Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.

Tabla 3.5.2. Intercambios de tres intervenciones



Cuadro 3.5.2

Además, en el análisis que hacemos de los papeles comunicativos de los alumnos tenemos en cuenta las formas de agrupación de los diferentes intercambios, es decir, si hay sucesiones de intercambios del mismo tipo, para observar en qué momentos del proceso de resolución se mantiene la continuidad de un determinado tipo de interacción.

Siempre que haya una diferencia significativa entre la actuación de ambos alumnos, tendremos en cuenta también el número de acciones directas —preguntas, demandas de validación o afirmaciones seguidas de invitaciones a tomar la palabra— de un alumno que quedan sin respuesta, el número de intervenciones de cada alumno y el número de acciones que producen reacción (véase, por ejemplo, la Tabla 8.4.1 del apartado 8.4.2.3, p. 340).

b) Incluimos en este subapartado de la visión general del proceso de resolución el reconocimiento de los enfoques que los alumnos identifican y el que ponen en práctica, el

análisis de los puntos clave y de su repercusión en el desarrollo del proceso de resolución, la relación de esos puntos clave con la aportación de determinados tipos de informaciones, con determinados tipos de interacciones y/o con interacciones directivas que cambien o intenten cambiar el proceso.

Los “esquemas gráficos de la sucesión de episodios” que hacemos al final del análisis de la visión general de cada proceso de resolución (véase apartado 8.2.1.3, p. 195) son resúmenes de dichos procesos de resolución en los que identificamos las intervenciones más significativas de cada alumno, así como, las características de cada episodio, en cuanto a lo que hacen los alumnos y cómo interactúan. Además, dicha presentación nos permite observar cómo evolucionan los episodios y el control de los alumnos sobre los procesos de resolución.

CAPÍTULO 4

CARACTERIZACIÓN DE LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS IMPLICADOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE COMPARAN ÁREAS DE SUPERFICIES PLANAS (PCASP)

Aunque jamás hubiera habido un círculo o un triángulo en la naturaleza, las verdades demostradas por Euclides conservarían siempre su certeza y evidencia.

David Hume (1996)

4.1. Introducción

Los problemas relacionados con la comparación de áreas tienen en la historia de las matemáticas un lugar destacado, sobre todo antes de la aparición de los métodos infinitesimales para el cálculo de áreas. Así, los matemáticos griegos se centraron mucho más en la comparación de áreas de figuras planas sencillas que en el cálculo de cada una de ellas por separado, debido a que el desarrollo del concepto de área —asociado al concepto de número— quedó relegado por el problema de los inconmensurables.

Las comparaciones de áreas están presentes ya en la escuela pitagórica no sólo por las aportaciones relacionadas con el teorema que lleva el nombre de su fundador, sino por ser Pitágoras (según S. T. Heath, 1981) el introductor del problema de la “aplicación de áreas”¹, a cuyo desarrollo contribuyó Euclides (proposiciones [I, 44], [I, 45], [VI, 25, 26, 27, 28 y 29]), que junto con las diez primeras proposiciones del libro segundo de los Elementos (donde propuso relaciones entre áreas que, después, se interpretaron de forma algebraica) se consideran el origen del Álgebra geométrica actual.

El problema de la cuadratura de figuras circulares es afrontado, por primera vez con éxito, por Hipócrates, quien consigue construir una figura rectilínea de la misma área que otra curvilínea (lúnulas construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo).

Euclides trata la comparación de áreas en múltiples ocasiones en los Elementos², pero de forma especial en el libro *Sobre divisiones (de figuras)*, dedicado exclusivamente al

¹ La forma general de plantear la aplicación de áreas según S. T. Heath (1981) es la siguiente: “Aplicar a una línea dada un rectángulo (o, más generalmente, un paralelogramo) igual a una figura rectilínea dada, y que exceda o sea deficiente en una figura cuadrada (o, en el caso más general, en un paralelogramo semejante a un paralelogramo dado)” (p. 151).

² Las proposiciones [I, 4, 26, 34] están relacionadas con la igualdad de triángulos, las proposiciones [I, 35, 36, 37, 38, 41, 42, 43, 47] están relacionadas con la equivalencia (igualdad de áreas) y las proposiciones [VI, 5, 6, 7, 8, 19, 20, 24] son algunas de las relacionadas con la semejanza de triángulos y paralelogramos.

tema. En él propone y resuelve problemas relacionados con la división de diferentes figuras rectilíneas en otras del mismo (o diferente) tipo (división de un triángulo en dos partes de la misma área por una recta paralela a uno de sus lados; división de un trapecio de forma similar; divisiones de paralelogramos y cuadriláteros por rectas que pasen por un punto dado; etc., C. B. Boyer, 1986), así como divisiones del círculo en partes iguales o en partes que están en una proporción dada de antemano. Herón, posteriormente, escribe un libro de contenido similar al de Euclides sobre *Divisiones de figuras* (Heart, 1981), en el que profundiza en los problemas sobre comparaciones de áreas.

Kepler, con el uso de los infinitesimales para el cálculo del área, y Cavalieri, con la introducción de los indivisibles, desvían definitivamente la comparación de áreas hacia su cálculo por medio de técnicas que, más tarde, constituirán el cálculo infinitesimal.

En el estudio que presentamos a continuación tratamos de analizar los conceptos y procedimientos de más frecuente uso en la resolución de PCASP (problemas que comparan áreas de superficies planas).

Somos conscientes de que para la resolución de un mismo problema puede ser necesario utilizar, a la vez, diferentes procedimientos o que la mayoría de los problemas pueden ser resueltos por caminos que utilicen técnicas totalmente distintas. Por eso las técnicas que mostramos en las páginas siguientes —y que analizamos por separado— se presentan generalmente interrelacionadas en la resolución de problemas y es normal que en la ejecución de cualquier enfoque se combinen entre sí. Es decir, no nos llama la atención que en la resolución de un problema utilicemos, por ejemplo, la congruencia de figuras —conocimiento puramente geométrico— junto a técnicas aritméticas para el cálculo de áreas —conocimientos relacionados con aplicaciones numéricas de las fórmulas de las áreas de las figuras.

Diferenciamos en este capítulo entre: a) técnicas que llamamos geométricas —M. A. del Olmo y otros (1989) las califican como unidimensionales o cualitativas porque están relacionadas con conocimientos puramente geométricos: congruencias, equivalencias, etc.— que por su naturaleza aditiva en la comparación de áreas, como veremos, están relacionadas con el campo conceptual de las estructuras aditivas, y b) técnicas que tienen que ver con el carácter numérico del área, es decir, que están asociadas al concepto de área como magnitud bidimensional (producto de dos magnitudes unidimensionales) y, por tanto, son procedimientos aritméticos relacionados con el campo conceptual de las estructuras multiplicativas (Vergnaud, 1981 y 1990).

A pesar de analizar por separado los componentes geométrico y aritmético de la comparación de áreas, estos están relacionados entre sí y, en la resolución de problemas, cualquiera de ellos puede servir de base para la utilización de los otros, como se puede ver en el Cuadro 4.5.1 (p. 92), donde mostramos un mapa conceptual de los contenidos³ —conceptuales y procedimentales— que se utilizan con más frecuencia en la comparación de áreas de superficies planas.

La proposición [VI, 31] generaliza el teorema de Pitágoras a figuras semejantes construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo.

³ Por su extensión no entramos a analizar las propiedades y características propias de cada polígono —suma de sus ángulos interiores y exteriores, descomposición en triángulos—, ni siquiera las de los polígonos regulares, aunque muchas de dichas propiedades son básicas para la resolución de los PCASP. Algunas de dichas propiedades son resaltadas cuando analizamos los contenidos matemáticos de los problemas propuestos en el Capítulo 6.

4.2. Delimitación de los PCASP

Los problemas que comparan áreas de superficies planas (PCASP), además de ser dependientes del contenido matemático y, por tanto, no pueden ser afrontados con éxito si no se tiene un mínimo de conocimientos de los contenidos implicados en su resolución, son problemas en los que quedan perfectamente especificados los datos de los que se parte y los resultados a los que se quiere llegar.

En cambio, en los enunciados de dichos problemas —que pueden ser sólo verbales o constar de una parte verbal y otra gráfica— no quedan explícitamente establecidas ni las normas de transformación —que son propias de los procesos matemáticos relacionados con los aspectos básicos de la materia y con técnicas específicas dentro del campo que estamos considerando—, ni es posible, por su gran número, precisar todos los estados intermedios por los que puede pasar su resolución⁴. La imposibilidad de establecer, en los PCASP, todos los estados intermedios en su resolución nos ha llevado a adaptar la definición del concepto de espacio básico de un problema de Newell y Simon (Mayer, 1986) para considerar sólo los posibles caminos que se pueden utilizar en la resolución, como hacemos en el Capítulo 2.

Puesto que los PCASP son los problemas que utilizamos en esta investigación, conviene delimitar y precisar el sentido que damos a los términos que aparecen en la frase “problemas que comparan áreas de superficies planas”. Así pues, además del concepto de problema, analizado en el Capítulo 2, concretamos, en los siguientes párrafos, el uso que hacemos de los términos “superficies planas” y “comparación de áreas de superficies”.

Damos al concepto de “superficie plana” la interpretación tanto de superficie limitada por segmentos —polígonos cóncavos o convexos— como la de superficie limitada por arcos de curvas.

Centramos la investigación en las superficies planas limitadas por polígonos, aunque hacemos algunas referencias breves, en este capítulo, a superficies limitadas por segmentos y arcos de circunferencia. En particular citamos el teorema de Pitágoras generalizado para justificar la cuadratura de las lúnulas de Hipócrates.

A cada superficie asociamos un área que, como indica P. Turégano (1993), no es “una propiedad única y exclusiva de una figura determinada, sino que dos figuras distintas pueden tener la misma área, y esto proporciona también la posibilidad de compararlas” (p. 18).

La comparación de áreas de superficies planas no la entendemos en términos de desigualdad —“mayor que”, “menor que” o “tanto como”—, sino que pretendemos buscar la relación exacta entre las áreas de dos superficies planas dadas A y B, es decir, valorar numéricamente la razón:

área de A

área de B

⁴ Los PCASP no son problemas como los que cita R. Mayer (1986) —“el de la torre de Hanoi”, “el de la jarra de agua”, “el de los hobbits y los orcos”, etc.—, en los que el desarrollo del espacio del problema se facilita por ser “problemas con estados iniciales, finales y operadores claramente definidos” (p. 205).

cuando dicha valoración no tenga que ver con aproximaciones sucesivas por exceso y por defecto —obtenidas, por ejemplo, contando el número de unidades cuadradas contenidas dentro de la figura y las que la contienen—, método al que A. Gardinet (1982) llama “de las aproximaciones internas y externas”.

Además, para no complicar excesivamente la búsqueda de la razón entre las áreas con la implicación de números irracionales y para adaptar los problemas a los tipos de alumnos que participan en esta investigación, sólo proponemos aquellos en los que las áreas que hay que comparar tengan una unidad de medida en común, es decir, que sea posible encontrar una superficie contenida un número entero de veces en cada una de las superficies A y B y, por tanto, la relación entre sus áreas sea racional⁵. Por el mismo motivo de adaptación de los problemas a los alumnos que intervienen, no planteamos PCASP en términos gráficos, es decir, problemas que necesitan para su resolución la utilización de regla y compás, a pesar de que una amplia variedad de PCASP pueden enfocarse de esta manera.

No consideramos tampoco áreas de superficies limitadas por arcos de curvas cuyo cálculo exija la utilización de técnicas relacionadas con la superposición de cuadrículas y posterior aproximación o la aplicación de técnicas de integración, entre otras.

4.3. Contenidos matemáticos relacionados con aspectos geométricos de la comparación de áreas

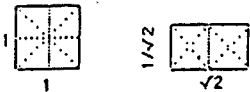
En este apartado consideramos básico el concepto de congruencia, ya que a partir de él damos una definición geométrica de equivalencia que nos permite identificar técnicas como las descritas por D. Hilbert (1991) —equidescomposición y equicomplementariedad—. También tenemos en cuenta los procedimientos relacionados con la utilización de diferentes unidades de medida, en los que el uso de mallas poligonales y de sus propiedades desempeña un papel importante.

4.3.1. Congruencia de figuras planas

La congruencia (o igualdad) de figuras planas desempeña un papel fundamental en el tipo de problemas que estamos estudiando. No sólo porque es un concepto que se utiliza como base para la definición de otros (como el de equivalencia), sino porque su aplicación resuelve directamente muchos tipos de PCASP.

Hay dos formas de enfocar la congruencia de figuras planas: por un lado, la que se basa en el concepto de movimiento —dos figuras son congruentes si una de ellas se puede

⁵ A. Gardinet (1982) justifica que la proposición recíproca de esa afirmación no es siempre cierta, ya que es fácil encontrar figuras entre cuyas áreas exista una relación racional, por ejemplo, un cuadrado de dimensiones 1 por 1 y un rectángulo de dimensiones α por $1/\alpha$, para los que no sea posible encontrar una figura unidad contenida un número exacto de veces en cada una de ellas. Sin embargo, en algunos casos, a pesar de la irracionalidad de la medida de los lados, el mencionado autor muestra polígonos, como los de la figura siguiente,



en los que sí es posible encontrar un triángulo contenido un número entero de veces en cada uno de ellos. Otros ejemplos se pueden encontrar en M. L. Keedy y CH. W. Nelson (1968).

obtener de la otra mediante un movimiento—, y, por otro, una idea de la congruencia, que podemos llamar estática⁶ —enfoque propuesto por D. Hilbert (1991)—, que está basada en la noción de congruencia de los elementos (segmentos y ángulos) que forman las figuras. Según D. Hilbert, “dos figuras se dicen congruentes cuando sus puntos pueden ordenarse por parejas, de suerte que todas las parejas de segmentos y ángulos resultantes de aquella ordenación son entre sí congruentes” (pp. 31-32).

Ahora bien, ambos enfoques nos llevan al establecimiento de unos criterios de congruencia de polígonos, en general, y de triángulos, en particular. En el caso de la congruencia basada en el movimiento, por la imposibilidad práctica de transportar un polígono sobre el otro —o, a veces, de visualizar tal transporte—; en el caso de la concepción estática de la congruencia, por la falta de necesidad de justificar la congruencia de todos los elementos homólogos de dos polígonos para demostrar su congruencia.

Por otra parte, la posibilidad de descomponer un polígono cualquiera en triángulos nos conduce a considerar los criterios de igualdad de triángulos como un concepto básico de la congruencia en el que fijamos especialmente nuestra atención a lo largo de este trabajo.

En los criterios de congruencia de triángulos subyacen dos aspectos que hemos de tener en cuenta:

- el conocimiento de los propios criterios, es decir, qué mínimo número de elementos homólogos, y cuáles, han de ser iguales para poder asegurar que los triángulos lo son;
- los conocimientos que se utilizan para identificar la igualdad de dichos elementos, entre los que podemos citar por ser los más usados: las relaciones entre los ángulos determinados por dos rectas paralelas cortadas por una recta inclinada, la medida de los ángulos interiores de un polígono regular, etc., independientemente de otros específicos relacionados con las figuras que se comparan.

La aplicación de la congruencia de triángulos se nos presenta en la resolución de PCASP en situaciones muy diferentes, como se observa en la Figura 4.3.1, donde mostramos algunas de las aplicaciones que más se utilizan en el tipo de problemas que manejamos:

- La división de un triángulo isósceles ABC (Figura 4.3.1a) en otros dos iguales por medio de la bisectriz del ángulo A. La justificación de la igualdad de los triángulos obtenidos se puede hacer argumentando que ambos coinciden por simetría, o bien basándonos en el criterio de la igualdad de dos de sus lados $AB = AC$ y AM , común, y el ángulo comprendido.
- La justificación de la congruencia de los triángulos DEC y FEB (Figura 4.3.1b), donde D y E son los puntos medios de los lados AC y BC, respectivamente, y BF paralelo a AC, ya sea por medio de una simetría central o giro de 180° , o bien siguiendo el razonamiento de la igualdad de los lados $DC=BF$ y $CE = EB$ y de los ángulos $DCE=EBF$, lo que nos permite transformar el triángulo ABC en el paralelogramo ABFD de igual área.

⁶ Aunque D. Hilbert también habla en su introducción axiomática de la congruencia del “transporte” de segmentos y de ángulos.

- La diagonal de un paralelogramo (Figura 4.3.1c) divide a éste en dos triángulos congruentes. La justificación de esta afirmación está basada en la superposición que se puede hacer de ambos triángulos por un giro de 180° , o bien, en la igualdad de, por ejemplo, los tres lados de uno de los triángulos con sus homólogos del otro.
- La igualdad de los triángulos AED y BFC (Figura 4.3.1d) —por traslación o aplicación de algún criterio de congruencia— nos permite transformar el paralelogramo ABCD en el rectángulo EFCD, siendo los dos de la misma área.

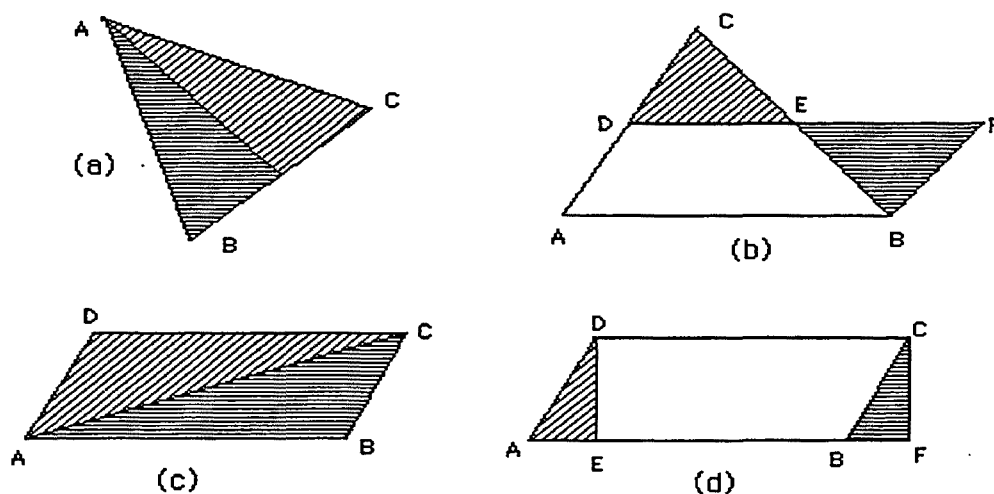


Figura 4.3.1

4.3.2. Equivalencia geométrica de figuras planas

Adoptamos la definición de equivalencia “geométrica” de polígonos dada por P. Puig Adam (1972): “Dos polígonos P1 y P2 son ‘geoméricamente equivalentes’, si al sumar y restar sucesivamente a uno de ellos P1, determinados polígonos de tal modo que los polígonos sumados son iguales a los restados, obtenemos el polígono P2 u otro congruente con él” (p.176).

Esta definición es una adaptación del concepto de equicomplementariedad de D. Hilbert (1991) que abarca los dos criterios de equivalencia de figuras planas reconocidos en los Elementos:

- “1. Dos figuras formadas por partes congruentes son equivalentes.
2. Dos figuras obtenidas al quitar partes congruentes son equivalentes” (P. Turégano, 1993, p. 24);

Asociar, como hemos hecho, el concepto de equivalencia al de suma y resta de figuras congruentes y considerarlo independiente del concepto numérico de área, aunque ambos sean equivalentes, nos permite relacionar la equivalencia de superficies planas con el campo conceptual de las estructuras aditivas (Vergnaud, 1981 y 1990).

Estudiamos por separado, en cada uno de los apartados que siguen, la equivalencia por descomposición —que H. Freudenthal (1983) cita como transformaciones de “romper y rehacer”— y la equivalencia por complemento.

4.3.2.1. *Equivalencia por descomposición*

El concepto de equivalencia por descomposición o equidescomposición⁷ —dos polígonos son equidescomponibles si pueden ser descompuestos en un número finito de polígonos respectivamente congruentes— nos sirve como base para introducir la técnica del mismo nombre, que se utiliza con frecuencia en la resolución de PCASP.

El concepto de equivalencia por descomposición nos permite “romper” una figura dada y “reagrupar” los trozos resultantes para formar otra que sea equivalente a la primera, ya que, en ese caso, las dos son equidescomponibles, es decir, descomponibles en el mismo número de polígonos congruentes dos a dos⁸.

Así, en la Figura 4.3.2 podemos observar cómo el fraccionamiento de determinadas figuras —triángulo isósceles, Figura 4.3.2a, trapecio rectángulo, Figura 4.3.2b y triángulo, Figura 4.3.2c— y la posterior unión de los polígonos resultantes —por medio de transformaciones de “romper y rehacer”— nos lleva a obtener rectángulos equivalentes a cada una de ellas.

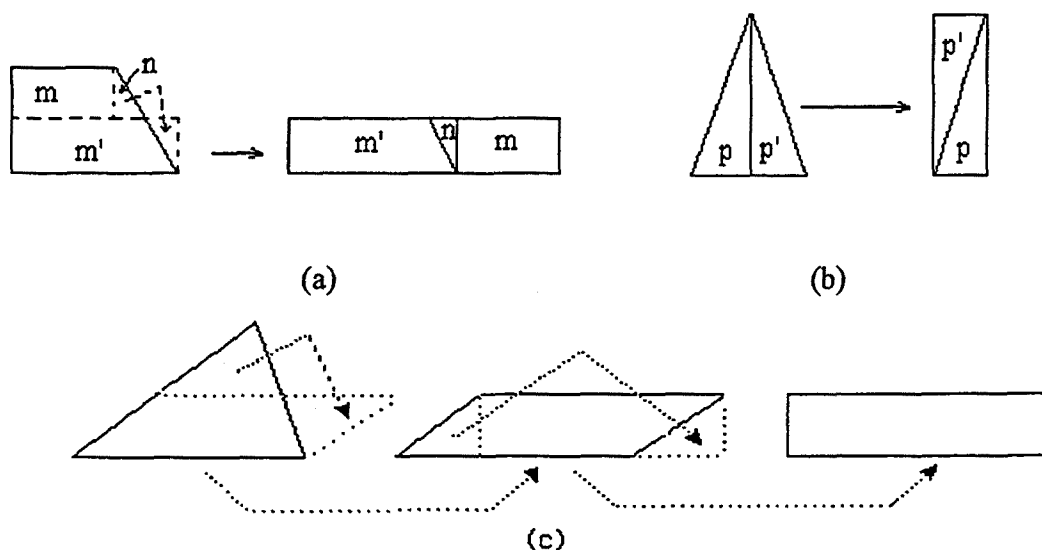


Figura 4.3.2

La equivalencia por descomposición tiene aplicaciones interesantes en la comparación de áreas, entre las que resaltamos:

⁷ Utilizamos indistintamente los términos: “equivalencia por descomposición”, “equidescomposición”, “equicomposición” y técnica de “romper y rehacer”. Los dos primeros son usados por P. Puig Adam (1972) y D. Hilbert (1991), respectivamente, el tercero es utilizado por V. G. Boltianski (1981) y el cuarto, por H. Freudenthal (1983).

⁸ Entendemos que la congruencia de los polígonos que resultan de la descomposición de otros se ha de justificar aplicando los criterios de igualdad correspondientes.

a) Determinadas demostraciones del teorema de Pitágoras⁹, como la que muestra en la Figura 4.3.3, donde el cuadrado sobre la hipotenusa se obtiene por composición de uno de los cuadrados sobre un cateto y cuatro cuadriláteros obtenidos al descomponer el cuadrado sobre el otro cateto.

b) Problemas como el del hexágono (pp. 101-105), en el que la línea 1 de su espacio básico (p. 105) nos muestra un ejemplo de la descomposición de un hexágono regular para obtener dos triángulos equiláteros congruentes.

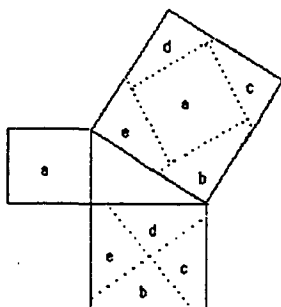


Figura 4.3.3

c) El problema propuesto en muchos libros de texto: “Relacionar el área de un cuadrilátero convexo con la del paralelogramo que resulta de unir los puntos medios de sus lados”.

Su solución se obtiene dividiendo el cuadrilátero (Figura 4.3.4) en dos triángulos por medio de una de sus diagonales y siguiendo, con cada uno de ellos, el proceso de descomposición que mostramos en la Figura 4.3.4. Observamos que el conocimiento del hecho de que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es la mitad del tercero, junto a la aplicación del proceso de descomposición y posterior composición, nos lleva afirmar que el área del cuadrilátero es doble de la del paralelogramo.

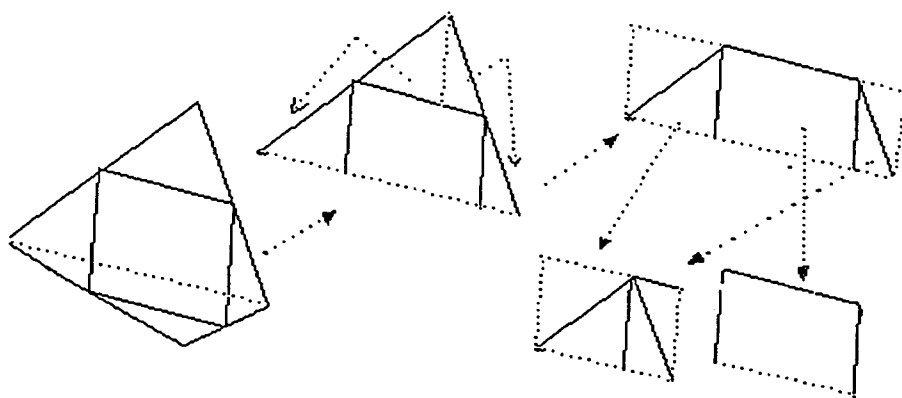


Figura 4.3.4

⁹ Otras muchas demostraciones del Teorema de Pitágoras utilizan la técnica de equicomposición. Citamos de E. S. Loomis (1972) algunas de ellas como las correspondientes a los números 2 (p. 100), 5 (p. 102), 9 (p. 104), 10 (p. 105), 11 (p. 106), 12 (p. 107), 15 (p. 109), etc.

d) El uso que hace Leonardo (Herbert Wills III, 1995) de la congruencia de figuras basándose en la idea de movimiento le permite utilizar la equidescomposición para “rectificar figuras curvilíneas” (no utilizando nunca el cálculo de las áreas de dichas figuras, lo que supondría la consideración del número π). Él entiende por “figura curvilínea” la limitada por segmentos y arcos de circunferencia, y por “rectificar una figura”, la obtención de un rectángulo de la misma área que la figura. Mediante la técnica de romper y rehacer, Leonardo consigue rectificar el “péndulo”, el “hacha” y diferentes “motivos de diseños circulares”.

Es evidente que dos figuras equidescomponibles tienen la misma área, es decir, son equivalentes, pero la demostración de que figuras que tengan la misma área sean también equidescomponibles no resulta tan sencilla. Bolyai y Gerwien (Bolstianski, 1981) demostraron tal afirmación justificando previamente el hecho de que cualquier polígono es equidescomponible a un rectángulo. Por su parte, D. Hilbert (1991), basándose en los grupos de axiomas que definió, demostró que para que dos polígonos que tengan la misma área sean equidescomponibles necesita utilizar el axioma de Arquímedes, además de los de enlace del plano, de orden, de congruencia y de las paralelas.

4.3.2.2. Equivalencia por complemento

Con la finalidad de desarrollar una teoría de las áreas de polígonos independiente del axioma de Arquímedes, D. Hilbert (1991) introduce el concepto de equicomplementariedad¹⁰ de la forma siguiente: Dos polígonos son equicomplementarios cuando al agregar, a ambos, pares de polígonos equidescomponibles resulten dos polígonos que sean equidescomponibles.

La definición anterior es similar a la que resulta de agregar a cada una de las dos figuras p y q otras simultáneamente congruentes r y r' , s y s' , t y t' hasta obtener figuras congruentes. Es decir, de:

$$p + r + s + t = q + r' + s' + t', \text{ con } r = r', s = s' \text{ y } t = t', \text{ podemos deducir que } p = q^{11}$$

Euclides utiliza esta técnica en diferentes situaciones, como, por ejemplo, en la proposición [I, 35] (Euclides, p. 245) y en la [I, 43] (Euclides, p. 253), basándose para su demostración en las “nociones comunes” introducidas por él en el libro primero de los Elementos, donde afirma que “si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales”, o “si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales” (p. 200).

En la proposición [I, 35], Euclides justifica la equivalencia de dos paralelogramos — ABEF y CDEF, Figura 4.3.5— que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas demostrando, primero, la equivalencia de los trapecios ABGF y CDEG a partir de la de los triángulos ACF y BDE, a los que quita la parte común BCG, y, después, añadiendo a dichos trapecios el triángulo común EFG.

En la proposición [I, 43] tenemos otro ejemplo de equivalencia por complemento, pues a los triángulos congruentes ACD y ABC (Figura 4.3.6) les restamos los triángulos r y s y r' y s' , respectivamente congruentes, para obtener la equivalencia de los paralelogramos p y q . Es decir, $p + r + s = q + r' + s'$, y como r es congruente a r' y s a s' —por ser

¹⁰ Utilizamos indistintamente los términos “equivalencia por complemento” (Puig Adam, 1972), “equicomplementariedad” (Hilbert, 1991) y “equiadición” (Bolstianski, 1981).

¹¹ El símbolo “=” lo utilizamos aquí como sinónimo de congruencia.

triángulos obtenidos al dividir un paralelogramo en dos por medio de una de sus diagonales—, entonces p y q serán equivalentes.

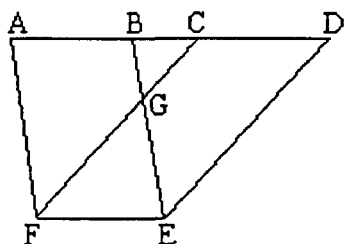


Figura 4.3.5

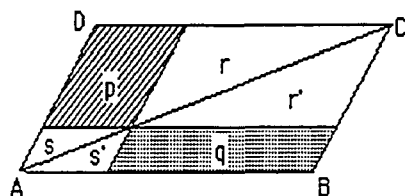


Figura 4.3.6

Otros ejemplos similares de aplicación de esta técnica los podemos encontrar en la recopilación de demostraciones que hace E. S Loomis (1972) del teorema de Pitágoras¹², una de las cuales —la que tiene el número 90 (p.153)— es la que mostramos en la Figura 4.3.7, donde el cuadrado p se ha completado con los triángulos a , b , c y d , congruentes a los a' , b' , c' y d' , que completan la suma de los cuadrados q y r hasta obtener el cuadrado $A'B'C'D'$ congruente al $ABCD$.

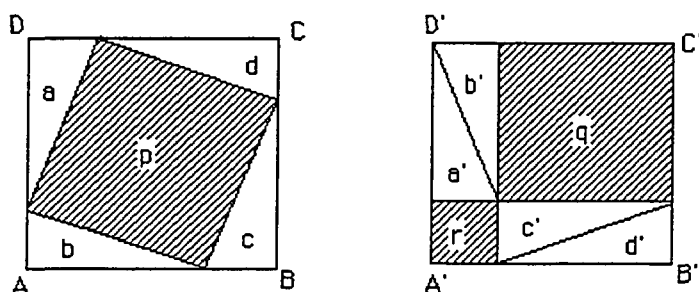


Figura 4.3.7

Con la introducción del concepto de equicomplementariedad, D. Hilbert (1991) demuestra —con independencia del axioma de Arquímedes— que dos polígonos de igual área son equicomplementables y viceversa, es decir, si son equicomplementables tienen la misma área.

4.3.2.3. Comparación por descomposición de polígonos en diferentes unidades de medida. Utilización de geoplanos de mallas poligonales

¹² De las muchas demostraciones geométricas del teorema de Pitágoras que podemos encontrar en E. S. Loomis (1972) que utilizan la técnica de equiadición, citamos, por ejemplo, las correspondientes a los números 56 (p. 134), 57 (p. 134), 58 (p. 134-135), 59 (p. 135), 60 (p. 135-136), 63 (p. 137), 64 (p. 138), etc.

Frente a la consideración de una única unidad de medida —cuadrada— en la comparación de áreas de superficies planas, en algunas ocasiones nos vemos en la necesidad de adoptar otras unidades de medida más adecuadas al caso particular de las figuras que queremos comparar.

Así, hay veces en que la utilización de una unidad de medida, como la triangular, facilita el cálculo de las áreas y, por tanto, su comparación, o bien nos permite directamente la comparación, como ocurre cuando consideramos, por ejemplo, mallas triangulares, pentagonales, hexagonales, etc.

Es evidente que la utilización de mallas triangulares resuelve con relativa facilidad la comparación en casos como el que mostramos en la Figura 4.3.8a. En él hemos de comparar las áreas de los triángulos ABC y DEF. Una simple visualización de tales triángulos inmersos en una malla triangular nos permite resolver el problema contando las unidades triangulares, para lo cual necesitamos considerar las propiedades sencillas de dichas mallas, como, por ejemplo, que la diagonal EF del paralelogramo OEGF lo divide en dos figuras congruentes (Figura 4.3.8a).

Un caso parecido nos aparece en la Figura 4.3.8b —correspondiente al problema del hexágono (Capítulo 5)—, donde se nos pide comparar el área del hexágono ABCDEF con la del triángulo ACE. La inmersión de tales figuras en una malla hexagonal, unida a la aplicación de propiedades como la de que el segmento AC divide a la unidad hexagonal en dos trapezios congruentes (Figura 4.3.8b), nos permite comparar ambas áreas en términos de recuento de unidades hexagonales.

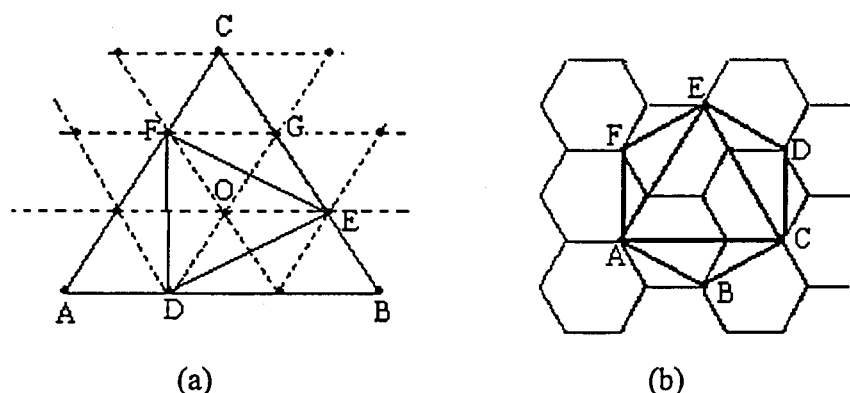


Figura 4.3.8

Otros ejemplos de problemas de comparación de áreas que utilizan diferentes tipos de mallas para su resolución los podemos encontrar en M. Olson y G. White (1989), en D. R. Anderson y M. J. Arcidiacono (1989) y en B. H. Litwiller y D. R. Duncan (1989).

4.4. Contenidos matemáticos relacionados con aspectos aritméticos de la comparación de áreas

La consideración de la equivalencia numérica de figuras planas, es decir, equivalencia en la que interviene el concepto de área como magnitud bidimensional (área expresada

como producto de la longitud de dos segmentos)¹³, da lugar a la utilización tanto de procedimientos aritméticos —aplicación de fórmulas para el cálculo de áreas—, como de las diferentes relaciones métricas entre los elementos de la figuras. Estos procedimientos tienen una vertiente aritmética relacionada con la bidimensionalidad del concepto de área, ya que su aplicación conlleva siempre el producto de dos magnitudes longitudinales, de ahí su relación con el campo conceptual de las estructuras multiplicativas.

Analizamos en este apartado procedimientos de diferentes características que van desde los más conocidos de la aplicación de cualquier tipo de fórmulas hasta el propuesto por A. Gardinet (1982) —que utiliza algunas de las técnicas de carácter geométrico, ya analizadas en el apartado anterior, para reducir la comparación de áreas a la de segmentos (dentro de esa reducción hemos incluido los procedimientos que tienen que ver con la aplicación de la semejanza de polígonos)—, sin olvidar el procedimiento que transforma un polígono cualquiera en otro equivalente de un lado menos, lo que nos lleva, siguiendo un proceso inductivo, a la cuadratura de un polígono.

4.4.1.Equivalencia aritmética. Aplicación de las fórmulas de las áreas de las figuras geométricas u otras relaciones métricas

Incluimos bajo este título no sólo la aplicación de las fórmulas establecidas para el cálculo directo de las áreas de algunas figuras planas, sino también las de otras relaciones métricas que, como el teorema de Pitágoras, el teorema de la altura, etc., se pueden aplicar en la resolución de PCASP. La cuadratura de polígonos, que tiene su fundamento en la aplicación de la fórmula del área del triángulo, completa este apartado.

4.4.1.1. Aplicación de fórmulas

La aplicación de las fórmulas de las áreas de las figuras planas es un procedimiento que se utiliza con frecuencia en la resolución de PCASP, ya sea para calcular cada una de las áreas que intervienen y buscar, así, su relación, o para comparar dichas áreas directamente a partir de las fórmulas expresadas en función de alguno o algunos elementos comunes de las figuras.

Ejemplos interesantes de la aplicación de fórmulas los tenemos en muchas de las demostraciones que E. S. Loomis (1972) hace del teorema de Pitágoras, donde utiliza la igualdad de la base y la altura de cuadrados y paralelogramos (Figura 4.4.1).

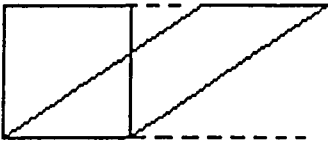


Figura 4.4.1

¹³ D. Hilbert (1991) justifica que dos polígonos de igual área son equicomplementarios y, más tarde, P. Puig Adam (1972), dando una definición de equivalencia geométrica —basada en el concepto de equicomplementariedad de D. Hilbert—, justifica que dos polígonos numéricamente equivalentes son equivalentes geoméricamente y viceversa.

El razonamiento que justifica la igualdad de dos triángulos basándose en que tengan sus bases y alturas respectivamente iguales —o el más general de comparar las alturas (o las bases) para relacionar las áreas de paralelogramos y triángulos— se aplica en muchas situaciones relacionadas con comparaciones de áreas de polígonos. Un ejemplo típico es el que se nos plantea cuando se nos pide: “Dividir un triángulo dado en dos, tres, cuatro, etc., triángulos equivalentes a partir de rectas que pasen por uno de sus vértices”.

La solución de este problema se obtiene dividiendo el lado opuesto —BC (Figura 4.4.2a)— al vértice A, por el que han de pasar las rectas, en dos, tres, cuatro, etc., segmentos iguales y observando que los triángulos resultantes tienen bases iguales y las alturas —correspondientes al vértice A— coincidentes.

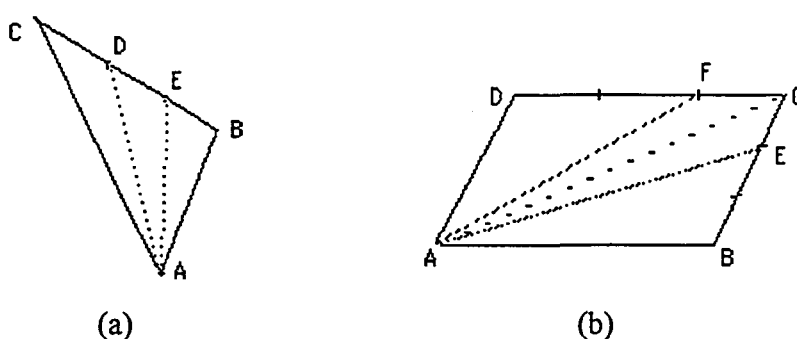


Figura 4.4.2

Además, el problema anterior puede ser generalizado al caso de paralelogramos de la forma siguiente: “Dividir un paralelogramo en n partes equivalentes mediante rectas concurrentes en uno de sus vértices”.

La división del paralelogramo en dos triángulos y la aplicación de los mismos argumentos que en el caso de la división de un triángulo resuelve el problema (Figura 4.4.2b).

Por otra parte, la fijación de la unidad de medida es un aspecto interesante a tener en cuenta por lo que se refiere a las fórmulas de las áreas de las figuras planas y, por tanto, a su aplicación.

En efecto, frente a las fórmulas, ya tradicionales, de las áreas de las figuras geométricas cuando se utiliza el cuadrado como unidad de medida, se encuentran las menos conocidas, pero también útiles en determinadas situaciones, que se pueden deducir a partir de la consideración del triángulo equilátero (o cualquier otro polígono regular) como unidad de medida. En este caso, el área de un triángulo equilátero de lado “ a ” sería $A = a^2$. La de un triángulo cualquiera de base “ a ” y pseudoaltura “ h ” —longitud del segmento que une el vértice con la base formando un ángulo de 60° — sería $A = a \cdot h$ (Figura 4.4.3a). La de un polígono regular que tuviera como lado “ a ” y como pseudoapotema “ b ” —longitud del segmento que une el centro con uno de sus lados o su prolongación formando un ángulo de 60° — sería $A = P \cdot b$ (Figura 4.4.3b).

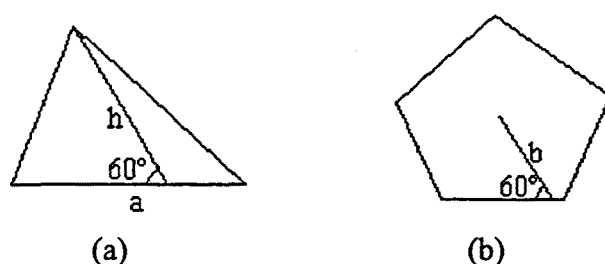


Figura 4.4.3

El uso de geoplanos de malla poligonal (triangular en nuestro caso) y de las propiedades de los conceptos y procedimientos relacionados con la concepción geométrica de la equivalencia nos ayuda a justificar dichas fórmulas. La línea 4 del espacio básico del problema del hexágono (Capítulo 5) nos muestra un ejemplo donde su aplicación es ventajosa respecto a otras técnicas.

4.4.1.2. Cuadratura de polígonos

La obtención de un polígono $AB'DEF$ (Figura 4.4.4) equivalente a otro dado $ABCDEF$, pero con un lado menos que éste, es una técnica que incluimos en este estudio no tanto porque se emplee con frecuencia en la resolución de PCASP o porque aplicándola reiteradamente se pueda conseguir la cuadratura de cualquier polígono, sino más bien porque en la justificación de la equivalencia de ambos polígonos se utiliza un razonamiento —basado en la aplicación de la fórmula del área de un triángulo— que sirve como base para la resolución de ciertos tipos de PCASP.

En efecto, para justificar la equivalencia de los polígonos $ABCDEF$ y $AB'DEF$ (Figura 4.4.4) basta prolongar el lado AB por B y trazar por C una paralela a la diagonal BD hasta que corte a dicha prolongación en el punto B' . La igualdad de los triángulos BCD y $BB'D$, que se justifica porque tienen la misma base — BD — y la misma altura, prueba la equivalencia de los polígonos.

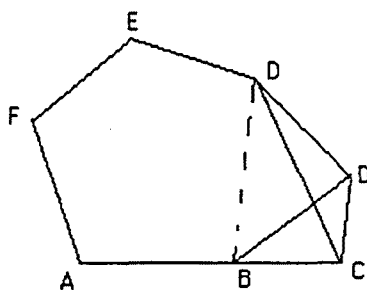


Figura 4.4.4

4.4.1.3. Otras relaciones métricas

Además de la tradicional utilización de algunas relaciones métricas —teorema de Pitágoras, teorema de la altura, teorema de los senos, del coseno, razones trigonométricas, etc.— para calcular o relacionar las medidas de los elementos lineales de las figuras que se comparan, queremos resaltar la interpretación que de dichas relaciones podemos hacer en

términos bidimensionales. Nos referimos, como mostramos en la Figura 4.4.5, a la aplicación de los teoremas del cateto (Figura 4.4.5a) y de la altura (Figura 4.4.5b) para significar la equivalencia de cuadrados y rectángulos sombreados. Esta consideración nos da una perspectiva que suele ser utilizada poco en la resolución de PCASP.

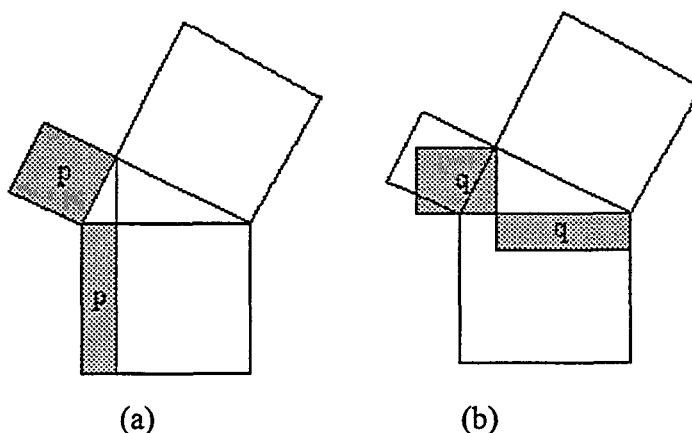


Figura 4.4.5

4.4.2. Reducción de la comparación de superficies a la de magnitudes longitudinales

La imposibilidad de comparar directamente áreas de figuras geométricas siguiendo un procedimiento análogo al de la comparación de segmentos, ni siquiera cuando dichas figuras son semejantes —ya que su diferencia no vuelve a ser semejante a las primeras— ha llevado a A. Gardinet (1982) a establecer una técnica que reduce la comparación a la de segmentos. Esta técnica es la que exponemos brevemente en el apartado 4.4.2.1. El apartado 4.4.2.2 está dedicado a la aplicación del concepto de semejanza.

Esos dos procedimientos tienen en común que reducen la comparación de las áreas de dos figuras a las de dos de sus elementos lineales. En el primer caso, a la de las bases de dos rectángulos equivalentes a las figuras dadas, y en el caso de las figuras semejantes, a la de dos de sus elementos lineales homólogos.

4.4.2.1. Reducción de polígonos cualesquiera a rectángulos estándares equivalentes

A. Gardinet (1982) reduce la búsqueda de la relación entre el área de dos polígonos cualesquiera a la de las bases de dos rectángulos, que él llama “estándares”¹⁴ —porque tienen de altura la unidad—, equivalentes a los dos polígonos dados.

La obtención del rectángulo estándar equivalente a un polígono conlleva un proceso inductivo de transformación cuyo desarrollo resumimos en los siguientes pasos:

¹⁴ Por su parte, D. Hilbert (1991) reduce los polígonos a triángulos rectángulos con uno de sus catetos igual a la unidad, basándose en la equidescomposición, en la equicomplementariedad y en el teorema fundamental de las proporciones: “Si dos paralelas determinan respectivamente en los lados de un ángulo cualquiera segmentos a , b , a' , b' , se verifica la proporción $a:b = a':b'$ ” (p. 73). Este proceso de transformación de polígonos en triángulos rectángulos lo utiliza D. Hilbert, después, para justificar la equivalencia entre el concepto numérico que da de área de un polígono y el de equicomplementariedad.

a) Cualquier rectángulo se puede transformar en otro que sea estándar y equivalente al original de la siguiente forma:

Si el rectángulo dado tiene una altura superior a la unidad se transforma en otro equivalente dividiéndolo en dos rectángulos iguales que se vuelven a unir, como se muestra en la Figura 4.4.6a. Este proceso se repite hasta que el rectángulo obtenido tiene una altura inferior a la unidad.

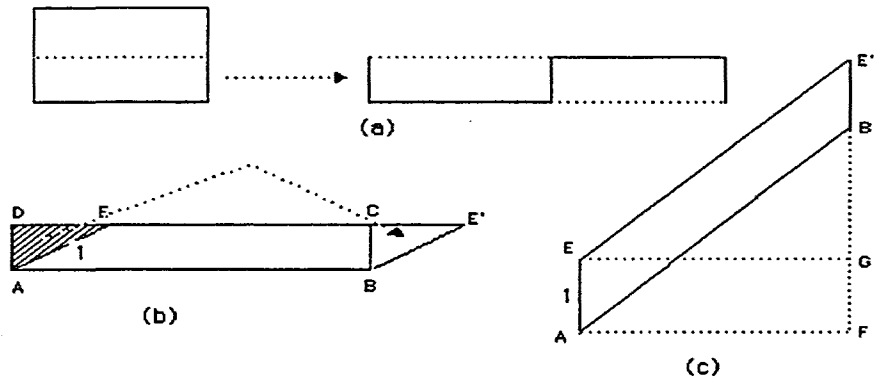


Figura 4.4.6

El rectángulo ABCD (Figura 4.4.6b) obtenido se transforma en un paralelogramo equivalente (ABE'E) trazando desde A un arco de radio unidad y llevando el triángulo AED a continuación del lado BC.

A partir del paralelogramo ABE'E se obtiene el rectángulo AFGE (Figura 4.4.6c), de altura unidad y por tanto estándar, equivalente a aquél. La justificación de la equivalencia de ambos se puede conseguir (Figura 4.4.7a) descomponiéndolos en triángulos (o cuadriláteros, como a₅) congruentes mediante rectas paralelas a sus lados o simplemente observando que tanto el rectángulo como el paralelogramo tienen la misma base —la unidad— y la misma altura¹⁵.

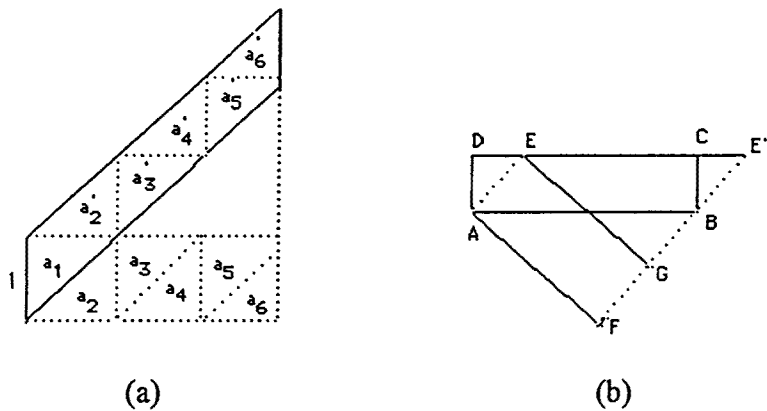


Figura 4.4.7

¹⁵ Un problema —adaptado de A. Gardinet— que, en cierta forma, generalizaría el razonamiento que ilustramos en la Figura 4.4.7a sería el siguiente: “Justificar la equivalencia de los rectángulos ABCD y AFGE de la Figura 4.4.7b”, que considera un valor cualquiera para el segmento AE de la Figura 4.4.7b,

b) Cualquier triángulo se puede transformar en un rectángulo equivalente utilizando la equidescomposición, bien sea siguiendo un proceso como el que mostramos en la Figura 4.3.2c, es decir, transformándolo en un paralelogramo y éste en un rectángulo, o bien haciéndolo directamente como mostramos en la Figura 4.4.8.

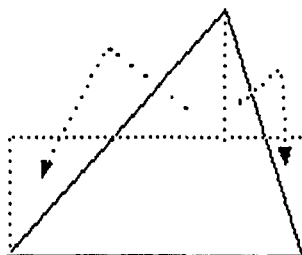


Figura 4.4.8

c) Cualquier cuadrilátero se puede descomponer en dos triángulos equivalentes a él, que reducidos a rectángulos estándares, por un procedimiento similar al descrito anteriormente, nos darían respectivamente rectángulos de base a y b y de altura 1 . Si estos rectángulos los unimos por los lados correspondientes a las alturas obtendremos un único rectángulo de base $a+b$ y altura 1 equivalente al cuadrilátero original.

d) Cualquier polígono se puede reducir a un rectángulo estándar equivalente por dos procedimientos:

- Siguiendo un proceso inductivo similar al descrito en el apartado 4.4.1.2, para, de esta forma, reducir el polígono a un cuadrilátero equivalente, que a su vez se puede descomponer en dos triángulos, que, por el apartado anterior, se pueden reducir a rectángulos estándares;
- Como razona A. Gardinet (1982), también por inducción, diciendo que si un triángulo —polígono de tres lados— se puede reducir a un rectángulo estándar equivalente, y si suponemos que un polígono de n lados se puede también reducir, entonces un polígono de $n+1$ lados también sería reducible a un rectángulo estándar equivalente, ya que se puede descomponer en uno de n lados y en un triángulo y ambos son reducibles.

Por tanto, la comparación de las áreas de dos polígonos cualesquiera siempre es posible reducirla a la de las bases de los rectángulos estándares equivalentes a cada uno de ellos, lo que permite comparar las áreas de dos polígonos cualesquiera de una forma similar a como se comparan segmentos.

La reducción de un polígono cualquiera a un rectángulo equivalente la hemos incluido dentro de los procedimientos que hemos llamado aritméticos —a pesar de que, como acabamos de ver, algunos de los argumentos utilizados para justificar la transformación hayan sido de tipo geométrico—, porque en la construcción del rectángulo al que se llega juegan un papel fundamental sus dimensiones, es decir, el hecho de que busquemos un rectángulo en el que queden especificados su base y su altura liga a este procedimiento con el concepto numérico de equivalencia.

4.4.2.2. *Semejanza de polígonos*

Consideramos la semejanza¹⁶ como un concepto asociado a la comparación numérica de superficies desde el momento en que en ella interviene la proporcionalidad —relación numérica— de los lados homólogos de las figuras. Subyace al concepto de semejanza de polígonos el teorema de Tales, que nos permite proyectar paralelamente los segmentos determinados en una recta sobre otra.

En la comparación de áreas se utilizan con frecuencia tres aspectos concretos de la semejanza que queremos destacar:

a) La semejanza de triángulos, igual que la congruencia, es fundamental para la resolución de cierto tipo de PCASP, tanto por lo que se refiere al conocimiento de los propios criterios de semejanza de figuras, como a los razonamientos que nos llevan a establecer dicha semejanza. El establecimiento de semejanza de dos figuras exige muchas veces, por una parte, la aplicación del teorema de Tales para conseguir las medidas y relaciones entre lados homólogos y, por otra, la aplicación de las relaciones entre los ángulos determinados por dos rectas paralelas cortadas por una secante.

b) La relación —encontrada y justificada por Euclides en las proposiciones [VI, 19] y [VI, 20]— que hay entre las áreas de figuras semejantes y la razón de dos de sus lados homólogos. Esta relación:

$$\frac{A}{A'} = \left(\frac{a}{a'}\right)^2$$

es la que nos permite, entre figuras semejantes, reducir la comparación de sus áreas a la de dos de sus elementos (no necesariamente lados) homólogos, aunque esta relación tenga que ser finalmente elevada al cuadrado.

Un ejemplo típico, del que A. H. Schoenfeld (1985b) hace un estudio exhaustivo, es el siguiente:

“Dividir un triángulo dado en dos partes de igual área por una recta paralela a uno de sus lados”,

que se reduce a comparar los lados homólogos (o las alturas) de los triángulos semejantes obtenidos¹⁷;

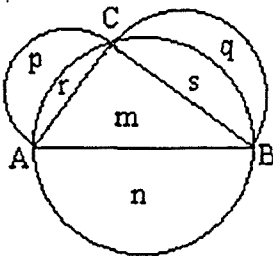


Figura 4.4.9

¹⁶ Al ser la homotecia un caso particular de la semejanza, no hacemos referencia explícita a ella.
¹⁷ En M. García Ardura (1974) podemos encontrar varios problemas con la misma estructura que el anterior, es decir: “Dividir un triángulo en partes equivalentes...” y que involucran en su resolución los mismos contenidos matemáticos, especialmente la semejanza de triángulos.

c) El conocimiento de que todos los polígonos regulares de igual número de lados son semejantes lo utilizamos para relacionar directamente sus áreas, de igual forma que en el apartado anterior, simplemente buscando la relación que hay entre sus lados.

Por otra parte, la generalización del teorema de Pitágoras al caso de figuras semejantes construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo —ya demostrado por Euclides en la proposición [VI, 31]— nos permite la comparación de áreas relacionando dicho teorema con el concepto de semejanza.

La generalización del teorema de Pitágoras al caso de semicírculos construidos sobre sus lados lo podemos utilizar para justificar la cuadratura de las “Lúnulas de Hipócrates”, en el sentido de que la suma de las áreas de las dos lúnulas p y q (Figura 4.4.9) es igual al área del triángulo rectángulo — m — sobre el que están construidas, ya que si complementamos el triángulo ABC —de área m — y las lúnulas p y q con los mismos segmentos circulares r y s , obtenemos, por una parte, n , y, por otra, los semicírculos AC y BC que son equivalentes, por el teorema de Pitágoras, es decir, $m + r + s = p + r + q + s$, y, por tanto, $m = p + q$ ¹⁸.

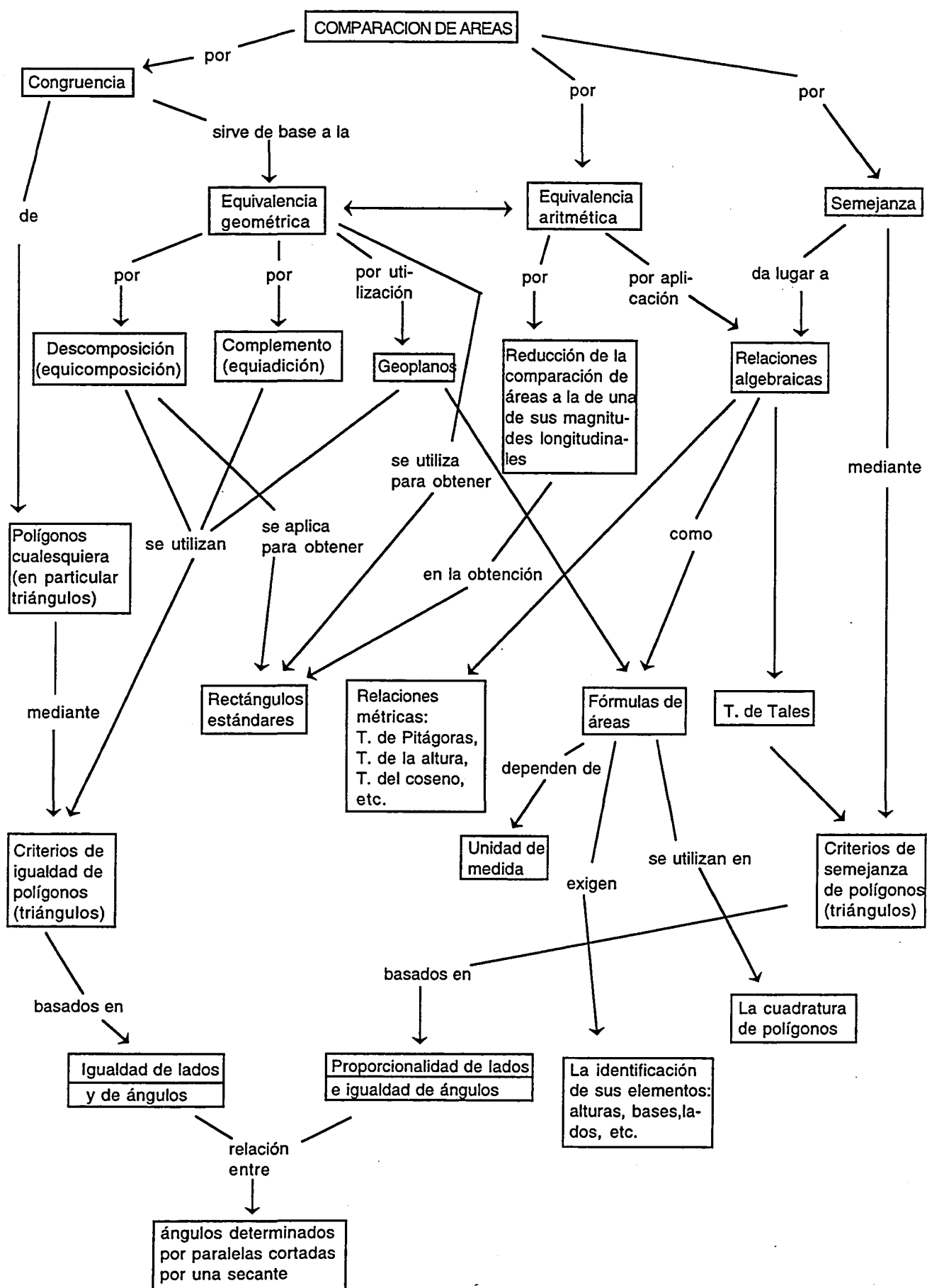
4.5. Mapa conceptual de los contenidos matemáticos implicados en la resolución de PCASP

Los conceptos y técnicas utilizados en la comparación de áreas que hemos identificado en el presente capítulo los mostramos relacionados en el mapa conceptual de la página siguiente (Cuadro 4.5.1).

Para su elaboración hemos tenido en cuenta tanto la distinción entre los aspectos geométricos y aritméticos de la comparación de áreas, puesta de manifiesto a lo largo de este capítulo, como la integración de conceptos y técnicas y su jerarquización, desde los más generales —congruencia, equivalencia aritmética y geométrica y semejanza— hasta los que hemos considerado más específicos, que hemos situado en la parte inferior.

¹⁸ En este caso utilizamos el símbolo “=” como sinónimo de equivalencia (igualdad de áreas).

Cuadro 4.5.1. Mapa conceptual de los contenidos matemáticos implicados en la resolución de PCASP



CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS DE LOS PROBLEMAS SELECCIONADOS

Existe la tentación de evitar aquellos problemas que nos parecen “sencillos” a nosotros. Fuera del contexto, no obstante, los problemas elementales pueden ser bastante estimulantes.

A. H. Schoenfeld (1985a)

5.1. Introducción

En este capítulo pretendemos identificar los contenidos matemáticos involucrados en la resolución de los cuatro problemas que hemos utilizado para que sean resueltos de forma oral por cada pareja de alumnos y lo hacemos: *a)* mostrando los posibles enfoques para su resolución agrupados en el espacio básico que construimos para cada problema, y *b)* analizando, después, con detalle no solamente las técnicas utilizadas en cada uno de dichos enfoques —de acuerdo con la nomenclatura usada en el Capítulo 2—, sino haciendo también hincapié en los conocimientos conceptuales necesarios para implementar cada enfoque.

Los análisis de los contenidos conceptuales y procedimentales involucrados en la resolución de los problemas que proponemos nos servirán de base para la confección de las pruebas que nos medirán la evolución de los conocimientos de los alumnos (Capítulo 6).

La investigación que pretendemos nos exige una identificación minuciosa de los contenidos matemáticos implicados en la resolución de los problemas para saber los que son más relevantes para los alumnos y la incidencia que tienen en el posible cambio epistémico que se pueda producir; por esta razón, la selección de los problemas la hemos hecho siguiendo los criterios, por una parte, de que la mayoría de ellos se pudieran resolver por diferentes caminos —enfoques distintos— y, por otra, de que abarcaran un amplio espectro de conocimientos relacionados con la comparación de áreas, dentro de las posibilidades que ofrecen los alumnos que los resuelven. Por ejemplo, hemos excluido la referencia a aspectos relacionados con los movimientos en el plano por el desconocimiento que de ellos tienen los alumnos que participan en la experiencia.

Presentamos cuatro problemas —problema del paralelogramo, del hexágono, del triángulo y del cuadrado— que han sido elegidos de forma que a los alumnos no les resulten ni demasiado difíciles para que no haya rechazo inicial, ni tan fáciles que no constituyan para ellos verdaderos problemas.

Por otra parte, no nos olvidamos de la presentación de dichos problemas —“formulación del problema”, en palabras de J. F. Richard (1984)—; nos referimos a su estructura externa, que tanta influencia puede tener en la representación que del problema se hace el alumno y, por tanto, en la conducción del proceso de resolución.

Aunque en esta investigación no buscamos la influencia que la estructura externa del problema puede tener en su resolución o en el cambio epistemológico de los alumnos, nos ha parecido oportuno hacer algunos comentarios sobre ella —al final del análisis de cada problema— para justificar la formulación que presentamos de los problemas que hemos elegido.

Aprovechamos, también, la oportunidad para establecer una metodología de trabajo que nos sirva para identificar todos los contenidos matemáticos que puedan estar implicados en la resolución de cualquier problema de matemáticas.

5.2. Esquema de trabajo para identificar los contenidos matemáticos involucrados en la resolución de problemas

El esquema de trabajo que presentamos a continuación está pensado para identificar todos los posibles contenidos matemáticos involucrados en la resolución de un problema de matemáticas. Tiene la finalidad, por una parte, de establecer los conocimientos mínimos necesarios que han de tener los alumnos para resolver el problema y, por otra, de modificar la presentación del problema para inclinar su resolución hacia un enfoque predeterminado —si es que nos interesa alguno en particular— y para generar otros problemas por particularización o por generalización de alguno de los contenidos implicados en la resolución del problema original.

El esquema que mostramos en el Cuadro 5.2.1 consta de tres fases:

a) Partimos de un enunciado del problema, que podríamos llamar básico, y a partir de él identificamos, en una primera aproximación, los contenidos, sobre todo conceptuales, que aparecen explícitamente en dicho enunciado. Los alumnos han de conocer dichos contenidos para iniciar la resolución del problema. Es decir, el conocimiento de la terminología y de los conceptos que subyacen en ella es imprescindible para acometer con ciertas posibilidades de éxito la resolución de cualquier problema.

Otros contenidos —también necesarios para la resolución— saldrán, como veremos en las siguientes fases, de la consideración de conceptos y procedimientos comunes a la ejecución de todos los enfoques identificados, a pesar de no estar explícitos en el enunciado del problema.

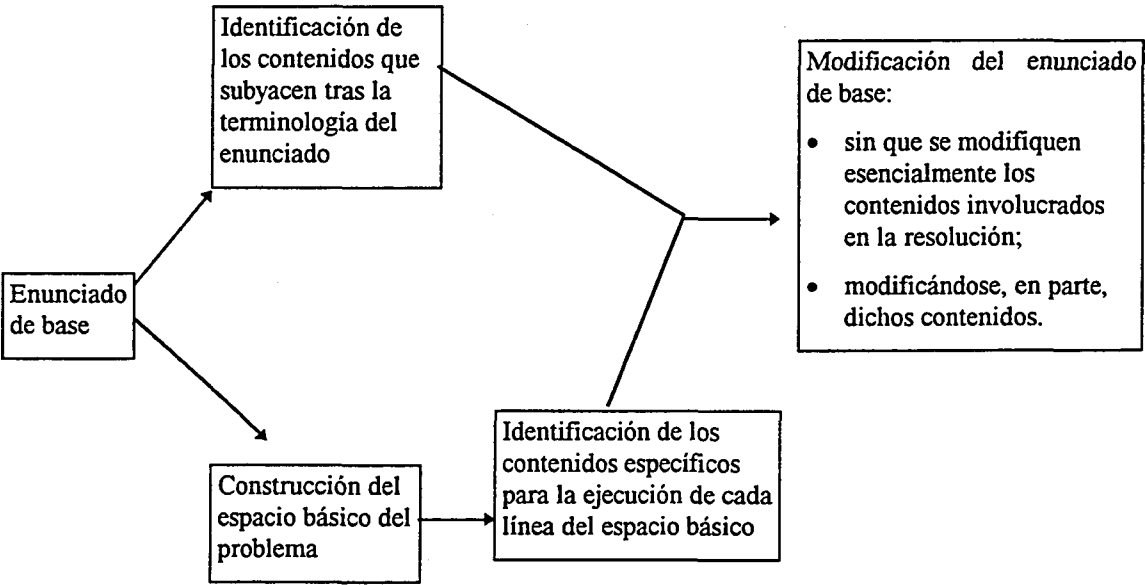
b) En una segunda fase tratamos de resolver el problema de diferentes formas, es decir, identificamos los enfoques que nos llevan a una solución completa del problema.

Con la identificación de los posibles enfoques de resolución y la construcción del espacio básico del problema conseguimos delimitar tanto las técnicas que se emplean en la ejecución de cada línea del espacio básico, como los conceptos implicados en cada una de dichas líneas. Es decir, delimitamos los conocimientos específicos necesarios para que el alumno pueda resolver el problema siguiendo cada una de las líneas del espacio básico.

Las diferentes líneas del espacio básico de un problema no las consideramos como caminos independientes unos de otros, sino que, como podemos observar en los problemas propuestos, pueden involucrar, en parte, técnicas y conceptos comunes.

c) Por último, en un intento por volver hacia atrás, podemos modificar el enunciado original —es decir, la presentación del problema— sobre la base de los contenidos identificados, para inclinar, si nos interesa, la resolución del problema por un camino determinado de antemano, o bien para obtener, a partir del problema original, otros problemas —ya sea generalizando o particularizando algunos de los contenidos identificados—, aunque los problemas generados de esa forma sean esencialmente diferentes del original, sobre todo si se generaliza algún concepto o algún procedimiento.

Esta fase de adaptación del enunciado del problema a las características de los alumnos que participan en la investigación es importante para no obtener problemas ni muy fáciles ni muy difíciles.



Cuadro 5.2.1

5.3. Presentación de problemas e identificación de sus contenidos matemáticos

Identificamos los contenidos matemáticos involucrados en la resolución de cada uno de los cuatro problemas propuestos siguiendo el esquema que hemos desarrollado en el apartado 5.2; es decir, distinguimos los contenidos conceptuales relacionados con los términos que aparecen en el enunciado, estudiamos los posibles enfoques que pueden utilizarse en la resolución y, con ayuda de los espacios básicos, examinamos los conocimientos necesarios para la ejecución de cada enfoque. Por último, analizamos las posibles variantes en la presentación de cada problema y su previsible incidencia en el proceso de resolución.

5.3.1. Problema del paralelogramo

Si M es un punto cualquiera de la diagonal AC del paralelogramo $ABCD$, ¿qué relación hay entre las áreas de los triángulos rayados de la Figura 5.3.1?

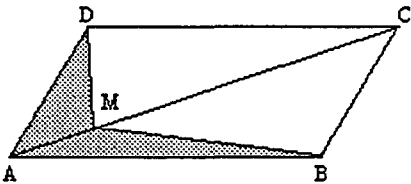


Figura 5.3.1

En el enunciado de este problema podemos destacar dos aspectos. En primer lugar, la referencia a conceptos concretos y sencillos —si pensamos en el tipo de alumnos que resolverán este problema—, como son “paralelogramo” y “diagonal de un paralelogramo”, y, en segundo lugar, la referencia genérica que se hace a la posición del punto M —“un punto cualquiera de la diagonal de dicho paralelogramo”—, aunque para facilitar la comprensión del enunciado optamos por mostrar una posición concreta del punto M en la Figura 5.3.1.

La referencia que hacemos en el enunciado al paralelogramo concreto $ABCD$ de la Figura 5.3.1 fue una opción que comentaremos al final de este apartado.

La presentación de forma genérica nos obliga a identificar y justificar la igualdad utilizando procedimientos que sean independientes de la situación del punto M sobre la diagonal.

Hemos identificado cuatro enfoques diferentes para resolver este problema. Todos ellos pueden implementarse directamente, como se observa en el Cuadro 5.3.1, líneas 1, 2, 3 y 4 (p. 100), o a través de un proceso previo de consideración de casos particulares, límites o singulares que explicamos brevemente después de analizar cada uno de los enfoques del espacio básico.

a) El enfoque identificado en la línea 1 supone la utilización de la técnica de equivalencia por complemento, que lleva consigo la descomposición del paralelogramo $ABCD$ en otros cuatro — $MFCG$, $EBFM$, $AEMI$ e $IMGD$ (Figura 5.3.2)— mediante dos rectas, r y s , paralelas a cada uno de los lados del paralelogramo.

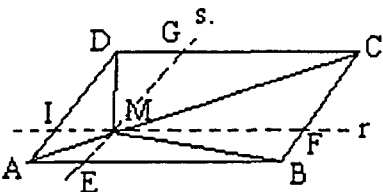


Figura 5.3.2

Basándonos en que la diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos congruentes (pudiéndose justificar este hecho utilizando criterios de congruencia de triángulos apoyados en la igualdad de segmentos paralelos comprendidos entre rectas paralelas y en las relaciones de los ángulos que se forman al cortar rectas paralelas por una secante) y, como hemos dicho, en la técnica de equivalencia por complemento, tenemos que:

$$\text{Área (AEM)} + \text{Área (EBM)} + \text{Área (BMF)} + \text{Área (FMC)} = \text{Área (AMI)} + \text{Área (IMD)} + \text{Área (MGD)} + \text{Área (MCG)} + \text{Área (MFC)};$$

y como:

$$\text{Área (AEM)} = \text{Área (AMI)}; \text{Área (EBM)} = \text{Área (BMF)}; \text{Área (IMD)} = \text{Área (MGD)}; \text{Área (MFC)}; \text{Área (MCG)},$$

podemos concluir que:

$$\text{Área (AEM)} + \text{Área (EBM)} = \text{Área (AMI)} + \text{Área (IMD)}$$

o lo que es igual:

$$\text{Área (ABM)} = \text{Área (AMD)}.$$

c) El enfoque de la línea 2 reduce el problema del paralelogramo a otro equivalente consistente en considerar el triángulo ABD (Figura 5.3.3), en el que AH es una de sus medianas (ya que las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio) y M está sobre AH.

La utilización conjunta de las técnicas de aplicación de fórmulas —para justificar la equivalencia de los triángulos ABH y AHD, que tienen la misma base y la misma altura, y la de los triángulos MBH y MHD, por la misma razón—, junto con la de equivalencia por complemento nos permite deducir la equivalencia de los triángulos ABM y AMD.

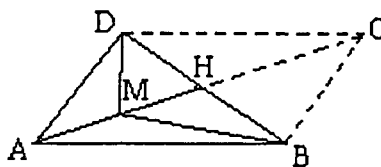


Figura 5.3.3

c) El enfoque que identificamos en la línea 3 tiene que ver con la aplicación directa de la fórmula del área del triángulo, lo que supone identificar que los triángulos ABM y AMD tienen un lado común —AM— y que las alturas (h_1 y h_2 , Figura 5.3.4) correspondientes a ese lado —considerado como base— son iguales. La justificación de la igualdad de ambas alturas puede hacerse probando —de la misma forma que lo hicimos en el apartado b— que los triángulos ABC y ACD son congruentes.

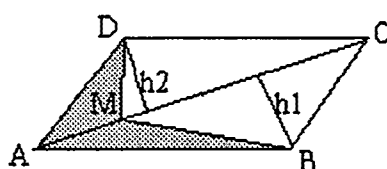


Figura 5.3.4

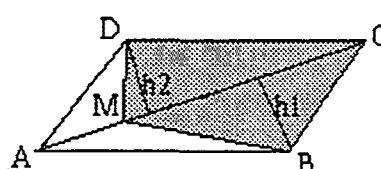


Figura 5.3.5

d) La aplicación de fórmulas (línea 3) y la consideración de la técnica de equivalencia por complemento (línea 1) dan lugar a un nuevo enfoque —línea 4— que se basa en la equivalencia de los triángulos ABC y ACD (obtenidos por la división del paralelogramo por una de sus diagonales, Figura 5.3.5) y en la equivalencia de los triángulos MBC y MCD, pues tienen la misma base —MC— y la misma altura — h_1 igual a h_2 —, con lo que justificamos la equivalencia de los triángulos ABM y AMD.

e) Si el paralelogramo lo reducimos a un cuadrado —caso particular (Figura 5.3.6)—, la forma de razonar la igualdad de los triángulos ABM y AMD nos puede servir para implementar cualquiera de los enfoques (líneas 1, 2, 3 y 4), excepto en el caso de que lo justifiquemos de la siguiente forma: base (lado AB) por altura (h_1) partido por 2 igual a base (lado AD = AB) por altura ($h_2 = h_1$) partido por 2, ya que esta forma no es generalizable ni siquiera al caso del rectángulo.

El caso particular del rectángulo (Figura 5.3.7) es similar al del paralelogramo ya que para su resolución se utilizan las mismas técnicas que hemos seguido en las líneas 1, 2, 3 y 4 del paralelogramo.

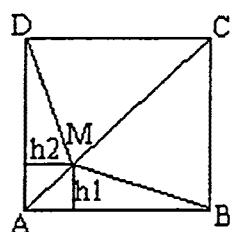


Figura 5.3.6

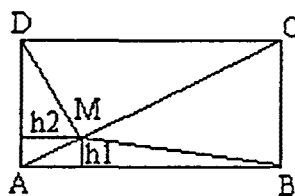


Figura 5.3.7

La consideración de casos particulares —cuadrado y rectángulo— de casos límite (si M está en A, las dos áreas valen cero; si M está en C, las dos áreas también son iguales porque la diagonal divide al cuadrado y al rectángulo en dos triángulos iguales) y de casos singulares (si M está en H, las áreas son iguales porque los cuatro triángulos formados por las diagonales del cuadrado o del rectángulo lo son) nos puede ayudar a conjeturar sobre la equivalencia de los triángulos ABM y AMD.

Una nueva consideración de casos particulares, límite y singulares surge cuando reducimos el problema del paralelogramo a otro equivalente (línea 2). En ese caso, el hecho de considerar triángulos equiláteros, isósceles y variar el punto M a lo largo de la mediana AH, nos puede ayudar a conjeturar y utilizar determinadas técnicas (comparación de bases y alturas, equivalencia por complemento) para identificar y justificar la equivalencia de los triángulos ABM y AMD.

En la Tabla 5.3.1 mostramos un resumen de los contenidos matemáticos implicados en la resolución del problema del paralelogramo.

Una vez identificados los contenidos matemáticos implicados en la resolución de este problema, pasamos a presentar posibles modificaciones que hemos tenido en cuenta para elegir el enunciado que finalmente hemos propuesto.

Consideramos varias modificaciones del enunciado, algunas de ellas fueron experimentadas con diferentes parejas de alumnos, como, por ejemplo:

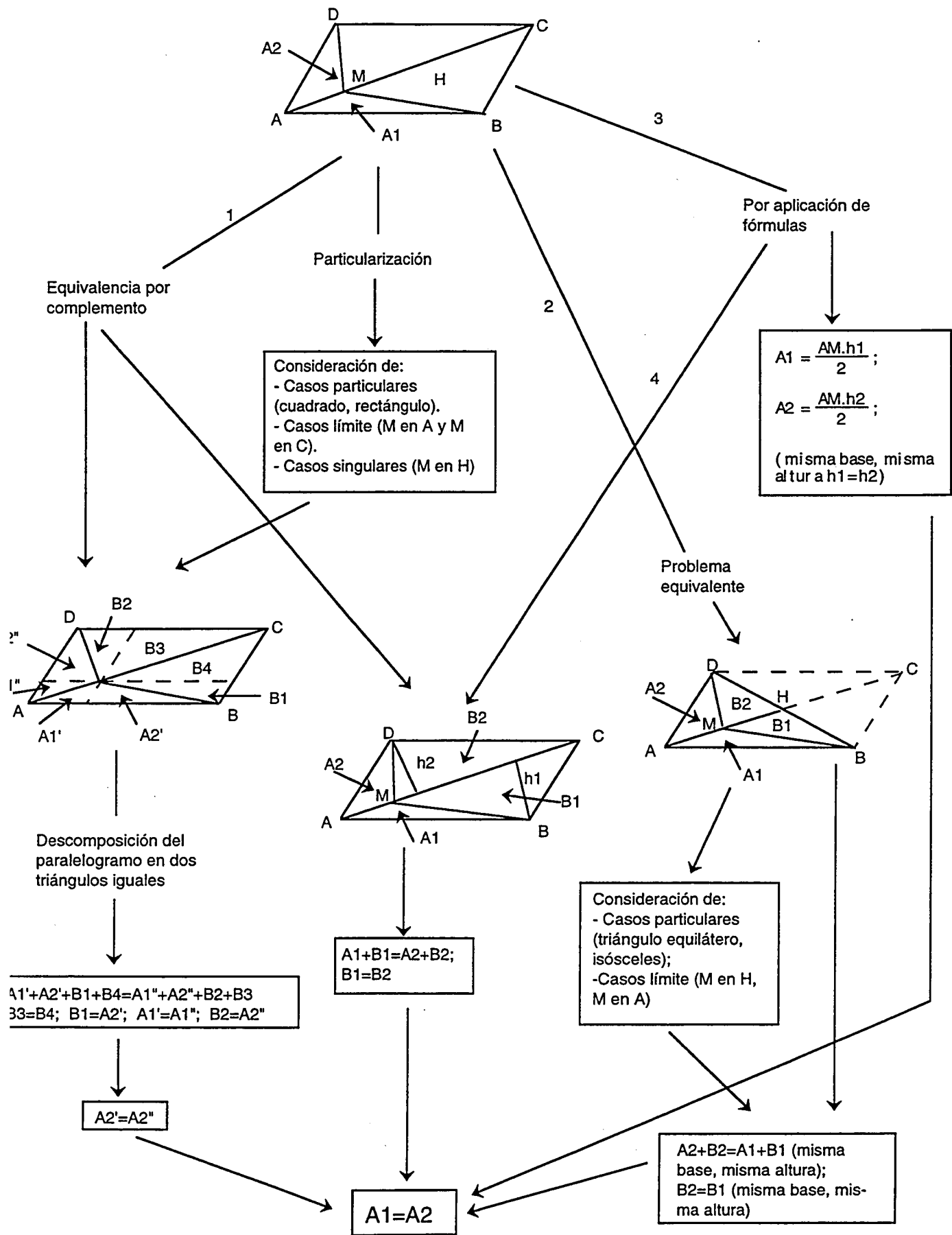
- la de sustituir el paralelogramo por un rectángulo. Esta presentación nos parecía que facilitaba demasiado el trazado de paralelas (y por tanto la descomposición del rectángulo) y el de las alturas de los triángulos;
- la posibilidad de dar una presentación puramente verbal que hiciera referencia tanto a un paralelogramo cualquiera como a un punto cualquiera M de la diagonal, sin inclusión de gráfico alguno. Esta presentación la descartamos por la tendencia de muchos alumnos a elegir el punto M en un lugar concreto —generalmente en el centro del paralelogramo— sin que sintieran la necesidad de generalizar, después, a un punto cualquiera.

	CONTENIDOS IMPLICADOS EN LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DEL PARALELOGRAMO*
HECHOS Y CONCEPTOS	• Definición y elementos de figuras (paralelogramo, triángulo, diagonal, mediana, altura, etc.). • Equivalencia de triángulos. • Congruencia de triángulos. • Criterios de congruencia de triángulos. • Fórmula del área del triángulo. • Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio. • Igualdad de segmentos paralelos comprendidos entre rectas paralelas. • División, por una de sus diagonales, de un paralelogramo en dos triángulos congruentes. • Relaciones entre los ángulos determinados por rectas paralelas cortadas por una secante.
PROCEDIMIENTOS	• Aplicación de fórmulas. • Aplicación de criterios de congruencia. • Equivalencia por complemento. • Identificación y representación de alturas de triángulos. • Descomposición del paralelogramo. • Reducción a un problema equivalente. • Búsqueda de casos particulares, límite y singulares.

* Incluimos los contenidos implicados en todos los enfoques identificados.

Tabla 5.3.1

Cuadro 5.3.1. Espacio básico del problema del paralelogramo



La presentación por la que optamos fue la de un paralelogramo $ABCD$ —del que se incluía su representación— y la elección de M en un lugar arbitrario, pero que no estuviera situado en una situación límite (A o C) ni singular (centro del paralelogramo) de la diagonal, y además con la condición de que las alturas sobre el lado AM (común a los dos triángulos que se comparaban) cayera fuera de dicho segmento.

5.3.2. Problema del hexágono

Si en un hexágono regular se unen alternativamente —uno sí y otro no— tres de sus vértices se obtiene un triángulo. Buscar la relación entre el área del hexágono y la del triángulo.

La terminología utilizada en el enunciado de este problema nos sugiere que los contenidos matemáticos relacionados con los elementos del hexágono regular y del triángulo equilátero —lados, ángulos interiores y relación lado/radio de la circunferencia circunscrita— son imprescindibles para empezar a afrontar este problema.

Por otra parte, la referencia a un hexágono regular indeterminado exige que los razonamientos que se hagan sean independientes de las magnitudes de los elementos de dicho hexágono.

Identificamos, a continuación, los siguientes enfoques, que resumimos en el Cuadro 5.3.2 (pág. 105), para resolver el problema del hexágono y establecemos una relación de conocimientos necesarios para poder implementar cada uno de ellos.

a) Un primer enfoque, que sigue la línea 1 —“descomposición y superposición (equicomposición)” (Cuadro 5.3.2, p. 105)—, consiste en la descomposición del hexágono regular en seis triángulos iguales de forma que el triángulo equilátero ACE (Figura 5.3.8) se puede obtener por la recomposición de tres de ellos. Este enfoque se puede considerar puramente geométrico ya que utiliza razonamientos geométricos —técnicas geométricas de descomposición de polígonos y aplicación de criterios de igualdad de triángulos— para probar la relación pedida. Es, además, un enfoque directo en el sentido de que busca directamente la relación entre las áreas sin necesidad de encontrar cada una de ellas por separado.

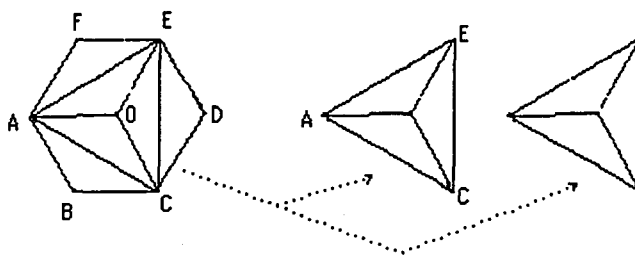


Figura 5.3.8

La puesta en práctica de este enfoque exige —además de una buena representación gráfica de la figura considerada o, en su defecto, de una representación mental correcta que evite la confusión del objeto genérico (hexágono cualquiera) con su representación gráfica concreta—, un proceso argumentativo que tienda a justificar la igualdad de los triángulos

que se han de superponer, que podría estar, básicamente, apoyado en la regularidad de las figuras, en la igualdad radio-lado de un hexágono y en la determinación de los ángulos a partir, por ejemplo, de su consideración como ángulos inscritos de una circunferencia.

b) El segundo enfoque, que sigue la línea 2 —“identificación de lados” (Cuadro 5.3.2, p.105)—, consiste en el cálculo de las áreas del hexágono y del triángulo por separado para, después, establecer su comparación.

Es un enfoque algebraico, ya que a la identificación genérica de lados siguen los cálculos algebraicos tendentes a determinar las áreas del hexágono —como suma de seis triángulos equiláteros o aplicando directamente la fórmula del área de un hexágono (perímetro por apotema partido por dos)— y la del triángulo ACE (Figura 5.3.8), ya sea de forma directa, a partir del cálculo de su lado, o como diferencia de la del hexágono y de la parte rayada, como se puede apreciar en el espacio básico del problema del hexágono (Cuadro 5.3.2, p. 105).

Para seguir esta línea los alumnos han de saber que los seis triángulos que se obtienen al unir el centro del hexágono con sus vértices son equiláteros e iguales, así como la relación entre los ángulos interiores de un triángulo y las propiedades de los triángulos equiláteros. Además, han de dar un valor genérico “a” —o particular y después generalizarlo— a los lados del hexágono, para poder calcular el lado y el área del triángulo ACE en función de “a”.

Es también fundamental para la puesta en práctica de este enfoque no sólo el conocimiento de las fórmulas de las áreas del hexágono y del triángulo, sino también tener una cierta soltura en el manejo de expresiones algebraicas.

c) Una tercera línea, identificada como “descomposición del hexágono en dos trapecios” (Cuadro 5.3.2, p. 105), consiste en la descomposición del hexágono en dos trapecios iguales. Este enfoque añade al anterior un elemento de simetría y nos permite calcular el área del hexágono como la suma de las áreas de dos trapecios, las bases de los cuales se pueden poner en función del lado del hexágono —una de ellas es el mismo lado y la otra el doble— y siendo su altura coincidente con la del triángulo equilátero AOD (Figura 5.3.9).

Para implementar este enfoque es necesario conocer la relación lado/radio, la fórmula del área de un trapecio y la del triángulo, así como las propiedades de los triángulos equiláteros.

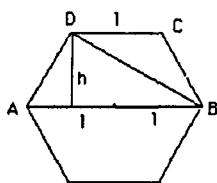


Figura 5.3.9

d) El cuarto enfoque consiste en introducir el hexágono en una malla triangular cuya distancia entre puntos sea igual a la longitud del lado del hexágono. Un simple recuento nos lleva a conocer que el número de unidades triangulares del hexágono es seis —si tomamos el triángulo equilátero de la malla como unidad de medida— y que el del triángulo es tres si

consideramos, por ejemplo, que se puede descomponer en tres triángulos cada uno de los cuales es la mitad de un rombo, que tiene dos unidades triangulares.

También sería factible calcular las áreas de las dos figuras aplicando las fórmulas en unidades triangulares y después compararlas, como hacemos en la línea 4 del espacio básico. Así, el área del hexágono en unidades triangulares sería: $A_h = \text{perímetro por radio} = 6a^2$. El área del triángulo ACE sería: $A_t = \text{lado por lado} = \sqrt{3}a \cdot \sqrt{3}a = 3a^2$.

Este enfoque exige tanto el conocimiento de las fórmulas del triángulo y del hexágono en unidades triangulares como la aplicación del teorema de Pitágoras para expresar el lado AC del triángulo ACE en función del lado del hexágono.

Un razonamiento análogo (Figura 5.3.10) seguimos si en lugar de utilizar mallas triangulares utilizamos mallas hexagonales; la regularidad de la figura nos permite visualizar la relación existente entre las áreas de ambos polígonos.

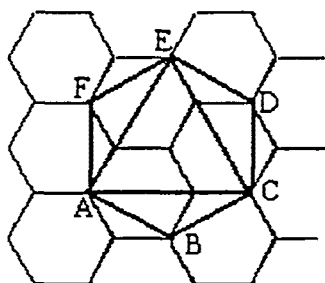


Figura 5.3.10

e) El planteamiento genérico del problema nos hace pensar que una aproximación a su solución se puede producir por la consideración de casos particulares (dando al lado del hexágono un valor concreto $a=1$ o $a=2$, por ejemplo) para generalizar después a un hexágono cualquiera. Este proceso de particularización puede facilitar la visualización para seguir la línea 1 del espacio básico (Cuadro 5.3.2, p. 105) o permitirnos establecer conjeturas que se justifiquen por métodos algebraicos.

Podemos añadir otros enfoques, como, por ejemplo, uno analítico —que suponga la fijación de unos ejes de coordenadas y la referencia a ellos de los elementos del hexágono y del triángulo—, pero pensamos que ningún resolutor experto optaría por un enfoque que, como éste, complicaría excesivamente la resolución.

Es importante indicar que cualquier enfoque utiliza la relación de igualdad entre el lado del hexágono y el radio de la circunferencia circunscrita (no es necesario utilizar la referencia explícita a la circunferencia circunscrita, pues se puede decir que el lado del hexágono tiene la misma longitud que el segmento que une el centro con un vértice).

Una visión general de los contenidos matemáticos que involucra este problema los mostramos resumidos en la Tabla 5.3.2.

Descartamos otras presentaciones del mismo problema, por ejemplo:

- la que incluye la identificación del lado del hexágono —identificación genérica o concreta—, ya que podemos inducir al alumno hacia una ejecución algebraica;

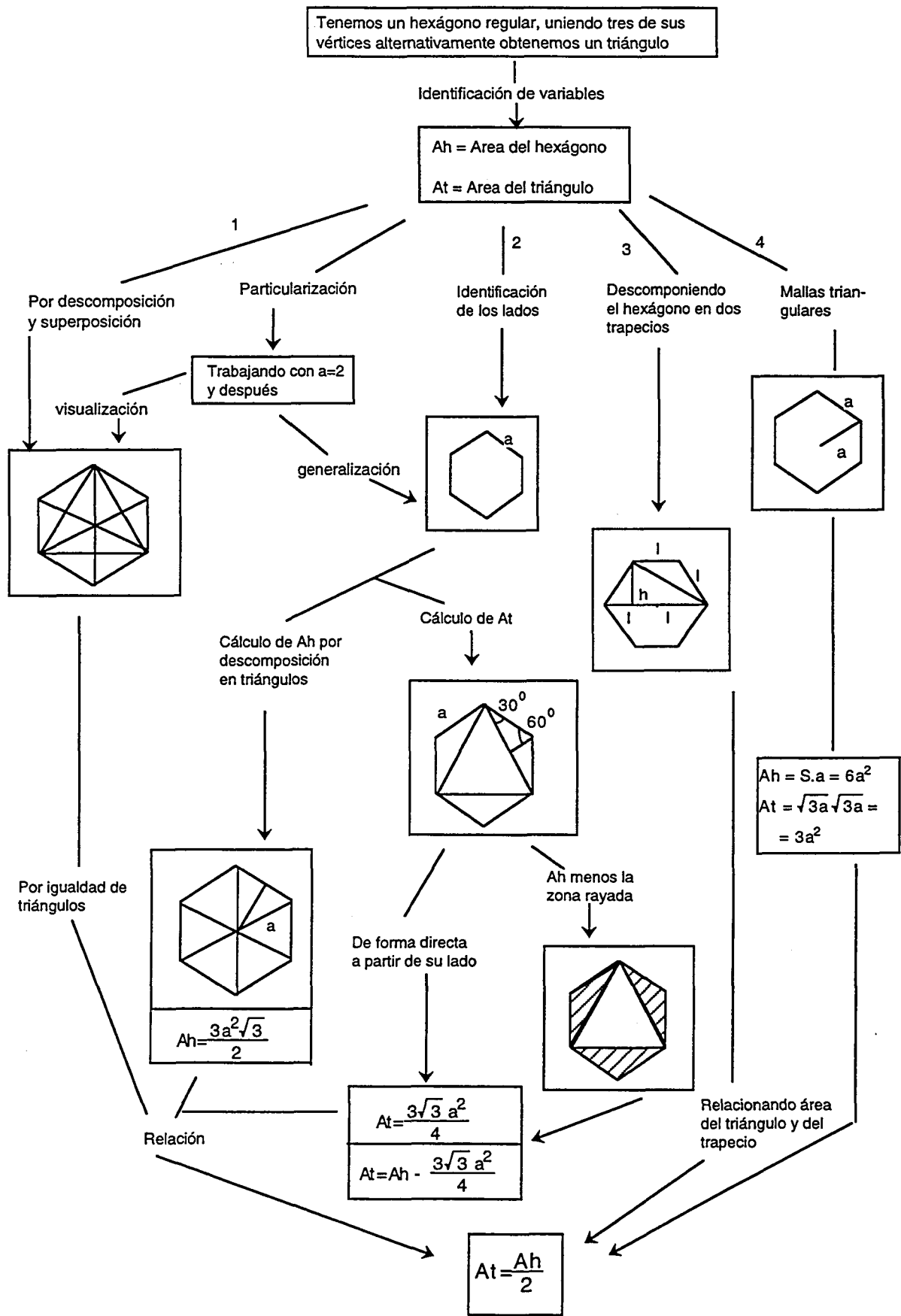
• la que incluye una representación del hexágono regular y del triángulo ACE. Esta presentación favorece considerablemente la visualización y pensamos que puede reducir significativamente el proceso de resolución del problema.

	CONTENIDOS IMPLICADOS EN LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DEL HEXÁGONO*
HECHOS Y CONCEPTOS	• Propiedades de los elementos del hexágono regular y del triángulo equilátero: lados, ángulos interiores y relación lado del hexágono/radio de la circunferencia. circunscrita • Fórmulas de las áreas del hexágono regular, del triángulo y del trapecio. • Congruencia y criterios de congruencia de triángulos. • Elementos de simetría. • Razones trigonométricas. Senos y cosenos de algunos ángulos (30°, 60°). • Teorema de Pitágoras. • Propiedades de las mallas triangulares y hexagonales. • Fórmulas de las áreas de las figuras planas expresadas en unidades triangulares.
PROCEDIMIENTOS	• Aplicación de criterios de congruencia de triángulos. • Equicomposición de triángulos. • Descomposición del hexágono en otras figuras: trapecios, rombos, etc. • Aplicación del teorema de Pitágoras. • Utilización de mallas (triangulares, hexagonales). • Simbolización de los elementos de las figuras. • Manejo de expresiones algebraicas. • Cálculo de los ángulos interiores de un hexágono regular y de su relación con los ángulos inscritos en la circunferencia. • Búsqueda de casos particulares y generalización.

* Incluimos los contenidos implicados en todos los enfoques identificados.

Tabla 5.3.2

Cuadro 5.3.2. Espacio básico del problema del hexágono



5.3.3. Problema del triángulo

ABC es un triángulo cualquiera y D un punto del lado AB que divide a éste en dos segmentos que están en proporción 3 a 1 (Figura 5.3.11). Si DE y DF son segmentos paralelos a los lados AC y BC, respectivamente, ¿qué relación hay entre las áreas de los triángulos DBE y FEC?

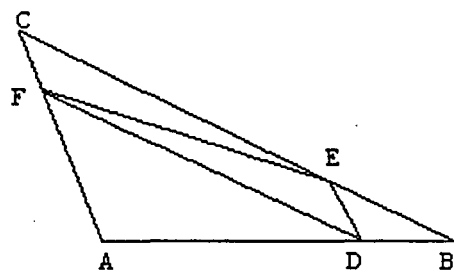


Figura 5.3.11

El enunciado se presenta de forma verbal acompañado de una representación que lo ilustra con la finalidad de favorecer su comprensión. En dicho enunciado aparece, además de conceptos como el de triángulo, paralelismo, área de un triángulo, etc., un término como es el de “proporción”, de uso frecuente en la comparación de áreas, que en los problemas anteriores no había aparecido explícitamente y que los alumnos han de interpretar para empezar la resolución.

a) El enfoque que hemos identificado como “aplicación del teorema de Tales” (línea 1 del espacio básico del problema del triángulo, Cuadro 5.3.3, p. 109) se fundamenta en dicho teorema, que se puede aplicar precisamente porque, según el enunciado, DE y AC son paralelas y nos dan la proporción: $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}$, con lo que la razón $\frac{CE}{EB}$ es la misma (Figura 5.3.11). Este conocimiento nos lleva a comparar las áreas de los triángulos DBE y FEC aplicando la fórmula del área del triángulo y comparando sus elementos.

Así: $\text{Área (DBE)} = \frac{BE \cdot h_1}{2}$; $\text{Área (FEC)} = \frac{EC \cdot h_2}{2}$, la relación entre CE y EB nos la da el teorema de Tales y sólo hay que identificar h1 y h2 (Figura 5.3.12) —alturas sobre las bases EB y CE, respectivamente— como iguales porque son perpendiculares a dos rectas paralelas —FD y CB—.

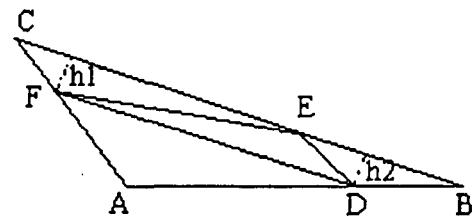


Figura 5.3.12

Así pues, el conocimiento del teorema de Tales y su aplicación, la fórmula del área del triángulo y la identificación de la igualdad de las alturas de los dos triángulos son imprescindibles para el desarrollo de este enfoque.

b) El enfoque que sigue la línea 2 (Cuadro 5.3.3, p. 109), aunque lo hemos derivado de la “aplicación del teorema de Tales”, porque exige implícitamente la aplicación de dicho teorema, es decir, si CA y DE son paralelos y AD es tres veces DB, trazando paralelas a CA (o DE) por D' y D'' —que dividen al segmento AD en tres iguales— obtenemos E' y E'' sobre CE. Si trazamos por E, E' y E'' paralelas a AB obtenemos F'', F' y F, respectivamente. Así procedemos hasta descomponer el triángulo ABC en 16 triángulos congruentes al DBE (Figura 5.3.13).

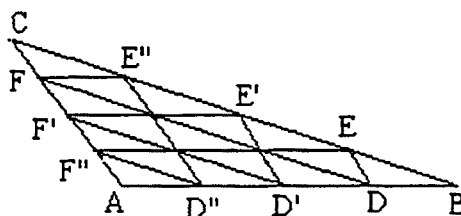


Figura 5.3.13

El paralelogramo FDEC (Figura 5.3.13) contiene 6 triángulos DBE. La diagonal FE lo divide en dos triángulos congruentes, por tanto cada uno de los cuales contiene tres veces al DBE.

El desarrollo de este enfoque, aunque no explícitamente, supone la aplicación del teorema de Tales, la aplicación de criterios de congruencia de triángulos para justificar la igualdad de los 16 que componen el ABC, así como la de FDE y FEC obtenidos al dividir el paralelogramo FDEC por la diagonal FE.

c) La línea 3 (Cuadro 5.3.3, p. 109), que exige la identificación previa de los cuatro triángulos en que queda dividido el ABC (Figura 5.3.14) siguiendo las indicaciones del enunciado, tiene su fundamento en el establecimiento de que los triángulos ABC, ADF y DBE son semejantes y en la aplicación de la relación que hay entre la razón de las áreas de dos figuras semejantes y el cuadrado de la razón de dos elementos homólogos de dichas figuras.

Esta relación nos permite establecer las relaciones:

$$\text{Área (ABC)} = 16 \cdot \text{Área (DBE)} \text{ y } \text{Área (FAD)} = 9 \cdot \text{Área (DBE)},$$

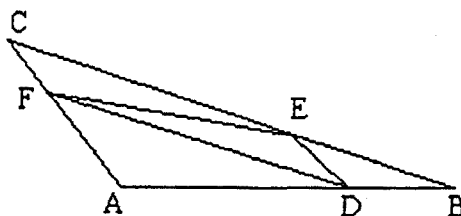


Figura 5.3.14

con lo cual, y aplicando la equivalencia por complemento, tendremos que:

Área (FDEC) = (16-9-1).Área (DBE)

y, por tanto,

Área(FEC) = 3.Área (DBE).

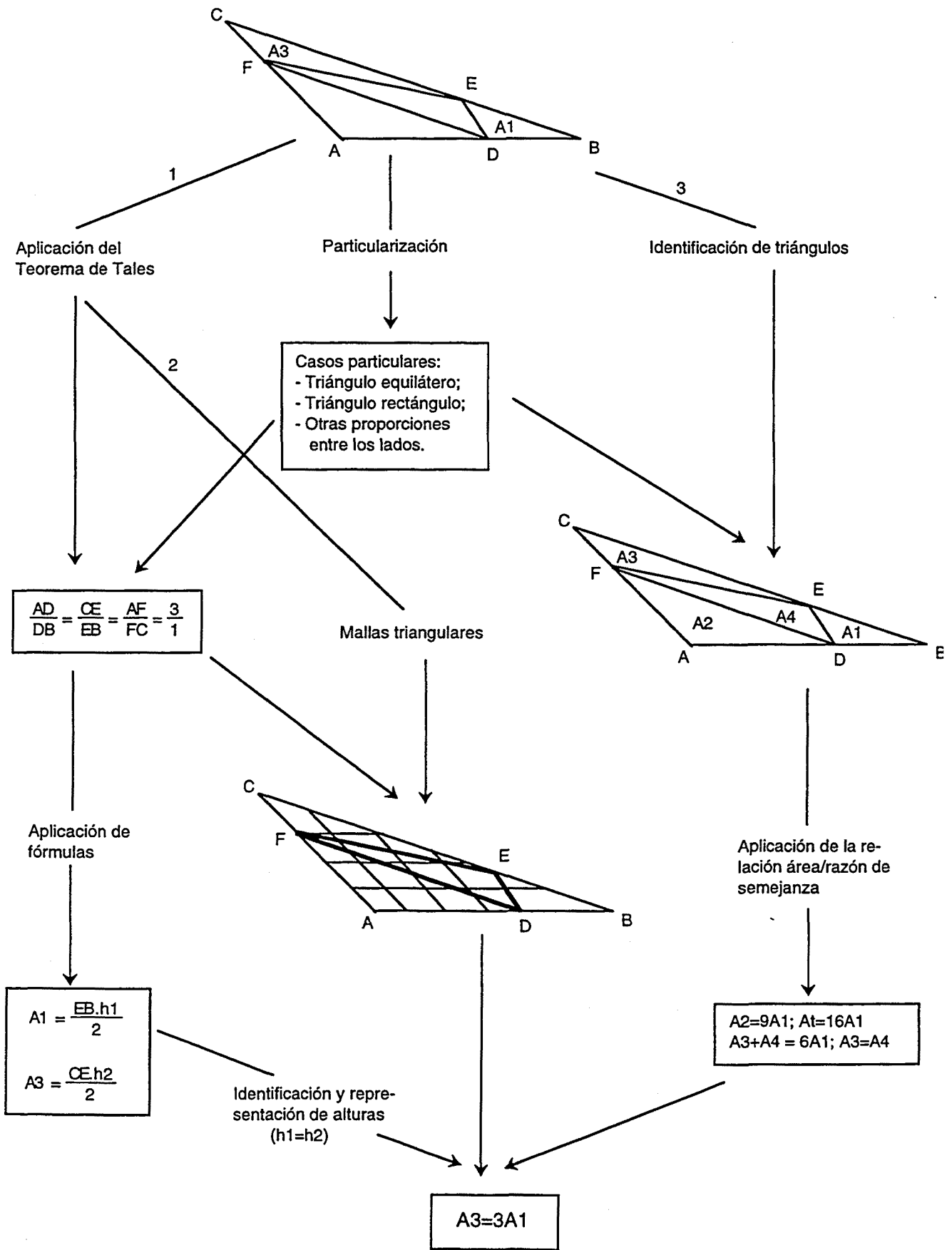
El desarrollo de este enfoque exige, por tanto, la identificación de los cuatro triángulos en que queda descompuesto el ABC al seguir los pasos del enunciado; el conocimiento del concepto de semejanza y de los criterios de semejanza de triángulos y su aplicación; el conocimiento de la relación entre la razón de dos figuras semejantes y la de dos de sus elementos homólogos, y, por último, la aplicación de la equivalencia por complemento (Tabla 5.3.3).

	CONTENIDOS IMPLICADOS EN LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DEL TRIÁNGULO*
HECHOS Y CONCEPTOS	- Figuras geométricas (triángulo, paralelogramo, etc.) y sus elementos (paralelismo, diagonal, etc.). - Congruencia de triángulos. - Semejanza de triángulos. - Criterios de congruencia de triángulos. - Criterios de semejanza de triángulos. - Relaciones entre los ángulos determinados por rectas paralelas cortadas por una secante. - Igualdad de segmentos paralelismo perpendiculares a dos rectas paralelas y comprendidos entre ellas. - Teorema de Tales. - Fórmula del área del triángulo. - Relación entre la razón de las áreas de dos figuras semejantes y la razón de semejanza. - Concepto de proporción.
PROCEDIMIENTOS	- Aplicación del teorema de Tales. - Identificación y representación de las alturas de un triángulo. - Aplicación de la relación entre la razón de las áreas de dos figuras semejantes y la razón de semejanza. - Aplicación de criterios de semejanza de triángulos. - Equivalencia por complemento. - Utilización de mallas triangulares (descomposición de un triángulo en otros que se toman como unidad). - Búsqueda de casos particulares.

* Incluimos los contenidos implicados en todos los enfoques identificados.

Tabla 5.3.3

Cuadro 5.3.3. Espacio básico del problema del triángulo



Barajamos dos modificaciones del problema que finalmente no proponemos. Por una parte, pensamos en la posibilidad de dar una proporción genérica —por ejemplo $\frac{a}{b}$ — entre los segmentos AD y DB, lo que complica en exceso la resolución. Por otra, la sustitución de la comparación de las áreas de los dos triángulos —DBE y FEC— por la del triángulo DBE con la del paralelogramo FDEC, no supone modificación alguna para su resolución a efectos de utilización de conceptos y procedimientos. Al final nos inclinamos por una presentación con un poco más de complicación en el enunciado para observar cómo se producen las interacciones en el episodio de lectura de un tipo de problemas con un enunciado, en principio, un poco enrevesado. En todos los casos pensamos que la inclusión de la representación gráfica es imprescindible.

5.3.4. Problema del cuadrado

Doblando de igual forma las cuatro esquinas de un cuadrado, como se indica en la Figura 5.3.15, se obtiene en el centro otro cuadrado —cuadrado rayado de la figura—. Busca la relación entre los lados AB y BC de los triángulos doblados de tal forma que la relación entre las áreas del cuadrado rayado y del original sea:

- a) $1/4$
- b) $1/9$
- c) $1/n$

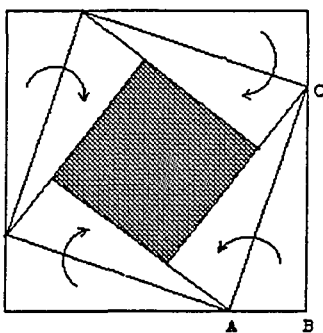


Figura 5.3.15

En el enunciado del problema del cuadrado podemos identificar una terminología relacionada con los conceptos matemáticos de cuadrado y triángulo rectángulo, así como una continua referencia a la relación entre magnitudes ya sean unidimensionales —razón de dos longitudes— o bidimensionales —razón de dos áreas—, sin olvidar la naturalidad del número n .

El problema del cuadrado, adaptado de uno propuesto por P. Puig Adam (1972), es un ejemplo típico de problema en el que podemos identificar claramente las dos formas de abordarlo que J. F. Richard (1985) describe como “búsqueda de relaciones” (aproximación deductiva) y “búsqueda de transformaciones” (aproximación constructiva o inductiva). Ambas aproximaciones corresponden, respectivamente, a las líneas 1 y 3 de su espacio básico (Cuadro 5.3.4, p. 115). En efecto, el enfoque implementado en la línea 1 sigue un proceso inductivo, pero, en cambio, el desarrollado en la línea 3 utiliza desde el principio

una notación simbólica y, mediante un procedimiento algebraico, nos permite obtener directamente la forma general de todas las soluciones del problema. Es, por tanto, un proceso deductivo.

La puesta en práctica del enfoque intermedio—línea 2— va a parar, al final, a uno de los dos anteriores.

Analizamos a continuación detalladamente cada uno de estos enfoques e identificamos, para cada línea, los contenidos matemáticos implicados y los conocimientos necesarios para su resolución.

a) Una forma de proceder cuando afrontamos la resolución de este problema puede ser la asignación de valores concretos a las dimensiones de las figuras que intervienen — línea 1 del espacio básico del problema (p. 115)—, en particular, a los catetos del triángulo rectángulo que se dobla.

Este proceso inductivo, que consiste esencialmente en “realizar las transformaciones descritas en el enunciado para responder por ‘ensayo y verificación’ a la cuestión propuesta” (J. F. Richard, 1984, p. 228), exige de los alumnos una considerable disciplina de ordenación de resultados para conseguir por inducción la solución general del problema.

La disciplina en la ordenación de los resultados es, para la puesta en práctica de este enfoque, un aspecto importante si tenemos en cuenta, por una parte, que no es sencillo obtener valores de los catetos para los que se consiga una relación entre las áreas de la forma $1/n$ y, por otra, que una vez obtenidos esos valores tampoco es fácil inducir la relación que ha de haber entre los dos catetos para obtener el resultado general.

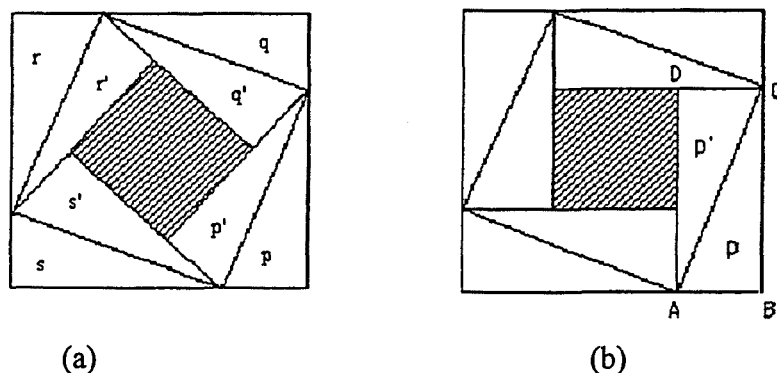


Figura 5.3.16

b) La utilización de la técnica de “romper y rehacer” nos proporciona un enfoque bastante imaginativo para resolver el problema. En efecto, la igualdad de los triángulos p y p' , q y q' , r y r' y s y s' (Figura 5.3.16a) por la superposición que de ellos se hace debido a la acción de doblar nos permite agruparlos de manera que formen cuatro rectángulos como los de la figura 5.3.16b y dejen en el centro otro cuadrado —el rayado en la Figura 5.3.16b— con la particularidad de que sus lados son paralelos al cuadrado original, lo que facilita la comparación de ambos.

Favorecemos mucho más la visualización y la cuantificación de la comparación si, como mostramos en el desarrollo de esta línea, sumergimos la figura en una malla cuadrangular (Figura 5.3.17).

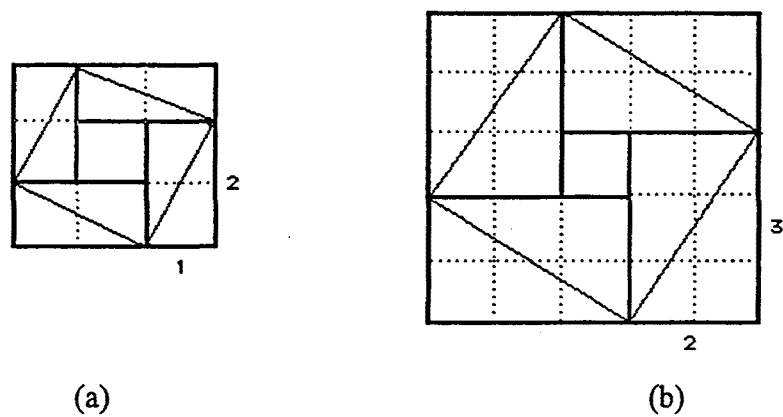


Figura 5.3.17

Recompuesta la figura y sumergida en una malla cuadrangular se nos presentan ahora dos alternativas: por una parte, la búsqueda inductiva de la relación entre los catetos del triángulo ABC para que la relación entre las áreas de los cuadrados sea $1/n$, que se puede conseguir tomando cuadrados de diferentes medidas y comparándolos con los cuadrados unitarios representados en su centro; y por otra, identificando de forma genérica los lados del rectángulo ABCD (Figura 5.3.16b) y actuando como lo hacemos en la línea 3.

En la primera de dichas alternativas, vamos modificando la longitud del lado del cuadrado grande haciéndola coincidir con unidades enteras de la malla y, al mismo tiempo, construiremos, sobre sus lados, rectángulos cuyas dimensiones sumen igual que el lado de dicho cuadrado.

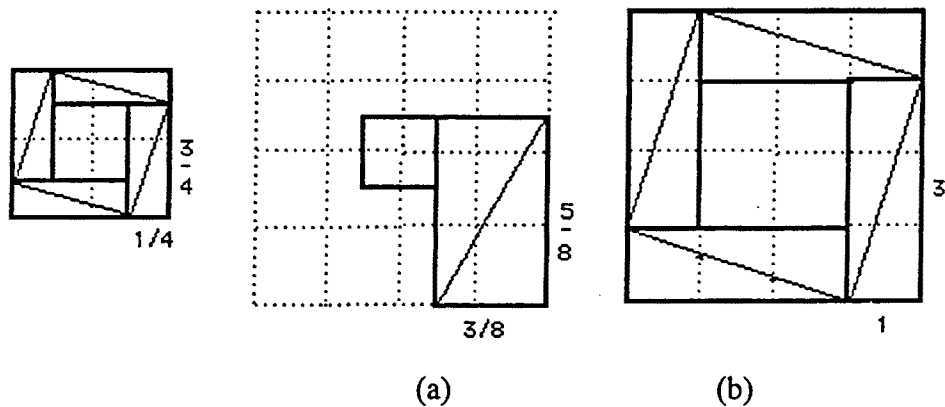


Figura 5.3.18

Figura 5.3.19

Si en el centro queda un cuadrado unitario —como en las Figuras 5.3.17a, 5.3.17b, 5.3.18 y 5.3.19a— tenemos asegurada una relación entre las áreas de la forma $1/n$, aunque una relación de esta forma también se puede obtener si el número de unidades cuadradas del

cuadrado del centro es un divisor del número de unidades cuadradas del cuadrado grande, como ocurre en la Figura 5.3.19b.

En la segunda, si identificamos como a y b las dimensiones del rectángulo obtenemos que el área del cuadrado grande es $(a + b)^2$, y la del pequeño, $(a - b)^2 - 4ab = (a - b)^2$. La comparación, a partir de este momento, puede seguir la línea 3 —puramente deductiva— o, por el contrario, la búsqueda de la relación a/b (de forma que la relación entre las áreas sea $1/n$) dando a “ a ” y “ b ” valores concretos para obtener una tabla como la que mostramos en la línea 1, es decir, puede seguir una resolución inductiva.

De cualquier forma, el hecho de que ambos cuadrados —el original y el obtenido al doblar las esquinas— sean regulares y por tanto semejantes nos permite reducir la búsqueda de la relación entre ellos a la de sus lados. Este aspecto se ha de tener en cuenta aunque no aparezca explícitamente en el espacio básico del problema.

Así pues, la línea 2 exige, por una parte, estar familiarizado con la utilización de técnicas que, como las de “descomposición y composición” y el uso de mallas cuadrangulares, son propias de los problemas que comparan áreas y, por otra, con los procesos de particularización, organización de resultados y con los procesos algebraicos relacionados con la resolución de ecuaciones, como los que tratan de obtener a/b en función de n a partir de la igualdad:

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

c) El proceso deductivo desarrollado en el tercer enfoque —línea 3 (Cuadro 5.3.4, p. 115)— tiene su origen en la identificación simbólica —mediante “ a ” y “ b ”— de los catetos del triángulo rectángulo que se ha de doblar.

El objetivo de obtener la razón b/a en función de n , con la condición de que la relación entre las áreas de los cuadrados —cuadrado pequeño a cuadrado grande— sea $1/n$, se consigue expresando los lados de ambos cuadrados en función de a y b para obtener b/a a partir de la imposición de que el cociente de sus dos áreas:

$$\frac{(a - b)^2}{(a + b)^2} \text{ sea } \frac{1}{n}$$

y mediante un proceso de manipulación algebraica.

Durante este proceso se observa que para conseguir una relación racional entre b y a es necesario que n sea un cuadrado perfecto. De esta forma la expresión general de la relación entre los lados b y a para que la relación entre las áreas de los cuadrados sea $1/n$ será:

$$\frac{a}{b} = \frac{m - 1}{m + 1}, \text{ donde } m^2 = n$$

Una visión general de los contenidos matemáticos que involucra este problema los mostramos resumidos en Tabla 5.3.4.

	CONTENIDOS IMPLICADOS EN LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DEL CUADRADO*
HECHOS Y CONCEPTOS	• Elementos del triángulo y del cuadrado. • Fórmulas de las áreas del cuadrado y del triángulo. • Congruencia de triángulos. • Concepto de número natural y racional. • Cuadrado perfecto.
PROCEDIMIENTOS	• Identificación simbólica. • Equivalencia por descomposición (equicomposición). • Manipulación de expresiones algebraicas. • Ordenación de elementos y construcción de tablas. Procesos inductivos. • Procedimientos de ensayo-error y de generalización. • Relación de áreas de figuras en función de la relación entre sus magnitudes lineales.

* Incluimos los contenidos implicados en todos los enfoques identificados.

Tabla 5.3.4

La presentación que propone P. Puig Adam (1972) la modificamos con la incorporación de dos razones, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{9}$, y su posterior generalización a $\frac{1}{n}$ para introducir la posibilidad de una resolución inductiva. Esa incorporación no coarta la posibilidad de hacer una resolución puramente deductiva, considerando directamente $\frac{1}{n}$ para, después, sustituyendo la n por 4 y por 9, obtener los resultados que nos piden en los apartados anteriores.

Por otra parte, la inclusión de $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{9}$ tiene un doble objetivo: facilitar los cálculos y el tratamiento algebraico que supone el afrontar el problema directamente con una razón de $\frac{1}{n}$; y que el alumno tenga la posibilidad de utilizar el método ensayo-error para buscar las relaciones entre los diferentes cuadrados y organizar la información obtenida para facilitar la generalización.

Además, la presentación de este problema supone una novedad respecto a los tres anteriores, ya que en ellos dábamos, implícita o explícitamente, relaciones entre elementos lineales y pedíamos la relación entre las áreas, en cambio en el problema del cuadrado lo hacemos al revés, es decir, pedimos la razón entre dos segmentos, suponiendo conocida la de las áreas de dos cuadrados.

Cuadro 5.3.4. Espacio básico del problema del cuadrado

