

Òrbites de segona espècie del problema espacial de 3 cossos

Esther Barrabés

Memòria presentada per a aspirar al grau
de doctor en Ciències Matemàtiques.

Departament de Matemàtiques.
Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, març del 2001

A en Quim i als meus pares

Prefaci

El problema general de tres cossos consisteix en l'estudi del moviment de tres cossos subjectes a les atraccions gravitatòries mútues. Una simplificació d'aquest problema s'obté en considerar que un dels cossos té massa menyspreable, de manera que la seva presència no afecta el moviment dels altres dos (anomenats primaris), els quals es mouen en òrbites circulars al voltant del seu centre de masses. L'estudi del moviment del tercer cos degut a l'atracció gravitatòria dels altres dos és el que es coneix com a problema restringit de tres cossos (*Restricted Three Body Problem*, RTBP). En cas que aquest moviment es mantingui en el mateix pla orbital que els primaris s'anomena problema restringit pla i, en cas contrari, espacial. Aquest últim serà el nostre cas.

En aquest context, situem l'origen de coordenades en el centre de masses dels dos primaris, E i M , i prenem un sistema d'eixos giratori de manera que es trobin situats sobre un dels eixos (sistema sinòdic). Prenent les unitats adequades, podem pensar que els cossos E i M tenen masses $1 - \mu$ i μ respectivament, on μ es coneix com el paràmetre de masses. Una manera d'abordar el problema restringit és començar per un de resoluble, com és el cas $\mu = 0$, i després intentar estendre els resultats a casos en què μ sigui proper a zero. En prendre $\mu = 0$ s'obté un problema de dos cossos on és possible una descripció completa de les òrbites, en particular les periòdiques. El nostre estudi es centra precisament en les òrbites periòdiques en el sistema sinòdic.

Poincaré en els seus *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste* [26] defineix dos tipus de solucions periòdiques del problema restringit de tres cossos: les de primera espècie, que són solucions properes a circumferències o el·lipses keplerianes per valors de μ petits, i les de segona espècie (*Second Species Solutions*, SSS), que són properes a arcs d'el·lipse keplerians connectats per punts angulosos. Aquestes són òrbites que passen molt a prop del primari de

massa petita.

El nostre objectiu serà provar l'existència d'òrbites periòdiques espacials de segona espècie fent ús de les òrbites p - q ressonants. Aquestes són òrbites que fan, aproximadament, p voltes al voltant del primari E mentre que el primari M en fa q al voltant del centre de masses dels primaris. Més concretament, prendrem òrbites que surten d'un entorn de centre M i radi μ^α i que, després d'allunyar-se d'aquest entorn, tornen a ell al cap d'un cert temps. Aquest fet ens permetrà aproximar l'òrbita del problema restringit per una d'el·líptica, a partir de la qual calcularem la posició i velocitat aproximades del tercer cos en l'instant de retorn a l'entorn de M . D'altra banda, farem el mateix però després de passar per dins de l'entorn. En aquest cas l'òrbita del tercer cos s'aproxima per una d'hiperbòlica, la qual també ens donarà una posició i velocitat aproximades en el moment de sortir de l'entorn de M i després d'haver-hi passat per dins. Per tal d'obtenir òrbites periòdiques haurem de demanar que aquestes posicions i velocitats aproximades siguin iguals.

En el capítol 1 establim algunes notacions i càlculs preliminars i fem un repàs d'alguns estudis fets al voltant de les òrbites periòdiques de segona espècie.

En el capítol 2 estudiem la solució del problema restringit mentre el tercer cos es mou fora de l'entorn de centre M i radi μ^α . Veurem que aquesta es pot aproximar per una òrbita el·líptica i calcularem de quin ordre és l'error que es comet en aquesta aproximació.

En el capítol 3 definim les òrbites p - q ressonants i estudiem com han de ser les condicions inicials sobre l'entorn de M per tal de garantir que l'òrbita sigui p - q ressonant. També explicitarem l'aplicació exterior, això és, posició i velocitat aproximades en el temps en què l'òrbita ha retornat a l'entorn de M havent sortit d'ell.

A continuació, en el capítol 4 estudiarem la solució del problema restringit a l'interior de l'entorn de centre M , partint de la mateixa posició i velocitat inicials que l'òrbita p - q ressonant, però fent anar el temps enrera i fins que tornem a sortir de l'entorn. També aquí calcularem de quin ordre és l'error que es produeix en l'aproximació i explicitarem l'aplicació interior, això és, posició i velocitat aproximades quan el tercer cos surt de l'entorn.

Les aplicacions exterior i interior de la solució del RTBP ens donaran dos posicions i velocitats finals properes a les del tercer cos, que voldrem que siguin iguals per tal d'obtenir solucions periòdiques. En el capítol 5 veurem quines restriccions hem d'imposar a les condicions inicials de l'òrbita per tal que les aplicacions exterior i interior siguin iguals fins a un

cert ordre. Així mateix, exposarem algunes de les òrbites trobades per al cas pla i espacial.

Finalment en el capítol 6 inclourem algunes exploracions numèriques i veurem algunes òrbites periòdiques espacials trobades a partir d'òrbites periòdiques i simètriques de segona espècie planes.

Agraïments

Abans d'entrar en l'exposició d'aquesta memòria, permeteu-me expressar el meu agraïment envers totes aquelles persones que d'una manera o d'una altra m'han ajudat i han estat al meu costat tot el temps de la seva elaboració.

Primerament vull agrair a en Gerard Gómez tant la seva tasca com a director d'aquesta tesi, com els seus consells en general. El seu ajut i suport han estat imprescindibles per arribar a la fi d'aquest treball.

Gràcies de tot cor a tots aquells amb qui he pogut parlar dels problemes i qüestions que m'han anat sorgint al llarg d'aquests anys. Són molts i de cada un d'ells he après alguna cosa.

Vull agrair als meus companys del Departament d'Informàtica i Matemàtica Aplicada de la Universitat de Girona la seva companyonia, el suport que m'han donat en tot moment i per fer-me sentir a gust al seu costat. En particular vull donar les gràcies al Departament per haver posat a la meva disposició les eines que he anat necessitant.

A en David Juher i l'Esther Bayo gràcies per tenir la paciència de llegir-se aquesta memòria i corregir-ne les faltes. Les que hi puguin quedar només se'm poden atribuir a mi.

Per acabar, però essent els primers en el meu pensament, gràcies a en Quim, als meus pares i als meus germans per estar al meu costat en tot moment, per entendre com d'important era per mi realitzar aquest treball.

Índex

Prefaci	i
1 Introducció	1
2 Solució exterior	15
3 Òrbites p - q ressonants	35
4 Solució interior	55
5 Composició de les aplicacions exterior i interior	95
6 Exploracions Numèriques	121
Referències	139

Capítol 1

Introducció

En aquest capítol presentem les equacions del Problema Restringit Circular de Tres Cossos en els sistemes sideral i sinòdic. A continuació introduïm les òrbites periòdiques de segona espècie i esmentem alguns treballs sobre òrbites de segona espècie en general i simètriques respecte de l'eix sinòdic (sobre el que es troben fixos els primaris) en particular. Finalment establim algunes notacions i relacions generals que seran d'utilitat al llarg de la memòria.

1.1 Problema restringit circular de tres cossos

Considerem el Problema Restringit Circular de Tres Cossos (RTBP cas circular) tres dimensional, en el qual tenim dos cossos movent-se en òrbites circulars al voltant del seu centre de masses a causa de la seva atracció gravitatòria, i un tercer cos de massa infinitesimal, que no afecta el moviment dels altres dos i que es mou sota la seva influència. La descripció del moviment d'aquest tercer cos és l'objectiu del RTBP.

Siguin, doncs, E i M els dos cossos, que anomenarem primaris, movent-se en òrbites circulars respecte del seu centre de masses situat a l'origen de coordenades, i P el tercer cos (vegeu la figura 1.1). Es poden escollir adequadament les unitats de massa, longitud i temps per tal que la constant de gravitació, la velocitat angular dels dos primaris i la distància entre ells sigui la unitat i les seves masses siguin respectivament $1 - \mu$ i μ , amb $\mu \in [0, 1]$. Donat que treballarem amb valors de μ propers a zero, sovint ens referirem a E com el primari gran i a M com el primari petit. Sota aquests supòsits, el moviment del tercer cos en un sistema

de referència inercial (o sideral) vindrà descrit per les equacions (vegeu [27])

$$\ddot{\mathbf{R}} = -(1 - \mu) \frac{\mathbf{R} - \mathbf{R}_E}{R_1^3} - \mu \frac{\mathbf{R} - \mathbf{R}_M}{R_2^3},$$

on $\mathbf{R} = (X, Y, Z)^T$ és la posició de P ,

$$\mathbf{R}_E(t) = \mu \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_M(t) = (\mu - 1) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix},$$

són les posicions de E i M respectivament i

$$R_1 = |\mathbf{R} - \mathbf{R}_E|, \quad R_2 = |\mathbf{R} - \mathbf{R}_M|,$$

les distàncies del tercer cos a E i M respectivament. El moviment dels dos primaris està contingut en el pla XY , i segons que el moviment del tercer cos es trobi en el mateix pla o no, es diu que estem en el problema restringit pla o espacial. Aquest darrer serà el cas que estudiarem.

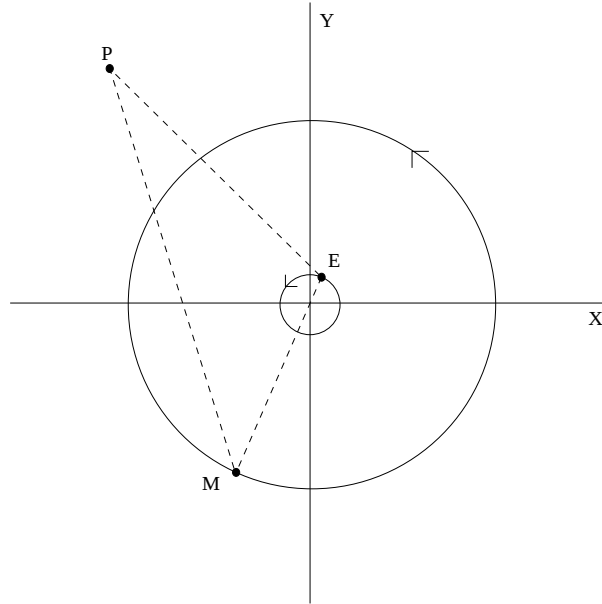


Figura 1.1: Les òrbites dels primaris en el sistema sideral són circumferències de radi $1 - \mu$ per M i μ per E situades al pla $Z = 0$. El tercer cos, P , es mou a l'espai.

Considerarem també un sistema de referència rotatori, anomenat sinòdic, en el qual la posició dels dos primaris serà fixa sobre l'eix de les x . El canvi d'un sistema de coordenades

a l'altre vindrà donat per

$$\mathbf{R} = G(t)\mathbf{r}, \quad (1.1)$$

on $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ són coordenades sinòdiques i $G(t)$ és la matriu ortogonal

$$G(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les posicions dels dos primaris en el nou sistema de coordenades seran $\mathbf{r}_E = (\mu, 0, 0)^T$ i $\mathbf{r}_M = (\mu - 1, 0, 0)^T$, i denotarem per $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_E$ i $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_M$ les posicions de P respecte de E i M (vegeu la figura 1.2). Les equacions del moviment en aquest sistema són (vegeu [27])

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \end{cases} \quad (1.2)$$

on

$$\begin{aligned} \Omega(x, y, z) &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \\ r_1^2 &= |\mathbf{r}_1(t)|^2 = (x - \mu)^2 + y^2 + z^2, \\ r_2^2 &= |\mathbf{r}_2(t)|^2 = (x - \mu + 1)^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Matricialment el sistema (1.2) es pot escriure com

$$\ddot{\mathbf{r}} + A_3 \dot{\mathbf{r}} = \nabla \Omega,$$

essent la matriu $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i la integral primera de Jacobi ve donada per l'expressió

$$|\dot{\mathbf{r}}|^2 = 2\Omega(\mathbf{r}) - C_J, \quad (1.3)$$

on C_J és l'anomenada constant de Jacobi.

Finalment especifiquem algunes relacions entre les coordenades sinòdiques i siderals de les condicions inicials. Com que el pas d'un sistema de coordenades a l'altre és un gir, les

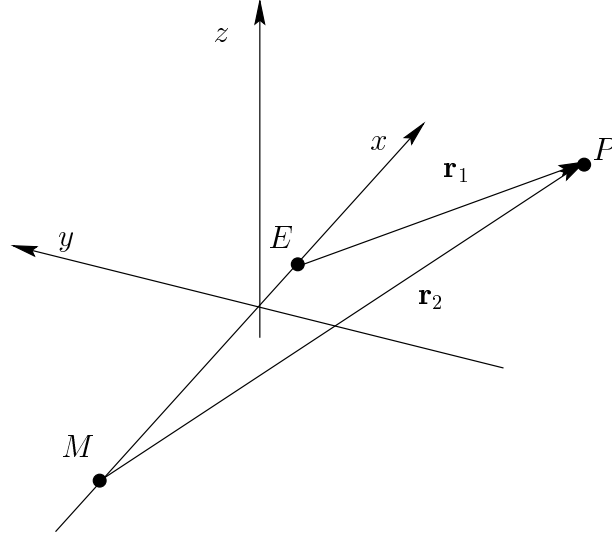


Figura 1.2: Sistema de referència sinòdic. E i M es troben fixos sobre l'eix de les x .

distàncies de P a E i M no varien d'un sistema a l'altre, això és $R_i = r_i$ per a $i = 1, 2$. Pel que fa a la velocitat vegem quina relació hi ha entre $|\dot{\mathbf{R}}|$ i $|\dot{\mathbf{r}}|$. Calculem $|\dot{\mathbf{R}}|^2 = \langle \dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{R}} \rangle$, on $\langle , \rangle$ denota el producte escalar euclidi. De (1.1) tenim que $\dot{\mathbf{R}} = G(t)\dot{\mathbf{r}} + \dot{G}(t)\mathbf{r}$ i, per tant,

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{R}}|^2 &= \langle G(t)\dot{\mathbf{r}} + \dot{G}(t)\mathbf{r}, G(t)\dot{\mathbf{r}} + \dot{G}(t)\mathbf{r} \rangle \\ &= \langle G(t)\dot{\mathbf{r}}, G(t)\dot{\mathbf{r}} \rangle + 2\langle G(t)\dot{\mathbf{r}}, \dot{G}(t)\mathbf{r} \rangle + \langle \dot{G}(t)\mathbf{r}, \dot{G}(t)\mathbf{r} \rangle \\ &= \dot{\mathbf{r}}^T G(t)^T G(t) \dot{\mathbf{r}} + 2\dot{\mathbf{r}}^T G(t)^T \dot{G}(t)\mathbf{r} + \mathbf{r}^T \dot{G}(t)^T \dot{G}(t)\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Per ser $G(t)$ matriu de rotació tenim $G(t)^T G(t) = I$ (identitat 3×3), $2G(t)^T \dot{G}(t) = A_3$ i

$$\dot{G}(t)^T \dot{G}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la qual cosa ens dona la igualtat

$$|\dot{\mathbf{R}}|^2 = |\dot{\mathbf{r}}|^2 + \dot{\mathbf{r}}^T A_3 \mathbf{r} + x^2 + y^2 = |\dot{\mathbf{r}}|^2 + 2(xy - \dot{x}y) + x^2 + y^2. \quad (1.4)$$

1.2 Òrbites periòdiques de segona espècie

Poincaré a [26] classifica les òrbites periòdiques del RTBP en òrbites de primera i segona espècie. Les primeres són òrbites properes a òrbites keplerianes, mentre que les segones

(*Solutions Périodiques de Deuxième Espèce*, o *Periodic Second Species Solution*, PSSS) són properes a arcs de còniques keplerianes connectats per “punts angulosos”. Més específicament (vegeu, per exemple, P.Guillaume a [6] o Hénon a [13]):

Sigui $\mathbf{r}_\mu(t)$ una solució periòdica del problema restringit circular de tres cossos. Es diu que és una òrbita de segona espècie si la distància mínima de P al primari M tendeix a zero quan $\mu \rightarrow 0$.

El límit de $\mathbf{r}_\mu(t)$ quan μ tendeix a zero s'anomena òrbita base (Guillaume [6]) o òrbita generadora (Hénon [13]). Les òrbites generadores de 1a espècie són òrbites keplerianes, les quals es subdivideixen en òrbites de 1a classe, si són òrbites circulars, o bé òrbites de 2a classe, si són òrbites el·líptiques. En el cas de les òrbites de segona espècie, l'òrbita generadora no és en general solució del problema de dos cossos. Una òrbita generadora està formada per la unió d'arcs de còniques que comencen i acaben en M (xocs o col·lisions). Cada un d'aquests arcs pertany a una òrbita kepleriana (solució del problema de dos cossos) anomenada òrbita de xocs consecutius (*Orbits with Consecutive Collisions*, OCC). Hénon ([11]) en dona una definició:

Siguin dos cossos puntuals, M_2 i M_3 , de masses negligibles i movent-se dins el camp gravitacional d'un cos M_1 . Suposem que M_2 descriu una òrbita circular al voltant de M_1 , mentre M_3 descriu una òrbita qualsevol. Aquesta serà de xocs consecutius si existeixen instants t_1 i t_2 en els quals els cossos M_2 i M_3 ocupen la mateixa posició.

Les òrbites de col·lisions consecutives poden ser ([13]):

- Una el·lipse que interseca l'òrbita circular en dos punts. S'anomenen òrbites de tipus *I* i s'agrupen en infinites famílies. Si els punts d'intersecció entre l'el·lipse i l'òrbita circular que descriu el primari M són diferents (punts $\mathbf{p}$ i $\mathbf{p}'$ de la representació de l'esquerra de la figura 1.3), les famílies a les quals pertanyen s'anomenen de tipus S. Si $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$ (vegeu la representació de la dreta a la figura 1.3), llavors les famílies en les quals s'agrupen aquestes òrbites es diuen de tipus T. En aquest últim cas les òrbites generadores són el·lipses amb moviment mitjà racional $n = J/I$, essent I i J dos nombres enters coprimers que representen el nombre de revolucions del primari M i del cos P al voltant de E respectivament.
- Una el·lipse tangent a l'òrbita circular (vegeu la figura 1.4). S'anomenen òrbites de

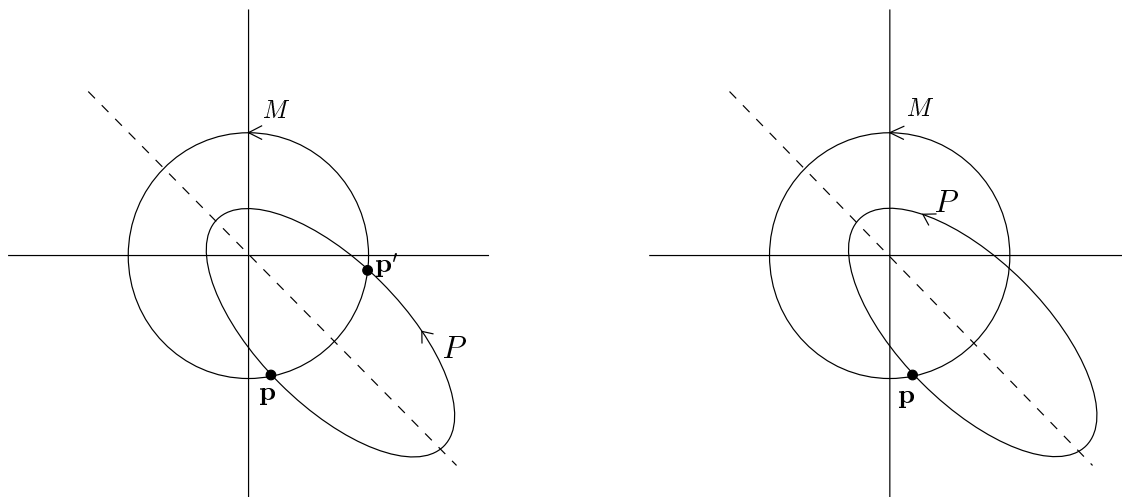


Figura 1.3: Òrbites generadores de *tipus 1*. En el sistema sideral, el primari M descriu una òrbita circular, mentre que el cos P descriu una òrbita el·líptica que interseca en dos punts la primera. Si això es produeix en dos llocs diferents, tindrem òrbites de tipus S (representació de l'esquerra) i si succeeix en el mateix punt, de tipus T (representació de la dreta).

tipus 2 i en aquest cas el moviment mitjà també és racional, $n = J/I$, amb $I \neq J$ i no necessàriament coprimers. Aquestes òrbites estan aïllades entre si.

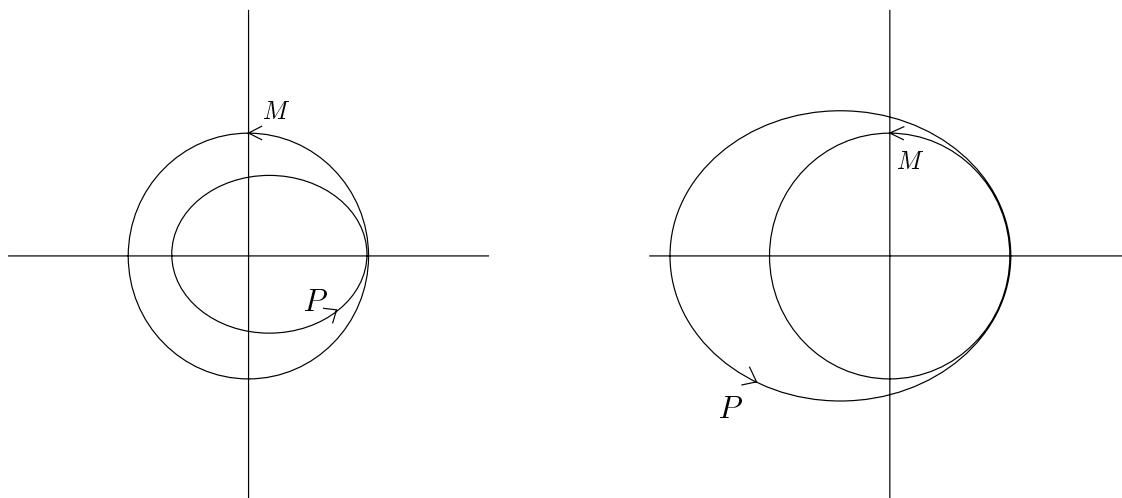


Figura 1.4: Òrbites generadores de *tipus 2*. En el sistema sideral, el cos P descriu una òrbita el·líptica tangent a l'òrbita circular descrita pel primari M .

- Un cercle de radi unitat. Aquestes òrbites s'anomenen de *tipus 3* quan són retrògrades i

de *tipus 4* quan són directes. Les primeres coincideixen amb el primari M dues vegades per volta mentre que les segones coincideixen amb M sempre.

Donat un valor de μ , les òrbites periòdiques s'agrupen en famílies uniparamètriques, de manera que es poden representar mitjançant corbes que s'anomenen característiques, on cada punt de la corba representa una òrbita periòdica. Per a valors de μ propers a zero, aquestes corbes són properes a les corbes característiques bàsiques (corresponents a les òrbites generadores) excepte en alguns punts d'intersecció entre dues característiques bàsiques. Al voltant d'aquests punts la família d'òrbites periòdiques es trenca donant lloc (per a $\mu > 0$) a dues branques diferents (vegeu les figures 1.5 i 1.6). L'òrbita generadora corresponent a la intersecció de les dues característiques per a $\mu = 0$ s'anomena òrbita de bifurcació.

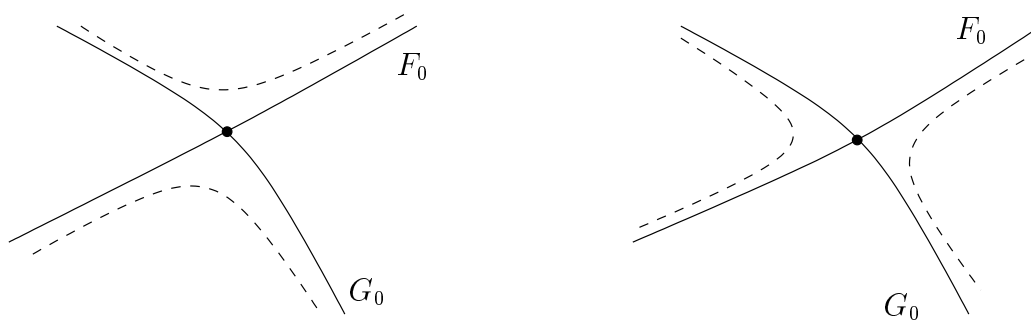


Figura 1.5: Representació qualitativa del comportament de les corbes característiques en un entorn d'una òrbita de bifurcació. F_0 i G_0 són dues famílies per a $\mu = 0$ que s'intersequen (línea contínua). Per a $\mu > 0$, les famílies segueixen primer una característica i després una altra (línies discontinúes).

Hénon, a [13], fa un estudi detallat de totes les òrbites de bifurcació de famílies d'òrbites generadores. Si una òrbita és de bifurcació, llavors pertany a més d'una família. Així doncs, les òrbites de bifurcació es classifiquen segons que pertanyin a dues famílies de 1a espècie (òrbites de 1a espècie-1a espècie), una de 1a espècie i una de 2a espècie (òrbites de 1a espècie-2a espècie) o a dues de 2a espècie (òrbites de 2a espècie-2a espècie).

Les òrbites de bifurcació de 1a espècie-1a espècie es subdivideixen segons que les famílies que s'intersequen siguin de 1a o 2a classe. En el cas que l'òrbita de bifurcació pertanyi a una família de 2a espècie, llavors està formada per una successió d'arcs de còniques (òrbites de col·lisió consecutiva). Si tots els angles de deflexió (els que formen les velocitats relatives en el moment del xoc) entre els successius arcs són zero, llavors l'òrbita generadora ha de

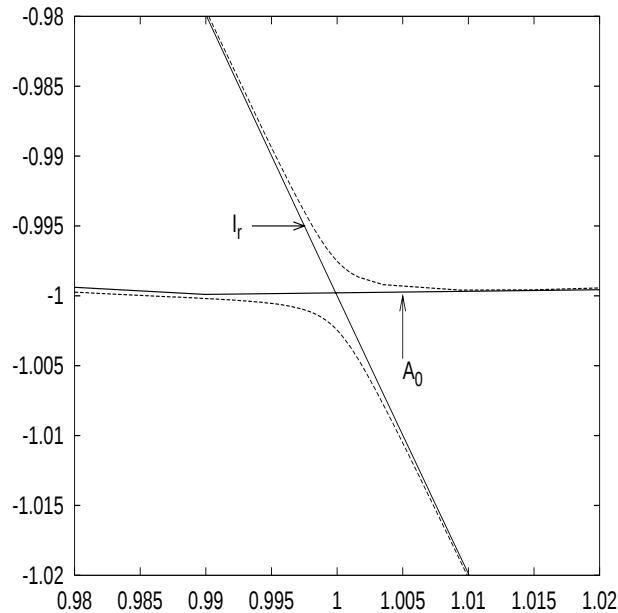


Figura 1.6: Representació en el pla (x_0, C_J) de les corbes característiques, per a $\mu = 0$, de la família d'òrbites generadores de segona espècie A_0 (Hénon [11]) i de la família d'òrbites de primera espècie I_r (formada per òrbites circulars retrògrades). La línia discontinua és la corba característica de la família A_0^μ per a $\mu > 0$, la qual es trenca prop de l'òrbita de bifurcació $(x_0, C_J) = (1, -1)$. (x_0 és la coordenada x del punt inicial de l'òrbita.)

ser una mateixa cònica i per tant també ha de pertànyer a una família de 1a espècie. És el cas d'una òrbita de 1a espècie-2a espècie. En cas contrari tenim una òrbita de 2a espècie-2a espècie i cada arc pertany a una òrbita kepleriana generadora diferent. En qualsevol dels dos, les òrbites es classifiquen segons que l'òrbita kepleriana base sigui de tipus 1,2 o 3.

Situem-nos en el cas del problema restringit pla ($z = \dot{z} = 0$). Com que la simetria

$$(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) \longrightarrow (x(-t), -y(-t), -\dot{x}(-t), \dot{y}(-t))$$

deixa invariants les equacions del moviment (1.2), si una solució del problema restringit talla ortogonalment l'eix sinòdic ox , és simètrica respecte d'aquest eix. Si es produeixen dos talls ortogonals, llavors, a més, és periòdica. Aquestes són les solucions periòdiques i simètriques de segona espècie (*Symmetric Periodic Second Species Solution*, SPSSS), les quals es poden dividir en tres tipus, segons que a prop del primari M es donin cap, un o dos talls perpendiculars.

Les òrbites periòdiques de segona espècie han estat extensament estudiades. Amb un

enfocament analític, esmentem el treball de Perko [19], on desenvolupa la seva teoria del *matching*. Les òrbites periòdiques de segona espècie són properes a arcs d'el·lipses excepte quan la distància al primari M es fa petita. Llavors la solució és propera a una hipèrbola. La teoria de Perko consisteix a solapar desenvolupaments asimptòtics obtinguts en regions diferents (lluny i prop del primari petit) a la zona de separació d'aquestes. En aquest treball Perko considera el cas en què les velocitats relatives d'entrada i sortida de la col·lisió formen un angle no nul, i a [20] prova l'existència i dona una aproximació asimptòtica d'una família uniparamètrica de solucions periòdiques de segona espècie usant la teoria desenvolupada. A [21] fa el mateix per a múltiples famílies d'òrbites de segona espècie amb un o més passos a una distància d'ordre $O(\mu)$ del primari petit entre dos talls perpendiculars. Esmentem també els treballs de Guillaume [5] i [6] on estudia les bifurcacions de 1a espècie per a òrbites de 1a i 2a classe i [7] on dona una descripció analítica d'algunes famílies de SPSSS corresponents a zones regulars (lluny de bifurcació) de les corbes característiques.

Aquests treballs no inclouen l'estudi de les òrbites de bifurcació de segona espècie, per a les quals algun angle de deflexió entre els arcs successius que formen l'òrbita generadora s'anul·la. Guillaume, a [8], estén la teoria del *matching* de Perko prenent noves hipòtesis sobre els ordres de magnitud d'alguns paràmetres petits i incorporant el cas en què les velocitats relatives d'entrada i sortida en el moment de la col·lisió són paral·leles. Aquest treball permet a Perko provar l'existència de famílies de solucions periòdiques amb passos d'ordre $O(\mu^\nu)$ per a $1/3 < \nu < 1$ ([22]) i per a $0 < \nu < 1$ ([24]), així com l'estudi de SPSSS prop d'òrbites de bifurcació de 1a espècie-2a espècie a [23] (són òrbites generadores que pertanyen, alhora, a una família d'òrbites de primera espècie i a una de segona espècie).

A més d'aquests treballs, també trobem el d'Henrard [15], on demostra l'existència d'algunes òrbites periòdiques de segona espècie usant l'equivalència topològica entre sistemes diferencials al voltant d'un punt d'equilibri.

Finalment, fem menció al treball de Gómez i Ollé [3], on els autors estudien i demostren l'existència de solucions de segona espècie en el RTBP el·líptic (el moviment dels primaris és el·líptic) i, particularment, demostren l'existència d'una família de SPSSS (en el cas circular) generades per solucions rectilínies.

Pel que fa a l'estudi numèric de les òrbites periòdiques (no necessàriament de segona espècie), esmentem els treballs de Hénon [9], [10] i Broucke [1]. En el cas de les SPSSS

destaquem els treballs de Ollé [18] i Gómez i Ollé [4], en els quals podem trobar una extensa descripció de les òrbites periòdiques i simètriques de segona espècie, tant en el cas circular com en l'el·líptic. El mètode que utilitzen és el de continuació, per a $\mu > 0$, de famílies d'òrbites de xocs consecutius, que també calculen en ambdós casos. Howell, a [16] i [17], també estudia el cas el·líptic i caracteritza les òrbites de col·lisió consecutives amb independència de l'orientació relativa de les òrbites del primari petit i el cos infinitesimal.

Nosaltres treballarem amb òrbites p - q ressonants, les quals fan p voltes al voltant del primari E mentre el primari M en fa q també al voltant de E (essent p i q coprims). El temps que aquestes òrbites tarden a arribar a un entorn de centre M i radi μ^α per a $\alpha > 0$, havent sortit del mateix entorn és

$$2\pi q + O(\mu^\alpha) = 2\pi\tau p + O(\mu^\alpha),$$

on $2\pi\tau$ és el període de l'òrbita el·líptica que aproxima la solució del problema restringit lluny de M (de fet, mentre estiguem fora de l'entorn de radi μ^α). Si fem $\mu \rightarrow 0$, tindrem que l'òrbita generadora serà una òrbita kepleriana de tipus 1, 2 o 3, amb moviment mitjà $n = p/q$ i semieix $a = (q/p)^{2/3}$. Així doncs, aquest tipus d'òrbites són de bifurcació de 1a espècie-2a espècie.

1.3 Notacions i càlculs preliminars

En aquesta secció establim algunes notacions i desenvoluparem alguns càlculs que utilitzarem a la resta de la memòria.

Volem estudiar òrbites del problema restringit circular de segona espècie p - q ressonants. Aquestes seran òrbites que, partint d'un entorn del primari M , tornen a aquest mateix entorn al cap d'un cert temps. En el sistema sinòdic denotem per $B = B(M, \mu^\alpha)$ la bola de centre el punt $(\mu - 1, 0, 0)^T$ i radi μ^α amb $\alpha < 1/2$ (ja veurem més endavant el perquè d'aquesta restricció), i sigui t_1 l'instant inicial en què el tercer cos es troba precisament sobre la frontera d'aquesta bola i allunyant-se del cos M . Siguin $\mathbf{r}_i$ i $\dot{\mathbf{r}}_i$ les coordenades sinòdiques d'aquest

punt inicial, que es poden escriure en coordenades esfèriques (vegeu la figura 1.7) com

$$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} \mu - 1 + \mu^\alpha \cos \varphi \cos \theta \\ \mu^\alpha \cos \varphi \sin \theta \\ \mu^\alpha \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}(t_1) = \dot{\mathbf{r}}_i = v_i \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi \\ \cos \phi \sin \psi \\ \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

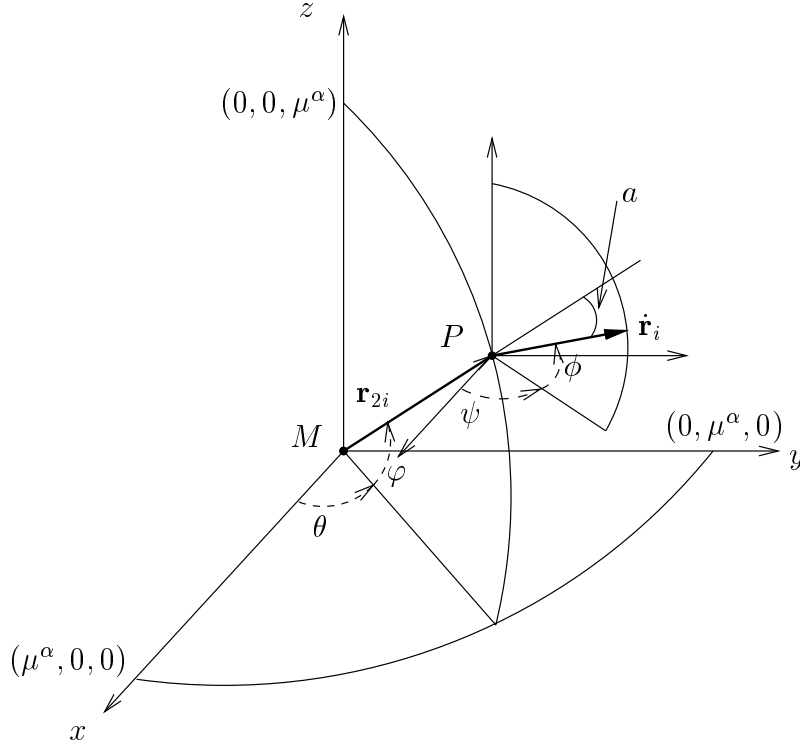


Figura 1.7: Coordenades esfèriques dels vectors posició $\mathbf{r}_{2i} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_M$ (θ i φ) i velocitat $\dot{\mathbf{r}}_i$ (ψ i ϕ) inicials. a és l'angle que formen els vectors $\mathbf{r}_{2i}$ i $\dot{\mathbf{r}}_i$.

Usant la relació (1.1) entre els dos sistemes de coordenades, obtenim l'expressió de la posició i velocitat inicials en coordenades siderals. Seran

$$\mathbf{R}(t_1) = \mathbf{R}_i = G(t_1)\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_M(t_1) + \mu^\alpha \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos(\theta + t_1) \\ \cos \varphi \sin(\theta + t_1) \\ \sin \varphi \end{pmatrix},$$

pel que fa a la posició, i per a la velocitat

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}}(t_1) &= \dot{\mathbf{R}}_i = G(t_1)\dot{\mathbf{r}}_i + \dot{G}(t_1)\mathbf{r}_i = \\ &= v_i \begin{pmatrix} \cos \phi \cos(\psi + t_1) \\ \cos \phi \sin(\psi + t_1) \\ \sin \phi \end{pmatrix} + \mu^\alpha \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin(\theta + t_1) \\ \cos \varphi \cos(\theta + t_1) \\ 0 \end{pmatrix} + (\mu - 1) \begin{pmatrix} -\sin t_1 \\ \cos t_1 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Tot seguit desenvolupem alguns càlculs i expressions necessaris. Comencem per escriure el mòdul de la velocitat sinòdica inicial $v_i = \dot{\mathbf{r}}_i$ en potències de μ . Per a això usem la integral primera de Jacobi (1.3) avaluada en t_1 :

$$v_i^2 = 2\Omega(\mathbf{r}_i) - C_J = \underbrace{x_i^2 + y_i^2}_{(I)} + \underbrace{\frac{2(1-\mu)}{r_{1i}}}_{(II)} + \underbrace{\frac{2\mu}{r_{2i}}}_{(III)} - C_J.$$

Calculem cadascuna de les tres parts per separat.

(I) El primer sumand serà

$$\begin{aligned}x_i^2 + y_i^2 &= (\mu - 1 + \mu^\alpha \cos \varphi \cos \theta)^2 + \mu^{2\alpha} \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \\ &= (\mu - 1)^2 + 2(\mu - 1)\mu^\alpha \cos \varphi \cos \theta + \mu^{2\alpha} \cos^2 \varphi \\ &= 1 - 2\mu^\alpha \cos \varphi \cos \theta - 2\mu + 2\mu^{1+\alpha} \cos \varphi \cos \theta + \mu^{2\alpha} \cos^2 \varphi + \mu^2.\end{aligned}$$

(II) Calculem primer $r_{1i} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_E|$:

$$\begin{aligned}r_{1i}^2 &= (x_i - \mu)^2 + y_i^2 + z_i^2 = (x_i - \mu + 1)^2 + y_i^2 + z_i^2 + 1 - 2(x_i - \mu + 1) \\ &= r_{i2}^2 + 1 - 2(x_i - \mu + 1) = 1 - 2\mu^\alpha \cos \varphi \cos \theta + \mu^{2\alpha}, \\ r_{1i} &= 1 + \frac{1}{2}(\mu^{2\alpha} - 2\mu^\alpha \cos \varphi \cos \theta) - \frac{1}{8}(\mu^{2\alpha} - 2\mu^\alpha \cos \varphi \cos \theta)^2 + O(\mu^{3\alpha}) \\ &= 1 - \mu^\alpha \cos \varphi \cos \theta + \frac{1}{2}\mu^{2\alpha}(1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \theta) + O(\mu^{3\alpha}).\end{aligned}$$

El seu invers serà

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_{1i}} &= 1 + \mu^\alpha \cos \varphi \cos \theta - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \theta)\mu^{2\alpha} \\ &\quad + (\mu^\alpha \cos \varphi \cos \theta - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \theta)\mu^{2\alpha})^2 + O(\mu^{3\alpha}) \\ &= 1 + \mu^\alpha \cos \varphi \cos \theta - \frac{1}{2}(1 - 3\cos^2 \varphi \cos^2 \theta)\mu^{2\alpha} + O(\mu^{3\alpha}).\end{aligned}$$

Per tant, el segon terme en l'expressió de v_i^2 queda

$$\begin{aligned}\frac{2(1-\mu)}{r_{1i}} &= 2(1-\mu)(1+\mu^\alpha \cos \varphi \cos \theta - \frac{1}{2}(1-3\cos^2 \varphi \cos^2 \theta)\mu^{2\alpha} + O(\mu^{3\alpha})) \\ &= 2 + 2\mu^\alpha \cos \varphi \cos \theta - (1-3\cos^2 \varphi \cos^2 \theta)\mu^{2\alpha} - 2\mu + O(\mu^{3\alpha}),\end{aligned}$$

on hem usat que $\mu^{1+\alpha}$ i $\mu^{1+2\alpha} = O(\mu^{3\alpha})$ ja que $\alpha \leq 1/2$.

(III) Com que $r_{2i} = |\mathbf{r}_{2i}| = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_M| = \mu^\alpha$, tindrem $\frac{2\mu}{r_{2i}} = 2\mu^{1-\alpha}$.

Amb els càlculs obtinguts resulta que el mòdul de la velocitat sinòdica inicial es pot escriure com

$$v_i^2 = 3 - C_J + 2\mu^{1-\alpha} - 4\mu + (\cos^2 \varphi (1 + 3\cos^2 \theta) - 1)\mu^{2\alpha} + O(\mu^{3\alpha}). \quad (1.6)$$

Observem que la relació (1.6) ens diu que només podem tenir valors de $C_J \leq 3$. Aquesta és una restricció lògica donat que és per a aquests valors que podem garantir el moviment de P a tot l'espai (no apareixen corbes de velocitat zero. Vegeu [27], secció 4.7.) D'altra banda, volem que, per a $t = t_1$, el tercer cos s'allunyi del primari M . Per això el primer terme de v_i^2 haurà de ser prou gran. Imposem $3 - C_J = O(1)$ per a $C_J < 3$. Aquesta restricció ens serà necessària a nivell tècnic, ja que en molts dels desenvolupaments que farem ens caldrà dividir per l'expressió $3 - C_J$. Així doncs, en tota la memòria considerarem que $3 - C_J$ no es pot fer arbitràriament petit.

Tornem a l'expressió de la velocitat. Podem escriure

$$v_i^2 = (3 - C_J) \left(1 + \frac{2}{3 - C_J} \mu^{1-\alpha} + \frac{T_2}{3 - C_J} \mu^{2\alpha} - \frac{4}{3 - C_J} \mu + O(\mu^{3\alpha}) \right)$$

on $T_2 = \cos^2 \varphi (1 + 3\cos^2 \theta) - 1$. Per trobar l'expressió de v_i utilitzem el desenvolupament

$$\sqrt{1+\sigma} = 1 + \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{8}\sigma^2 + O(\sigma^3),$$

on, per nosaltres,

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{2}{3 - C_J} \mu^{1-\alpha} + \frac{T_2}{3 - C_J} \mu^{2\alpha} - \frac{4}{3 - C_J} \mu + O(\mu^{3\alpha}), \\ \sigma^2 &= \frac{4}{(3 - C_J)^2} \mu^{2-2\alpha} + \frac{4T_2}{(3 - C_J)^2} \mu^{1+\alpha} - \frac{16}{(3 - C_J)^2} \mu^{2-\alpha} - \frac{8T_2}{(3 - C_J)^2} \mu^{1+2\alpha} + O(\mu^{3\alpha}), \\ &= \frac{4}{(3 - C_J)^2} \mu^{2-2\alpha} + O(\mu^{3\alpha}), \\ \sigma^3 &= O(\mu^{3\alpha}).\end{aligned}$$

Així doncs obtenim l'expressió següent per al mòdul de la velocitat inicial:

$$v_i = \sqrt{3 - C_J} + \frac{\mu^{1-\alpha}}{\sqrt{3 - C_J}} + \frac{T_2 \mu^{2\alpha} - 4\mu}{2\sqrt{3 - C_J}} - \frac{\mu^{2-2\alpha}}{2\sqrt{3 - C_J}^3} + O(\mu^{3\alpha}). \quad (1.7)$$

Finalment, explicitem la primera condició que tindrem sobre la posició i velocitat inicials sinòdiques: han de ser tals que el tercer cos surti de la bola $B(M, \mu^\alpha)$ a l'instant inicial t_1 . El que estem demanant és que el cosinus de l'angle que formen el vector posició respecte de M ($\mathbf{r}_{2i} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_M$) i la velocitat ($\dot{\mathbf{r}}_i$) sigui positiu o, equivalentment, que ho sigui el producte escalar entre els dos vectors. Si denotem per a aquest angle (vegeu la figura 1.7) i usem les expressions (1.5), tenim

$$\mu^\alpha v_i \cos a = \langle \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_M, \dot{\mathbf{r}}_i \rangle = \mu^\alpha v_i (\cos \varphi \cos \phi (\cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta) + \sin \varphi \sin \phi),$$

d'on obtenim que la condició que hem d'imposar és

$$\cos a = \cos \varphi \cos \phi \cos(\psi - \theta) + \sin \varphi \sin \phi > 0. \quad (1.8)$$

Observació:

En principi és suficient que $\cos a \geq 0$, però per garantir que P s'allunya de M ens caldrà la desigualtat estricta. Ho veurem en l'estudi de la solució exterior.

Capítol 2

Solució exterior

En aquest capítol veurem que tota òrbita del problema restringit que surt d'un entorn de radi μ^α del primari M i torna a aquest mateix entorn al cap d'un temps, i tal que la seva distància a l'origen no es fa arbitràriament petita, es pot aproximar per una òrbita del problema de dos cossos

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}.$$

De l'arc d'òrbita entre els instants de temps en què aquesta surt de l'entorn de M i retorna al mateix entorn en direm solució exterior.

Estudiarem de quin ordre és l'error que es comet en aquesta aproximació. Inicialment calcularem aquest error usant només que el primari P es troba a una distància de M superior a μ^α (primera aproximació) i veurem que és d'ordre $\mu^{1-2\alpha}$. A continuació veurem com es pot millorar la cota obtinguda en la primera aproximació (segona aproximació) i veurem que, de fet, podem assegurar que l'error és d'ordre $\mu^{1-\alpha}$.

A l'última secció, calcularem l'energia i el moment angular de l'òrbita solució del problema de dos cossos en termes de les condicions inicials, i veurem quines són les restriccions que cal imposar-hi per tal que l'òrbita kepleriana sigui el·líptica i de no-col·lisió.

2.1 Introducció

Suposem que tenim una òrbita del RTBP amb certes condicions inicials, per a $t = t_1$, sobre la bola de centre M i radi μ^α ($B(M, \mu^\alpha)$) i sortint d'ella, això és, la solució de

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{R}} = -(1 - \mu) \frac{\mathbf{R} - \mathbf{R}_E}{R_1^3} - \mu \frac{\mathbf{R} - \mathbf{R}_M}{R_2^3}, \\ \mathbf{R}(t_1) = \mathbf{R}_i, \quad \dot{\mathbf{R}}(t_1) = \dot{\mathbf{R}}_i, \end{cases} \quad (2.1)$$

on $\mathbf{R}_i$ és tal que $R_2(t_1) = |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_M(t_1)| = \mu^\alpha$ ($\mathbf{R}_i$ i $\dot{\mathbf{R}}_i$ definides a la secció 1.3), i $\cos a \geq 0$ (vegeu la figura 1.7). Suposem que existeix un temps t_2 en què tornem a trobar la bola $B(M, \mu^\alpha)$, és a dir, que verifica les condicions següents:

$$R_2(t_2) = |\mathbf{R}(t_2) - \mathbf{R}_M(t_2)| = \mu^\alpha, \quad R_2(t) > \mu^\alpha \quad \forall t \in (t_1, t_2).$$

(Vegeu la figura 2.1.) En aquest interval de temps estarem prou lluny de M perquè el moviment del tercer cos estigui regit essencialment per E i la presència de M pugui considerar-se com una pertorbació. Voldrem veure que la solució de (2.1) es pot escriure com la solució d'un problema de Kepler a l'interval de temps (t_1, t_2) , més un terme petit a causa de la pertorbació.

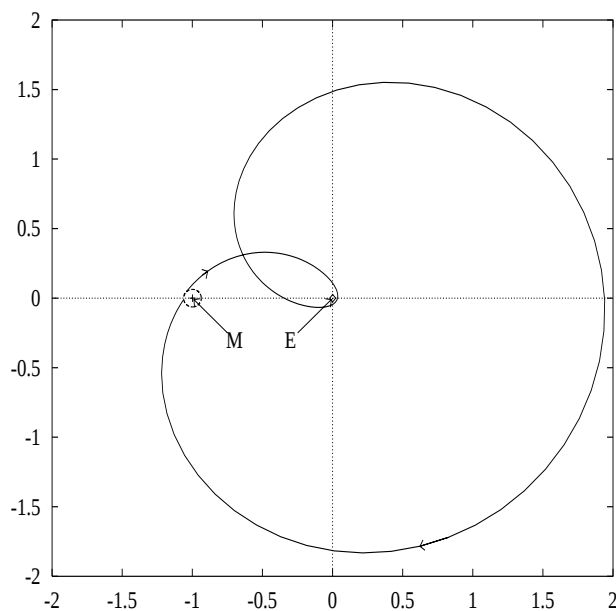


Figura 2.1: Solució exterior (fora de la bola $B(M, \mu^\alpha)$) en el sistema sinòdic. Exemple d'una òrbita plana per a $\mu = 10^{-3}$ i $\alpha = 0.4$.

Escrivim les equacions del moviment com un sistema de primer ordre i denotem $\mathbf{q} = (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})$. Tindrem

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} \\ \ddot{\mathbf{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} \\ -(1-\mu)\frac{\mathbf{R}-\mathbf{R}_E}{R_1^3} - \mu\frac{\mathbf{R}-\mathbf{R}_M}{R_2^3} \end{pmatrix}.$$

Definim G , F , g i f mitjançant les igualtats

$$\begin{aligned} G(\mathbf{q}, \mu) &= \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} \\ g(\mathbf{R}, \mu) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} \\ -(1-\mu)\frac{\mathbf{R}-\mathbf{R}_E}{R_1^3} \end{pmatrix}, \\ F(\mathbf{q}, \mu) &= \begin{pmatrix} 0 \\ f(\mathbf{R}, \mu) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu\frac{\mathbf{R}-\mathbf{R}_M}{R_2^3} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Sigui, doncs, $\mathbf{q}(t)$ la solució del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = G(\mathbf{q}, \mu) + F(\mathbf{q}, \mu) \\ \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_i \\ \dot{\mathbf{R}}_i \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.3)$$

i sigui $\mathbf{q}_{TB} = (\mathbf{R}_{TB}, \dot{\mathbf{R}}_{TB})$ la solució de

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = G(\mathbf{q}, 0) \\ \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_i \end{cases} \quad (2.4)$$

això és, $\mathbf{R}_{TB}$ és solució del problema de Kepler $\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$ amb les mateixes condicions inicials que la solució del problema (2.3).

El resultat que veurem és:

Teorema 2.1

Siguin $\mathbf{q}(t)$ i $\mathbf{q}_{TB}(t)$ les solucions de (2.3) i de (2.4) respectivament, i t_1 l'instant inicial de sortida de la bola $B(M, \mu^\alpha)$. Suposem que existeix $t_2 > t_1$ tal que $R_2(t_2) = \mu^\alpha$ i $R_2(t) > \mu^\alpha$ $\forall t \in (t_1, t_2)$, i que $R = |\mathbf{R}|$ no es fa arbitràriament petit. Llavors

1. $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_{TB}(t) + O(\mu^{1-2\alpha})$, $\forall t \in [t_1, t_2]$.
2. Si existeixen $t_{\alpha/2}$ i $t'_{\alpha/2}$ tals que $t_1 < t_{\alpha/2} < t'_{\alpha/2} < t_2$,

$$R_2(t_{\alpha/2}) = R_2(t'_{\alpha/2}) = \mu^{\alpha/2}, \quad R_2(t) > \mu^{\alpha/2} \quad \forall t \in (t_{\alpha/2}, t'_{\alpha/2})$$

i les condicions inicials són tals que

$$\cos a = \frac{\langle \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_M, \dot{\mathbf{r}}_i \rangle}{r_i v_i} \geq \varepsilon > 0,$$

$$\text{llavors } \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_{TB}(t) + O(\mu^{1-\alpha}), \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

Els passos que seguirem per a la demostració d'aquest resultat es duran a terme en les seccions següents i seran:

- Primera aproximació: veurem que utilitzant només que estem a distància de M més gran que μ^α obtenim

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_{TB}(t) + O(\mu^{1-2\alpha}) \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

- Segona aproximació: veurem que l'error es pot millorar a $O(\mu^{1-\alpha})$. Això es veurà separatament per a temps en què $R_2(t) > \mu^{\alpha/2}$ i per a temps en què $\mu^\alpha \leq R_2(t) \leq \mu^{\alpha/2}$.

Per quantificar la magnitud de l'error que cometem farem ús del lema de Gronwall (vegeu [25]) :

Lema 2.1 (Gronwall)

Sigui $g(t) \geq 0$, contínua i tal que

$$g(t) \leq C + K \int_0^t g(s) ds, \quad \forall t \in [0, t_0].$$

$$\text{llavors } g(t) \leq C e^{Kt}, \quad \forall t \in [0, t_0].$$

2.2 Primera aproximació

Tot seguit demostrarem la primera conclusió del Teorema 2.1. Com a hipòtesi tenim que el cos P no es pot acostar arbitràriament a l'origen i ha de tornar a l'entorn de radi μ^α de M en un temps finit $t_2 - t_1$. Això és, tenim que

$$0 < m < R < M,$$

essent $R = |\mathbf{R}|$ la distància del tercer cos P a l'origen.

Escrivim les solucions de (2.3) i (2.4) en forma integral:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(t) &= \mathbf{q}_i + \int_{t_1}^t G(\mathbf{q}(\tau), \mu) + F(\mathbf{q}(\tau), \mu) d\tau, \\ \mathbf{q}_{TB}(t) &= \mathbf{q}_i + \int_{t_1}^t G(\mathbf{q}_{TB}(\tau), 0) d\tau.\end{aligned}$$

Per veure com és de gran la seva diferència, restem les dues expressions i en prenem la norma.

Tindrem que

$$|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_{TB}(t)| \leq \underbrace{\int_{t_1}^t |G(\mathbf{q}(\tau), \mu) - G(\mathbf{q}_{TB}(\tau), 0)| d\tau}_{(a)} + \underbrace{\int_{t_1}^t |F(\mathbf{q}(\tau), \mu)| d\tau}_{(b)}. \quad (2.5)$$

Comencem per trobar una cota de l'integrand del terme (a) i per això desenvolupem $G(\mathbf{q}, \mu)$ en potències de μ . La distància al primer primari és

$$R_1^2 = (X - \mu \cos t)^2 + (Y - \mu \sin t)^2 + Z^2 = R^2 - 2\mu(X \cos t + Y \sin t) + \mu^2, \quad (2.6)$$

on $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$. Denotem $\Delta = X \cos t + Y \sin t$ i, com que la distància del tercer cos a l'origen de coordenades no es pot fer arbitràriament petita, podrem escriure que

$$R_1^2 = R^2 \left(1 - 2 \frac{\Delta}{R^2} \mu + O(\mu^2) \right).$$

A partir d'aquí tindrem

$$\begin{aligned}R_1 &= R \left(1 - 2 \frac{\Delta}{R^2} \mu + O(\mu^2) \right)^{1/2} = R \left(1 - \frac{\Delta}{R^2} \mu + O(\mu^2) \right), \\ R_1^3 &= R^3 \left(1 - 3 \frac{\Delta}{R^2} \mu + O(\mu^2) \right), \\ \frac{1}{R_1^3} &= \frac{1}{R^3} \left(1 + 3 \frac{X \cos t + Y \sin t}{R^2} \mu + O(\mu^2) \right).\end{aligned}$$

Recuperem ara l'expressió de $g(\mathbf{q}, \mu)$ definida a (2.2). Usant que $\mathbf{R}_E = \mu(\cos t, \sin t, 0)^T$ i l'expressió per a R_1 que acabem de veure, tindrem el seu desenvolupament.

$$\begin{aligned}g(\mathbf{q}, \mu) &= - (1 - \mu) \frac{\mathbf{R} - \mathbf{R}_E}{R_1^3} \\ &= \frac{1}{R^3} (\mu - 1) (\mathbf{R} - \mathbf{R}_E) \left(1 + 3 \frac{X \cos t + Y \sin t}{R^2} \mu + O(\mu^2) \right) \\ &= \frac{1}{R^3} (\mu - 1) \left(\mathbf{R} + 3 \frac{X \cos t + Y \sin t}{R^2} \mu \mathbf{R} - \mathbf{R}_E + O(\mu^2) \right) \\ &= \frac{1}{R^3} \left(-\mathbf{R} + \mu \mathbf{R} - 3 \frac{X \cos t + Y \sin t}{R^2} \mu \mathbf{R} + \mathbf{R}_E + O(\mu^2) \right).\end{aligned}$$

Usant ara que R està acotat superiorment, tenim que

$$g(\mathbf{q}, \mu) = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} + O(\mu) = g(\mathbf{q}, 0) + O(\mu). \quad (2.7)$$

Retornem a l'integrand del terme (a) de (2.5). Fem servir la igualtat (2.7) i el teorema del valor mitjà i obtenim

$$\begin{aligned} |G(\mathbf{q}(\tau), \mu) - G(\mathbf{q}_{TB}(\tau), 0)| &\leq |G(\mathbf{q}(\tau), 0) - G(\mathbf{q}_{TB}(\tau), 0)| + O(\mu) \\ &\leq |DG(\eta)| |\mathbf{q}(\tau) - \mathbf{q}_{TB}(\tau)| + C_1\mu. \end{aligned}$$

Com que $|DG|$ està acotada superiorment, finalment podrem establir

$$|G(\mathbf{q}(\tau), \mu) - G(\mathbf{q}_{TB}(\tau), 0)| \leq C_2 |\mathbf{q}(\tau) - \mathbf{q}_{TB}(\tau)| + C_1\mu. \quad (2.8)$$

Prenem ara l'integrand de (b) de (2.5), definit a (2.2). En aquest cas tan sols fem servir que a l'interval de temps (t_1, t_2) la distància de P al primari M és més gran que μ^α i, per tant,

$$|F(\mathbf{q}(\tau), \mu)| = \frac{\mu}{R_2^2} \leq \frac{\mu}{\mu^{2\alpha}} = \mu^{1-2\alpha} \quad (2.9)$$

per a tot $t \in [t_1, t_2]$.

Així doncs, ajuntant les fites (2.8) i (2.9) per a cada un dels sumands obtenim la següent acotació de (2.5):

$$\begin{aligned} |\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_{TB}(t)| &\leq C_2 \int_{t_1}^t |\mathbf{q}(\tau) - \mathbf{q}_{TB}(\tau)| d\tau + C_1(t_2 - t_1)\mu + (t_2 - t_1)\mu^{1-2\alpha} \\ &\leq C_0\mu^{1-2\alpha} + C_2 \int_{t_1}^t |\mathbf{q}(\tau) - \mathbf{q}_{TB}(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Aplicant el Lema 2.1 de Gronwall

$$|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_{TB}(t)| \leq C_0\mu^{1-2\alpha} e^{C_2(t-t_1)} \quad \forall t \in [t_1, t_2], \quad (2.10)$$

o, equivalentment,

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_{TB}(t) + O(\mu^{1-2\alpha}) \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

Així doncs, ja hem vist la primera part del Teorema 2.1.

Cal fer dues observacions sobre la cota de l'error que hem obtingut. Primerament, per tal que aquesta desigualtat impliqui que $\mathbf{q}_{TB}(t)$ és una “bona” aproximació de $\mathbf{q}(t)$ és necessari que $\alpha < 1/2$. D'altra banda, l'error que obtenim és, essencialment, pel fet que $R_2(t) > \mu^\alpha$ a l'interval de temps en què ens movem. Si podem millorar aquesta fita, millorarem també l'error comès en aquesta aproximació. Això ho durem a terme en la secció següent.

2.3 Segona aproximació

En aquesta secció demostrarem el segon punt del Teorema 2.1. El raonament que seguirem serà diferent segons si estem a una distància de M superior a $\mu^{\alpha/2}$ o no.

Amb les mateixes hipòtesis que en el Teorema 2.1 i anàlogament a com ho hem fet a la secció anterior, podem demostrar que en tot interval de temps $[t_a, t'_a]$ per al qual $R_2(t) \geq \mu^{\alpha/2}$ es verifica que

$$|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_{TB}(t)| \leq C_0 \mu^{1-\alpha} e^{C_2(t-t_a)} \quad \forall t \in [t_a, t'_a].$$

És evident que aquesta cota de l'error és menor que la que havíem trobat a la primera aproximació i el que ens diu és que, mentre el tercer cos es mantingui a una distància del primari M superior a $\mu^{\alpha/2}$, podrem assegurar que el seu moviment és el d'una el·lipse pertorbada per un terme d'ordre $\mu^{1-\alpha}$. Això és

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_{TB}(t) + O(\mu^{1-\alpha}) \quad (2.11)$$

per a tot temps en què $R_2(t) \geq \mu^{\alpha/2}$.

Voldríem poder dir el mateix durant el temps en què $\mu^\alpha < R_2(t) < \mu^{\alpha/2}$ i, alhora, confirmar si en algun moment $R_2(t) > \mu^{\alpha/2}$. D'una banda demostrarem que existeix un instant $t_{\alpha/2} > t_1$ tal que

$$R_2(t_{\alpha/2}) = \mu^{\alpha/2} \quad \text{i} \quad \mu^\alpha < R_2(t) < \mu^{\alpha/2} \quad \forall t \in (t_1, t_{\alpha/2}),$$

i, per tant, també existirà $t'_{\alpha/2} < t_2$ tal que

$$R_2(t'_{\alpha/2}) = \mu^{\alpha/2} \quad \text{i} \quad \mu^\alpha < R_2(t) < \mu^{\alpha/2} \quad \forall t \in (t'_{\alpha/2}, t_2).$$

D'altra banda distingirem dos tipus d'òrbites:

Tipus I : són òrbites tals que

$$\mu^{\alpha/2} \leq R_2(t) \quad \forall t \in [t_{\alpha/2}, t'_{\alpha/2}].$$

Tipus II : són òrbites tals que en algun moment entre $t_{\alpha/2}$ i $t'_{\alpha/2}$ tornen a estar a la corona de centre M i radi μ^α i $\mu^{\alpha/2}$. Vegeu la figura 2.2.

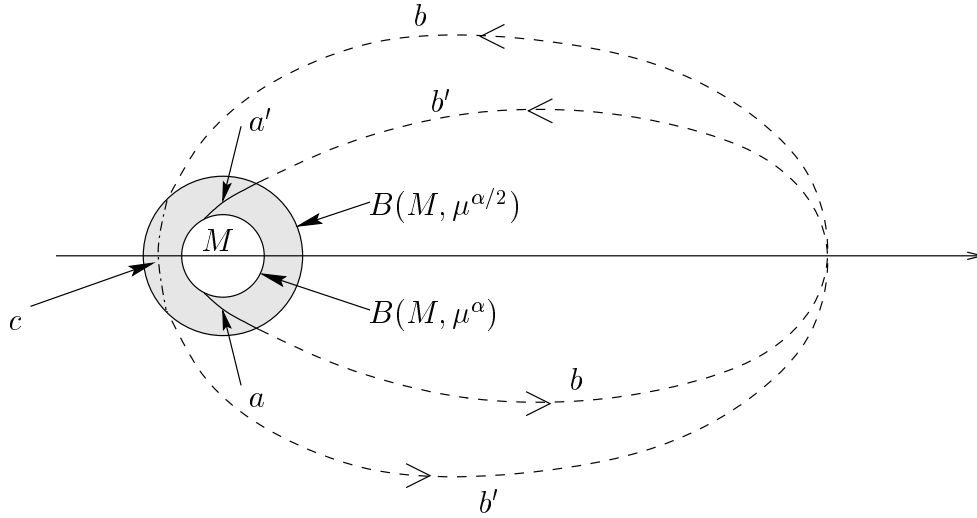


Figura 2.2: Representació qualitativa d'una òrbita de **Tipus II**. a i a' representen, respectivament, els arcs d'òrbita durant els intervals de temps $[t_1, t_{\alpha/2}]$ i $[t'_{\alpha/2}, t_2]$. b i b' són els arcs d'òrbita per als que $\mu^{\alpha/2} \leq R_2(t)$ i en c tenim un pas per la corona de centre M i radis μ^α i $\mu^{\alpha/2}$.

Vegem què podem dir per a qualsevol dels dos tipus d'òrbites per a $t \in [t_1, t_{\alpha/2}]$ (per simetria, el que obtinguem en aquest interval de temps també serà vàlid a $[t'_{\alpha/2}, t_2]$). És clar que la fita $R_2(t) > \mu^\alpha$ no és suficient i que caldrà trobar-ne una de millor. Donat que a l'instant t_1 estem sortint de la bola $B(M, \mu^\alpha)$ i allunyant-nos de M , durant un cert temps la distància $R_2(t)$ al primari petit creixerà. Això vol dir que $\dot{R}_2(t) > 0$ i, per tant, podrem assegurar que existeix k tal que

$$R_2(t) \geq \mu^\alpha + k(t - t_1)$$

durant un cert interval de temps. Aquesta acotació de $R_2(t)$ ens dóna més informació que la que teníem fins ara i, de fet, serà suficient per a millorar la cota de l'error per a temps $t \in [t_1, t_{\alpha/2}]$. Suposem que es verifica el següent:

Lema 2.2

Sigui $\mathbf{q}(t)$ la solució de (2.3) amb condicions inicials $\mathbf{R}_i$ i $\dot{\mathbf{R}}_i$ tals que $|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_M(t_1)| = \mu^\alpha$ i que garanteixin

$$\cos a = \frac{\langle \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_M, \dot{\mathbf{r}}_i \rangle}{r_i v_i} \geq \varepsilon > 0$$

per a algun ε (vegeu la figura 1.7).

Llavors, existeixen $k \geq \varepsilon' > 0$ i $t_{\alpha/2}$ tals que $R_2(t_{\alpha/2}) = \mu^{\alpha/2}$ i

$$R_2(t) \geq \mu^\alpha + k(t - t_1) \quad \text{per a tot } t \in [t_1, t_{\alpha/2}].$$

A continuació veurem com es demostra el segon punt del Teorema 2.1 a partir d'aquest lema i tot seguit en veurem la seva demostració.

Recuperem l'expressió (2.5):

$$|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_{TB}(t)| \leq \underbrace{\int_{t_1}^t |G(\mathbf{q}(\tau), \mu) - G(\mathbf{q}_{TB}(\tau), 0)| d\tau}_{(a)} + \underbrace{\int_{t_1}^t |F(\mathbf{q}(\tau), \mu)| d\tau}_{(b)}.$$

La distància de P al primari M , $R_2(t)$, només apareix en el terme (b) d'aquesta expressió. Així doncs, pel que fa a l'integrand del terme (a) mantindrem la cota trobada a la secció 2.2 i pel que fa a (b) vegem com el Lema 2.2 millora la seva acotació:

$$\begin{aligned} (b) &= \int_{t_1}^t \frac{\mu}{R_2(\tau)^2} d\tau \leq \int_{t_1}^t \frac{\mu}{(\mu^\alpha + k(\tau - t_1))^2} d\tau = \mu \left(\frac{-1/k}{\mu^\alpha + k(\tau - t_1)} \right)_{t_1}^t \\ &= \frac{\mu}{k} \left(\frac{1}{\mu^\alpha} - \frac{1}{\mu^\alpha + k(t - t_1)} \right) = \frac{\mu^{1-\alpha}}{k} \left(1 - \frac{\mu^\alpha}{\mu^\alpha + k(t - t_1)} \right) \\ &\leq \frac{\mu^{1-\alpha}}{k}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Així doncs, substituint (2.8) i (2.12) a (2.5) tindrem que

$$\begin{aligned} |\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_{TB}(t)| &\leq C_2 \int_{t_1}^t |\mathbf{q}(\tau) - \mathbf{q}_{TB}(\tau)| d\tau + C_1(t - t_1)\mu + (t - t_1)\frac{\mu^{1-\alpha}}{k} \\ &\leq C_3\mu^{1-\alpha} + C_2 \int_{t_1}^t |\mathbf{q}(\tau) - \mathbf{q}_{TB}(\tau)| d\tau, \end{aligned}$$

per a $t \in [t_1, t_{\alpha/2}]$ (ja que k no es pot fer arbitràriament petita). De nou, aplicant el Lema de Gronwall

$$|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_{TB}(t)| \leq C_0\mu^{1-\alpha}e^{C_2(t-t_1)} \quad \forall t \in [t_1, t_{\alpha/2}].$$

i per tant tindrem que

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_{TB}(t) + O(\mu^{1-\alpha}) \quad \forall t \in [t_1, t_{\alpha/2}].$$

La conclusió final per a tota òrbita de Tipus I serà que

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_{TB}(t) + O(\mu^{1-\alpha}) \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

i per tant ja hem demostrat la segona part del Teorema 2.1.

Pel que fa a les òrbites de Tipus II el màxim que podem dir és que l'error comès en l'aproximació per la solució del problema de dos cossos és d'ordre $\mu^{1-\alpha}$ per a $t \in [t_1, t_{\alpha/2}] \cup [t'_{\alpha/2}, t_2]$ i per a temps per als quals estiguem a distància de M superior a $\mu^{\alpha/2}$, i d'ordre $\mu^{1-2\alpha}$ per a la resta de valors de t .

Observem que, en qualsevol cas, podem afirmar que $\mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}_{TB}(t_2) + O(\mu^{1-\alpha})$. Aquest resultat serà el que farem servir al capítol 3.

2.3.1 Fita inferior de R_2 : demostració del Lema 2.2

A continuació demostrem el Lema 2.2. D'una banda hem de provar la cota inferior de $R_2(t)$ i de l'altra l'existència de $t_{\alpha/2}$. Comencem desenvolupant $R_2(t)$ fins ordre 1. Tenim

$$R_2(t) = R_2(t_1) + \dot{R}_2(\tau)(t - t_1) = \mu^\alpha + \dot{R}_2(\tau)(t - t_1), \quad (2.13)$$

i per tant el que volem veure és que $\dot{R}_2(t) \geq k > 0$ per a $t \in [t_1, t_{\alpha/2}]$. És clar que, si a t_1 estem sortint de la bola $B(M, \mu^\alpha)$, $R_2(t)$ creixerà durant un cert temps i la seva derivada serà positiva. Ens cal saber que això ho podrem dir fins que $R_2(t) > \mu^{\alpha/2}$. Comencem per escriure

$$R_2(t) = \sqrt{\langle \mathbf{R}_2(t), \mathbf{R}_2(t) \rangle},$$

on $\mathbf{R}_2(t) = \mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_M$, i derivant aquesta expressió tindrem que

$$\dot{R}_2(t) = \frac{1}{R_2(t)} \langle \mathbf{R}_2(t), \dot{\mathbf{R}}_2(t) \rangle.$$

Reescrivim aquesta igualtat en coordenades sinòdiques, ja que la condició de sortir de la bola $B(M, \mu^\alpha)$ la tenim expressada per a $\langle \mathbf{r}_{2i}, \dot{\mathbf{r}}_i \rangle > 0$ (vegeu (1.8) a la secció 1.3). Fent servir (1.1) i que $\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}$, tenim

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}_2(t), \dot{\mathbf{R}}_2(t) \rangle &= \langle G(t)\mathbf{r}_2(t), G(t)\dot{\mathbf{r}}(t) + \dot{G}(t)\mathbf{r}_2(t) \rangle \\ &= \langle \mathbf{r}_2(t), G(t)^T (G(t)\dot{\mathbf{r}}(t) + \dot{G}(t)\mathbf{r}_2(t)) \rangle \\ &= \langle \mathbf{r}_2(t), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle + \langle \mathbf{r}_2(t), G(t)^T \dot{G}(t)\mathbf{r}_2(t) \rangle. \end{aligned}$$

Sabem que

$$G(t)^T \dot{G}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} A_3,$$

i com que per a tot vector $\mathbf{u}$ $\langle \mathbf{u}, A_3 \mathbf{u} \rangle = 0$, tindrem que $\langle \mathbf{R}_2(t), \dot{\mathbf{R}}_2(t) \rangle = \langle \mathbf{r}_2(t), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle$, d'on

$$\dot{R}_2(t) = \frac{1}{R_2(t)} \langle \mathbf{r}_2(t), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle.$$

Definim $a(t)$ com l'angle que formen els vectors $\mathbf{r}_2(t)$ i $\dot{\mathbf{r}}(t)$, i per tant $a = a(t_1)$. A l'instant inicial t_1 podem escriure

$$\dot{R}_2(t_1) = \frac{1}{\mu^\alpha} \langle \mathbf{r}_2(t_1), \dot{\mathbf{r}}(t_1) \rangle = v_i \cos a,$$

terme que sabem que ha de ser estrictament positiu. Com hem dit abans, això ja permet assegurar que $\dot{R}_2(t) > k > 0$ per a alguna k i durant un cert temps. Volem, però, que aquest temps sigui fins que la distància a M sigui major que $\mu^{\alpha/2}$. Per poder assegurar-ho ens caldrà estudiar una mica més aquesta derivada. Tornem a fer un desenvolupament de primer ordre i tindrem

$$\dot{R}_2(t) = v_i \cos a + \ddot{R}_2(\eta)(t - t_1). \quad (2.14)$$

Per a la segona derivada podem escriure

$$\begin{aligned} \ddot{R}_2(t) &= \frac{-\dot{R}_2(t)}{R_2^2(t)} \langle \mathbf{r}_2(t), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle + \frac{1}{R_2(t)} \left(\langle \dot{\mathbf{r}}_2(t), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle + \langle \mathbf{r}_2(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \rangle \right) \\ &= \frac{-\dot{R}_2^2(t)}{R_2(t)} + \frac{1}{R_2(t)} \left(\langle \dot{\mathbf{r}}(t), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle + \langle \mathbf{r}_2(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \rangle \right) \\ &= \frac{v(t)^2 - \dot{R}_2^2(t)}{R_2(t)} + \frac{\langle \mathbf{r}_2(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \rangle}{R_2(t)} \end{aligned}$$

on $v(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|$. Analitzem cada un dels sumands de $\ddot{R}_2(t)$ per separat i acotem-los inferiorment. El primer és trivialment positiu, ja que $\dot{R}_2(t) = v(t) \cos a(t)$ i per tant

$$\frac{v(t)^2 - \dot{R}_2^2(t)}{R_2(t)} = \frac{v(t)^2 (1 - \cos^2 a(t))}{R_2(t)} \geq 0,$$

la qual cosa ens dóna que

$$\ddot{R}_2(t) \geq \frac{\langle \mathbf{r}_2(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \rangle}{R_2(t)}. \quad (2.15)$$

Estudiem aquest segon terme. Per fer-ho, farem ús de les equacions del moviment en coordenades sinòdiques (1.2),

$$\ddot{\mathbf{r}} + A_3 \dot{\mathbf{r}} = \nabla \Omega(\mathbf{r}),$$

de manera que el numerador de l'expressió de la dreta a (2.15) es podrà expressar com

$$\langle \mathbf{r}_2(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \rangle = \underbrace{\langle \mathbf{r}_2(t), \nabla \Omega \rangle}_{(I)} + \underbrace{\langle \mathbf{r}_2(t), -A_3 \dot{\mathbf{r}} \rangle}_{(II)}. \quad (2.16)$$

Desenvolupem cada un d'aquests termes, començant pel segon. Definim $b(t)$ com l'angle que forma, a l'instant t , el pla del moviment amb el pla xy . Llavors, podem escriure

$$\begin{aligned} (II) &= 2 \langle \mathbf{r}_2(t), \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 2((x - \mu + 1)\dot{y} - y\dot{x}) = 2 \langle \mathbf{r}_2(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t), \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \\ &= 2 |\mathbf{r}_2(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)| \cos b(t) = 2 r_2(t) v(t) |\sin a(t)| \cos b(t) \\ &\geq -2 r_2(t) v(t). \end{aligned}$$

Per desenvolupar (I) usem que

$$\nabla \Omega = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1 - \mu}{r_1^3} \mathbf{r}_1 - \frac{\mu}{r_2^3} \mathbf{r}_2,$$

i tindrem que

$$(I) = \underbrace{\langle \mathbf{r}_2(t), \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}_{(I_1)} - \underbrace{\frac{1 - \mu}{r_1^3} \langle \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 \rangle}_{(I_2)} - \underbrace{\frac{\mu}{r_2^3} \langle \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2 \rangle}_{(I_3)}.$$

Acotem cada un d'aquests termes inferiorment:

$$\begin{aligned} (I_1) &= x(x - \mu + 1) + y^2 = (x - \mu + 1)^2 + y^2 - (1 - \mu)(x - \mu + 1) \\ &\geq - (1 - \mu)(x - \mu + 1) \geq - (1 - \mu) r_2(t) \\ (I_2) &= - \frac{1 - \mu}{r_1^3} \langle \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 \rangle \geq - (1 - \mu) \frac{r_2(t)}{r_1^2(t)} \end{aligned}$$

Del fet que $\mu^\alpha \leq r_2(t) \leq \mu^{\alpha/2}$ i que la distància entre els primaris és 1 (vegeu la figura 2.3),

Vegem què podem dir de $v(t)$. Utilitzant la integral primera de Jacobi (1.3) tenim la relació

$$v(t)^2 = -C_J + x^2 + y^2 + 2 \frac{\mu}{r_2} + 2 \frac{1-\mu}{r_1}.$$

Ja sabem que $r_2(t) \geq \mu^\alpha$ i que $r_1(t) \geq 1 - \mu^{\alpha/2}$. D'altra banda, com que la distància del primari M a l'origen és $1 - \mu$, la distància r del tercer cos a l'origen serà com a molt $1 - \mu + \mu^{\alpha/2}$. Per tant

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq r^2 \leq (1 - \mu + \mu^{\alpha/2})^2, \\ v(t)^2 &\leq -C_J + 1 + \mu^2 + \mu^\alpha - 2\mu + 2\mu^{\alpha/2} - 2\mu^{1+\alpha/2} + 2\mu^{1-\alpha} \\ &\quad + 2(1-\mu)(1 + \mu^{\alpha/2} + \mu^\alpha + \mu^{3\alpha/2} + O(\mu^{2\alpha})) \\ &= -C_J + 3 + 4\mu^{\alpha/2} + 3\mu^\alpha + 2\mu^{3\alpha/2} + 2\mu^{1-\alpha} + O(\mu^{2\alpha}). \end{aligned}$$

Si denotem $\Delta = 4\mu^{\alpha/2} + 3\mu^\alpha + 2\mu^{3\alpha/2} + O(\mu^{1-\alpha})$, la desigualtat per a $v(t)^2$ es pot escriure com

$$v(t)^2 \leq (3 - C_J) \left(1 + \frac{\Delta}{3 - C_J} \right),$$

d'on

$$v(t) \leq \sqrt{3 - C_J} \left(1 + \frac{\Delta}{2(3 - C_J)} - \frac{\Delta^2}{8(3 - C_J)^2} + \frac{\Delta^3}{16(3 - C_J)^3} + O \left(\left(\frac{\Delta}{3 - C_J} \right)^4 \right) \right),$$

essent

$$\Delta^2 = 16\mu^\alpha + 24\mu^{3\alpha/2} + O(\mu^{1-\alpha}),$$

$$\Delta^3 = 64\mu^{3\alpha/2} + O(\mu^{1-\alpha}),$$

$$\Delta^4 = O(\mu^{1-\alpha}).$$

Això és,

$$v(t) \leq \sqrt{3 - C_J} \left(1 + \frac{2}{3 - C_J} \mu^{\alpha/2} + \frac{5 - 3C_J}{2(3 - C_J)^2} \mu^\alpha + \frac{C_J^2 - 3C_J + 4}{(3 - C_J)^3} \mu^{3\alpha/2} + O(\mu^{1-\alpha}) \right).$$

Tornem a (2.17) i incorporem l'acotació trobada per a $v(t)$. Si ens aturem en el terme d'ordre μ^α , obtenim que

$$\ddot{R}_2(t) \geq -2 \left(1 + \sqrt{3 - C_J} \right) - 2 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3 - C_J}} \right) \mu^{\alpha/2} - \mu^{1-2\alpha} + O(\mu^\alpha).$$

Denotem per $-K_\alpha$ el terme de la dreta d'aquesta desigualtat ($K_\alpha > 0$). El que hem vist és $\ddot{R}_2(t) \geq -K_\alpha$ i, per tant, a (2.14)

$$\dot{R}_2(t) = v_i \cos a + \ddot{R}_2(\eta)(t - t_1) \geq v_i \cos a - K_\alpha(t - t_1) \geq k > 0,$$

(on k és una constant que ja determinarem) només per temps que verifiquin

$$t \leq t_1 + \frac{v_i \cos a - k}{K_\alpha} = t_1 + \Delta t.$$

Si retornem a (2.13), el resultat de tot això és

$$R_2(t) \geq \mu^\alpha + k(t - t_1) \quad \text{per a } t \in [t_1, t_1 + \Delta t].$$

Aquesta és la relació que ens feia falta. Cal veure, però, qui és k i que existeix un cert temps $t_{\alpha/2} \leq t_1 + \Delta t$ on $R_2(t_{\alpha/2}) = \mu^{\alpha/2}$. Per això definim $\bar{h}(t) = R_2(t) - \mu^{\alpha/2}$ i $h(t) = \mu^\alpha - \mu^{\alpha/2} + k(t - t_1)$, que verifiquen

$$\begin{aligned} \bar{h}(t) &\geq h(t) \quad \text{per a } t \in [t_1, t_1 + \Delta t], \\ \bar{h}(t_1) &= \mu^\alpha - \mu^{\alpha/2} < 0, \\ h(t) = 0 &\iff t = t^* = t_1 + \frac{\mu^{\alpha/2} - \mu^\alpha}{k}. \end{aligned}$$

Suposem que $t^* \leq t_1 + \Delta t$. Llavors tindriem $\bar{h}(t^*) \geq h(t^*) = 0$ i usant el teorema de Bolzano existeix $t_{\alpha/2} \leq t^* \leq t_1 + \Delta t$ tal que $\bar{h}(t_{\alpha/2}) = 0$ i per tant $R_2(t_{\alpha/2}) = \mu^{\alpha/2}$. Així doncs, només ens cal veure que

$$t^* = t_1 + \frac{\mu^{\alpha/2} - \mu^\alpha}{k} \leq t_1 + \frac{v_i \cos a - k}{K_\alpha}, \quad (2.18)$$

o, equivalentment, que

$$K_\alpha(\mu^{\alpha/2} - \mu^\alpha) \leq (v_i \cos a - k)k.$$

Definim $p(k) = k^2 - k v_i \cos a + K_\alpha(\mu^{\alpha/2} - \mu^\alpha)$ i el que ens preguntem és si existeix algun valor de $k > 0$ per al qual aquesta paràbola és negativa. El mínim l'assoleix en $k = \frac{v_i \cos a}{2}$ i aquest punt tindrà imatge negativa si i només si l'equació $p(k) = 0$ té solució. Això és, si

$$v_i^2 \cos^2 a - 4K_\alpha(\mu^{\alpha/2} - \mu^\alpha) \geq 0.$$

Expressem-ho tot en potències de μ (usarem el desenvolupament de v_i^2 explicat a (1.6)):

$$\begin{aligned}
 v_i^2 \cos^2 a &= \cos^2 a \left(3 - C_J + O(\mu^{1-\alpha}) \right), \\
 K_\alpha(\mu^{\alpha/2} - \mu^\alpha) &= (\mu^{\alpha/2} - \mu^\alpha) \left(2 + 2\sqrt{3 - C_J} + \left(2 + \frac{4}{\sqrt{3 - C_J}} \right) \mu^{\alpha/2} + \mu^{1-2\alpha} + O(\mu^\alpha) \right) \\
 &= \mu^{\alpha/2} \left(2 \left(1 + \sqrt{3 - C_J} \right) + 2 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3 - C_J}} \right) \mu^{\alpha/2} + \mu^{1-2\alpha} \right. \\
 &\quad \left. - 2 \left(1 + \sqrt{3 - C_J} \right) \mu^{\alpha/2} - \mu^{1-3\alpha/2} + O(\mu^\alpha) \right) \\
 &= \mu^{\alpha/2} \left(2 \left(1 + \sqrt{3 - C_J} \right) + 2 \frac{C_J - 1}{\sqrt{3 - C_J}} \mu^{\alpha/2} + \mu^{1-2\alpha} - \mu^{1-3\alpha/2} + O(\mu^\alpha) \right).
 \end{aligned}$$

La diferència entre les dues expressions serà:

$$v_i^2 \cos^2 a - 4K_\alpha(\mu^{\alpha/2} - \mu^\alpha) = (3 - C_J) \cos^2 a - 8(1 + \sqrt{3 - C_J})\mu^{\alpha/2} - 4\mu^{1-3\alpha/2} + O(\mu^\alpha).$$

La conclusió final és que (2.18) és certa si

$$(3 - C_J) \cos^2 a - 8(1 + \sqrt{3 - C_J})\mu^{\alpha/2} > 0,$$

condició que podem assegurar ja que, com a hipòtesi inclosa en les condicions del Teorema 2.1, tenim que $\cos a$ no es pot fer arbitràriament petit.

Finalment observem que hem pres $k = \frac{v_i \cos a}{2}$. Com que per hipòtesi $\cos a \geq \varepsilon$ i per (1.7) $v_i = \sqrt{3 - C_J} + O(\mu^{1-\alpha})$, tindrem que k no es pot fer arbitràriament petit. Amb això queda demostrat el Lema 2.2.

2.4 Energia i moment angular de l'òrbita kepleriana

Com a condició en el Teorema 2.1 tenim que el cos P no es pot ni acostar arbitràriament a l'origen ni allunyar-se'n tant com vulgui. Això és, $0 < m < R < M$. Com a conseqüència tindrem que la solució del problema de dos cossos

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \\ \mathbf{R}(t_1) = \mathbf{R}_i, \\ \dot{\mathbf{R}}(t_1) = \dot{\mathbf{R}}_i, \end{cases} \quad (2.19)$$

haurà de ser una òrbita el·líptica i de no-col·lisió. Això és equivalent a dir que l'energia, h , ha de ser negativa i que el moment angular, $\mathbf{c}$, ha de ser diferent de zero. Vegem com

es reflecteixen aquestes dues condicions sobre les coordenades inicials $\mathbf{R}_i$ i $\dot{\mathbf{R}}_i$. Per fer-ho avaluarem les dues integrals primeres del sistema, h i $\mathbf{c}$, a l'instant inicial t_1 .

Comencem per l'energia

$$h = \frac{|\dot{\mathbf{R}}(t)|^2}{2} - \frac{1}{|\mathbf{R}(t)|}.$$

Avaluem primer el denominador del segon terme. A l'instant $t = t_1$ tindrem

$$\begin{aligned} |\mathbf{R}_i| &= \sqrt{\langle G(t)\mathbf{r}_i, G(t)\mathbf{r}_i \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i \rangle} \\ &= ((\mu - 1 + \mu^\alpha \cos \varphi \cos \theta)^2 + \mu^{2\alpha} \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \mu^{2\alpha} \sin^2 \varphi)^{1/2} \\ &= ((\mu - 1)^2 + 2(\mu - 1)\mu^\alpha \cos \varphi \cos \theta + \mu^{2\alpha})^{1/2} \\ &= (1 - 2\mu^\alpha \cos \varphi \cos \theta + \mu^{2\alpha} - 2\mu + O(\mu^{3\alpha}))^{1/2} \\ &= 1 - \mu^\alpha \cos \varphi \cos \theta + \frac{\mu^{2\alpha}}{2}(1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \theta) - \mu + O(\mu^{3\alpha}), \end{aligned}$$

d'on

$$\frac{1}{|\mathbf{R}_i|} = 1 + \mu^\alpha \cos \varphi \cos \theta - \frac{\mu^{2\alpha}}{2}(1 - 3 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta) + \mu + O(\mu^{3\alpha}). \quad (2.20)$$

Pel que fa al mòdul de la velocitat, recordem que teníem la igualtat (1.4) que ens relaciona la velocitat sideral amb la sinòdica:

$$|\dot{\mathbf{R}}_i|^2 = |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 + 2(x_i \dot{y}_i - \dot{x}_i y_i) + x_i^2 + y_i^2.$$

Volem descriure-la en termes de les coordenades esfèriques amb què hem definit la posició i velocitats inicials. Hem d'observar, però, que fixada una posició de sortida (això és, una φ i una θ), podem tenir tot un rang de valors per a la velocitat (ϕ i ψ) que garanteixin que l'òrbita tornarà a retrobar la bola $B(M, \mu^\alpha)$ al cap d'un temps (vegeu la figura 2.4). Així doncs, escrivim

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 + \Delta\phi \mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha}) \\ \psi &= \psi_0 + \Delta\psi \mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

i, per tant, tindrem

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \cos \phi_0 - \Delta\phi \sin \phi_0 \mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha}) & \sin \phi &= \sin \phi_0 + \Delta\phi \cos \phi_0 \mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha}) \\ \cos \psi &= \cos \psi_0 - \Delta\psi \sin \psi_0 \mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha}) & \sin \psi &= \sin \psi_0 + \Delta\psi \cos \psi_0 \mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha}) \\ \sin(\psi - \theta) &= \sin(\psi_0 - \theta) + \Delta\psi \cos(\psi_0 - \theta) \mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

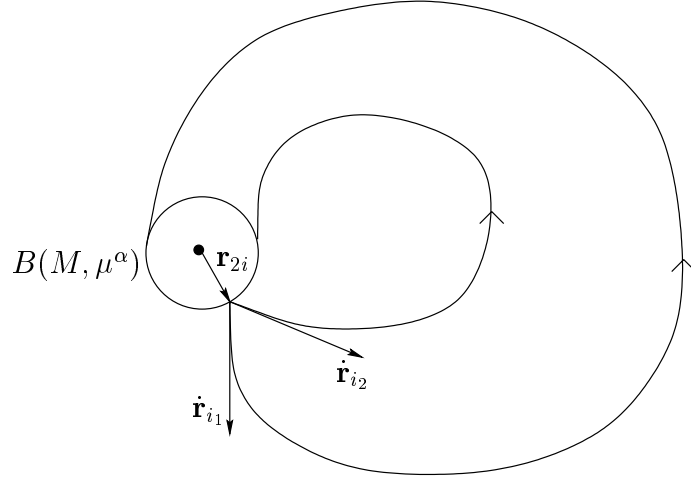


Figura 2.4: Fixada la posició de sortida sobre $B(M, \mu^\alpha)$, $\dot{\mathbf{r}}_{i1}$ i $\dot{\mathbf{r}}_{i2}$ determinen un con de possibles velocitats que donen lloc a òrbites que retornen a la mateixa bola (en el dibuix, cas pla)

Tornem a $|\dot{\mathbf{R}}_i|$. El primer terme de la dreta està desenvolupat a (1.6) i el tercer, $x_i^2 + y_i^2$, també l'havíem trobat en el mateix càlcul. Per al segon, que és on intervien les coordenades de la velocitat, usarem les igualtats que acabem d'establir i (1.7) fins a ordre $\mu^{2\alpha}$:

$$\begin{aligned}
 x_i \dot{y}_i - \dot{x}_i y_i &= v_i \left((\mu - 1 + \mu^\alpha \cos \varphi \cos \theta) \cos \phi \sin \psi - \cos \phi \cos \psi \mu^\alpha \cos \varphi \sin \theta \right) \\
 &= v_i (\mu - 1) \cos \phi \sin \psi + v_i \mu^\alpha \cos \varphi \cos \phi \sin(\psi - \theta) \\
 &= v_i (-\cos \phi_0 \sin \phi_0 - \Delta \psi \cos \phi_0 \cos \psi_0 \mu^\alpha + \Delta \phi \sin \phi_0 \sin \psi_0 \mu^\alpha) \\
 &\quad + v_i \mu^\alpha \cos \varphi \cos \phi_0 \sin(\psi_0 - \theta) + O(\mu^{2\alpha}) \\
 &= -\sqrt{3 - C_J} \cos \phi_0 \sin \psi_0 \\
 &\quad + \mu^\alpha \sqrt{3 - C_J} \left(\Delta \phi \sin \phi_0 \sin \psi_0 - \Delta \psi \cos \phi_0 \cos \psi_0 + \cos \varphi \cos \phi_0 \sin(\psi_0 - \theta) \right) \\
 &\quad - \frac{\cos \phi_0 \sin \psi_0}{\sqrt{3 - C_J}} \mu^{1-\alpha} + O(\mu^{2\alpha}).
 \end{aligned}$$

Així doncs, per a l'expressió de la velocitat sideral tindrem

$$\begin{aligned}
 |\dot{\mathbf{R}}_i|^2 &= 4 - C_J - 2\sqrt{3 - C_J} \cos \phi_0 \sin \psi_0 \\
 &\quad + 2\mu^\alpha \sqrt{3 - C_J} \left(\Delta \phi \sin \phi_0 \sin \psi_0 - \Delta \psi \cos \phi_0 \cos \psi_0 + \cos \varphi \cos \phi_0 \sin(\psi_0 - \theta) \right) \\
 &\quad - 2\mu^\alpha \cos \varphi \cos \theta + 2 \left(1 - \frac{\cos \phi_0 \sin \psi_0}{\sqrt{3 - C_J}} \right) \mu^{1-\alpha} + O(\mu^{2\alpha}).
 \end{aligned}$$

Finalment, usant aquest desenvolupament i (2.20), l'expressió de l'energia en termes de $C_J, \varphi, \theta, \phi_0$ i ψ_0 serà

$$h = h_0 + \Delta h \mu^\alpha + O(\mu^{1-\alpha}), \quad (2.23)$$

on

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 - \frac{C_J}{2} - \sqrt{3 - C_J} \cos \phi_0 \sin \psi_0, \\ \Delta h &= \sqrt{3 - C_J} (\Delta \phi \sin \phi_0 \sin \psi_0 - \Delta \psi \cos \phi_0 \cos \psi_0 + \cos \varphi \cos \phi_0 \sin(\psi_0 - \theta)) \\ &\quad - 2 \cos \varphi \cos \theta. \end{aligned}$$

Per tal que la solució del problema de Kepler sigui una òrbita el·líptica cal que $h < 0$. Per a això demanarem que el primer terme del desenvolupament sigui negatiu: $h_0 < 0$. D'aquí tindrem la desigualtat

$$\cos \phi_0 \sin \psi_0 > \frac{2 - C_J}{2\sqrt{3 - C_J}}, \quad (2.24)$$

condició que és equivalent a

$$\sqrt{3 - C_J} < \cos \phi_0 \sin \psi_0 + \sqrt{1 + \cos^2 \phi_0 \sin^2 \psi_0}.$$

D'aquesta es pot deduir que $C_J > -2\sqrt{2}$. Així doncs, tenim que $C_J \in (-2\sqrt{2}, 3)$.

La segona condició sobre $(\mathbf{R}_{TB}, \dot{\mathbf{R}}_{TB})$ és que no sigui una òrbita de col·lisió. Això vol dir que el moment angular $\mathbf{c}$ ha de ser diferent de zero. Anàlogament a abans, trobarem el seu valor en el punt inicial. Així

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i = G(t_1) \mathbf{r}_i \times (\dot{G}(t_1) \mathbf{r}_i + G(t_1) \dot{\mathbf{r}}_i) \\ &= G(t_1) (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) + G(t_1) \mathbf{r}_i \times \dot{G}(t_1) \mathbf{r}_i = G(t_1) (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{w}_i), \end{aligned}$$

on $\mathbf{w}_i = (-x_i z_i, -y_i z_i, x_i^2 + y_i^2)^T$. Com que $G(t_1)$ és una rotació, n'hi haurà prou amb demanar $\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{w}_i \neq 0$. D'una banda

$$\mathbf{w}_i = \begin{pmatrix} \mu^\alpha \sin \varphi \\ 0 \\ 1 - 2\mu^\alpha \cos \varphi \cos \theta \end{pmatrix} + O(\mu^{2\alpha}),$$

i d'una altra, usant (1.7) fins ordre $\mu^{1-\alpha}$, resulta

$$\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \sqrt{3 - C_J} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \phi_0 \\ -\cos \phi_0 \sin \psi_0 \end{pmatrix} + O(\mu^\alpha).$$

Per tant, tindrem que

$$|\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{w}_i|^2 = (3 - C_J) \sin^2 \phi_0 + (1 - \sqrt{3 - C_J} \cos \phi_0 \sin \psi_0)^2 + O(\mu^\alpha),$$

i la condició que haurem d'imposar és

$$(3 - C_J) \sin^2 \phi_0 + (1 - \sqrt{3 - C_J} \cos \phi_0 \sin \psi_0)^2 \neq 0$$

Observem que al ser suma de dos quadrats aquesta restricció serà equivalent a demanar que un dels dos termes no s'anul·li. Donat que el rang de ϕ_0 és $[-\pi/2, \pi/2]$, el primer dels sumands serà zero només si $\phi_0 = 0$. Per tant la condició perquè la solució del problema de Kepler no sigui de col·lisió s'escriu

$$\phi_0 \neq 0, \quad \text{o} \quad \sin \psi_0 \neq \frac{1}{\sqrt{3 - C_J}}. \quad (2.25)$$