

Capítol 5

Composició de les aplicacions exterior i interior

L'objectiu d'aquesta memòria és trobar òrbites periòdiques espacials. Donades una posició i una velocitat inicials d'una òrbita periòdica sobre la bola $B(M, \mu^\alpha)$, les posicions i velocitats de retorn a la mateixa bola després d'haver-hi passat per fora i per dins han de ser iguals. Les aplicacions exterior i interior trobades als capítols 3 i 4 ens donen, amb un error d'ordre $\mu^{1-\alpha}$, aquestes posicions i velocitats de retorn per a òrbites p - q ressonants (vegeu la figura 5.1). En aquest capítol estudiarem com han de ser unes condicions inicials $(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)$ sobre $B(M, \mu^\alpha)$ per tal que els desenvolupaments de les aplicacions exterior i interior coincideixin fins termes d'ordre μ^α .

Volem observar que, malgrat que utilitzem l'expressió “composició de les aplicacions” per descriure el procés que duem a terme en aquest capítol, el que fem és igualar-les i no compondre-les. Hem utilitzat aquesta expressió seguint el treball de Font, Nunes i Simó [2]. En ell es componen les dues aplicacions, això és, partint d'una posició i velocitat sobre $B(M, \mu^\alpha)$ es troba la posició i velocitat que dona l'aplicació exterior i, a partir d'aquestes i fent anar el temps endavant, es troba la posició i velocitat finals passant per l'interior de la bola. D'aquesta manera els autors obtenen una aplicació definida sobre el conjunt de totes les condicions inicials que donen lloc a òrbites p - q ressonants i és el seu estudi un dels objectius del seu treball. Nosaltres hem calculat l'aplicació interior a partir de la mateixa posició i velocitat inicial que l'aplicació exterior i fent anar el temps enrera. El nostre objectiu és

veure per a quines condicions inicials arribem a la mateixa posició i velocitat que en l'aplicació exterior.

En imposar que les dues aplicacions coincideixin obtindrem lligams sobre les condicions inicials θ , φ , ψ_0 , ϕ_0 , $\Delta\psi$ i $\Delta\phi$ i la constant de Jacobi C_J , els quals s'hauran d'afegir als ja trobats fins ara. Dues de les restriccions que hem usat repetidament fins ara són $0 < \cos a_0 < 1$ (vegeu (1.8) i (4.41)). De nou, en tot aquest capítol, descartarem totes les condicions inicials que no les verifiquin.

En les dues seccions finals, estudiarem per separat els resultats que s'obtenen en el cas del problema restringit pla i espacial.

5.1 Cas general

Tot seguit, prendrem les expressions de les aplicacions exterior i interior trobades als capítols 3 i 4, i demanarem que siguin iguals fins ordre μ^α . Començarem pels termes d'ordre zero de la posició i la velocitat de les dues aplicacions i després n'igualarem els termes d'ordre μ^α .

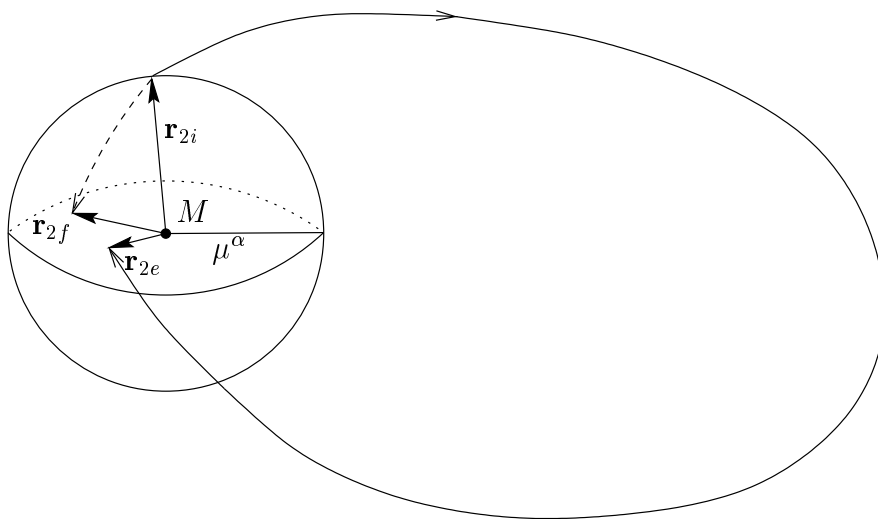


Figura 5.1: Gràfic qualitatiu de les aplicacions interior i exterior. Partint de la posició $\mathbf{r}_{2i}$ sobre la bola $B(M, \mu^\alpha)$, $\mathbf{r}_{2e}$ i $\mathbf{r}_{2f}$ són les posicions finals aproximades sobre $B(M, \mu^\alpha)$ que donen l'òrbita el·líptica (solució exterior aproximada) i la hiperbòlica (solució interior aproximada) respectivament.

Com a posicions aproximades respecte del primari M obteníem, per a l'aplicació exterior

i la interior respectivament,

$$\mathbf{r}_{2e} = r_{2e} \begin{pmatrix} \cos \varphi_e \cos \theta_e \\ \cos \varphi_e \sin \theta_e \\ \sin \varphi_e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{2f} = r_{2f} \begin{pmatrix} \cos \varphi_f \cos \theta_f \\ \cos \varphi_f \sin \theta_f \\ \sin \varphi_f \end{pmatrix},$$

essent $r_{2e}, r_{2f} = \mu^\alpha + O(\mu^{2\alpha})$. Les expressions (3.31), (3.32) i (3.33) per a l'aplicació exterior i (4.75), (4.76) i (4.77) per a la interior donen explícitament la relació de $\mathbf{r}_{2e}$ i $\mathbf{r}_{2f}$ amb la posició i velocitat inicials $\mathbf{r}_{2i}$ i $\dot{\mathbf{r}}_i$. Pel que fa a les velocitats teníem

$$\dot{\mathbf{r}}_e = v_e \begin{pmatrix} \cos \phi_e \cos \psi_e \\ \cos \phi_e \sin \psi_e \\ \sin \phi_e \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}_f = v_f \begin{pmatrix} \cos \phi_f \cos \psi_f \\ \cos \phi_f \sin \psi_f \\ \sin \phi_f \end{pmatrix},$$

i (3.35) i (4.81) donen les seves relacions amb $\mathbf{r}_{2i}$ i $\dot{\mathbf{r}}_i$.

De les expressions assenyalades per a ambdues aplicacions comencem igualant els termes d'ordre zero de les posicions. Obtenim les igualtats següents:

$$\begin{aligned} \cos \varphi \cos \theta + \delta \sqrt{3 - C_J} \cos \phi_0 \cos \psi_0 &= \cos \varphi \cos \theta - 2 \cos a_0 \cos \phi_0 \cos \psi_0, \\ \cos \varphi \sin \theta + \delta \sqrt{3 - C_J} \cos \phi_0 \sin \psi_0 + (\varepsilon - \delta) &= \cos \varphi \sin \theta - 2 \cos a_0 \cos \phi_0 \sin \psi_0, \\ \sin \varphi + \delta \sqrt{3 - C_J} \sin \phi_0 &= \sin \varphi - 2 \cos a_0 \sin \phi_0. \end{aligned}$$

De les tres equacions deduïm que $\varepsilon - \delta = 0$ i

$$\varepsilon = \delta = -\frac{\cos a_0}{\sqrt{c}}, \quad (5.1)$$

essent $\sqrt{c} = \frac{\sqrt{3 - C_J}}{2}$. Recordem que ε i δ estan lligats per la condició (3.4) i observem que els valors trobats la verifiquen. D'altra banda, la condició $\varepsilon - \delta = 0$ és la que ens dona el primer lligam entre c , θ , φ , ψ_0 , ϕ_0 , $\Delta\psi$ i $\Delta\phi$ que haurem d'exigir. En efecte, usant l'expressió (3.8) que dona $\varepsilon - \delta$ en termes d'aquestes variables, obtindrem l'equació

$$-\cos \phi_0 \cos \psi_0 \Delta\psi + \sin \phi_0 \sin \psi_0 \Delta\phi = \frac{\cos \varphi \cos \theta}{\sqrt{c}} + \Lambda_0, \quad (5.2)$$

essent (vegeu (3.24))

$$\Lambda_0 = \cos \varphi \cos \phi_0 \sin(\theta - \psi_0). \quad (5.3)$$

Observació: Recordem que θ , φ , ψ_0 , ϕ_0 , $\Delta\phi$ i $\Delta\psi$ estaven lligats per la condició (3.13). Aquesta era equivalent a demanar $k_1 \leq \varepsilon - \delta \leq k_2$, essent k_1 i k_2 els valors màxim i mínim permesos (vegeu la figura 3.1). Com que estem imposant que $\varepsilon - \delta = 0$ i com que $k_1 \leq 0 \leq k_2$ (l'el·lipse donada per (3.4) sempre passa pel punt (0,0)), és clar que aquesta condició es verificarà. De fet, $k_1 = 0$ si i només si $\cos a_0 = 0$, cas que exclou la restricció (1.8), i per tant $k_1 < 0 = \varepsilon - \delta$.

Prenem ara les expressions per a les velocitats exterior i interior donades per (3.35) i (4.81). D'una banda tenim que $v_e = v_f = |\dot{\mathbf{r}}_i| + O(\mu^\alpha)$ i que els termes d'ordre zero són iguals per a les dues aplicacions. Dels termes d'ordre μ^α es dedueix que

$$\varepsilon + \delta = -2 \frac{\cos a_0}{\sqrt{c}},$$

informació que es pot obtenir directament de (5.1). Així doncs, de les coordenades de les velocitats no obtenim cap restricció nova.

Només ens queden per igualar els termes d'ordre μ^α de les posicions. A les expressions de l'aplicació exterior apareixen ε i δ , que substituïrem pel valor donat a (5.1). Denotem per O_1 , O_2 i O_3 els coeficients que acompanyen μ^α als desenvolupaments de l'aplicació exterior (3.31), (3.32) i (3.33) respectivament. En ells apareix l'expressió Δr_e (vegeu (3.28)), la qual, utilitzant (5.3), s'escriu

$$\Delta r_e = -2 \cos a_0 \left(\Delta\psi \Lambda_0 + \Delta\phi (\sin \varphi \cos \phi_0 - \cos \varphi \sin \phi_0 \cos(\psi_0 - \theta)) \right).$$

Incorporem aquesta expressió i (5.1) als desenvolupaments de l'aplicació exterior esmentats. Tindrem que els coeficients d'ordre μ^α d'aquesta aplicació s'escriuen

$$\begin{aligned}
O_1 &= 2 \cos a_0 \left(\Delta \psi \left(\sin \psi_0 \cos \phi_0 + \Lambda_0 (\cos \varphi \cos \theta - 2 \cos a_0 \cos \phi_0 \cos \psi_0) \right) \right. \\
&\quad \left. + \Delta \phi \left(\sin \phi_0 \cos \psi_0 + (\sin \varphi \cos \phi_0 - \cos \varphi \sin \phi_0 \cos(\psi_0 - \theta)) \right) \right. \\
&\quad \left. \times (\cos \varphi \cos \theta - 2 \cos a_0 \cos \phi_0 \cos \psi_0) \right), \\
O_2 &= -2 \cos a_0 \left(\Delta \psi \left(\cos \psi_0 \cos \phi_0 - \Lambda_0 (\cos \varphi \sin \theta - 2 \cos a_0 \cos \phi_0 \sin \psi_0) \right) \right. \\
&\quad \left. - \Delta \phi \left(\sin \phi_0 \sin \psi_0 + (\sin \varphi \cos \phi_0 - \cos \varphi \sin \phi_0 \cos(\psi_0 - \theta)) \right) \right. \\
&\quad \left. \times (\cos \varphi \sin \theta - 2 \cos a_0 \cos \phi_0 \sin \psi_0) \right), \\
O_3 &= -2 \cos a_0 \left(\Delta \phi \left(\cos \phi_0 - (\sin \varphi \cos \phi_0 - \cos \varphi \sin \phi_0 \cos(\psi_0 - \theta)) \right) \right. \\
&\quad \left. \times (\sin \varphi - 2 \cos a_0 \sin \phi_0) - \Delta \psi \Lambda_0 (\sin \varphi - 2 \cos a_0 \sin \phi_0) \right).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Anàlogament, denotem per I_1 , I_2 i I_3 els coeficients que acompanyen μ^α als desenvolupaments de l'aplicació interior (4.75), (4.76) i (4.77) respectivament. En aquest cas en tots ells apareix l'expressió ΔC , la qual, de la seva definició a (3.25), podem expressar com

$$\Delta C = \Delta \psi \Lambda_0 + \Delta \phi (\sin \varphi \cos \phi_0 - \cos \varphi \sin \phi_0 \cos(\psi_0 - \theta)).$$

Així doncs, tindrem que els coeficients per a l'aplicació interior s'escriuen

$$\begin{aligned}
I_1 &= 2 \Delta \psi \left(\cos a_0 \cos \phi_0 \sin \psi_0 - \Lambda_0 \cos \phi_0 \cos \psi_0 \right) \\
&\quad + 2 \Delta \phi \left(\cos a_0 \sin \phi_0 \cos \psi_0 - \cos \phi_0 \cos \psi_0 (\sin \varphi \cos \phi_0 - \cos \varphi \sin \phi_0 \cos(\psi_0 - \theta)) \right) \\
&\quad + \frac{2 \cos a_0}{\sqrt{c}} \cos \phi_0 (\cos a_0 \sin \psi_0 - \Lambda_0 \cos \psi_0), \\
I_2 &= -2 \Delta \psi \left(\cos a_0 \cos \phi_0 \cos \psi_0 + \Lambda_0 \cos \phi_0 \sin \psi_0 \right) \\
&\quad + 2 \Delta \phi \left(\cos a_0 \sin \phi_0 \sin \psi_0 - \cos \phi_0 \sin \psi_0 (\sin \varphi \cos \phi_0 - \cos \varphi \sin \phi_0 \cos(\psi_0 - \theta)) \right) \\
&\quad - \frac{2 \cos a_0}{\sqrt{c}} \cos \phi_0 (\cos a_0 \cos \psi_0 + \Lambda_0 \sin \psi_0), \\
I_3 &= -2 \Delta \phi \left(\cos a_0 \cos \phi_0 + \sin \phi_0 (\sin \varphi \cos \phi_0 - \cos \varphi \sin \phi_0 \cos(\psi_0 - \theta)) \right) \\
&\quad - 2 \Delta \psi \Lambda_0 \sin \phi_0 - \frac{2 \cos a_0}{\sqrt{c}} \Lambda_0 \sin \phi_0.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Finalment, igualement les expressions (5.4) i (5.5): $O_i = I_i$ per a $i = 1, 2, 3$. Obtenim el

sistema d'equacions

$$\begin{cases} P_{11}\Delta\psi + P_{12}\Delta\phi = C_1 \\ P_{21}\Delta\psi + P_{22}\Delta\phi = C_2 \\ P_{31}\Delta\psi + P_{32}\Delta\phi = C_3, \end{cases} \quad (5.6)$$

essent $P_{i1} = \Lambda_0 G_i$ i $P_{i2} = F G_i$ per a $i = 1, 2, 3$ i

$$\begin{aligned} G_1 &= \cos a_0 (\cos \varphi \cos \theta - 2 \cos a_0 \cos \phi_0 \cos \psi_0) + \cos \phi_0 \cos \psi_0, \\ G_2 &= \cos a_0 (\cos \varphi \sin \theta - 2 \cos a_0 \cos \phi_0 \sin \psi_0) + \cos \phi_0 \sin \psi_0, \\ G_3 &= \cos a_0 (\sin \varphi - 2 \cos a_0 \sin \phi_0) + \sin \phi_0, \\ F &= \sin \varphi \cos \phi_0 - \cos \varphi \sin \phi_0 \cos(\psi_0 - \theta), \\ C_1 &= \frac{\cos a_0}{\sqrt{c}} \cos \phi_0 (\cos a_0 \sin \psi_0 - \Lambda_0 \cos \psi_0), \\ C_2 &= -\frac{\cos a_0}{\sqrt{c}} \cos \phi_0 (\cos a_0 \cos \psi_0 + \Lambda_0 \sin \psi_0), \\ C_3 &= -\frac{\cos a_0}{\sqrt{c}} \Lambda_0 \sin \phi_0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

En conclusió, per tal que les aplicacions interior i exterior siguin iguals fins ordre μ^α , caldrà que existeixin valors de c , θ , φ , ψ_0 , ϕ_0 , $\Delta\psi$, $\Delta\phi$ verificant l'equació (5.2) i el sistema (5.6). El que farem serà considerar $\Delta\psi$ i $\Delta\phi$ com les incògnites en les quatre equacions i estudiarem per a quins valors de c , θ , φ , ψ_0 i ϕ_0 n'existeixen solucions. Primer estudiarem la compatibilitat del sistema (5.6) i després, per als casos en què aquest sigui compatible, calcularem $\Delta\psi$ i $\Delta\phi$ solució de totes les equacions alhora.

Així doncs, considerem el sistema (5.6) com a sistema lineal respecte $\Delta\psi$ i $\Delta\phi$ (3 equacions i 2 incògnites). Aquest serà compatible només en el cas que les matrius

$$M = \begin{pmatrix} \Lambda_0 G_1 & F G_1 \\ \Lambda_0 G_2 & F G_2 \\ \Lambda_0 G_3 & F G_3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad MA = \begin{pmatrix} \Lambda_0 G_1 & F G_1 & C_1 \\ \Lambda_0 G_2 & F G_2 & C_2 \\ \Lambda_0 G_3 & F G_3 & C_3 \end{pmatrix},$$

tinguin el mateix rang. Observem que els termes G_1 , G_2 i G_3 no poden ser tots tres zero alhora, ja que $G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = 1 - \cos^2 a_0$ i $\cos a_0 \neq \pm 1$ per (1.8) i (4.41). Per tant, la matriu associada al sistema d'equacions M només pot tenir rang 0 si $F = \Lambda_0 = 0$. En cas que un dels termes F o Λ_0 sigui diferent de 0 el rang serà 1.

Estudiem cada una d'aquestes situacions:

A: Cas $F = \Lambda_0 = 0$. Aquest cas només es dona en un dels tres supòsits següents:

$$\mathbf{A}_1: \phi_0 = \pm\pi/2 \text{ i } \varphi = \pm\pi/2.$$

$$\mathbf{A}_2: \phi_0 = \pm\pi/2 \text{ i } \psi_0 - \theta = \pi/2 + k\pi, \text{ per a } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{A}_3: \theta - \psi_0 = k\pi \text{ per a } k \in \mathbb{Z} \text{ i } \varphi = (-1)^k \phi_0.$$

En els tres casos, $C_3 = 0$. El primer i l'últim no són admissibles perquè $\cos a_0 = \pm 1$, i en el segon s'obté $C_1 = C_2 = 0$. Per tant, el sistema (5.6) “desapareix” ja que tots els seus coeficients s'anul·len.

B: Cas $\Lambda_0 \neq 0$ o $F \neq 0$. En aquest cas la matriu M té rang 1 i per tal que el sistema (5.6) sigui compatible serà necessari que els determinants

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} G_i & C_i \\ G_j & C_j \end{vmatrix}, \quad i < j,$$

siguin tots nuls. Això és, ens cal veure si hi ha valors de c , φ , θ , ϕ_0 i ψ_0 solució del sistema

$$\begin{cases} \Delta_{12} = 0 \\ \Delta_{23} = 0 \\ \Delta_{13} = 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Les expressions explícites per a Δ_{ij} són

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= - \frac{\cos^2 a_0 \cos \phi_0}{\sqrt{c}} \left(\cos \varphi \left(\cos a_0 \cos(\theta - \psi_0) - \Lambda_0 \sin(\theta - \psi_0) \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos \phi_0 (1 - 2 \cos^2 a_0) \right), \\ \Delta_{23} &= - \frac{\cos^2 a_0 \cos \phi_0}{\sqrt{c}} \left(\cos \varphi \sin(\theta - \psi_0) \left(\sin \phi_0 \cos \varphi \sin \theta - \sin \varphi \sin \psi_0 \cos \phi_0 \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos \psi_0 (2 \sin \phi_0 \cos^2 a_0 - \sin \varphi \cos a_0 - \sin \phi_0) \right), \\ \Delta_{13} &= - \frac{\cos^2 a_0 \cos \phi_0}{\sqrt{c}} \left(\cos \varphi \sin(\theta - \psi_0) \left(\sin \phi_0 \cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \cos \psi_0 \cos \phi_0 \right) \right. \\ &\quad \left. - \sin \psi_0 (2 \sin \phi_0 \cos^2 a_0 - \sin \varphi \cos a_0 - \sin \phi_0) \right), \end{aligned} \quad (5.9)$$

les quals no són, en principi, nul·les. Com que $\frac{\cos^2 a_0}{\sqrt{c}} \neq 0$, dividirem les tres expressions per aquest terme i estudiarem el sistema resultant en el cas del problema restringit pla i espacial per separat.

B₁: RTBP pla. En aquest cas $\varphi = \phi_0 = 0$ i per tant tindrem que $\cos a_0 = \cos(\theta - \psi_0)$ i $\Lambda_0 = \sin(\theta - \psi_0)$. Substituint aquests valors i igualtats en les expressions de (5.9), obtenim que $\Delta_{ij} = 0$, per a qualssevol i, j . Així doncs, en el cas del problema restringit pla el sistema d'equacions (5.6) és compatible i indeterminat i té un grau de llibertat.

B₂: RTBP espacial (això és, φ o ϕ_0 diferents de zero). Hi ha una solució evident que és $\phi_0 = \pm\pi/2$. Per veure si existeixen altres solucions de (5.8) transformarem el sistema d'equacions. Prenem

$$(H_1, H_2, H_3) = \frac{-\sqrt{c}}{\cos^2 a_0 \cos \phi_0} (\Delta_{12}, \Delta_{23}, \Delta_{13}),$$

de manera que busquem solucions de

$$\begin{cases} H_1 = 0 \\ H_2 = 0 \\ H_3 = 0. \end{cases} \quad (5.10)$$

Canviem les dues últimes equacions per dues d'equivalents. Siguin

$$\begin{pmatrix} H'_2 \\ H'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \psi_0 & \cos \psi_0 \\ \cos \psi_0 & -\sin \psi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_2 \\ H_3 \end{pmatrix},$$

de manera que el sistema (5.10) és equivalent al sistema

$$\begin{cases} H_1 = 0 \\ H'_2 = 0 \\ H'_3 = 0, \end{cases} \quad (5.11)$$

essent

$$H'_2 = \cos \varphi \sin(\theta - \psi_0)(\sin \phi_0 \cos \varphi \cos(\theta - \psi_0) - \sin \varphi \cos \phi_0),$$

$$H'_3 = \cos^2 \varphi \sin^2(\theta - \psi_0) \sin \phi_0 + 2 \sin \phi_0 \cos^2 a_0 - \sin \varphi \cos a_0 - \sin \phi_0.$$

Les solucions de (5.11) són:

1. $\varphi = \phi_0 = 0$.
2. $\theta - \psi_0 = k\pi$, $\phi_0 = (-1)^k \varphi$ per a $k \in \mathbb{Z}$.
3. $\phi_0, \varphi \in \{-\pi/2, \pi/2\}$.
4. $\phi_0 = \pm\pi/2$, $\theta - \psi_0 = \pi/2 + k\pi$ per a $k \in \mathbb{Z}$.

La primera correspon al cas pla i les dues últimes estan incloses en el cas general $\phi_0 = \pm\pi/2$. Com ja hem observat a l'apartat **A**₃, la segona no és admissible perquè $\cos a = (-1)^k$ (recordem que, de tots aquests casos, només ens interessin els que $0 < \cos a_0 < 1$).

Així doncs, en el cas del problema restringit espacial tenim que el sistema d'equacions (5.6) és compatible només si $\phi_0 = \pm\pi/2$. Si a més $\theta - \psi_0 \neq \pi/2 + k\pi$ per a $k \in \mathbb{Z}$, el sistema tindrà 1 grau de llibertat i quedarà reduït a una equació, i si $\theta - \psi_0 = \pi/2 + k\pi$ el sistema (5.6) es reduirà al sistema $0 = 0$ (com ja havíem vist al cas **A**₂).

A partir d'ara considerarem c , θ , φ , ψ_0 i ϕ_0 tals que el sistema (5.6) és compatible. Hem d'afegir l'equació (5.2) (que obteníem de la condició $\varepsilon - \delta = 0$). Suposem primer que estem en el cas en què el sistema (5.6) té rang zero (cas **A** anterior). Com ja hem vist, aquesta situació només es pot donar quan $\phi_0 = \pm\pi/2$ i $\psi_0 - \theta = \pi/2 + k\pi$ per a $k \in \mathbb{Z}$. Substituint aquests valors a l'equació (5.2) tindrem que $\Delta\psi$ desapareix i que

$$\Delta\phi = \pm(-1)^k \frac{\cos \varphi}{\sqrt{c}}$$

si $\cos \theta \neq 0$, i que $\Delta\phi$ queda indeterminat si $\cos \theta = 0$. Així doncs, en aquest cas ja hem trobat per a quins valors les aplicacions exterior i interior són iguals fins ordre μ^α .

Centrem-nos ara en el cas en què (5.6) té rang 1. Del sistema (5.6) ens quedarem només amb una equació i afegirem (5.2). Voldrem trobar com han de ser $\Delta\phi$ i $\Delta\psi$ per ser solució de

$$\begin{cases} \Lambda_0 G_i \Delta\psi & + & F G_i \Delta\phi & = & C_i \\ -\cos \phi_0 \cos \psi_0 \Delta\psi & + & \sin \phi_0 \sin \psi_0 \Delta\phi & = & \frac{\cos \varphi \cos \theta}{\sqrt{c}} + \Lambda_0, \end{cases} \quad (5.12)$$

per a alguna i . El determinant de la matriu d'aquest sistema és

$$D_i = G_i \cos \phi_0 (-\cos \varphi \sin \phi_0 \cos \theta + \cos \psi_0 \sin \varphi \cos \phi_0). \quad (5.13)$$

Si per a alguna i podem assegurar que $D_i \neq 0$, llavors els valors que assegurin la composició de les aplicacions exterior i interior seran

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= \frac{1}{D_i} \left(\sin\phi_0 \sin\psi_0 C_i - F G_i \left(\frac{\cos\varphi \cos\theta}{\sqrt{c}} + \Lambda_0 \right) \right), \\ \Delta\phi &= \frac{1}{D_i} \left(\cos\phi_0 \cos\psi_0 C_i + \Lambda_0 G_i \left(\frac{\cos\varphi \cos\theta}{\sqrt{c}} + \Lambda_0 \right) \right).\end{aligned}\tag{5.14}$$

En cas que $D_i = 0$, llavors caldrà estudiar la matriu ampliada per assegurar que el sistema és compatible.

Continuarem aquest estudi en el cas del problema restringit pla i espacial per separat.

5.2 Cas pla

En tota aquesta secció $\varphi = 0$ i $\phi_0 = 0$.

Pel que hem vist fins ara, en el cas d'òrbites planes les aplicacions exterior i interior són iguals (fins ordre μ^α) per a aquells valors de les condicions inicials que siguin solució del sistema (5.12). Per a $\varphi = \phi_0 = 0$ tenim que el determinant del sistema D_i és nul per a qualsevol i (de la seva expressió a (5.13)) i per tant cal estudiar per a quins valors de c , θ i ψ_0 el sistema és compatible. Vegem com són cada una de les seves equacions.

La primera de les equacions prové del sistema (5.6), que, com hem vist en la secció anterior, és compatible i té rang 1. Vegem amb quina equació ens podem quedar. Imposem $\varphi = 0$ i $\phi_0 = 0$ a (5.7) i (5.3). Com que $F = 0$, les tres equacions són de la forma $\Lambda_0 G_i \Delta\psi = C_i$, essent

$$\begin{aligned}\Lambda_0 &= \sin(\theta - \psi_0), \\ G_1 &= \sin(\theta - 2\psi_0) \sin(\theta - \psi_0), & C_1 &= \frac{-1}{\sqrt{c}} \cos(\theta - \psi_0) \sin(\theta - 2\psi_0), \\ G_2 &= \cos(\theta - 2\psi_0) \sin(\theta - \psi_0), & C_2 &= \frac{-1}{\sqrt{c}} \cos(\theta - \psi_0) \cos(\theta - 2\psi_0), \\ G_3 &= 0, & C_3 &= 0.\end{aligned}$$

D'aquestes expressions es dedueix que el sistema (5.6) queda reduït a l'equació

$$\sin^2(\theta - \psi_0) \Delta\psi = \frac{-1}{\sqrt{c}} \cos(\theta - \psi_0),\tag{5.15}$$

que serà la primera equació del sistema (5.12).

Substituïm també $\varphi = \phi_0 = 0$ a la segona equació del sistema (5.12). Obtenim

$$-\cos \psi_0 \Delta\psi = \frac{\cos \theta}{\sqrt{c}} + \sin(\theta - \psi_0). \quad (5.16)$$

Així doncs, el sistema (5.12) estarà format per les equacions (5.15) i (5.16), de les quals ha desaparegut $\Delta\phi$ (fet lògic ja que busquem òrbites planes). Aquestes dues equacions hauran de ser compatibles per obtenir un valor de $\Delta\psi$. La condició serà

$$E(\theta, \psi_0) = \frac{1}{\sqrt{c}} \left(\cos \theta \sin^2(\theta - \psi_0) - \cos \psi_0 \cos(\theta - \psi_0) \right) + \sin^3(\theta - \psi_0) = 0. \quad (5.17)$$

Estudiant la funció $E(\theta, \psi_0)$ observem les propietats següents:

1. $E(\theta + \pi, \psi_0) = -E(\theta, \psi_0)$, i per tant si (θ, ψ_0) és solució de l'equació (5.17), $(\theta + \pi, \psi_0)$ també n'és.
2. Si $C_J = -1$ (i per tant $c = 1$), llavors la recta $\psi_0 = \pi/2$ és solució de (5.17).
3. Els punts

$$(a) \ (\theta, 0), \text{ amb } \tan^3 \theta = 1/\sqrt{c},$$

$$(b) \ (0, \psi_0), \sin^3 \psi_0 - \frac{2}{\sqrt{c}} \sin^2 \psi_0 + \frac{1}{\sqrt{c}} = 0$$

també en són solució.

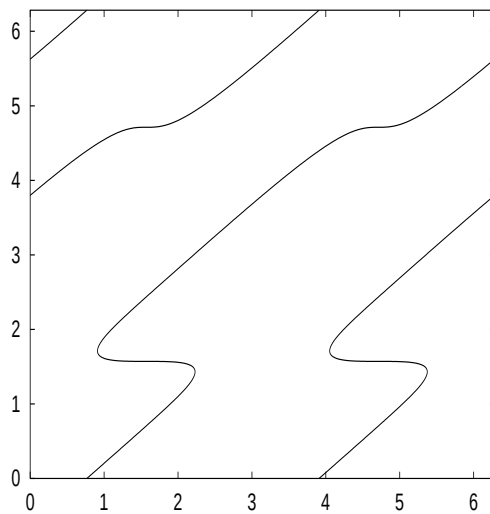
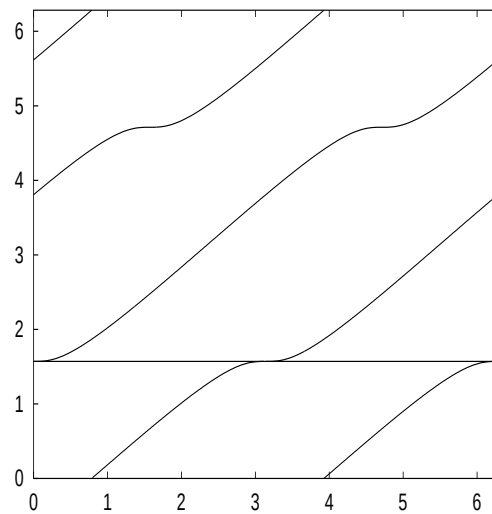
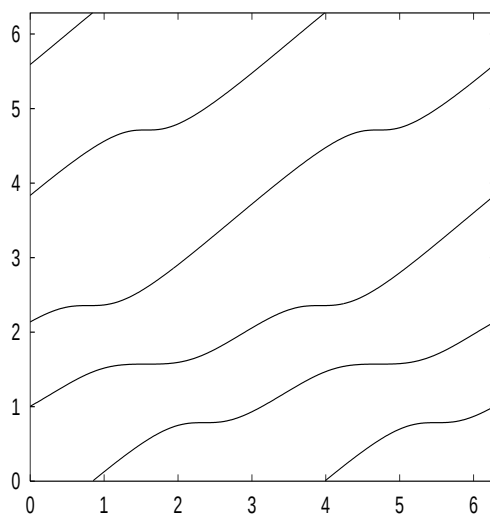
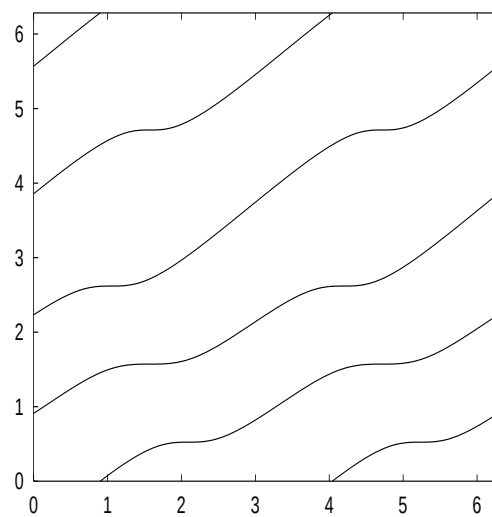
Aquestes propietats ens han permès trobar, numèricament, les solucions de l'equació (5.17). Aquestes solucions es troben representades, per a diferents valors de la constant de Jacobi C_J , a la figura 5.2.

Podem suposar que $\sin(\theta - \psi_0) \neq 0$, ja que si $\sin(\theta - \psi_0) = 0$, llavors tindriem que $\cos a_0 = \cos(\theta - \psi_0) = \pm 1$, cas que no és admissible. Així doncs, tenim que, per a qualssevol C_J , θ i ψ_0 verificant (5.17) i $\cos(\theta - \psi_0) \neq \pm 1$, existeix un valor de $\Delta\psi$ donat per

$$\Delta\psi = \frac{-\cos(\theta - \psi_0)}{\sqrt{c} \sin^2(\theta - \psi_0)}, \quad (5.18)$$

el qual assegura la composició de les aplicacions interior i exterior fins ordre μ^α .

Finalment, recordem que, a més de la condició $E(\theta, \psi_0) = 0$, sobre les condicions inicials teníem altres lligams trobats en capítols anteriors. Volem estudiar si efectivament hi ha valors de C_J , θ i ψ_0 verificant totes les restriccions trobades fins ara perquè l'òrbita sigui

(a) $C_J = -2$ (b) $C_J = -1$ (c) $C_J = 1$ (d) $C_J = 2$ Figura 5.2: Corbes $E(\theta, \psi_0) = 0$ per als valors de la constant de Jacobi indicats en cada cas

p - q ressonant i periòdica. A més de la condició (5.17) i de l'esmentada en la introducció d'aquest capítol ($0 < \cos a_0 < 1$), ens els capítols precedents havíem vist altres restriccions necessàries (obtingudes del fet que l'òrbita exterior aproximada ha de ser una el·lipse amb

moment angular no nul). Aquestes són les donades per les expressions (3.7) i (3.10) que, en el cas del problema restringit pla, s'escriuen

$$\sin \psi_0 = \frac{2 - C_J + (p/q)^{2/3}}{2\sqrt{3 - C_J}}, \quad C_J \neq \left(\frac{p}{q}\right)^{2/3}, \quad (5.19)$$

on $C_J \in (C_{J1}, C_{J2})$ (C_{Ji} definits a (3.9)).

Fixem p i q . Usant la primera relació de (5.19) tindrem, segons el valor de la ràtio entre p i q , els següents casos:

- Si $p/q = 1$, llavors $\sin \psi_0 = \frac{\sqrt{3 - C_J}}{2} = \sqrt{c}$. En aquest cas $\psi_0 \in [0, \pi] \setminus \{\pi/2\}$ (no es pot donar el cas $\sin \psi_0 = \pm 1$, vegeu la secció 3.2), i l'únic valor associat a la constant de Jacobi per a cada ψ_0 és $C_J = 3 - 4 \sin^2 \psi_0$.
- Si $p/q < 1$, llavors $\psi_0 \in [0, 2\pi] \setminus \{\pi/2, 3\pi/2\}$ i cada un d'ells té un valor de C_J associat donat per $\sqrt{3 - C_J} = 2\sqrt{c} = \sin \psi_0 + \sqrt{\sin^2 \psi_0 + 1 - (p/q)^{2/3}}$.
- Si $p/q > 1$, és necessari que $\sin \psi_0 \geq \sqrt{(p/q)^{2/3} - 1}$ i hi ha dos valors de C_J associats donats per $2\sqrt{c} = \sin \psi_0 \pm \sqrt{\sin^2 \psi_0 + 1 - (p/q)^{2/3}}$.

A la figura 5.3 es poden veure com són les corbes definides per les relacions anteriors entre ψ_0 i C_J per a alguns valors concrets de p i q .

Als valors de C_J i ψ_0 verificant (5.19) els anomenarem valors admissibles. Ara, fixats dos valors admissibles de C_J i ψ_0 , caldrà veure si existeix algun valor de θ verificant l'equació (5.17). Com es pot observar a la figura 5.2, fixat ψ_0 només hi ha dos valors de θ verificant aquesta equació. Comprovem-ho analíticament. Escrivim $E(\theta, \psi_0) = E(\theta)$ com

$$\begin{aligned} E(\theta) &= \frac{-3}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} + \sin \psi_0 - \frac{2}{\sqrt{c}} \sin^2 \psi \right) \cos \theta \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{\sqrt{c}} + 3 \sin \psi_0 + \frac{2}{\sqrt{c}} \sin^2 \psi_0 - 4 \sin^3 \psi_0 \right) \cos 3\theta \\ &\quad + \frac{3}{4} \cos \psi_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{c}} \sin \psi_0 \right) \sin \theta - \frac{1}{4} \cos \psi_0 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{c}} \sin \psi_0 - 4 \sin^2 \psi_0 \right) \sin 3\theta \\ &= \frac{r}{4} (3 \cos(\theta - \sigma_1) + \cos(3\theta - \sigma_2)), \end{aligned}$$

essent $r = \frac{3 - 2c - (p/q)^{2/3}}{2c}$ i σ_1, σ_2 definits per

$$\tan \sigma_1 = \frac{\frac{2 \sin^2 \psi_0 - 1}{\sqrt{c}} - \sin \psi_0}{\cos \psi_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{c}} \sin \psi_0 \right)}, \quad \tan \sigma_2 = \frac{\frac{2 \sin^2 \psi_0 - 1}{\sqrt{c}} + \sin \psi_0 (3 - 4 \sin^2 \psi_0)}{-\cos \psi_0 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{c}} \sin \psi_0 - 4 \sin^2 \psi_0 \right)}.$$

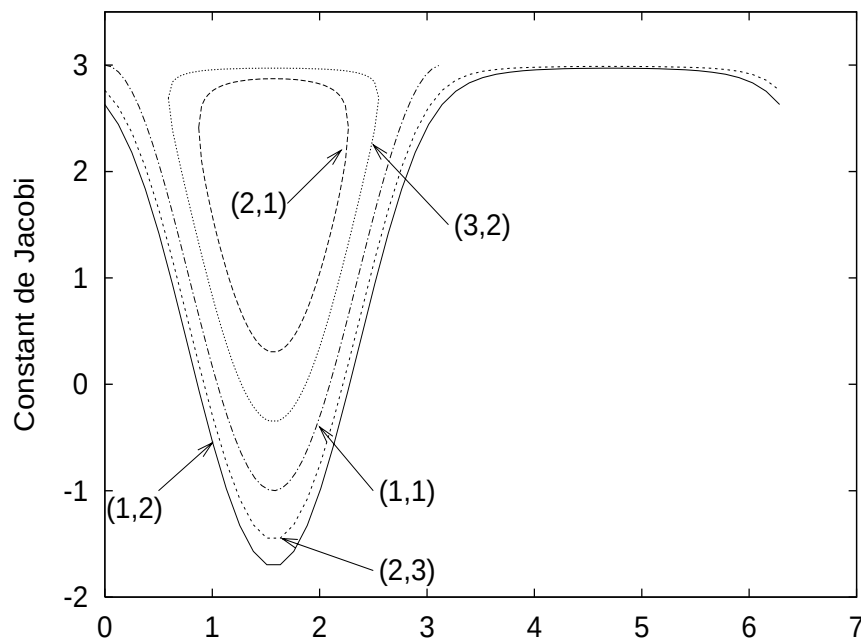


Figura 5.3: Les corbes representades en el pla (ψ_0, C_J) són, per als valors de (p, q) assenyalats, les definides per l'equació $\sin \psi_0 = \frac{2 - C_J + (p/q)^{2/3}}{2\sqrt{3 - C_J}}$

Estudiar el número de zeros de la funció $E(\theta)$ a l'interval $[0, 2\pi]$ serà el mateix que estudiar el de l'equació $3 \cos x + \cos(3x + s) = 0$. D'aquesta tenim que $s = \arccos(3 \cos x) - 3x$ i d'aquí es dedueix que, fixat un valor s , només hi ha dos valors de x que verifiquin la igualtat.

Així doncs ja sabem que per a cada ψ_0 i C_J admissibles tindrem dos valors de θ verificant (5.17). Veiem què més podem dir segons els valors de p i q .

- Si $p/q = 1$, llavors usant que $\sin \psi_0 = \sqrt{c}$ tenim

$$4E(\theta) = \frac{1-c}{\sqrt{c}}(-3 \cos \theta + (4c-1) \cos 3\theta) - \cos \psi_0(3 \sin \theta + (3-4c) \sin 3\theta).$$

Aquesta funció s'anul·la en $\theta = \psi_0 \pm \pi/2$ i, per tant, aquestes són les dues úniques solucions. Però, per a aquests valors, $\cos a_0 = \cos(\theta - \psi_0) = 0$, i per tant aquestes solucions no són admissibles.

- Si $p/q \neq 1$, llavors els valors $\theta = \psi_0 \pm \pi/2$ no són solució de $E(\theta) = 0$. Usant la primera de les propietats vistes per a la funció $E(\theta, \psi_0)$, tindrem dues solucions θ_1 i θ_2 tals que

$\theta_2 - \theta_1 = \pi$. Això implica que $\cos(\theta_1 - \psi_0) \cos(\theta_2 - \psi_0) < 0$ i, per tant, tindrem només un valor de θ admissible (el que verifiqui $\cos a_0 > 0$).

Pel que acabem de veure no podem trobar òrbites periòdiques 1-1 ressonants. Com ja hem observat a la secció 1.2, les òrbites generadores associades a les òrbites p - q ressonants són òrbites de bifurcació de 1a espècie-2a espècie. Per $p = q = 1$ aquestes només poden ser de tipus 1 o 3. Hénon (en [13], pag 102) demostra que no hi ha òrbites de bifurcació de 1a espècie-2a espècie per a $p = q = 1$. Pel que fa a les òrbites generadores de tipus 3, aquestes són cercles retrògrads que en el cas $p = q = 1$ són de període 2π i radi 1. Això implica que P i M s'han de tornar a trobar a la meitat del període. Però pel que hem estat suposant fins ara, $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_M(t)| > \mu^\alpha$ per a $t \in (t_1, t_2)$, això és, no es poden trobar abans d'haver fet cada un d'ells una volta (aproximadament). Així doncs, tenim que no hi ha òrbites periòdiques 1-1 ressonants.

En conclusió, fixats dos valors de p i q , amb algun d'ells diferent de 1, per a cada valor admissible de C_J existeix un valor de ψ_0 i un valor de θ que garanteixen que l'òrbita és p - q ressonant i que les aplicacions exterior i interior coincideixen fins ordre μ^α . A continuació veurem algunes de les òrbites trobades.

5.2.1 Exploracions numèriques

En totes les exploracions numèriques hem pres $\alpha = 0.4$.

Fixats p, q i μ , i variant $C_J \in (C_{J1}, C_{J2}) \setminus \{(p/q)^{2/3}\}$, tindrem una família de (C_J, ψ_0, θ) admissibles, això és, verificant tots els requisits exposats abans. N'hem pres una mostra i, per a cada un d'aquests triplets, hem calculat numèricament, fins a temps $t = 2\pi q + \varepsilon\mu^\alpha$, la solució exterior del problema restringit i la solució aproximada el·líptica $\mathbf{q}_{TB}$ (solució de (2.4)). També hem calculat la solució interior fins a temps t_f (vegeu (4.44)) i la solució hiperbòlica aproximada.

D'una banda hem controlat com varia $\cos a_0$ al llarg de cada família. A la figura 5.4 veiem com $\cos a_0$ tendeix a 1 quan C_J s'acosta als valors C_{J1} i C_{J2} , els quals no són admissibles (en aquests casos $\sin \psi_0 = \pm 1$, valors no admesos. Vegeu la secció 3.2).

D'altra banda, hem calculat la diferència entre les posicions i velocitats finals de l'òrbita el·líptica que aproxima la solució exterior i l'òrbita hiperbòlica que aproxima la solució inte-

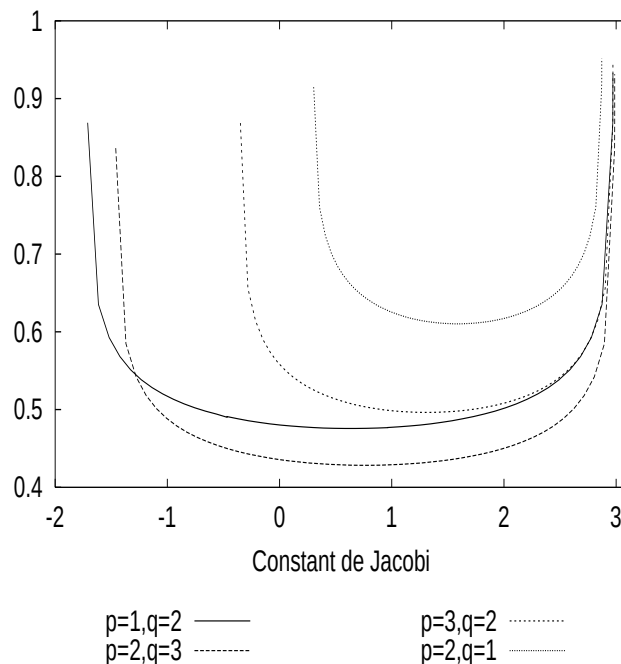


Figura 5.4: Variació de $\cos a_0$ segons els valors de C_J i per a diferents famílies d'òrbites p - q ressonants

rior, això és $|\mathbf{r}_{2e} - \mathbf{r}_{2f}|$ (vegeu la figura 5.1) i $|\dot{\mathbf{r}}_e - \dot{\mathbf{r}}_f|$. Els resultats obtinguts poden veure's a la figura 5.5 per al cas $p = 3$ i $q = 2$ i $\mu = 10^{-4}$ i $\mu = 10^{-6}$. Aquestes diferències es mantenen acotades excepte quan C_J s'aproxima a 3. Prop d'aquest valor la solució real (solució del problema restringit calculada numèricament) i l'aproximada s'allunyen l'una de l'altra. De fet, C_J no s'acosta realment a 3, ja que $C_J < C_{J2} \leq 3$, però per als valors de p i q que hem pres, $C_{J2} \simeq 3$, raó per la qual en els gràfics fets veiem apropar-se C_J a 3. Recordem, però, que havíem demanat $3 - C_J = O(1)$ (vegeu la secció 1.3) A més s'observen problemes per trobar numèricament òrbites el·líptiques solució del problema de dos cossos per a valors de C_J propers a $\left(\frac{p}{q}\right)^{2/3}$. Recordem que aquest cas està exclòs ja que és l'associat a òrbites de col·lisió (vegeu (3.10)).

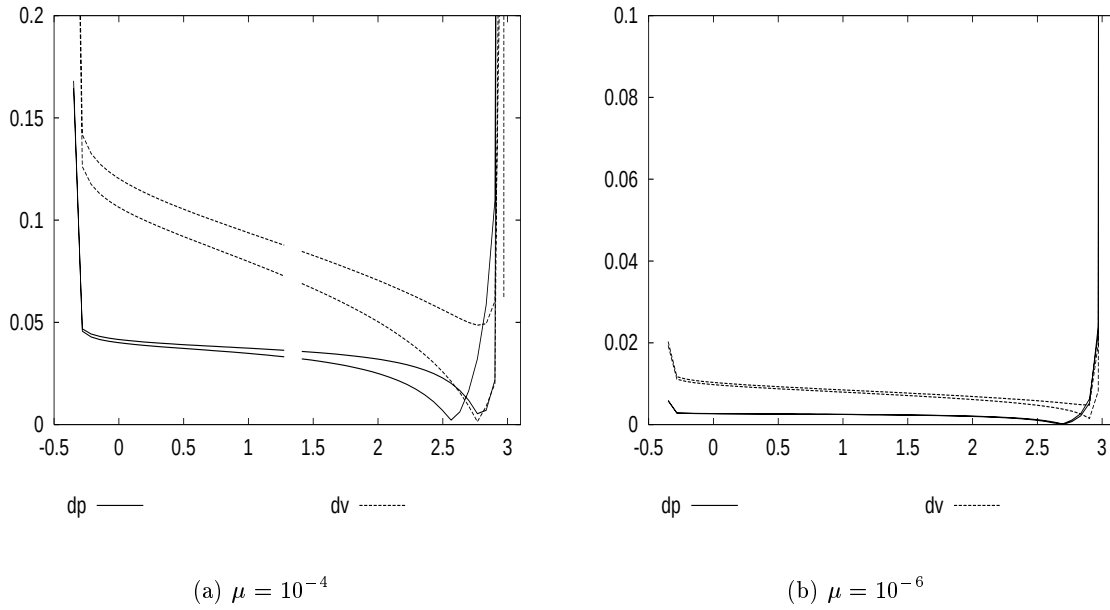


Figura 5.5: Distància entre les posicions (dp) i velocitats (dv) de retorn a la bola $B(M, \mu^\alpha)$ entre les òrbites aproximades el·líptica i hiperbòlica per a òrbites 3-2 ressonants. Cada valor de C_J (eix horitzontal) ens dóna dos òrbites admissibles (dos valors de (ψ_0, θ)) per als valors $p = 3$, $q = 2$ i μ la indicada. En el cas $\mu = 10^{-4}$ el forat correspon a valors propers a $C_J = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}$ per als quals estem prop, per a la solució exterior, d'una òrbita kepleriana de col·lisió.

A continuació exposem, en el sistema sideral, algunes de les òrbites amb condicions inicials admissibles, totes elles per al valor $\mu = 10^{-6}$. A la figura 5.6 podem veure alguns exemples d'òrbites 1-2 ressonants. A la figura 5.7 hi ha una òrbita 2-3 ressonant i una 3-2 ressonant. I a la figura 5.8 dos exemples d'òrbites 2-1 ressonants.

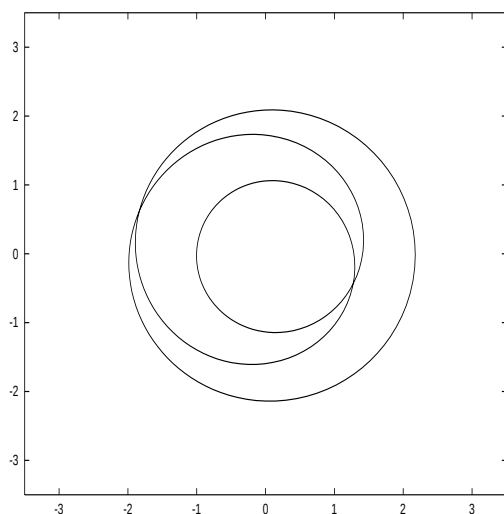
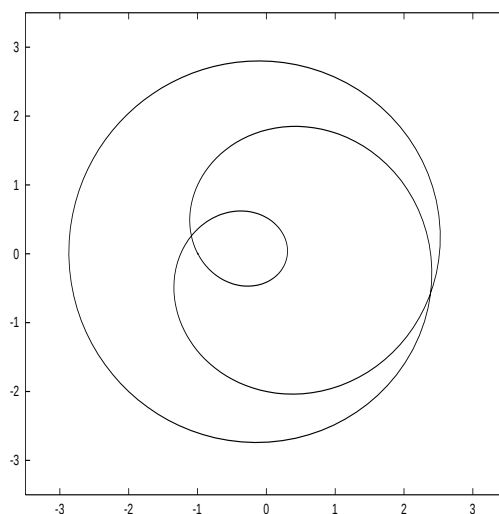
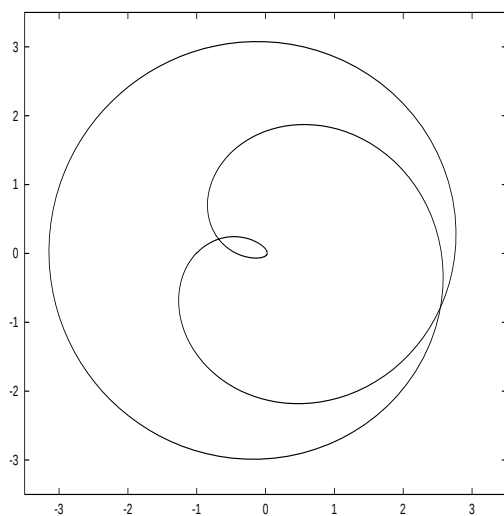
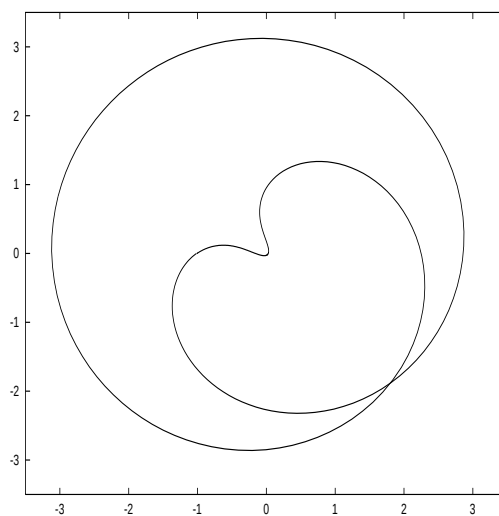
(a) $C_J = -1.710013$ (b) $C_J = -0.850431$ (c) $C_J = 0.200169$ (d) $C_J = 1.059752$

Figura 5.6: Exemples d'òrbites 1-2 ressonants per als diferents valors de la constant de Jacobi indicats en cada cas

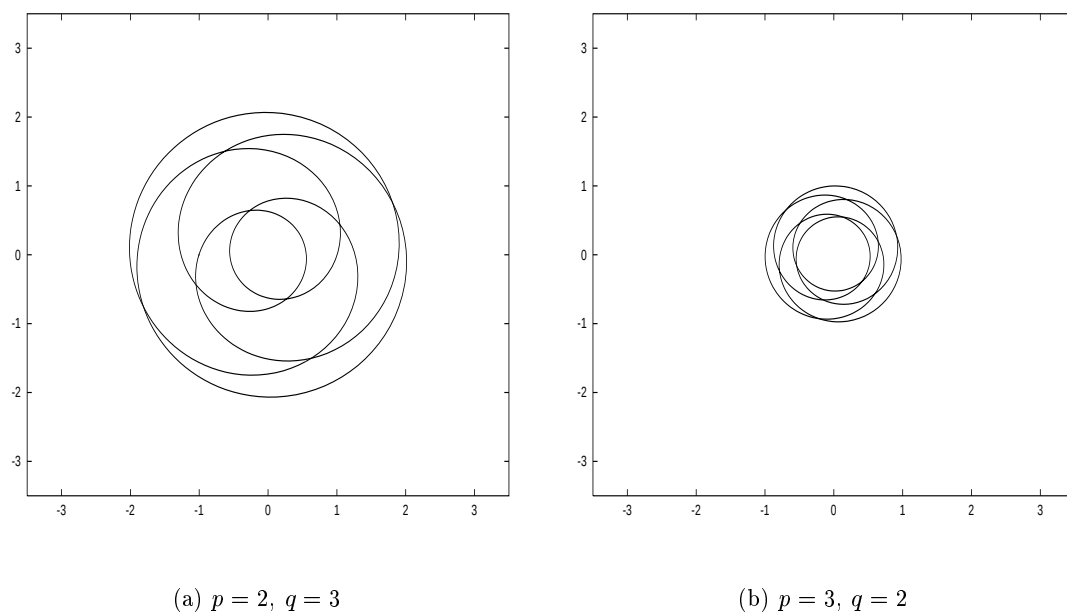


Figura 5.7: Exemples d'òrbites 2-3 ressonants i 3-2 ressonants

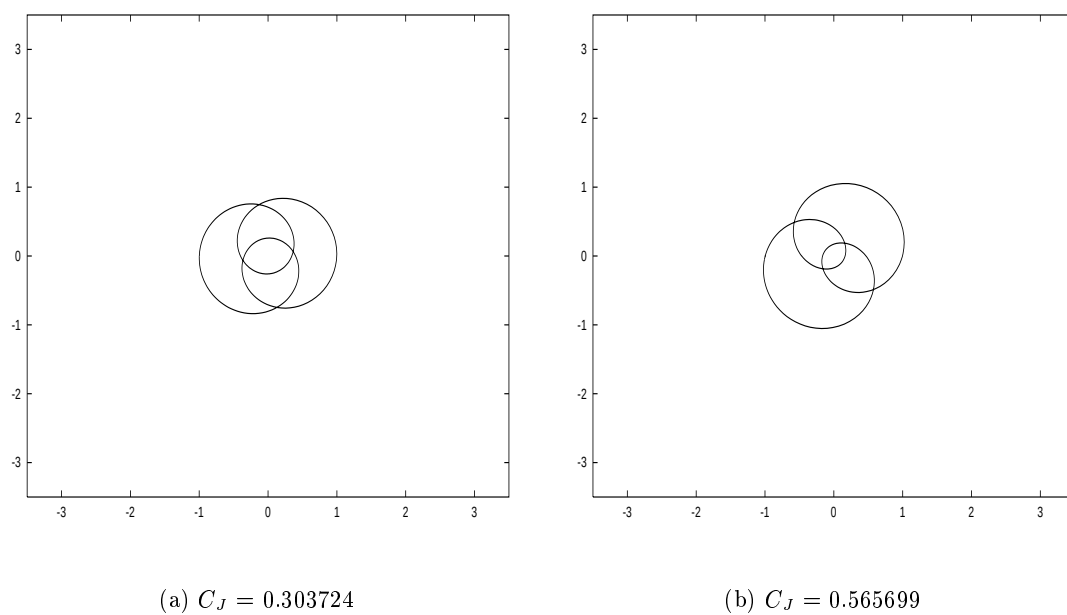


Figura 5.8: Exemples d'òrbites 2-1 ressonants per als valors de la constant de Jacobi assenyalats

5.3 Cas espacial

Recordem que a la primera secció d'aquest capítol havíem vist que, per a que les aplicacions exterior i interior siguin iguals és necessari primer, que el sistema (5.6) sigui compatible i segon, que $\Delta\phi$ i $\Delta\psi$ siguin solució de (5.12). En el cas d'òrbites no planes, tenim que el sistema (5.6) és comptible només si $\phi_0 = \sigma\pi/2$, amb $\sigma = \pm 1$. L'estudi del sistema (5.12) depèn de si la matriu associada al sistema (5.6) té rang 0 o 1.

A: El sistema d'equacions (5.6) es redueix al sistema $0=0$ només si $\psi_0 - \theta = \pi/2 + k\pi$ per a $k \in \mathbb{Z}$ (vegeu la secció 5.1). En aquest cas ja havíem vist que els valors que asseguren la composició de les aplicacions exterior i interior són

$$\Delta\phi = \begin{cases} \sigma(-1)^k \frac{\cos \varphi}{\sqrt{c}} & \text{si } \cos \theta \neq 0, \\ \text{indeterminat} & \text{si } \cos \theta = 0, \end{cases}$$

i $\Delta\psi$ qualsevol.

B: El sistema d'equacions (5.6) és compatible i té rang 1 i, per tant, queda reduït a una sola equació. Veiem quina és aquesta equació. Aquest cas només es pot donar si $\psi_0 - \theta \neq \pi/2 + k\pi$ per a $k \in \mathbb{Z}$. D'una banda tindrem que $\Lambda_0 = 0$ i, de (5.7), que $C_i = 0$ per a tota i . D'altra banda $F \neq 0$ ja que estem suposant que el sistema té rang 1. Així doncs, les tres equacions de (5.6) són de la forma

$$F G_i \Delta\phi = 0.$$

Recordem que ja havíem observat que G_i no pot ser zero per a tota i alhora. Per tant la solució de (5.6) serà $\Delta\phi = 0$.

Vegem ara com s'escriu la segona equació del sistema (5.12). Com $\phi_0 = \sigma\pi/2$ l'equació es reduirà a

$$\sigma \sin \psi_0 \Delta\phi = \frac{\cos \varphi \cos \theta}{\sqrt{c}}.$$

Com que $\Delta\phi = 0$, tindrem que $\cos \varphi \cos \theta = 0$. Però $\cos \varphi \neq 0$, ja que, en cas contrari $\cos a_0 = \pm 1$. Així doncs, $\cos \theta = 0$ i per tant $\theta = \pi/2 + m\pi$ per a $m \in \mathbb{Z}$.

En conclusió, tenim la solució $\phi_0 = \sigma\pi/2$ amb $\sigma = \pm 1$, $\theta = \pi/2 + m\pi$ per a $m \in \mathbb{Z}$, $\Delta\phi = 0$ amb $\psi_0 \neq k\pi$ per a $k \in \mathbb{Z}$ i φ i $\Delta\phi$ qualssevol.

Anàlogament al cas d'òrbites planes, a les solucions trobades hem d'afegir les condicions (3.7) i (3.10) trobades al capítol 3. En ser $\phi_0 \neq 0$ la segona d'elles es verifica automàticament i la primera es redueix a

$$C_J = 2 + \left(\frac{p}{q}\right)^{2/3}.$$

Donat que $C_J < 3$, d'aquesta relació implica que només podem tenir òrbites espacials p - q ressonants que assegurin la composició de les aplicacions exterior i interior per a valors de p i q tals que $p < q$.

Tot seguit veurem com són les condicions inicials de les òrbites espacials que verifiquen les condicions anteriors i n'exposarem algunes de les trobades. En tots els casos $\phi_0 = \sigma\pi/2$ amb $\sigma = \pm 1$ i $\Delta\psi$ pot prendre qualsevol valor. Comencem per observar que, de l'expressió (3.25), tenim que

$$\cos a = \sigma \sin \varphi + O(\mu^{2\alpha}).$$

Com que $\cos a_0$ ha de ser estrictament positiu i no pot arribar a 1, d'una banda tindrem que φ ha de tenir el mateix signe que ϕ_0 i de l'altra, que no pot prendre els valors $\pm\pi/2$. Així doncs podem escriure

$$\varphi = \sigma a \frac{\pi}{2}$$

per a $a \in (0, 1)$.

Vegem què podem dir de la resta de variables:

1. Cas en què $\theta = \pi/2$ o $\theta = 3\pi/2$ i $\Delta\phi = 0$. Fixat un valor de φ tindrem que les coordenades de la posició inicial seran de la forma

$$x = \mu - 1, \quad y = \pm\mu^\alpha \cos \varphi, \quad z = \mu^\alpha \sin \varphi.$$

Això és, totes les posicions de sortida possibles es troben sobre el pla $x = \mu - 1$. Pel que fa a les coordenades de la velocitat inicial, independentment del valor de ψ_0 i $\Delta\psi$ i fins ordre $\mu^{2\alpha}$, seran de la forma

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = \sigma v,$$

essent v el mòdul de la velocitat donat per la integral de Jacobi. Per tant, per a cada posició inicial la velocitat serà perpendicular al pla xy . El gràfic de la figura 5.9 pretén il·lustrar com són aquestes posició i velocitat inicials.

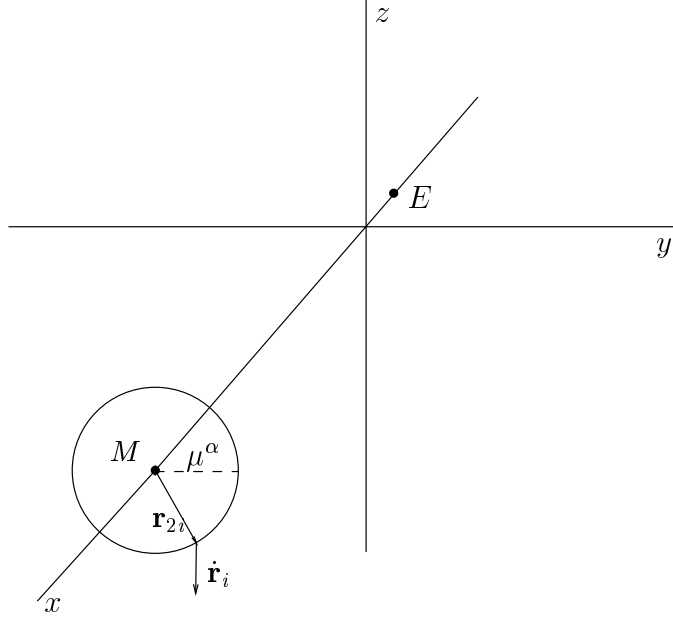


Figura 5.9: El vector $\mathbf{r}_{2i}$ sobre la circumferència de centre M i radi μ^α en el pla $x = \mu - 1$ representa una posició inicial de sortida per a òrbites espacials p - q ressonants i periòdiques amb $\theta = \pi/2$ i $\Delta\phi = 0$. La velocitat inicial ve donada pel vector $\dot{\mathbf{r}}_i$ que és vertical al pla xy .

2. Cas en què $\theta = \pi/2$ o $\theta = 3\pi/2$ i $\Delta\phi$ està indeterminat. D'una banda, la posició inicial tindrà les mateixes coordenades que en el cas anterior. Per altra banda, aquest cas només es pot donar si $\psi_0 = 0$ o $\psi_0 = \pi$. Així doncs, les coordenades de la velocitat inicial es poden escriure, fins ordre $\mu^{2\alpha}$, com

$$\dot{x} = -\sigma v \cos \psi_0 \Delta\phi \mu^\alpha, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = \sigma v.$$

3. Cas en què $\theta = a\pi$ per a $a \in [0, 2] \setminus \{1/2, 3/2\}$. Llavors sabem que $\psi_0 = \theta + \pi/2 + k\pi$ per a $k = 0, 1$ i que $\Delta\phi = \sigma(-1)^k \frac{\cos \varphi}{\sqrt{c}}$. Pel que fa a la posició, com que $\theta \neq \pi/2, 3\pi/2$, $\mathbf{r}_{2i}$ no pot estar sobre el cercle intersecció de la bola $B(M, \mu^\alpha)$ i el pla $x = \mu - 1$ (casos anteriors). Això és, les seves coordenades són

$$x = \mu - 1 + \mu^\alpha \cos \varphi \cos \theta, \quad y = \mu^\alpha \cos \varphi \sin \theta, \quad z = \mu^\alpha \sin \varphi,$$

amb $x \neq \mu - 1$. Pel que fa a les coordenades del vector velocitat, fixats uns valors de θ i φ tindrem que, fins ordre $\mu^{2\alpha}$, seran de la forma

$$\dot{x} = -\sigma v \frac{\sin \theta \cos \varphi}{\sqrt{c}} \mu^\alpha, \quad \dot{y} = -\sigma v \frac{\cos \theta \cos \varphi}{\sqrt{c}} \mu^\alpha, \quad \dot{z} = \sigma v,$$

essent v el mòdul de la velocitat donat per la integral de Jacobi. Observem que, malgrat que $\Delta\psi$ pot pendre qualsevol valor, aquest no intervé en l'expressió de les coordenades inicials en els primers termes dels seus desenvolupaments.

A continuació exposem algunes de les òrbites trobades amb les condicions inicials explicades abans. Els gràfics que hi ha representats són les posicions del tercer cos obtingudes a l'integrar les equacions del problema restringit fins temps $t = 2\pi q + \varepsilon\mu^\alpha$.

Els exemples inclosos són tots per a òrbites amb $\Delta\phi = 0$ i $\theta = \pi/2$ (primer cas exposat abans). Això és, són òrbites tals que el vector posició inicial es troba sempre en el pla $x = \mu - 1$. A les figures 5.10, 5.11 i 5.12 hi ha representades algunes d'aquestes òrbites. Per a òrbites del tercer tipus ($\Delta\phi$ en general no nul) obtenim òrbites espacials similars (en forma) a les exposades, pel que no n'hem inclòs cap gràfic.

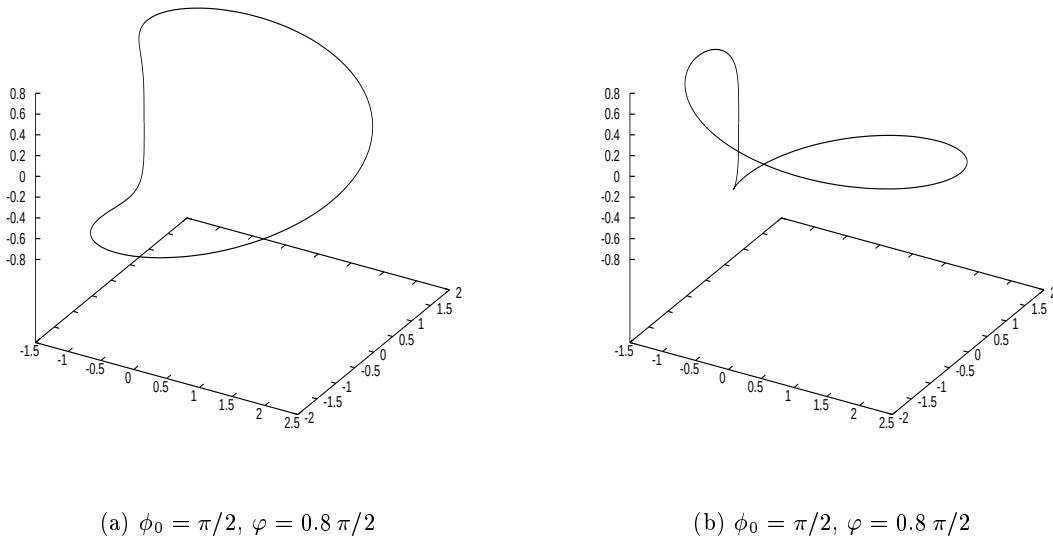


Figura 5.10: Exemples d'òrbites 1-2 ressonants per a $\theta = \pi/2$, $\Delta\phi = 0$ i els valors de ϕ_0 i φ assenyalats en cada cas

Fixats $\theta = \pi/2$ i $\phi_0 = \pi/2$ hem fet variar φ a l'interval $(0, \pi/2)$ de manera que obtenim una família d'òrbites. Per a cada una d'elles hem calculat la solució exterior aproximada (òrbite el·líptica) i la solució interior aproximada (òrbita hiperbòlica) i la diferència entre les seves posicions i velocitats en l'instant final. A la figura 5.13 hi ha representades aquestes

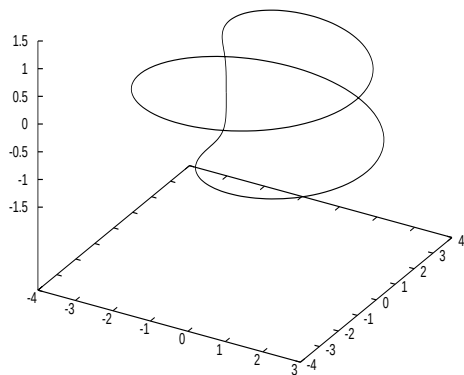
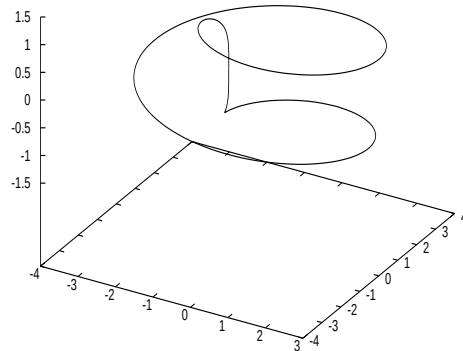
(a) $\phi_0 = \pi/2$, $\varphi = 0.9 \pi/2$ (b) $\phi_0 = \pi/2$, $\varphi = 0.9 \pi/2$

Figura 5.11: Exemples d'òrbites 1-3 ressonants per a $\theta = \pi/2$, $\Delta\phi = 0$ i els valors de ϕ_0 i φ assenyalats en cada cas

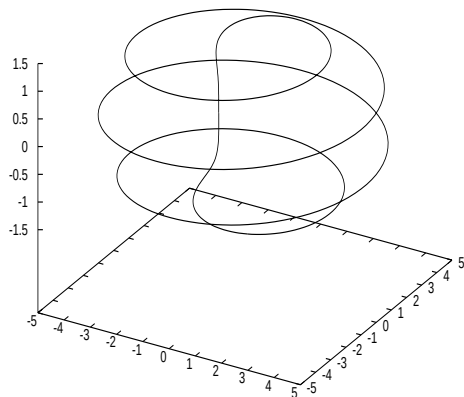
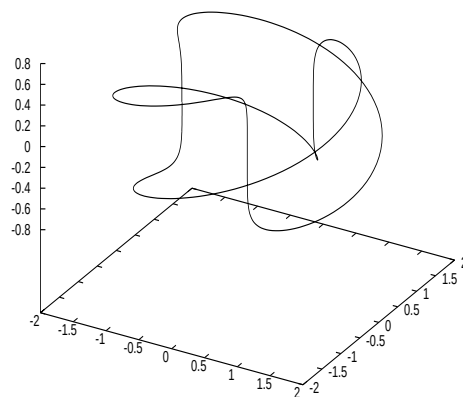
(a) $p = 1$, $q = 5$ (b) $p = 3$, $q = 5$

Figura 5.12: Exemples d'òrbites 1-5 i 3-5 ressonants per a $\phi_0 = \pi/2$, $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0.9 \pi/2$ i $\Delta\phi = 0$

diferències en variar φ per a òrbites 1-2 ressonants. Observem que la diferència entre velocitats augmenta a mesura que φ s'acosta a $\pi/2$. Recordem que $\cos a_0 = \sin \varphi$ i, per tant, quan φ s'acosta a $\pi/2$, $\cos a_0$ s'acosta a 1.

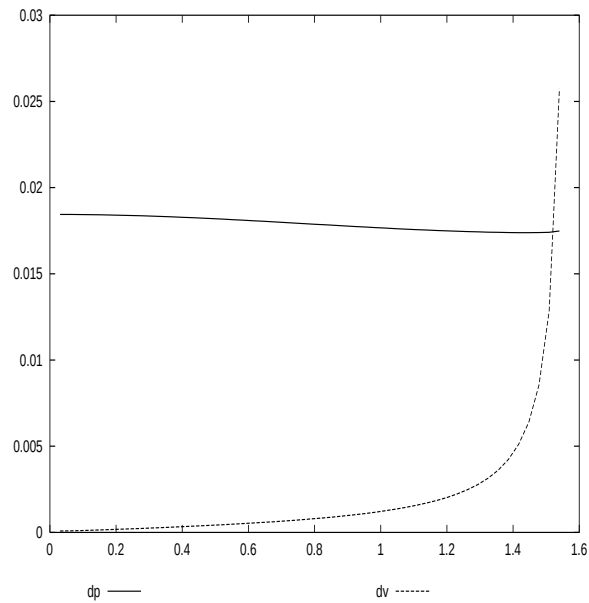


Figura 5.13: Distància entre les posicions (dp) i velocitats (dv) de retorn a la bola $B(M, \mu^\alpha)$ entre les òrbites aproximades el·líptica i hiperbòlica per a òrbites espacials 1-2 ressonants amb $\phi_0 = \pi/2$, $\theta = \pi/2$ i $\Delta\phi = 0$. En l'eix horitzontal hi ha representada la variable φ que varia de 0 a $\pi/2$.

