

Capítol 6

Exploracions Numèriques

Les exploracions numèriques que s'exposen en aquest capítol s'han dut a terme per al valor del paràmetre de masses

$$\mu = 0.3040187920674 \times 10^{-5},$$

que és el corresponent al sistema Sol-(Terra+LLuna) d'acord amb els valors de les efemèrides de JPL. Inicialment reproduïm algunes famílies d'òrbites de segona espècie simètriques, periòdiques i planes (SPSSS) i calculem, per a cada òrbita, el seu paràmetre d'estabilitat vertical. Un cop identificades quines són les òrbites crítiques, busquem les famílies d'òrbites periòdiques espaials bifurcades.

6.1 Estabilitat vertical

Considerant la importància que tenen les òrbites periòdiques en l'estudi del problema restringit de tres cossos, és natural l'estudi de la seva estabilitat. En el problema restringit pla és habitual separar l'estudi de l'estabilitat en dos: en el pla del moviment dels primaris (horitzontal) i perpendicularment a ell (vertical).

En l'estudi de l'estabilitat horitzontal esmentem els treballs de Hénon [10] i Guyot i Hénon [14]. Pel que fa a l'estabilitat vertical, citem el treball de Hénon [12] per al cas de primaris amb masses iguals. Seguint aquest treball, introduïm el que s'anomena paràmetre d'estabilitat vertical.

Fixat un valor de μ , les òrbites periòdiques i simètriques s'agrupen en famílies unipa-

ramètriques, les quals estan representades per corbes característiques en el pla (x_0, C_J) . Donada una família de SPSSS, volem estudiar com hi varia l'estabilitat vertical.

Suposem que tenim una òrbita periòdica amb condicions inicials $(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0)$. Volem estudiar com varien les variables $(z, \dot{z})$ si modifiquem $(z_0, \dot{z}_0)$. Siguin

$$\begin{aligned} z &= g_1(t, z_0, \dot{z}_0), \\ \dot{z} &= g_2(t, z_0, \dot{z}_0), \end{aligned} \tag{6.1}$$

i denotem per $(z_2, \dot{z}_2)$ el seu valor al cap d'un període $2T$. És clar que una òrbita periòdica correspon a un punt fix de l'aplicació

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} z_2 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix}.$$

Si modifiquem les condicions inicials de la forma $(z_0 + \Delta z_0, \dot{z}_0 + \Delta \dot{z}_0)$, l'aplicació ens donarà $(z_2 + \Delta z_2, \dot{z}_2 + \Delta \dot{z}_2)$. Si ens quedem amb una aproximació d'ordre 1, la relació entre les pertorbacions inicials i finals serà

$$\begin{pmatrix} \Delta z_2 \\ \Delta \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_v & b_v \\ c_v & d_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta z_0 \\ \Delta \dot{z}_0 \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

on $a_v = \frac{\partial z}{\partial z_0}(2T, z_0, \dot{z}_0)$, $b_v = \frac{\partial z}{\partial \dot{z}_0}(2T, z_0, \dot{z}_0)$, $c_v = \frac{\partial \dot{z}}{\partial z_0}(2T, z_0, \dot{z}_0)$, i $d_v = \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{z}_0}(2T, z_0, \dot{z}_0)$. Per estudiar l'estabilitat del sistema caldrà buscar els valors propis de la matriu anterior, que són les solucions de l'equació

$$\begin{vmatrix} a_v - \lambda & b_v \\ c_v & d_v - \lambda \end{vmatrix} = a_v d_v - b_v c_v - (a_v + d_v)\lambda + \lambda^2 = 0. \tag{6.3}$$

Situem-nos en el cas d'òrbites planes, periòdiques i simètriques respecte de l'eix sinòdic ox . En aquest cas es pot comprovar que $a_v = d_v$ i per tant els valors propis de l'equació (6.3) seran

$$\lambda = \frac{2a_v \pm \sqrt{4a_v^2 - 4}}{2} = a_v \pm \sqrt{a_v^2 - 1}.$$

Si $|a_v| \geq 1$ el sistema serà inestable, i, per tant, la condició d'estabilitat serà $|a_v| < 1$ o, equivalentment,

$$a_v^2 - 1 < 0.$$

De a_v en diem el paràmetre d'estabilitat vertical. Per la simetria i periodicitat de les òrbites, a_v es pot escriure en termes de les derivades de z i $\dot{z}$ respecte de les condicions inicials avaluades en mig període. Denotem per

$$A_v = \frac{\partial z}{\partial z_0}(T, z_0, \dot{z}_0), \quad B_v = \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{z}_0}(T, z_0, \dot{z}_0), \quad C_v = \frac{\partial z}{\partial \dot{z}_0}(T, z_0, \dot{z}_0) \text{ i } D_v = \frac{\partial \dot{z}}{\partial z_0}(T, z_0, \dot{z}_0),$$

essent T el semiperíode de l'òrbita. Llavors se sap que $a_v^2 - 1 = 4A_vB_vC_vD_v$ i per tant una SPSSS plana serà estable si

$$A_vB_vC_vD_v < 0. \quad (6.4)$$

Donada una família de SPSSS planes, a_v variarà al llarg d'ella, de manera que tindrem zones d'òrbites estables i d'òrbites inestables. El pas d'una a l'altra es produirà quan $|a_v| = 1$ o, equivalentment, quan un dels paràmetres A_v , B_v , C_v o D_v es faci zero. Hénon (a [12]) anomena òrbites crítiques verticals a aquelles òrbites planes amb $a_v = \pm 1$. En aquests punts s'espera que la família es trencarà en noves branques formades per òrbites que viuen a $\mathbb{R}^3$, això és, fora del pla del moviment dels primaris. En concret Hénon diu:

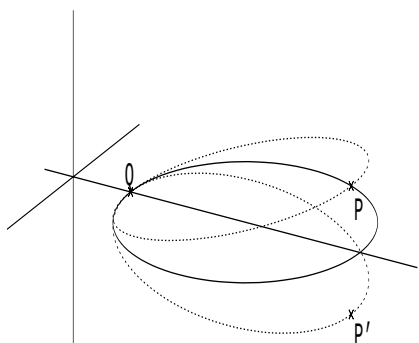
...sembla que, en general, una òrbita vertical crítica representa la intersecció de la família d'òrbites periòdiques planes que estem considerant amb una família d'òrbites periòdiques 3-dimensionals.

Així doncs, a l'hora de buscar aquestes famílies espacials hem de tenir en compte que podem trobar quatre tipus d'òrbites diferents segons sigui el paràmetre que s'anul·la a l'òrbita de bifurcació. Tindrem els següents casos (vegeu [12]):

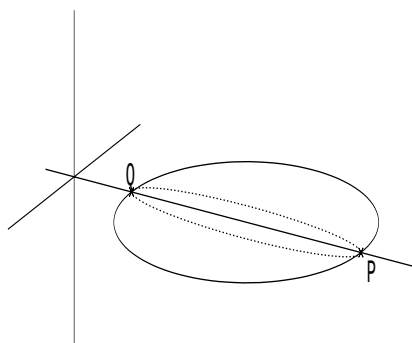
1. Cas $A_v = 0$. Denotarem per A_v la família d'òrbites verticals generades a partir d'una òrbita crítica amb $A_v = 0$, i les condicions inicials seran de la forma $(x_0, 0, z_0, 0, \dot{y}_0, 0)$. Una idea aproximada de la forma de l'òrbita la tenim en la representació superior esquerra de la figura 6.1.
2. Cas $B_v = 0$. Les condicions inicials de les òrbites periòdiques verticals d'aquest tipus són de la forma $(x_0, 0, 0, 0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$. La representació superior dreta de la figura 6.1 ens pot donar una idea de la seva forma. Denotarem per B_v aquesta família d'òrbites verticals.
3. Cas $C_v = 0$. En aquest cas les condicions inicials seran de la forma $(x_0, 0, z_0, 0, \dot{y}_0, 0)$ i

s'obtenen òrbites periòdiques de forma aproximada a la que podeu veure en la tercera representació de la figura 6.1. De la família a la qual pertanyen en direm C_v .

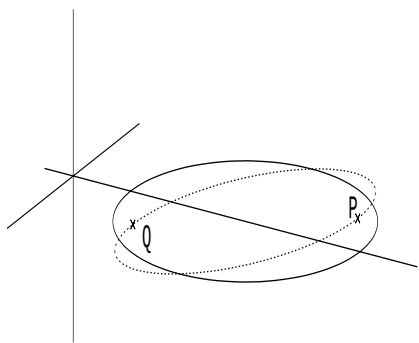
4. Cas $D_v = 0$. Les òrbites periòdiques de la família, que denotarem per D_v , tenen condicions inicials de la forma $(x_0, 0, 0, 0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$. Vegeu la representació inferior dreta de la figura 6.1.



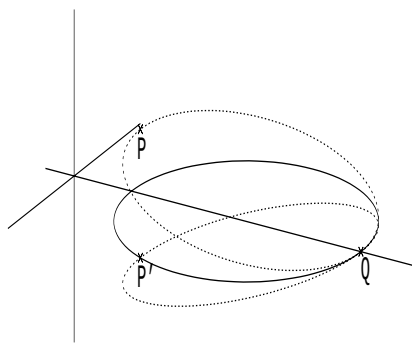
(a) $A_v = 0$



(b) $B_v = 0$



(c) $C_v = 0$



(d) $D_v = 0$

Figura 6.1: Representació qualitativa de les òrbites periòdiques espacials no planes (línies de punts) originades a partir de les òrbites crítiques planes

Tal i com diu Hénon a [12], el raonament a partir del qual es fa aquesta classificació només és vàlid per a l'aproximació lineal. Tot i això, sembla suficient per justificar la recerca de famílies que parteixen d'òrbites planes de segona espècie crítiques. Les exploracions numèriques que hem dut a terme es troben exposades més endavant.

6.2 Paràmetre d'estabilitat vertical per SPSS planes

Per tal de trobar òrbites periòdiques espacials, partirem d'una SPSS plana amb paràmetre d'estabilitat vertical $|a_v| = 1$. Per això ens cal veure com varia aquest paràmetre al llarg d'una família d'òrbites periòdiques de segona espècie. Hem reproduït part de les famílies que estan generades per òrbites de xocs consecutius (OCC) pertanyents a les famílies de Hénon A_0 , A_1 , B_1 , B_2 i C_{12} (vegeu [11]). Aquestes són òrbites descrites pel tercer cos P i que intersequen la trajectòria de M dues vegades: en temps $-\tau$ i τ . Hénon les classifica en diferents famílies (vegeu la figura 6.2), que representa en el pla $(\tau/\pi, \eta/\pi)$ (on η és l'anomalia excèntrica del tercer cos en el moment del xoc).

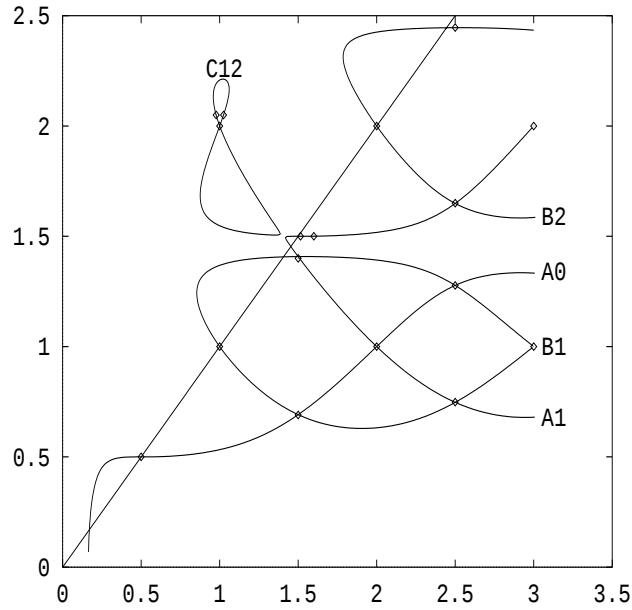


Figura 6.2: Corbes característiques en el pla $(\tau/\pi, \eta/\pi)$ de les òrbites de xocs consecutius generadores d'òrbites de segona espècie. Els punts marcats corresponen a òrbites amb paràmetre d'estabilitat 1 o -1

Seguint el treball i les notacions de Gómez i Ollé [4], hem continuat aquestes famílies

per a $\mu > 0$, i hem obtingut A_0^μ , A_1^μ , B_1^μ , B_2^μ i C_{12}^μ generades per OCC amb $\tau/\pi \in [0, 3]$ i $\eta/\pi \in [0, 2.5]$. Per tal de trobar-les hem pres les condicions inicials d'una òrbita a xocs consecutius. Aquestes són de la forma $(x_0, 0, 0, \dot{y}_0)$, així que sortim d'un tall perpendicular a l'eix ox sinòdic. Com que estem treballant amb una μ propera a zero, aquesta òrbita passarà molt a prop de M , però el tall amb l'eix no serà perpendicular. Amb un mètode corrector es modifiquen les condicions inicials per tal que el tall a prop del primari petit sigui perpendicular. I amb un mètode de continuació es prediuen les condicions inicials de la següent SPSSS. Per a totes les òrbites hem calculat el valor dels paràmetres A_v , B_v , C_v i D_v , de manera que, per a cada família de SPSSS, tenim 4 corbes. A les figures 6.3 i 6.4 es troben representades, per a les famílies A_0^μ i C_{12}^μ respectivament, les quatre corbes característiques respecte de T/π (on T és el semiperíode de l'òrbita).

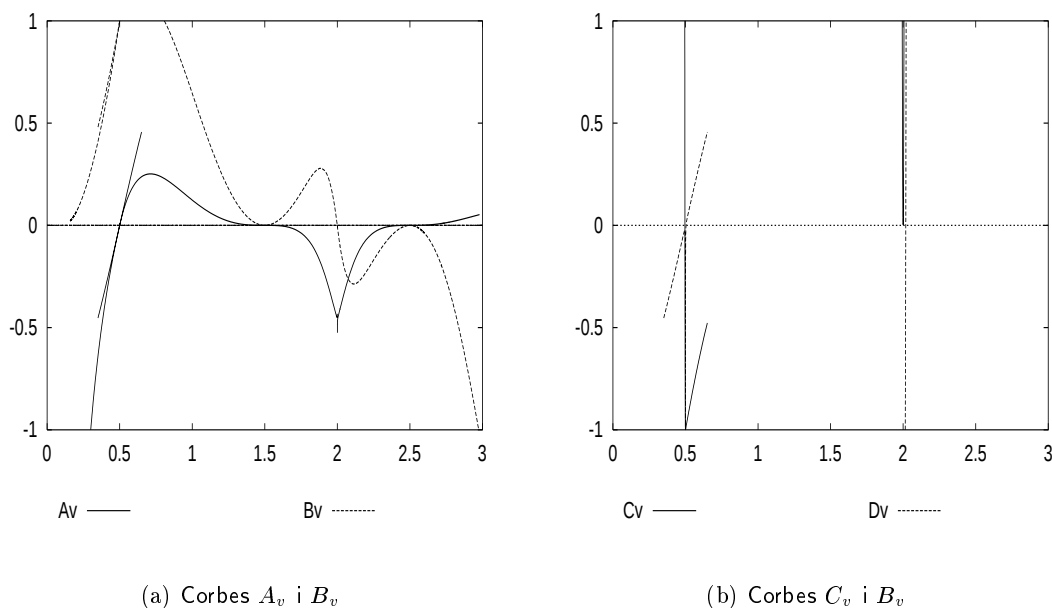


Figura 6.3: Corbes A_v , B_v , C_v i D_v per a la família A_0^μ . A l'eix horitzontal hi ha representada la variable T/π .

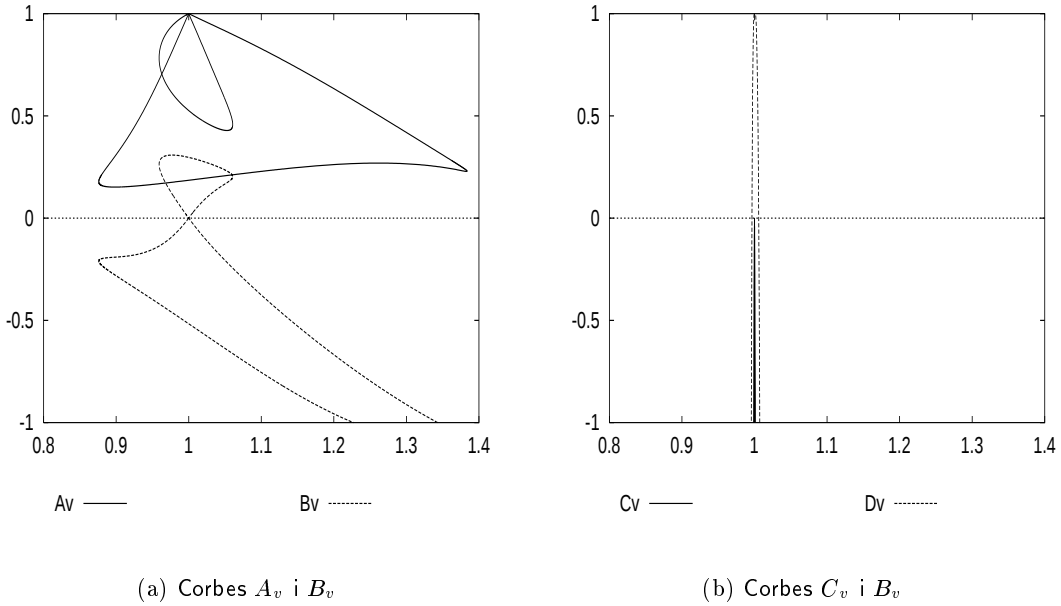


Figura 6.4: Corbes A_v , B_v , C_v i D_v per a la família C_{12}^μ . A l'eix horitzontal hi ha representada la variable T/π .

6.3 Òrbites periòdiques espacials

A la secció 6.1 hem vist que podem obtenir diferents tipus d'òrbites periòdiques espacials a partir d'una SPSSS plana crítica segons quin dels paràmetres

$$A_v = \frac{\partial z}{\partial z_0}(T), \quad B_v = \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{z}_0}(T), \quad C_v = \frac{\partial \dot{z}}{\partial z_0}(T), \quad D_v = \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{z}_0}(T),$$

s'anul·la (T és el semiperíode de l'òrbita plana). Les òrbites espacials generades tenen unes certes simetries que usarem per trobar-les (vegeu les representacions de la figura 6.1). Tindrem

- en el cas $A_v = 0$ i $D_v = 0$, simetria respecte del pla xy .
- en el cas $B_v = 0$, simetria respecte de l'eix $z = y = 0$.
- en el cas $C_v = 0$, simetria respecte del pla xz .

Utilitzant aquestes simetries hem buscat òrbites a l'espai provinents d'òrbites planes crítiques de les famílies A_0^μ i C_{12}^μ . En els següents apartats exposarem els resultats numèrics trobats.

(0.9997936609,-2.0005652880)	$A_v = 0$
(0.9885733735,-2.0001310691)	$C_v = 0$
(1.0102277444,-2.0052238813)	$D_v = 0$

Taula 6.1: Coordenades $(x_0, \dot{y}_0)$ inicials de l'òrbita crítica plana i paràmetre que s'anul·la

6.3.1 Òrbites espacials provinents d'òrbites de la família A_0^μ

En el cas de la família A_0^μ ens hem centrat en les òrbites amb semiperíode al voltant de $\pi/2$, on els paràmetres que s'anul·len són A_v , C_v i D_v (vegeu la figura 6.3 i, en detall, la figura 6.5). A la taula 6.1 hi ha les condicions inicials $(x_0, \dot{y}_0)$ de l'òrbita periòdica i simètrica plana que hem pres com a llavor inicial per buscar òrbites espacials, així com el paràmetre que s'anul·la.

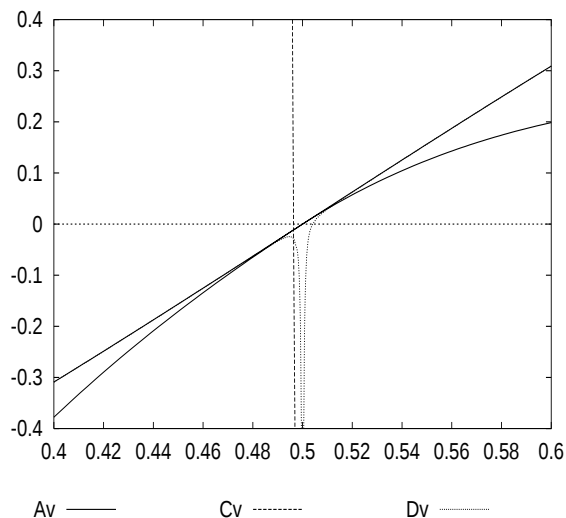


Figura 6.5: Paràmetres A_v , C_v , D_v de la família A_0^μ per a òrbites amb semiperíode proper a $\pi/2$

Denotarem per $A_0^\mu - A_v$, $A_0^\mu - C_v$ i $A_0^\mu - D_v$ les famílies d'òrbites periòdiques que trobem a partir de cada una de les òrbites planes assenyalades a la taula 6.1.

Família $A_0^\mu - A_v$

Tal com ja hem dit, les condicions inicials d'una òrbita periòdica d'una família A_v són de la forma $(x_0, 0, z_0, 0, \dot{y}_0, 0)$. Hem començat amb una z_0 propera a 0 i hem continuat la família

per a valors positius i negatius de z_0 . A la figura 6.6 podem veure dos òrbites d'aquesta família i a la figura 6.7 n'hi ha dibuixada una representació més àmplia.

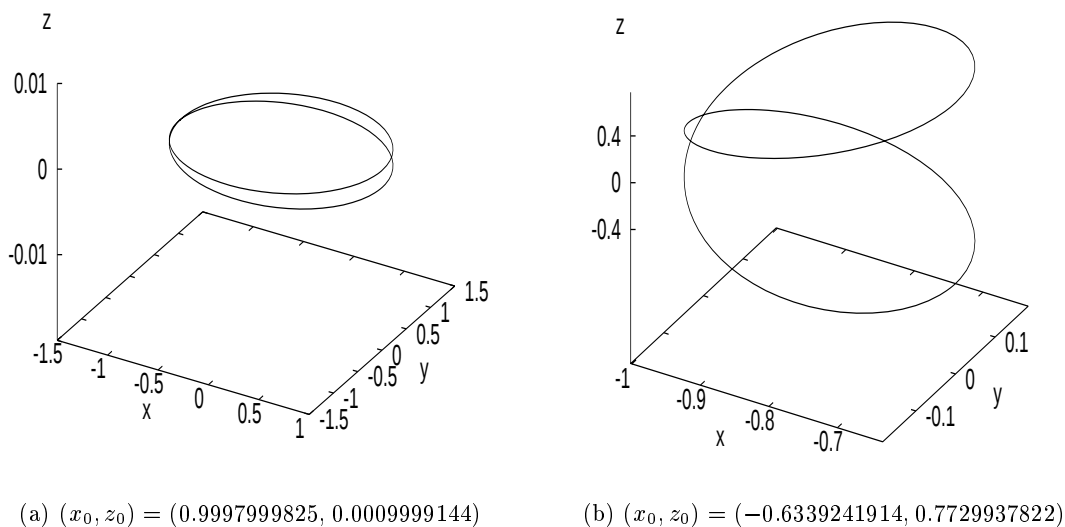


Figura 6.6: Exemples de la família $A_0^\mu - A_v$

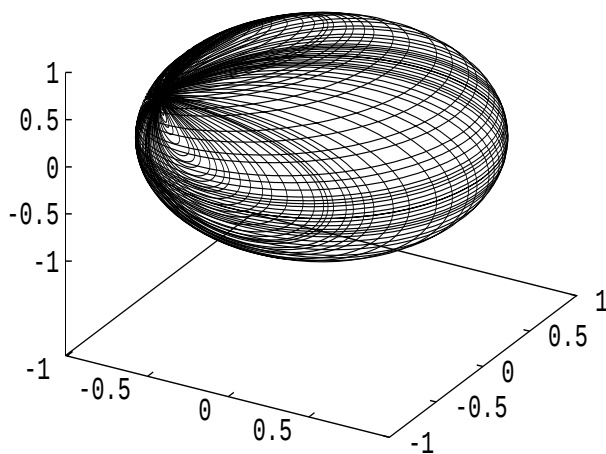
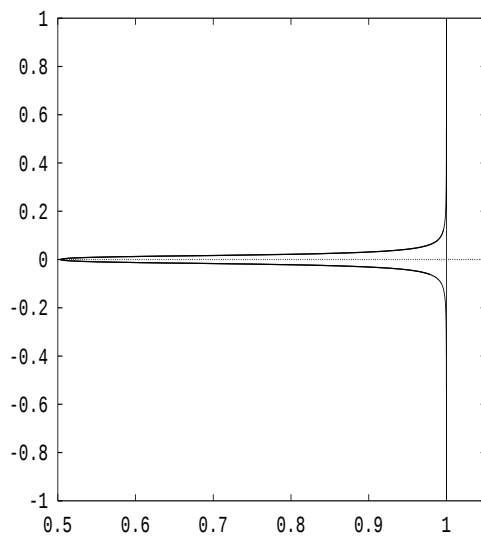
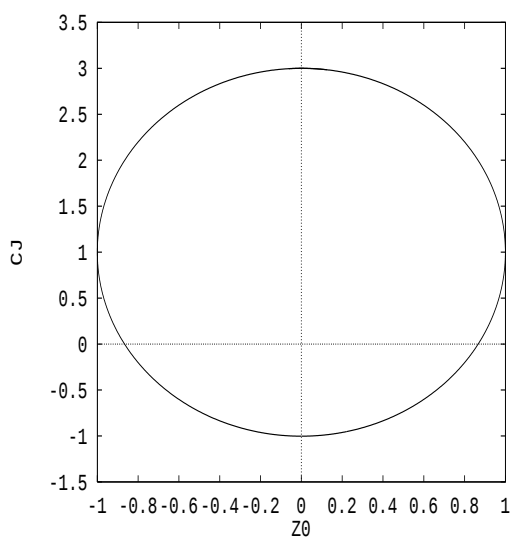
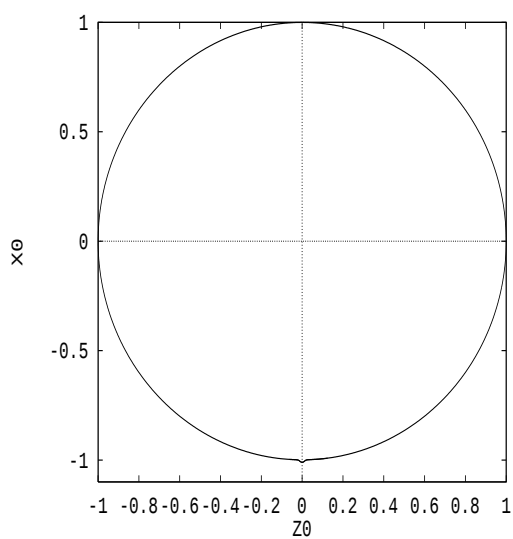


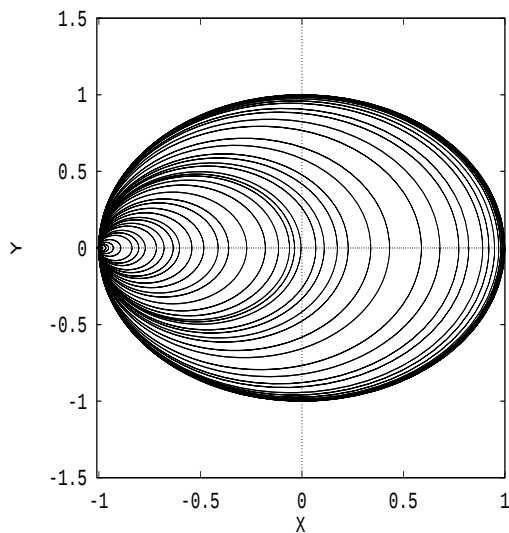
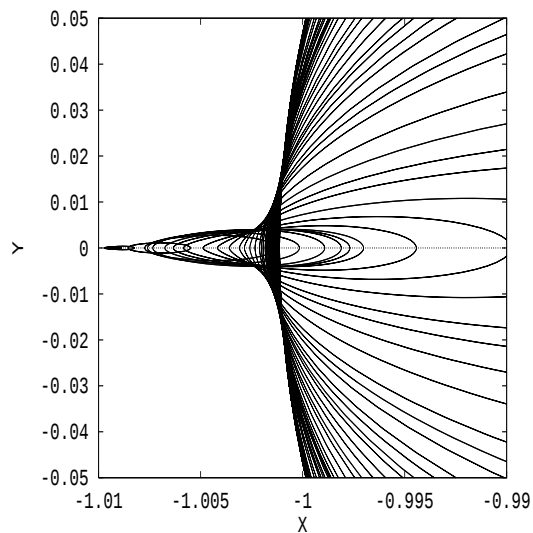
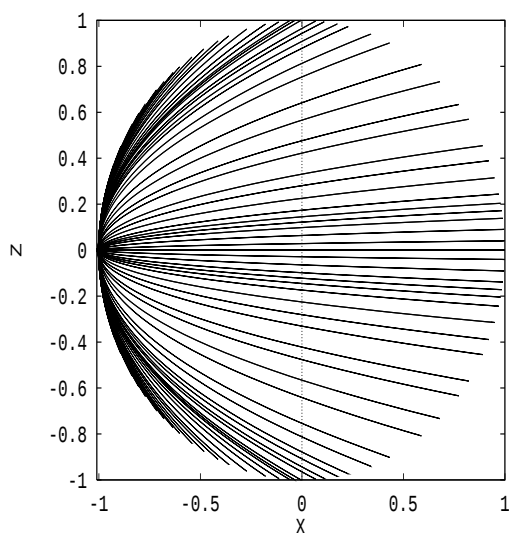
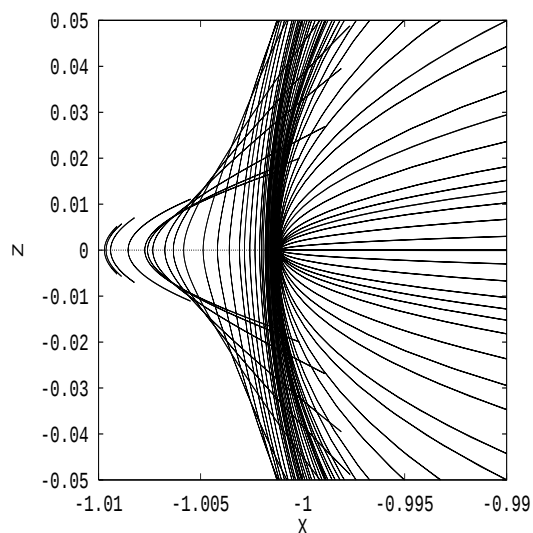
Figura 6.7: Òrbites de la família $A_0^\mu - A_v$

A la figura 6.8 es troben representades algunes corbes característiques de la família: semiperíode (mòdul π) versus z_0 , z_0 versus C_J i z_0 versus x_0 (on $(x_0, 0, z_0)$ és la posició inicial).

Observem que z_0 pren valors entre $[-1,1]$ mentre que el semiperíode (T) de les òrbites oscil·la entre $[\pi/2, \pi]$. Observem que, per a òrbites properes a l'òrbita plana de semiperíode $\pi/2$, el semiperíode passa a prendre valors propers a π . Després el semiperíode va disminuint a mesura que disminueix la mida de les òrbites que trobem (x_0 tendeix cap a -1).

Finalment hem projectat sobre els plans xy i xz les òrbites trobades. Les representacions es poden veure a la figura 6.9. Observem que es manté la simetria respecte de l'eix ox .

(a) T/π versus z_0 (b) z_0 versus C_J (c) z_0 versus x_0 Figura 6.8: Família $A_0^\mu - A_v$. Corbes característiques.

(a) Projectió sobre el pla xy (b) Projectió sobre el pla xy . Detall.(c) Projectió sobre el pla xz (d) Projectió sobre el pla xz . Detall.Figura 6.9: Projections de les òrbites espacials de la família $A_0^\mu - A_v$ sobre els plans xy i xz

Família $A_0^\mu - C_v$

Com en la família $A_0^\mu - A_v$, les condicions inicials d'una òrbita periòdica d'una família C_v també són de la forma $(x_0, 0, z_0, 0, \dot{y}_0, 0)$, però a diferència de la família anterior, no són simètriques respecte el pla $z = 0$. De nou el rang de variació de z_0 és de $[-1, 1]$ com es pot observar en els gràfics de la figura 6.10 on hi ha representades algunes corbes característiques de la família.

També aquí hem començat amb una z_0 propera a 0 i hem continuat la família per a valors positius i negatius de z_0 . A la figura 6.11 podem veure uns exemples d'òrbites d'aquesta família només per a valors positius de z_0 . Per a valors negatius d'aquesta coordenada s'obtenen les òrbites simètriques, respecte del pla xy , de les obtingudes per a valors $z_0 > 0$.

Família $A_0^\mu - D_v$

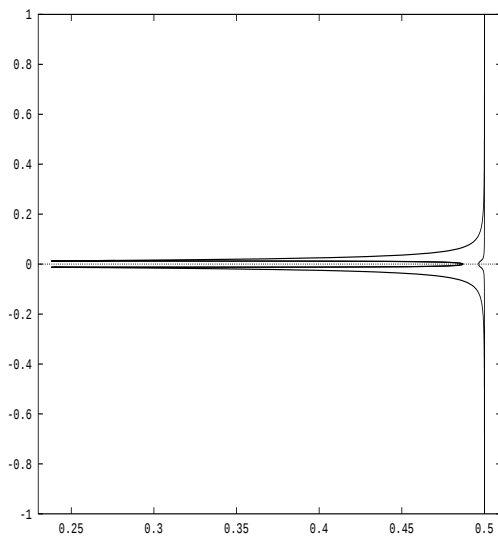
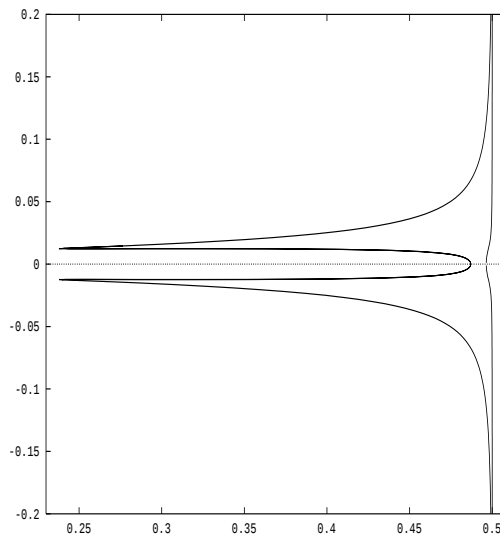
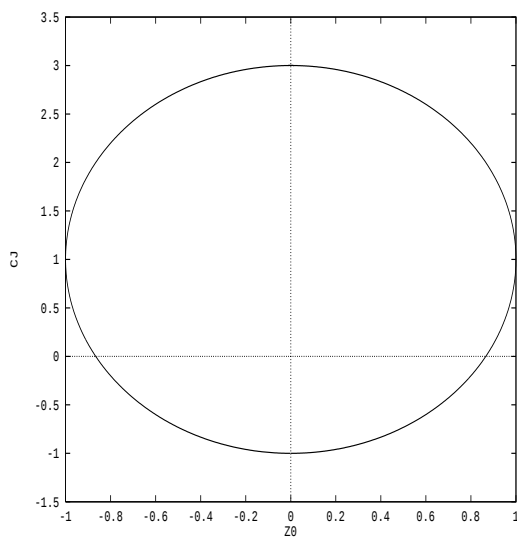
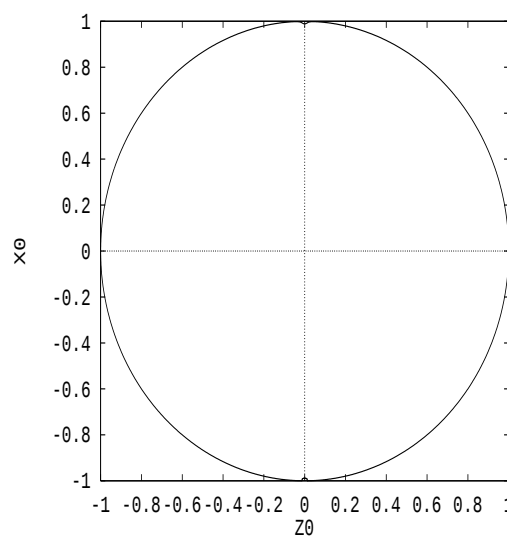
En aquest cas busquem òrbites amb condicions inicials de la forma $(x_0, 0, 0, 0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ a partir de l'òrbita plana trobada amb $D_v = 0$ (vegeu la taula 6.1). Comencem amb valors de $\dot{z}_0$ propers a 0 i continuem la família per a valors positius i negatius d'aquesta coordenada. En aquest cas és $\dot{z}_0$ qui varia entre $[-1, 1]$. Uns exemples de les òrbites que s'obtenen es pot veure a la figura 6.12.

6.3.2 Òrbites espacials provinents d'òrbites de la família C_{12}^μ

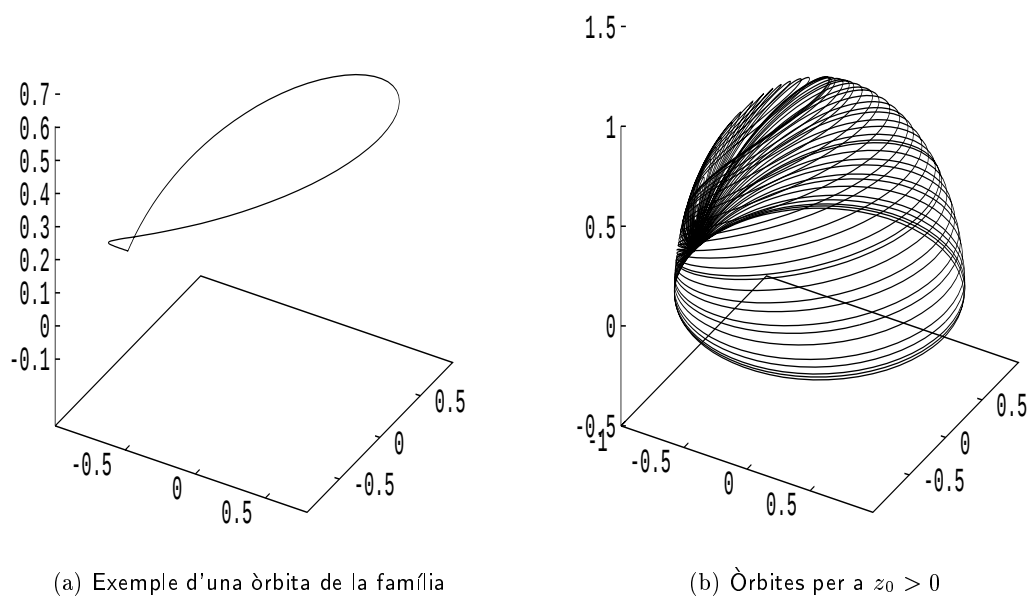
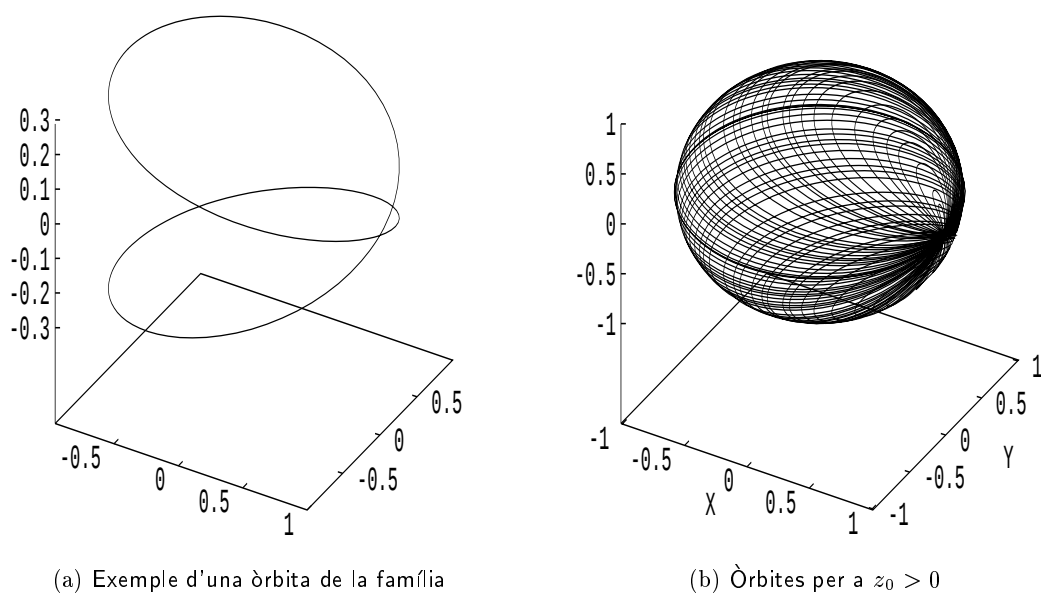
Hem buscat òrbites a l'espai provinents d'òrbites planes de la família C_{12}^μ amb paràmetre d'estabilitat ± 1 i amb semiperíode al voltant de π . A la figura 6.4 es veu el comportament de B_v , C_v i D_v al voltant de les òrbites planes amb semiperíode proper a π (en l'eix horitzontal està representada la variable T/π . A_v no s'anul·la en aquest entorn.

Hem pres l'òrbita plana de condicions inicials $(x_0, \dot{y}_0) = (0.99991455543, -1.63484969906)$, que és propera a una òrbita amb $D_v = 0$, per trobar òrbites periòdiques i simètriques no planes amb condicions inicials $(x_0, 0, 0, 0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$. Seguint la notació emprada fins ara, la família que trobem serà $C_{12}^\mu - D_v$.

Al gràfic de la figura 6.13 hi ha representada la corba característica $(T/\pi, z_0)$ per a aquesta família. Anàlogament al que passava per a les famílies de tipus A_v , el període de les òrbites espacials properes a l'òrbita plana s'ha doblat.

(a) T/π versus z_0 (b) T/π versus z_0 . Ampliació.(c) z_0 versus C_J (d) z_0 versus x_0 Figura 6.10: Família $A_0^\mu - C_v$. Corbes característiques.

Un exemple de les òrbites que es troben es pot veure a la figura 6.14. Les seves projeccions en els plans coordenats es poden veure a la figura 6.15.

Figura 6.11: Exemples de la família $A_0^u - C_v$ Figura 6.12: Exemples de la família $A_0^u - D_v$

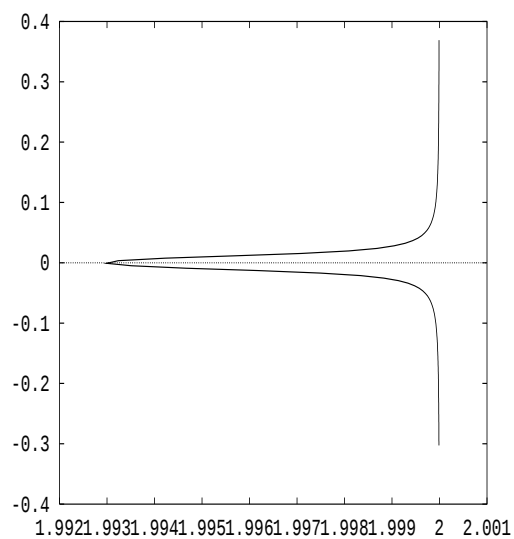


Figura 6.13: Família $C_{12}^{\mu} - D_v$. T/π versus z_0 .

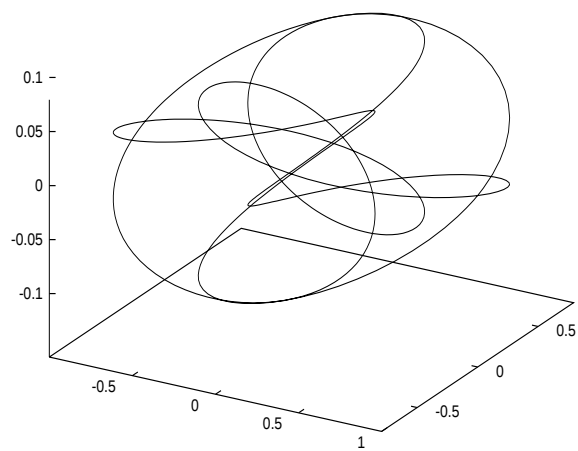


Figura 6.14: Un exemple d'una òrbita de la família $C_{12}^{\mu} - D_v$

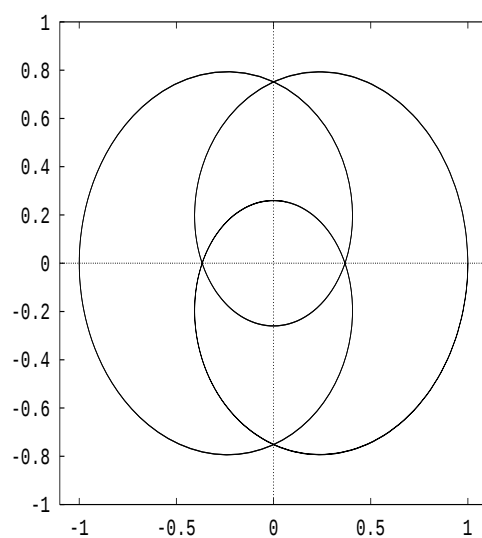
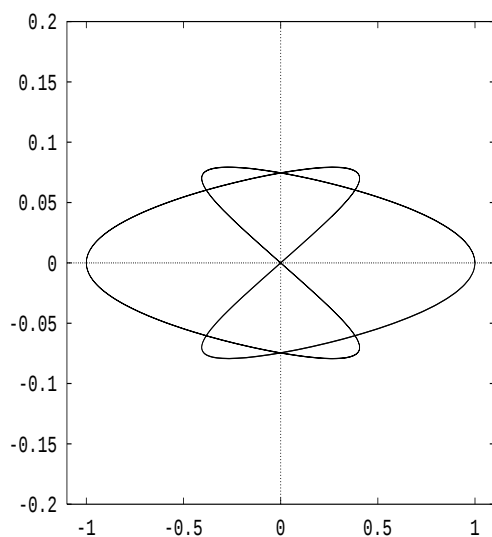
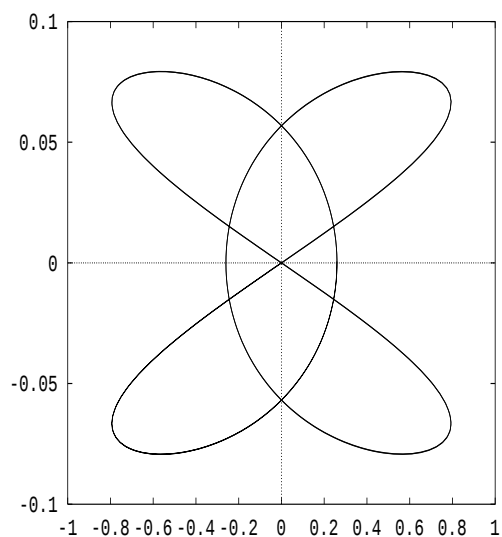
(a) Projecció sobre el pla xy (b) Projecció sobre el pla xz (c) Projecció sobre el pla yz

Figura 6.15: Projeccions sobre els plans coordenats de l'òrbita de la figura 6.14

Bibliografia

- [1] Broucke, R.A. *Periodic Orbits in the Restricted Three Body Problem with Earth-Moon Masses*, N.A.S.A-JPL Tech. Report 32-1168, 1968.
- [2] Font,Q. Nunes,A. Simó,C. Successive Quasi-Collisions in the Planar Circular RTBP, preprint.
- [3] Gómez,G., Ollé,M. Second-Species Solutions in the Circular and Elliptic Restricted Three-Body Problem, I. Existence and Asymptotic Aproximation., *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **52** (1991), 107-146.
- [4] Gómez,G., Ollé,M. Second-Species Solutions in the Circular and Elliptic Restricted Three-Body Problem, II. Numerical Exploration., *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **52** (1991), 147-166.
- [5] Guillaume,P. *Solutions periodiques symetriques du probleme restreint des trois corps pour de faibles valeurs du rapport des masses*, Tesi Doctoral. Université de Liège, Année Académique 1970-1971.
- [6] Guillaume,P. Periodic Symmetric Solutions of the Restricted Problem, *Celestial Mechanics*, **8** (1973), 199-206.
- [7] Guillaume,P. Linear Analysis of one Type of Second Species Solutions, *Celestial Mechanics*, **11** (1975), 213-254.
- [8] Guillaume,P. The Restricted Problem: an Extension of Breakwell-Perko's Matching Theory, *Celestial Mechanics*, **11** (1975), 449-467.

- [9] Hénon,M. Exploration numérique du probleme restreint, I. Masses égales, orbites périodiques., *Annales d'Astrophysique*, **28** (1965), 499-511.
- [10] Hénon,M. Exploration numérique du probleme restreint, II. Masses égales, stabilité des orbites périodiques., *Annales d'Astrophysique*, **28** (1965), 992-1007.
- [11] Hénon,M. Sur les orbites interplanétaires qui recontrent deux fois la terre, *Bulletin Astronomique*. Série 3. Tome III. Fascicule 3 (1968), 377-402.
- [12] Hénon,M. Vertical stability of Periodics Orbits in the Restrictred Problem, I. Equal masses. *Astronomy and Astrophysic*, **28** (1973), 415-426.
- [13] Hénon,M. *Generating Families in the Restricted Three-Body Problem*, Lecture Notes in Physics. New Series m: Monographs. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.
- [14] Hénon,M., Guyot,M. "Stability of Pperiodic Orbits in the Restricted Problem2, *Periodic orbits, stability and resonances G.E.O. Giacaglia*, (1970), 349-374.
- [15] Henrard,J. On Poincaré's Second Species Solutions, *Celestial Mechanics*, **21** (1980), 83-97.
- [16] Howell,K.C. Consecutive Collision Orbits in the Limiting Case $\mu = 0$ of the Elliptic Restricted Problem, *Celestial Mechanics*, **40** (1987), 393-407.
- [17] Howell,K.C., Marsh,S.M. A General Timing Condition for Consecutive Collision Orbits in the Limiting Case $\mu = 0$ of the Elliptic Restricted Problem, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **52** (1991), 167-194.
- [18] Ollé,M. *Solucions periòdiques de segona espècie en problema restringit de tres cossos*, Tesi Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona, 1989.
- [19] Perko,L.M. Asymptotic Matching in the Restricted Three Body Problem, Tesi Doctoral. Stanford University, 1964.
- [20] Perko,L.M. Periodic Orbits in the Restricted Three-Body Problem: Existence and Asymptotic Approximation, *SIAM J. Appl. Math.*, **27** (1974), 200-237.

- [21] Perko, L.M. Second Species Periodic Solutions with an $O(\mu)$ Near-Moon Passage, *Celestial Mechanics*, **14** (1976), 395-427.
- [22] Perko, L.M. Second Species Solutions with an $O(\mu^\nu)$, $\frac{1}{3} < \nu < 1$, Near-Moon Passage, *Celestial Mechanics*, **16** (1977), 275-290.
- [23] Perko, L.M. Periodic Orbits in the Restricted Problem: an Analysis in the Neighborhood of a 1st Species-2nd Species Bifurcation, *SIAM J. Appl. Math.*, **41** (1981), 181-202.
- [24] Perko, L.M. Second Species Solutions with an $O(\mu^\nu)$, $0 < \nu < 1$, Near-Moon Passage, *Celestial Mechanics*, **24** (1981), 155-171.
- [25] Perko, L.M. *Differential Equations and Dynamical Systems*, Text in Applied Mathematics, 7. 2nd Edition. Springer-Verlag New York, Inc. 1996.
- [26] Poincaré, H. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Tome III. Gauthier-Villars, Paris, 1899.
- [27] Szebehely, V. *Theory of Orbits. The Restricted Problem of Three Bodies*. Academic Press, Inc. 1967.
- [28] Stiefel, E.L. - Scheifele, G. *Linear and Regular Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, 1971.