



**Universitat
Autònoma
de Barcelona**

**Problemas de módulos para
una clase de foliaciones holomorfas**

David Marín Pérez

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a los directores de esta tesis, Marcel Nicolau y Frank Loray su atención y dedicación para conmigo.

A Frank he de agradecerle también su hospitalidad durante mis estancias en Lille, tiempo en las que me permitió compartir sus ideas y nuevos enfoques que han sido de incalculable valor en el desarrollo de este trabajo.

A Marcel, cuya gran ayuda matemática ha sido del todo comparable a la paciencia y apoyo incondicional con que me ha obsequiado todo este tiempo y que me ha infundido el ánimo necesario en los momentos de dudas.

A Dominique Cerveau quien ha mostrado un continuado interés por mis progresos y con quien he podido compartir sus ideas a lo largo de dos estancias en Rennes.

Gracias también a los responsables de la red europea TMR "Singularidades de ecuaciones diferenciales y foliaciones" que ha permitido la financiación de éstas y otras estancias de investigación, interesantes todas ellas.

A todos los miembros del tribunal, por su buena disposición a formar parte del mismo y a quienes admiro profundamente por su talla profesional.

A mis compañeros de facultad Antonio Teruel, Jordi López, Marcia Pragana, Jordi Villadelprat, Débora Gil, Gil Solanes y Mònica Manjarín con quienes he compartido la hora de la comida durante estos años y con los que he mantenido apasionantes, y en ocasiones apasionadas, conversaciones. Quiero hacer mención especial de Mònica quien en la última fase de este trabajo me ha dado su apoyo cuando más lo necesitaba.

A Albert Ruiz y Ramon Antoine, entre tantos otros, con quienes he pasado buenos momentos y a quienes no he dudado en consultar en busca de ayuda específica. En este punto no puedo dejar de agradecer a Warren Dicks su disposición y precisión a la hora de reconocer una propiedad precisa sobre grupos libres y encontrar una referencia adecuada.

A Eduardo Gallego, con quien comparto cada día el despacho, al grupo de geometría y al departamento de matemáticas de la U.A.B. en general por el agradable ambiente de trabajo. Quiero hacer extensivo mi agradecimiento a todos aquellos que, aunque no aparezcan explícitamente mencionados, han contribuido de alguna manera a que pudiera concluir este trabajo.

En otro orden de ideas quiero agradecer a mis amigos y amigas de siempre el hecho de

haber estado ahí, interesándose por mi y el desarrollo de mi tesis.

Finalmente, quiero rendir un homenaje a la memoria de mi padre, pues sin su importante apoyo, y aún hoy el de mi madre, no podría haber llegado hasta aquí. A ellos dos va dedicado este trabajo.

Índice

| | |
|--|-----------|
| Introducción | 1 |
| 1 Definiciones y preliminares | 15 |
| 1.1 Foliaciones singulares en superficies complejas | 15 |
| 1.2 Singularidades de foliaciones en dimensión dos | 16 |
| 1.3 Módulos, deformaciones y despliegues | 18 |
| 1.4 Superficies regladas | 21 |
| 2 Un teorema de rigidez en superficies | 27 |
| 2.1 Rigidez de grupos de holonomía | 28 |
| 2.2 Deformaciones y despliegues | 31 |
| 2.3 Foliaciones con alguna fibra invariante | 35 |
| 2.4 Conjugación topológica de foliaciones de Riccati | 40 |
| 3 Algunos ejemplos de foliaciones no rígidas | 47 |
| 3.1 Las superficies de Hirzebruch | 47 |
| 3.2 Las foliaciones lineales | 50 |
| 3.3 Las foliaciones quasi-lineales | 53 |
| 4 Singularidades homogéneas | 59 |
| 4.1 Descripción de la clase | 59 |
| 4.2 La clasificación analítica | 66 |
| 4.3 La clasificación topológica | 68 |
| 4.4 Preliminares topológicos | 74 |
| 4.4.1 Grupos de trenzas | 75 |
| 4.4.2 Isomorfismos geométricos exteriores | 76 |
| 4.4.3 Homeomorfismos de la esfera | 78 |
| 4.5 El espacio de módulos | 80 |
| 4.5.1 Generalidades | 80 |
| 4.5.2 Estudio de las simetrías | 83 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.5.3 | El espacio de módulos de $\omega = \omega_3 + \cdots$ N.A.G. | 89 |
| 5 | Singularidades quasi-homogéneas | 91 |
| 5.1 | Nociones de quasi-homogeneidad | 91 |
| 5.2 | La clasificación analítica | 95 |
| 5.3 | La clasificación topológica | 96 |
| 5.4 | El espacio de módulos | 100 |
| 6 | Foliaciones de Riccati generalizadas | 103 |
| 6.1 | Pull-backs de foliaciones de Riccati | 106 |
| 6.2 | Un ejemplo con holonomía no resoluble | 110 |
| 7 | Estudio de la holonomía generalizada | 113 |
| 7.1 | Foliaciones de variables separadas en $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ | 114 |
| 7.2 | Un teorema de inversión para S -funciones | 117 |
| 7.3 | La familia de foliaciones $\mathcal{F}_{\rho,\lambda}$ | 122 |
| 7.3.1 | Estudio de la función f_ρ | 123 |
| 7.3.2 | Análisis del caso $\lambda = 0$ | 131 |
| 7.3.3 | La involución geométrica | 134 |
| 7.3.4 | El caso $\lambda \neq 0$ | 138 |

Introducción

El presente trabajo tiene su origen en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en el campo complejo. Dada una tal ecuación diferencial holomorfa en \mathbb{C}^n se quiere representar la disposición de las soluciones, las cuales son superficies de Riemann parametrizadas por el tiempo complejo. La globalización de esta idea induce de manera natural la noción de foliación holomorfa por curvas en una variedad compleja de dimensión n . El caso $n = 2$ es de especial interés pues en él la dimensión y la codimensión compleja de las curvas soluciones coinciden. Es en este contexto donde vamos a plantear los problemas de módulos topológico-analíticos que trataremos. El problema consiste básicamente en describir cuántas clases analíticas diferentes contiene el conjunto de foliaciones de una clase topológica fijada. Más precisamente, si \mathcal{F}_0 es una foliación holomorfa en una superficie compleja S , consideremos el conjunto de las foliaciones holomorfas \mathcal{F} en S de manera que exista un homeomorfismo $\phi : S \rightarrow S$ que envíe las hojas de \mathcal{F}_0 sobre las hojas de \mathcal{F} . Es habitual reducirse al caso en que ϕ preserva la orientación de S . Nosotros haremos una hipótesis suplementaria y pediremos que ϕ preserve así mismo las orientaciones de las hojas de \mathcal{F}_0 y \mathcal{F} . Abreviaremos todo ello con la notación $\mathcal{F} \sim_{\text{top}} \mathcal{F}_0$. Por otra parte, \mathcal{F} se dice analíticamente conjugada a \mathcal{F}_0 , notado mediante $\mathcal{F} \sim_{\text{an}} \mathcal{F}_0$, si y sólo si existe un biholomorfismo $\varphi : S \rightarrow S$ de manera que $\varphi^* \mathcal{F} = \mathcal{F}_0$. El espacio de módulos de \mathcal{F}_0 es por definición

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}_0) = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \sim_{\text{top}} \mathcal{F}_0\} / \sim_{\text{an}} .$$

Existe otra aproximación al problema muy utilizada en la literatura por su versatilidad: las deformaciones y los despliegues. Sea P un espacio (analítico) de parámetros y consideremos una familia continua (holomorfa) de foliaciones $t \mapsto \mathcal{F}_t$ en una superficie compleja S , que llamaremos deformación (holomorfa) de \mathcal{F}_0 . Decimos que la deformación \mathcal{F}_t es topológicamente trivial si existe una familia continua de homeomorfismos $\phi_t : S \rightarrow S$ conjugando \mathcal{F}_0 y \mathcal{F}_t de manera que $\phi_0 = \text{id}$. Si la deformación \mathcal{F}_t es holomorfa podemos considerar una foliación holomorfa \mathcal{F} de dimensión uno en el producto $S \times P$ de manera que $\mathcal{F}|_{S \times \{t\}} = \mathcal{F}_t$. Si existe una foliación holomorfa \mathcal{G} de codimensión uno en $S \times P$ con la misma propiedad: $\mathcal{G}|_{S \times \{t\}} = \mathcal{F}_t$, entonces decimos que la deformación \mathcal{F}_t es subyacente al despliegue \mathcal{G} . Si las singularidades de todas las foliaciones \mathcal{F}_t son del mismo tipo analítico hablamos de deformaciones y despliegues equisingulares. Existe una teoría bien fundamen-

tada para abordar el estudio de los espacios de módulos de los despliegues equisingulares de una foliación holomorfa, cf. [GM87, GM89b, Mat91, MN94].

Este trabajo constituye una aportación al estudio de los espacios de módulos topológicos-analíticos de las foliaciones holomorfas en dimensión dos. En él hemos tratado tanto el caso global como el local. En ambos contextos nos hemos interesado por una clase de foliaciones que fueran transversas a una fibración, *fuera de un número finito de fibras invariantes*. Ello nos permite *reducir* el estudio de dichas foliaciones al de su estructura transversa, es decir, al de su representación de holonomía. En el caso global consideramos siempre superficies complejas compactas S que son el espacio total de un fibrado localmente trivial $p : S \rightarrow B$ de base y fibra no singulares. En el caso local nos interesaremos por gérmenes de foliaciones singulares tales que después de efectuar una o más explosiones la foliación inducida sea transversa a la fibración de Hopf (de una componente irreducible) del divisor excepcional, fuera de un número finito de fibras invariantes.

Vamos a exponer los resultados obtenidos comenzando con las hipótesis más generales y acabando con la situación más concreta. El primer resultado nos proporciona una reducción del problema de módulos en **superficies fibradas**: bajo hipótesis genéricas, toda deformación topológicamente trivial es subyacente a un despliegue.

Teorema 1. *Sea S una superficie compleja compacta que es el espacio total de un fibrado localmente trivial de fibra lisa F sobre una curva B . Si \mathcal{F} es una foliación holomorfa en S diferente de la fibración, y que admite una fibra invariante \mathbf{f}_0 con todas sus singularidades hiperbólicas y grupo de holonomía rígido, entonces toda deformación topológicamente trivial de \mathcal{F} es subyacente a un despliegue.*

Dada una foliación holomorfa \mathcal{F} en S y consideramos su fibrado tangente $T_{\mathcal{F}}$, entonces el grupo de cohomología $H^1(S, \mathcal{O}(T_{\mathcal{F}}))$ se interpreta como los **despliegues infinitesimales** de \mathcal{F} . Aplicando algunos resultados de carácter cohomológico de [MN94] y [GM89a] obtenemos a partir del Teorema 1 un primer resultado de rigidez.

Teorema 2. *En las hipótesis del Teorema 1, si además se cumple que $H^1(S, \mathcal{O}(T_{\mathcal{F}})) = 0$ y todas las singularidades de \mathcal{F} son **reducidas** entonces toda deformación topológicamente trivial de \mathcal{F} es analíticamente trivial.*

Para encontrar aplicaciones del Teorema 2 restringiremos nuestra atención a **superficies regladas**, es decir, superficies fibradas de fibra $F = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. La razón por la cual hacemos esto es que existe un estudio exhaustivo de X. Gómez-Mont donde se muestra que en superficies regladas la condición cohomológica anterior se verifica casi siempre y se caracteriza las **foliaciones excepcionales** \mathcal{F} de una superficie reglada S par las cuales $H^1(S, \mathcal{O}(T_{\mathcal{F}})) \neq 0$. Éstas son las de la siguiente lista (L):

- (1) \mathcal{F} es la fibración $p : S \rightarrow B$.

- (2) \mathcal{F} es una foliación de Riccati respecto de la fibración p .
- (3) \mathcal{F} es una foliación no singular en una superficie reglada sobre una curva elíptica.
- (4) \mathcal{F} es una foliación en el explotado de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ en un punto P , y cuyo fibrado tangente $T_{\mathcal{F}}$ tiene clase de Chern de la forma $c(T_{\mathcal{F}}) = \mathbf{f} - n\mathbf{l}$, donde \mathbf{f} y \mathbf{l} denotan las clases de las transformadas estrictas de sendas rectas de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, la primera pasando por el punto P y la segunda evitando P .

Hagamos algunos comentarios sobre dicha lista:

- (a) El producto $S = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ tiene dos reglas y por tanto las situaciones (1) y (2) pueden darse con cualquiera de ellas. En el resto de superficies regladas la fibración es única.
- (b) Recordemos que una foliación de Riccati en una superficie reglada $p : S \rightarrow B$ es una foliación que admite un número finito de fibras invariantes fuera de las cuales es transversa a la fibración.
- (c) Como se muestra en [GM89a], las foliaciones no singulares en superficies regladas elípticas (es decir, en las que la base $B = E$ es una curva elíptica) diferentes de la fibración y de una foliación de Riccati solamente pueden aparecer en un cociente no ramificado del producto $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times E$. Dicho producto es también una superficie elíptica en el sentido de que admite una fibración por curvas elípticas, en este caso se tienen por ejemplo los *feuilletages tourbillonnés* que se describen en el trabajo de M. Brunella [Bru97]. De hecho, utilizando la clasificación de foliaciones regulares en superficies algebraicas de este autor se observa que todos los ejemplos de la situación (3) que no están contenidos en los casos (1) y (2) son de este tipo.
- (d) Ejemplos del tipo (4) pueden ser construidos explotando un punto regular P de determinadas foliaciones holomorfas \mathcal{F} en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, cf. [GM89a]. En este caso, la dimensión de $H^1(S, \mathcal{O}(T_{\mathcal{F}}))$ es uno y ello se interpreta, desde el punto de vista de las deformaciones, como la variación del punto P dentro de la hoja de \mathcal{F} que lo contiene.

Particularizando el Teorema 2 al contexto de superficies regladas obtenemos el siguiente resultado de rigidez genérica válido para la mayoría de foliaciones, exceptuando de manera explícita las que acabamos de describir.

Teorema 3. *Sea S una superficie reglada y \mathcal{F} una foliación holomorfa que verifica:*

- (1) \mathcal{F} tiene una fibra invariante \mathbf{f}_0 con todas las singularidades hiperbólicas y grupo de holonomía rígido.

- (2) *Todas las singularidades de \mathcal{F} fuera de \mathbf{f}_0 son reducidas o bien tienen número de Milnor 1 y traza no nula.*
- (3) *El fibrado tangente $T_{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} verifica $H^1(S, \mathcal{O}(T_{\mathcal{F}})) = 0$, es decir, la foliación \mathcal{F} no pertenece a la lista (L).*

Entonces toda deformación topológicamente trivial de \mathcal{F} es analíticamente trivial.

Una subfamilia importante de foliaciones en superficies regladas de la lista (L) y que quedan excluidas del Teorema 3 son las foliaciones de Riccati, las cuales merecen un estudio propio. Es por ello que nos preocupamos por su clasificación analítica y topológica. Sea pues una foliación de Riccati \mathcal{F} en una superficie reglada $p : S \rightarrow B$ con $k \geq 0$ fibras invariantes $f_i = p^{-1}(b_i)$, $i = 1, \dots, k$. Sea $\Sigma_0 = p^{-1}(b_0)$ una fibra transversa a \mathcal{F} y $\Gamma \subset \text{Diff}(\Sigma_0) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ el grupo de holonomía de la representación

$$H_{\mathcal{F}}^{b_0} : \pi_1(B \setminus \{b_1, \dots, b_k\}, b_0) \rightarrow \text{Diff}(\Sigma_0).$$

Recordemos que \mathcal{F} se puede obtener en $S \setminus (f_1 \cup \dots \cup f_k)$ como la suspensión de la representación $H_{\mathcal{F}}^{b_0}$. Por otra parte, todo automorfismo de una superficie reglada preserva la fibrición e induce por tanto un automorfismo de la base. La teoría clásica de suspensiones nos proporciona la conocida clasificación analítica de foliaciones de Riccati: Con las notaciones anteriores, dos foliaciones de Riccati \mathcal{F} y \mathcal{F}' en S son analíticamente conjugadas si y sólo si existe un automorfismo de la base $\varphi : B \rightarrow B$ cumpliendo que $\varphi(b_i) = b'_i$ y existe un biholomorfismo φ_0 entre las fibras Σ_0 y $\Sigma'_0 = p^{-1}(b'_0)$ tales que conjugan las representaciones de holonomía de \mathcal{F} y \mathcal{F}' , es decir, se cumple la igualdad

$$(\varphi_0)_* \circ H_{\mathcal{F}}^{b_0} = H_{\mathcal{F}'}^{b'_0} \circ \varphi_* \quad (1)$$

donde $(\varphi_0)_* : \text{Diff}(\Sigma_0) \rightarrow \text{Diff}(\Sigma'_0)$ denota la conjugación por φ_0 y φ_* es el isomorfismo inducido por φ en homotopía.

El enunciado análogo para la clasificación topológica, bajo hipótesis genéricas, de las foliaciones de Riccati está formulado en el siguiente teorema, cuya importancia no es tanto lo que afirma sino cómo lo afirma. Aunque éste es el contexto adecuado donde este tipo de resultado se expresa de una manera natural, es en el estudio local de ciertos gérmenes de foliaciones singulares donde se revela como una aportación importante. Sin embargo, en el contexto local es necesario superar ciertas dificultades técnicas adicionales que no permiten expresar el resultado de una manera tan clara. Es por ello que lo presentamos de una forma precisa en el caso de foliaciones de Riccati.

Teorema 4. *Continuando con las notaciones anteriores, sea S una superficie reglada y \mathcal{F} una foliación de Riccati en S con k fibras invariantes $f_i = p^{-1}(b_i)$, $i = 1, \dots, k$.*

(A) Si \mathcal{F}' es una foliación holomorfa en S topológicamente conjugada a \mathcal{F} por un homeomorfismo ϕ que preserva las orientaciones de S y de las hojas, entonces:

- (1) La foliación \mathcal{F}' es de Riccati y tiene k fibras invariantes $f'_i = p^{-1}(b'_i)$, $i = 1, \dots, k$.
- (2) Existe un homeomorfismo $\xi : S \rightarrow S$ isótopo a la identidad tal que $\hat{\phi} = \xi \circ \phi$ continúa conjugando \mathcal{F} y \mathcal{F}' y además envía la transversal $\Sigma_0 = p^{-1}(b_0)$ sobre otra fibra $\Sigma'_0 = p^{-1}(b'_0)$ transversa a \mathcal{F}' ; también existe un **isomorfismo geométrico** $\psi : \pi_1(B \setminus \{b_1, \dots, b_k\}, b_0) \rightarrow \pi_1(B \setminus \{b'_1, \dots, b'_k\}, b'_0)$ (i.e. inducido por un homeomorfismo de la base que preserva la orientación) de manera que

$$p_* \circ \phi_* = \psi \circ p_* \quad (2)$$

y se verifica la conjugación de holonomías (1) tomando como φ_0 el **homeomorfismo** $\hat{\phi}|_{\Sigma_0} : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma'_0$.

- (3) Si además el grupo de holonomía Γ de \mathcal{F} es **rígido** entonces φ_0 es un **biholomorfismo** (i.e. una homografía) y los residuos de las singularidades correspondientes por ϕ son iguales.

(B) Recíprocamente, si \mathcal{F}' es una foliación holomorfa en S verificando la hipótesis (1) de la parte (A), y además

- (2') existe un biholomorfismo $\varphi_0 : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma'_0 = p^{-1}(b'_0)$ y un isomorfismo geométrico $\psi : \pi_1(B \setminus \{b_1, \dots, b_k\}, b_0) \rightarrow \pi_1(B \setminus \{b'_1, \dots, b'_k\}, b'_0)$ de manera que se tenga la conjugación de holonomías (1), y
- (3') los residuos de las singularidades de \mathcal{F} y \mathcal{F}' en las separatrices correspondientes por ψ son iguales,

entonces \mathcal{F} y \mathcal{F}' son topológicamente conjugadas por un homeomorfismo fibrado $\phi : S \rightarrow S$ que preserva las orientaciones e induce ψ en homotopía, es decir, verificando la igualdad (2).

Nota: Decimos que un subgrupo Γ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ es rígido si y sólo si todo homeomorfismo $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ que conjugue Γ y $\Gamma' = \varphi\Gamma\varphi^{-1} \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ es conforme. Remitimos a [Sul85] para más detalles sobre ésta y otras nociones de rigidez.

Las clasificaciones analítica y topológica de las foliaciones de Riccati genéricas permiten determinar los espacios de módulos de éstas. Para acabar con los aspectos globales, y a modo de ejemplo, se presenta en el capítulo 3 los espacios de módulos de una clase muy particular de foliaciones de Riccati que no verifican la hipótesis genérica de rigidez de su grupo de holonomía expresada en el Teorema 4: las foliaciones de Riccati en **superficies de Hirzebruch** con holonomía **abeliana** y singularidades **hiperbólicas**. Estas foliaciones serán denominadas **quasi-lineales** pues contienen de manera natural la familia de

foliaciones lineales clásicas del producto $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$. Expresado brevemente, el resultado es el siguiente: Sea \mathcal{F} una foliación de Riccati en la superficie de Hirzebruch $F_e = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(e))$, $e \geq 0$, con k fibras invariantes, singularidades hiperbólicas y holonomía abeliana. Si $k = 2$ entonces la foliación \mathcal{F} es lineal y su espacio de módulos se identifica con el semiplano $\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \alpha > 0\}$ a donde pertenecen los residuos de las singularidades de \mathcal{F} . Si $k \geq 3$ y \mathcal{F} tiene residuos $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ (los cuales verifican la relación $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = e$ por la fórmula del índice de [CaSa82]) entonces hemos de considerar el espacio de configuración de las fibras invariantes

$$F_k(\mathbb{S}^2) = \{(x_1, \dots, x_k) \in (\mathbb{S}^2)^k \mid x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\} \quad (3)$$

y el subconjunto del producto $F_k(\mathbb{S}^2) \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^k$ de manera que los residuos $(\beta_1, \dots, \beta_k)$ cumplan la relación

$$\frac{\beta_1 - \alpha_1}{\text{Im } \alpha_1} = \dots = \frac{\beta_k - \alpha_k}{\text{Im } \alpha_k}.$$

El espacio de módulos de \mathcal{F} se identifica con un cociente de dicho subconjunto por una acción del grupo simétrico \mathfrak{S}_k y del grupo de Moebius $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$, cf. Teorema 3.15 para más detalles.

En el contexto global sólo hemos considerado foliaciones con singularidades reducidas, en particular, dadas **localmente** por una 1-forma

$$\omega = \omega_1 + \dots$$

con parte lineal ω_1 no nula. Pasemos a abordar el problema de módulos local para singularidades sin parte lineal. El origen de este trabajo se encuentra en el artículo de D. Cerveau y P. Sad [CeSa86], cuya lectura nos ha motivado a continuar su estudio. En él, los autores se interesan por el espacio de módulos $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$ de una foliación \mathcal{F}_0 dada por una 1-forma del tipo

$$\omega = \omega_\nu + \dots$$

que verifica unas hipótesis genéricas, que denotaremos por N.A.G. y que explicamos con detalle en el capítulo 4 de la memoria. De hecho, estos autores obtienen sus resultados sobre el **subconjunto** de $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$ que describimos a continuación: Consideremos el conjunto de las 1-formas ω' que son topológicamente conjugadas a ω de manera que exista una **deformación** topológicamente trivial η_t dependiente continuamente del parámetro $t \in [0, 1]$ y uniendo ω y ω' , es decir, tal que $\eta_0 = \omega$ y $\eta_1 = \omega'$. Debido a esta dependencia del parámetro t , en [CeSa86] los autores denominan a dicho conjunto, módulo conjugación analítica, como el espacio de **t-módulos** de ω . Algunos de los resultados que obtienen son los siguientes:

- (1) El espacio de t -módulos de una 1-forma $\omega = \omega_2 + \dots$ N.A.G. es trivial.

- (2) El espacio de t -módulos de una 1-forma $\omega = \omega_3 + \dots$ N.A.G. se identifica con $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.
- (3) Sea η_t una deformación topológicamente trivial de una 1-forma $\omega = \omega_\nu + \dots$ N.A.G. Supongamos que la familia S_t de separatrices de η_t es analíticamente equivalente al conjunto de $\nu+1$ rectas complejas fijadas. Entonces la deformación η_t es analíticamente trivial.

Nuestro objetivo es obtener resultados análogos sin hacer uso de los parámetros. Una pieza clave en la demostración de estas propiedades es la invariancia topológica de la holonomía proyectiva por deformaciones:

Teorema 5 (Cerveau-Sad). *Sea $\omega = Adx + Bdy$ un germen de 1-forma holomorfa en el origen cuyo primer jet no nulo ω_ν es **general** y η_t una deformación topológicamente trivial de ω . Entonces las holonomías proyectivas de ω y η_t son topológicamente conjugadas.*

Nota: La hipótesis ω_ν *general*, introducida por estos autores, se define con precisión en el capítulo 4, y como su nombre indica es genérica en el conjunto de 1-formas homogéneas de grado ν .

En el mismo artículo se conjetura el mismo resultado sin utilizar deformaciones:

Conjetura 6 (Cerveau-Sad). *Si ω y ω' son topológicamente conjugadas entonces sus holonomías proyectivas también lo son.*

Ello como paso previo para abordar el problema de módulos sin parámetros:

Problema 7 (Cerveau-Sad). *Calcular el espacio de módulos de un germen de 1-forma $\omega = \omega_\nu + \dots$ N.A.G.*

Nuestra aportación es precisamente ésta: la eliminación de los parámetros, respondiendo así a los problemas planteados. El contexto será precisado en cada enunciado.

La dificultad del problema proviene del hecho que en general un homeomorfismo no extiende continuamente al divisor excepcional, en cuyo caso todos estos resultados serían consecuencia inmediata de la teoría general de foliaciones. Vamos a exponer brevemente la línea de resultados que hemos seguido para llegar a nuestro objetivo:

- (1) Toda foliación $\omega = \omega_\nu + \dots$ con ω_ν **general** es topológicamente conjugada a una foliación con la misma representación de holonomía proyectiva y cuyas separatrices son $\nu+1$ rectas por el origen (i.e. una **foliación homogénea**).
- (2) Sean $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ dos foliaciones homogéneas cuyas separatrices respectivas sean las rectas

$$S = \bigcup_{j=1}^{\nu+1} \{y = t_j x\} \quad y \quad S' = \bigcup_{j=1}^{\nu+1} \{y = t'_j x\}.$$

Si ϕ es un germen de homeomorfismo que conjuga \mathcal{F} y \mathcal{F}' preservando las orientaciones entonces existe un isomorfismo geométrico $\psi : \pi_1(D \setminus \{t_1, \dots, t_{\nu+1}\}, t_0) \rightarrow \pi_1(D \setminus \{t'_1, \dots, t'_{\nu+1}\}, t'_0)$ que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S, \tilde{t}_0) & \xrightarrow{\phi_*} & \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S, \tilde{t}_0) \\ p_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ \pi_1(D \setminus \{t_1, \dots, t_{\nu+1}\}, t_0) & \xrightarrow{\psi} & \pi_1(D \setminus \{t'_1, \dots, t'_{\nu+1}\}, t'_0) \end{array} \quad (4)$$

donde D denota el divisor excepcional de la explosión del origen. En otras palabras, aunque ϕ no extienda a D después de la explosión, su acción en homotopía siempre está definida. Ello es consecuencia de un estudio topológico del problema del cual se deduce que $\pi_1(D \setminus \{t_1, \dots, t_{\nu+1}\})$ es el cociente de $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S)$ por su centro.

- (3) Con las mismas notaciones del punto anterior, si además la foliación explotada $\tilde{\mathcal{F}}$ tiene todas sus singularidades **hiperbólicas** entonces existe un germen de homeomorfismo $\varphi_0 : (\Sigma_{t_0}, t_0) \rightarrow (\Sigma_{t'_0}, t'_0)$ tal que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(D \setminus \{t_1, \dots, t_{\nu+1}\}, t_0) & \xrightarrow{\psi} & \pi_1(D \setminus \{t'_1, \dots, t'_{\nu+1}\}, t'_0) \\ H_{\tilde{\mathcal{F}}}^{t_0} \downarrow & & \downarrow H_{\tilde{\mathcal{F}'}}^{t'_0} \\ \text{Diff}(\Sigma_{t_0}, t_0) & \xrightarrow{(\varphi_0)_*} & \text{Diff}(\Sigma_{t'_0}, t'_0) \end{array} \quad (5)$$

donde Σ_{t_0} y $\Sigma_{t'_0}$ denotan pequeños discos transversos a \mathcal{F} y \mathcal{F}' , contenidos en las **fibras de Hopf** sobre t_0 y t'_0 respectivamente, y $(\varphi_0)_*$ denota la conjugación por φ_0 . Vemos con esta formulación que las foliaciones homogéneas son el **análogo local** de las foliaciones de Riccati que hemos tratado en el contexto global, cf. Teorema 4.

- (4) Siempre con las mismas notaciones, si además \mathcal{F} es N.A.G. entonces el grupo de holonomía proyectiva G de \mathcal{F} es rígido, es decir, toda conjugación topológica entre G y otro subgrupo de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es conforme. Por tanto el germen de homeomorfismo φ_0 anteriormente introducido es de hecho un **biholomorfismo**. Una consecuencia de este hecho es la igualdad de los residuos de las singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ y $\tilde{\mathcal{F}'}$ en las separatrices correspondientes por ϕ .
- (5) Recíprocamente, si \mathcal{F} y \mathcal{F}' son dos foliaciones homogéneas N.A.G. con separatrices $S = \bigcup_{j=1}^{\nu+1} \{y = t_j x\}$ y $S' = \bigcup_{j=1}^{\nu+1} \{y = t'_j x\}$ tales que existe un isomorfismo geométrico $\psi : \pi_1(D \setminus \{t_1, \dots, t_{\nu+1}\}, t_0) \rightarrow \pi_1(D \setminus \{t'_1, \dots, t'_{\nu+1}\}, t'_0)$ y un germen de biholomorfismo $\varphi_0 : (\Sigma_{t_0}, t_0) \rightarrow (\Sigma_{t'_0}, t'_0)$ haciendo conmutativo el diagrama (5) y de manera que

los residuos de $\widetilde{\mathcal{F}}$ y $\widetilde{\mathcal{F}'}$ en las singularidades correspondientes por ψ coinciden, entonces existe un germe de homeomorfismo $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ que conjuga \mathcal{F} y \mathcal{F}' preservando las orientaciones e induciendo ψ en homotopía, es decir, haciendo conmutativo el diagrama (4).

Los dos primeros puntos pueden resumirse en el siguiente teorema:

Teorema 8. *La holonomía proyectiva es un invariante topológico de las foliaciones definidas por una 1-forma $\omega = \omega_\nu + \dots$ cuyo primer jet no nulo ω_ν es general.*

Los puntos (3), (4) y (5) nos proporcionan la **clasificación topológica** de las foliaciones homogéneas N.A.G., que junto a la clasificación analítica que obtienen D. Cerveau y P. Sad en [CeSa86] utilizando las ideas de F. Mattei y R. Moussu, cf. [MM80], nos permite abordar el problema de caracterizar los espacios de módulos de dichas foliaciones. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Teorema 9. *Todo germe de foliación holomorfa \mathcal{F}_0 definida por una 1-forma $\omega = \omega_2 + \dots$ N.A.G. es rígida, i.e. $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0) = \{[\mathcal{F}_0]\}$.*

Teorema 10. *Sea \mathcal{F}_0 un germe de foliación holomorfa definida por una 1-forma*

$$\omega = \omega_3 + \dots \quad \text{N.A.G.}$$

*Entonces el espacio de módulos $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$ de \mathcal{F}_0 se identifica con un recubrimiento conexo de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ de grupo fundamental trivial o isomorfo a \mathbb{Z} , el cual está completamente determinado por la representación de holonomía de \mathcal{F}_0 . Además, el caso genérico es el primero, es decir, genéricamente $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$ es el **disco**, como recubrimiento universal de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.*

Las técnicas utilizadas funcionan en general para foliaciones **homogéneas** N.A.G. de orden $\nu \geq 4$ aunque en este caso sólo es posible caracterizar el espacio de módulos de \mathcal{F}_0 **relativo** a la clase homogénea, la cual notamos por \mathcal{H} :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}_0) := \{\mathcal{F} \in \mathcal{H} \mid \mathcal{F} \sim_{\text{top}} \mathcal{F}_0\} / \sim_{\text{an}} \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{F}_0).$$

Para ello, y de acuerdo a (3), introducimos el espacio

$$F_{3,k}(\mathbb{S}^2) := F_k(\mathbb{S}^2 \setminus \{0, 1, \infty\}) \cong F_{k+3}(\mathbb{S}^2) / PSL(2, \mathbb{C}).$$

Teorema 11. *Si \mathcal{F}_0 es una foliación homogénea N.A.G. con $\nu + 1$ separatrices entonces $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}_0)$ se identifica con un recubrimiento conexo de $F_{3,\nu-2}(\mathbb{S}^2)$ cuyo grupo fundamental está completamente determinado por la representación de holonomía de \mathcal{F}_0 .*

La demostración involucra los grupos de trenzas, los espacios de Teichmüller y de Riemann y los *mapping class groups* de la esfera menos un número finito de puntos. Un tratamiento análogo admitirían las foliaciones de Riccati en superficies regladas con base una superficie de Riemann compacta diferente de la esfera.

En el capítulo 5 obtenemos una generalización de este último resultado a una clase más amplia y natural de singularidades. Recordemos brevemente la noción de foliación **quasi-homogénea** (cf. [Mat00] para una exposición detallada) de la cual las foliaciones homogéneas son un caso particular: Una foliación \mathcal{F} se dice quasi-homogénea de pesos (α, β) (dos enteros positivos coprimos) si las separatrices de \mathcal{F} son un número finito de hojas de la fibración dada por el campo $R_{\alpha, \beta} = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \beta y \frac{\partial}{\partial y}$ que admite como integral primera meromorfa $H(x, y) = \frac{y^\alpha}{x^\beta}$, fuera de las cuales \mathcal{F} es transversa a dicha fibración. Decimos que \mathcal{F} pertenece a la clase $\mathcal{QH}(\alpha, \beta; \nu + 1)$ si existen $t_1, \dots, t_{\nu+1} \in \overline{\mathbb{C}}$ diferentes tales que las separatrices de \mathcal{F} son $S = \bigcup_{j=1}^{\nu+1} \{y^\alpha - t_j x^\beta = 0\}$. El caso homogéneo se obtiene de manera evidente cuando $\alpha = \beta = 1$. Toda foliación quasi-homogénea es una curva generalizada, de manera que su resolución de singularidades coincide con la de sus separatrices, i.e. con la de la fibración dada por $R_{\alpha, \beta}$. En la Figura 5.1 ilustramos su árbol de reducción, el cual contiene un divisor central $D \cong \mathbb{CP}^1$ cuyas fibras de Hopf que no pasan por $0, \infty$ coinciden con las transformadas estrictas de las hojas $\{y^\alpha - tx^\beta\}$, $t \in \mathbb{C}^*$ de $R_{\alpha, \beta}$. La situación en un entorno de dicho divisor es análoga a la del caso homogéneo excepto por la existencia de los divisores adyacentes sobre $0, \infty \in D$. Si los ejes no son separatrices de \mathcal{F} , es decir, si todas las separatrices de \mathcal{F} son fibras **regulares** de la fibración $R_{\alpha, \beta}$, entonces la representación de holonomía

$$H_{\mathcal{F}}^{t_0} : \pi_1(D \setminus \{0, \infty, t_1, \dots, t_{\nu+1}\}, t_0) \rightarrow \text{Diff}(\Sigma_{t_0}, t_0),$$

donde $\Sigma_{t_0} = \{y^\alpha - t_0 x^\beta = 0\}$, verifica que $H_{\mathcal{F}}^{t_0}(e_0) = h_0$ y $H_{\mathcal{F}}^{t_0}(e_\infty) = h_\infty$ son periódicos: $h_0^\alpha = h_\infty^\beta = \text{id}$. En este contexto obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 12. *Si $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{QH}(\alpha, \beta; \nu + 1)$ es una foliación quasi-homogénea N.A.G. entonces su espacio de módulos $\mathcal{M}_{\mathcal{QH}}(\mathcal{F}_0)$ relativo a la clase quasi-homogénea es un espacio recubridor conexo de $F_{3, \nu}(\mathbb{S}^2)$ cuyo grupo fundamental está completamente determinado por la representación de holonomía de \mathcal{F}_0 .*

En todas las situaciones analizadas hasta ahora, tanto locales como globales, las foliaciones que hemos tratado eran transversas a una fibración fuera de un número finito de fibras invariantes, hecho éste que nos permitía recuperar la foliación fuera de estas fibras como suspensión de su representación de holonomía. En el caso global esta propiedad era característica de las foliaciones de Riccati. Con el espíritu de generalizar esta filosofía de determinar el comportamiento dinámico de una foliación con la única ayuda de su holonomía, en el capítulo 6 presentamos una noción que generaliza las definiciones de

holonomía adoptadas hasta ahora: Definimos la **holonomía generalizada** de una foliación holomorfa en una superficie compacta S respecto de una transversal global Σ como el conjunto de aplicaciones multivaluadas de Σ en Σ obtenidas por prolongación analítica de todos los gérmenes de holonomía definidos por caminos contenidos en hojas de \mathcal{F} y extremos sobre Σ . De manera natural se plantean dos preguntas:

- (1) ¿Es la prolongación analítica de la holonomía un objeto global? Más concretamente, ¿existe prolongación analítica fuera de un conjunto numerable de Σ ? Las funciones analíticas que tienen dicha propiedad se conocen por el nombre de S -funciones, cf. [Kho95].
- (2) ¿Es la prolongación analítica de la holonomía a su vez holonomía?

Vamos a plantear estas preguntas en superficies algebraicas y más concretamente, en $S = \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$. Observemos que si \mathcal{F} es una foliación de Riccati entonces su holonomía generalizada respecto de una fibra vertical transversa no es otra cosa que la imagen de su representación de holonomía clásica y está compuesta únicamente por funciones univaluadas, más concretamente, por homografías. Los primeros ejemplos de foliaciones en $S = \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ que no son transversas a la fibración vertical son las llamadas foliaciones de Riccati generalizadas, dadas por una 1-forma del tipo:

$$\omega = p(x)dy + (a_0(x) + a_1(x)y + \cdots + a_d(x)y^d)dx,$$

con $d \geq 3$. La foliación \mathcal{F}_ω deja de ser transversa a la fibración vertical, además de en las fibras invariantes $\{x = x_j\}$, con $p(x_j) = 0$, en toda la recta $\{y = \infty\}$. Por otra parte, si una foliación \mathcal{F} es pull-back de una foliación de Riccati entonces la holonomía de \mathcal{F} estará compuesta por ramificaciones de homografías, y por tanto no será una situación sustancialmente diferente de la del caso Riccati. Es por ello que en la sección 6.1 presentamos una caracterización de las foliaciones de Riccati generalizadas en $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ que son pull-back de alguna foliación de Riccati.

Las foliaciones de Riccati generalizadas verifican una propiedad interesante: admiten una secuencia $(\omega_n)_{n \geq 0}$ de Godbillon-Vey finita, más concretamente, con $\omega_n \equiv 0$ si $n > d$. Es conocido que $\omega_2 \equiv 0$ es equivalente a que la foliación determinada por ω_0 sea transversalmente afín, y que $\omega_3 \equiv 0$ caracteriza a su vez las foliaciones transversalmente proyectivas, todo ello en un abierto de Zariski. En [CaSc95] se proponía el estudio sistemático de las foliaciones admitiendo una secuencia de Godbillon-Vey con $\omega_n \equiv 0$ para todo $n > d$, como punto de partida en la estratificación del espacio de las estructuras transversas más allá del caso proyectivo. Los trabajos de [BLL97, BLL99] muestran que la dinámica no resoluble implica la no existencia de ningún tipo de estructura geométrica transversa, ello junto al hecho, expuesto en la sección 6.2, de que existen ejemplos de foliaciones de Riccati generalizadas con holonomía no resoluble, responde negativamente al problema expuesto en [CaSc95].

A pesar de ello, nos parece acertado comenzar el estudio de la holonomía generalizada a partir de estas foliaciones, pues constituyen el primer paso en la pérdida de transversalidad con la fibración que nos aleja del caso Riccati. En el capítulo 7 analizamos con detalle una familia de foliaciones de Riccati generalizadas, definidas por las 1-formas

$$\omega_{\rho,\lambda} = x^2 dy + (1 - \lambda x)y(y - 1)(y - \rho)dx,$$

que aún siendo de variables separadas nos proporcionan una riqueza insospechada desde el punto de vista de la prolongación analítica de su holonomía. El estudio realizado en el capítulo 6 muestra que $\omega_{\rho,\lambda}$ es pull-back de una foliación de Riccati si y sólo si $\rho \in \mathbb{Q}$ y que si éste no es el caso entonces la holonomía de la separatriz $\{x = 0\}$ es no resoluble. Se trata únicamente el caso genérico $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Tomando como transversal $\Sigma = \{x = x_0\}$, $x_0 \neq 0, \frac{1}{\lambda}, \infty$ y caracterizamos la holonomía generalizada de $\mathcal{F}_{\omega_{\rho,\lambda}}$ respecto de Σ . Para ello observamos que $\omega_{\rho,\lambda}$ admite una integral primera multivaluada de la forma $H(x, y) = f(y) - g(x)$ que nos permite abordar el problema de una manera explícita. Esta situación se da para cualquier foliación en $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ de variables separadas $\omega = R(y)dy - S(x)dx$ con R, S funciones racionales de la variable correspondiente. En este contexto es fácil ver que a cada germen de holonomía $h_\gamma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ le podemos asociar un elemento de la monodromía (aditiva) de H , de manera que con gérmenes adecuados de f y f^{-1} se tiene la igualdad

$$h_\gamma = f^{-1}(f + c) \tag{6}$$

Otra consecuencia del hecho de tener una integral primera de variables separadas es que el conjunto de gérmenes de la forma (6) con c perteneciente al grupo de monodromía de H , es invariante por prolongación analítica. Dos cuestiones restan entonces por responder:

- (1) ¿Es todo germen del tipo (6) realizable como germen de holonomía? La respuesta afirmativa implica que toda la holonomía generalizada está compuesta por gérmenes de holonomía.
- (2) Dados dos gérmenes de la forma (6), ¿cuándo es una prolongación analítica del otro? Es decir, ¿cuántas componentes conexas tiene la superficie de Riemann de la S -función holonomía generalizada?

El resto del capítulo 7 está dedicado a responder a estas dos preguntas en el caso de la familia $\omega_{\rho,\lambda}$ introducida antes: La respuesta a la primera pregunta es afirmativa. En cuanto a la segunda, depende del valor de λ :

- (a) Si $\lambda = 0$ la S -función holonomía generalizada tiene sólo dos componentes conexas: la de la identidad y la de la involución geométrica que se presenta en un entorno de $\{y = \infty\} \cap \Sigma$ debida a la tangencia (de orden 2) de las hojas con la fibración vertical. El estudio de esta involución es el objetivo de la sección 7.3.3

- (b) Si $\lambda \neq 0$ entonces la foliación $\mathcal{F}_{\omega_\rho, \lambda}$ admite dos fibras verticales invariantes, cuyo complementario tiene grupo fundamental cíclico infinito. En este caso se pone de manifiesto que las componentes conexas, diferentes de la identidad, de la holonomía generalizada se corresponden con los elementos de \mathbb{Z} . El cero está asociado a la involución anteriormente descrita.

Capítulo 1

Definiciones y preliminares

1.1 Foliaciones singulares en superficies complejas

Comencemos definiendo el objeto de estudio del presente trabajo: la noción de foliación holomorfa singular.

Definición 1.1. *Una foliación holomorfa singular \mathcal{F} de codimensión uno en una variedad compleja M consiste en un subconjunto analítico $\text{Sing } \mathcal{F} \subset M$ de codimensión mayor o igual que dos y una descomposición de $M \setminus \text{Sing } \mathcal{F}$ en hipersuperficies conexas (llamadas hojas de la foliación) de manera que para todo punto $p \in M \setminus \text{Sing } \mathcal{F}$ existe un entorno coordenado $U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^n$ (llamado abierto trivializante) cumpliendo que para todo $c \in \mathbb{C}$ el conjunto $\varphi^{-1}(\{z_n = c\})$ (llamado placa de \mathcal{F}) está contenido en una hoja. Si el conjunto singular $\text{Sing } \mathcal{F}$ es vacío entonces decimos que la foliación \mathcal{F} es regular.*

Vamos a centrarnos en el caso de una foliación holomorfa \mathcal{F} en una superficie compleja S . Para cada abierto trivializante (U, φ) de \mathcal{F} podemos considerar la composición $\bar{\varphi} = \pi_2 \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ de φ con la segunda proyección $\pi_2 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\pi_2(x, y) = y$. Por definición, $\bar{\varphi}$ es una submersión cuyas fibras son placas de \mathcal{F} . También podemos considerar el campo $X_U = (\varphi^{-1})_* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ y la 1-forma $\omega_U = \varphi^* dy$ holomorfos en U . Las curvas integrales de los cuales coinciden con las fibras de la submersión local $\bar{\varphi}$.

Sea $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ un atlas de abiertos trivializantes de \mathcal{F} en $S \setminus \text{Sing } \mathcal{F}$. Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces el cambio de cartas $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ es de la forma $(x, y) \mapsto (a_{ij}(x, y), b_{ij}(y))$, las submersiones locales cumplen que $\bar{\varphi}_i = b_{ij} \circ \bar{\varphi}_j$ y existen funciones $g_{ij}, h_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^*$ de manera que los campos y formas locales determinados por φ_i y φ_j verifican que $X_i = g_{ij} X_j$ y $\omega_i = h_{ij} \omega_j$ en $U_i \cap U_j$. Por construcción, las familias de funciones $\{g_{ij}\}$ y $\{h_{ij}\}$ verifican ambas la condición de cociclo: $g_{ij} g_{jk} g_{kl} = 1$ y $h_{ij} h_{jk} h_{kl} = 1$, en una triple intersección no vacía $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, y definen por tanto sendos fibrados de línea sobre $S \setminus \text{Sing } \mathcal{F}$ asociados de manera natural a \mathcal{F} : El fibrado tangente $T_{\mathcal{F}|S \setminus \text{Sing } \mathcal{F}}$

y el fibrado conormal $N_{\mathcal{F}|S \setminus \text{Sing } \mathcal{F}}^*$. Se tienen también dos morfismos $X' : T_{\mathcal{F}|S \setminus \text{Sing } \mathcal{F}} \rightarrow TS$ y $\omega' : N_{\mathcal{F}|S \setminus \text{Sing } \mathcal{F}}^* \rightarrow T^*S$ definidos sin ambigüedad mediante

$$\begin{aligned} X'_{U_i} : T_{\mathcal{F}|U_i} \cong U_i \times \mathbb{C} &\longrightarrow TS|_{U_i} \\ (p, t) &\longmapsto tX_i(p) \\ \omega'_{U_i} : N_{\mathcal{F}|U_i}^* \cong U_i \times \mathbb{C} &\longrightarrow T^*S|_{U_i} \\ (p, t) &\longmapsto t\omega_i(p). \end{aligned}$$

En [GM87] se muestra que dichos fibrados extienden de manera única a dos fibrados de línea holomorfos $T_{\mathcal{F}}$ y $N_{\mathcal{F}}^*$ sobre la superficie completa S y los morfismos X' y ω' a $X : T_{\mathcal{F}} \rightarrow TS$ y $\omega : N_{\mathcal{F}}^* \rightarrow T^*S$ anulándose en $\text{Sing } \mathcal{F}$. De esta manera podemos caracterizar el lugar singular de \mathcal{F} como $\text{Sing } \mathcal{F} = \{p \in S \mid X(p) = 0\} = \{p \in S \mid \omega(p) = 0\}$. De hecho, el dato de una foliación holomorfa singular \mathcal{F} en una superficie compleja S se puede dar de tres maneras equivalentes con:

- (1) un atlas foliado $\{(U_i, \varphi_i)\}$ en $S \setminus \text{Sing } \mathcal{F}$.
- (2) el fibrado tangente $T_{\mathcal{F}}$ y un morfismo de fibrados $X : T_{\mathcal{F}} \rightarrow TS$.
- (3) el fibrado conormal $N_{\mathcal{F}}^*$ y un morfismo de fibrados $\omega : N_{\mathcal{F}}^* \rightarrow T^*S$.

Por otra parte, el conjunto de clases de isomorfismo de fibrados de línea sobre S tiene una estructura natural de grupo abeliano si consideramos como operación el producto tensorial de fibrados. Dicho grupo se conoce como **grupo de Picard** de S y se denota por $\text{Pic}(S)$, el cual es isomorfo al grupo de cohomología $H^1(S, \mathcal{O}_S^*)$ de S a valores el haz de las funciones holomorfas no nulas. Utilizando la cohomología de Čech, dicho isomorfismo se obtiene considerando la clase del cociclo $\{\xi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^*\}$ asociado a un recubrimiento de S por abiertos trivializantes del fibrado de línea considerado. Gracias a la sucesión exacta larga de cohomología asociada a la sucesión exacta de haces

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_S \xrightarrow{\text{exp}} \mathcal{O}_S^* \rightarrow 1$$

se puede ver que si S es compacta entonces su grupo de Picard es finito generado. El morfismo de conexión

$$c : H^1(S, \mathcal{O}_S^*) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$$

asocia a cada fibrado de línea L sobre S su (primera) clase de Chern $c(L)$, la cual clasifica topológicamente el fibrado L .

1.2 Singularidades de foliaciones en dimensión dos

Por definición las singularidades de las foliaciones holomorfas son de codimensión mayor o igual que dos. En el caso de una superficie S si una foliación holomorfa \mathcal{F} tiene singularidades entonces $\text{Sing } \mathcal{F}$ es de dimensión cero, es decir, consta únicamente de puntos aislados.

Toda singularidad puede ser descrita localmente, por un germen de 1-forma holomorfa ω en $(\mathbb{C}^2, 0)$ anulándose únicamente en el origen.

Un hoja L de un germen de foliación singular en el origen es una separatriz si y sólo si la adherencia \bar{L} de L es igual a $L \cup \{0\}$. Equivalentemente, L es una separatriz si existe una función holomorfa $F(x, y) \not\equiv 0$ tal que $\bar{L} = \{F(x, y) = 0\}$. En [CaSa82] los autores obtienen el siguiente teorema de existencia de separatrices:

Teorema 1.2 (Camacho-Sad). *Todo germen de foliación singular en $(\mathbb{C}^2, 0)$ admite al menos una separatriz.*

Si una singularidad admite una infinidad de separatrices entonces se dice que es **dicrítica**.

Definición 1.3. *Una singularidad se llama **reducida** si y sólo si su parte lineal es conjugada a*

$$x dy + \alpha y dx \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}.$$

*Si α es diferente de cero entonces la singularidad tiene dos separatrices, tangentes a los ejes coordenados. A dicho valor α se le conoce como el **residuo** de la singularidad respecto de la separatriz tangente a $\{y = 0\}$.*

Ejemplo 1.4. 1. Si α es no real entonces la singularidad se llama **hiperbólica** y las holonomías de sus dos separatrices son contractantes por lo que todas las hojas se acumulan sobre ellas.

2. Si $\alpha = 0$ entonces la singularidad se llama **silla-nodo** y siempre admite una separatriz convergente (llamada fuerte) y otra formal (llamada débil) que eventualmente puede ser convergente. Además, la holonomía de la separatriz fuerte siempre es tangente a la identidad.

Definición 1.5. *Una singularidad se dice **linealizable** si y sólo si es analíticamente conjugada a su parte lineal.*

Recordemos el Teorema de Linealización de Poincaré:

Teorema 1.6 (Poincaré). *Si una singularidad de foliación ω tiene residuo $\alpha \notin \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{Q}^-$ entonces es linealizable, es decir ω es analíticamente conjugada a $x dy + \alpha y dx$.*

El estudio de las singularidades de foliaciones holomorfas en dimensión dos viene facilitado por la existencia de un procedimiento de reducción de singularidades. Más precisamente, un resultado de Seidenberg, cf. [Sei68], afirma que existe una composición de explosiones $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ tal que la foliación $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^* \mathcal{F}$ tiene todas sus singularidades reducidas. Denotamos por $D = \pi^{-1}(\text{Sing } \mathcal{F})$ el divisor excepcional de la reducción, el cual es una unión de rectas proyectivas. De hecho, se tiene la siguiente relación entre los residuos de las singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ conocida como la fórmula del índice.

Teorema 1.7 (Camacho-Sad). *Si $C \subset \tilde{S}$ es una componente irreducible de D entonces los residuos de las singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ que se encuentran sobre la separatriz C suman un número entero que coincide con la clase de Chern del fibrado normal de C en \tilde{S} cambiada de signo.*

Dicha fórmula es bastante útil, digamos a modo de ejemplo que se puede probar el Teorema 1.2 a partir de ésta.

Recordemos finalmente, una noción que aparecerá en los capítulos 4 y 5.

Definición 1.8. *Un germen de foliación singular no dicrítica \mathcal{F} en $(\mathbb{C}^2, 0)$ se dice que es una **curva generalizada** si y sólo si en su reducción de singularidades no aparecen sillan-nodo.*

Notemos también que en la referencia [Mat00] (a la que en ocasiones remitiremos en los capítulos 4 y 5) se utiliza el nombre de foliación **semi-hiperbólica** en lugar de curva generalizada.

1.3 Módulos, deformaciones y despliegues

Sea S un superficie compleja o el germen $(\mathbb{C}^2, 0)$ y \mathcal{F}_0 una foliación singular sobre S . Consideremos el conjunto $\mathfrak{F}(\mathcal{F}_0)$ de todas las foliaciones holomorfas singulares \mathcal{F} de S que son topológicamente conjugadas a \mathcal{F}_0 por un homeomorfismo ϕ que preserva la orientación de S y de las hojas de \mathcal{F}_0 y \mathcal{F} . Definimos el espacio $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$ de módulos topológico-analíticos de \mathcal{F}_0 como el conjunto cociente de $\mathfrak{F}(\mathcal{F}_0)$ por la relación de equivalencia *ser analíticamente conjugadas*. En lo que sigue abreviaremos diciendo simplemente que el homeomorfismo ϕ **preserva las orientaciones** y que $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$ es el **espacio de módulos** de \mathcal{F}_0 . Escribiremos

$$\mathfrak{F}(\mathcal{F}_0) = \{\mathcal{F} \sim_{\text{top}} \mathcal{F}_0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{M}(\mathcal{F}_0) = \{\mathcal{F} \sim_{\text{top}} \mathcal{F}_0\} / \sim_{\text{an}} .$$

En ocasiones la determinación del espacio de módulos será difícil de abordar, en cuyo caso haremos la siguiente reducción del problema: Fijaremos \mathcal{C} una clase de foliaciones holomorfas singulares de S a la cual pertenezca \mathcal{F}_0 y sobre la que sea más sencillo trabajar y consideraremos el conjunto $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_0)$ de las foliaciones de la clase \mathcal{C} que son topológicamente conjugadas a \mathcal{F}_0 por un homeomorfismo que preserve las orientaciones. El cociente $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_0)$ de $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_0)$ por la relación de equivalencia *ser analíticamente conjugadas* es un subconjunto de $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$ que llamaremos el **espacio de módulos de \mathcal{F}_0 relativo a la clase \mathcal{C}** :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_0) = \{\mathcal{F} \in \mathcal{C} \mid \mathcal{F} \sim_{\text{top}} \mathcal{F}_0\} / \sim_{\text{an}} \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{F}_0).$$

Decimos que la clase \mathcal{C} es **topológicamente trivial** si y sólo si para todo par de foliaciones $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathcal{C}$ se tiene que \mathcal{F} y \mathcal{F}' son topológicamente conjugadas. En este caso,

para todo $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{C}$ se tiene que $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_0) = \mathcal{C}$. Si especificamos una topología en la clase de foliaciones \mathcal{C} entonces decimos que \mathcal{F}_0 es **estructuralmente estable** en la clase \mathcal{C} si y sólo si existe un entorno $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$ de \mathcal{F}_0 tal que toda foliación de \mathcal{U} es topológicamente conjugada a \mathcal{F}_0 , i.e. $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}_0) = \mathcal{U}$. Diremos que una foliación \mathcal{F} es **rígida** en la clase \mathcal{C} si y sólo si $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_0) = \{[\mathcal{F}_0]\}$. Cuando utilicemos estas nociones sin especificar clase alguna nos estaremos refiriendo a la clase de todas las foliaciones holomorfas singulares en la superficie S donde \mathcal{F}_0 está definida.

Decimos que \mathcal{F}_1 es una **deformación estable** de \mathcal{F}_0 en la clase \mathcal{C} si y sólo si existe una familia continua de foliaciones $t \mapsto \mathcal{F}_t$, $t \in [0, 1]$, topológicamente trivial, uniendo \mathcal{F}_0 y \mathcal{F}_1 en \mathcal{C} . Siguiendo a [CeSa86] definimos el espacio de t -módulos de \mathcal{F}_0 como el espacio cociente de las deformaciones estables de \mathcal{F}_0 módulo equivalencia analítica. Decimos que \mathcal{F}_0 es t -rígida si y sólo si su espacio de t -módulos se reduce a un punto, es decir, si toda deformación que sea topológicamente trivial es también analíticamente trivial.

Varios conceptos imprescindibles para el estudio local de los espacios de módulos cf. [Mat91, MN94, Mat00] son los siguientes:

Una **deformación holomorfa** de base $(\mathbb{C}^p, 0)$ en una superficie compleja S es una familia holomorfa de foliaciones en S indexada por $(\mathbb{C}^p, 0)$; o equivalentemente, una foliación por curvas en la variedad $S \times (\mathbb{C}^p, 0)$ y cuyas hojas están contenidas en las fibras de la proyección sobre la base $S \times (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$.

Una deformación $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in (\mathbb{C}^p, 0)}$ se dice **equirreducible** o **equisingular** si las foliaciones \mathcal{F}_t admiten una reducción de singularidades *en familia*.

Un **despliegue** de una foliación \mathcal{F}_0 en S de base $P = (\mathbb{C}^p, 0)$ es una foliación \mathcal{F}_P de codimensión uno en la variedad producto $S \times P$ tal que las hojas de \mathcal{F}_P son transversas a las fibras de la proyección $S \times P \rightarrow P$ y $i_0^* \mathcal{F}_P = \mathcal{F}_0$, siendo $i_0 : S \rightarrow S \times P$ la inclusión $i_0(s) = (s, 0)$. Todo despliegue determina una deformación holomorfa, considerando la familia de foliaciones $i_t^* \mathcal{F}_P$, $t \in P$ dada por imagen recíproca de las inclusiones $i_t : S \rightarrow S \times P$, $i_t(s) = (s, t)$.

Decimos que \mathcal{F}_P es un **despliegue equisingular** si es un despliegue cuya deformación asociada es equisingular. Es decir, si existe $\pi_P : M \rightarrow S \times P$ una composición de explosiones tal que su restricción a la imagen recíproca de $S \times \{t\}$ nos da la desingularización $\pi_t : M_t \rightarrow S$ de \mathcal{F}_t , $t \in P$, ver [Mat91] para una definición precisa. Denotaremos por $\tilde{\mathcal{F}}_P$ la foliación saturada de M asociada a $\pi^*(\mathcal{F}_P)$ y D_P la antimagen por π_P de los centros de explosión en $S \times P$.

Decimos que un despliegue es **trivial** (sobre P) a lo largo de un subconjunto $W \subset D_0 := D_P \cap M_0$ si existe un germen de difeomorfismo a lo largo de W

$$\phi : (M_P, W) \rightarrow (M_0 \times P, W \times 0)$$

tal que

$$\phi^*(\tilde{\mathcal{F}}_0 \times P) = \tilde{\mathcal{F}}_P$$

y conmuta con las proyecciones sobre P .

En [Mat91] encontramos también los siguientes resultados.

Lema 1.9. *Todo despliegue de un germen de foliación reducida en $(\mathbb{C}^2, 0)$ es trivial (en particular, equisingular).*

Proposición 1.10. *Sea \mathcal{F}_P un despliegue equisingular de \mathcal{F}_0 . Entonces $\tilde{\mathcal{F}}_P$ es localmente trivial, es decir, existe un recubrimiento abierto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ del divisor D_0 de M_0 tal que $\tilde{\mathcal{F}}_P$ es trivial, sobre P , a lo largo de cada abierto $U_i \subset D_0$.*

Corolario 1.11. *Sea \mathcal{F}_P un despliegue equisingular de \mathcal{F}_0 de base $P = (\mathbb{C}^p, 0)$. Entonces \mathcal{F}_P es topológicamente trivial.*

La Proposición 1.10 permite construir una aplicación del conjunto de clases de conjugación holomorfa de despliegues equisingulares de \mathcal{F}_0 de base $P = (\mathbb{C}^p, 0)$ en el conjunto de cohomología de Čech $H^1(\mathcal{U}, G_P)$ a valores el haz (de grupos no abelianos) de gérmenes de automorfismos del despliegue trivial de $\tilde{\mathcal{F}}_0$ de base P : Sean $\varphi_\alpha : (M_P, U_\alpha) \rightarrow (M_0 \times P, U_\alpha \times \{0\})$ los biholomorfismos locales entre el despliegue \mathcal{F}_P y el despliegue trivial. A cada par (α, β) tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ le hacemos corresponder el automorfismo $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ del despliegue trivial sobre $U_\alpha \cap U_\beta$. Así hacemos corresponder a $[\mathcal{F}_P]$ la clase del cociclo $[\varphi_{\alpha\beta}] \in H^1(\mathcal{U}, G_P)$. Por otra parte, es clásico linealizar la situación: consideremos el haz de grupos abelianos G_Θ obtenido restringiendo a D_0 el \mathcal{O}_{M_0} -módulo de campos de vectores holomorfos tangentes a la foliación $\tilde{\mathcal{F}}_0$, i.e. el haz de secciones asociado al fibrado de línea $T_{\tilde{\mathcal{F}}_0}$ sobre M_0 . A una clase de despliegues de base $P = (\mathbb{C}^p, 0)$ dada por $[\mathcal{F}_P] = [\varphi_{\alpha\beta}(s, t)] \in H^1(\mathcal{U}, G_P)$ y a todo vector tangente $v \in T_0P$ le hacemos corresponder la **deformación infinitesimal**

$$\left[\frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}}{\partial t} \Big|_{t=0} \cdot v \right] \in H^1(D_0, G_\Theta),$$

donde t es la variable de P . Se obtiene de esta manera una aplicación \mathbb{C} -lineal notada

$$\left[\frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}}{\partial t} \Big|_{t=0} \right] : T_0P \rightarrow H^1(D_0, G_\Theta)$$

y que se interpreta con la **velocidad** del despliegue \mathcal{F}_P en el instante inicial $t = 0$.

Teorema 1.12. *Sea \mathcal{F}_0 un germen en \mathbb{C}^2 de una foliación holomorfa con una singularidad aislada en el origen. Entonces el espacio $H^1(D_0, G_\Theta)$ de clases de despliegues infinitesimales equisingulares de \mathcal{F}_0 es un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión finita*

$$\delta(\mathcal{F}_0) := \sum_c \frac{(\nu_c - 1)(\nu_c - 2)}{2}$$

donde c describe el conjunto de todos los puntos singulares que aparecen en todos los pasos de la reducción de singularidades de \mathcal{F}_0 (el origen incluido) y ν_c denota la multiplicidad de la singularidad c .

Un despliegue equisingular \mathcal{F}_Q^u de \mathcal{F}_0 de base $Q = (\mathbb{C}^q, 0)$ se dice **versal** si para todo $P = (\mathbb{C}^p, 0)$ y todo despliegue equisingular \mathcal{F}_P de \mathcal{F}_0 de base P existe un germen de aplicación $\lambda : P \rightarrow Q$ tal que \mathcal{F}_P sea analíticamente conjugado a $\lambda^* \mathcal{F}_Q^u$. Además, si λ es única diremos que \mathcal{F}_Q^u es **universal**, y cuando solamente la diferencial $D_0 \lambda : T_0 P \rightarrow T_0 Q$ sea única diremos que \mathcal{F}_Q^u es **semi-universal**.

Teorema 1.13. *Sea \mathcal{F}_Q un despliegue equisingular de base $Q = (\mathbb{C}^q, 0)$ de un germen de foliación holomorfa \mathcal{F}_0 en \mathbb{C}^2 con una singularidad aislada en el origen. Entonces*

1. \mathcal{F}_Q es versal si y sólo si $\left[\frac{\partial \mathcal{F}_Q}{\partial t} \Big|_{t=0} \right]$ es exhaustiva;
2. \mathcal{F}_Q es semi-universal si y sólo si $\left[\frac{\partial \mathcal{F}_Q}{\partial t} \Big|_{t=0} \right]$ es biyectiva.

Además, existe un despliegue semi-universal de \mathcal{F}_0 de base $\mathbb{C}^{\delta(\mathcal{F}_0)}$.

1.4 Superficies regladas

Las clases de foliaciones que vamos a tratar a lo largo de esta memoria estarán constituidas siempre por foliaciones que son transversas a algún tipo de fibración salvo en un número finito de fibras. En el contexto global ello nos induce a considerar superficies complejas compactas S admitiendo una fibración sobre una curva compleja lisa B (es decir un morfismo exhaustivo $\pi : S \rightarrow B$) tal que todas las fibras sean isomorfas a una curva dada F . Para trabajar con mayor comodidad nos restringiremos a aquellas superficies que sean espacios fibrados localmente triviales sobre B , de fibra lisa F y grupo estructural $\text{Aut}(F)$, los automorfismos holomorfos de la fibra. Se puede ver, cf. [BPV84] que estas dos nociones, la de fibración y la de fibrado localmente trivial, son equivalentes en el caso que la fibra F sea $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Se habla en tal caso de **superficies regladas**:

Definición 1.14. *Llamaremos superficie reglada a una superficie compleja compacta S que sea el espacio total de un fibrado localmente trivial sobre una curva compleja B , de fibra $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ y grupo estructural $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$.*

Remitimos al lector a [BPV84] y [Har77] para la demostración de las propiedades sobre superficies regladas que enunciamos a continuación.

En primer lugar, recordemos que la regla de una superficie reglada S es única salvo para $S = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ que tiene dos: la horizontal y la vertical.

Ejemplo 1.15. El ejemplo típico de superficie reglada es el siguiente: Sea E un fibrado vectorial de rango dos sobre una curva compleja compacta B , entonces su proyectivizado $\mathbb{P}E \rightarrow B$ es una superficie reglada sobre B . De hecho, éstos son los únicos ejemplos, como afirma el siguiente resultado.

Proposición 1.16. *Toda superficie reglada S sobre una curva B es el proyectivizado de un fibrado vectorial de rango dos sobre B .*

La prueba consiste básicamente en considerar la sucesión exacta de cohomología no abeliana asociada a la sucesión de haces

$$1 \rightarrow \mathcal{O}_B^* \rightarrow \mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_B) \rightarrow \mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}_B) \rightarrow 1$$

y el hecho de que para toda curva B se tiene que $H^2(B, \mathcal{O}_B^*) = 0$, consecuencia a su vez de la sucesión exacta larga de cohomología asociada a $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_B \rightarrow \mathcal{O}_B^* \rightarrow 1$.

Como consecuencia de la propiedad anterior y del principio GAGA de Serre se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.17. *Toda superficie reglada es algebraica.*

Un resultado importante que haremos servir a continuación es la existencia de secciones holomorfas $\sigma : B \rightarrow S$ de la proyección $\pi : S \rightarrow B$.

Definición 1.18. *Se define un invariante numérico e de la superficie reglada S como*

$$e = -\min\{\mathbf{s}^2 \mid \mathbf{s} = \sigma(B) \text{ y } \sigma \text{ es sección holomorfa de } \pi : S \rightarrow B\},$$

donde \mathbf{s}^2 denota la autointersección del divisor \mathbf{s} .

Sea \mathbf{s}_0 la imagen de una sección holomorfa realizando este valor e que siempre es mayor o igual que $-g$, siendo g el género de la base B .

Como toda superficie reglada S es algebraica, tenemos que el grupo de Picard de S se identifica con el grupo de divisores módulo equivalencia lineal. También podemos considerar el grupo $\mathrm{Num}(S)$ de divisores módulo equivalencia numérica, i.e. $D_1 \sim_{\mathrm{num}} D_2$ si y sólo si para cualquier otro divisor D se tiene que $D_1 \cdot D = D_2 \cdot D$. Las siguientes son un compendio de propiedades que podemos encontrar en [Har77] y [BPV84].

Proposición 1.19. *Sea $\pi : S \rightarrow B$ una superficie reglada. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:*

- (1) *El género geométrico $p_g(S)$ es cero y su irregularidad $q(S)$ es igual al género g de B .*
- (2) *El morfismo de Chern $c : \mathrm{Pic}(S) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$ es exhaustivo (pues $H^2(S, \mathcal{O}_S) = 0$).*

- (3) El grupo de Picard de S verifica $\text{Pic}(S) \cong \mathbb{Z}\mathbf{s}_0 \oplus \pi^*\text{Pic}(B)$.
- (4) El núcleo del morfismo de Chern, $\text{Pic}^0(S)$, tiene una estructura de toro complejo de dimensión g .
- (5) El grupo $\text{Num}(S)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}\mathbf{s}_0 \oplus \mathbb{Z}\mathbf{f}$, donde \mathbf{f} es la clase de una fibra.

Más aún, vamos a ver que en el caso de superficies regladas podemos identificar algunos de estos grupos entre sí.

Proposición 1.20. *Sea $\pi : S \rightarrow B$ una superficie reglada. Entonces*

$$H_2(S, \mathbb{Z}) \cong H^2(S, \mathbb{Z}) \cong \text{Num}(S) = \mathbb{Z}\mathbf{s}_0 \oplus \mathbb{Z}\mathbf{f},$$

donde \mathbf{s}_0 y \mathbf{f} denotan las clases de la imagen de una sección holomorfa y de una fibra respectivamente. Además, el producto de intersección en $H_2(S, \mathbb{Z})$ queda completamente descrito por las igualdades:

$$\mathbf{s}_0^2 = -e, \quad \mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{f} = 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{f}^2 = 0.$$

Demostración. Por una parte la dualidad de Poincaré a coeficientes enteros nos proporciona un isomorfismo natural entre $H^2(S, \mathbb{Z})$ y $H_2(S, \mathbb{Z})$. Por otra parte, el Teorema de Coeficientes Universales implica que $H^2(S, \mathbb{Z})$ es suma directa de la parte sin torsión de $H_2(S, \mathbb{Z})$ y de la parte de torsión de $H_1(S, \mathbb{Z})$. La sucesión exacta de homotopía asociada al fibrado $\pi : S \rightarrow B$ nos proporciona un isomorfismo entre $\pi_1(S)$ y $\pi_1(B)$ y por tanto sus abelianizados $H_1(S, \mathbb{Z})$ y $H_1(B, \mathbb{Z})$ también son isomorfos. Como B es una superficie compacta orientable se tiene que $H_1(B, \mathbb{Z})$ no tiene torsión. Por tanto, $H^2(S, \mathbb{Z}) \cong H_2(S, \mathbb{Z})$ tampoco tiene torsión. También es conocido que el grupo $\text{Num}(S)$ es isomorfo a la imagen del morfismo de Chern c en $H^2(S, \mathbb{Z})$ módulo la parte de torsión. Así pues, en el caso de una superficie reglada S se tiene que $\text{Num}(S) = \mathbb{Z}\mathbf{s}_0 \oplus \mathbb{Z}\mathbf{f}$ es isomorfo a $H^2(S, \mathbb{Z})$. Gracias a la dualidad de Poincaré podemos identificar los divisores \mathbf{s}_0 y \mathbf{f} con sendas clases de cohomología entera en grado dos, cosa que haremos sin previo aviso a partir de ahora. \square

La siguientes es una propiedad sobre los divisores en superficies regladas que necesitaremos más adelante.

Proposición 1.21. *Sea D un divisor efectivo de S y f una fibra de $\pi : S \rightarrow B$. Si D es numéricamente equivalente a kf entonces $D = k_1 f_1 + \dots + k_r f_r$ donde $k_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^r k_j = k$ y f_1, \dots, f_r son fibras.*

Demostración. Escribamos como suma de sus componentes irreducibles $D = \sum_{i=1}^r k_i C_i$, $k_i \geq 0$. Supongamos por reducción al absurdo que existiera algún i_0 para el cual C_{i_0} no fuera una fibra. Sea $p \in C_{i_0}$ y f la fibra de π que pasa por p . Como $p \in C_{i_0} \cap f \neq \emptyset$

se tiene que el producto de intersección de C_{i_0} y f es estrictamente positivo. Por otra parte tenemos que $0 = kf \cdot f = D \cdot f = \sum k_i C_i \cdot f$. Pero todos los sumandos $k_i C_i \cdot f$ son mayores o iguales que cero y existe uno, el correspondiente a $i = i_0$ que es estrictamente positivo. Llegamos así a una contradicción que proviene del hecho de suponer que alguna componente irreducible de D no era una fibra. Por tanto, $D = \sum_{i=1}^r k_i f_i$. Para acabar, observemos que

$$k = kf \cdot \mathbf{s}_0 = D \cdot \mathbf{s}_0 = \sum_{i=1}^r k_i f_i \cdot \mathbf{s}_0 = \sum_{i=1}^r k_i.$$

□

Ejemplo 1.22. Un caso particularmente sencillo de superficie reglada se obtiene cuando se considera la base $B = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Un conocido teorema de Grothendieck afirma que todo fibrado vectorial sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ descompone como suma directa de fibrados de línea. Por consiguiente, toda superficie reglada de base racional es isomorfa a

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}(n) \oplus \mathcal{O}(m)) = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(e)) =: F_e,$$

con $e = |n - m| \geq 0$. Las superficies F_e se conocen con el nombre de **superficies de Hirzebruch**. Observemos que F_0 es el producto $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ y también es fácil ver que F_1 es isomorfo al explotado de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ en un punto P y que las fibras de π en este caso son las transformadas estrictas de las rectas por P . Por otra parte, como el grupo de Picard de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ es isomorfo a \mathbb{Z} , entonces la Proposición 1.19 en este caso implica que

$$\text{Pic}(F_e) \cong \mathbb{Z} \mathbf{s}_0 \oplus \mathbb{Z} \mathbf{f} \cong \text{Num}(F_e) \cong H_2(F_e, \mathbb{Z}) \cong H^2(F_e, \mathbb{Z})$$

y el morfismo de Chern $c : H^1(F_e, \mathcal{O}_{F_e}^*) \rightarrow H^2(F_e, \mathbb{Z})$ es un isomorfismo.

Pasemos a considerar foliaciones en superficies regladas. La referencia básica en lo que sigue es el artículo de X. Gómez-Mont [GM89a]. Las construcciones y resultados que presentamos están extraídos de allí.

Si \mathcal{F} es una foliación holomorfa en una superficie reglada $\pi : S \rightarrow B$ podemos definir el divisor de tangencias de \mathcal{F} con la fibración π , que llamaremos divisor de verticalidad de \mathcal{F} y notaremos por $V_{\mathcal{F}}$, de la manera siguiente: Supongamos que \mathcal{F} viene definida por un morfismo de fibrados $X : T_{\mathcal{F}} \rightarrow TS$ y consideremos el fibrado tangente τ a la fibración π . Se tiene la siguiente sucesión exacta de fibrados

$$0 \longrightarrow \tau \longrightarrow TS \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0$$

donde N es el fibrado normal de la fibración. Definamos el morfismo $\overline{X} = p \circ X : T_{\mathcal{F}} \rightarrow N$, que podemos pensar como una sección holomorfa global del fibrado de línea $T_{\mathcal{F}}^* \otimes N$. De esta manera tenemos que el divisor $V_{\mathcal{F}}$ asociado a la sección \overline{X} es efectivo y tiene soporte

en los puntos q de S donde $X(q) \in \tau$, o equivalentemente, donde la hoja de \mathcal{F} por q es tangente a la fibra $\pi^{-1}(\pi(q))$. Notemos que $V_{\mathcal{F}}$ codifica también (con un peso sobre la correspondiente componente irreducible) el orden de tangencia de la hoja \mathcal{F} con la fibra de π .

Proposición 1.23. *Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa en una superficie reglada S sobre una curva compleja de género g . Entonces la clase de Chern del fibrado tangente de \mathcal{F} es igual a*

$$c(T_{\mathcal{F}}) = (2 - 2g)\mathbf{f} - V_{\mathcal{F}}.$$

Demostración. Con las notaciones introducidas más arriba, se tiene que $V_{\mathcal{F}} = c(T_{\mathcal{F}}^* \otimes N) = -c(T_{\mathcal{F}}) + c(N)$. Vamos a identificar la clase de Chern del fibrado normal N de la fibración. De las siguientes sucesiones exactas de fibrados vectoriales

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tau & \longrightarrow & TS & \xrightarrow{p} & N & \longrightarrow & 0 \\ 0 & \longrightarrow & \tau & \longrightarrow & TS & \xrightarrow{\pi_*} & \pi^*TB & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

deducimos que N es isomorfo a π^*TB por lo que

$$c(N) = c(\pi^*TB) = \pi^*c(TB) = (2 - 2g)\mathbf{f}.$$

□

Hay una clase especial de foliaciones en superficies regladas: las foliaciones de **Riccati**, que definimos a continuación.

Definición 1.24. *Decimos que una foliación \mathcal{F} en una superficie reglada $\pi : S \rightarrow B$ es de Riccati si y sólo si su divisor de verticalidad $V_{\mathcal{F}}$ está compuesto íntegramente por fibras de π invariantes por \mathcal{F} .*

Así, una foliación de Riccati en una superficie reglada $\pi : S \rightarrow B$ es aquella que tiene un número finito de fibras invariantes $f_1 = \pi^{-1}(b_1), \dots, f_k = \pi^{-1}(b_k)$, fuera de las cuales es transversa a la fibración. Por tanto, la restricción de \mathcal{F} a $S \setminus (f_1 \cup \dots \cup f_k)$ puede ser obtenida como la suspensión de su representación de holonomía

$$H_{\mathcal{F}}^{b_0} : \pi_1(B \setminus \{b_1, \dots, b_k\}, b_0) \rightarrow \text{Aut}(\pi^{-1}(b_0)) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{C}).$$

De las Proposiciones 1.21 y 1.23 se deduce la siguiente caracterización cohomológica de las foliaciones de Riccati que también encontramos en [GM89a].

Proposición 1.25 (Gómez-Mont). *Sea $\pi : S \rightarrow B$ una superficie reglada sobre una curva de género g y \mathcal{F} una foliación holomorfa en S . Entonces \mathcal{F} es una foliación de Riccati si y sólo si $c(T_{\mathcal{F}}) = a\mathbf{f}$ con $k = 2 - 2g - a \geq 0$. Además, en este caso \mathcal{F} tiene k fibras invariantes contadas con multiplicidad.*

Para acabar, explicitemos la escritura local de una foliación de Riccati \mathcal{F} sobre una superficie reglada $\pi : S \rightarrow B$. Sea U un abierto coordinado de B en el que S trivializa, es decir, tal que $\pi^{-1}(U)$ sea biholomorfo al producto $U \times \overline{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathbb{C} \times \overline{\mathbb{C}}$. Tomemos coordenadas (x, y) en dicho producto. Entonces la restricción de \mathcal{F} a $\pi^{-1}(U)$ viene definida por una 1-forma del tipo:

$$\omega_U = p(x)dy - \left(a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \right) dx,$$

es decir, por una ecuación de Riccati clásica:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a(x)}{p(x)}y^2 + \frac{b(x)}{p(x)}y + \frac{c(x)}{p(x)}.$$

Observemos que las singularidades de \mathcal{F} están sobre las fibras invariantes y que cada una de ellas tiene dos si las contamos con multiplicidad.

Capítulo 2

Un teorema de rigidez para foliaciones en superficies

Este capítulo trata sobre la rigidez analítica de foliaciones en superficies compactas por deformaciones topológicamente triviales, es decir, sobre la t -rigidez, tal y como la hemos introducido en el capítulo 1.

El primer resultado en esta línea fue dado por Yu S. Ilyashenko [Ily78] para foliaciones holomorfas en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ con una recta invariante. Más tarde, en [GMOB89], X. Gómez-Mont y L. Ortiz-Bobadilla generalizan el resultado al caso de una superficie proyectiva cambiando la recta por una curva amplia invariante. Las hipótesis de dichos teoremas son genéricas, en el sentido que se verifican en un subconjunto residual denso. Cabe destacar también el trabajo [LNSS98] de A. Lins Neto, P. Sad y B. Scárdua, en el que se muestra que las foliaciones rígidas de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ forman un conjunto abierto y se da una descripción del complementario.

El espacio ambiente en el que aquí nos vamos a interesar es el de una superficie compleja compacta con una fibración, y las foliaciones que consideraremos admitirán alguna fibra invariante.

La demostración del teorema de rigidez tiene dos partes claramente diferenciadas: En primer lugar se muestra que toda deformación topológicamente trivial es subyacente a un despliegue. Y luego, utilizando resultados cohomológicos, se prueba que el espacio versal de despliegues es trivial.

En la sección 2.2 demostramos el Teorema 2.5 que está inspirado en la demostración de la primera parte del Teorema de Ilyashenko tal y como se presenta en [GMOB89]. En éste último, las hipótesis son básicamente dos: la existencia de una recta \mathcal{L} invariante por la foliación \mathcal{F} en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ y el hecho de que dicha recta \mathcal{L} sea portadora de un grupo de holonomía suficientemente rico para que sea rígido (noción que recordamos en la sección 2.1). En la prueba Ilyashenko utiliza que todas las hojas son adherentes a la recta \mathcal{L} . Ello es

consecuencia del principio del máximo: el sistema diferencial asociado a \mathcal{F} en $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{L}$ es holomorfo, por lo que sus soluciones no pueden estar acotadas y deben acumular a la recta del infinito \mathcal{L} .

En la generalización de Gómez-Mont se sustituye $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ por una superficie algebraica S y la recta \mathcal{L} por una curva *amplia* $C \subset S$, que se supone igualmente invariante por \mathcal{F} y portadora de un grupo de holonomía rico. Recordemos que C es una curva amplia de S si y sólo si existe una inmersión ι de S en un espacio proyectivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ tal que C es una sección hiperplana, es decir, existe un hiperplano H de $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ tal que $C = \iota^{-1}(H) \cong H \cap \iota(S)$. Utilizando el mismo principio, las soluciones del sistema diferencial asociado a la foliación \mathcal{F} restringida a $S \setminus C \cong \iota(S) \setminus H \subset \mathbb{C}^N$ no pueden estar acotadas y adhieren entonces a $\iota(S) \cap H = \iota(C)$.

Sin embargo la hipótesis sobre la amplitud de C no se verifica en la situación que estamos interesados en estudiar: el caso en que C es una fibra de una fibración π de la superficie S sobre una curva compleja B . En efecto, en primer lugar, observemos que la autointersección de C es cero (por ser una fibra). Y por otra parte, C es amplia si y sólo si para todo divisor efectivo D se tiene que $C \cdot D > 0$.

En el Teorema 2.5 hemos decidido adoptar un contexto bastante general, aunque incluyendo en las hipótesis el hecho de que las hojas acumulen a una curva invariante dada \mathcal{L} , portadora de holonomía rica. Y es en la sección 2.3 donde mostramos que si S es una superficie compleja compacta que fibra sobre una curva y \mathcal{F} es una foliación holomorfa en S , diferente de la fibración y que tiene una fibra invariante con holonomía rica, entonces \mathcal{F} está en las hipótesis del Teorema 2.5. Finalmente, utilizamos los resultados cohomológicos de [GM89a] sobre la trivialidad de los despliegues infinitesimales de foliaciones holomorfas en superficies regladas para concluir con el Teorema de rigidez 2.15.

2.1 Rigidez de grupos de holonomía

Comenzaremos recordando la noción de rigidez para subgrupos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Sean Γ_1 y Γ_2 dos subgrupos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Decimos que un germen de homeomorfismo $h : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ conjugue Γ_1 y Γ_2 si y sólo si para cada $f \in \Gamma_1$ se tiene que $k(f) = h \circ f \circ h^{-1} \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ y $k(\Gamma_1) = \Gamma_2$. En este caso tenemos que $k : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ es un isomorfismo, que decimos inducido por h . Si denotamos por $D_0\Gamma \subset \mathbb{C}^*$ el grupo multiplicativo de las partes lineales de los elementos de un subgrupo $\Gamma \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tenemos que k induce un homomorfismo $k' : D_0\Gamma_1 \rightarrow D_0\Gamma_2$ definido sin ambigüedad por $k' \left(\frac{df}{dz} \Big|_{z=0} \right) = \frac{dk(f)}{dz} \Big|_{z=0}$. Decimos que un subgrupo Γ de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es rígido si para todo $h : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ germen de homeomorfismo que preserve la orientación y que conjugue Γ a otro subgrupo Γ' de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ se tiene que $h \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Algunos ejemplos de subgrupos rígidos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ son:

- (1) Los grupos no abelianos Γ con parte lineal $D_0\Gamma$ densa en \mathbb{C}^* , cf. Proposición 2.2.

(2) Todos los grupos no resolubles, cf. [Nak94, Shc84].

Ejemplo 2.1. Sea Γ un subgrupo de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ cuyos elementos linealizan (simultáneamente) en una misma coordenada local z , entonces Γ no es rígido. En efecto, dado $\mu \in \mathbb{C}^*$ con parte real mayor que -1 consideremos el homeomorfismo de $\overline{\mathbb{C}}$ definido por $h(z) = z|z|^\mu$. La condición $\text{Re } \mu > -1$ implica que $h(0) = 0$ y que h preserva la orientación. Observemos que $h(ah^{-1}(z)) = ah^{-1}(z)|a|^\mu|h^{-1}(z)|^\mu = a|a|^\mu z$. Por tanto, el homeomorfismo h induce una conjugación entre los grupos Γ y $\Gamma' = \{z \mapsto bz \mid b = h(a), a = f'(0) \text{ para algún } f \in \Gamma\}$. Por tanto, Γ no es rígido.

El homeomorfismo h del Ejemplo 2.1 es bastante representativo de la situación general como se pone de manifiesto en el siguiente resultado que podemos encontrar en [GMOB89]:

Proposición 2.2. *Sea h un germen de homeomorfismo de $(\mathbb{C}, 0)$ conjugando dos subgrupos Γ y Γ' de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Supongamos que Γ contiene algún elemento hiperbólico f . Entonces existen coordenadas ζ y ζ' que linealizan f y $k(f)$ de manera que h se expresa como*

$$\zeta' = h(\zeta) = \zeta|\zeta|^\mu F(\zeta), \text{ con } \mu \in \mathbb{C} \text{ y } F(\nu\zeta) = F(\zeta) \text{ para todo } \nu \in D_0\Gamma.$$

En particular, si $D_0\Gamma$ es denso entonces F es constante. Además, en este caso, y si Γ es no abeliano entonces $\mu = 0$, por lo que Γ es rígido.

Vamos a acabar esta sección con un resultado técnico sobre conjugación de singularidades hiperbólicas que utilizaremos en lo sucesivo. Sean pues, \mathcal{F}_α y \mathcal{F}_β dos foliaciones en un cierto abierto $U \subset \mathbb{C}^2$ con sendas singularidades hiperbólicas en el origen de residuos α y β respectivamente. Gracias al Teorema de linealización de Poincaré podemos escoger sendos sistemas de coordenadas en U de manera que \mathcal{F}_α y \mathcal{F}_β sean analíticamente equivalentes en U a las foliaciones dadas por

$$\omega_\alpha = xdy + \alpha ydx \quad \text{y} \quad \omega_\beta = xdy + \beta ydx$$

respectivamente. De esta manera, las curvas $S_x = \{x = 0\}$ y $S_y = \{y = 0\}$ son sus separatrices. Supongamos que ϕ es un homeomorfismo que conjuga \mathcal{F}_α y \mathcal{F}_β preservando las orientaciones y que fija un pequeño disco transversal Σ_y contenido en $\{x = c\}$. Módulo un reescalado lineal de las coordenadas, podemos suponer que $c = 1$. Entonces la restricción φ de ϕ a Σ_y conjuga las holonomías de la separatriz S_y :

$$\varphi(e^{2i\pi\alpha}y) = e^{2i\pi\beta}\varphi(y) \tag{2.1}$$

donde estamos identificando Σ_y con un abierto de \mathbb{C} mediante la parametrización $y \mapsto (1, y)$. Observemos que $\Sigma_y^* = \Sigma_y \setminus \{0\}$ admite como recubrimiento universal

$$\exp : \widetilde{\Sigma}_y^* \subset \mathbb{C} \rightarrow \Sigma_y^* \subset \mathbb{C}^*,$$

cuya proyección viene definida por $\exp(\tilde{y}) = e^{2i\pi\tilde{y}}$. La restricción de φ a Σ_y^* admite una elevación $\tilde{\varphi} : \widetilde{\Sigma}_y^* \rightarrow \widetilde{\Sigma}_y^*$ que verifica $\tilde{\varphi}(\tilde{y} + 1) = \tilde{\varphi}(\tilde{y}) + 1$ pues φ es un homeomorfismo preservando la orientación. Por otra parte, la relación (2.1) implica que

$$\tilde{\varphi}(\tilde{y} + \alpha) = \tilde{\varphi}(\tilde{y}) + \beta + k, \quad \text{para algún } k \in \mathbb{Z} \quad (2.2)$$

Y esto es todo lo que podríamos decir de una conjugación topológica de las holonomías si no tuviéramos otra información más que φ . Sin embargo, en nuestro caso, disponemos de una información suplementaria: la existencia del homeomorfismo ϕ .

Obsérvese que para definir $\varphi : \Sigma_y^* \rightarrow \Sigma_y^*$ no es necesario que el homeomorfismo ϕ esté definido en las separatrices S_x y S_y .

Proposición 2.3. *Con las notaciones anteriores, si el homeomorfismo ϕ está definido en $U \setminus (S_x \cup S_y)$ y se tiene que el isomorfismo inducido por ϕ a nivel de homología*

$$\phi_* : H_1(U \setminus (S_x \cup S_y), \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(U \setminus (S_x \cup S_y), \mathbb{Z})$$

es la identidad, entonces la relación (2.2) se verifica con $k = 0$, es decir,

$$\tilde{\varphi}(\tilde{y} + \alpha) = \tilde{\varphi}(\tilde{y}) + \beta \quad (2.3)$$

Demostración. En primer lugar, observemos que las proyecciones canónicas $p_x : U \setminus (S_x \cup S_y) \rightarrow \Sigma_x^* = \{y = 1, x \neq 0\}$ y $p_y : U \setminus (S_x \cup S_y) \rightarrow \Sigma_y^*$ inducen un isomorfismo $\chi = ((p_x)_*, (p_y)_*) : H_1(U \setminus (S_x \cup S_y), \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\Sigma_x^*, \mathbb{Z}) \oplus H_1(\Sigma_y^*, \mathbb{Z})$. Sean $\gamma_x(t) = (e^{2i\pi t}, 1)$ un camino cerrado en Σ_x^* y γ (resp. γ') la elevación de γ_x a la hoja de \mathcal{F}_α (resp. \mathcal{F}_β) que pasa por $y_0 \in \Sigma_y^*$ (resp. $\varphi(y) \in \Sigma_y^*$). Es fácil ver que la relación (2.3) es equivalente a que los caminos $\varphi(p_y(\gamma))$ y $p_y(\gamma')$ sean homótopos en Σ_y^* . Consideremos el camino cerrado $\delta = \gamma \cdot p_y(\gamma)^{-1}$. Utilizando el isomorfismo χ vemos que la clase de δ en homología coincide con la de γ_x , por tanto,

$$[\phi(\gamma) \cdot \varphi(p_y(\gamma))^{-1}] = \phi_*([\delta]) = \phi_*([\gamma_x]) = [\gamma_x],$$

y como $(p_y)_*([\gamma_x]) = 0$, deducimos que $p_y(\phi(\gamma))$ y $\varphi(p_y(\gamma))$ son homótopos. Por otra parte,

$$[p_x(\phi(\gamma))] = ((p_x)_* \circ \phi_*)([\delta]) = (p_x)_*([\gamma_x]) = [\gamma_x],$$

de donde se deduce que $\phi(\gamma)$ y γ' son elevaciones a la hoja de \mathcal{F}_β por $\varphi(y_0)$ de caminos homótopos en Σ_x^* . Por tanto, tanto los caminos $\phi(\gamma)$ y γ' , como sus proyecciones $p_y(\phi(\gamma))$ y $p_y(\gamma')$ son homótopos. \square

Gracias a la Proposición 2.2 podemos escribir $\varphi(y) = y|y|^\mu F(y)$ con $F(e^{2i\pi\alpha}) = F(y)$ y por tanto,

$$\tilde{\varphi}(\tilde{y}) = \tilde{y} + i\mu \operatorname{Im} \tilde{y} + \frac{1}{2i\pi} \log F(e^{2i\pi\tilde{y}}).$$

La Proposición 2.3 implica entonces que $\mu \in \mathbb{C}$ está completamente determinado por los residuos α y β de las singularidades. Más precisamente, podemos enunciar el siguiente resultado.

Proposición 2.4. *Sea ϕ una conjugación topológica entre dos singularidades hiperbólicas de residuos α y β que preserva las orientaciones. Supongamos que ϕ envía sobre sí misma una transversal Σ basada en un punto regular de una separatriz. Entonces la restricción φ de ϕ a Σ tiene la siguiente escritura en una coordenada linealizante de la holonomía:*

$$\varphi(y) = y|y|^\mu F(y), \quad \text{con} \quad \mu = i \frac{\alpha - \beta}{\text{Im } \alpha} \quad \text{y} \quad F(e^{2i\pi\alpha}y) = F(y). \quad (2.4)$$

Además, si la conjugación φ es analítica, entonces los residuos α y β son iguales.

2.2 Deformaciones y despliegues

Pasemos directamente a enunciar el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.5. *Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa en una superficie compleja S que es tangente a una curva lisa compacta y conexa \mathcal{L} que verifica además*

- (1) \mathcal{L} contiene una singularidad hiperbólica de \mathcal{F} .
- (2) El grupo de holonomía Γ de \mathcal{L} es rígido.
- (3) Todas las hojas de \mathcal{F} , a excepción quizás de un número finito de hojas cerradas, acumulan a \mathcal{L} en puntos regulares.

Entonces toda deformación topológicamente trivial de \mathcal{F} es subyacente a un despliegue.

Demostración. Consideremos $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \Delta}$ una deformación topológicamente trivial de \mathcal{F}_0 , esto es una familia holomorfa de foliaciones, parametrizada por un disco $\Delta \ni 0$ con $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ y tal que existe un homeomorfismo $\Phi : \Delta \times S \rightarrow \Delta \times S$ de la forma $\Phi(t, p) = (t, \phi_t(p))$ y de manera que $\phi_t : S \rightarrow S$ envía las hojas de \mathcal{F} sobre las hojas de \mathcal{F}_t . En primer lugar recordemos que trabajamos con foliaciones saturadas por lo que el lugar singular de cada \mathcal{F}_t es un conjunto discreto de puntos que varían analíticamente con t (pues la familia $\{\mathcal{F}_t\}$ es holomorfa en t). Así, denotando por Y al conjunto de estas singularidades tenemos que Y es un subconjunto analítico de $\Delta \times S$ de dimensión 1. Consideremos ahora en el abierto $\Omega = (\Delta \times S) \setminus Y$ la foliación topológica Θ , definida por la imagen por el homeomorfismo Φ de la foliación trivial (despliegue trivial) en $\Delta \times S$ cuyas hojas son de la forma $\Delta \times \mathcal{L}'$ con \mathcal{L}' hoja de \mathcal{F} . Veremos que Θ será de hecho una foliación holomorfa de codimensión 1 en Ω . El siguiente paso es extender Θ holomórficamente a todo $\Delta \times S$ utilizando el Teorema de Hartogs y el siguiente argumento de Gómez-Mont,

cf. p. 15 de [GMOB89]: Sea $p \in Y$ y W un abierto coordinado de $\Delta \times S$ que contenga a p . Podemos recubrir $W \setminus Y \hookrightarrow \mathbb{C}^3$ mediante abiertos W_i de manera que $\Theta|_{W_i}$ venga dada por una 1-forma holomorfa $\omega_i = a_i(x, y, t)dx + b_i(x, y, t)dy + c_i(x, y, t)dt$. Si $W_i \cap W_j \neq \emptyset$ tenemos que $\omega_i = g_{ij}\omega_j$ donde $g_{ij} : W_i \cap W_j \rightarrow \mathbb{C}^*$ es una función holomorfa que no se anula. Por tanto, las 1-formas meromorfas $\eta_i = \frac{\omega_i}{c_i(x, y, t)} = \frac{a_i(x, y, t)}{c_i(x, y, t)}dx + \frac{b_i(x, y, t)}{c_i(x, y, t)}dy + dt$ y $\eta_j = \frac{\omega_j}{c_j(x, y, t)} = \frac{a_j(x, y, t)}{c_j(x, y, t)}dx + \frac{b_j(x, y, t)}{c_j(x, y, t)}dy + dt$ coinciden en $W_i \cap W_j$. Por tanto, tenemos bien definidas dos funciones meromorfas A y B en $W \setminus Y$ poniendo $A|_{W_i} = \frac{a_i}{c_i}$ y $B|_{W_i} = \frac{b_i}{c_i}$. Como la codimensión de Y es 2, el Teorema de Hartogs para funciones meromorfas implica que las funciones A y B extienden a todo W por lo que la foliación Θ extiende a su vez a una foliación holomorfa en todo $\Delta \times S$. Por construcción, Θ induce \mathcal{F}_t en cada t -fibra concluyendo así con el teorema.

Para ver que Θ es una foliación holomorfa primero observemos que la familia \mathcal{F}_t induce una foliación holomorfa no singular por curvas en Ω . Sea $\{(U_i, \varphi_i)\}$ un atlas trivializante de esta foliación de dimensión 1. Denotaremos por $\bar{\varphi}_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{C}^2$ las submersiones locales que la definen. Sea Λ_i la foliación topológica que se obtiene sobre V_i al proyectar Θ mediante $\bar{\varphi}_i$. Si vemos que cada Λ_i es una foliación holomorfa habremos acabado pues $\Theta|_{U_i}$ sería la imagen recíproca por una submersión holomorfa de una foliación holomorfa. Para ver que Λ_i es holomorfa procederemos en tres pasos:

1. En primer lugar, veremos que si $U_i \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$ entonces la hoja de Λ_i correspondiente a $\tilde{\mathcal{L}} = \Phi(\Delta \times \mathcal{L})$ es holomorfa. Utilizaremos para ello la existencia de una singularidad hiperbólica de \mathcal{F} en \mathcal{L} .
2. Después veremos, utilizando la rigidez del grupo de holonomía de \mathcal{L} , que la foliación Λ_i es holomorfa en un entorno de $\bar{\varphi}_i(\tilde{\mathcal{L}})$.
3. Por último, gracias a la tercera condición impuesta a \mathcal{L} , obtendremos que para todo j la foliación Λ_j es holomorfa salvo quizás en un conjunto finito de hojas cerradas. Aplicando entonces una variante del Teorema de Extensión de Riemann concluiremos que Λ_j es de hecho holomorfa en todo V_j .

1. Utilizando que las hojas de cada \mathcal{F}_t están contenidas en las t -fibras podemos tomar coordenadas (t, w) en $V_i \subset \mathbb{C}^2$ de manera que $\bar{\varphi}_i(t, q) = (t, \bar{\varphi}_{i,t}(q))$. Sea $(t_0, w_0) \in \bar{\varphi}_i(\tilde{\mathcal{L}} \cap U_i)$, vamos a demostrar que $\bar{\varphi}_i(\tilde{\mathcal{L}} \cap U_i)$ es una subvariedad analítica en un entorno de (t_0, w_0) . Para ello sea $p \in \tilde{\mathcal{L}} \cap U_i$ un punto que se proyecte por $\bar{\varphi}_i$ en (t_0, w_0) y γ un lazo por p que de una sola vuelta a $p_{t_0} = \phi_{t_0}(p_0)$, donde p_0 es la singularidad hiperbólica de \mathcal{F} en \mathcal{L} cuya existencia hemos postulado en la hipótesis (1). Sea $\psi : V_i \rightarrow V_i$ la holonomía del camino γ respecto de la foliación de dimensión 1; como sus hojas están contenidas en las subvariedades t igual constante, tenemos que $\psi(t, w) = (t, \psi_t(w))$, donde ψ_t es la holonomía de γ respecto la foliación \mathcal{F}_t . Como $\phi_{t_0} : S \rightarrow S$ transforma la foliación \mathcal{F} en \mathcal{F}_{t_0} entonces conjuga ψ_{t_0} con la holonomía de \mathcal{F} al darle una vuelta a la singularidad hiperbólica p_0 .

Como la hiperbolicidad se conserva por conjugación topológica, cf. [GMOB89], tenemos que ψ_{t_0} también es hiperbólica, esto es, $|\frac{d}{dw}\psi_{t_0}(w_0)| \neq 1$. Estudiemos ahora los puntos fijos, Z , de $\psi(t, w)$, obtenidos como solución de la ecuación $\chi(t, w) = \psi_t(w) - w = 0$. Como $\frac{d}{dw}\chi_{t_0}(w_0) = \frac{d}{dw}\psi_{t_0}(w_0) - 1 \neq 0$, podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita a χ para concluir que en un entorno de (t_0, w_0) el conjunto Z es la gráfica de una función holomorfa $t \mapsto \tilde{w}(t)$. Ahora bien, la familia de lazos $\phi_t \circ \phi_{t_0}^{-1}(\gamma)$ dan una vuelta a p_t y se hallan cercanos a γ si t es próximo a t_0 , luego induce la holonomía ψ_t . De esta manera identificamos $\bar{\varphi}_i(\tilde{\mathcal{L}} \cap U_i)$ con el conjunto de puntos fijos, Z , de $\psi(t, w)$ en un entorno de (t_0, w_0) , donde ya hemos visto que es analítico.

2. Ahora que sabemos que $\bar{\varphi}_i(\tilde{\mathcal{L}} \cap U_i)$ es localmente la gráfica de una función holomorfa $t \mapsto \tilde{w}(t)$, podemos cambiar la coordenada w por $w - \tilde{w}(t)$ y suponer que $\bar{\varphi}_i(\tilde{\mathcal{L}} \cap U_i) = \Delta \times \{0\}$. Sea $\bar{\phi}_{i,t}$ el homeomorfismo local de \mathbb{C} en \mathbb{C} que cierra el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U_i \cap (\{0\} \times S) & \xrightarrow{\phi_t} & U_i \cap (\{t\} \times S) \\ \bar{\varphi}_{i,0} \downarrow & & \bar{\varphi}_{i,t} \downarrow \\ (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{\bar{\phi}_{i,t}} & (\mathbb{C}, 0) \end{array}$$

Como la familia continua de homeomorfismos ϕ_t envía la foliación \mathcal{F} a \mathcal{F}_t se sigue que la familia continua $\{\bar{\phi}_{i,t}\}$ conjuga las holonomías de \mathcal{L} y $\mathcal{L}_t = \phi_t(\mathcal{L})$. La rigidez del grupo de holonomía de \mathcal{L} (hipótesis (2) sobre \mathcal{L}) implica que los homeomorfismos $\bar{\phi}_{i,t}$ son de hecho holomorfos para cada t . Veamos que la familia $\{\bar{\phi}_{i,t}\}$ también es holomorfa en t .

Tenemos $\{\bar{\phi}_{i,t}\}$ una familia continua de biholomorfismos que conjugan las holonomías Γ y Γ_t de \mathcal{L} y \mathcal{L}_t respectivamente. Sabemos, por la hipótesis (1), que existe un elemento hiperbólico $\psi_0 \in \Gamma$. Sea ζ la coordenada linealizante correspondiente. Gracias al Teorema de linealización de Shroeder para familias analíticas, cf. [GMOB89], existe una familia holomorfa ζ_t de coordenadas linealizantes de $k_t(\psi_0) = \psi_t \in \Gamma_t$. Como Γ es rígido, deducimos de la Proposición 2.2 que $\bar{\phi}_{i,t}(\zeta) = \sigma(t)\zeta_t$, donde σ es una función, en principio solamente continua, de t que no depende de ζ y que no se anula nunca. Ahora bien, como los elementos de Γ_t dependen analíticamente de t (por ser $\{\mathcal{F}_t\}$ una familia holomorfa de foliaciones en S) tenemos que si $f(\zeta) = a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \dots \in \Gamma$ entonces

$$\bar{\phi}_{i,t} \circ f \circ \bar{\phi}_{i,t}^{-1}(\zeta_t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sigma(t)^{k-1}} \zeta_t^k \in \Gamma_t$$

depende analíticamente de t . Utilizamos ahora que Γ no es linealizable (por ser rígido y contener un elemento hiperbólico) para poder asegurar que existe algún elemento de Γ con algún coeficiente $a_k \neq 0$, $k > 1$ y así concluir que la función continua $\sigma(t)$ es holomorfa en t por ser raíz k -ésima de una función holomorfa.

Observemos ahora que las hojas de Λ_i son de la forma $\tilde{\mathcal{L}}' = \bar{\varphi}_i(U_i \cap \tilde{\mathcal{L}}')$, donde \mathcal{L}' es una hoja de \mathcal{F} y $\tilde{\mathcal{L}}' = \Phi(\Delta \times \mathcal{L}') = \bigcup_{t \in \Delta} (t, \phi_t(\mathcal{L}'))$. Así, $\tilde{\mathcal{L}}' = \bigcup_{t \in \Delta} (t, (\bar{\varphi}_{i,t} \circ \phi_t)(\mathcal{L}')) = \bigcup_{t \in \Delta} (t, (\bar{\varphi}_{i,t} \circ \bar{\varphi}_{i,0})(\mathcal{L}'))$, de donde la aplicación $V_i \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $(t, w) \mapsto \bar{\varphi}_{i,t}^{-1}(w)$ tiene por fibras las hojas de Λ_i , y acabamos de ver que es holomorfa en un entorno de $\Delta \times \{0\}$, luego Λ_i es una foliación holomorfa en un entorno de $\bar{\varphi}_i(\mathcal{L} \cap U_i)$.

3. La tercera hipótesis impuesta a \mathcal{L} y \mathcal{F} es puramente topológica, por tanto se verifica asimismo sobre \mathcal{L}_t y \mathcal{F}_t . Sea $(t, z) \in V_j$ y $p \in U_j$ tal que $\bar{\varphi}_j(p) = (t, z)$. Supongamos que la hoja por \mathcal{L}'_t de \mathcal{F}_t por p acumula a \mathcal{L}_t en puntos regulares. Entonces existen un abierto U_i tal que $U_i \cap \tilde{\mathcal{L}} \neq \emptyset$ y un punto $q \in \mathcal{L}'_t \cap U_i$ suficientemente cercano a \mathcal{L}_t . Sea γ un camino en \mathcal{L}'_t uniendo p y q y $\psi : V_j \rightarrow V_i$ la aplicación de holonomía de γ respecto a la foliación por curvas. Si escogemos una cadena de abiertos distinguidos $U_j = U_{j_0}, U_{j_1}, \dots, U_{j_r} = U_i$ que recubran γ y denotamos por $\bar{\varphi}_{j_k, j_{k-1}} : \bar{\varphi}_{j_{k-1}}(U_{j_k} \cap U_{j_{k-1}}) \rightarrow \bar{\varphi}_{j_k}(U_{j_k} \cap U_{j_{k-1}})$ el cambio de coordenadas transversas, tenemos que $\psi = \bar{\varphi}_{j_r, j_{r-1}} \circ \dots \circ \bar{\varphi}_{j_2, j_1} \circ \bar{\varphi}_{j_1, j_0}$. Veamos ahora que el biholomorfismo ψ lleva hojas de Λ_j a hojas de Λ_i :

$$\begin{aligned} \psi(\bar{\varphi}_j(\tilde{\mathcal{L}}')) &= \bar{\varphi}_{i, j_{r-1}} \circ \dots \circ \bar{\varphi}_{j_2, j_1} \circ \bar{\varphi}_{j_1, j_0} \circ \bar{\varphi}_j(\tilde{\mathcal{L}}') \\ &= \bar{\varphi}_{i, j_{r-1}} \circ \dots \circ \bar{\varphi}_{j_2, j_1} \circ \bar{\varphi}_{j_1}(\tilde{\mathcal{L}}') \\ &= \dots \\ &= \bar{\varphi}_i(\tilde{\mathcal{L}}'). \end{aligned}$$

De esta manera vemos que la foliación Λ_j es localmente la imagen recíproca por el biholomorfismo local ψ de la foliación Λ_i en un entorno de $\bar{\varphi}_i(\mathcal{L} \cap U_i)$, donde es holomorfa por el punto 2. Si en V_j no hay ninguna placa correspondiente a una hoja cerrada de \mathcal{F} que no acumule en puntos regulares de \mathcal{L} , entonces la foliación Λ_j es holomorfa en todo V_j . Supongamos finalmente que la unión C_j de placas de Λ_j correspondientes a dichas hojas cerradas es no vacía. Por una parte, el complementario $V_j \setminus C_j$ es abierto, y por otra, el argumento anterior muestra que la foliación Λ_j es holomorfa en $V_j \setminus C_j$. Con la ayuda del homeomorfismo Φ podemos escoger los abiertos U_j suficientemente pequeños de manera que exista un bidisco B , que podemos suponer centrado en el origen de \mathbb{C}^2 en unas coordenadas (t, w) de V_j , y de radios (s, r) , cumpliendo: $\bar{B} \subset V_j$, $B \cap C_j \cap \{t = a\} = \{(a, w_a)\}$ con $|w_a| < \frac{r}{2}$. En V_j definimos geoméricamente una función $f : V_j \rightarrow V_j \cap \{t = 0\}$ imponiendo que la imagen de (t, w) es el único punto $(0, w_1)$ que se encuentra en la misma hoja de Λ_j que (t, w) . Observemos que por construcción f está acotada y es continua. Además coincide con la función $(t, w) \mapsto \bar{\varphi}_{j,t}^{-1}(w)$ pues tiene el mismo comportamiento geométrico, luego define la foliación Λ_j en todo V_j . Como Λ_j es holomorfa en $V_j \setminus C_j$ tenemos que f también lo es, pues tomando abiertos trivializantes de Λ_j en $V_j \setminus C_j$ se tiene que f es la composición de los cambios de cartas transversos que son holomorfos. Definimos ahora

una nueva función

$$\tilde{f}(t, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(t, \zeta)}{\zeta - w} d\zeta$$

en B . Observemos que \tilde{f} es holomorfa separadamente en w , por construcción, y en t porque

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(t, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{\frac{\partial f}{\partial t}(t, \zeta)}{\zeta - w} d\zeta,$$

y el integrando del término de la derecha es cero al ser f holomorfa en $\{(t, \zeta) \mid |t| < s, |\zeta| = r\} \subset V_j \setminus C_j$. Por el lema de Osgood tenemos que \tilde{f} es holomorfa en B . Por otra parte, para cada t la función $f(t, \cdot) : D(0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ es acotada y holomorfa salvo quizás en w_t , por el Teorema de Extensión de Riemann y por continuidad tenemos que $f(t, \cdot) = \tilde{f}(t, \cdot)$ es holomorfa en todo el disco $D(0, r)$, luego $f = \tilde{f}$ en B y así f es holomorfa en todo V_j . Concluyendo así la demostración del teorema. \square

Existe una variante del Teorema 2.5 que merece una mención independiente.

Teorema 2.6. *Sea \mathcal{F} una foliación como en el Teorema 2.5 cumpliendo (3) y*

(1') *El grupo de holonomía Γ de \mathcal{L} es no resoluble.*

Entonces toda deformación topológicamente trivial de \mathcal{F} es subyacente a un despliegue.

Idea de la demostración. Como ya hemos apuntado al principio, la no resolubilidad de Γ implica su rigidez, cf. [Nak94]. El estudio de la dinámica no resoluble efectuado en [Wir98, BLL97] implica la existencia de una infinidad de puntos fijos atractivos. Utilizamos ahora el siguiente argumento de J.F. Mattei: dichos puntos fijos atractivos dependen analíticamente del parámetro de deformación t (por la misma razón que en la demostración del Teorema 2.5). Por tanto, las hojas de Θ que pasan por esos puntos fijos atractivos son analíticas. Concluimos entonces que la hoja $\tilde{\mathcal{L}} = \Phi(\mathcal{L} \times \Delta)$ también es analítica, al ser límite uniforme de hojas analíticas. A partir de este punto el resto de la demostración es idéntico a la prueba del teorema anterior. \square

2.3 Foliaciones con alguna fibra invariante

Vamos a demostrar que las foliaciones en superficies fibradas compactas con alguna fibra invariante verifican la tercera hipótesis del Teorema 2.5. Comenzaremos introduciendo algunos resultados que necesitaremos.

En primer lugar, la cuestión de la extensión de las soluciones $y(x)$ de una ecuación diferencial en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ a todo $x \in \mathbb{C}$, estudiada ya en los trabajos de Painlevé sobre ecuaciones diferenciales, cf. [Pai1897], se plantea de manera natural en cualquier contexto

fibrado mediante la elevación de caminos a las hojas de la foliación que la ecuación diferencial determina. Dicha formulación general fue sistematizada por R. Gérard y A. Sec en el trabajo [GS72], claramente inspirado en los resultados de Painlevé. Antes de pasar a enunciar el resultado que nos concierne recordemos una definición: sea $\pi : E \rightarrow B$ una aplicación continua y exhaustiva, una foliación regular \mathcal{F} en E se dice **simple** para la proyección π si y sólo si para todo punto m de E tiene un entorno trivializante de \mathcal{F} de manera que la placa por m encuentra a $\pi^{-1}(\pi(m))$ en el punto aislado m .

Teorema 2.7 (Painlevé, Gérard-Sec). *Sean (E, π, B) es un fibración holomorfa localmente trivial y \mathcal{F} una foliación holomorfa simple para esta fibración de dimensión $\dim \mathcal{F} = \dim B$; supongamos además que la fibra de (E, π, B) es compacta. Entonces para cualquier camino continuo $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ y para todo $m \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ existe una elevación $\tilde{\gamma}$ de γ contenida en la hoja que pasa por m tal que $\tilde{\gamma}(0) = m$.*

Ejemplo 2.8. Sean S es una superficie compleja compacta que fibra sobre B y \mathcal{F} una foliación holomorfa (singular) en S diferente de la fibración. Consideremos Σ el subconjunto de S formado por todas las fibras invariantes y las singularidades (aisladas) de \mathcal{F} . Es inmediato comprobar que en este caso la restricción de \mathcal{F} a $E = S \setminus \pi^{-1}(\pi(\Sigma))$ es simple para $\pi|_E$ y verifica por tanto las hipótesis del Teorema 2.7. Así pues, para todo camino continuo $\gamma : [0, 1] \rightarrow B \setminus \pi(\Sigma)$ y para todo $p \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ existe una elevación de γ a la hoja por p y empezando en p . El mismo resultado es cierto si sustituimos el intervalo cerrado $[0, 1]$ por el intervalo semiabierto $[0, 1)$ y aplicamos el resultado anterior a la familia de caminos $\gamma_t : [0, t] \rightarrow B \setminus \pi(\Sigma)$ para todo $t < 1$.

En segundo lugar, recordemos un teorema de E. Ghys (cf. [Ghy00]) generalizando al caso no algebraico el conocido teorema de Joanouloou concerniente a la finitud de las hojas cerradas de una foliación holomorfa en una variedad algebraica.

Teorema 2.9 (Ghys). *Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa singular de codimensión uno en una variedad compleja compacta conexa. Entonces \mathcal{F} posee un número finito de hojas cerradas salvo si \mathcal{F} admite una integral primera meromorfa, en cuyo caso todas las hojas son cerradas.*

Pasemos a enunciar y demostrar el resultado que nos permitirá aplicar el Teorema 2.5.

Proposición 2.10. *Sea S una superficie compleja compacta que es el espacio total de un fibrado localmente trivial de fibra lisa F sobre una curva B . Si \mathcal{F} es una foliación holomorfa en S diferente de la fibración y que admite una fibra invariante \mathbf{f}_0 con todas sus singularidades hiperbólicas entonces todas las hojas de \mathcal{F} , salvo quizás un número finito de hojas compactas, adhieren a \mathbf{f}_0 en puntos regulares.*

Demostración. En primer lugar, notemos que si una hoja \mathcal{L} de \mathcal{F} corta a todas las fibras en un número finito de puntos entonces es compacta, ya que entonces la restricción de la

proyección $\pi : S \rightarrow B$ a \mathcal{L} es finita, y por tanto propia. En segundo lugar, aplicando el Teorema 2.9 y debido a la hiperbolicidad de \mathbf{f}_0 (que impide la existencia de una integral primera meromorfa) deducimos que sólo hay un número finito de hojas compactas.

Sea \mathcal{L} una hoja no compacta de \mathcal{F} y $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ una colección infinita de puntos de \mathcal{L} sobre una fibra $\mathbf{f}_1 = \pi^{-1}(b_1)$. Sea $b_0 = \pi(\mathbf{f}_0) \in B$ y $\gamma : [0, 1) \rightarrow B \setminus \pi(\Sigma)$ un camino continuo tal que $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = b_0$, donde $\Sigma \subset S$ es el subconjunto considerado en el Ejemplo 2.8. Por tanto, para cada p_i existe γ_i una elevación de γ a la hoja \mathcal{L} comenzando en p_i . Consideremos $A_i(\gamma) \subset \mathbf{f}_0$ el conjunto de puntos de acumulación de $\gamma_i(t)$ cuando $t \rightarrow 1$. Debido a la hiperbolicidad de las singularidades de \mathbf{f}_0 , la unión $\cup_{i,\gamma} A_i(\gamma)$ debe contener algún punto regular de \mathbf{f}_0 . \square

Como consecuencia de la Proposición anterior y del Teorema 2.5 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.11. *Sea S una superficie compleja compacta que es el espacio total de un fibrado localmente trivial de fibra lisa F sobre una curva B . Si \mathcal{F} es una foliación holomorfa en S diferente de la fibración, y que admite una fibra invariante \mathbf{f}_0 con todas sus singularidades hiperbólicas y grupo de holonomía rígido, entonces toda deformación topológicamente trivial de \mathcal{F} es subyacente a un despliegue.*

Recordemos que todo despliegue local de una singularidad reducida es trivial, cf. Lema 1.9. También es conocido que todo despliegue local de una singularidad con número de Milnor igual a 1 (i.e. parte lineal no degenerada) y traza diferente de cero es trivial, cf. [GM89b]. Notemos que no toda singularidad con número de Milnor 1 y traza no nula es reducida (cf. capítulo 1), ni tampoco toda singularidad reducida tiene número de Milnor 1 (una silla-nodo no lo cumple).

Vamos a recordar dos resultados globales sobre despliegues de foliaciones en superficies complejas compactas. El primero de los cuales se encuentra en [GM89b]:

Teorema 2.12 (Gómez-Mont). *Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa en una superficie compleja compacta. Supongamos que el número de Milnor de todas singularidades de \mathcal{F} es igual a uno y que todas ellas tienen traza no nula. Si además $H^1(S, \mathcal{O}(T_{\mathcal{F}})) = 0$ entonces todo despliegue de \mathcal{F} es trivial.*

El segundo resultado global que presentaremos se encuentra en [MN94]: Consideremos K_e el espacio versal (ver las definiciones del capítulo 1) de despliegues equisingulares de una foliación \mathcal{F} en una superficie compacta S con singularidades aisladas p_1, \dots, p_k . Sea K_i^{loc} el espacio de parámetros del despliegue versal de las singularidades locales p_1, \dots, p_k , entonces existe una aplicación de restricción

$$\chi : K_e \longrightarrow K_1^{loc} \times \dots \times K_k^{loc}$$

Teorema 2.13 (Mattei-Nicolau). *Si $H^1(S, \mathcal{O}(T_{\mathcal{F}})) = 0$ entonces la aplicación tangente $T_0\chi$ es un isomorfismo. Si $H^2(S, \mathcal{O}(T_{\mathcal{F}})) = 0$ entonces K_e es liso y χ es un isomorfismo.*

Como consecuencia, todo despliegue de una foliación \mathcal{F} en una superficie compacta S , con todas sus singularidades reducidas es analíticamente trivial si $H^1(S, \mathcal{O}(T_{\mathcal{F}})) = 0$.

En [GM89a] se hace un estudio exhaustivo de los grupos de cohomología $H^1(S, \mathcal{O}(L))$ para toda superficie reglada S y todo dibrado de línea L sobre S . Utilizando las notaciones del capítulo 1 para las clases de Chern de fibrados de línea en superficies regladas podemos sintetizar sus resultados en el siguiente teorema.

Teorema 2.14 (Gómez-Mont). *Sea $X : L \rightarrow TS$ una foliación con singularidades aisladas en una superficie reglada compacta $\pi : S \rightarrow B$. Entonces $H^1(S, \mathcal{O}(L)) = 0$ salvo si se da alguna de las siguientes situaciones:*

- (1) *El género de la base B es $g > 1$ y*
 - (i) *o bien X define la fibración π y se tiene que $c(L) = 2\mathbf{s}_0 - e\mathbf{f}$, donde \mathbf{s}_0 es la imagen de una sección holomorfa $\sigma : B_g \rightarrow S$ realizando el invariante e de S (cf. capítulo 1). En este caso se tiene que $\dim H^1(S, \mathcal{O}(L)) = 3g - 3 + \dim H^0(S, \mathcal{O}(L))$.*
 - (ii) *o bien X es una foliación de Riccati y $c(L) = a\mathbf{f}$ con $b = 2 - 2g - a \geq 0$. En este caso se tiene que $\dim H^1(S, \mathcal{O}(L)) = 3g - 3 + b$.*
- (2) *El género de B es $g = 1$ y X es una foliación de Riccati o bien una foliación no singular.*
- (3) *La base $B = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ (género $g = 0$) en cuyo caso S es una superficie de Hirzebruch F_e y se satisface una de las hipótesis siguientes*
 - (i) *o bien $e = 0$ (en cuyo caso $S = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, cf. capítulo 1) y X es la otra proyección π' o una foliación de Riccati respecto de π' .*
 - (ii) *o bien $e = 1$ (en cuyo caso S es el explotado de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ en un punto) y $c(L) = \mathbf{f} - n\mathbf{l}$, donde $\mathbf{l} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{f}$ es la clase del transformado estricto por la explosión de una recta de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ que no pasaba por el punto explotado. Además, en este caso $\dim H^1(F_1, \mathcal{O}(L)) = 1$.*

Aplicando los resultados anteriores obtenemos como corolario inmediato el siguiente resultado.

Teorema 2.15. *Sea S una superficie reglada y \mathcal{F} una foliación holomorfa que verifica:*

- (1) *\mathcal{F} tiene una fibra invariante \mathbf{f}_0 con todas las singularidades hiperbólicas y grupo de holonomía rígido.*

- (2) Todas las singularidades de \mathcal{F} fuera de \mathbf{f}_0 son reducidas o bien tienen número de Milnor 1 y traza no nula.
- (3) El fibrado tangente $T_{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} verifica $H^1(S, \mathcal{O}(T_{\mathcal{F}})) = 0$, es decir, la foliación \mathcal{F} no está en la lista del Teorema 2.14.

Entonces toda deformación topológicamente trivial de \mathcal{F} es analíticamente trivial, en otras palabras \mathcal{F} es *t-rígida*.

En [Ily78] también se estudian dos propiedades importantes de la foliaciones con una recta invariante: la densidad de las hojas y la *ergodicidad*. Una foliación \mathcal{F} en S se dice ergódica si para todo conjunto boreliano A de S que sea \mathcal{F} -saturado se tiene que o bien A o bien su complemento $S \setminus A$ tienen medida de Lebesgue nula.

El punto clave es el estudio *transverso* de estas dos propiedades, es decir, la densidad y ergodicidad para subgrupos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ que podemos resumir en el siguiente teorema, ver por ejemplo [GMOB89].

Teorema 2.16. *Sea Γ un subgrupo de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ con parte lineal $D_0\Gamma$ densa en \mathbb{C}^* , entonces:*

1. *Existe un entorno U del origen tal que para todo $p \in U \setminus \{0\}$ la órbita de p , por el pseudogrupo generado por Γ , es densa.*
2. *Γ es ergódico, es decir, para todo germen de conjunto boreliano $A \subset (\mathbb{C}, 0)$ que sea Γ -invariante se tiene que o bien A o su complemento tienen medida cero en algún entorno del origen.*

Con la misma demostración que en los casos analizados en [Ily78] y [GMOB89], usando el teorema anterior y la Proposición 2.10 se obtiene el siguiente resultado global sobre densidad y ergodicidad:

Teorema 2.17. *Sea S una superficie compacta que es el espacio total de un fibrado localmente trivial sobre una curva B . Si \mathcal{F} es una foliación holomorfa en S diferente de la fibración, y que admite una fibra invariante con todas sus singularidades hiperbólicas y cuyo grupo de holonomía Γ verifica que sus partes lineales $D_0\Gamma$ son densas en \mathbb{C}^* entonces:*

1. *Todas las hojas de \mathcal{F} excepto un número finito son densas en S .*
2. *\mathcal{F} es ergódica.*

2.4 Conjugación topológica de foliaciones de Riccati

Sea $\pi : S \rightarrow B$ una superficie reglada sobre una curva de género g . Recordemos que una foliación de Riccati \mathcal{F} en S es una foliación que, fuera de un número finito de fibras \mathcal{F} -invariantes de π , es transversa a la fibración. Para facilitar la exposición, en el caso excepcional en que S tiene dos reglas, $S = F_0 = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, llamaremos foliación de Riccati a aquella que lo sea para alguna de las dos fibraciones.

Recordemos también la Proposición 1.25 que nos caracteriza las foliaciones de Riccati en función de la clase de Chern de su fibrado tangente: \mathcal{F} es una foliación de Riccati si y sólo si $c(T_{\mathcal{F}}) = a\mathbf{f}$ con $k = 2 - 2g - a \geq 0$. En este caso, \mathcal{F} tiene k fibras invariantes contadas con multiplicidad.

Por otra parte, también se tiene un resultado que expresa la invariancia topológica de la clase de Chern del fibrado tangente de una foliación por curvas en una variedad compleja, cf. [GMSV91]. En [SV97] se generaliza dicho resultado a la clase de Euler del fibrado tangente de una foliación orientada de dimensión real p en una variedad compacta, supuesto que el lugar singular sea de codimensión mayor o igual que $p + 2$.

Teorema 2.18 (Gómez-Mont, Seade, Verjovsky). *Sea M una variedad compleja conexa y $\phi : M \rightarrow M$ un homeomorfismo que conjuga dos foliaciones holomorfas singulares por curvas \mathcal{F} y $\mathcal{G} = \phi^*\mathcal{F}$. Entonces $c(T_{\phi^*\mathcal{F}}) = \phi^*(c(T_{\mathcal{F}}))$.*

Nuestro primer objetivo es demostrar el siguiente resultado.

Teorema 2.19. *Sea \mathcal{F} una foliación de Riccati en una superficie reglada S con k fibras invariantes contadas con multiplicidad. Si \mathcal{G} es otra foliación holomorfa en S tal que existe un homeomorfismo $\phi : S \rightarrow S$ cumpliendo $\mathcal{G} = (\phi^{-1})^*\mathcal{F}$ y preservando las orientaciones, entonces \mathcal{G} también es de Riccati, con k fibras invariantes contadas con multiplicidad. Además, todas las fibras de \mathcal{F} son simples si y sólo si las de \mathcal{G} lo son.*

Demostración. Distinguiremos los casos regular y singular. Supongamos en primer lugar que \mathcal{F} es una foliación de Riccati regular sobre la superficie reglada S que fibra sobre una curva de género g . Como \mathcal{G} es topológicamente conjugada a \mathcal{F} también es regular. La Proposición 2.7 de [GM89a] afirma que si $g \neq 1$ entonces o bien \mathcal{G} es la fibración o bien es transversa a la fibración, es decir, una foliación de Riccati sin fibras invariantes, tal y como habíamos supuesto que era \mathcal{F} . Si \mathcal{G} es la fibración entonces $S = F_0$ y \mathcal{F} es la otra fibración, por lo que \mathcal{G} es de Riccati respecto de proyección horizontal.

Analícemos ahora el caso regular con $g = 1$. Como \mathcal{F} es una foliación de Riccati sin fibras invariantes, por la Proposición 1.25 tenemos que $c(T_{\mathcal{F}}) = (2 - 2g)\mathbf{f} = 0$. Por tanto,

$$c(T_{\mathcal{G}}) = c(T_{(\phi^{-1})^*\mathcal{F}}) = (\phi^{-1})^*(c(T_{\mathcal{F}})) = 0$$

y \mathcal{G} también es una foliación de Riccati.

Pasemos ahora analizar el caso singular. En esta situación, la foliación \mathcal{F} tiene alguna fibra invariante f . La imagen de f por ϕ es una hoja compacta (junto con las correspondientes singularidades) de \mathcal{G} . Observemos que una singularidad $q = \phi(p)$ de \mathcal{G} no es un punto singular de la curva $\phi(f)$. En efecto, consideramos una pequeña esfera $\mathbb{S}^3(p, \varepsilon)$ centrada en p . La intersección $f \cap \mathbb{S}^3(p, \varepsilon)$ es una circunferencia no anudada. Topológicamente, la imagen de $\mathbb{S}^3(p, \varepsilon)$ por ϕ también es topológicamente una pequeña esfera, en este caso centrada en q , por tanto, la intersección $\phi(f) \cap \phi(\mathbb{S}^3(p, \varepsilon))$ también es una circunferencia no anudada y por tanto q es un punto regular de $\phi(f)$. Deducimos por tanto, que $\phi(f)$ es una curva racional de S (por ser una curva lisa compacta homeomorfa a \mathbb{S}^2). Por otra parte, como la autointersección es un concepto puramente topológico, se conserva por homeomorfismos. Por tanto, $\phi(f)$ tiene autointersección cero al igual que f . Distingamos dos casos:

- (1) Si $g = 0$ entonces S es una superficie de Hirzebruch F_e , las cuales trataremos con más detalle en el siguiente capítulo. Una propiedad que demostraremos luego y que está contenida en la Proposición 3.1 es que toda curva irreducible de autointersección nula en F_e con $e > 0$ es necesariamente una fibra. Utilizando este hecho tenemos que si $e > 0$ entonces $\phi(f)$ es una fibra. Sólo resta analizar el caso $e = 0$, es decir, cuando $S = F_0 = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. En esta situación, $\phi(f)$ sólo puede ser, o bien una fibra vertical, o bien una fibra horizontal (en cuyo caso consideraríamos la segunda fibración de F_0 , donde tenemos definida la foliación \mathcal{G}).
- (2) Si $g \geq 1$ y $\phi(f)$ no fuera una fibra entonces la restricción de la proyección $\pi : S \rightarrow B_g$ a $\phi(f)$ sería un recubrimiento ramificado. La fórmula de Riemann-Hurwitz implicaría en este caso que $0 > -2 = d(2g - 2) + R$ con $d, R \geq 0$, lo cual es evidentemente contradictorio.

Concluimos de esta manera que en cualquier caso $\phi(f)$ es una fibra f' de la fibración, invariante por la foliación \mathcal{G} . Ahora examinemos la acción de ϕ en cohomología: $\phi^* : H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$. Como $\phi(f) = f'$ tenemos que $\phi^*(\mathbf{f}) = c\mathbf{f}$ para algún $c \in \mathbb{Z}^*$. Por otra parte, al ser ϕ es un homeomorfismo deducimos que ϕ^* es un isomorfismo. Por tanto, la matriz de ϕ^* en la base \mathbf{f}, \mathbf{s}_0 es de la forma

$$\begin{pmatrix} c & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$$

lo cual implica que $c = \pm 1$. Como ϕ preserva la orientación de las hojas, en particular preserva la orientación de f , y por tanto $c = +1$, es decir, $\phi^*(\mathbf{f}) = \mathbf{f}$.

Concluimos que $\mathcal{G} = (\phi^{-1})^*\mathcal{F}$ es una foliación de Riccati gracias a la Proposición 1.25 pues si $c(T_{\mathcal{F}}) = a\mathbf{f}$ entonces

$$c(T_{\mathcal{G}}) = c(T_{(\phi^{-1})^*\mathcal{F}}) = (\phi^{-1})^*(c(T_{\mathcal{F}})) = (\phi^{-1})^*(a\mathbf{f}) = a(\phi^{-1})^*(\mathbf{f}) = a\mathbf{f}.$$

□

El siguiente paso, es comparar las holonomías de \mathcal{F} y $\mathcal{G} = (\phi^{-1})^*\mathcal{F}$ sobre sendas fibras transversas. Ello nos lleva a modificar el homeomorfismo ϕ de manera que continúe conjugando \mathcal{F} y \mathcal{G} y que envíe una fibra transversa a \mathcal{F} sobre una fibra transversa a \mathcal{G} .

Lema 2.20. *Sea $\phi : S \rightarrow S$ un homeomorfismo de una superficie reglada que conjugue dos foliaciones de Riccati \mathcal{F} y \mathcal{G} . Entonces existe un homeomorfismo $\xi : S \rightarrow S$ isótopo a la identidad tal que $\xi \circ \phi$ continúa conjugando \mathcal{F} y \mathcal{G} y además envía una fibra transversa a \mathcal{F} sobre una fibra transversa a \mathcal{G} .*

Demostración. Sea Σ una fibra transversa a \mathcal{F} y $f = p \circ \phi|_{\Sigma} : \Sigma \rightarrow B'$, donde $B' = B \setminus \{b'_1, \dots, b'_k\}$, la base menos la proyección de las fibras \mathcal{G} -invariantes, es una superficie de Riemann diferente de $\overline{\mathbb{C}}$ (pues si $B = \overline{\mathbb{C}}$ entonces $k > 0$, salvo si \mathcal{G} es la fibración horizontal en $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, caso que excluirémos por su trivialidad). Por tanto, el recubrimiento universal de B' es o bien el disco o bien \mathbb{C} . Se puede hacer una construcción análoga en ambos casos, pero nos limitaremos a explicitarla en el caso, más general, en que el recubrimiento universal $\pi : \mathbb{D} \rightarrow B'$ de B' sea el disco, utilizando para ello la métrica hiperbólica. Como $\pi_2(B') = 0$ y $\Sigma \cong \mathbb{S}^2$ tenemos que $f : \Sigma \rightarrow B'$ es homótopa a constante, por lo que admite una elevación continua $\tilde{f} : \Sigma \rightarrow \mathbb{D}$. Por compacidad de Σ , existe un $R > 0$ de manera que $\tilde{f}(\Sigma) \subset B(0, R)$. Fijado dicho $R > 0$ existen $r, \theta > 0$ verificando las condiciones siguientes: Para todo $z \in B(0, R)$ la proyección π restringida al sector $S_z = S(z, r, \theta) := \{w \in \mathbb{D} \mid ||z| - |w|| < r, |\arg z - \arg w| < \theta\}$ es un homeomorfismo. Pongamos también $T_z = S(z, r/2, \theta/2)$ y consideremos una función diferenciable $g_z : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$ de soporte contenido en S_z tal que $|f| \geq K$ en T_z para un cierto $K > 0$. Sea U el campo radial real normalizado con la métrica hiperbólica y definamos el campo $\tilde{X}_z = g_z U$. El flujo $h_z^t = \exp t\tilde{X}_z$, $t \in [0, 1]$ define una isotopía en \mathbb{D} cumpliendo que $d(h_z^1(u), 0) \leq \epsilon d(u, 0)$ para todo $u \in T_z$, donde $\epsilon < 1$ depende de K y R .

El campo \tilde{X}_z desciende a un campo $\bar{X}_z \neq 0$ en B' , que se eleva a su vez a un campo real X_z en $S \setminus p^{-1}(\{b'_1, \dots, b'_k\})$ tangente a la foliación \mathcal{G} . Para cada $z \in \tilde{f}(\Sigma)$ consideremos los conjuntos $D_z = \phi(\Sigma) \cap p^{-1}(\pi(z))$ y $E_z = \{q \in D_z \mid \tilde{f}(\phi^{-1}(q)) = z\}$. Sea V_z un entorno abierto de E_z en la fibra $p^{-1}(z)$ que no contenga ningún punto de $D_z \setminus E_z$ y $\rho_z : p^{-1}(\pi(z)) \rightarrow [0, 1]$ una función test diferenciable que valga uno en E_z y cero fuera de V_z . Extendemos ρ_z a un entorno de dicha fibra decretando que sea constante sobre las placas de \mathcal{G} . Finalmente, definimos el difeomorfismo C^∞ dado por $\xi_z = \exp \rho_z X_z$ como una modificación elemental de ϕ centrada en z . Por la compacidad de $\tilde{f}(\Sigma)$ y como $\epsilon < 1$, después de efectuar la composición ξ' de un número finito N de modificaciones elementales diferenciables se tiene que $(\xi' \circ \phi)(\Sigma)$ está contenido en un entorno trivializante, para la foliación \mathcal{G} y la proyección p , de la fibra sobre el punto $b_0 = \pi(0) \in B'$. Allí es posible efectuar una última modificación, en este caso solamente continua, y enderezar $\phi(C)$ sobre la fibra $p^{-1}(b_0)$. \square

El siguiente resultado expresa de una manera precisa que si dos foliaciones de Riccati

son topológicamente conjugadas entonces sus representaciones de holonomía también lo son.

Proposición 2.21. *Sea $p : S \rightarrow B$ una superficie reglada y $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ dos foliaciones de Riccati con fibras invariantes f_1, \dots, f_k y f'_1, \dots, f'_k sobre b_1, \dots, b_k y b'_1, \dots, b'_k respectivamente. Si ϕ es un homeomorfismo $\phi : S \rightarrow S$ que conjugua las foliaciones \mathcal{F} y \mathcal{F}' preservando las orientaciones y que envía una transversal $\Sigma_0 = p^{-1}(b_0)$ sobre $\Sigma'_0 = p^{-1}(b'_0)$. Entonces existe un isomorfismo $\psi : \pi_1(B \setminus \{b_1, \dots, b_k\}, b_0) \rightarrow \pi_1(B \setminus \{b'_1, \dots, b'_k\}, b'_0)$ tal que si denotamos por φ_0 la restricción de ϕ a Σ_0 se tiene la siguiente relación entre las representaciones de holonomía $H_{\mathcal{F}}^{b_0}$ y $H_{\mathcal{F}'}^{b'_0}$ de \mathcal{F} y \mathcal{F}' :*

$$(\varphi_0)_* \circ H_{\mathcal{F}}^{b_0} = H_{\mathcal{F}'}^{b'_0} \circ \psi.$$

Demostración. El resultado es una consecuencia directa de que \mathcal{F} y \mathcal{F}' restringidas a S menos las fibras invariantes son suspensiones y del hecho que la fibra $\overline{\mathbb{C}}$ es simplemente conexa, lo cual implica que $p_* : \pi_1(S \setminus (f_1 \cup \dots \cup f_k), q_0) \rightarrow \pi_1(B \setminus \{b_1, \dots, b_k\}, b_0)$ es un isomorfismo. \square

Observación 2.22. El isomorfismo $\psi : \pi_1(B \setminus \{b_1, \dots, b_k\}, b_0) \rightarrow \pi_1(B \setminus \{b'_1, \dots, b'_k\}, b'_0)$ es **geométrico** en el sentido que existe un homeomorfismo $h : B \rightarrow B$ que preserva la orientación y tal que induce $h_* = \psi$ a nivel de grupos de homotopía. Ello es debido al Teorema de Nielsen (cf. [ZVC80] o bien el Teorema 4.30 en el caso de la esfera menos un número finito de puntos), el cual caracteriza algebraicamente los isomorfismos geométricos entre grupos fundamentales de superficies.

Vamos a introducir una noción de rigidez para subgrupos de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ que será análoga a la considerada para $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$.

Definición 2.23. *Diremos que un subgrupo $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ es **rígido** si para todo homeomorfismo $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ que conjugue Γ con $\Gamma' = \varphi^{-1} \circ \Gamma \circ \varphi \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ se tiene que φ es conforme. Diremos que Γ es **débilmente rígido** si para todo subgrupo Γ' de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ topológicamente conjugado a Γ por un homeomorfismo $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ se tiene que Γ y Γ' son conjugados como subgrupos de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.*

Observación 2.24. Naturalmente, la rigidez implica la rigidez débil de Γ . Por otra parte, D. Sullivan define subgrupo rígido como aquél cuyas representaciones en $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ suficientemente cercanas a la inclusión $\Gamma \hookrightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ son conjugadas a ésta. Es decir, se trata de una especie de rigidez débil local, cf. [Sul85].

Recordemos los siguientes hechos bien conocidos sobre subgrupos $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, cf. [Sul85] por ejemplo:

- (a) Γ es resoluble si y sólo si es conjugado a un subgrupo de $\mathrm{Aff}(1, \mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b\}$, es decir, si todos sus elementos tienen un punto fijo común.

- (b) Si Γ es no resoluble y no discreto entonces la adherencia $\overline{\Gamma}$ de Γ contiene a un subgrupo conjugado a $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ o $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$, en particular $\overline{\Gamma}$ tiene dimensión mayor o igual que dos.
- (c) Si $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ es un homeomorfismo **quasi-conforme** que conjugua Γ y $\Gamma' \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ entonces existe un campo de líneas Γ -invariante. Recíprocamente, el Teorema de uniformización medible de Riemann asocia a cada campo de líneas Γ -invariante una conjugación quasi-conforme de Γ con otro subgrupo Γ' de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. De esta manera se tiene la implicación: existe un campo de líneas Γ -invariante no trivial $\implies \Gamma$ no rígido. Por otra parte, se tiene el siguiente resultado de [Sul85] concerniente a los campos de líneas invariantes:

Teorema 2.25 (Sullivan). *Si $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ es finito generado, no resoluble y admite un campo de líneas invariante no trivial entonces Γ es no discreto y tiene un dominio de discontinuidad no trivial.*

Por tanto, en el caso de que Γ sea finito generado, no resoluble y discreto, Γ solamente puede ser no rígido mediante un homeomorfismo $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ que no sea quasi-conforme. El caso Γ resoluble, no discreto y no rígido se puede dar, basta considerar como $\Gamma = \mathrm{Aff}(1, \mathbb{R})$, el cual admite un campo de líneas (horizontales) invariante no trivial. En el caso de que Γ sea no resoluble y no discreto se tiene la rigidez. En efecto, en [LN87] por ejemplo, se muestra que si Γ es un grupo no discreto que contiene dos elementos sin puntos fijos comunes entonces toda conjugación topológica entre Γ y otro subgrupo Γ' de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ es conforme. En la demostración se utiliza el hecho de que la adherencia de Γ es de dimensión mayor o igual que dos. Por último, en el caso Γ discreto cabe destacar el Teorema de Mostow que implica la rigidez débil de Γ si éste es de co-volumen finito (actuando sobre el espacio hiperbólico de dimensión tres).

Proposición 2.26. *Con las mismas notaciones que en la Proposición 2.21, si además las singularidades de \mathcal{F} son hiperbólicas y el grupo de holonomía $\Gamma \subset \mathrm{Diff}(\Sigma_0) \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ de \mathcal{F} es rígido entonces los residuos de las singularidades correspondientes por ϕ son iguales.*

Demostración. La igualdad de los residuos es consecuencia de la rigidez del grupo de holonomía, que implica que $\varphi_0 \in \mathrm{Diff}(\Sigma_0, \Sigma'_0) \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ y de la Proposición 2.4. \square

Además, podemos demostrar el "recíproco" de la proposición anterior.

Proposición 2.27. *Sea $p : S \rightarrow B$ una superficie reglada y $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ dos foliaciones de Riccati con fibras invariantes f_1, \dots, f_k y f'_1, \dots, f'_k sobre b_1, \dots, b_k y b'_1, \dots, b'_k respectivamente y singularidades hiperbólicas. Supongamos que existe un isomorfismo geométrico $\psi : \pi_1(B \setminus \{b_1, \dots, b_k\}, b_0) \rightarrow \pi_1(B \setminus \{b'_1, \dots, b'_k\}, b'_0)$ y un biholomorfismo $\varphi_0 : \Sigma_{b_0} \rightarrow \Sigma_{b'_0}$ tal que $(\varphi_0)_* \circ H_{\mathcal{F}}^{b_0} = H_{\mathcal{F}'}^{b'_0} \circ \psi$ y los residuos de las singularidades sobre f_i son iguales a los de las*

singularidades sobre la fibra invariante f'_i que le corresponde por ψ . Entonces existe un homeomorfismo fibrado $\phi : S \rightarrow S$ que preserva las orientaciones, conjugua las foliaciones \mathcal{F} y \mathcal{F}' y además, induce ψ en homotopía.

Demostración. Sean $D_i, D'_i \subset B$ entornos abiertos de b_i y b'_i respectivamente, disjuntos y simplemente conexos. Por el Teorema de uniformización de Riemann, existe un biholomorfismo $\varphi_i : D_i \rightarrow D'_i$ que envía b_i en b'_i . Como ψ es geométrico, existe un homeomorfismo $h : B \rightarrow B$ preservando la orientación, verificando $h(b_i) = b'_i$, $i = 0, \dots, k$ y $h_* = \psi$. Es posible encontrar un nuevo homeomorfismo $\varphi : B \rightarrow B$ homótopo a h respecto a los puntos b_0, \dots, b_k de manera que $\varphi|_{D_i} = \varphi_i$. A continuación extendemos φ a un homeomorfismo fibrado $\phi : S \setminus (f_1 \cup \dots \cup f_k) \rightarrow S \setminus (f'_1 \cup \dots \cup f'_k)$ utilizando las foliaciones \mathcal{F} y \mathcal{F}' que allí son transversas a la fibración. Sólo queda observar que ϕ extiende a las fibras invariantes f_i , $i = 1, \dots, k$. Consideremos el abierto $U_i = \pi^{-1}(D_i)$ de S y coordenadas (x, y) en U_i que lo identifiquen con el producto $\mathbb{D} \times \overline{\mathbb{C}}$. Como las singularidades de \mathcal{F} son hiperbólicas, ello es posible hacerlo de manera que las separatrices locales de las singularidades de la fibra $f_i = \{x = 0\}$ se escriban en estas coordenadas como $\{y = 0\}$ y $\{y = \infty\}$. Así, es fácil ver que $\mathcal{F}|_{U_i}$ viene definida en estas coordenadas mediante una 1-forma del tipo $x dy + (\alpha_i + x a_i(x)) y dx$. De la misma manera, razonamos con $\mathcal{F}'|_{U_i}$ que viene dada por $x dy + (\alpha_i + x a'_i(x)) y dx$. Entonces, el homeomorfismo $\phi|_{D_i}$ se escribe en estas coordenadas como $(x, y) \mapsto (x, y e^{\int_0^x (a_i(t) - a'_i(t)) dt})$ y está bien definido sobre la separatriz $\{x = 0\}$. \square

Capítulo 3

Algunos ejemplos de foliaciones no rígidas

En este capítulo, damos algunos ejemplos de foliaciones que se pueden deformar analíticamente dentro de una misma clase topológica. Mostramos así que las restricciones de los teoremas de rigidez del capítulo 2 no son superfluas.

Los ejemplos que presentaremos aquí serán siempre foliaciones de Riccati, más precisamente, una clase particular de foliaciones de Riccati en superficies de Hirzebruch. Aunque podrían haberse obtenido ejemplos similares en cualquier superficie reglada e incluso en una superficie fibrada en general, se ha optado por restringirnos a dicha clase para poder determinar explícitamente los espacios de módulos.

En la primera sección hacemos una recapitulación de hechos conocidos sobre las superficies de Hirzebruch que serán utilizados en el resto del capítulo. Después, introducimos de manera natural la clase de las foliaciones lineales en F_e y presentamos su espacio de módulos absoluto. Para ello recordaremos y utilizaremos algunos resultados de [Guc70, Kla74]. En la sección 3.3, generalizamos la clase lineal y presentamos el correspondiente espacio de módulos.

3.1 Las superficies de Hirzebruch

Recordemos que en el capítulo 1 ya habíamos introducido las superficies de Hirzebruch F_e como el proyectivizado de cierto fibrado vectorial de rango dos sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$: $F_e = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(e))$. Otra manera de presentarlas es como compactificaciones fibradas de \mathbb{C}^2 :

$$\mathbb{C}^2 \hookrightarrow F_e = (\mathbb{C} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1) \cup_{\varphi_e} (\mathbb{C} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1) = (\mathbb{C} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1) \sqcup (\mathbb{C} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1) / \sim_e,$$

donde la relación de equivalencia \sim_e viene dada por $(x, y) \sim_e (x_1, y_1)$ si y sólo si $(x_1, y_1) = \varphi_e(x, y) = (\frac{1}{x}, x^e y)$. Sean (x, y) las coordenadas de F_e correspondientes a la primera inmersión de \mathbb{C}^2 en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \subset F_e$. Tenemos que $\mathbf{f} = \overline{\{x = 0\}}$ es una fibra y tiene por

tanto autointersección cero e intersección uno con cualquier sección holomorfa. Por otra parte, se tiene que $\mathbf{s}_0 = \overline{\{y=0\}}$ es una sección holomorfa de F_e de autointersección $-e$ y $\mathbf{s}_\infty = \overline{\{y=\infty\}}$ es una sección holomorfa de autointersección e . Necesitaremos un estudio más sistemático de las secciones holomorfas de F_e , el resultado del cual podemos resumir en la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *Sea $e > 0$ y sea $\sigma : \mathbb{CP}^1 \rightarrow F_e$ una sección holomorfa de $\pi : F_e \rightarrow \mathbb{CP}^1$. Notamos por \mathbf{s} la imagen de σ . Entonces,*

- (1) *La clase de \mathbf{s} en $H_2(F_e, \mathbb{Z})$ coincide con la de $\mathbf{s}_0 + b\mathbf{f}$ para algún $b \in \mathbb{Z}$,*
- (2) *O bien $b = 0$ y $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0$, o bien $b \geq e$ y $\mathbf{s}^2 \geq e$.*
- (3) *La sección \mathbf{s}_0 es la única curva irreducible de autointersección negativa.*
- (4) *Las únicas curvas irreducibles de autointersección nula son las fibras.*

Demostración. Ya hemos señalado en el capítulo 1 que las clases de \mathbf{s}_0 y \mathbf{f} generan $H_2(F_e, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$, por tanto, la clase de \mathbf{s} es equivalente a la de $a\mathbf{s}_0 + b\mathbf{f}$ para ciertos $a, b \in \mathbb{Z}$. Como \mathbf{s} es el grafo de una sección se tiene que corta a cada fibra en un solo punto, es decir, $a = \mathbf{s} \cdot \mathbf{f} = 1$. Supongamos que $\mathbf{s} \neq \mathbf{s}_0$, entonces al ser \mathbf{s} y \mathbf{e} dos curvas irreducibles distintas tendríamos que $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}_0 = -e + b \geq 0$, de donde $\mathbf{s}^2 = -e + 2b \geq e > 0$.

Sea $C \subset F_e$ una curva irreducible de autointersección no positiva diferente de \mathbf{s}_0 y de una fibra. Entonces C es linealmente equivalente a $a\mathbf{s}_0 + b\mathbf{f}$ para ciertos $a, b \in \mathbb{Z}$ que verifican las desigualdades siguientes

$$\begin{aligned} C \cdot C &= a(2b - ea) \leq 0 \\ C \cdot \mathbf{f} &= a \geq 0 \\ C \cdot \mathbf{s}_0 &= -ea + b \geq 0 \end{aligned}$$

De donde se deduce que $a, b \geq 0$ y por tanto

$$0 \leq b - ea \leq 2b - ea \leq 0,$$

es decir, $a = b = 0$. Lo cual es contradictorio pues una curva analítica en una superficie algebraica nunca representa la clase nula en homología. \square

Observación 3.2. Como en $F_0 = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ tenemos dos reglas, la horizontal y la vertical, llamaremos $\mathbf{v} = \mathbf{f}$ y $\mathbf{h} = \mathbf{s}_0$. Tenemos entonces que $H^2(F_0, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\mathbf{h} \oplus \mathbb{Z}\mathbf{v}$ con $\mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = 0$, $\mathbf{h} \cdot \mathbf{v} = 1$ y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$. Además si C es una curva irreducible de F_0 definida en coordenadas homogéneas por un polinomio bihomogéneo de bigrado (a, b) , entonces la clase de C en $H^2(F_0, \mathbb{Z})$ es $a\mathbf{h} + b\mathbf{v}$. Si además $C \cdot C = 0$ entonces $ab = 0$ por lo que C es una fibra, o bien horizontal, o bien vertical.

Finalmente, vamos a recordar algunos hechos sobre el grupo de automorfismos de las superficies de Hirzebruch. En primer lugar, si $e > 0$ tenemos que

1. Todo automorfismo de F_e preserva la fibración e induce un automorfismo de \mathbb{CP}^1 considerado como el espacio de fibras.
2. Definimos $\text{Aut}_0(F_e) \subset \text{Aut}(F_e)$ como el subgrupo de los automorfismos de F_e que fijan cada fibra. Entonces se tiene la sucesión exacta de grupos

$$1 \rightarrow \text{Aut}_0(F_e) \rightarrow \text{Aut}(F_e) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{CP}^1) \rightarrow 1.$$

3. Podemos escribir los elementos de $\text{Aut}_0(F_e)$ en las coordenadas afines (x, Y) , siendo $Y = \frac{1}{y}$, como $(x, Y) \mapsto (x, aY + P_e(x))$, donde P_e es un polinomio de grado menor o igual que e .

Si $e = 0$ tenemos que

1. Toda aplicación holomorfa $f : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ es de la forma $f(x, y) = f(x)$ o bien $f(x, y) = f(y)$. En efecto, si escribimos f en coordenadas homogéneas obtenemos

$$f([x_0, x_1], [y_0, y_1]) = [f_0(x_0, x_1; y_0, y_1), f_1(x_0, x_1; y_0, y_1)],$$

donde f_0 y f_1 son sendos polinomios bihomogéneos del mismo bigrado (a, b) que determinan sendos divisores efectivos $D_0 = \{f_0 = 0\}$ y $D_1 = \{f_1 = 0\}$ de $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ linealmente equivalentes ambos con $a\mathbf{h} + b\mathbf{v}$. Como f está definida en todo $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ tenemos que D_0 y D_1 no se cortan, y por tanto su producto de intersección es cero: $0 = D_0 \cdot D_1 = 2ab$. Por tanto, o bien $a = 0$, y en este caso $f(x, y)$ sólo depende de y , o bien $b = 0$ y entonces $f(x, y)$ sólo depende de x .

2. $\text{Aut}(F_0)$ está generado por $\text{PSL}(2, \mathbb{C}) \times \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ y por la involución σ definida por $\sigma(x, y) = (y, x)$.

De las consideraciones precedentes se deduce fácilmente el siguiente resultado.

Proposición 3.3. (1) *El grupo de automorfismos de F_e actúa triplemente transitivamente sobre las fibras.*

- (2) *Si \mathbf{s} y \mathbf{s}' son los grafos de dos secciones holomorfas de F_e de autointersección e entonces existe un automorfismo $\varphi \in \text{Aut}_0(F_e)$ tal que $\varphi(\mathbf{s}) = \mathbf{s}'$.*

3.2 Las foliaciones lineales

Sea X un campo lineal en \mathbb{C}^2 , es decir, $X = (a_{11}x + a_{12}y)\frac{\partial}{\partial x} + (a_{21}x + a_{22}y)\frac{\partial}{\partial y}$. El campo X induce de manera natural una foliación, que llamaremos *lineal* en \mathbb{CP}^2 , $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 = F_0$ y en general en cualquier superficie de Hirzebruch. Si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

es diagonalizable y tiene valores propios λ_1, λ_2 entonces X es linealmente conjugado a $\lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y}$. Y si $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ entonces la foliación lineal determinada por X es la misma que la definida por una 1-forma de la familia

$$\omega_\alpha = xdy + \alpha ydx, \alpha \in \mathbb{C}^*.$$

Consideremos la foliación $\mathcal{F}_{\omega_\alpha}$ obtenida compactificando en F_e la foliación definida por ω_α . Entonces $\mathcal{F}_{\omega_\alpha}$ tiene dos fibras invariantes simples (i.e. de multiplicidad uno): $\mathbf{f}_1 = \overline{\{x = 0\}}$ y $\mathbf{f}_2 = \overline{\{x = \infty\}}$. Por otra parte, las secciones $\mathbf{s}_0 = \overline{\{y = 0\}}$ y $\mathbf{s}_\infty = \overline{\{y = \infty\}}$ son curvas invariantes de la foliación.

Las singularidades de $\mathcal{F}_{\omega_\alpha}$ en F_e son los cuatro puntos de intersección de estas secciones con las fibras invariantes \mathbf{f}_1 y \mathbf{f}_2 , y sus residuos o números característicos son $\alpha, -\alpha$ para las de \mathbf{f}_1 y $\alpha - e, -\alpha + e$ para las de \mathbf{f}_2 . Observemos que la foliación $\mathcal{F}_{\omega_\alpha}$ es de Riccati y su representación de holonomía es lineal:

$$\begin{aligned} \rho_\alpha : \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}) &\cong \mathbb{Z} &\longrightarrow &\mathbb{C}^* \subset \text{PSL}(2, \mathbb{C}) \\ 1 &\longmapsto & &e^{-2i\pi\alpha} \end{aligned}$$

Observación 3.4. La foliación de \mathbb{C}^2 dada por un campo lineal cuya matriz no es diagonalizable y tiene valor propio no nulo es analíticamente conjugada a la determinada por su forma de Jordan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso, la foliación que determina en F_e es una foliación de Riccati con dos fibras invariantes $\{x = 0\}$ y $\{x = \infty\}$. La primera es simple, pero si hacemos el cambio de coordenadas pertinente, vemos que la segunda tiene multiplicidad dos. Se puede observar también que en $\{x = \infty\}$ se tiene una única singularidad que es una silla-nodo. Por otra parte, la holonomía respecto de la fibración, considerada sobre la transversal $x = x_0$, es la traslación $y \mapsto y + 2i\pi x_0$, que por tanto no es linealizable.

Vamos a demostrar que las propiedades de ω_α que hemos puesto de manifiesto anteriormente caracterizan, módulo conjugación analítica, dicha familia.

Proposición 3.5. *Toda foliación de Riccati \mathcal{F} en F_e con dos fibras invariantes simples y cuya representación de holonomía sea linealizable es analíticamente conjugada a una foliación lineal $\mathcal{F}_{\omega_\alpha}$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}^*$.*

Demostración. En efecto, el hecho que la holonomía sea linealizable implica que tiene dos puntos fijos diferentes correspondientes a dos separatrices algebraicas S_1 y S_2 distintas y transversas a la fibración. Como S_1 y S_2 son sendas hojas de la foliación se tiene que son conexas. La transversalidad con la fibración implica que la restricción de la proyección a S_1 y S_2 define sendos recubrimientos sobre \mathbb{CP}^1 . El hecho de que \mathbb{CP}^1 es simplemente conexo junto a la conexión de S_i implica que estos recubrimientos son isomorfismos y por tanto, S_1 y S_2 son los grafos de dos secciones $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{CP}^1 \rightarrow F_e$. Por la Proposición 3.1 tenemos que las clases \mathbf{s}_i de S_i en $H_2(F_e, \mathbb{Z})$ se escriben como $\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_0 + b_i \mathbf{f}$. Como las foliaciones de Riccati tienen todas sus singularidades sobre las fibras invariantes deducimos que S_1 y S_2 no pueden cortarse, por lo que $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = -e + b_1 + b_2 = 0$. De donde $\mathbf{s}_1^2 = 2b_1 - e = -\mathbf{s}_2^2$. Si $b_1 \neq \frac{e}{2}$ entonces una de estas dos curvas, digamos S_1 , tiene autointersección estrictamente negativa, por lo que $S_1 = \mathbf{s}_0$. Por tanto, $b_1 = 0$ y $b_2 = e$, de donde $\mathbf{s}_2^2 = e$. Si $b_1 = \frac{e}{2}$ entonces $b_2 = b_1$ y $\mathbf{s}_1^2 = \mathbf{s}_2^2 = 0$, lo cual sólo puede ocurrir en $F_0 = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ siendo S_1 y S_2 dos secciones *horizontales* cualesquiera. Por la Proposición 3.3, el grupo de automorfismos $\text{Aut}(F_e)$ actúa triplemente transitivamente sobre las fibras, mientras que el subgrupo $\text{Aut}_0(F_e)$ actúa transitivamente sobre el conjunto de las secciones holomorfas de autointersección e . Por tanto, \mathcal{F} es analíticamente conjugada a la foliación definida por una 1-forma del tipo $\omega = xdy + q(x)ydx$, donde $q(x)$ es un polinomio no nulo. Si cambiamos de coordenadas, $x_1 = \frac{1}{x}$ y $y_1 = x^e y$, para analizar la multiplicidad de la separatriz $\mathbf{f}_2 = \overline{\{x = \infty\}} = \overline{\{x_1 = 0\}}$, vemos que

$$\omega = \frac{1}{x_1} d(x_1^e y_1) - q\left(\frac{1}{x_1}\right) x_1^e y_1 \frac{dx_1}{x_1^2} = x_1^{e-2} \left[x_1 dy_1 + y_1 \left(e - q\left(\frac{1}{x_1}\right) \right) dx_1 \right]$$

por lo que \mathbf{f}_2 es simple si y sólo si $q(x)$ es constante. Por tanto, $\omega = \omega_\alpha$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}^*$. \square

Observación 3.6. En F_0 tenemos que $\mathcal{F}_{\omega_\alpha}$ es analíticamente conjugada a $\mathcal{F}_{\omega_{\alpha^{-1}}}$ mediante la involución $\sigma : (x, y) \mapsto (y, x)$. En el resto de superficies de Hirzebruch $\mathcal{F}_{\omega_\alpha}$ es analíticamente conjugada a $\mathcal{F}_{\omega_\beta}$ si y sólo si $\alpha = \beta$. La foliación $\mathcal{F}_{\omega_\alpha}$ en la superficie F_1 , donde el divisor \mathbf{s}_0 puede contraerse, da lugar a una foliación lineal en \mathbb{CP}^2 con tres singularidades y tres rectas invariantes.

Definición 3.7. *Sea $\mathcal{L}(F_e)$ la clase de las foliaciones lineales en F_e compuesta por las foliaciones de Riccati con dos fibras invariantes y holonomía linealizable. Consideremos también el subconjunto $\mathcal{L}_h(F_e) \subset \mathcal{L}(F_e)$ formado por aquellas foliaciones lineales que tienen residuo $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, es decir, aquellas que tienen todas sus singularidades hiperbólicas.*

Observemos que las singularidades de una foliación \mathcal{F} de $\mathcal{L}(F_e)$ tienen número de Milnor igual a uno. Por otra parte, si \mathcal{F} es una foliación de Riccati en F_e con todas sus singularidades hiperbólicas, entonces el hecho de que la holonomía sea linealizable es equivalente a que sea abeliana. En particular, si \mathcal{F} es una foliación de Riccati con solamente dos fibras invariantes y singularidades hiperbólicas entonces $\mathcal{F} \in \mathcal{L}_h(F_e)$ ya que el grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, \infty\}) = \mathbb{Z}$ es abeliano.

Nuestro primer objetivo es caracterizar el espacio de módulos de una foliación $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{L}_h(F_e)$, es decir, el conjunto

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}_0) = \{\mathcal{F} \text{ foliación en } F_e \text{ tal que } \mathcal{F} \sim_{\text{top}} \mathcal{F}_0\} / \sim_{\text{an}} .$$

En 1970 J. Guckenheimer demuestra la estabilidad estructural de las foliaciones lineales en \mathbb{CP}^2 mediante un hábil pegado de tres homeomorfismos definidos en las cartas afines correspondientes a las tres singularidades de dichas foliaciones. En el trabajo de B. Klarès, cf. [Kla74] se encuentra probada la trivialidad topológica de la familia de foliaciones lineales $\{\mathcal{F}_{\omega_\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}$ en $F_0 = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, así como en las superficies obtenidas realizando sucesivas explosiones a F_0 . A continuación recordaremos el homeomorfismo explícito en el caso de F_0 y utilizando una técnica de pegado similar a la utilizada en [Guc70] para \mathbb{CP}^2 , deduciremos la trivialidad topológica en F_e . Por completitud, citaremos otro trabajo de J. Guckenheimer, cf. [Guc72], en el que se muestra la estabilidad estructural de los flujos lineales hiperbólicos en \mathbb{C}^n .

Proposición 3.8. *Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ entonces la foliación $\mathcal{F}_{\omega_\alpha}$ es topológicamente conjugada a $\mathcal{F}_{\omega_\beta}$ en F_e . Además, si las partes imaginarias de α y β tienen el mismo signo entonces existe un homeomorfismo $\phi : F_e \rightarrow F_e$ que preserva las orientaciones y que conjugua $\mathcal{F}_{\omega_\alpha}$ y $\mathcal{F}_{\omega_\beta}$.*

Demostración. Consideremos la foliación \mathcal{F}_α definida por ω_α en $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Sea $\exp : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ la aplicación exponencial definida por $\exp(z, w) = (e^{2i\pi z}, e^{2i\pi w})$. La foliación pull-back $\exp^* \mathcal{F}_{\omega_\alpha}$ viene definida por la 1-forma $dw + \alpha dz$, es decir, admite como integral primera la forma lineal $w + \alpha z$. Buscando una conjugación \mathbb{R} -lineal F en \mathbb{C}^2 entre las foliaciones definidas por $w + \alpha z = cte$ y $w + \beta z = cte$, que sea de la forma $F(z, w) = (F_1(z), F_2(w))$ e invariante por las traslaciones $z \mapsto z + 1$ y $w \mapsto w + 1$, uno encuentra una única solución, que desciende a $\hat{F} : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ vía la aplicación exponencial. Es fácil ver que podemos escribir

$$\hat{F}(x, y) = (x|x|^\lambda, y|y|^\mu) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \lambda &= i \frac{\bar{\alpha}}{\text{Im} \beta} \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} - (1 + i \frac{\text{Re} \beta}{\text{Im} \alpha}) \\ \mu &= i \frac{\beta - \alpha}{\text{Im} \beta} \end{cases} \quad (3.1)$$

Observemos que \hat{F} extiende a $\bar{F} : \bar{\mathbb{C}} \times \bar{\mathbb{C}} \times \bar{\mathbb{C}} \times \bar{\mathbb{C}}$ enviando el conjunto formado por las cuatro separatrices de $\mathcal{F}_{\omega_\alpha}$ en F_0 sobre sí mismo. De hecho, si $\text{Im} \alpha \text{Im} \beta > 0$ las

cuatro separatrices quedan invariantes por \bar{F} . Analicemos ahora la situación en F_e . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\text{Im } \alpha \text{Im } \beta > 0$, ya que sino aplicaríamos el homeomorfismo definido por $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ que conjuga $\mathcal{F}_{\omega_\alpha}$ y $\mathcal{F}_{\omega_{\bar{\alpha}}}$. Consideremos los cuatro subconjuntos cerrados $V_1 = \{|x| < 1, |y| < 1\}$, $V_2 = \{|x| < 1, |y| > 1\}$, $V_3 = \{|x| > 1, |y| < 1\}$ y $V_4 = \{|x| > 1, |y| > 1\}$ de F_e . En cada uno de ellos tenemos sendas singularidades de $\mathcal{F}_{\omega_\alpha}$ y $\mathcal{F}_{\omega_\beta}$: $(0, 0)$, $(0, \infty)$, $(\infty, 0)$ y (∞, ∞) con residuos respectivos $\alpha_1 = \alpha$ y $\beta_1 = \beta$, $\alpha_2 = \alpha - e$ y $\beta_2 = \beta - e$, etc... Cada singularidad determina un homeomorfismo $f_i : V_i \rightarrow V_i$ de la forma $f_i(x, y) = (x|x|^{\lambda_i}, y|y|^{\mu_i})$. Debido a las relaciones anteriores entre los diferentes residuos α_i y β_i y las consecuentes relaciones entre los exponentes λ_i y μ_i es fácil ver que dichos homeomorfismos f_i coinciden en las intersecciones de los cerrados V_i , definiendo por tanto un homeomorfismo global $f : F_e \rightarrow F_e$ conjugando $\mathcal{F}_{\omega_\alpha}$ y $\mathcal{F}_{\omega_\beta}$. \square

Observación 3.9. El homeomorfismo correspondiente a F_1 preserva el divisor excepcional s_0 y por tanto desciende a un homeomorfismo en \mathbb{CP}^2 conjugando las correspondientes foliaciones lineales.

Teorema 3.10. Si $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{L}_h(F_e)$ entonces $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0) = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \alpha > 0\}$.

Demostración. Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa en F_e que sea topológicamente conjugada a \mathcal{F}_0 . Veamos en primer lugar que entonces $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(F_e)$. En primer lugar, gracias al Teorema 2.19 tenemos que \mathcal{F} es una foliación de Riccati con dos fibras invariantes simples. Además, como la holonomía h de \mathcal{F} es topológicamente conjugada a la de \mathcal{F}_0 tenemos que h tiene dos puntos fijos distintos, por tanto h es linealizable. Hemos visto así que $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(F_e)$. Como la dinámica de la holonomía de una singularidad hiperbólica es topológicamente diferente a la de una singularidad con residuo real concluimos que $\mathcal{F} \in \mathcal{L}_h(F_e)$. Finalmente, las Proposiciones 3.5 y 3.8 implican que todas las foliaciones de $\mathcal{L}_h(F_e)$ son topológicamente conjugadas. Concluimos la demostración utilizando la Observación 3.6. \square

Observación 3.11. La familia de 1-formas $\{\omega_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}, \mathbb{R}}$ determina una deformación topológicamente trivial que no es subyacente a un despliegue. En efecto, en primer lugar, el fibrado tangente $T_{\mathcal{F}_{\omega_\alpha}}$ es trivial pues como hemos visto en la Proposición 1.23 se cumple en general que $c(T_{\mathcal{F}}) = (2 - 2g)\mathbf{f} - V_{\mathcal{F}}$, y en nuestro caso $V_{\mathcal{F}_{\omega_\alpha}} = 2\mathbf{f}$ y $g(\mathbb{CP}^1) = 0$. Por otra parte, se tiene que $H^1(F_e, \mathcal{O}_{F_e}) = 0$, por tanto $H^1(F_e, \mathcal{O}(T_{\mathcal{F}_{\omega_\alpha}})) = 0$. Aplicando el Teorema 2.13, deducimos que si la familia ω_α fuera subyacente a un despliegue entonces éste sería analíticamente trivial, lo cual no es cierto.

3.3 Las foliaciones quasi-lineales

Vamos a definir la clase de las foliaciones quasi-lineales en F_e generalizando la clase lineal en el sentido que admitiremos más de dos fibras invariantes:

Definición 3.12. Decimos que una foliación \mathcal{F} es de la clase $\mathcal{QL}(k, F_e)$ si y sólo si es una foliación de Riccati en F_e con k fibras invariantes simples y holonomía simultáneamente linealizable.

Observemos que $\mathcal{QL}(2, F_e) = \mathcal{L}(F_e)$. De manera similar a la Proposición 3.5 se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 3.13. Sea $(U, (x, y))$ una carta afín de F_e en la que $\mathfrak{s}_0 = \overline{\{y = 0\}}$ y $\mathfrak{s}_\infty = \overline{\{y = \infty\}}$. Entonces, para toda $\mathcal{F} \in \mathcal{QL}(k, F_e)$ se tiene que \mathcal{F} es analíticamente equivalente a una foliación que en U viene definida por una 1-forma del tipo $\omega = p(x)dy + q(x)ydx$, con $p(x), q(x)$ polinomios no nulos verificando que p tiene raíces simples y $\deg q < \deg p$. De hecho, podemos distinguir dos casos:

- (i) Si $\overline{\{x = \infty\}}$ es una fibra invariante simple entonces $\deg p = k - 1$ y $\deg q = k - 2$.
- (ii) Si $\overline{\{x = \infty\}}$ es transversa a la foliación entonces $\deg p = k$ y $\deg q \leq k - 2$.

Siguiendo con las notaciones de la proposición precedente, podemos escribir

$$\frac{\omega}{yp(x)} = \frac{dy}{y} + \left(\sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{x - x_i} \right) dx, \quad (3.2)$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{C}$ son los residuos de las singularidades de \mathcal{F}_ω en \mathfrak{s}_0 . Definimos el subconjunto $\mathcal{QL}_h(k, F_e) \subset \mathcal{QL}(k, F_e)$ de foliaciones **quasi-lineales hiperbólicas** como el formado por aquellas foliaciones quasi-lineales que tienen todos sus residuos α_i no reales. Observemos que por el Teorema del Índice de [CaSa82] se tiene que $\sum_{i=1}^k \alpha_i = e$. Observemos también que toda foliación de $\mathcal{QL}(k, F_1)$ se puede obtener a partir de la foliación definida por una 1-forma homogénea de grado k , $\omega_k = a_k(x, y)dx + b_k(x, y)dy$, explotando la singularidad situada en el origen $(0, 0)$ de la carta afín $(U, (x, y))$ de \mathbb{CP}^2 .

En 1979 N. N. Ladis realizó un estudio completo de las equivalencias topológicas de las foliaciones en \mathbb{CP}^2 definidas por 1-formas homogéneas. El primer paso de la demostración consiste en realizar una explosión del origen para después trabajar en una situación fibrada, que nosotros ya conocemos bien: la superficie F_1 . Utilizando la técnica de pegado de [LN87] vamos a exponer el resultado de [Lad79] y a generalizarlo a cualquier superficie de Hirzebruch.

Teorema 3.14. Sean $k \geq 2$ y \mathcal{F}_α y \mathcal{F}_β dos foliaciones de la clase $\mathcal{QL}_h(k + 1, F_e)$ con residuos respectivos $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ y $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$. Entonces \mathcal{F}_α es topológicamente conjugada a \mathcal{F}_β si y sólo si existen ordenaciones de los residuos de manera que se tengan las igualdades

$$\frac{\beta_0 - \alpha_0}{\operatorname{Im} \alpha_0} = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\operatorname{Im} \alpha_1} = \frac{\beta_2 - \alpha_2}{\operatorname{Im} \alpha_2} = \dots = \frac{\beta_k - \alpha_k}{\operatorname{Im} \alpha_k}.$$

Demostración. En primer lugar, como la holonomía de las foliaciones quasi-lineales es abeliana, podemos aplicar la Proposición 2.27 y reducirnos al caso que las foliaciones \mathcal{F}_α y \mathcal{F}_β tienen las mismas fibras invariantes $\{x = x_j\}$, para $j = 0, \dots, k$. En segundo lugar, recordemos que las foliaciones de Riccati en general, y las quasi-lineales en particular, pueden obtenerse *pegando* modelos lineales como se describe en [LN87]. Recordemos brevemente su construcción: Sea $r > 0$ tal que los discos $D_j = D(x_j, r)$, $j = 0, \dots, k$ sean disjuntos. Para cada $j = 1, \dots, k$, pongamos $y_j = x_0 + \frac{r}{2}e^{2i\pi(j-1)/k}$, consideremos δ_j caminos disjuntos uniendo y_j con $x_j + r/2$ y A_j un entorno tubular de δ_j tal que $A_j \cap D_j$ sea simplemente conexo. Tomemos coordenadas (x, u_j) y (x, v_j) en $D_j \times \overline{\mathbb{C}}$ y $A_j \times \overline{\mathbb{C}}$ respectivamente. En estas coordenadas definimos las foliaciones locales dadas por $(x - x_j)du_j + \alpha_j u_j dx$ en $D_j \times \overline{\mathbb{C}}$ y la foliación horizontal v_j igual a constante en $A_j \times \overline{\mathbb{C}}$. Definimos los biholomorfismos de pegado siguiente: $\phi_{A_j}^{D_0} : A_j \times \overline{\mathbb{C}} \rightarrow D_0 \times \overline{\mathbb{C}}$ mediante $(x, v_j) \mapsto (x, v_j (\frac{x-y_j}{r/2})^{\alpha_0})$ y $\phi_{A_j}^{D_j} : A_j \times \overline{\mathbb{C}} \rightarrow D_j \times \overline{\mathbb{C}}$ mediante $(x, v_j) \mapsto (x, v_j (\frac{x-x_j}{r/2})^{\alpha_j})$. Estos biholomorfismos llevan placas sobre placas y por tanto permiten definir una foliación holomorfa en $U = (\bigcup A_i \cup \bigcup D_i) \times \overline{\mathbb{C}}$. Como el complementario de U en F_e es analíticamente equivalente a $\mathbb{D} \times \overline{\mathbb{C}}$ y la holonomía del borde es trivial, podemos pegar dicha foliación con la foliación trivial (horizontal) en $\mathbb{D} \times \overline{\mathbb{C}}$ y obtener así una foliación holomorfa \mathcal{F} en una superficie reglada $U \cup (\mathbb{D} \times \overline{\mathbb{C}}) = F_{e'}$. Por construcción, la foliación \mathcal{F} admite $\{y = 0\}$ e $\{y = \infty\}$ como secciones invariantes, $\{x = x_j\}$ como fibras invariantes, su holonomía es lineal y tiene los mismos residuos que \mathcal{F}_α . Para ver que la superficie reglada que obtenemos, $F_{e'}$, es la de partida, F_e , aplicamos la fórmula del índice de [CaSa82] a la separatriz $\{y = 0\}$, cf. Teorema 1.7, obteniendo que $e = \sum_{j=0}^k \alpha_j = -c(N_{\{y=0\}})$. Por tanto, la sección $\{y = 0\}$ tiene autointersección $-e$ en $F_{e'}$. El estudio realizado en la Proposición 3.1 sobre las secciones de las superficies de Hirzebruch implica que si $e < 0$ entonces $e = e'$. Si $e = 0$ entonces remitimos a [LN87] para *descender* \mathcal{F} a $F_0 = \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$. La Proposición 3.13 implica que \mathcal{F} es una foliación quasi-lineal en F_e con las mismas fibras invariantes y mismos residuos que \mathcal{F}_α , por tanto es analíticamente equivalente a ésta última.

Veamos ahora que las condiciones exigidas a los residuos son necesarias para la conjugación topológica: Recordemos que el Lema 2.20 afirma que podemos modificar un homeomorfismo que conjuga \mathcal{F}_α y \mathcal{F}_β de manera que envíe una fibra transversa Σ sobre otra fibra transversa Σ' . Como la holonomía de \mathcal{F}_α es simultáneamente lineal en la coordenada global y , la Proposición 2.4 implica que la restricción φ de ϕ a Σ es de la forma $\varphi(y) = y|y|^\mu F(y)$ con $F(e^{2i\pi\alpha_j}y) = F(y)$ para todo $j = 0, \dots, k$ y

$$\mu = i \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\text{Im } \alpha_0} = i \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\text{Im } \alpha_1} = i \frac{\beta_2 - \alpha_2}{\text{Im } \alpha_2} = \dots = i \frac{\beta_k - \alpha_k}{\text{Im } \alpha_k}.$$

Finalmente, mostremos que dichas condiciones también son suficientes. Recordemos que dar un homeomorfismo en una variedad $\sqcup_i U_i / \{\phi_{ij}\}$ obtenida *pegando* las cartas U_i mediante los biholomorfismos ϕ_{ij} es equivalente a dar $\phi_i : U_i \rightarrow U_i$ de manera que en las intersecciones $U_i \cap U_j$ se tenga que $\phi_j \circ \phi_{ij} = \phi_{ij} \circ \phi_i$. Utilizando las mismas notaciones que

hemos introducido antes vamos a construir homeomorfismos locales $\phi_{D_j} : D_j \times \mathbb{C} \rightarrow D_j \times \mathbb{C}$ y $\phi_{A_j} : A_j \times \mathbb{C} \rightarrow A_j \times \mathbb{C}$ que determinen un homeomorfismo global entre las dos foliaciones quasi-lineales \mathcal{F}_α y \mathcal{F}_β en F_e . Ponemos $\phi_{D_j}(x, u_j) = (g_{\lambda_j}(x - x_j) + x_j, f_{\mu_j}(u_j))$ y $\phi_{A_j}(x, v_j) = (g(x), f(v_j))$ con f, g funciones a determinar y $(g_{\lambda_j}, f_{\mu_j})$ el homeomorfismo (3.1) que conjugue las foliaciones lineales de residuos α_j y β_j en F_0 . La conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} A_j \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\phi_{A_j}} & A_j \times \mathbb{C} \\ \phi_{A_j}^{D_j} \downarrow & & \phi_{A_j}^{D_j} \downarrow \\ D_j \times \mathbb{C}_j & \xrightarrow{\phi_{D_j}} & D_j \times \mathbb{C} \end{array}$$

es equivalente a que $g(x) = g_{\lambda_j}(x - x_j) + x_j$ en $A_j \cap D_j$ (lo que permite definir el homeomorfismo g en $A_j \cap D_j$) y $f(v_j) = f_{\mu_j}(v_j)$, lo cual es consecuencia de que todos los μ_j son iguales entre sí. Tenemos así definido un homeomorfismo en $U = (\bigcup A_i \cup \bigcup D_i) \times \overline{\mathbb{C}}$ conjugando $\mathcal{F}_{\alpha|U}$ y $\mathcal{F}_{\beta|U}$. Utilizando la trivialidad de \mathcal{F}_α y \mathcal{F}_β en el complementario de U podemos extender adecuadamente el homeomorfismo a todo F_e . \square

Pasemos a enunciar el resultado que nos caracteriza el espacio de módulos de las foliaciones quasi-lineales.

Teorema 3.15. *Sea $k \geq 3$ y $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{QL}_h(k, F_e)$ con residuos $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Si $k = 3$ entonces el espacio de módulos de \mathcal{F}_0 es igual a*

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}_0) = \left\{ (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^3 \mid \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\text{Im } \alpha_1} = \frac{\beta_2 - \alpha_2}{\text{Im } \alpha_2} = \frac{\beta_3 - \alpha_3}{\text{Im } \alpha_3} \right\}$$

Si $k > 3$ entonces el espacio de módulos de \mathcal{F}_0 se identifica con el espacio cociente de

$$\left\{ ((x_1, \beta_1), \dots, (x_k, \beta_k)) \in (\overline{\mathbb{C}} \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}))^k \mid \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\text{Im } \alpha_1} = \dots = \frac{\beta_k - \alpha_k}{\text{Im } \alpha_k} \text{ y } x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j \right\}$$

por la relación de equivalencia que determinan las siguientes condiciones:

- (i) Para toda permutación $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ se tiene que $((x_i, \beta_i))_{i=1}^k \sim ((x_{\sigma(i)}, \beta_{\sigma(i)}))_{i=1}^k$ si $\beta_{\sigma(i)} = \beta_i$ para todo $i = 1, \dots, k$.
- (ii) Para toda homografía $\varphi \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ se tiene que $((x_i, \beta_i))_{i=1}^k \sim ((\varphi(x_i), \beta_i))_{i=1}^k$.

Demostración. El resultado se sigue de manera casi inmediata de las siguientes consideraciones:

- (a) El Teorema 2.19 que afirma que una foliación topológicamente conjugada a una foliación de Riccati es a su vez una foliación de Riccati.

- (b) La Proposición 3.13 que caracteriza las foliaciones quasi-lineales como foliaciones de Riccati con fibras invariantes simples y holonomía simultáneamente linealizable.
- (c) La Proposición 3.14 que caracteriza la conjugación topológica en la clase quasi-lineal.

□

Observación 3.16. La familia de foliaciones determinada por (3.2), variando las abscisas x_j de las fibras invariantes separatrices y los residuos α_j , determina una deformación topológicamente trivial de foliaciones quasi-lineales que contiene un representante analítico de cualquier foliación quasi-lineal, es decir, constituye una familia versal de las foliaciones quasi-lineales.

Capítulo 4

Singularidades homogéneas

En los capítulos precedentes hemos considerado los espacios de módulos de foliaciones singulares en superficies compactas, asumiendo que las singularidades de éstas eran reducidas. En el presente capítulo nos interesaremos en la descripción de los espacios de módulos de singularidades, locales pero más complicadas. Más precisamente, consideraremos la clase de las singularidades homogéneas que introducimos a continuación. Dichas singularidades constituyen el análogo local de las foliaciones transversas a una fibración fuera de un número finito de fibras que hemos considerado anteriormente en el contexto global. En el siguiente capítulo utilizaremos las mismas técnicas que desarrollaremos en éste, para abordar una clase más general y natural de singularidades: las singularidades quasi-homogéneas, cuya definición pasamos a recordar y que se puede encontrar detalladamente expuesta en [Mat00].

4.1 Descripción de la clase

Sea $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$ un germen de 1-forma en el origen con una singularidad aislada. El Teorema de C. Camacho y P. Sad (cf. Teorema 1.2 del capítulo 1) afirma que ω admite siempre una separatriz, es decir, un germen de curva analítica irreducible invariante. De hecho, puede admitir una infinidad, en cuyo caso se dice que ω es dicrítica.

Definición 4.1 (Mattei). *Sea $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$ una 1-forma no dicrítica y $f = 0$ una ecuación reducida de las separatrices de ω . Decimos que ω es quasi-homogénea si y sólo si f pertenece al ideal (a, b) generado por los coeficientes de ω . Equivalentemente, si existen coordenadas (u, v) en las cuales f se escribe como un polinomio quasi-homogéneo (de pesos (α, β))*

$$f(u, v) = \sum_{\alpha i + \beta j = d} a_{ij} x^i y^j,$$

y existen funciones g, h con $g(0) \neq 0$ (h de orden mayor o igual que $\text{ord}(\omega) - 1$) tales que

$$g\omega = df + h\omega^{R_{\alpha,\beta}},$$

donde $R_{\alpha,\beta} = \alpha \frac{\partial}{\partial u} + \beta \frac{\partial}{\partial v}$ y $\omega^{R_{\alpha,\beta}} = \alpha u dv - \beta v du$.

Un caso particular se foliación quasi-homogénea se tiene cuando los pesos α, β son iguales a uno. La escritura precedente permite reformular este hecho de la manera siguiente:

Definición 4.2. Una foliación \mathcal{F} es homogénea si y sólo si existen coordenadas de manera que las separatrices de \mathcal{F} sean un número finito de rectas por el origen fuera de las cuales \mathcal{F} es transversa a la fibración de Hopf.

Ésta es la situación local análoga a la considerada en el caso global, cf. capítulos 2 y 3. Más concretamente, si explotamos el origen de $(\mathbb{C}^2, 0)$ obtenemos una superficie U , que contiene al divisor excepcional D de autointersección -1 , y la cual podemos sumergir de manera natural, como subvariedad abierta, en la primera superficie de Hirzebruch F_1 . Dicha inmersión es tal que D se corresponde con la sección \mathbf{s}_0 de autointersección -1 descrita en el capítulo 2 y la fibración de Hopf en U con la restricción de la regla de F_1 . La foliación explotada $\tilde{\mathcal{F}}$ tiene un número finito de fibras invariantes fuera de las cuales es transversa a la fibración. En general, esta situación es local, pero si \mathcal{F} viene dada por una 1-forma polinómica, entonces \mathcal{F} está definida en todo $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ y por tanto $\tilde{\mathcal{F}}$ en todo F_1 . Éste es el caso, por ejemplo, si $\omega = \omega_\nu$ es una 1-forma homogénea de grado ν y entonces $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ es una foliación quasi-lineal de F_1 con $\nu + 1$ fibras invariantes (si las contamos con multiplicidad), cf. capítulo 3. Otro ejemplo es el siguiente: Si $\omega = \omega_\nu + f_\nu \omega^R$, donde f_ν es un polinomio homogéneo del mismo grado ν que ω_ν , entonces es fácil comprobar que $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ es una foliación de Riccati que admite \mathbf{s}_0 como una sección invariante, y por tanto, su grupo de holonomía es afín, en particular, resoluble.

En general, si $\omega = \omega_\nu + \omega_{\nu+1} + \dots$ es una foliación homogénea y $P(x, y)$ es una ecuación (polinómica homogénea) de sus separatrices entonces, módulo la multiplicación por una unidad, podemos escribir

$$\omega = dP + h\omega^R, \quad \text{con } \omega^R = xdy - ydx. \quad (4.1)$$

Denotemos por $P_{l+1} = \omega_l(R)$, donde $R = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ es el campo radial. Si aplicamos los dos términos de (4.1) sobre R obtenemos que $P_{\nu+1} + P_{\nu+2} \dots = (\deg P)P$. Como ω es no dicrítica es fácil ver que $P_{\nu+1} \neq 0$ y por tanto, se puede tomar $P = P_{\nu+1}$ y $\omega = dP_{\nu+1} + h\omega^R$. Como $\{\omega(R) = 0\} = \{P_{\nu+1} = 0\} = \{\omega_\nu(R) = 0\}$ existe una función f verificando

$$\omega = \omega_\nu + f\omega^R \quad (4.2)$$

y cuyo orden es mayor o igual que ν .

Sea $\omega = \omega_\nu + \dots$ un germen de 1-forma holomorfa en el origen. Si ω tiene exactamente $\nu + 1$ separatrices, lisas y transversas dos a dos, entonces el polinomio $P_{\nu+1}$ es reducido, de manera que lo podemos expresar como producto de $\nu + 1$ factores lineales diferentes $P_{\nu+1} = \prod_{j=1}^{\nu+1} l_j$. También podemos escribir

$$\frac{\omega_\nu}{P_{\nu+1}} = \sum_{j=1}^{\nu+1} \alpha_j \frac{dl_j}{l_j}, \quad (4.3)$$

donde los valores $\alpha_j \in \mathbb{C}$ son los residuos de las $\nu+1$ singularidades de la foliación explotada $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ en el divisor excepcional D . En particular, tenemos que ω es una curva generalizada (recordemos que ello quería decir que ω define una foliación no dicrítica que no admite sillan-nodo en su reducción de singularidades) si y sólo si los residuos α_j no son racionales negativos (incluyendo el cero).

Definición 4.3 (Cerveau-Sad). Decimos que una 1-forma ω_ν homogénea de grado ν es **general** si y sólo si verifica las siguientes condiciones

(1) ω_ν es no dicrítica.

(2) El polinomio $P_{\nu+1}$ es reducido y los residuos $\alpha_1, \dots, \alpha_{\nu+1}$ de $\frac{\omega_\nu}{P_{\nu+1}}$ son no reales.

Observación 4.4 (Cerveau-Sad). Sea $\omega = \omega_\nu + \dots$ una 1-forma cuyo primer jet no nulo ω_ν es general, entonces ω es una curva generalizada que tiene exactamente $\nu + 1$ separatrices, lisas y transversas dos a dos.

En este caso el problema de enderezar las separatrices es trivial desde el punto de vista diferenciable:

Proposición 4.5. Sea $\omega = \omega_\nu + \dots$ una 1-forma cuyo primer jet no nulo ω_ν es general, entonces la foliación \mathcal{F}_ω es topológicamente conjugada (por un difeomorfismo C^∞) a una foliación homogénea definida por $\omega' = \omega_\nu + \dots$ con la misma representación de holonomía que \mathcal{F}_ω .

Demostración. La 1-forma ω_ν determina las tangentes $\{P_{\nu+1} = 0\}$ de las $\nu + 1$ separatrices de \mathcal{F}_ω así como los residuos $\alpha_1, \dots, \alpha_{\nu+1}$ de las singularidades de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ en el divisor excepcional D . Utilizando el Teorema de Síntesis de holonomías de Lins-Neto, cf. Teorema 4.24, construimos una foliación homogénea $\mathcal{F}_{\omega'}$ con los mismos residuos, la misma holonomía y cuyas separatrices son las rectas $\{P_{\nu+1} = 0\}$. De aquí deduce que $\omega' = \omega_\nu + \dots$. Consideremos las ecuaciones $y = t_j x + x^2 c_j(x)$ de las separatrices S_j de ω . En las coordenadas (t, x) de $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ tenemos que S_j viene dada por $t = t_j + x c_j(x)$, es decir, S_j es una fibra de la submersión holomorfa $\xi_j(t, x) = t - x c_j(x)$. Utilizando funciones test es fácil construir

una submersión diferenciable $\xi(t, x) = t + xc(t, x)$ de manera que coincida con ξ_j en un entorno de S_j y con la fibración de Hopf en una zona intermedia y tal que ξ sea transversa a la foliación \mathcal{F}_ω fuera de las separatrices. Finalmente, aplicamos la técnica de elevación de caminos del Teorema 4.14 pero utilizando la fibración ξ en la salida y la de Hopf en la llegada, para definir un homeomorfismo C^∞ de $\widetilde{\mathbb{C}^2} \setminus (\bigcup S_j)$ a $\widetilde{\mathbb{C}^2} \setminus (\bigcup \{t = t_j\})$ que conjugue $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ y $\widetilde{\mathcal{F}}_{\omega'}$. Dicho homeomorfismo extiende a las separatrices pues la fibración ξ es holomorfa en un entorno de S_j y allí podemos razonar como en el Teorema de Mattei-Moussu. \square

La cuestión del enderezamiento analítico es más sutil, como veremos a continuación. Comencemos considerando un ejemplo sencillo.

Ejemplo 4.6. Sea $\nu \leq 3$ y $\omega = \omega_\nu + \dots$ una 1-forma holomorfa que tenga exactamente $\nu + 1$ separatrices, lisas y transversas dos a dos, entonces ω determina una foliación homogénea. Sólo hemos de observar que 2, 3 o 4 curvas lisas y transversas por el origen son enderezables analíticamente de manera simultánea sobre sus tangentes. En efecto, dos curvas lisas transversas por el origen siempre son enderezables sobre los ejes coordenados. Si la tercera separatriz viene dada por $y = \varphi(x)$ con $\varphi(0) = 0$ entonces $\varphi(x) = x\varphi_1(x)$, $\varphi_1(0) \neq 0$ y el cambio de coordenadas inverso de $(x, y) \mapsto (x, y\varphi(x))$ conserva los ejes y lleva $y = \varphi(x)$ sobre la recta $y = x$. Si tenemos una cuarta separatriz transversa, la podemos escribir como $y = t_4x + x^2c(x)$, $t_4 \neq 0, 1$. Entonces el cambio inverso de $(x, y) \mapsto (x, y + y(y - x)\frac{c(x)}{t(t-1)})$ conserva las tres rectas anteriores y lleva $y = t_4x + x^2c(x)$ sobre la recta $y = t_4x$.

Observemos que el argumento anterior para enderezar analíticamente $\nu + 1$ curvas lisas y transversas por el origen, no funciona en general si $\nu \geq 4$. En efecto, consideremos el subgrupo \mathcal{D} de $\text{Dif}(\mathbb{C}^2, 0)$ formado por aquellos difeomorfismos locales que preservan los ejes y las rectas $y = x$, $y = t_4x$ donde $t_4 \neq 0, 1$. Observemos que si $\phi \in \mathcal{D}$ entonces $D\phi(0) = \lambda Id$ y por tanto, $\phi(x, y) = (xa(x, y), yb(x, y))$ con $a(0, 0) = b(0, 0) = \lambda \neq 0$. Sea $\mathcal{E} = \{\phi(x, y) = (xa(x, y), yb(x, y)) \in \mathcal{D} \mid a(x, y) \equiv b(x, y)\}$ el subgrupo de $\text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ que preserva todas las fibras de Hopf. Sean $\phi, \phi^{-1} \in \mathcal{D}$ que escribimos como

$$\phi(x, y) = (xa(x, y), yb(x, y)) \quad \text{y} \quad \phi^{-1}(x, y) = (xc(x, y), yd(x, y)), \quad (4.4)$$

entonces el elemento de \mathcal{E} definido por

$$\psi(x, y) = (xc(x, y), yc(x, y))$$

verifica que

$$(\psi \circ \phi)(x, y) = (x, ye(x, y)) =: \chi(x, y) \quad (4.5)$$

donde $e(x, y)$ es de la forma $e(x, y) = 1 + (y - x)(y - t_4x)f(x, y)$. Sea C_5 una quinta curva lisa, transversa con las cuatro rectas anteriores, dada por la ecuación

$$y = t_5x + x^2c_5(x) \quad \text{con} \quad t_5 \neq 0, 1, t_4. \quad (4.6)$$

Supongamos que el difeomorfismo (4.4) verifica que $\phi(C_5) = \{y = t_5x\}$, entonces el elemento $\chi \in \mathcal{D}$ definido en (4.5) también cumple la relación $\chi(C_5) = \{y = t_5x\}$. De esta manera, vemos que es suficiente considerar difeomorfismos de la forma

$$\phi(x, y) = (x, y + y(y - x)(y - t_4x)f(x, y)).$$

Como $\phi(x, t_5x) = (x, t_5x + x^3t_5(t_5 - 1)(t_5 - t_4)f(x, t_5x))$ y la separatriz C_5 viene dada por (4.6) deducimos que podemos enderezarla analíticamente preservando las cuatro rectas anteriores si y sólo si $c_5(0) = 0$, es decir, si el orden de contacto de C_5 con su recta tangente en el origen es mayor que dos. El mismo argumento muestra que la condición necesaria y suficiente para realizar el enderezamiento de la separatriz C_{k+1} , en un sistema de coordenadas donde las anteriores separatrices C_1, \dots, C_k se escriban como rectas, es que el orden de contacto de C_{k+1} con su recta tangente por el origen sea mayor que $k - 3$. Sin embargo, dicha caracterización no es satisfactoria porque depende del sistema de coordenadas en el cual las k primeras separatrices son rectas. Más útil nos será la siguiente condición suficiente para el enderezamiento simultáneo de n curvas lisas y transversas dos a dos.

Proposición 4.7. *Sean C_1, \dots, C_n curvas lisas y transversas dos a dos en el origen, en número $n \geq 3$. Si el orden de contacto de cada curva con su recta tangente en el origen es mayor o igual que $n - 1$ entonces existe un sistema de coordenadas analítico en el cual las C_i se escriben como rectas.*

Demostración. Por hipótesis, las curvas C_k vienen dadas por ecuaciones del tipo $y = t_kx + x^{n-1}c_k(x)$, $k = 1, \dots, n$, con $t_i \neq t_j$ si $i \neq j$. Consideremos la función

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k(x) \frac{\prod_{j \neq k} (y - t_jx)}{\prod_{j \neq k} (t_k - t_j)}.$$

Entonces el difeomorfismo $\phi(x, y) = (x, y + f(x, y))$ verifica que $\phi(\{y = t_kx\}) = C_k$. \square

Como consecuencia de esta propiedad tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.8. *Si $\omega = \omega_\nu + \dots$ tiene exactamente $\nu + 1$ separatrices, lisas y transversas dos a dos, entonces el hecho de que ω defina una foliación homogénea sólo depende del $2\nu - 2$ jet de ω .*

Demostración. Para cada $l \geq \nu$ definimos el polinomio $P_{l+1} = \omega_l(R)$. Notemos también $Q_1^\nu(t) = \frac{\partial P_{\nu+1}}{\partial y}(1, t)$ y $Q_k^\nu(t) = Q_1^\nu(t) + (k - 1)b_\nu(1, t)$. Un cálculo fácil muestra que existen polinomios $R_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1})$ que dependen de los coeficientes de ω tales que

$R_{k-1}(x_1, 0, \dots, 0) = 0$ y de manera que la curva de ecuación $y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$ es una separatriz de ω si y sólo si

$$P_{\nu+1}(1, c_1) = 0 \quad (4.7)$$

y para todo $k \geq 2$ se verifica la ecuación

$$Q_k^\nu(c_1)c_k + R_{k-1}(c_1, \dots, c_{k-1}) + P_{\nu+k}(c_1) = 0 \quad (4.8)$$

La hipótesis sobre las separatrices de ω implica que para cada valor c_1 verificando la condición (4.7) existen unos únicos c_2, c_3, \dots verificando las ecuaciones (4.8). Si el $2\nu - 2$ jet de ω es analíticamente conjugado a

$$\omega_\nu + (f_\nu + \dots + f_{2\nu-3})\omega^R$$

entonces $P_{\nu+k} \equiv 0$ para todo k entre 2 y $\nu - 1$, y por tanto, $c_2 = c_3 = \dots = c_{\nu-1} = 0$ verifican las ecuaciones (4.8) si $2 \leq k \leq \nu - 1$. Por la unicidad expresada antes tenemos que las separatrices de ω son de la forma

$$y = t_kx + x^\nu c_k(x), \quad k = 1, \dots, \nu + 1.$$

Concluimos gracias a la Proposición 4.7. □

Vamos a considerar un conjunto de foliaciones homogéneas que verifican ciertas condiciones genéricas (noción cuyo sentido precisaremos después) introducidas en el trabajo [CeSa86] y que abreviamos con las siglas N.A.G. de *No Abelian General*:

Definición 4.9. Denotaremos por \mathcal{H} la clase de todas las foliaciones homogéneas y por \mathcal{H}_g la subclase definida por $\mathcal{H}_g = \bigsqcup_{\nu \geq 2} \mathcal{H}_g(\nu + 1)$, donde $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_g(\nu + 1)$ si y sólo si

- (1) \mathcal{F} es homogénea y su orden de anulaci3n en el origen es ν .
- (2) $P_{\nu+1}$ es reducido y los residuos α_j son no reales.
- (3) El grupo aditivo generado por los residuos α_j es denso.
- (4) El grupo de holonomía proyectiva G de \mathcal{F} es no abeliano.

Así mismo, diremos que una foliaci3n homogénea $\mathcal{F} \in \mathcal{H}$ es hiperb3lica de orden ν si y sólo si satisface las condiciones (1) y (2) anteriores. Adem3s, si \mathcal{F} es un germen de foliaci3n holomorfa (no necesariamente homogénea) definida por una 1-forma $\omega = \omega_\nu + \dots$ verificando (2),(3),(4) y

(1') ω_ν es no dicrítica,

entonces escribiremos $\omega = \omega_\nu + \dots$ N.A.G.

Observación 4.10. Si $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_g(\nu + 1)$ entonces se tienen las siguientes consecuencias.

- (i) Las condiciones (1) y (2) implican que la foliación $\tilde{\mathcal{F}}$ obtenida después de explotar el origen tiene $\nu + 1$ singularidades hiperbólicas sobre el divisor excepcional y por tanto constituye la reducción de singularidades de \mathcal{F} . En particular tenemos que \mathcal{F} es una curva generalizada.
- (ii) La hipótesis (3) implica que el subgrupo multiplicativo $D_0G \subset \mathbb{C}^*$ formado por las partes lineales de los elementos de G es denso. Ello junto a la hipótesis (4) implica que $G \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es rígido, cf. Proposición 2.2.
- (iii) Finalmente, las condiciones (2)-(4) son genéricas en el conjunto de las foliaciones homogéneas de orden ν (dado por la condición (1)). Más precisamente, las condiciones (2) y (3) se verifican en un conjunto residual de los ν -jets de ω , mientras que la condición (4) se verifica para $\omega = \omega_\nu + \omega_{\nu+1} + \dots$ variando $\omega_{\nu+1}$ en un abierto de Zariski (que depende de ω_ν) de las formas homogéneas de grado $\nu + 1$, cf. [CeSa86].

Recordemos dos resultados de [CLNS84] sobre invariantes topológicos de las curvas generalizadas:

- (a) El orden de anulación de una curva generalizada es un invariante topológico, es decir, si $\omega = \omega_\nu + \dots$ y $\omega' = \omega'_{\nu'} + \dots$ determinan dos curvas generalizadas que son topológicamente conjugadas entonces $\nu = \nu'$.
- (b) El árbol de reducción de singularidades de una curva generalizada coincide con el de sus separatrices. Por otra parte, es bien conocido que el árbol de reducción de singularidades de una curva analítica plana es un invariante topológico. Así pues, el árbol de reducción de una curva generalizada también es un invariante topológico.

Por otra parte, también tenemos la validez de las siguientes afirmaciones:

- (c) La transversalidad de las separatrices es un invariante topológico. En efecto, dadas dos separatrices lisas S_1 y S_2 por el origen transversas entonces existen coordenadas locales (x, y) tales que $S_1 = \{x = 0\}$ y $S_2 = \{y = 0\}$. Supongamos que un homeomorfismo ϕ conjuga S_1 y S_2 con dos curvas tangentes, digamos $\{y = 0\}$ y $\{y = x^n\}$, $n \geq 2$. Sea $\mathbb{S}^3(0, \epsilon)$ una pequeña esfera centrada en el origen. Su imagen por ϕ es topológicamente otra esfera centrada en el origen. Las intersecciones $S_1 \cap \mathbb{S}^3(0, \epsilon)$ y $S_2 \cap \mathbb{S}^3(0, \epsilon)$ son dos circunferencias con un enlace simple, y deben ser enviadas por ϕ a un enlace similar en $\phi(\mathbb{S}^3(0, \epsilon))$. Sin embargo, la intersección de \mathbb{S}^3 con las curvas $\{y = 0\}$ y $\{y = x^n\}$ produce un enlace topológicamente diferente al que define $\{xy = 0\}$.

- (d) El hecho de que una singularidad reducida sea hiperbólica es un invariante topológico. En efecto, si Σ es una pequeña transversal basada en un punto regular de una separatriz S , entonces es posible modificar tangencialmente un homeomorfismo que conjugue las foliaciones de manera que $\phi(\Sigma)$ sea otra transversal analítica Σ' a la separatriz $\phi(S) = S'$. Las holonomías de estas dos separatrices son topológicamente conjugadas por ϕ . Sin embargo, es conocido que la dinámica hiperbólica no es topológicamente conjugada a la dinámica de una singularidad reducida con residuo real.

De las consideraciones (a)-(d) deducimos el siguiente resultado.

Proposición 4.11. *Si $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{H}_g(\nu + 1)$ y $\mathcal{F} \in \mathcal{H}$ es topológicamente conjugada a \mathcal{F}_0 entonces $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_g(\nu + 1)$. Por tanto, si $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{H}_g(\nu + 1)$ entonces el espacio de módulos de \mathcal{F}_0 relativo a la clase homogénea*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}_0) = \{\mathcal{F} \in \mathcal{H} \mid \mathcal{F} \sim_{top} \mathcal{F}_0\} / \sim_{an}$$

coincide con el espacio de módulos $\mathcal{M}_{\mathcal{H}_g(\nu+1)}(\mathcal{F}_0)$ relativo a la subclase $\mathcal{H}_g(\nu + 1)$. Por otra parte, si $\nu = 2$ o $\nu = 3$ y $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{H}_g(\nu + 1)$ es topológicamente conjugada a otra foliación holomorfa \mathcal{F} entonces $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_g(\nu + 1) \subset \mathcal{H}$. Por tanto el espacio de módulos de $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{H}_g(\nu + 1)$ con $\nu = 2$ o 3 , relativo a la clase homogénea, coincide con el espacio de módulos $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$.

4.2 La clasificación analítica

Sea \mathcal{F} una foliación homogénea de orden ν y $q_1, \dots, q_{\nu+1} \in D$ las singularidades de la foliación explotada $\tilde{\mathcal{F}}$. Sea $t_0 \in D \setminus \{q_1, \dots, q_{\nu+1}\}$ y Σ_{t_0} un germe de transversal a $\tilde{\mathcal{F}}$ pasando por t_0 que parametrizamos por $(\mathbb{C}, 0)$. Por ejemplo, podemos tomar $\Sigma_{t_0} \subset p^{-1}(t_0)$. Asociada a la foliación \mathcal{F} y a la elección de t_0 y Σ_{t_0} tenemos una representación de holonomía

$$H_{\mathcal{F}}^{\Sigma_{t_0}} : \pi_1(D \setminus \{q_1, \dots, q_{\nu+1}\}, t_0) \rightarrow \text{Diff}(\Sigma_{t_0}, t_0).$$

Si tomamos una parametrización de Σ_{t_0} por el germe $(\mathbb{C}, 0)$ podemos identificar el grupo $\text{Diff}(\Sigma_{t_0}, t_0)$ con $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Si la transversal Σ_{t_0} es la fibra de Hopf que pasa por t_0 entonces notaremos $H_{\mathcal{F}}^{\Sigma_{t_0}}$ simplemente por $H_{\mathcal{F}}^{t_0}$.

Las distintas representaciones de holonomía que podemos obtener variando las elecciones de la transversal y su parametrización están relacionadas mediante:

- (1) Sean Σ y Σ' son dos transversales por un mismo punto $t_0 \in D$ y H y H' son las correspondientes representaciones de holonomía. Si $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ es un germe de difeomorfismo entonces $\varphi_* \circ H_{\mathcal{F}}^{\Sigma} = H_{\mathcal{F}}^{\Sigma'}$.

- (2) Si tenemos dos puntos $t_0, t'_0 \in D$ y consideramos como transversales las fibras de Hopf basadas en estos puntos entonces podemos hacer la siguiente construcción: Sea δ un camino uniendo t_0 y t'_0 en $D \setminus \{q_1, \dots, q_{\nu+1}\}$ y $\varphi_\delta : \Sigma_{t_0} \rightarrow \Sigma_{t'_0}$ la transformación de holonomía asociada a δ , entonces existe un isomorfismo $c_\delta : \pi_1(D \setminus \{q_1, \dots, q_{\nu+1}\}, t_0) \rightarrow \pi_1(D \setminus \{q_1, \dots, q_{\nu+1}\}, t'_0)$, consistente en conjugar por el camino δ , tal que $(\varphi_\delta)_* \circ H_{\mathcal{F}}^{t_0} = H_{\mathcal{F}}^{t'_0} \circ c_\delta$.

Estas operaciones permiten definir una relación de equivalencia en el conjunto de las representaciones de holonomía.

Definición 4.12. Sea \mathcal{F} un germen de foliación no dicrítica, definimos la clase \mathfrak{H} de representaciones de holonomía de \mathcal{F} como la clase de equivalencia de una representación de holonomía $H : \Gamma \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ de \mathcal{F} .

Observación 4.13. Si \mathcal{F} es una foliación homogénea y U denota un entorno de D en $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ menos las separatrices, entonces la foliación $\widetilde{\mathcal{F}}|_U$ se obtiene como una suspensión de su representación de holonomía.

Si \mathcal{F} es analíticamente conjugada a \mathcal{F}' mediante un biholomorfismo local $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ entonces éste extiende al divisor excepcional D y conjuga las foliaciones $\widetilde{\mathcal{F}}$ y $\widetilde{\mathcal{F}'}$. Si denotamos por φ la restricción de ϕ al divisor D y por φ_0 la restricción $\phi|_{\Sigma_{t_0}} : \Sigma_{t_0} \rightarrow \phi(\Sigma_{t_0})$ tenemos un diagrama conmutativo involucrando las representaciones de holonomía de \mathcal{F} y \mathcal{F}' :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(D \setminus \{t_1, \dots, t_{\nu+1}\}, t_0) & \xrightarrow{H_{\mathcal{F}}^{\Sigma_{t_0}}} & \text{Diff}(\Sigma_{t_0}, t_0) \\ \varphi_* \downarrow & & (\varphi_0)_* \downarrow \\ \pi_1(D \setminus \{\varphi(t_1), \dots, \varphi(t_{\nu+1})\}, \varphi(t_0)) & \xrightarrow{H_{\mathcal{F}'}^{\phi(\Sigma_{t_0})}} & \text{Diff}(\phi(\Sigma_{t_0}), \varphi(t_0)) \end{array}$$

que podemos abreviar escribiendo $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' \circ \varphi_*$. Por otra parte, como el residuo de una singularidad es un invariante analítico, deducimos que los residuos de $\widetilde{\mathcal{F}}$ y $\widetilde{\mathcal{F}'}$ en los puntos q_i y $\varphi(q_i)$ son iguales. El siguiente resultado expresa la validez del recíproco de la afirmación anterior y nos proporciona por tanto la **clasificación analítica** de los gérmenes de foliaciones homogéneas hiperbólicas. La aplicación a la situación semi-local se encuentra en [CeSa86] mientras que la técnica local subyacente ya aparece en [MM80]. Dicha técnica local consiste en la construcción de una conjugación analítica entre las foliaciones utilizando la elevación de caminos y una conjugación analítica entre las holonomías de la separatriz horizontal. La cual es válida no solamente para singularidades hiperbólicas (para las que disponemos ya del Teorema de Linealización de Poincaré) sino, más generalmente, aquellas cuyos residuos α_j no son racionales negativos, es decir, el caso de singularidades reducidas que no son sillan-nodo. Por ejemplo, cuando $\alpha_j \in \mathbb{Q}^+$, caso en que pueden aparecer las singularidades resonantes.

Teorema 4.14 (Cerveau-Sad, Mattei-Moussu). *Consideremos dos foliaciones homogéneas hiperbólicas \mathcal{F} y \mathcal{F}' . Sean q_i y q'_i las singularidades respectivas de $\tilde{\mathcal{F}}$ y $\tilde{\mathcal{F}'}$ y $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}'$ las correspondientes clases de representaciones de holonomía. Entonces \mathcal{F} es analíticamente conjugada a \mathcal{F}' si y solo si existe $\varphi \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ tal que $q'_i = \varphi(q_i)$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' \circ \varphi_*$ y los residuos de $\tilde{\mathcal{F}}$ y $\tilde{\mathcal{F}'}$ en q_i y q'_i coinciden.*

De ahora en adelante, a cada foliación homogénea \mathcal{F} le asociaremos el conjunto $q = \{q_1, \dots, q_{\nu+1}\} \subset D$ de las singularidades de la foliación explotada $\tilde{\mathcal{F}}$ sobre el divisor excepcional D y para abreviar diremos que \mathcal{F} tiene sus separatrices sobre $q \subset D$. Para cada $t_0 \in D \setminus q$ definimos el grupo $\Gamma_q^{t_0}$ como el grupo fundamental $\pi_1(D \setminus q, t_0)$ y tomamos la transversal Σ_{t_0} como la fibra de Hopf que pasa por t_0 . De esta manera podemos hablar de la representación de holonomía $H_{\mathcal{F}}^{t_0} : \Gamma_q^{t_0} \rightarrow \text{Diff}(\Sigma_{t_0}, t_0)$.

4.3 La clasificación topológica

El objetivo de esta sección es dar un criterio de conjugación topológica en la clase \mathcal{H}_g para poder calcular el espacio de módulos relativo a esta clase. Como hemos visto en la Proposición 4.11, si el orden de la singularidad es menor o igual que tres entonces dicho espacio coincide con el espacio de módulos absoluto, que es en el que en principio tiene más interés. En [CeSa86] se estudian los espacios de módulos de gérmenes de foliaciones holomorfas en $(\mathbb{C}^2, 0)$ considerándolos en una familia dependiendo continuamente de un parámetro. Más precisamente, decimos que un germen de foliación holomorfa \mathcal{F}_1 es una deformación estable de \mathcal{F}_0 si existe una familia de foliaciones \mathcal{F}_t que depende continuamente de un parámetro $t \in [0, 1]$ y una familia continua de homeomorfismos $\phi_t : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ conjugando \mathcal{F}_0 y \mathcal{F}_t con $\phi_0 = \text{id}$. Entonces se define el espacio de t -módulos de \mathcal{F}_0 como el espacio cociente de los gérmenes de foliaciones holomorfas que son deformaciones estables de \mathcal{F}_0 , módulo equivalencia analítica. Una pieza clave en su estudio es la invariancia topológica de la holonomía proyectiva bajo deformaciones (dependiendo de un parámetro) estables :

Teorema 4.15 (Cerveau-Sad). *Sea $\omega = A dx + B dy$ un germen de 1-forma holomorfa en el origen teniendo su primer jet no nulo ω_ν general. Sea η_t una deformación estable de ω . Entonces las holonomías proyectivas de ω y η_t son topológicamente conjugadas.*

En el mismo trabajo se plantea la misma cuestión sin parámetros:

Conjetura 4.16 (Cerveau-Sad). *Si ω y ω' son topológicamente conjugadas entonces sus holonomías proyectivas también lo son.*

En esta sección respondemos afirmativamente a esta pregunta en el caso en que $\omega = \omega_\nu + \dots$ tiene su primer jet no nulo ω_ν **general**, cf. Definición 4.3, pero gracias a la Proposición 4.5

podremos reducirnos a considerar únicamente foliaciones homogéneas hiperbólicas, que es lo que haremos a partir de ahora. El estudio de esta conjetura nos permitirá en la sección 4.5 a responder parcialmente a otra cuestión planteada en [CeSa86]:

Problema 4.17 (Cerveau-Sad). *Calcular el espacio de módulos (sin utilizar deformaciones a parámetros) de un germe de 1-forma $\omega = \omega_\nu + \dots$ N.A.G.*

De hecho, podemos adelantar alguna de las respuestas que hemos obtenido:

Teorema. *Sea \mathcal{F} un germe de foliación holomorfa definida por una 1-forma del tipo $\omega = \omega_2 + \dots$ N.A.G. Entonces \mathcal{F} es rígida, es decir, el espacio de módulos $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ de todas las foliaciones holomorfas topológicamente conjugadas a \mathcal{F} por algún homeomorfismo que preserva las orientaciones módulo equivalencia analítica, tiene como único elemento la propia clase de \mathcal{F} .*

Teorema. *Sea \mathcal{F} un germe de foliación holomorfa definida por una 1-forma del tipo $\omega = \omega_3 + \dots$ N.A.G. Entonces el espacio de módulos $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ es un recubrimiento conexo de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.*

Explicaremos brevemente cuál es la dificultad en la demostración del Teorema 4.15: Sean \mathcal{F} y \mathcal{F}' dos gérmenes de foliaciones homogéneas en el origen con $\nu + 1$ separatrices sobre $q, q' \subset D$ y $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ un germe de homeomorfismo que conjuga \mathcal{F} y \mathcal{F}' . Si ϕ extendiera continuamente al divisor excepcional D después explotar el origen entonces, gracias a la continuidad, sería posible modificar ϕ tangencialmente para que conjugara dos pequeñas transversales analíticas $\Sigma_{t_0}, \Sigma_{t'_0}$, basadas en sendos puntos $t_0, t'_0 \in D$, sobre las que poder comparar las holonomías proyectivas de \mathcal{F} y \mathcal{F}' . También podríamos considerar la restricción $\bar{\phi}$ al divisor D de la extensión de ϕ a $\widetilde{\mathbb{C}^2}$, la cual induciría un isomorfismo $\psi = \bar{\phi}_*$ entre los grupos fundamentales $\Gamma_q^{t_0}$ y $\Gamma_{q'}^{t'_0}$. De hecho, denotando por $\varphi_0 : \Sigma_{t_0} \rightarrow \Sigma_{t'_0}$ a la restricción a la transversal Σ_{t_0} de la modificación tangencial de ϕ es fácil ver que se tiene la siguiente relación:

$$(\varphi_0)_* \circ H_{\mathcal{F}}^{\Sigma_{t_0}} = H_{\mathcal{F}'}^{\Sigma_{t'_0}} \circ \psi \quad (4.9)$$

La dificultad proviene del hecho que en general ϕ no extiende continuamente al divisor D como lo pone de manifiesto el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.18. Consideremos dos foliaciones lineales dadas por las 1-formas $x dy + \alpha y dx$ y $x dy + \beta y dx$ como en el capítulo 3 y $\phi_{\alpha\beta}(x, y) = (x|x|^\lambda, y|y|^\mu)$ un homeomorfismo que las conjuga preservando la orientación de las hojas. Recordemos que λ y μ dependen de α y β y $\lambda \neq \mu$ si α y β son suficientemente generales. Veamos en este caso que $\phi_{\alpha\beta}$ no extiende homeomorficamente al divisor excepcional D después de explotar ambas foliaciones en el punto singular $(0, 0)$. En la carta (t, x) de $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ tenemos que $\widetilde{\phi}_{\alpha\beta} : \widetilde{\mathbb{C}^2} \setminus D \rightarrow \widetilde{\mathbb{C}^2} \setminus D$ envía (t, x) , $x \neq 0$ a $(t|t|^\mu|x|^{\mu-\lambda}, x|x|^\lambda)$. Cuando fijamos $t = t_0$ y hacemos tender x a cero tenemos que $\widetilde{\phi}_{\alpha\beta}(t_0, x)$ acumula a

1. toda la circunferencia $\{t \in D \mid |t| = |t_0|\}$ si $\operatorname{Re}(\mu - \lambda) = 0$;
2. $(0, 0)$ si $\operatorname{Re}(\mu - \lambda) > 0$;
3. $(\infty, 0)$ si $\operatorname{Re}(\mu - \lambda) < 0$.

En [CeSa86] los autores consiguen modificar tangencialmente ϕ de manera que conjugue dos pequeñas coronas (cuyo cociente de radios está dado a priori) C_0, C'_0 sobre las transversales Σ_{t_0} y $\Sigma_{t'_0}$. Su demostración es consecuencia de que el homeomorfismo ϕ que consideran es próximo a la identidad. Después, definen un nuevo homeomorfismo $\varphi_0 : \Sigma_{t_0} \rightarrow \Sigma_{t'_0}$ de manera que $\varphi_0|_{C_0} = \phi|_{C_0}$ y conjugue los generadores de la holonomía \mathcal{F} y \mathcal{F}' . En ese caso, como q es próximo a q' , es posible restringirse al caso $q = q'$ de manera que el isomorfismo ψ sea la identidad.

Nuestra aportación al problema consiste en omitir la hipótesis de deformación que permiten considerar las mismas separatrices para \mathcal{F} y \mathcal{F}' y un homeomorfismo ϕ próximo a la identidad. Veremos que aunque en general la extensión $\bar{\phi}$ no está definida, su acción en homotopía ψ siempre existe. Comencemos con una definición:

Definición 4.19. *Consideremos los grupos fundamentales $\Gamma = \pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus q, t_0)$ y $\Gamma' = \pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus q', t'_0)$. Diremos que un isomorfismo $\psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ es geométrico si y sólo si existe un homeomorfismo $\varphi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ preservando la orientación tal que $\varphi(q) = q'$, $\varphi(t_0) = t'_0$ y $\varphi_* = \psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$.*

En la sección 4.4 recordaremos una caracterización algebraica de dichos isomorfismos, cf. Teorema 4.30. Presentamos a continuación el primer resultado acerca de la conjugación topológica de foliaciones homogéneas que expresa de una manera precisa la afirmación anterior.

Proposición 4.20. *Sean \mathcal{F} y \mathcal{F}' dos foliaciones homogéneas con separatrices S, S' sobre $q, q' \subset D$ y ϕ un homeomorfismo que conjugue \mathcal{F} y \mathcal{F}' preservando las orientaciones. Entonces $\phi_* : \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S')$ induce un isomorfismo geométrico $\psi : \Gamma_q^{t_0} \rightarrow \Gamma_{q'}^{t'_0}$ que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S, q_0) & \xrightarrow{\phi_*} & \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S', q'_0) \\
 p_* \downarrow & & p_* \downarrow \\
 \Gamma_q^{t_0} & \xrightarrow{\psi} & \Gamma_{q'}^{t'_0}
 \end{array} \tag{4.10}$$

De la construcción se deduce que si ϕ extiende al divisor excepcional y denotamos por $\bar{\phi}$ su restricción a D , entonces $\bar{\phi}_* = \psi$.

Demostración. En primer lugar, tomemos coordenadas en las que las separatrices de \mathcal{F} y \mathcal{F}' sean las rectas $S_j = \{y = q_j x\}$ y $S'_j = \{y = q'_j x\}$, $j = 1, \dots, \nu + 1$, donde la ordenación adoptada verifica que $\phi(S_j) = S'_j$. Para cada $j = 1, \dots, \nu + 1$ fijamos una pequeña transversal analítica Σ_j , a la foliación \mathcal{F} , pasando por un punto de $S_j \setminus \{0\}$. Por continuidad, y con la ayuda de un entorno trivializante de \mathcal{F}' , podemos modificar continuamente ϕ , de manera tangencial en las hojas de \mathcal{F}' , y conseguir que $\phi(\Sigma_j)$ sea una transversal analítica, Σ'_j , de \mathcal{F}' . Observemos que $\mathbb{C}^2 \setminus S = \widetilde{\mathbb{C}^2} \setminus (S \cup D)$ y que la restricción de la fibración de Hopf $p : \widetilde{\mathbb{C}^2} \rightarrow D$ a $\widetilde{\mathbb{C}^2} \setminus D$ es una fibración localmente trivial de fibra \mathbb{D}^* . Como $D \setminus \{q_1\} = \mathbb{C}$ es contráctil, la fibración $\widetilde{\mathbb{C}^2} \setminus (S \cup D) \rightarrow D \setminus q$ es topológicamente trivial. Por tanto, $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S) \cong \pi_1(D \setminus q) \oplus \pi_1(\mathbb{D}^*) \cong \Gamma \oplus \mathbb{Z}c$, donde c es un camino cerrado contenido en una fibra $\Sigma_0 = p^{-1}(t_0)$ y que da una vuelta en sentido positivo al punto $t_0 \in D$. Construyamos un sistema de generadores de $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S)$ que nos será útil en lo sucesivo: Para cada $j = 1, \dots, \nu + 1$ consideremos un punto $p_j \in \Sigma_j^* := \Sigma_j \setminus S_j$ y $p_0 \in \Sigma_0$. Sea $\tilde{\delta}_j$ un camino uniendo p_0 y p_j en $\widetilde{\mathbb{C}^2} \setminus (S \cup D)$ y $\tilde{\gamma}_j \subset \Sigma_j^*$ un camino cerrado partiendo de p_j y dando una vuelta a la separatriz S_j en sentido positivo. Definimos $\tilde{e}_j = [\tilde{\delta}_j \tilde{\gamma}_j \tilde{\delta}_j^{-1}] \in \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S)$ y $e_j = p_*(\tilde{e}_j) \in \Gamma$. Entonces $\mathcal{G} = (e_1, \dots, e_{\nu+1})$ es un sistema de generadores del grupo libre Γ , verificando la relación $e_1 \cdots e_{\nu+1} = 1$. De hecho, es posible tomar \mathcal{G} de manera que sea un sistema de generadores *geométricos* de acuerdo a la Definición 4.27 de la sección 4.4. De la misma manera, tenemos que $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S') \cong \Gamma' \oplus \mathbb{Z}c'$ con $\Gamma' = \pi_1(D \setminus q')$ y un sistema de generadores análogo.

Como $\nu \geq 2$, el isomorfismo $\phi_* : \Gamma \oplus \mathbb{Z}c \rightarrow \Gamma' \oplus \mathbb{Z}c'$ debe enviar el centro $\mathbb{Z}c$ de $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S)$ isomórficamente sobre el centro $\mathbb{Z}c'$ de $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S')$. Además, como ϕ preserva la orientación de las hojas y del espacio ambiente, conserva a su vez la orientación de la transversal por lo que $\phi_*(c) = c'$. Podemos interpretar geoméricamente este hecho puramente algebraico como sigue: El grupo de homología $H_1(\mathbb{C}^2 \setminus S, \mathbb{Z})$ es isomorfo a $\mathbb{Z}^\nu \oplus \mathbb{Z}\bar{c}$. Como el generador \bar{c} tiene representantes cercanos a todas las separatrices S_j y además $\phi(S_j) = S'_j$, se deduce que $\phi(c)$ no puede enrollarse alrededor de ninguna separatriz S'_j , por lo que $\phi_*(c) = ac'$, $a \in \mathbb{Z}^*$. Al ser ϕ un homeomorfismo que preserva las orientaciones se tiene que $a = 1$.

Si escribimos ϕ_* como $(\psi, \chi) : \Gamma \oplus \mathbb{Z}c \rightarrow \Gamma' \oplus \mathbb{Z}c'$ entonces ψ determina un morfismo bien definido $\psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ mediante el paso al cociente por el centro. El lema de los cinco implica que de hecho ψ es un isomorfismo. Veamos que ψ es geométrico, para ello expresemos ψ en términos de los sistemas de generadores (geométricos) que hemos introducido en Γ y Γ' : Por definición $\psi(e_j) = p_*(\phi_*(\tilde{e}_j))$, y por otra parte, $\phi(\tilde{\gamma}_j)$ es homótopo a $\tilde{\gamma}'_j \subset \Sigma'_j \setminus S'_j$. Por tanto, resulta que $\psi(e_j) = m_j e'_j m_j^{-1}$ donde $m_j = [\delta'_j \cdot p(\phi(\tilde{\delta}_j))^{-1}] \in \Gamma'$. Utilizando la caracterización dada por el Teorema de Nielsen (cf. Teorema 4.30 de la siguiente sección) concluimos que ψ es geométrico de acuerdo a la Definición 4.19. \square

Antes de pasar a enunciar el Teorema de conjugación topológica de la holonomía proyectiva, necesitaremos el siguiente lema técnico.

Lema 4.21. *Sean \mathcal{F} y \mathcal{F}' dos foliaciones homogéneas hiperbólicas con separatrices sobre $q, q' \subset D$ respectivamente y ϕ un homeomorfismo que conjugue \mathcal{F} y \mathcal{F}' preservando las orientaciones. Entonces, para toda corona compacta C_0 , de radio exterior suficientemente pequeño, contenida en una fibra Σ_0 suficientemente cercana a una separatriz de \mathcal{F} , existe una modificación tangencial de ϕ , isotopa a la identidad siguiendo las hojas de \mathcal{F}' , tal que la imagen $\phi(C_0)$ está contenida en otra fibra Σ'_0 de $p : \widetilde{\mathbb{C}^2} \rightarrow D$.*

Demostración. Consideremos una corona compacta C_1 contenida en la separatriz $S_1 \setminus \{q_1\}$ de radio exterior suficientemente pequeño para que $\phi(C_1) \subset S_1 \setminus \{q'_1\}$ esté contenido en un entorno de coordenadas linealizantes (x', y') de la singularidad hiperbólica q'_1 de $\widetilde{\mathcal{F}'}$. Sea V' un entorno tubular de $\phi(C_1)$ en $\widetilde{\mathbb{C}^2} \setminus (D \cup S')$ y V un entorno tubular de C_1 tal que $\phi(V) \subset V'$. Consideramos una fibra de Hopf Σ_0 suficientemente próxima a S_1 para que $V \cap \Sigma_0$ contenga a una corona C_0 del tamaño que queremos enderezar. Por construcción $\phi(C_0) \subset V'$ está contenido en el entorno de coordenadas linealizantes (x', y') que hemos fijado y en las cuales $\widetilde{\mathcal{F}'}$ viene dada por el campo $X'_1 = x' \partial_{x'} - \alpha'_1 y' \partial_{y'}$, y la proyección p por $p(x', y') = x'$. De manera análoga a la demostración de la Proposición 2.20, en la que se enderezaba una fibra no invariante en el caso de foliaciones de Riccati, consideremos la aplicación $f = p \circ \phi|_{C_0} : C_0 \rightarrow D$ que en este caso vuelve a ser homótopa a constante ya que C_0 tiene el tipo de homotopía del camino c y sabemos que $\phi_*(c) = c'$ y $p_*(c') = 1$. Veamos que existe una modificación tangencial de ϕ tal que $\phi(C_0) \subset \Sigma'_0 = \{x' = x'_0\}$. El flujo del campo X'_1 es $\varphi_T(x', y') = (x'e^T, y'e^{-\alpha'_1 T})$, de manera que si queremos que $x'e^T = x'_0$ hemos de tomar $T = \log \frac{x'}{x'_0}$ para todo punto $(x', y') \in \phi(C_0)$. Ahora bien, expresando en la coordenada x' la aplicación homótopa a constante $f : C_0 \rightarrow \mathbb{C}^*$ tenemos que existe un logaritmo continuo $\log f : C_0 \rightarrow \mathbb{C}$. Así pues, la aplicación $\xi : \phi(C_0) \subset V' \rightarrow V'$, definida siguiendo el flujo de X'_1 a tiempo $\log x'_0 - \log(f \circ \phi^{-1})$, envía $\phi(C_0)$ sobre $\Sigma'_0 = \{x' = x'_0\}$. Además, podemos extender continuamente ξ a todo $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ de manera que sea la identidad fuera de V' . \square

Enunciemos nuestro resultado sobre la invariancia topológica de la holonomía proyectiva.

Teorema 4.22. *Sean \mathcal{F} y \mathcal{F}' dos foliaciones homogéneas hiperbólicas con separatrices sobre $q, q' \subset D$ respectivamente. Si ϕ es un homeomorfismo que conjugue \mathcal{F} y \mathcal{F}' preservando las orientaciones entonces existe un isomorfismo geométrico $\psi : \Gamma_q^{t_0} \rightarrow \Gamma_{q'}^{t'_0}$ haciendo conmutativo el diagrama (4.10) y existe un **homeomorfismo** local $\varphi_0 : (\Sigma_{t_0}, t_0) \rightarrow (\Sigma_{t'_0}, t'_0)$ de manera que verifican la siguiente relación*

$$(\varphi_0)_* \circ H_{\mathcal{F}}^{t_0} = H_{\mathcal{F}'}^{t'_0} \circ \psi \quad (4.11)$$

Demostración. El isomorfismo ψ es el que hemos construido en la Proposición 4.20. Vamos pues a construir φ_0 utilizando el mismo argumento que en [CeSa86]: Tomemos

$\gamma_1, \dots, \gamma_\nu$ unos generadores de $\Gamma_q^{t_0}$ tales que $h_j = H_{\mathcal{F}}^{t_0}(\gamma_j)$ sea contractante y pongamos $h'_j = H_{\mathcal{F}'}^{t'_0}(\psi(\gamma_j))$. Utilizando la aplicación de Dulac de las singularidades hiperbólicas q_1 y q'_1 y el hecho que ϕ preserva las orientaciones, se puede ver que h'_j también es contractante. Para todo $j = 1, \dots, \nu$ consideremos una corona fundamental C_j de h_j cuyo borde exterior sea el borde del disco Σ_{t_0} y tomamos $C_0 \subset \Sigma_{t_0}$ de manera que contenga todas las coronas C_j así como sus primeras iteradas $h_j(C_j)$. Aplicamos entonces el Lema 4.21 a dicha corona C_0 (lo cual es posible si hemos tomado la precaución de considerar el punto t_0 suficientemente cerca de una separatriz). La modificación ϕ verifica que si $x, y \in C_0$ son tales que $y = H_{\mathcal{F}}^{t_0}(\gamma)(x)$ entonces, por la definición de ψ se tiene que $\phi(y) = H_{\mathcal{F}'}^{t'_0}(\psi(\gamma))(\phi(x))$, es decir, que $\phi|_{C_0}$ conjugua las holonomías de \mathcal{F} y \mathcal{F}' . Para cada $j = 1, \dots, \nu$ podemos definir ahora $\varphi_j : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0$ de la manera siguiente: $\varphi_j|_{C_j} = \phi|_{C_j}$, y si $z \in \Sigma_j$ existe un único entero positivo $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $h_j^{-n_j}(z) \in C_j$, ponemos en este caso $\varphi_j(z) = h_j'^{n_j}(\phi(h_j^{-n_j}(z)))$. Por definición, la aplicación φ_j conjugua las holonomías h_j y h'_j . El mismo argumento que en [CeSa86], utilizando la conjugación simultánea de la holonomía en la corona C_0 , muestra que las aplicaciones φ_j coinciden y definen por tanto un único homeomorfismo $\varphi_0 : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0$ verificando la relación (4.11). \square

Así pues, el Teorema 4.22 nos proporciona una condición necesaria para la conjugación topológica de dos foliaciones homogéneas hiperbólicas. Bajo unas hipótesis poco más restrictivas podemos mostrar una segunda condición necesaria: la igualdad de los residuos.

Proposición 4.23. *Sean $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathcal{H}_g$ dos foliaciones homogéneas N.A.G. con separatrices sobre $q, q' \subset D$ respectivamente. Si ϕ es un homeomorfismo que conjugua \mathcal{F} y \mathcal{F}' preservando las orientaciones entonces existe un isomorfismo geométrico $\psi : \Gamma_q^{t_0} \rightarrow \Gamma_{q'}^{t'_0}$ haciendo conmutativo el diagrama (4.10) y existe un **biholomorfismo** local $\varphi_0 : (\Sigma_{t_0}, t_0) \rightarrow (\Sigma_{t'_0}, t'_0)$ tales que $(\varphi_0)_* \circ H_{\mathcal{F}}^{t_0} = H_{\mathcal{F}'}^{t'_0} \circ \psi$. Además, los residuos de \mathcal{F} y \mathcal{F}' coinciden en las separatrices correspondientes por ϕ .*

Demostración. Como el grupo de holonomía G de \mathcal{F} es rígido, cf. Observación 4.10, tenemos que el homeomorfismo φ_0 construido en la demostración del Teorema 4.22 es holomorfo. La Proposición 2.4 implica la igualdad de los residuos, recordemos brevemente por qué: La Proposición 2.2 implica que el biholomorfismo φ_0 es de hecho una homotecia si lo expresamos en una coordenada linealizante y de algún elemento hiperbólico de G . Por tanto, $\widetilde{\varphi}_0 : \widetilde{\Sigma}_0 \rightarrow \widetilde{\Sigma}_0$ es una traslación. Por otra parte, de la Proposición 2.3 deducimos que $\widetilde{\varphi}_0(\widetilde{y} - \alpha_j) = \widetilde{\varphi}_0(\widetilde{y}) - \alpha'_j$. Por lo tanto, obtenemos la igualdad de los residuos $\alpha_j = \alpha'_j$ para todo j . \square

El anunciado Teorema de Clasificación topológica para las foliaciones de la clase \mathcal{H}_g afirmará en definitiva, que las anteriores condiciones necesarias para las conjugación topológica son de hecho suficientes. Para demostrarlo necesitaremos utilizar el siguiente resultado de [LN87] sobre síntesis de foliaciones homogéneas con holonomía dada.

Teorema 4.24 (Lins-Neto). Sean $h_1, \dots, h_{\nu+1}$ elementos hiperbólicos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tales que $h_1 \circ \dots \circ h_{\nu+1} = \text{id}$ y $\nu + 1$ puntos diferentes $q_1, \dots, q_{\nu+1} \in \overline{\mathbb{C}}$. Entonces existe una foliación homogénea \mathcal{F} con separatrices $y = q_j x$, $j = 1, \dots, \nu + 1$ y cuyos generadores de holonomía son $h_1, \dots, h_{\nu+1}$. Además, podemos prefijar los residuos $\alpha_1, \dots, \alpha_{\nu+1} \in \mathbb{C}$ de \mathcal{F} si éstos valores verifican que $\sum \alpha_j = -1$ y $h'_j(0) = e^{2i\pi\alpha_j}$.

Sea \mathcal{F}_0 una foliación homogénea hiperbólica con separatrices sobre $q_0 \subset D$ y una representación de holonomía $H_{\mathcal{F}_0}^{t_0} : \Gamma_{q_0}^{t_0} \rightarrow \text{Diff}(\Sigma_{t_0}, t_0)$.

Proposición 4.25. Para cada isomorfismo geométrico $\psi : \Gamma_{q_0}^{t_0} \rightarrow \Gamma_q^{t_0}$ existe una foliación homogénea $\mathcal{F}_\psi^{t_0}$ con los mismos residuos que \mathcal{F}_0 , cuya representación de holonomía basada en t_0 es $H_{\mathcal{F}_0}^{t_0} \circ \psi^{-1}$ y tal que es topológicamente conjugada a \mathcal{F}_0 por un homeomorfismo que preserva las orientaciones y que induce ψ en el divisor.

Demostración. El resultado es una consecuencia directa del Teorema 4.24 salvo por la conjugación topológica con \mathcal{F}_0 cuya demostración es completamente análoga a la de la Proposición 2.27. \square

Finalmente, podemos enunciar y demostrar el siguiente resultado.

Teorema 4.26 (Clasificación topológica). Sean $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathcal{H}_g$ dos foliaciones homogéneas N.A.G. con separatrices sobre $q, q' \subset D$ respectivamente. Entonces \mathcal{F} y \mathcal{F}' son topológicamente conjugadas por un homeomorfismo que preserva las orientaciones si y sólo si existe un isomorfismo geométrico $\psi : \Gamma_q^{t_0} \rightarrow \Gamma_{q'}^{t'_0}$ y un difeomorfismo local $\varphi_0 : (\Sigma_{t_0}, t_0) \rightarrow (\Sigma_{t'_0}, t'_0)$ tales que $(\varphi_0)_* \circ H_{\mathcal{F}}^{t_0} = H_{\mathcal{F}'}^{t'_0} \circ \psi$ y además, los residuos de \mathcal{F} y \mathcal{F}' coinciden en las singularidades correspondientes por ψ .

Demostración. La necesidad viene asegurada por la Proposición 4.23. Veamos que las condiciones también son suficientes: Supongamos que $\mathcal{F}' \in \mathcal{H}_g$ admite una representación de holonomía verificando $(\varphi_0)_* \circ H_{\mathcal{F}}^{t_0} = H_{\mathcal{F}'}^{t'_0} \circ \psi$ y cuyos residuos son iguales a los de \mathcal{F} en los puntos correspondientes por ψ . Por el Teorema de Clasificación Analítica 4.14 concluimos que \mathcal{F}' es analíticamente conjugada a la foliación $\mathcal{F}_\psi^{t_0}$ obtenida a partir de la foliación \mathcal{F} como se describe en la Proposición 4.25. Como, por otra parte, $\mathcal{F}_\psi^{t_0}$ es topológicamente conjugada a \mathcal{F} por un homeomorfismo que preserva la orientación de las hojas, la misma afirmación es cierta para la foliación \mathcal{F}' . \square

4.4 Preliminares topológicos

En esta sección introduciremos algunas nociones que nos serán de utilidad para estudiar los espacios de módulos de las foliaciones homogéneas. En particular, daremos una caracterización algebraica de los isomorfismos geométricos, introducidos en la sección anterior,

utilizando el grupo de trenzas puras del plano. Finalizaremos la sección haciendo un estudio de los espacios de módulos de las separatrices de una manera susceptible de ser generalizada a las foliaciones en la siguiente sección.

4.4.1 Grupos de trenzas

La referencia básica a la que remitimos para las demostraciones de los hechos que utilizamos es el libro de J.S. Birman [Bir74]. Sea X una variedad y n un entero mayor o igual que uno, definimos el espacio de configuración de las n -trenzas puras sobre X como

$$F_n(X) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}$$

y el grupo de n -trenzas puras sobre X como su grupo fundamental $\pi_1(F_n(X))$. Fijamos $(x_1^0, \dots, x_m^0) \in F_m(X)$ y escribimos $F_{m,n}(X) = F_n(X \setminus \{x_1^0, \dots, x_m^0\})$, y se tiene que para todo $n \geq m$ la aplicación $\pi : F_n(X) \rightarrow F_m(X)$, consistente en olvidar los $n - m$ últimos puntos, dota a $F_n(X)$ de una estructura de fibrado localmente trivial sobre $F_m(X)$ de fibra tipo $F_{m,n-m}(X)$. El grupo de trenzas puras de $X = \mathbb{R}^2$, que se denota clásicamente por P_n , admite la siguiente presentación:

$$P_n = \langle A_{ij}, 1 \leq i < j \leq n \mid R_n \rangle,$$

donde las relaciones R_n son las siguientes:

$$(R_n) \quad A_{rs}^{-1} A_{ij} A_{rs} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } 1 \leq r < s < i < j \leq n \\ A_{ij} & \text{si } 1 \leq i < r < s < j \leq n \\ A_{rj} A_{ij} A_{rj}^{-1} & \text{si } 1 \leq r < s = i < j \leq n \\ (A_{ij} A_{sj}) A_{ij} (A_{ij} A_{sj})^{-1} & \text{si } 1 \leq r = i < s < j \leq n \\ [A_{rj}, A_{sj}] A_{ij} [A_{rj}, A_{sj}]^{-1} & \text{si } 1 \leq r < i < s < j \leq n \end{cases}$$

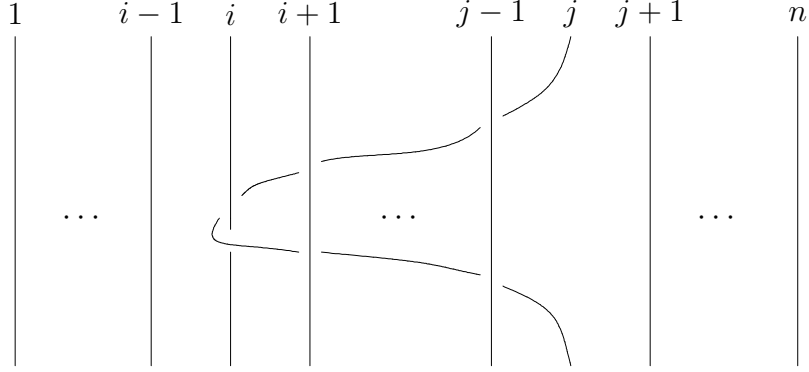
Podemos visualizar geoméricamente el generador A_{ij} en la Figura 4.1.

Se tiene una representación fiel de P_n en los automorfismos del grupo libre de rango n , $\mathbb{F}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, dada por la asignación

$$A_{ij}(x_k) = \begin{cases} x_k & \text{si } k < i \\ (x_i x_j) x_k (x_i x_j)^{-1} & \text{si } k = i \\ (x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1}) x_k (x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1})^{-1} & \text{si } i < k < j \\ x_i x_k x_i^{-1} & \text{si } k = j \\ x_k & \text{si } k > j \end{cases} \quad (4.12)$$

A partir de ahora identificaremos P_n con su imagen en $\text{Aut } \mathbb{F}_n$.

Otro grupo de trenzas que nos interesará considerar es el de la esfera $\mathbb{S}^2 \cong \overline{\mathbb{C}}$. Observemos que debido a la acción de los grupos afín y de Möbius sobre \mathbb{C} y $\overline{\mathbb{C}}$ respectivamente

Figura 4.1: El generador A_{ij} de P_n .

podemos identificar $\text{Aff}(1, \mathbb{C})$ con $F_2(\mathbb{C})$ y $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ con $F_3(\overline{\mathbb{C}})$, lo que nos permite deducir que los fibrados $F_n(\mathbb{C}) \rightarrow F_2(\mathbb{C})$ y $F_{n+1}(\overline{\mathbb{C}}) \rightarrow F_3(\overline{\mathbb{C}})$ son isomorfos de manera natural a los productos directos $F_{2,n-2}(\mathbb{C}) \times F_2(\mathbb{C})$ y $F_{3,n-2}(\overline{\mathbb{C}}) \times F_3(\overline{\mathbb{C}})$ respectivamente. Por tanto, tenemos los siguientes isomorfismos a nivel de grupos fundamentales:

$$\pi_1(F_n(\mathbb{C})) \cong \pi_1(F_{2,n-2}(\mathbb{C})) \oplus \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad \pi_1(F_{n+1}(\overline{\mathbb{C}})) \cong \pi_1(F_{3,n-2}(\overline{\mathbb{C}})) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

En particular, como $F_{2,n-2}(\mathbb{C}) = F_{2,n-2}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}) = F_{3,n-3}(\overline{\mathbb{C}})$ tenemos que

$$M_n := \pi_1(F_{n+1}(\mathbb{S}^2)) / \pi_1(F_3(\mathbb{S}^2)) \cong \pi_1(F_{3,n-2}(\mathbb{S}^2))$$

se identifica tanto como un subgrupo como un cociente de

$$\pi_1(F_{2,n-2}(\mathbb{R}^2)) \oplus \mathbb{Z} \cong \pi_1(F_{2,n-2}(\mathbb{R}^2)) \oplus \pi_1(F_2(\mathbb{R}^2)) \cong \pi_1(F_n(\mathbb{R}^2)) = P_n.$$

4.4.2 Isomorfismos geométricos exteriores

Para cada $q = (q_1, \dots, q_{\nu+1}) \in F_{\nu+1}(\mathbb{S}^2)$ y $t \in \mathbb{S}^2 \setminus \{q_1, \dots, q_{\nu+1}\}$ redefinimos el grupo Γ_q^t de manera que guardemos la posición de q , es decir,

$$\Gamma_q^t = \pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{q_1, \dots, q_{\nu+1}\}, t) \times \{q\}.$$

Vamos a definir a continuación un sistema de generadores en Γ_q^t : Consideremos para cada $j = 1, \dots, \nu + 1$

- (a) un disco abierto D_j centrado en q_j ,

- (b) un punto $p_j \in \partial D_j$,
- (c) un camino δ_j uniendo t con p_j

de manera que se verifiquen las siguientes condiciones

- (i) $D_i \cap D_j = \emptyset$ si $i \neq j$,
- (ii) $\delta_i \cap D_j = \emptyset$, para todo i, j ,
- (iii) $\delta_i \cap \delta_j = \{t\}$ si $i \neq j$,
- (iv) existe un disco D_0 centrado en t y existe $h : \mathbb{D} \rightarrow D_0$ un homeomorfismo isótopo a la identidad tal que $h(\delta_j^0) = \delta_j \cap D_0$ para todo $j = 1, \dots, \nu + 1$, donde $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ y $\delta_j^0(s) = e^{2i\pi \frac{j-1}{\nu+1}} s$, $s \in [0, 1)$.

Tomemos también caminos $\gamma_j \subset (D_j \setminus \{q_j\}) \cup \{p_j\}$, con inicio y final en p_j , de índice $+1$ respecto a q_j . Definimos finalmente para $j = 1, \dots, \nu + 1$ los generadores $e_j = [\delta_j \gamma_j \delta_j^{-1}]$ de Γ_q^t . Observemos que $e_1 \cdots e_{\nu+1} = 1$ y que en la definición del sistema de generadores $\mathcal{G} = (e_1, \dots, e_{\nu+1})$ es importante el orden de los puntos de $q \in F_{\nu+1}(\mathbb{S}^2)$.

Definición 4.27. *Un sistema de generadores $\mathcal{G} = (e_1, \dots, e_{\nu+1})$ de Γ_q^t se dice geométrico si puede ser obtenido de la manera descrita anteriormente.*

Observación 4.28. Para todo sistema de generadores geométricos $\mathcal{G} = (e_1, \dots, e_{\nu+1})$, existe una isotopía que retrae los caminos auxiliares δ_j sobre $D_0 \cap \delta_j$. Por tanto, existe un homeomorfismo $h^{\mathcal{G}} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ que preserva la orientación y tal que

$$h_*^{\mathcal{G}} : \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{1, e^{\frac{2i\pi}{\nu+1}}, \dots, e^{\frac{2i\pi\nu}{\nu+1}}\}, 0) \rightarrow \Gamma_q^t$$

envía los generadores naturales del primer grupo, construidos a partir de $\delta_1^0, \dots, \delta_{\nu+1}^0$, sobre los generadores $e_1, \dots, e_{\nu+1}$ respectivamente. Es decir, podemos pensar todo sistema de generadores geométricos \mathcal{G} de Γ_q^t como un isomorfismo del grupo libre fijo $\mathbb{F}_\nu = \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{1, e^{\frac{2i\pi}{\nu+1}}, \dots, e^{\frac{2i\pi\nu}{\nu+1}}\}, 0)$ en Γ_q^t que preserva el orden de los generadores.

A partir de la observación anterior es fácil ver que se tiene el siguiente lema.

Lema 4.29. *Si $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ son dos sistemas de generadores geométricos de Γ_q^t entonces $\mathcal{G}'^{-1} \circ \mathcal{G} : \mathbb{F}_\nu \rightarrow \mathbb{F}_\nu$ pertenece a $P_\nu \subset \text{Aut } \mathbb{F}_\nu$.*

Ahora estamos en condiciones de enunciar la caracterización de los isomorfismos geométricos que definimos en la sección anterior, cf. Definición 4.19.

Teorema 4.30 (Nielsen). *Sea $\psi : \Gamma_q^t \rightarrow \Gamma_{q'}^{t'}$ un isomorfismo y $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ sendos sistemas de generadores geométricos de Γ_q^t y $\Gamma_{q'}^{t'}$ respectivamente. Entonces $\mathcal{G}'^{-1} \circ \psi \circ \mathcal{G} : \mathbb{F}_\nu \rightarrow \mathbb{F}_\nu$ pertenece a P_ν si y sólo si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ preservando la orientación tal que $h(q) = q', h(t) = t'$ y $h_* = \psi$.*

Idea de la demostración. Gracias a la Observación 4.28 es suficiente mostrar que para todo automorfismo $\psi \in P_\nu \subset \text{Aut } \mathbb{F}_\nu$ existe un homeomorfismo $h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ preservando la orientación tal que $h(0) = 0, h(e^{\frac{2i\pi j}{\nu+1}}) = e^{\frac{2i\pi j}{\nu+1}}, j = 0, \dots, \nu$ y $h_* = \psi$ como automorfismo de $\mathbb{F}_\nu = \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{1, e^{\frac{2i\pi}{\nu+1}}, \dots, e^{\frac{2i\pi\nu}{\nu+1}}\}, 0)$. Es fácil realizar homeomorfismos $h_{ij} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ tales que $(h_{ij})_* = A_{ij}$, y como éstos generan P_ν se concluye el resultado. \square

Denotaremos por $\text{Iso}_g(\Gamma_{q_1}^{t_1}, \Gamma_{q_2}^{t_2})$ al conjunto de todos los isomorfismos geométricos de $\Gamma_{q_1}^{t_1}$ en $\Gamma_{q_2}^{t_2}$. Y para desembarazarnos de los puntos base introduciremos el concepto de **isomorfismo geométrico exterior** como un elemento del siguiente conjunto cociente:

$$\text{Out}_g(\Gamma_{q_1}, \Gamma_{q_2}) = \left(\bigsqcup_{t_i \in \mathbb{R}^2 \setminus q_i} \text{Iso}_g(\Gamma_{q_1}^{t_1}, \Gamma_{q_2}^{t_2}) \right) / \sim$$

siendo el isomorfismo $\psi : \Gamma_{q_1}^{t_1} \rightarrow \Gamma_{q_2}^{t_2}$ equivalente a $\psi' : \Gamma_{q_1}^{t'_1} \rightarrow \Gamma_{q_2}^{t'_2}$ si y sólo si para $j = 1, 2$ existen homeomorfismos $\xi^j : (\mathbb{S}^2, q_j) \rightarrow (\mathbb{S}^2, q_j)$ isótopos a la identidad relativamente a q_j (i.e. de manera que existan sendas isotopías $\xi_s^j, s \in [0, 1]$ tales que $\xi_0^j = \text{id}, \xi_1^j = \xi^j$ y para todo $s \in [0, 1]$ se tenga que $\xi_s^j(q_j) = q_j$) cumpliendo que $\xi^j(t_j) = t'_j$ y $\xi_*^2 \circ \psi = \psi' \circ \xi_*^1$.

4.4.3 Homeomorfismos de la esfera

Notaremos por \mathcal{S}_0 el grupo de homeomorfismos de la esfera \mathbb{S}^2 que preservan la orientación, dotado de la topología compacta-abierta. Es conocido que el grupo $\pi_0(\mathcal{S}_0)$ es trivial, es decir, que todo homeomorfismo de \mathbb{S}^2 que preserve la orientación es isótopo a la identidad. Fijaremos un punto $q^0 = (q_1^0, \dots, q_{\nu+1}^0) \in F_{\nu+1}(\mathbb{S}^2)$ y denotaremos por $\mathcal{S}_{\nu+1}$ al subgrupo de \mathcal{S}_0 consistente en aquellos homeomorfismos h tales que $h(q_j^0) = q_j^0$ para $j = 1, \dots, \nu + 1$. Es conocido que la aplicación de evaluación $\epsilon : \mathcal{S}_0 \rightarrow F_{\nu+1}(\mathbb{S}^2), \epsilon(h) = (h(q_i^0))_{i=1}^{\nu+1}$ dota a \mathcal{S}_0 de estructura de fibrado localmente trivial sobre $F_{\nu+1}(\mathbb{S}^2)$ y fibra tipo $\mathcal{S}_{\nu+1}$.

La sucesión exacta larga de homotopía asociada a este fibrado contiene el fragmento

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(\mathcal{S}_0) \xrightarrow{\epsilon_*} \pi_1(F_{\nu+1}(\mathbb{S}^2)) \xrightarrow{d_*} \pi_0(\mathcal{S}_{\nu+1}) \xrightarrow{i_*} \pi_0(\mathcal{S}_0) = 1$$

donde el morfismo de conexión d_* funciona como sigue: Sea $\beta \in \pi_1(F_{\nu+1}(\mathbb{S}^2))$ una trenza pura de \mathbb{S}^2 representada por un camino cerrado q^t en $F_{\nu+1}(\mathbb{S}^2)$. Entonces existe un camino continuo h_t en \mathcal{S}_0 (es decir, una isotopía) partiendo de la identidad tal que $h_t(q^0) = q^t$.

Como $h_1(q^0) = q^0$ podemos considerar $[h_1]$ la clase del homeomorfismo h_1 en $\pi_0(\mathcal{S}_{\nu+1})$. Ponemos entonces $d_*(\beta) = [h_1]$.

Vamos a generalizar esta construcción. En primer lugar, consideremos la relación de equivalencia \sim_H en \mathcal{S}_0 : Dados $h_1, h_2 \in \mathcal{S}_0$ con $q^i = h_i(q^0)$, decimos que $h_1 \sim_H h_2$ si y sólo si $q^1 = q^2$ y $h_1, h_2 : (\mathbb{S}^2, q^0) \rightarrow (\mathbb{S}^2, q^i)$ son isótopos relativamente a q^0 . El espacio topológico cociente \mathcal{S}_0 / \sim_H , que notaremos $H_{\mathcal{S}_0}$, conserva la estructura de fibrado sobre $F_{\nu+1}(\mathbb{S}^2)$, pero esta vez la fibra tipo es $\pi_0(\mathcal{S}_{\nu+1})$ que es discreta. Luego $H_{\mathcal{S}_0}$ es un espacio recubridor de $F_{\nu+1}(\mathbb{S}^2)$ de grupo estructural $\pi_0(\mathcal{S}_{\nu+1})$, conocido como el *pure mapping class group* de la esfera menos $\nu + 1$ puntos.

En segundo lugar, vamos a construir una aplicación recubridora $D : \widetilde{F_{\nu+1}(\mathbb{S}^2)} \rightarrow H_{\mathcal{S}_0}$. Sea β la clase de homotopía a extremos fijos de un camino continuo q^t en $F_{\nu+1}(\mathbb{S}^2)$ que empiece en q^0 . Como antes, existe una isotopía h_t partiendo de la identidad tal que $h_t(q^0) = q^t$. Pongamos $D(\beta) = [h_1] \in H_{\mathcal{S}_0}$, la clase de h_1 módulo \sim_H . Por construcción D conmuta con las proyecciones sobre $F_{\nu+1}(\mathbb{S}^2)$ y define una aplicación recubridora. Si restringimos D a la fibra sobre q^0 obtenemos $d_* : \pi_1(F_{\nu+1}(\mathbb{S}^2)) \rightarrow \pi_0(\mathcal{S}_{\nu+1})$. Por tanto, $H_{\mathcal{S}_0}$ es isomorfo al recubrimiento regular $\widetilde{F_{\nu+1}(\mathbb{S}^2)}/Z$ donde $Z = \ker d_*$.

Proposición 4.31 (Birman). *El grupo $\ker d_* = \pi_1(F_3(\mathbb{S}^2))$ es el centro de $\pi_1(F_{\nu+1}(\mathbb{S}^2))$.*

Como consecuencia, el grupo $\pi_0(\mathcal{S}_{\nu+1})$ es isomorfo a $M_\nu = \pi_1(F_{3,\nu-2}(\mathbb{S}^2))$. Observemos también que tenemos una aplicación natural

$$a : \mathcal{S}_0 \rightarrow \bigcup_{q \in F_{\nu+1}(\mathbb{S}^2)} \{q\} \times \text{Out}_g(\Gamma_{q_0}, \Gamma_q) =: \text{Out}_g^{\Gamma_0}$$

que a cada homeomorfismo h le asocia la clase del isomorfismo geométrico $h_* : \Gamma_{q_0}^{t_0} \rightarrow \Gamma_{h(q)}^{h(t_0)}$. Dicha aplicación pasa de manera natural al cociente por la relación de equivalencia \sim_H de \mathcal{S}_0 obteniendo así una aplicación $a_H : H_{\mathcal{S}_0} \rightarrow \text{Out}_g^{\Gamma_0}$. El Teorema 4.30 implica que a_H es exhaustiva. Por otra parte, como $\mathbb{S}^2 \setminus \{q_1^0, \dots, q_{\nu+1}^0\}$ es un espacio de Eilenberg-MacLane $K(\mathbb{F}_\nu, 1)$, el Teorema de Whitehead implica que dos homeomorfismos $h_1, h_2 \in \mathcal{S}_0$ tales que $a(h_1) = a(h_2)$ son homótopos relativamente a q^0 . Recordemos también que se tiene el siguiente resultado de Baer que podemos encontrar en [ZVC80]:

Teorema 4.32 (Baer). *Si $\nu \geq 1$ y $h \in \mathcal{S}_{\nu+1}$ es homótopo a la identidad en $\mathbb{S}^2 \setminus q^0$ entonces también es isótopo a la identidad.*

Ambos resultados implican que la aplicación a_H es también inyectiva. Como consecuencia, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.33. *El conjunto $\text{Out}_g^{\Gamma_0}$ está en correspondencia biyectiva con el espacio $H_{\mathcal{S}_0}$ por lo que podemos dotarlo de una topología (y una estructura compleja) con la que es un espacio recubridor regular (holomorfo) de $F_{\nu+1}(\mathbb{S}^2)$ de grupo fundamental Z , el centro de $\pi_1(F_{\nu+1}(\mathbb{S}^2))$.*

Observación 4.34. Si $\nu = 2$ entonces el recubrimiento $\text{Out}_g^{\mathbb{F}_2}$ es isomorfo a $F_3(\mathbb{S}^2)$.

Observemos que $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ actúa de manera natural sobre H_{S_0} mediante $(\varphi, [h]) \mapsto [\varphi \circ h]$. El correspondiente espacio cociente $H_{S_0}/\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ se define como el espacio de Teichmüller T_{S_0} de las separatrices ordenadas S_0 , es decir, $T_{S_0} = \mathcal{S}_0 / \sim_T$ con $h_1 \sim_T h_2$ si y sólo si existe una homografía $\varphi \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ tal que $\varphi(h_1(q^0)) = h_2(q^0)$ y $\varphi \circ h_1$ es homótopo a h_2 relativamente a q^0 . Introducimos también la relación de equivalencia de Riemann en \mathcal{S}_0 mediante $h_1 \sim_R h_2$ si y sólo si existe una homografía $\varphi \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ tal que $\varphi(h_1(q^0)) = h_2(q^0)$, y el espacio de Riemann $R_{S_0} = \mathcal{S}_0 / \sim_R$ de S_0 . Definimos por último el grupo modular $\text{Mod}(S_0)$ de S_0 como el grupo de automorfismos f_T de T_{S_0} definidos a partir de un homeomorfismo $f \in \mathcal{S}_{\nu+1}$ mediante $f_T([h]_T) = [h \circ f^{-1}]_T$. Es fácil ver que $T_{S_0}/\text{Mod}(S_0) \cong R_{S_0}$, de hecho, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.35. Sea S_0 un subconjunto ordenado de $\nu + 1$ puntos de \mathbb{S}^2 . Entonces se tienen las siguientes afirmaciones.

1. El espacio de Teichmüller T_{S_0} es isomorfo al recubridor universal de $F_{3, \nu-2}(\mathbb{S}^2)$.
2. El espacio de Riemann R_{S_0} es isomorfo a $F_{\nu+1}(\mathbb{S}^2)/\text{PSL}(2, \mathbb{C}) \cong F_{3, \nu-2}(\mathbb{S}^2)$.
3. El grupo modular $\text{Mod}(S_0)$ es isomorfo a $M_\nu \cong \pi_1(F_{3, \nu-2}(\mathbb{S}^2))$.

Observación 4.36. El espacio de Teichmüller de S_0 es contráctil pues utilizando inductivamente la sucesión exacta de homotopía asociada a los fibrados $F_{2, n}(\mathbb{R}^2) \rightarrow F_{2, n-1}(\mathbb{R}^2)$, deducimos que $\pi_i(F_{3, \nu-2}(\mathbb{S}^2)) = \pi_i(F_{2, \nu-2}(\mathbb{R}^2)) = 0$ para todo $i > 1$.

4.5 El espacio de módulos

4.5.1 Generalidades

Sea $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{H}_g(\nu + 1)$ una foliación homogénea con separatrices S_0 sobre $q^0 \in F_{\nu+1}(D)$. Hemos visto en la sección anterior una manera de estudiar el espacio de módulos de S_0 . Ahora pretendemos hacer una aproximación análoga para estudiar el espacio de módulos de \mathcal{F}_0 relativo a la clase homogénea. Denotemos por $\text{Hom}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}_0}$ al conjunto de los gérmenes de homeomorfismos que conjugan \mathcal{F}_0 con alguna otra foliación homogénea $\mathcal{F} \in \mathcal{H}$, preservando las orientaciones. La Proposición 4.20 se puede reformular diciendo que existe una aplicación bien definida

$$A : \text{Hom}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}_0} \rightarrow \text{Out}_g^{\Gamma_0}$$

que a cada homeomorfismo ϕ le asocia la clase de $\psi : \Gamma_0^{t_0} \rightarrow \Gamma_0^{t'_0}$. Dicha aplicación desempeñará el papel que la aplicación $a : \mathcal{S}_0 \rightarrow \text{Out}_g^{\Gamma_0}$ hacía en el caso de las separatrices. Para $i = 1, 2$ consideremos $\phi_i \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}_0}$ un germen de homeomorfismo conjugando \mathcal{F}_0 y

una foliación homogénea \mathcal{F}_i con separatrices S^i sobre $q^i \in F_{\nu+1}(\mathbb{S}^2)$. Introducimos las siguientes relaciones de equivalencia en $\text{Hom}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}_0}$: Decimos que $\phi_1 \sim_R \phi_2$ si y sólo si \mathcal{F}_1 es analíticamente conjugada a \mathcal{F}_2 ; y $\phi_1 \sim_T \phi_2$ si $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ es homótopa a una aplicación holomorfa conjugando \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 como aplicaciones de $\mathbb{C}^2 \setminus S^1$ en $\mathbb{C}^2 \setminus S^2$. Observemos que para que la definición de \sim_T sea diferente de \sim_R es necesario quitar las separatrices S^i ya que \mathbb{C}^2 es contráctil y cualesquiera dos aplicaciones de \mathbb{C}^2 en \mathbb{C}^2 son homótopas. Denotaremos por $R_{\mathcal{F}_0}$ y $T_{\mathcal{F}_0}$ los correspondientes espacios cocientes. Observemos que $R_{\mathcal{F}_0}$ se identifica naturalmente con el espacio de módulos $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}_0)$.

Proposición 4.37. *Sean $\phi_1, \phi_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}_0}$. Entonces $[\phi_1]_T = [\phi_2]_T$ si y sólo si existe $\varphi \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ tal que $A(\phi_2) = \varphi_* \circ A(\phi_1)$.*

Demostración. Gracias al Teorema de Whitehead tenemos que la aplicación $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C}^2 \setminus S^1 \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus S^2$ es homótopa a una aplicación holomorfa $\phi : \mathbb{C}^2 \setminus S^1 \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus S^2$ conjugando \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 si y sólo si $\phi_* = (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})_* : \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S^2)$. Utilizando ahora que el centro $\mathbb{Z}c$ de $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S^1)$ va a parar al centro de $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S^2)$ y que tanto ϕ_* como $(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})_*$ conservan el generador positivo c , tenemos que la acción en homotopía queda determinada sobre los grupos cociente $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S^i)/\text{Centro} =: \Gamma_i$. Por tanto, $[\phi_1]_T = [\phi_2]_T$ si y sólo si existe una aplicación holomorfa $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ conjugando \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 de manera que, si denotamos por $\varphi \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ la restricción de la extensión de ϕ al divisor excepcional, se tiene que

$$\varphi_* = A(\phi_2) \circ A(\phi_1)^{-1} : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \quad (4.13)$$

Ahora bien, la Proposición 4.23 y la relación (4.13) con $\varphi \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$, implica por una parte, que las holonomías \mathfrak{H}_1 y \mathfrak{H}_2 de \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 verifican $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_1 \circ \varphi_*$, y por otra que los residuos de \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 coinciden en las separatrices correspondientes por $\phi_2 \circ \phi_1$. Todo ello, junto al Teorema 4.14 de Clasificación Analítica, implica que existe una aplicación holomorfa de \mathbb{C}^2 en \mathbb{C}^2 conjugando \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 e induciendo φ sobre el divisor excepcional. \square

Corolario 4.38. *La aplicación $A : \text{Hom}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}_0} \rightarrow \text{Out}_g^{\Gamma_0}$ induce una biyección*

$$A_T : T_{\mathcal{F}_0} \rightarrow \text{Out}_g^{\Gamma_0} / \text{PSL}(2, \mathbb{C})$$

por lo que los espacios de Teichmüller $T_{\mathcal{F}_0}$ y T_{S_0} pueden identificarse.

Demostración. La Proposición 4.37 está diciendo que A_T está bien definida y es inyectiva. La exhaustividad viene asegurada por la Proposición 4.25. \square

Si particularizamos este resultado al caso en que $\nu = 2$ obtenemos el siguiente Teorema.

Teorema 4.39. *Si $\omega = \omega_2 + \dots$ N.A.G. entonces la foliación \mathcal{F}_ω es rígida, es decir, $\mathcal{M}(\mathcal{F}_\omega) = \{[\mathcal{F}_\omega]\}$.*

Demostración. Sólo hemos de observar que $T_{\mathcal{F}_\omega} \cong \text{Out}_g^{\mathbb{F}_2}/\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ consta de un sólo punto, utilizando para ello la Observación 4.34. \square

Por otra parte $T_{\mathcal{F}_0}$ está en correspondencia biyectiva con $T_{\mathcal{F}'_0}$ si \mathcal{F}'_0 es topológicamente conjugada a \mathcal{F}_0 por un homeomorfismo h que preserva las orientaciones. Una biyección viene dada por $h_T : T_{\mathcal{F}_0} \rightarrow T_{\mathcal{F}'_0}$ donde $h_T([\phi]_T) = [\phi \circ h^{-1}]_T$. En particular, para todo homeomorfismo h que preserve las orientaciones y que conjugue \mathcal{F}_0 consigo mismo tenemos una biyección inducida $h_T : T_{\mathcal{F}_0} \rightarrow T_{\mathcal{F}_0}$ a nivel de espacios de Teichmüller. Definiremos $\text{Mod}(\mathcal{F}_0)$, el grupo modular de \mathcal{F}_0 , como el grupo de las biyecciones de $T_{\mathcal{F}_0}$ así obtenidas. El espacio cociente $T_{\mathcal{F}_0}/\text{Mod}(\mathcal{F}_0)$ se identifica naturalmente con $R_{\mathcal{F}_0}$.

Proposición 4.40. *Si los residuos de \mathcal{F}_0 son diferentes dos a dos entonces el grupo modular $\text{Mod}(\mathcal{F}_0)$ se identifica con un subgrupo de $\pi_1(F_{3,\nu-2}(\mathbb{S}^2))$ y el espacio $R_{\mathcal{F}_0}$ con un recubrimiento conexo de $F_{3,\nu-2}(\mathbb{S}^2)$.*

Demostración. Del estudio efectuado en la sección anterior se deduce que $T_{\mathcal{F}_0} \cong T_{S_0}$ se identifica con el recubrimiento universal de $F_{3,\nu-2}(\mathbb{S}^2)$. Por la naturalidad de la aplicación A , si h es un homeomorfismo que conjugue \mathcal{F}_0 consigo mismo y ϕ es un homeomorfismo que conjugue \mathcal{F}_0 con $\mathcal{F} \in \mathcal{H}$ entonces $h_T([\phi]_T) = [\phi \circ h^{-1}]_T$ se identifica con $A_T(\phi) \circ A_T(h^{-1})$ en $\text{Out}_g^{\Gamma_0}/\text{PSL}(2, \mathbb{C}) \cong \widetilde{F_{3,\nu-2}(\mathbb{S}^2)}$. Por otra parte, $A_T(h^{-1})$ pertenece a $\text{Out}_g(\Gamma_0, \Gamma_0)$, la fibra sobre q^0 , si y sólo si h envía cada separatriz de \mathcal{F}_0 sobre sí misma, es decir, no produce ninguna permutación en los puntos de q^0 . Esta propiedad se verifica automáticamente si los residuos de \mathcal{F}_0 son distintos dos a dos. Por tanto, $\text{Mod}(\mathcal{F}_0)$ se identifica con un subgrupo de automorfismos del recubrimiento universal de $F_{3,\nu-2}(\mathbb{S}^2)$. \square

Nuestro siguiente objetivo es caracterizar el grupo modular de \mathcal{F}_0 a partir de la clase de representaciones de holonomía $\mathfrak{H}_0 : \Gamma_0 \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ de \mathcal{F}_0 .

Proposición 4.41. *Si los residuos de \mathcal{F}_0 son diferentes dos a dos entonces*

$$A_T(\text{Mod}(\mathcal{F}_0)) = \{\psi \in \text{Out}_g(\Gamma_0, \Gamma_0) \mid \mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_0 \circ \psi\}.$$

Demostración. Si h es un homeomorfismo que conjugue la foliación \mathcal{F}_0 consigo misma entonces, gracias a la Proposición 4.23, se tiene que $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_0 \circ A(h)$. Además, como los residuos de \mathcal{F}_0 son diferentes se tiene que $A(h)$ preserva la ordenación de q^0 , es decir, pertenece a $\text{Out}(\Gamma_0, \Gamma_0)$. Recíprocamente, sea $\psi \in \text{Out}_g(\Gamma_0, \Gamma_0)$ verificando la relación

$$\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_0 \circ \psi \tag{4.14}$$

La Proposición 4.25 implica que existe una foliación homogénea \mathcal{F}_ψ topológicamente conjugada a \mathcal{F}_0 por un homeomorfismo ϕ_ψ tal que $A_T(\phi_\psi) = \psi$. Por otra parte, el Teorema 4.14 y la relación (4.14) implican que existe una aplicación holomorfa $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ que conjugue \mathcal{F}_ψ con \mathcal{F}_0 . Por tanto el homeomorfismo $h = \varphi \circ \phi_\psi$ conjugue \mathcal{F}_0 consigo mismo y verifica que $A_T(h) = \psi$. \square

Recordemos que $\text{Out}_g(\Gamma_0, \Gamma_0)$ es isomorfo al grupo M_ν que podíamos pensar como un subgrupo del grupo de trenzas puras del plano P_ν . La razón por la cual nos interesa mirar M_ν de esta manera es porque podemos identificar P_ν con un subgrupo de automorfismos del grupo libre $\Gamma_0 \cong \mathbb{F}_\nu$. De esta manera, podemos trabajar con verdaderos automorfismos en lugar de automorfismos exteriores. Fijemos una representación de holonomía $H_0 : \Gamma_0^{t_0} \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ de \mathcal{F}_0 .

Definición 4.42. *Llamamos grupo de simetrías de la clase de representaciones \mathfrak{H}_0 de la foliación \mathcal{F}_0 a*

$$\text{Sim}(\mathfrak{H}_0) = \{\psi \in M_\nu \subset P_\nu \subset \text{Aut}(\Gamma_0) \mid \exists \varphi_0 \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0), (\varphi_0)_* \circ H_0 = H_0 \circ \psi\},$$

el cual no depende del representante H_0 de \mathfrak{H}_0 escogido.

Observación 4.43. Fijemos un sistema $\mathcal{G} = (e_1, \dots, e_{\nu+1})$ de generadores geométricos de $\Gamma_0^{t_0}$ y denotemos por $h_i = H_0(e_i) \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ para $i = 1, \dots, \nu+1$. Supongamos que la coordenada transversa $z \in (\mathbb{C}, 0)$ de Σ_{t_0} , en la cual $H_0 : \Gamma_0^{t_0} \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ está definida, es una coordenada linealizante de $h_{\nu+1}$. Como para todo $\psi \in P_\nu$ se tiene que $\psi(e_{\nu+1}) = e_{\nu+1}$ entonces $\psi \in M_\nu$ es una simetría de H_0 si y sólo si existe $c \in \mathbb{C}^*$ tal que $\varphi_0(z) = cz$ verifica $(\varphi_0)_*(h_i) = H_0(\psi(e_i))$ para todo $i = 1, \dots, \nu$.

Las consideraciones precedentes permiten identificar el grupo modular de \mathcal{F}_0 con el grupo de simetrías de su clase de representaciones de holonomía \mathfrak{H}_0 . Podemos resumir todo lo expuesto hasta aquí en el siguiente teorema.

Teorema 4.44. *Sea $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{H}_g(\nu+1)$ cuyos residuos son diferentes dos a dos. Entonces el espacio de módulos $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}_0)$ de \mathcal{F}_0 relativo a la clase homogénea es un espacio recubridor conexo de $F_{3, \nu-2}(\mathbb{S}^2)$ de grupo fundamental isomorfo al grupo $\text{Sim}(\mathfrak{H}_0)$ de simetrías de la holonomía \mathfrak{H}_0 de \mathcal{F}_0 .*

4.5.2 Estudio de las simetrías

En este punto estudiaremos el grupo de simetría de una representación de holonomía H_0 verificando la propiedad de la Observación 4.43. Las técnicas utilizadas en dicho estudio nos motivan a generalizar la definición de grupo de simetrías de una representación de holonomía como sigue:

Definición 4.45. *Sea G un grupo cualquiera y $\rho : \mathbb{F}_\nu \rightarrow G$ una representación. Definimos el grupo de simetría de ρ como*

$$\text{Sim } \rho = \{\psi \in M_\nu \mid \exists g_0 \in G, C_{g_0} \circ \rho = \rho \circ \psi\},$$

donde C_{g_0} denota la conjugación por el elemento g_0 en G .

Observación 4.46. Si dos representaciones $\rho : \mathbb{F}_\nu \rightarrow G$ y $\rho' : \mathbb{F}_\nu \rightarrow G'$ son conjugadas por un isomorfismo $f : G \rightarrow G'$, i.e. $\rho' = f \circ \rho$, entonces $\text{Sim } \rho = \text{Sim } \rho'$.

La estrategia a seguir es considerar el grupo $G = J^k \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ de k -jets de gérmenes de difeomorfismos de $(\mathbb{C}, 0)$ e interesarnos en el grupo de simetría de la representación de holonomía H_0 truncada al orden k , $J^k H_0 : \mathbb{F}_\nu \rightarrow J^k \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. La razón por la cual hacemos esto queda explicada en el siguiente resultado que se sigue inmediatamente de las definiciones.

Proposición 4.47. *Sea $H_0 : \mathbb{F}_\nu \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ una representación, entonces*

$$M_\nu = \text{Sim } J^1 H_0 \supset \text{Sim } J^2 H_0 \supset \cdots \supset \text{Sim } J^k H_0 \supset \text{Sim } J^{k+1} H_0 \supset \cdots$$

y

$$\text{Sim } H_0 = \bigcap_{k \geq 1} \text{Sim } J^k H_0$$

Comencemos estudiando con detalle el caso $k = 2$. El grupo $J^2 \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es isomorfo a $\text{Aff}(1, \mathbb{C}) = \{ax + b, a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$ vía $j^2(az + bz^2 + o(z^3)) \leftrightarrow \frac{1}{a}x - \frac{b}{a^2}$. En virtud de la Observación 4.46, y para mayor comodidad, trabajaremos con $\text{Aff}(1, \mathbb{C})$ en lugar de $J^2 \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Como $H_0(e_{\nu+1}) = a'_{\nu+1}z$ tenemos que la representación afín ρ asociada verifica $\rho(e_i) = a_i x + b_i$, si $i = 1, \dots, \nu$ y $\rho(e_{\nu+1}) = a_{\nu+1}x$. Por lo que

$$\rho(e_1 \cdots e_\nu) = a_1 \cdots a_\nu x + (b_1 + a_1 b_2 + a_1 a_2 b_3 + \cdots + (a_1 \cdots a_{\nu-1})b_\nu) = \frac{1}{a_{\nu+1}}x,$$

es decir, el vector $b = (b_1, \dots, b_\nu)$ de las partes de traslación de ρ pertenece al subespacio

$$H = \{X_1 + a_1 X_2 + \cdots + (a_1 \cdots a_{\nu-1})X_\nu = 0\} \subset \mathbb{C}^\nu. \quad (4.15)$$

Observemos que ρ es abeliana si y sólo si el vector $b = (b_1, \dots, b_\nu)$ es igual a cero (ya que $a_{\nu+1} \neq 1$). Para todo $\psi \in P_\nu$ tenemos que $\rho(\psi(e_i)) = a_i x + \mathcal{T}_i(\psi)$. Consideremos el vector $\mathcal{T}(\psi) = (\mathcal{T}_1(\psi), \dots, \mathcal{T}_\nu(\psi)) \in \mathbb{C}^\nu$. Observemos que $\mathcal{T}(id) = b$.

Proposición 4.48. *Sea ρ una representación afín de \mathbb{F}_ν con vector de traslación $b \in H$. Entonces $\psi \in M_\nu$ es una simetría de ρ si y sólo si existe $c \in \mathbb{C}^*$ tal que $\mathcal{T}(\psi) = cb$. Si ρ es no abeliana podemos reformularlo diciendo que $\psi \in \text{Sim } \rho$ si y sólo si $[\mathcal{T}(\psi)] = [b] \in \mathbb{CP}^{\nu-1}$.*

Demostración. Como hemos visto la condición $b \in H$ se traduce en que $\varphi_0 = cx$, $c \in \mathbb{C}^*$. Por lo que $\varphi_0 \circ \rho(e_i) \circ \varphi_0^{-1} = a_i x + cb_i$. Por otra parte, $\rho(\psi(e_i)) = a_i x + \mathcal{T}_i(\psi)$. \square

Utilizando la acción de P_ν sobre \mathbb{F}_ν descrita en (4.12) de la sección 4.4 deducimos que para todo $A \in P_\nu$ y el generador $A_{ij} \in P_\nu$ tenemos las siguientes relaciones

$$\mathcal{T}_k(A_{ij}A) = \begin{cases} \mathcal{T}_k(A) & \text{si } k < i \\ (1 - a_i + a_i a_j)\mathcal{T}_i(A) + a_i(1 - a_i)\mathcal{T}_j(A) & \text{si } k = i \\ \mathcal{T}_k(A) + (1 - a_k)[(1 - a_j)\mathcal{T}_i(A) - (1 - a_i)\mathcal{T}_j(A)] & \text{si } i < k < j \\ (1 - a_j)\mathcal{T}_i(A) + a_i\mathcal{T}_j(A) & \text{si } k = j \\ \mathcal{T}_k(A) & \text{si } k > j \end{cases} \quad (4.16)$$

Podemos expresar matricialmente las relaciones (4.16) como

$$\mathcal{T}(A_{ij}A) = \tau_{G,\rho_0}(A_{ij})\mathcal{T}(A), \quad (4.17)$$

donde $\tau_{G,\rho_0} : P_\nu \rightarrow \text{GL}(\nu, \mathbb{C})$ denota la composición de la representación de Gassner, cf. [Bir74],

$$\tau_G : P_\nu \rightarrow \text{GL}(\nu, \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_\nu^{\pm 1}])$$

con el morfismo $\text{GL}(\nu, \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_\nu^{\pm 1}]) \rightarrow \text{GL}(\nu, \mathbb{C})$ obtenido sustituyendo las indeterminadas t_i por los correspondientes valores $a_i \in \mathbb{C}^*$ de la representación lineal $\rho_0 = (a_i x)_{i=1}^\nu : \mathbb{F}_\nu \rightarrow \mathbb{C}^* = \text{GL}(1, \mathbb{C})$. Para ello recordemos que la representación de Gassner viene definida por

$$\tau_G(A_{ij}) = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - t_i + t_i t_j & 0 & \cdots & 0 & t_i(1 - t_i) & 0 \\ 0 & (1 - t_{i+1})(1 - t_j) & 1 & \cdots & 0 & -(1 - t_{i+1})(1 - t_i) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & (1 - t_{j-1})(1 - t_j) & 0 & \cdots & 1 & -(1 - t_{j-1})(1 - t_i) & 0 \\ 0 & 1 - t_j & 0 & \cdots & 0 & t_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & I_{\nu-j} \end{pmatrix}$$

Observación 4.49. El morfismo $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_\nu^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{C}$ es inyectivo si $a_1, \dots, a_\nu \in \mathbb{C}^*$ son algebraicamente independientes.

Iterando la relación (4.17) obtenemos que

$$\mathcal{T}(\psi) = \tau_{G,\rho_0}(\psi)b. \quad (4.18)$$

Utilizando (4.18) y la Proposición 4.48 podemos enunciar el siguiente resultado.

Proposición 4.50. Si $\rho : \mathbb{F}_\nu \rightarrow \text{Aff}(1, \mathbb{C})$ es una representación afín no abeliana entonces $\psi \in \text{Sim } \rho$ si y sólo si $[b] \in \mathbb{CP}^{\nu-1}$ es un punto fijo de la proyectividad $[\tau_{G,\rho_0}(\psi)] \in \text{PGL}(\nu, \mathbb{C})$.

Es conocido que la representación de Gassner τ_G no es reducida, de hecho el vector $(1 - t_1, \dots, 1 - t_\nu)$ es un vector propio de valor propio 1 para todo $\tau_G(\psi)$, $\psi \in P_\nu$. Por otra parte, recordemos que $b \in H \subset \mathbb{C}^\nu$. Como $\psi(e_{\nu+1}) = e_{\nu+1}$ y $\rho(\psi(e_{\nu+1})) = \rho(e_{\nu+1}) = a_{\nu+1}x$ tenemos que $\mathcal{T}(\psi) = \tau_{G,\rho_0}(\psi)b \in H$ para todo $\psi \in P_\nu$. Ello nos dice que el subespacio H definido en (4.15) es también invariante por toda la representación de Gassner. Denotemos por $\tau_{G,\rho_0}^r : P_\nu \rightarrow \text{GL}(H) \cong \text{GL}(\nu - 1, \mathbb{C})$ la representación de Gassner reducida con los valores $t_i = a_i \in \mathbb{C}^*$. En lo que sigue denotaremos por la misma letra H tanto al subespacio vectorial de \mathbb{C}^ν como el hiperplano de $\mathbb{CP}^{\nu-1}$ que determina. El contexto indicará en qué caso nos encontramos. Otra cuestión interesante es decidir cuando τ_{G,ρ_0}^r es irreducible. La respuesta la encontramos en [Abd97]: τ_{G,ρ_0}^r es irreducible si y sólo si $a_1 \cdots a_\nu \neq 1$, i.e. si y sólo si $a_{\nu+1} \neq 1$. Y este es el caso que nosotros estamos analizando pues ρ_0 es la parte lineal de la representación de holonomía H_0 de $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{H}_g$ que tiene todos sus residuos α_j , $j = 1, \dots, \nu + 1$ en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, en particular fuera de \mathbb{Z} . Por lo que $a_j = e^{2i\pi\alpha_j} \neq 1$ para todo $j = 1, \dots, \nu + 1$.

Proposición 4.51. *Si $\rho : \mathbb{F}_\nu \rightarrow \text{Aff}(1, \mathbb{C})$ es una representación afín no abeliana de \mathbb{F}_ν tal que $b \in H$ entonces $\psi \in \text{Sim } \rho$ si y sólo si $[b] \in H \cong \mathbb{CP}^{\nu-2}$ es un punto fijo de la proyectividad $[\tau_{G,\rho_0}^r(\psi)] \in \text{PGL}(\nu - 1, \mathbb{C})$.*

Proposición 4.52. *Sea $\rho_0 = (a_1, \dots, a_\nu) \in (\mathbb{C}^*)^\nu$ una representación lineal de \mathbb{F}_ν . Si la representación τ_{G,ρ_0}^r es inyectiva sobre M_ν entonces $\bar{\tau}_{G,\rho_0}^r := p \circ \tau_{G,\rho_0}^r$ también lo es, siendo p es la proyección canónica de $\text{GL}(\nu - 1, \mathbb{C})$ en $\text{PGL}(\nu - 1, \mathbb{C})$.*

Demostración. Notemos que $\ker \bar{\tau}_{G,\rho_0}^r \cong \tau_{G,\rho_0}^r(\ker \bar{\tau}_{G,\rho_0}^r) = \ker p \cap \tau_{G,\rho_0}^r(M_\nu)$. Por otra parte, el núcleo de p es $\mathbb{C}^* \text{Id}$, el centro de $\text{GL}(\nu - 1, \mathbb{C})$, de donde se deduce que $\tau_{G,\rho_0}^r(\ker \bar{\tau}_{G,\rho_0}^r)$ está contenido en el centro de $\tau_{G,\rho_0}^r(M_\nu)$. Como M_ν tiene centro trivial y $\tau_{G,\rho_0}^r : M_\nu \rightarrow \tau_{G,\rho_0}^r(M_\nu)$ es un isomorfismo concluimos el resultado. \square

Proposición 4.53. *La representación de Gassner reducida restringida a M_ν es fiel si y sólo si genéricamente las representaciones afines de \mathbb{F}_ν no tienen simetrías no triviales.*

Demostración. La necesidad es inmediata. Vamos a demostrar la suficiencia. Si $\tau_{G|M_\nu}^r$ es fiel y los valores $a_1, \dots, a_\nu \in \mathbb{C}^*$ de la representación lineal $\rho_0 : \mathbb{F}_\nu \rightarrow \mathbb{C}^* = \text{GL}(1, \mathbb{C})$ asociada a la representación afín ρ son algebraicamente independientes, entonces, por la Observación 4.49 y la Proposición 4.52 tenemos que $\bar{\tau}_{G,\rho_0}^r : M_\nu \rightarrow \text{PGL}(\nu - 1, \mathbb{C})$ es fiel. Así, para todo $A \in M_\nu$ diferente de la identidad, el conjunto F_A de puntos fijos de la proyectividad $[\tau_{G,\rho_0}^r(A)] \in \text{PGL}(\nu - 1, \mathbb{C})$ es un conjunto algebraico (lineal de hecho) propio de $H \cong \mathbb{CP}^{\nu-2}$. Como M_ν es numerable tenemos que $U = H \setminus \left(\bigcup_{A \in M_\nu \setminus \{id\}} F_A \right)$ es

un conjunto residual (en particular no vacío). Si $[b] \in U$ entonces $[b]$ no es un punto fijo para la proyectividad $[\tau_{G,\rho_0}^r(A)]$ de ningún elemento no trivial A de M_ν , por lo que ρ , la representación afín asociada a estos valores de $a_1, \dots, a_\nu, b_1, \dots, b_\nu$, no tiene simetrías no triviales. \square

Observación 4.54. Como el vector $(1 - t_1, \dots, 1 - t_\nu)$ es un vector propio de valor propio 1 de cualquier $\tau_G(\psi)$, $\psi \in P_\nu$ tenemos que $\tau_G = \tau_G^r \oplus 1$ donde $1 : P_\nu \rightarrow \mathbb{C}^*$ es el morfismo trivial. Así pues, τ_G es fiel si y sólo si τ_G^r lo es. Además, $M_\nu \cong P_\nu/Z(P_\nu)$ es un subgrupo normal no central de P_ν y la representación de Gassner sobre $Z(P_\nu)$ es inyectiva. Aplicando un Teorema de [Lon86] deducimos que τ_G es fiel si y sólo si $\tau_{G|M_\nu}$ lo es.

Podemos entonces reformular la proposición anterior de una manera más elegante.

Teorema 4.55. *La representación de Gassner de P_ν es fiel si y sólo si genéricamente las representaciones afines de \mathbb{F}_ν no tienen simetrías no triviales.*

Observación 4.56. La representación de Gassner está íntimamente relacionada con otra representación más conocida del grupo de trenzas, la representación de Burau, $\tau_B : B_\nu \rightarrow \text{GL}(\nu, \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$. La relación es que al componer la representación de Gassner τ_G con el morfismo entre los grupos lineales que induce la asignación $t_1 = t_2 = \dots = t_\nu = t$, se obtiene la representación de Burau restringida a P_ν . Es bien conocido que la representación de Burau es fiel si $\nu = 3$, por lo que también lo es en este caso la de Gassner. Sin embargo, se puede encontrar en la literatura que la representación de Burau no es fiel si $\nu \geq 5$. El caso $\nu = 4$ queda abierto así como la cuestión que nos incumbe sobre la fidelidad de la representación de Gassner a pesar de que en la literatura se pueden encontrar diversas condiciones que debe satisfacer $\ker \tau_G$. Hagamos constar por completitud, que recientemente se ha demostrado la linealidad del grupo B_ν para todo $\nu \geq 1$, ver [Tur00]. Esto es, la existencia de una representación fiel de B_ν en un grupo de matrices. Sin embargo, la representación que allí se considera no es la representación de Gassner.

Corolario 4.57. *Las representaciones afines de \mathbb{F}_3 genéricamente no tienen simetrías, salvo la identidad.*

De hecho para $\nu = 3$ podemos probar un poco más.

Proposición 4.58. *Sea ρ una representación afín no abeliana de \mathbb{F}_3 con parte lineal $\rho_0 = (a_1, a_2, a_3) \in (\mathbb{C}^*)^3$ algebraicamente independiente. Entonces el grupo de simetría de ρ es o bien trivial o bien cíclico infinito.*

Demostración. Como ya hemos dicho, para $\nu = 3$ la representación de Gassner es fiel. Además, si $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}^*$ son algebraicamente independientes τ_{G, ρ_0}^r también es inyectiva. Por la Proposición 4.52 sabemos que $\bar{\tau}_{G, \rho_0}^r$ es un isomorfismo de M_3 con su imagen en $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$. Por otra parte, M_3 es un grupo libre de dos generadores por lo que $\text{Sim } \rho$ es un subgrupo libre. La condición de que ρ no es abeliana implica que su vector de traslaciones b es no nulo, y entonces la imagen de $\text{Sim } \rho$ por el isomorfismo $\bar{\tau}_{G, \rho_0}^r$ está contenida en el grupo de isotropía del punto $[b] \in \mathbb{CP}^1$, conjugado al grupo afín $\text{Aff}(1, \mathbb{C})$ que es resoluble. Por tanto, $\text{Sim } \rho$ es a la vez resoluble y libre, por lo que o bien es trivial, o bien es isomorfo a \mathbb{Z} . □

A continuación recordaremos una propiedad interesante de los grupos libres de rango finito, ver por ejemplo [MKS66] o bien la Proposición I.2.19. de [LS77].

Proposición-Definición 4.59. *Para todo $x \in \mathbb{F}_n$, $x \neq 1$, existe un único elemento $r(x)$, que llamaremos **radical** de x , tal que $x = r(x)^{e(x)}$ con $e(x) \in \mathbb{N}$ maximal.*

Nota: En inglés el término utilizado para referirse al radical es **root**.

Proposición 4.60. *Sea ρ una representación afín de \mathbb{F}_3 con parte lineal $\rho_0 = (a_1, a_2, a_3) \in (\mathbb{C}^*)^3$ algebraicamente independiente. Si $\psi \in \text{Sim } \rho \subset M_3 \cong \mathbb{F}_2$ entonces $r(\psi) \in \text{Sim } \rho$.*

Demostración. Como antes, bajo estas hipótesis tenemos que $\bar{\tau}_{G, \rho_0}^r$ es un isomorfismo de $M_3 \cong \mathbb{F}_2$ con su imagen en $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$. Si $f = \bar{\tau}_{G, \rho_0}^r(\psi)$ entonces $r(f) = \bar{\tau}_{G, \rho_0}^r(r(\psi))$, donde $r(f)$ es el radical de f en el grupo libre $\bar{\tau}_{G, \rho_0}^r(M_3)$. Como $r(f)$ es una homografía no periódica (pues M_3 es libre) de \mathbb{CP}^1 deducimos que los puntos fijos de $r(f)$ coinciden con los de todas sus potencias, en particular con los de $r(f)^{e(f)} = f$. El hecho de que ψ es una simetría de ρ equivale a que el punto $[b] \in \mathbb{CP}^1$ correspondiente al vector de traslaciones de ρ es un punto fijo de f , y por tanto de $r(f)$, por lo que $r(\psi) \in \text{Sim } \rho$. \square

Teorema 4.61. *Si $\psi \in M_3$ es un elemento no trivial entonces*

1. *Existen representaciones afines no abelianas de \mathbb{F}_3 que admiten ψ como simetría.*
2. *Sea ρ una representación afín no abeliana de \mathbb{F}_3 que admite ψ como simetría y cuya parte lineal (a_1, a_2, a_3) es algebraicamente independiente. Entonces $\text{Sim } \rho = \langle r(\psi) \rangle$.*

Demostración.

1. Fijamos una representación lineal $\rho_0 = (a_1, a_2, a_3)$ arbitraria y tomamos $b \neq 0$, tal que $[b]$ sea un punto fijo de $\bar{\tau}_{G, \rho_0}^r(\psi) \neq \emptyset$.
2. Por la Proposición 4.60, $r(\psi) \in \text{Sim } \rho$ y por la Proposición 4.58, $\text{Sim } \rho \neq \{1\}$ es cíclico infinito, con generador ψ_1 . Por tanto, $r(\psi) = \psi_1^k$, pero como $e(r(\psi)) = 1$ tenemos que $k = \pm 1$ de donde $\text{Sim } \rho = \langle r(\psi) \rangle$.

\square

Pasemos ahora a analizar las simetrías del k -jet de una representación no abeliana $H_0 : \mathbb{F}_\nu \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ con $H_0(e_{\nu+1}) = a_{\nu+1}z$. Definamos el orden $k_0 \geq 2$ de la representación no abeliana $H_0 : \mathbb{F}_\nu \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ con $H_0(e_{\nu+1}) = a_{\nu+1}z$ como el mínimo de los órdenes en $z = 0$ de las series $H_0(e_i)(z) - a_i z$, $i = 1, \dots, \nu$, siendo $a_i z = J^1 H_0(e_i)$ la parte lineal de $H_0(e_i)$. Tenemos que

$$J^{k_0} H_0(e_i) = J^{k_0} (a_i z + c_i z^{k_0} + o(z^{k_0+1})) = J^{k_0} \left(\frac{a_i z}{\sqrt[k_0-1]{1 - k_0 \frac{c_i}{a_i} z^{k_0-1}}} \right)$$

Vemos así que $J^{k_0}H_0$ es conjugada a la representación afín $\rho : \mathbb{F}_\nu \rightarrow \text{Aff}(1, \mathbb{C})$ dada por $\rho(e_i) = \frac{1}{a_i}x - \frac{k_0 c_i}{a_i^2}$. Como k_0 es el orden de H_0 tenemos que existe algún $c_i \neq 0$, por lo que ρ no es abeliana.

Corolario 4.62. *Sea $H_0 : \mathbb{F}_3 \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ una representación no abeliana tal que $J^1H_0 = (a_1z, a_2z, a_3z)$ con $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}^*$ algebraicamente independientes. Entonces el grupo de simetría de H_0 o bien es trivial o bien es cíclico infinito, siendo el caso genérico el primero. Además, si $\psi \in \text{Sim } H_0$ es una simetría no trivial de ρ entonces $\langle \psi \rangle \subseteq \text{Sim } H_0 \subseteq \langle r(\psi) \rangle$, por lo que existe un número natural $k|e(\psi)$ tal que $\text{Sim } H_0 = \langle r(\psi)^k \rangle$.*

Demostración. Sea k_0 el orden de H_0 . Entonces J^lH_0 es abeliana si $l < k_0$, por lo que $\bigcap_{l=1}^{k_0-1} \text{Sim } J^lH_0 = M_\nu$. Como por otra parte $J^{k_0}H_0$ es conjugada a una representación afín no abeliana tenemos que $\text{Sim } J^{k_0}H_0$ es o bien trivial o bien isomorfo a \mathbb{Z} . Por la Proposición 4.47, $\text{Sim } H_0$ es un subgrupo de $\text{Sim } J^{k_0}H_0$ y por tanto de \mathbb{Z} . Ahora bien, todo subgrupo de \mathbb{Z} es o bien trivial o bien isomorfo a \mathbb{Z} . La última afirmación es consecuencia directa del Teorema 4.61. \square

4.5.3 El espacio de módulos de $\omega = \omega_3 + \dots$ N.A.G.

Recordemos que el caso de $\omega = \omega_2 + \dots$ N.A.G. ya lo habíamos tratado en el Teorema 4.39, donde se afirma que la foliación \mathcal{F}_ω es rígida. Utilizando la Proposición 4.11, el Teorema 4.44 y el estudio de las simetrías efectuado en la sección anterior deducimos el siguiente resultado.

Teorema 4.63. *Sea \mathcal{F}_0 la foliación determinada por una 1-forma $\omega = \omega_3 + \dots$ N.A.G. con residuos diferentes dos a dos. Entonces el espacio de módulos $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$ de \mathcal{F}_0 es analíticamente equivalente a*

1. o bien al disco $\mathbb{D} = \mathbb{C} \setminus \widetilde{\{0, 1\}}$,
2. o bien a una corona $C_r = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < 1\}$ para un cierto $0 \leq r < 1$.

Además, el caso genérico es el primero.

Demostración. El espacio de módulos de \mathcal{F}_0 es un cociente de $\widetilde{F_{3,1}(\mathbb{C})} = \mathbb{C} \setminus \widetilde{\{0, 1\}} \cong \mathbb{D} \cong \mathbb{H}$ por el subgrupo $\text{Sim } \mathfrak{H}_0$ de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$. Por otra parte, $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \cong \mathbb{H}/\Gamma(2)$ con $\Gamma(2)$ el núcleo del morfismo de paso al cociente $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ por lo que $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) \cong \Gamma(2)$ y $\text{Sim } \mathfrak{H}_0 \subset \Gamma(2)$. Si $\text{Sim } \mathfrak{H}_0$ es trivial (lo que ocurre genéricamente) entonces $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0) \cong \mathbb{D}$. La otra posibilidad es que $\text{Sim } \mathfrak{H}_0 = \langle \psi \rangle$. En este caso, $\mathbb{H}/\langle \psi \rangle$ queda determinado por la clase de conjugación de ψ en $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, ver por ejemplo [JS87]. En principio hay tres posibilidades:

1. ψ es un elemento hiperbólico de $\Gamma(2) \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ en cuyo caso es conjugado a la homotecia $z \mapsto \lambda z$, con $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. El cociente $\mathbb{H}/\langle\psi\rangle$ es por tanto equivalente a una corona C_r , para un cierto $r > 0$ dependiendo de λ .
2. ψ es un elemento parabólico de $\Gamma(2)$, y por tanto conjugado a la traslación $z \mapsto z + 1$, por lo que el cociente $\mathbb{H}/\langle\psi\rangle$ es equivalente al disco punteado $\mathbb{D}^* = C_0$.
3. ψ es elíptico, lo cual no puede suceder pues $\Gamma(2)$ no contiene elementos elípticos.

□

Capítulo 5

Singularidades quasi-homogéneas

Vamos a extender los resultados sobre singularidades homogéneas que hemos obtenido en el capítulo anterior a la clase más amplia de singularidades quasi-homogéneas, ver la Definición 4.1. Pero antes, hagamos un breve resumen de las nociones y resultados sobre quasi-homogeneidad que J.F. Mattei trata en [Mat00].

5.1 Nociones de quasi-homogeneidad

En primer lugar, recordemos que un germen de función holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$ se dice quasi-homogéneo si y sólo si existen coordenadas (u, v) tal que f se escribe como un polinomio quasi-homogéneo en esas coordenadas, i.e. la nube de puntos de su polígono de Newton está contenida en una recta:

$$f(u, v) = \sum_{\alpha i + \beta j = d} a_{ij} u^i v^j \quad (5.1)$$

Esta propiedad viene caracterizada algebraicamente por el hecho que f pertenezca a su ideal jacobiano $J(f) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$, lo cual, teniendo presente la Definición 4.1, es equivalente a su vez a que la 1-forma $\omega = df$ sea quasi-homogénea. También se tiene la siguiente caracterización que compara los módulos de la función f y los de la curva $f^{-1}(0)$: La función f es quasi-homogénea si y sólo si para toda deformación $F : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}$ de $f = F_0$, $F_t(x, y) = F(x, y; t)$ que sea topológicamente trivial satisface la equivalencia: La función F es analíticamente trivial \iff la familia de gérmenes de curvas $\{F_t^{-1}(0)\}_t$ es analíticamente trivial. Aquí, la trivialidad topológica (resp. analítica) de F significa que las foliaciones definidas por dF y df en $(\mathbb{C}^{2+p}, 0)$ son topológicamente (resp. analíticamente) conjugadas.

Definición 5.1 (Mattei). *Decimos que un germen de 1-forma holomorfa no dicrítica $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$ en $(\mathbb{C}^2, 0)$ es **topológicamente quasi-homogénea** (respectivamente **d-quasi-homogénea**) si y sólo si toda deformación topológicamente trivial*

$\eta = A(x, y, t)dx + B(x, y, t)dy$ (resp. todo despliegue equisingular $\Omega = \eta + \sum_j C_j(x, y, t)dt_j$) satisface la equivalencia: η (resp. Ω) es analíticamente trivial \iff la familia de gérmenes de curvas $\{\text{Sep } \eta_t\}_t$ es analíticamente trivial.

Teorema 5.2 (Mattei). *Sea $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$ un germen de 1-forma holomorfa que defina una curva generalizada en $(\mathbb{C}^2, 0)$ y f una ecuación reducida de sus separatrices. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes.*

- (1) ω es d -quasi-homogénea.
- (2) f pertenece al ideal (a, b) .
- (3) df es topológicamente quasi-homogénea.
- (4) f pertenece al ideal $J(f)$.
- (5) Existen coordenadas (u, v) en el origen, funciones g, h con $u(0) = v(0) = 0$, $g(0) \neq 0$ y enteros $\alpha, \beta, d \in \mathbb{N}$ tales que f se expresa como un polinomio quasi-homogéneo como en (5.1) y $g\omega = df + h(\beta v du - \alpha u dv)$.

Si además, ω es quasi-hiperbólica general entonces las anteriores afirmaciones son equivalentes a

- (1') ω es topológicamente quasi-homogénea.

Observación 5.3. Recordemos que en [Mat00] el autor define una 1-forma **quasi-hiperbólica** como aquella que es no dicrítica y en su reducción de singularidades ninguna de ellas tiene residuo real negativo. Si además, existe una componente irreducible del divisor excepcional cuyo grupo de holonomía es no resoluble entonces decimos que ω es **quasi-hiperbólica general**. La propiedad esencial de una 1-forma quasi-hiperbólica general ω es que toda deformación topológicamente trivial de ω es subyacente a un despliegue equisingular.

Como consecuencia de este resultado se obtiene que la dimensión $\delta(\omega)$ del espacio versal de los despliegues equisingulares de una 1-forma ω (cf. Teorema 1.12) coincide con la del espacio de módulos de sus separatrices si y sólo si ω es quasi-homogénea. También aparece en [Mat00] el siguiente resultado que tiene interés por sí mismo pero que podemos combinar con el Teorema de Síntesis de Lins-Neto, cf. Teorema 4.24.

Teorema 5.4 (Mattei). *Sea \mathcal{F}_0 una curva generalizada. Entonces toda deformación topológicamente trivial de $S_0 = \text{Sep } \mathcal{F}_0$ se realiza como la familia de separatrices de un despliegue equisingular. En particular, existe una deformación topológicamente trivial \mathcal{F}_t de \mathcal{F}_0 con pseudo-grupo de holonomía constante, tal que para t suficientemente pequeño se tiene $S_t = \text{Sep } \mathcal{F}_t$.*

Ejemplo 5.5. Si $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{H}_g(\nu+1)$ entonces \mathcal{F}_0 es una curva generalizada y verifica, gracias al Teorema 2.5, la propiedad básica de las foliaciones quasi-hiperbólicas genéricas de Mattei, por lo que podemos aplicar sus resultados a \mathcal{F}_0 . Además, \mathcal{F}_0 tiene una singularidad quasi-homogénea. Por otra parte, utilizando el Teorema 1.12 obtenemos que

$$\delta(\mathcal{F}_0) = \frac{(\nu - 1)(\nu - 2)}{2}$$

Si $\nu \leq 2$ tenemos que $\delta(\mathcal{F}_0) = 0$ lo cual está en concordancia de los resultados obtenidos en el capítulo 4. Así como si $\nu = 3$, pues entonces $\delta(\mathcal{F}_0) = 1 = \dim_{\mathbf{C}} \widetilde{F_{3,1}(\mathbb{C})}$.

Si $\nu = 4$ entonces $\delta(\mathcal{F}_0) = 3$ mientras que el espacio de módulos de las separatrices de \mathcal{F}_0 es de dimensión 2. En este caso el espacio de módulos relativo $\mathcal{M}_{\mathcal{H}(5)}(\mathcal{F}_0)$ es una subvariedad de dimensión dos dentro de $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$ que tiene dimensión 3. El Teorema 5.4 permite *hinchar* la subvariedad $\mathcal{M}_{\mathcal{H}(5)}(\mathcal{F}_0)$ hasta convertirla en un pequeño entorno tubular dentro de $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$.

La propiedad que nosotros vamos a destacar de la escritura proporcionada en el punto (5) del Teorema 5.2 es que las separatrices de ω consisten en un número finito de hojas de la foliación determinada por el campo $R_{\alpha,\beta} = \alpha u \frac{\partial}{\partial u} + \beta v \frac{\partial}{\partial v}$ fuera de las cuales ω es transversa a dicha fibración singular (en el sentido que hay dos fibras de multiplicidad mayor que uno: los ejes $uv = 0$). Podemos suponer sin pérdida de generalidad, que α y β son coprimos. Sea $\pi : M \rightarrow \mathbb{C}^2$ la reducción de singularidades de la foliación $R_{\alpha,\beta}$ cuyo árbol de reducción ilustramos en la Figura 5.1.

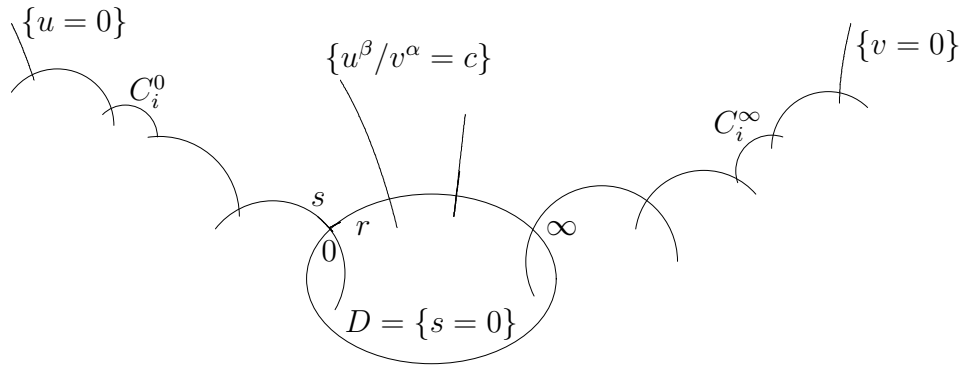


Figura 5.1: El árbol de reducción de $R_{\alpha,\beta}$.

La superficie M contiene una cadena de divisores consecutivos, en los extremos inciden los ejes y el último divisor en aparecer en la reducción, D , está situado en el centro. La fibración de Hopf sobre este divisor está compuesta por las transformadas estrictas de la

familia de cúspides $u^\beta - rv^\alpha = 0$, $r \in \mathbb{C}^*$ y los dos divisores adyacentes. Podemos extender dicha fibración a $p : M \rightarrow D$ con dos fibras reducibles: la unión de los divisores que quedan a derecha (C_i^∞) e izquierda (C_i^0) de D junto al correspondiente eje u y v respectivamente. La composición de explosiones $\pi : M \rightarrow \mathbb{C}^2$ se escribe en un entorno coordenado del divisor $D = \{s = 0\}$ como $\pi(r, s) = (r^a s^\alpha, r^b s^\beta)$ con $a, b > 0$ y $\alpha b - \beta a = 1$.

Observación 5.6. La igualdad $\alpha b - \beta a = 1$ siempre se puede conseguir. Por Bezout, existen $A, B \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha B + \beta A = 1$. Como α y β son positivos deducimos que $AB < 0$. Si $B > 0$ y $A < 0$ podemos tomar $b = B$ y $a = -A$. Si $B < 0$ y $A > 0$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $b = B + k\beta > 0$ y $a = -(A - k\alpha) > 0$, en efecto, basta tomar $k > \frac{A}{\alpha} > \frac{A}{\alpha} - 1 = -\frac{B}{\beta}$. De hecho, existen muchas parejas (a, b) de enteros positivos cumpliendo $\alpha b - \beta a = 1$, la que resulta de efectuar la explosión π es la que a y b son los más pequeños posibles cumpliendo dicha propiedad.

Definición 5.7. Definimos la clase $\mathcal{QH}(\alpha, \beta)$ de foliaciones quasi-homogéneas de tipo (α, β) como la compuesta por las foliaciones no dicríticas cuyas separatrices sean quasi-homogéneas de pesos (α, β) . Así mismo, consideramos la subclase

$$\mathcal{QH}_g(\alpha, \beta) = \bigsqcup_{\nu \geq 1} \mathcal{QH}_g(\alpha, \beta; \nu + 1),$$

donde $\mathcal{F} \in \mathcal{QH}_g(\alpha, \beta; \nu + 1)$ si y sólo si

- (1) las separatrices de \mathcal{F} están compuestas por $\nu + 1$ fibras regulares de $R_{\alpha, \beta}$,
- (2) los residuos de las singularidades de $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^* \mathcal{F}$ situadas sobre las transformadas estrictas de las separatrices de \mathcal{F} son no reales,
- (3) el grupo aditivo generado por dichos residuos es denso,
- (4) y por último, el grupo de holonomía G del divisor D es no abeliano.

Observación 5.8. La clase $\mathcal{QH}(1, 1)$ coincide con la clase homogénea \mathcal{H} y además se tiene que $\mathcal{QH}_g(1, 1; \nu + 1) = \mathcal{H}_g(\nu + 1)$.

Proposición 5.9. Si $\mathcal{F} \in \mathcal{QH}_g(\alpha, \beta)$ entonces $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^* \mathcal{F}$ admite integrales primeras holomorfas locales en un entorno de cada esquina del divisor $\pi^{-1}(0)$. Además, las holonomías $h_0, h_\infty \in G$ correspondientes a los divisores adyacentes a D son periódicas, más precisamente, $h_0^\alpha = h_\infty^\beta = \text{id}$.

Demostración. Como los ejes no son separatrices, los divisores que los soportan sólo contienen una singularidad de $\tilde{\mathcal{F}}$, así pues, la holonomía de éstos es trivial. Utilizando el Teorema de Mattei-Moussu deducimos que las singularidades de los divisores de los extremos

admiten sendas integrales primeras holomorfas locales. En particular, las holonomías de los divisores adyacentes (que sólo contienen dos singularidades) son periódicas. Aplicando reiteradamente el Teorema de Mattei-Moussu concluimos que todas las esquinas de $\pi^{-1}(0)$ están constituidas por singularidades admitiendo una integral primera holomorfa local. En particular, las singularidades $r = 0$ y $r = \infty$ sobre el divisor D , por tanto las holonomías $h_0, h_\infty \in G$ correspondientes a estas singularidades son periódicas. Finalmente, la afirmación $h_0^\alpha = h_\infty^\beta = \text{id}$ se deduce del cálculo de $\pi^*\omega$ que permite identificar el residuo de dichas singularidades. Un cálculo sencillo muestra, cf. [Lor99], que el residuo de $r = 0$ es $\frac{a}{\alpha}$ y el de $r = \infty$ es $\frac{b}{\beta}$, concluyendo así el resultado. \square

El estudio del espacio de módulos $\mathcal{M}_{\mathcal{QH}}(\mathcal{F}_0)$ de \mathcal{F}_0 relativo a la clase quasi-homogénea es el objetivo último de este capítulo. En esta dirección cabe destacar el trabajo de Frank Loray [Lor95] en el que se muestra la rigidez topológica (no solamente en la clase quasi-homogénea) de $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{QH}(2, 3; 1)$, i.e. $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0) = \{[\mathcal{F}_0]\}$.

5.2 La clasificación analítica

Sea $p : M \rightarrow D$ la fibración determinada por el campo $R_{\alpha,\beta}$ que hemos descrito antes y $\mathcal{F} \in \mathcal{QH}_g(\alpha, \beta; \nu + 1)$ con separatrices sobre $q_1, \dots, q_{\nu+1} \in D \setminus \{0, \infty\}$. Como consecuencia de la transversalidad fuera de las separatrices de \mathcal{F} con la fibración $p : M \rightarrow D$, obtenemos que cualquier camino contenido en una hoja de $\tilde{\mathcal{F}}$ distinta de las separatrices y que no pase por los ejes es homótopo al levantamiento de su proyección por p sobre el divisor D . En otras palabras, la conexión de las hojas de \mathcal{F} se lee completamente en el grupo de holonomía G de D . Esta propiedad geométrica tiene su análoga analítica. Para formularla con precisión consideremos \mathfrak{H} la clase de las representaciones de holonomía

$$H_{\mathcal{F}}^t : \pi_1(D \setminus \{0, \infty, q_1, \dots, q_{\nu+1}\}, t) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$$

de \mathcal{F} con respecto al divisor D , módulo cambio del punto base t y reparametrización de la transversal, es decir, conjugación en $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, para más detalles ver la sección 4.2.

Teorema 5.10 (Moussu). *Consideremos dos foliaciones $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathcal{QH}_g(\alpha, \beta; \nu + 1)$. Sean q_i y q'_i las singularidades respectivas de $\tilde{\mathcal{F}}$ y $\tilde{\mathcal{F}}'$ y $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}'$ las correspondientes clases de representaciones de holonomía. Entonces \mathcal{F} es analíticamente conjugada a \mathcal{F}' si y solo si existe $\varphi \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ tal que $q'_i = \varphi(q_i)$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' \circ \varphi_*$ y además los residuos de $\tilde{\mathcal{F}}$ y $\tilde{\mathcal{F}}'$ en q_i y q'_i coinciden.*

Observación 5.11. Aunque dicho teorema lo encontramos enunciado en [Mou85] solamente para el caso $\alpha = 2, \beta = 3, \nu = 0$ y en [Lor94] para $\alpha = 2, \beta = 2n + 1, \nu = 0$, las técnicas utilizadas en su demostración extienden al caso general que nos ocupa. Una pieza clave en su prueba es la existencia de integrales primeras en las esquinas de dos divisores

cualesquiera, cf. Proposición 5.9, que como hemos visto es una consecuencia del hecho que los ejes no sean separatrices. Vamos a dar una demostración del teorema basándonos en esta propiedad.

Demostración. Las condiciones son claramente necesarias. Veamos la suficiencia. Como las holonomías h_0 y h_∞ son periódicas de periodos diferentes, la transformación φ fija el cero y el infinito. Existe $\tilde{\varphi} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ induciendo φ sobre D . Después de sustituir \mathcal{F} por $\tilde{\varphi}^*\mathcal{F}$ podemos reducirnos al caso que $q_i = q'_i \in D \setminus \{0, \infty\}$. Sea $\varphi_0 : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0$ una aplicación analítica de una transversal Σ_0 (una fibra regular no invariante de $R_{\alpha\beta}$) a $\tilde{\mathcal{F}}$ y $\tilde{\mathcal{F}}'$ que conjugue las holonomías (ordenadamente) del divisor central D de ambas foliaciones. Utilizando el método clásico de elevación de caminos, cf. [MM80], definimos una aplicación holomorfa $\phi : M \setminus \hat{C} \rightarrow M \setminus \hat{C}$ conjugando las foliaciones $\tilde{\mathcal{F}}$ y $\tilde{\mathcal{F}}'$ restringidas a $M \setminus \hat{C}$, donde M es la variedad obtenida después de explotar \mathbb{C}^2 y \hat{C} es la unión de la cadena de divisores, C , y los ejes. Como los ejes no son separatrices podemos extender continuamente ϕ a $M \setminus C \rightarrow M \setminus C$. Veamos que dicha extensión continua es holomorfa, para ello sea U un entorno en M de un punto de un eje que no corte a C y tal que existan coordenadas trivializantes (z, w) y (z', w') de $\tilde{\mathcal{F}}|_U$ y $\tilde{\mathcal{F}}'|_U$ respectivamente y de manera que el eje tenga ecuación $z = 0$ y $z' = 0$. Como $\phi(z, w) = (\phi_1(z, w), \phi_2(w))$ es holomorfa en $U \setminus \{z = 0\}$ y continua en todo U deducimos del Teorema de extensión de Riemann aplicado a la función ϕ_2 que $\tilde{\phi}$ es holomorfa en todo U . Así, la aplicación holomorfa $\phi : M \setminus C \rightarrow M \setminus C$ determina $\phi' : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ holomorfa. Estamos escribiendo \mathbb{C}^2 en lugar de un entorno abierto de \mathbb{C}^2 donde los gérmenes de \mathcal{F} y \mathcal{F}' están definidos. De hecho, disminuyendo tanto como queramos dicho abierto de definición concluimos que ϕ' tiene una extensión continua a $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ enviando el cero al cero. Por otra parte, aplicando el Teorema de Hartogs a cada componente de ϕ deducimos que dicha extensión $\phi' : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ es de hecho holomorfa, y por construcción conjuga los gérmenes de \mathcal{F} y \mathcal{F}' . \square

5.3 La clasificación topológica

Sea $\mathcal{F} \in \mathcal{QH}_g(\alpha, \beta; \nu + 1)$ cuyas separatrices S sean las fibras de $p : M \rightarrow D$ sobre $q_1, \dots, q_{\nu+1} \in D \setminus \{0, \infty\}$. Consideremos una ordenación en las separatrices de \mathcal{F} que nos permita escribir $q = (q_1, \dots, q_{\nu+1}) \in F_{\nu+1}(D \setminus \{0, \infty\}) = F_{2, \nu+1}(\mathbb{S}^2)$. A partir de ahora escribiremos simplemente $F_{2, \nu+1}$ para referirnos a dicho espacio. Para cada $q \in F_{2, \nu+1}$ y $t \in D \setminus \{0, \infty, q_1, \dots, q_{\nu+1}\}$ consideremos el grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{0, \infty, q_1, \dots, q_{\nu+1}\}, t)$ y un sistema $\mathcal{G} = (e_0, e_\infty, e_1, \dots, e_{\nu+1})$ de generadores geométricos, cf. sección 4.4. Sea N el menor subgrupo normal de $\pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{0, \infty, q_1, \dots, q_{\nu+1}\}, t)$ que contenga a e_0^α y e_∞^β . Observemos que N no depende del sistema de generadores escogido. Definimos el grupo Γ_q^t como

$$\Gamma_q^t = \pi_1(D \setminus \{0, \infty, q_1, \dots, q_{\nu+1}\}, t) / N \times \{q\}$$

el cual es isomorfo a $\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/\beta\mathbb{Z} * \mathbb{F}_\nu$. De la misma manera que en la sección 4.4, podemos considerar isomorfismos geométricos de Γ_q^t en $\Gamma_{q'}^{t'}$, en este caso enviando, por definición, las clases de los generadores e_0 y e_∞ sobre sí mismas.

Proposición 5.12. *Sea S la unión de $\nu + 1$ fibras no excepcionales de la fibración inducida por el campo $R_{\alpha\beta}$, entonces podemos presentar el grupo fundamental de $\mathbb{C}^2 \setminus S$ como sigue:*

$$\langle a, b, g_1, \dots, g_\nu \mid a^\alpha = b^\beta = c, [c, g_j] = 1, j = 1, \dots, \nu \rangle.$$

Además, su centro, Z , es el subgrupo generado por c que es isomorfo a \mathbb{Z} .

Demostración. En primer lugar observemos que \mathbb{C}^2 menos $\nu + 1$ fibras no singulares de $R^{\alpha\beta}$ es un cono sobre \mathbb{S}^3 menos $\nu + 1$ nudos tóricos de tipo (α, β) de la fibración restringida a la esfera. Vamos a calcular entonces el grupo fundamental de \mathbb{S}^3 menos $\nu + 1$ nudos tóricos del mismo tipo (α, β) contenidos en la misma fibración.

Para empezar consideremos el caso $\nu = 0$, es decir, cuando solo tenemos un nudo tórico \mathfrak{t} del tipo (α, β) sobre un toro 2-dimensional no anudado $F \subset \mathbb{S}^3$. Sean A y B las dos componentes conexas de $\mathbb{S}^3 \setminus F$ y $V(\mathfrak{t})$ un entorno tubular del nudo \mathfrak{t} . Consideremos U y V los complementos de $\overline{V(\mathfrak{t})}$ en sendos abiertos de \mathbb{S}^3 que contengan a (y se retracten sobre) A y B respectivamente.

Tanto U como V son homeomorfos a un toro sólido, sean a y b los generadores de sus respectivos grupos fundamentales.

La intersección $U \cap V$ se retracta sobre $F \setminus V(\mathfrak{t})$ que es topológicamente un cilindro. Sea c el generador de $\pi_1(U \cap V)$. Denotemos por $\iota : \pi_1(U \cap V) \rightarrow \pi_1(U)$ y $j : \pi_1(U \cap V) \rightarrow \pi_1(V)$ los morfismos inducidos por las inclusiones de $U \cap V$ en U y V respectivamente. Un representante de c es otro nudo tórico de tipo (α, β) sobre $F \setminus V(\mathfrak{t})$ paralelo a \mathfrak{t} , por tanto, $\iota(c) = a^\alpha$ y $j(c) = b^\beta$. Aplicando el Teorema de Seifert-Van Kampen deducimos que el grupo fundamental de la reunión de U y V es $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus \overline{V(\mathfrak{t})}) = \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus \mathfrak{t}) = \langle a, b \mid a^\alpha = b^\beta \rangle$.

Para hacer el caso general razonaremos por inducción sobre ν . De hecho, lo que calcularemos por inducción es el grupo fundamental H_ν del complemento de un toro sólido, \mathfrak{X} , menos ν nudos tóricos del mismo tipo (α, β) en su interior. Queremos ver que podemos presentar

$$H_\nu = \langle a_0, a_1, b_1, \dots, a_\nu, b_\nu \mid [a_i, b_i] = 1, a_0^\alpha = a_i^\alpha b_i^\beta, i = 1, \dots, \nu \rangle,$$

siendo a_ν y b_ν el meridiano y el paralelo standard de la frontera del toro sólido. Para $\nu = 0$ es trivial: $H_0 = \langle a_0 \rangle \cong \mathbb{Z}$.

Supongamos que lo tenemos demostrado para $\nu \geq 0$ y veámoslo para $\nu + 1$. Sean $\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_{\nu+1} \subset \mathbb{S}^3$ los $\nu + 1$ nudos tóricos de tipo (α, β) . Podemos hacer una isotopía en $\mathfrak{X} \setminus \bigcup_{i=1}^{\nu+1} \mathfrak{t}_i$ de manera que cada \mathfrak{t}_i esté contenido en un toro 2-dimensional F_i diferente. Reordenando podemos suponer que $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{\nu+1}$ está en un toro $F = F_{\nu+1}$ que contiene en su

interior a todos los demás F_i . Sean A y B las dos componentes conexas de $\mathfrak{T} \setminus F$, U y V los complementarios de un entorno tubular $V(\mathfrak{t})$ de \mathfrak{t} en dos abiertos conteniendo (y que se retractan) sobre A y B respectivamente. El abierto U es homeomorfo a un toro sólido, \mathfrak{T}' menos ν nudos tóricos de tipo (α, β) , por hipótesis de inducción su grupo fundamental es H_ν y además, los elementos a_ν y b_ν son las clases del paralelo y meridiano estandar de la frontera de \mathfrak{T}' . El abierto V se retracta sobre B que a su vez se retracta sobre la frontera del toro sólido \mathfrak{T} , sean $a_{\nu+1}, b_{\nu+1}$ las clases en $\pi_1(V)$ del paralelo y el meridiano estandar. La intersección $U \cap V$ es topológicamente un cilindro y su grupo fundamental está generado por c la clase de otro nudo tórico de tipo (α, β) paralelo a \mathfrak{t} en $F \setminus V(\mathfrak{t})$. Como antes, volvemos a denotar por ι y j los morfismos canónicos inducidos por las inclusiones de $U \cap V$ en U y V respectivamente. Tenemos que $\iota(c) = a_\nu^\alpha b_\nu^\beta$ y $j(c) = a_{\nu+1}^\alpha b_{\nu+1}^\beta$. Concluimos el resultado aplicando Seifert-Van Kampen.

Veamos ahora cómo concluimos el cálculo de G_ν . Sean $\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_{\nu+1} \subset \mathbb{S}^3$ los $\nu + 1$ nudos tóricos de tipo (α, β) . Como antes, podemos suponer que $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{\nu+1}$ está en un toro $F = F_{\nu+1}$ que contiene en su interior a todos los demás \mathfrak{t}_i . Definimos los abiertos U, V de manera análoga al cálculo precedente y al caso $\nu = 0$. El grupo fundamental de U es H_ν y el grupo fundamental de V es cíclico infinito generado por $b_{\nu+1}$. La intersección $U \cap V$ vuelve a ser topológicamente un cilindro y su grupo fundamental está generado por c la clase de otro nudo tórico de tipo (α, β) en $F \setminus V(\mathfrak{t})$. Tenemos que $\iota(c) = a_\nu^\alpha b_\nu^\beta$ y $j(c) = b_{\nu+1}^\beta$. Aplicando nuevamente el Teorema de Seifert-Van Kampen concluimos que el grupo fundamental de la reunión de U y V puede presentarse

$$G_\nu = \langle a_0, a_1, b_1, \dots, a_\nu, b_\nu, b_{\nu+1} \mid [a_i, b_i] = 1, a_0^\alpha = a_i^\alpha b_i^\beta = b_{\nu+1}^\beta, i = 1, \dots, \nu \rangle.$$

Finalmente vamos a dar otra presentación de G_ν . Para cada $i = 1, \dots, \nu$ los generadores a_i, b_i conmutan, por tanto el subgrupo generado por ellos es isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Como α y β son coprimos existen dos enteros γ, δ tales que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$; esta relación nos dice que la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

pertenece a $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ y por lo tanto determina un automorfismo de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, en otras palabras el subgrupo generado por a_i y b_i es el mismo que el generado por $a_i^\alpha b_i^\beta$ y $a_i^\gamma b_i^\delta$. Por tanto, llamando $a = a_0$ y $b = b_{\nu+1}$, $g_i = a_i^\gamma b_i^\delta$ y $c = a_0^\alpha = a_1^\alpha b_1^\beta = \dots = a_\nu^\alpha b_\nu^\beta = b_{\nu+1}^\beta$ obtenemos la presentación $G_\nu = \langle a, b, g_1, \dots, g_\nu \mid a^\alpha = b^\beta = c, [c, g_i] = 1, i = 1, \dots, \nu \rangle$. \square

Observación 5.13. De la demostración se deducen las siguientes afirmaciones:

- (1) Los generadores g_i son los meridianos de la frontera de un entorno tubular $V(\mathfrak{t}_i)$ de \mathfrak{t}_i , cf. [BZ85];
- (2) La técnica utilizada funciona si los nudos tóricos son de diferente tipo, ver [Gri74] para el caso $\nu = 1$.

Corolario 5.14. *Sea S_q la unión de las $\nu + 1$ fibras de $R_{\alpha\beta}$ que determina el elemento $q = (q_1, \dots, q_{\nu+1}) \in F_{2,\nu+1}$. Tenemos un isomorfismo natural*

$$\Gamma_q^t = \pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{0, \infty, q_1, \dots, q_{\nu+1}, t\})/N \cong \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S_q, \tilde{t})/Z.$$

Denotaremos por $\tilde{p} : \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S_q, \tilde{t}) \rightarrow \Gamma_q^t$ el paso al cociente.

Definición 5.15. *Sea $\mathcal{F} \in \mathcal{QH}_g(\alpha, \beta; \nu + 1)$ con separatrices ordenadas sobre $q \in F_{2,\nu+1}$ y representación de holonomía*

$$H_q^t : \pi_1(D \setminus \{0, \infty, q_1, \dots, q_{\nu+1}\}, t) \rightarrow \text{Diff}(p^{-1}(t), t).$$

Gracias a la Proposición 5.9 dicha representación pasa al cociente por N y permite definir el morfismo

$$\overline{H}_q^t : \Gamma_q^t \rightarrow \text{Diff}(p^{-1}(t), t).$$

Proposición 5.16. *Sean $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathcal{QH}(\alpha, \beta; \nu + 1)$ con separatrices S, S' sobre $q, q' \in F_{2,\nu+1}$. Sea $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ es un germen de homeomorfismo que conjuga \mathcal{F} y \mathcal{F}' preservando las orientaciones. Entonces existe un isomorfismo geométrico $\psi : \Gamma_q^t \rightarrow \Gamma_{q'}^{t'}$ y un germen de difeomorfismo $\varphi_0 : (p^{-1}(t), t) \rightarrow (p^{-1}(t'), t')$ tales que hacen conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S, \tilde{t}) & \xrightarrow{\phi_*} & \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S', \tilde{t}') \\ \tilde{p} \downarrow & & \tilde{p} \downarrow \\ \Gamma_q^t & \xrightarrow{\psi} & \Gamma_{q'}^{t'} \\ \overline{H}_{\mathcal{F}}^t \downarrow & & \overline{H}_{\mathcal{F}'}^{t'} \downarrow \\ \text{Diff}(p^{-1}(t), t) & \xrightarrow{(\varphi_0)_*} & \text{Diff}(p^{-1}(t'), t') \end{array}$$

Además, los residuos de \mathcal{F} y \mathcal{F}' en las separatrices correspondientes por ϕ son iguales.

Demostración. La existencia de ψ viene asegurada porque $\ker \tilde{p} = Z$ es el centro de $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S, \tilde{t})$, por lo que el isomorfismo ϕ_* debe enviar Z sobre sí mismo. Por otra parte, de manera análoga al estudio realizado en el capítulo 4, es posible modificar tangencialmente ϕ de manera que envíe una corona $C_0 \subset p^{-1}(t)$ sobre $C'_0 \subset p^{-1}(t')$. Construimos entonces un germen de homeomorfismo $\varphi_0 : (p^{-1}(t), t) \rightarrow (p^{-1}(t'), t')$ como en la demostración del Teorema 4.22 de manera que conjuga los grupos de holonomía G y G' del divisor D respecto de las foliaciones $\tilde{\mathcal{F}}$ y $\tilde{\mathcal{F}'}$. De hecho, φ_0 conjuga los generadores de las holonomías relacionados por ψ , ya que si $\tilde{\gamma}$ es un camino en una hoja de $\tilde{\mathcal{F}}$ contenido en $\mathbb{C}^2 \setminus (S \cup \{xy = 0\})$ entonces $[p(\phi(\tilde{\gamma}))] = \psi([p(\tilde{\gamma})])$. La rigidez del grupo de holonomía G , que se sigue de la Definición 5.7 (cf. Observación 4.10) y el hecho que ϕ preserve las orientaciones implican que φ_0 es holomorfa, de donde se deduce la igualdad de los residuos. \square

Utilizando los mismos argumentos que en el caso homogéneo y la versión del Teorema de Síntesis de Lins-Neto para varias explosiones, cf. [LN87], deducimos el siguiente resultado.

Teorema 5.17 (Clasificación topológica). *Sean $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathcal{QH}_g(\alpha, \beta; \nu+1)$ con separatrices sobre $q, q' \in F_{2, \nu+1}$ respectivamente. Entonces \mathcal{F} y \mathcal{F}' son topológicamente conjugadas por un homeomorfismo que preserva las orientaciones si y sólo si existe un isomorfismo geométrico $\psi : \Gamma_q^t \rightarrow \Gamma_{q'}^{t'}$ y un difeomorfismo local $\varphi_0 : (p^{-1}(t), t) \rightarrow (p^{-1}(t'), t')$ tales que $(\varphi_0)_* \circ \overline{H}_{\mathcal{F}}^t = \overline{H}_{\mathcal{F}'}^{t'} \circ \psi$ y además, los residuos de \mathcal{F} y \mathcal{F}' coinciden en las singularidades correspondientes por ψ .*

5.4 El espacio de módulos

Fijemos una foliación quasi-homogénea $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{QH}_g(\alpha, \beta; \nu+1)$ con separatrices sobre $q_0 \in F_{2, \nu+1}$. De la misma manera que en el capítulo 4 consideramos el grupo de isomorfismos geométricos exteriores $\text{Out}_g(\Gamma_0, \Gamma_q)$, donde $\Gamma_0 = \Gamma_{q_0}$ y $q \in F_{2, \nu+1}$ y el conjunto

$$\text{Out}_g^{\Gamma_0} = \bigsqcup_{q \in F_{2, \nu+1}} \text{Out}_g^{\Gamma_0}.$$

Proposición 5.18. *El conjunto $\text{Out}_g^{\Gamma_0}$ está en correspondencia biyectiva con el recubrimiento $\widetilde{F_{3, \nu}} \times F_{2, 1}$ de $F_{2, \nu+1}$.*

Demostración. En primer lugar notemos que $F_{2, \nu+1} \cong F_{3, \nu} \times F_{2, 1}$ mediante la aplicación $(q_1, \dots, q_{\nu+1}) \mapsto ((\frac{q_1}{q_{\nu+1}}, \dots, \frac{q_{\nu}}{q_{\nu+1}}), q_{\nu+1})$. Por tanto tenemos un isomorfismo natural entre $\pi_1(F_{2, \nu+1})$ y $\pi_1(F_{3, \nu}) \oplus \pi_1(F_{2, 1})$. De manera análoga a la construcción del capítulo 4 podemos definir una aplicación $D : \widetilde{F_{2, \nu+1}} \rightarrow \text{Out}_g^{\Gamma_0}$ de manera que $\ker D|_{\pi_1(F_{2, \nu+1})} = \pi_1(F_{2, 1})$ y que dota a $\text{Out}_g^{\Gamma_0}$ de estructura de espacio recubridor de $F_{2, \nu+1}$ de grupo fundamental $\pi_1(F_{2, 1})$. Para ello utilizamos la sucesión exacta larga de homotopía asociada al fibrado $\mathcal{S}_{\nu+3} \rightarrow \mathcal{S}_2 \rightarrow F_{2, \nu+1}$ que nos proporciona un morfismo $d_* : \pi_1(F_{2, \nu+1}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{S}_{\nu+3})$, el núcleo de cual es precisamente $\pi_1(F_{2, 1})$ y que coincide a su vez con el centro de $\pi_1(F_{2, \nu+1})$ pues como hemos visto en el capítulo 4 el grupo $M_{\nu+2} = \pi_1(F_{3, \nu})$ tiene centro trivial. \square

También consideraremos el conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{QH}}^{\mathcal{F}_0}$ de todos los gérmenes de homeomorfismo $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ que conjugan \mathcal{F}_0 con alguna foliación quasi-homogénea $\mathcal{F} \in \mathcal{QH}$ preservando las orientaciones. La Proposición 5.16 nos proporciona una aplicación natural

$$A : \text{Hom}_{\mathcal{QH}}^{\mathcal{F}_0} \rightarrow \text{Out}_g^{\Gamma_0}.$$

En $\text{Hom}_{\mathcal{QH}}^{\mathcal{F}_0}$ consideramos la relación de equivalencia de Teichmüller (cf. capítulo 4) y su correspondiente espacio cociente $T_{\mathcal{F}_0}$. Los siguientes resultados son adaptaciones fáciles de sus análogos en el caso homogéneo.

Proposición 5.19. *La aplicación A desciende al espacio de Teichmüller de \mathcal{F}_0 como una biyección*

$$A_T : T_{\mathcal{F}_0} \rightarrow \text{Out}_g^{\Gamma_0} / \mathbb{C}^*.$$

Corolario 5.20. *Existe una biyección natural entre el espacio de Teichmüller $T_{\mathcal{F}_0}$ de \mathcal{F}_0 y el recubrimiento universal de $F_{3,\nu}(\mathbb{S}^2)$.*

Teorema 5.21. *Si los residuos de \mathcal{F}_0 sobre D son diferentes dos a dos entonces el espacio de módulos $\mathcal{M}_{\mathcal{QH}}(\mathcal{F}_0)$ de \mathcal{F}_0 relativo a la clase quasi-homogénea es un espacio recubridor de $F_{3,\nu}(\mathbb{S}^2)$ de grupo fundamental isomorfo a*

$$\text{Sim } \overline{\mathfrak{H}}_0 = \{\psi \in \text{Out}_g(\Gamma_0, \Gamma_0) \mid \overline{\mathfrak{H}}_0 = \overline{\mathfrak{H}}_0 \circ \psi\}.$$

Capítulo 6

Foliaciones de Riccati generalizadas

En todas las situaciones, tanto locales como globales, en las que hemos estudiado el espacio de módulos de una foliación, la propiedad básica de que disponíamos era que podíamos reducir de alguna manera la geometría de la foliación al estudio de su holonomía. En el caso global esta propiedad nos llevaba a considerar las foliaciones de Riccati, las cuales se obtienen como suspensión de su representación de holonomía, con imagen en $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{Aut} \mathbb{CP}^1$, hecho éste debido a la transversalidad de las hojas con la fibración.

Con el espíritu de determinar el comportamiento dinámico de una foliación con la única ayuda de su holonomía presentamos una noción que generaliza las definiciones adoptadas hasta ahora:

Definición 6.1. *Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa en una superficie compacta S y $\Sigma \subset S$ una curva analítica que sea transversa a la foliación \mathcal{F} fuera de un conjunto finito de puntos $T \subset \Sigma$. Para todo camino $\gamma \subset S$ de extremos $p_0, p_1 \in \Sigma \setminus T$ y contenido en una hoja de \mathcal{F} podemos considerar el germen de holonomía $h_\gamma : (\Sigma, p_0) \rightarrow (\Sigma, p_1)$ que determina, así como su prolongación analítica a todos los puntos de Σ donde ésta esté definida. Definimos la **holonomía generalizada** de \mathcal{F} respecto de la transversal global Σ como el conjunto de las aplicaciones multivaluadas de Σ en Σ que se obtienen de esta manera.*

Observemos que si \mathcal{F} es una foliación de Riccati en una superficie reglada $\pi : S \rightarrow B$ y Σ es una fibra no invariante por \mathcal{F} entonces la holonomía generalizada de \mathcal{F} respecto de Σ coincide con las transformaciones de Möbius de su representación de holonomía clásica. Por tanto, en este caso, las prolongaciones analíticas de los gérmenes de holonomía sobre Σ están definidas en todo punto de Σ y son univaluadas.

Esta definición de holonomía generalizada nos lleva a preguntarnos dos cuestiones básicas:

Problema 6.2. *¿Hasta dónde está definida la prolongación analítica de un germen de holonomía $h_\gamma : (\Sigma, p_0) \rightarrow (\Sigma, p_1)$? Más concretamente, ¿es cierto que dicha prolongación analítica es global en el sentido de que está definida en casi todo punto de Σ ?*

Problema 6.3. *¿Es la prolongación analítica de un germen de holonomía h_γ a su vez un nuevo germen de holonomía de la foliación \mathcal{F} ?*

Vamos a precisar la primera utilizando la noción de S -función que se encuentra en [Kho95], donde remitimos para más detalles y propiedades generales sobre las S -funciones:

Se dice que dos gérmenes de funciones holomorfas (f, p) y (g, q) son equivalentes si pertenecen a una misma función multivaluada, es decir, si existe un camino γ uniendo p y q de manera que g es prolongación analítica de f a lo largo de γ . Un punto q es singular para un germen (f, p) si existe un camino $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ uniendo p y q de manera que no existe prolongación analítica de f a lo largo de γ pero sí a lo largo de la restricción $\gamma_t : [0, t] \rightarrow \mathbb{C}$ para todo $t < 1$.

Definición 6.4. *Sea f una función multivaluada. Se dice que q es un punto singular de f si y sólo si q es singular para alguno de sus gérmenes. Decimos que f es una S -función si el conjunto $\text{Sing}(f)$ de singularidades de f es como máximo numerable.*

Ahora podemos reformular de una manera precisa la primera cuestión planteada:

Problema 6.5. *¿Es la holonomía generalizada de una foliación global una S -función?*

Intentaremos responder, aunque sea parcialmente, a estas preguntas en el siguiente contexto: Tomaremos como superficie $S = \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ y como transversal Σ una fibra vertical no invariante por la foliación \mathcal{F} . Como ya hemos apuntado, el caso en que \mathcal{F} es una foliación de Riccati es trivial, por lo que deberemos considerar foliaciones en las que se pierda la transversalidad con la fibración vertical. Quizás las foliaciones más sencillas que no verifican esta propiedad sean las foliaciones de Riccati generalizadas, cuya definición (motivada por analogía con la escritura de las foliaciones de Riccati) y propiedades básicas recordamos a continuación.

Definición 6.6. *Una foliación de Riccati generalizada de grado $d \geq 3$ en $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ es la que viene dada por una 1-forma del tipo*

$$\omega = p(x)dy + (a_0(x) + a_1(x)y + \cdots + a_d(x)y^d)dx$$

en unas ciertas coordenadas $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$.

Consideremos la fibración vertical dada por la proyección $\pi : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $\pi(x, y) = x$. Observemos que el divisor de verticalidad de \mathcal{F}_ω (i.e. de tangencias con la fibración π) está compuesto por las fibras invariantes $\{p(x) = 0\}$ y por la recta $\mathbf{s}_\infty = \{y = \infty\}$ con multiplicidad $d - 2$, que es el orden de tangencia de las hojas de \mathcal{F}_ω con las fibras de π en dichos puntos. Así, con las notaciones introducidas en el capítulo 1, podemos escribir $V_{\mathcal{F}_\omega} = k\mathbf{f} + (d - 2)\mathbf{s}_\infty$, donde $k = \deg p$. Por la Proposición 1.23 tenemos entonces que la clase de Chern de su fibrado tangente es $c(T_{\mathcal{F}_\omega}) = (2 - k)\mathbf{f} + (2 - d)\mathbf{s}_0$.

Existe otro motivo para considerar las foliaciones de Riccati generalizadas, a parte de la similitud de su escritura con las foliaciones de Riccati: El algoritmo de Godbillon-Vey de una foliación de Riccati generalizada es finito. Recordemos brevemente esta noción. Sea ω_0 una 1-forma integrable (no necesariamente en dimensión dos), $\omega_0 \wedge d\omega_0 = 0$. Gracias al Teorema de división de De Rham-Saito, existe una sucesión de 1-formas (meromorfas) ω_i , $i \geq 1$ satisfaciendo las ecuaciones

$$d\omega_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \omega_k \wedge \omega_{n+1-k}, \quad n \geq 0 \quad (6.1)$$

Por ejemplo, la existencia de ω_1 se sigue del hecho que $\omega_0 \wedge d\omega_0 = 0$ y se obtiene haciendo la división de la 2-forma $d\omega_0$ por la 1-forma ω_0 :

$$d\omega_0 = \omega_0 \wedge \omega_1,$$

de la cual se deduce a su vez que $0 = d\omega_0 \wedge \omega_1 + \omega_0 \wedge d\omega_1$, y por tanto $d\omega_1 \wedge \omega_0 = 0$. Aplicando otra vez el Teorema de división obtenemos ω_2 , y así sucesivamente...

En [Mal76] se utiliza dicho algoritmo para probar un Teorema de Frobenius singular, es decir, la existencia de una integral primera en el caso singular. La idea es la siguiente: Si el lugar singular de ω_0 tiene codimensión suficientemente alta entonces es posible tomar la secuencia de Godbillon-Vey $(\omega_n)_{n \geq 0}$ con 1-formas holomorfas. Definimos entonces una nueva 1-forma Ω , de dependencia formal en una variable auxiliar t , mediante

$$\Omega = dt + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k \frac{t^k}{k!}.$$

Entonces se tiene que Ω es formalmente integrable, i.e. verifica $d\Omega \wedge \Omega = 0$, si y sólo si la secuencia $(\omega_n)_{n \geq 0}$ verifica las ecuaciones de Godbillon-Vey (6.1). Cuando Ω es convergente obtenemos un despliegue **no singular** de ω_0 . Aplicando entonces el Teorema de Frobenius clásico obtenemos una integral primera de Ω que depende de t . Haciendo $t = 0$ obtenemos una integral primera de ω_0 . Obviamente, la finitud de la secuencia (i.e. la existencia de un $n_0 \in \mathbb{N}$ verificando $\omega_n = 0$ para todo $n > n_0$) elimina el problema de la convergencia. Es fácil ver que las foliaciones de Riccati generalizadas de grado d admiten (no hay unicidad en la definición) una secuencia de Godbillon-Vey finita de longitud d , i.e. con $\omega_n = 0$ si $n > d$, aunque con formas meromorfas.

Es conocido que la foliación definida por ω_0 es transversalmente afín si $\omega_2 = 0$ y transversalmente proyectiva si $\omega_3 = 0$. En [CaSc95] se apuntaba a las foliaciones de Riccati generalizadas como candidatas a realizar una cierta jerarquía en la complejidad de su comportamiento dinámico, más allá del caso proyectivo. Sin embargo, desde el punto de vista de la dinámica transversa, estas foliaciones no tienen ninguna característica especial. En efecto, en la sección 6.2 mostramos que existen ejemplos de foliaciones de Riccati

generalizadas con holonomía no resoluble, lo que después de los trabajos de [BLL97, BLL99] implica la no existencia de ninguna estructura transversa de tipo finito, es decir, en general, la holonomía de una foliación de Riccati generalizada no pertenece a ningún pseudo-grupo que sea el localizado de un grupo de Lie de dimensión finita.

A pesar de ello, nos parece acertado comenzar el estudio de la holonomía generalizada a partir de estas foliaciones, pues constituyen el primer paso en la pérdida de la transversalidad con la fibración que nos aleja del caso Riccati. Teniendo en cuenta este objetivo, debemos observar que si una foliación de Riccati generalizada es pull-back de una foliación de Riccati entonces la holonomía de aquella estará compuesta por ramificación de homografías. Será conveniente por tanto caracterizarlas a fin de considerar esencialmente la nueva situación. En la sección 6.1 presentamos pues la caracterización de las foliaciones de Riccati generalizadas que son pull-back de una foliación de Riccati.

6.1 Pull-backs de foliaciones de Riccati

Sea \mathcal{G} una foliación de Riccati en $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ y $f : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ una aplicación holomorfa. Queremos determinar cuándo la foliación $\mathcal{F} = f^*\mathcal{G}$ es una foliación de Riccati generalizada. Y recíprocamente, qué foliaciones de Riccati generalizadas \mathcal{F} son de este tipo.

En primer lugar, recordemos que toda función meromorfa $g(x, y)$ de $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ es de la forma $\varphi(x)$ o $\varphi(y)$ con φ racional, cf. sección 3.1. Por tanto, toda aplicación holomorfa $f : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ se escribe como $f(x, y) = (\psi(x), \varphi(y))$ o $f(x, y) = (\varphi(y), \psi(x))$ con $\varphi, \psi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ racionales. Componiendo con la involución $\sigma(x, y) = (y, x)$ si es necesario podemos suponer que estamos en el primer caso (recordemos que si \mathcal{G} es una foliación de Riccati respecto de la fibración vertical entonces $\sigma^*\mathcal{G}$ es una foliación de Riccati respecto de la fibración horizontal). En segundo lugar, dada $f(x, y) = (\psi(x), \varphi(y))$ si consideramos las aplicaciones $f_x(x, y) = (\psi(x), y)$ y $f_y(x, y) = (x, \varphi(y))$ tenemos que $f = f_x \circ f_y = f_y \circ f_x$. Además, si \mathcal{G} es una foliación de Riccati, entonces $f_x^*\mathcal{G}$ también lo es. Por tanto, es suficiente analizar el caso en que f es de la forma $f(x, y) = (x, \varphi(y))$ con $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ racional.

Lema 6.7. *Sea $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una aplicación racional. Si el conjunto de valores críticos V de φ tiene menos de tres elementos entonces se tiene la dicotomía:*

- (1) *O bien el conjunto V es vacío y φ es una homografía.*
- (2) *O bien V tiene dos elementos y φ es analíticamente conjugada a la aplicación $y \mapsto y^d$, donde $d = \deg \varphi$.*

Demostración. Sea \tilde{S} el conjunto de puntos críticos de φ (por definición $V = \varphi(S)$) y pongamos $S = \varphi^{-1}(V) \supset \tilde{S}$. La aplicación $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ es un recubrimiento ramificado de grado $d = \deg \varphi$. Aplicando la fórmula de Riemann-Hurwitz obtenemos la igualdad

$2 = 2d - B$, siendo $B = \sum_{q \in S} (r_q - 1)$ con r_q el orden de ramificación de φ en q . Un cálculo sencillo muestra que $B = d \text{card } V - \text{card } S$. Por tanto, podemos reescribir la igualdad $2 = 2d - B$ como

$$\text{card } S = 2 + d(\text{card } V - 2) \quad (6.2)$$

Si $\text{card } V = 0$ entonces $d = 1$ y por tanto φ es una homografía. Si $\text{card } V = 1$ entonces $2 - d = \text{card } S \geq \text{card } V = 1$, de donde $d \leq 1$, lo cual es incompatible con $\text{card } V = 1$. Finalmente, si $\text{card } V = 2$ entonces $\text{card } S = 2$, y en particular $S = \tilde{S}$. Si tomamos coordenadas de manera que $S = \{0, \infty\}$ y $V = \{\varphi(0) = 0, \varphi(\infty) = \infty\}$, teniendo en cuenta que $\tilde{S} = S$ tenemos que $\varphi^{-1}(0) = \{0\}$ y $\varphi^{-1}(\infty) = \{\infty\}$. Por tanto, en estas coordenadas φ se escribe como $y \mapsto cy^d$, $d = \deg \varphi$ y $c \in \mathbb{C}^*$. \square

Recordemos que clásicamente se conocen como foliaciones de **Bernoulli** aquellas que vienen definidas por una 1-forma del tipo

$$\omega = p(x)dy + (a(x)y^{d+1} + b(x)y)dx, \quad d \geq 1.$$

Dicha foliación es el pull-back por el recubrimiento ramificado $f(x, y) = (x, y^d)$ de la foliación de Riccati definida por

$$\eta = \frac{p(x)}{d}dy + (a(x)y^2 + b(x)y)dx \quad (6.3)$$

que también es una foliación de Bernoulli dentro de la clase Riccati, es decir, con $d = 1$.

Proposición 6.8. *Sea \mathcal{G} una foliación de Riccati en $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ diferente de la fibración horizontal definida por una 1-forma ω y $f : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ la aplicación holomorfa definida por $f(x, y) = (x, \varphi(y))$ con $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ de grado $d > 1$. Si $\mathcal{F} = f^*\mathcal{G}$ es una foliación de Riccati generalizada entonces sólo se pueden dar dos casos:*

- (1) *La 1-forma ω es analíticamente conjugada a una 1-forma del tipo (6.3), φ es analíticamente conjugada a $y \mapsto y^d$ y \mathcal{F} es una foliación de Bernoulli.*
- (2) *La foliación \mathcal{G} es quasi-lineal, es decir, la 1-forma ω es analíticamente conjugada a $p(x)dy + a(x)ydx$, y \mathcal{F} es de variables separadas.*

Demostración. Escribamos una 1-forma ω definiendo \mathcal{G} como

$$\omega = p(x)dy + (a(x)y^2 + b(x)y + c(x))dx.$$

Entonces $f^*\omega$ viene dada por

$$f^*\omega = p(x)\varphi'(y)dy + (a(x)\varphi(y)^2 + b(x)\varphi(y) + c(x))dx.$$

Como $f^*\omega$ define una foliación de Riccati generalizada existe una homografía h (es decir, un cambio de carta afín $(x, y) \mapsto (x, h(y))$) tal que $(\text{id}, h)^*f^*\omega = (\text{id}, \varphi \circ h)^*\omega$ es proporcional a una 1-forma del tipo $p(x)dy + A(x, y)dx$. A partir de ahora sustituiremos φ por $\varphi \circ h$ y tendremos la precaución de no componer φ con ninguna homografía a la derecha. La condición de proporcionalidad descrita implica entonces que para todo $y_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\varphi'(y_0) = 0$ se cumple que $a(x)\varphi(y_0)^2 + b(x)\varphi(y_0) + c(x) \equiv 0$.

Observemos que gracias al Lema 6.7 el conjunto de valores críticos V de φ tiene al menos dos elementos. Por tanto φ posee un punto crítico $y_0 \neq \infty$. Componiendo φ con una homografía a la izquierda (en la llegada) podemos suponer que $\varphi(y_0) = 0$ y por tanto $c(x) \equiv 0$. Si el conjunto de valores críticos tiene tres elementos entonces existen al menos dos puntos $y_0, y_1 \in S \setminus \{\infty\}$, cuyas imágenes podemos suponer, sin perder generalidad, que son 0 y 1 respectivamente. En este caso tenemos que $c(x) \equiv 0$ y $a(x) + b(x) \equiv 0$, de donde $\omega = p(x)dy + a(x)y(y-1)dx$ es analíticamente conjugada a $p(x)dy + a(x)ydx$. Finalmente, si el cardinal de V fuera mayor o igual que cuatro entonces existirían tres valores críticos finitos que implicarían la anulación de los tres polinomios $a(x), b(x), c(x)$ por lo que la foliación \mathcal{G} sería la fibración horizontal, caso que hemos excluido por hipótesis. \square

Observación 6.9. Si \mathcal{G} es una foliación de Riccati, $f : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ es una aplicación holomorfa de grado mayor que uno en y , y además $\mathcal{F} = f^*\mathcal{G}$ es una foliación de Riccati generalizada, entonces tanto \mathcal{F} como \mathcal{G} admiten una integral primera de tipo Liouville.

Teorema 6.10. Una foliación de Riccati generalizada de grado d , \mathcal{F} , es pull-back de una Riccati si y sólo si se da uno de los dos casos siguientes:

- (1) \mathcal{F} es una foliación de Bernoulli.
- (2) \mathcal{F} es de variables separadas, es decir, en una carta afín viene definida por una ecuación del tipo $\omega = p(x)dy + a(x)b(y)dx$ de manera que las raíces $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ del polinomio $b(y)$ son simples y para todo i, k cumplen que

$$\frac{\prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)}{\prod_{j \neq k} (\alpha_k - \alpha_j)} \in \mathbb{Q}.$$

Demostración. Ya sabemos por la proposición anterior que si \mathcal{F} es pull-back de una foliación de Riccati \mathcal{G} entonces \mathcal{F} es una foliación de Bernoulli (caso (1)) o bien es de variables separadas. Analicemos este último caso un poco más en profundidad. Tomamos una carta afín de $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ de manera que \mathcal{F} viene definida por la 1-forma $\omega = p(x)dy + a(x)b(y)dx$. Las raíces $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ de $b(y)$ se corresponden con las separatrices horizontales de \mathcal{F} . Tomamos también una carta afín en el espacio de llegada de manera que las separatrices horizontales de \mathcal{G} sean las rectas $\{y = 0\}$ y $\{y = \infty\}$, por lo que \mathcal{G} viene definida por la 1-forma

$\eta = p(x)dy + a(x)ydx$. Es fácil comprobar que los puntos de ramificación de φ son singularidades de \mathcal{F} si y sólo si sus imágenes son singularidades de \mathcal{G} . Utilizando este hecho, vemos que si escribimos $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ en estas cartas se tiene que $\varphi(\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}) = \{0, \infty\}$ y $\varphi^{-1}(\{0, \infty\}) = \{\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}\}$. Por tanto, podemos escribir

$$\varphi(y) = \prod_{i=1}^d (y - \alpha_i)^{n_i}, \quad n_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (6.4)$$

Por otra parte, $f^*\eta$ es proporcional a ω si y sólo si $\frac{\varphi(y)}{\varphi'(y)} = b(y) \in \mathbb{C}[y]$. Utilizando la escritura (6.4) obtenemos que

$$\frac{\varphi(y)}{\varphi'(y)} = \frac{1}{(\log \varphi(y))'} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^d n_i \log(y - \alpha_i)\right)'} = \frac{1}{\sum_{i=1}^d \frac{n_i}{y - \alpha_i}} = \frac{\prod_{i=1}^d (y - \alpha_i)}{\sum_{i=1}^d n_i \prod_{j \neq i} (y - \alpha_j)}.$$

Como ningún α_k es raíz del denominador, pues $\sum_{i=1}^d n_i \prod_{j \neq i} (\alpha_k - \alpha_j) = n_k \prod_{j \neq i} (\alpha_k - \alpha_j) \neq 0$, tenemos que $\frac{\varphi(y)}{\varphi'(y)}$ es un polinomio si y sólo si $\sum_{i=1}^d n_i \prod_{j \neq i} (y - \alpha_j)$ es una constante $c \in \mathbb{C}^*$, y en tal caso $b(y) = \frac{\varphi(y)}{\varphi'(y)} = \frac{1}{c} \prod_{i=1}^d (y - \alpha_i)$ tiene raíces simples. Además, $c = n_i \prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)$, de donde

$$\frac{\prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)}{\prod_{j \neq k} (\alpha_k - \alpha_j)} \in \mathbb{Q}.$$

Recíprocamente, si ponemos $A_i = \prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)$ entonces la hipótesis $\frac{A_i}{A_k} \in \mathbb{Q}$ permite escribir

$$\frac{A_i}{A_1} = \frac{p_i}{q_i}, \quad p_i, q_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Si denotamos por $c = A_1 \prod_{i=1}^d p_i$ entonces $\frac{1}{A_i} = \frac{n_i}{c}$ donde $n_i = q_i \prod_{j \neq i} p_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Definimos finalmente $\varphi(y) = \prod_{i=1}^d (y - \alpha_i)^{n_i}$ y $f(x, y) = (x, \varphi(y))$. Por construcción se tiene que $f^*\eta$ es proporcional a $p(x)dy + a(x)\frac{1}{c} \prod_{i=1}^d (y - \alpha_i)dx$. \square

Observación 6.11. Sea \mathcal{F} es una foliación de Riccati generalizada que es pull-back de una foliación de Riccati. La única manera para que \mathcal{F} pueda tener singularidades múltiples sobre las separatrices verticales es que \mathcal{F} sea una foliación de Bernoulli definida por una 1-forma del tipo $\omega = p(x)dy + (a(x)y^{d+1} + b(x))dx$ con $\text{m.c.d.}(p, b) \neq 1$.

Ejemplo 6.12. Toda foliación de Riccati generalizada de grado 3 de variables separadas, $p(x)dy + a(x)b(y)dx$, con $b(y)$ reducido es analíticamente conjugada en $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ a la foliación \mathcal{F}_ρ dada por

$$\omega_\rho = p(x)dy + a(x)y(y-1)(y-\rho)dx.$$

Además, \mathcal{F}_ρ es pull-back de una foliación de Riccati si y sólo si $\rho \in \mathbb{Q}$.

6.2 Un ejemplo con holonomía no resoluble

Proposición 6.13. Sea $\omega = p(x)dy - \left[y^3 - y + x(A(x)y^3 + B(x)y^2 + C(x)y) \right] dx$ con $p(0) = p'(0) = 0$. Si $B \not\equiv 0$ entonces la foliación determinada por ω no es pull-back de una foliación de Riccati y la holonomía de la separatriz $S = \{x = 0\}$ es no resoluble.

Demostración. En primer lugar, observemos que en virtud del Teorema 6.10 tenemos que ω es pull-back de una foliación de Riccati si y sólo si $B \equiv 0$, en cuyo caso su holonomía es resoluble. Como el orden de p en $x = 0$ es mayor o igual que dos se tiene que las tres singularidades de ω en S , $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, -1)$, son sillan-nodo y S es su separatriz fuerte. Por tanto, el grupo de holonomía $G = \langle h_0, h_1, h_{-1} \rangle$ de S está compuesto por difeomorfismos tangentes a la identidad. En este caso, el hecho de que G sea resoluble es equivalente a que G sea abeliano. Un simple cálculo muestra que si $p(x) = x^q + \dots$, $q \geq 2$, entonces

$$\begin{aligned} h_0(x) &= x - 2i\pi x^q + \dots \\ h_1(x) &= x + i\pi x^q + \dots \\ h_{-1}(x) &= x + i\pi x^q + \dots \end{aligned}$$

Si G fuera abeliano existiría un campo formal X cuyo flujo contendría G , es decir, tal que $h_0 = \exp -2X$, $h_1 = h_{-1} = \exp X$. Veamos que esto no es cierto si $B \not\equiv 0$. Escribamos $B(x) = bx^n + \dots$ con $b \neq 0$ y $\gamma(t) = (0, y(t))$, $t \in [0, 1]$, un camino en S de índices 1, -1 y 0 respecto a $(0, 1)$, $(0, -1)$ y $(0, 0)$ respectivamente. Consideremos la deformación uniparamétrica con $s \in [0, 1]$ dada por

$$\omega_s = p(x)dy - \left[y^3 - y + x(A(x)y^3 + C(x)y) \right] dx + sxB(x)y^2dx.$$

Como ω_0 es pull-back de una foliación de Riccati, la holonomía del camino γ respecto a ω_0 es la identidad. Sea $\tilde{\gamma}_s(t, x_0) = (x_s(t, x_0), y(t))$ la elevación de γ a la hoja de ω_s que pasa

por $(x_0, y(0))$. Es fácil convencerse de que podemos escribir

$$x_s(t, x_0) = x_0 + \sum_{k=q}^{q+n} \beta_k(t) x_0^k + \sum_{k \geq q+n+1} \beta_k(s, t) x_0^k \quad (6.5)$$

donde los coeficientes $\beta_k(t)$ no dependen de s para $k = q, \dots, q+n$. Desarrollando en serie en x la ecuación diferencial asociada a ω y γ obtenemos:

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{p(x)}{y^3 - y + x(A(x)y^3 + sB(x)y^2 + C(x)y)} \frac{dy}{dt}.$$

Sustituyendo ahora (6.5) en la expresión anterior observamos que la primera potencia de x_0 cuyo coeficiente contiene el parámetro s es x_0^{q+n+1} y dicho coeficiente es de la forma

$$C_{\omega_0}(t) + sb \frac{y(t)^2 y'(t)}{(y(t)^3 - y(t))^2} \quad (6.6)$$

donde $C_{\omega_0}(t)$ no depende de s . La integral del primer término de (6.6) respecto de t desde 0 a 1 se anula pues la holonomía del camino γ respecto de ω_0 es la identidad. Para concluir es suficiente ver que

$$\int_0^1 \frac{y(t)^2 y'(t)}{(y(t)^3 - y(t))^2} dt = \int_{\gamma} \frac{y^2 dy}{(y^3 - y)^2} = -i\pi \neq 0,$$

utilizando la fórmula de los residuos. □

Capítulo 7

Estudio de la holonomía generalizada. Un ejemplo

Recordemos que en el capítulo anterior habíamos definido la holonomía generalizada de una foliación \mathcal{F} en una superficie compacta S respecto de una transversal global Σ como la función multivaluada obtenida prolongando analíticamente en Σ todos los gérmenes de holonomía inducidos por algún camino contenido en una hoja de \mathcal{F} con extremos en Σ . También habíamos recordado la definición de S -función como una función multivaluada que admite prolongación analítica excepto en un conjunto numerable de puntos. En el Problema 6.5 nos cuestionábamos si la holonomía generalizada de una foliación global es una S -función. De hecho, quizás el buen contexto donde preguntarse dicha cuestión sería sobre una superficie algebraica S . En el presente capítulo vamos a abordar el problema en el caso en que $S = \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, y más concretamente, sobre una familia de ejemplos, muy particulares, pero no por ello poco interesantes desde este nuevo punto de vista de la prolongación analítica de la holonomía.

Vamos a resumir aquí de una manera muy imprecisa algunos de los resultados que hemos obtenido sobre dichos ejemplos. Éstos son foliaciones de Riccati generalizadas de grado 3 y variables separadas, y por tanto con una integral primera explícita que será la que nos permitirá realizar el estudio de una manera "cómoda". Como transversal Σ tomaremos una fibra vertical $\{x = x_0\}$. Veremos que los gérmenes de holonomía sobre Σ de estos ejemplos se pueden considerar como parte de la monodromía de la integral primera. Y recíprocamente, toda la monodromía se puede realizar mediante gérmenes de holonomía. La ventaja de considerar la monodromía de la integral primera es que por una parte, el hecho de que ésta sea una S -función se traduce en términos de inversiones de S -funciones, punto que trataremos en la sección 7.2, y por otra parte se tiene que, por construcción, el conjunto de la monodromía de la integral primera es "invariante" por prolongación analítica, de manera que podemos reinterpretar la prolongación analítica de un germen holonomía como un nuevo germen de holonomía. Respondiendo así a los Pro-

blemas 6.5 y 6.3. Además, siempre sobre el ejemplo, damos una interpretación geométrica de "una parte" de esta holonomía generalizada, ver la sección 7.3.3. La idea básica es que la tangencia de las hojas de la foliación con la fibración vertical produce un germen de involución (pues en este caso el orden de tangencia es 2) que al prolongarlo analíticamente da lugar a una componente conexa (de la superficie de Riemann) de la S -función holonomía generalizada.

Si restringimos nuestra foliación a un pequeño entorno tubular de la transversal Σ , esta involución sólo es "holonómica" en un entorno punteado del infinito. Sin embargo, podemos ir aumentando el dominio donde la prolongación analítica de dicha involución es holonómica si tomamos entornos tubulares de Σ cada vez mayores. De hecho, es preciso hacer crecer el entorno tubular de Σ en el recubrimiento universal de S menos las fibras invariantes para llegar a realizar cualquier prolongación analítica de la holonomía como un nuevo germen de holonomía. Es decir, los caminos que hemos de considerar deben girar y "enrollarse" entorno de las separatrices de una manera no acotada.

7.1 Foliaciones de variables separadas en $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$

Definición 7.1. Decimos que una foliación holomorfa \mathcal{F} en $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ es de variables separadas si y sólo si \mathcal{F} viene dada por una 1-forma **racional** de variables separadas $\omega = R(y)dy - S(x)dx$.

Toda foliación \mathcal{F} de variables separadas en $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ admite una integral primera multivaluada de la forma $H(x, y) = f(y) - g(x)$, donde $f(y) = \int R(y)dy$ y $g(x) = \int S(x)dx$. Notemos por A (resp. B) el complementario de los polos de R (resp. S) en \mathbb{C} . Observemos que H admite prolongación analítica a todo punto de $A \times B$.

La propiedad de que H es una integral primera multivaluada de \mathcal{F} significa que si γ es un camino en $A \times B \subset \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ entonces la prolongación analítica de H a lo largo de γ es constante sobre γ si y sólo si γ está contenido en una hoja de \mathcal{F} .

Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$ un punto regular. Se define la monodromía de H respecto a (x_0, y_0) como el morfismo que a cada clase de homotopía de un camino cerrado $\gamma : [0, 1] \rightarrow A \times B$ con $\gamma(0) = \gamma(1) = (x_0, y_0)$ le asocia la permutación en las determinaciones de H en el punto (x_0, y_0) que se obtiene por prolongación analítica a lo largo de γ . De hecho, la monodromía de H es aditiva, es decir, existe un subgrupo aditivo $G \subset \mathbb{C}$ y un morfismo

$$M_H : \pi_1(A \times B, (x_0, y_0)) \rightarrow G$$

tal que para todo γ camino cerrado como antes y toda determinación \underline{H} de H en (x_0, y_0) , se tiene que la prolongación analítica de \underline{H} a lo largo de γ , que denotaremos por \underline{H}^γ , es igual a $\underline{H} - M_H(\gamma)$. Más precisamente, existen subgrupos aditivos $\Gamma \subset \mathbb{C}$ y $\Lambda \subset \mathbb{C}$ y morfismos

$$M_f : \pi_1(A, y_0) \rightarrow \Gamma \quad \text{y} \quad M_g : \pi_1(B, x_0) \rightarrow \Lambda$$

tales que M_H es la composición de

$$M_f \oplus M_g : \pi_1(A, y_0) \oplus \pi_1(B, x_0) = \pi_1(A \times B, (x_0, y_0)) \rightarrow \Gamma \oplus \Lambda$$

con el morfismo natural $\Gamma \oplus \Lambda \rightarrow \Gamma + \Lambda \subset \mathbb{C}$. Sean $U \subset A$ y $V \subset B$ sendos abiertos simplemente conexos obtenidos haciendo cortes reales adecuados (*coupsures*) en A y B , y fijemos de una vez por todas sendas determinaciones (univaluadas) $\underline{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$ de f y $\underline{g} : V \rightarrow \mathbb{C}$ de g . Ello nos permitirá hablar de la monodromía de f , g y H respecto de caminos abiertos en A , B y $A \times B$ con extremos en U , V y $U \times V$ respectivamente.

Sea $\Sigma = \{x = x_0\}$ una fibra vertical que no sea \mathcal{F} -invariante y consideremos la holonomía generalizada sobre Σ . Por simplicidad de ahora en adelante cuando tomemos un germen de holonomía $h = h_\gamma : (\Sigma, y_0) \rightarrow (\Sigma, y_1)$ supondremos que $y_0, y_1 \in U$, aunque nos permitiremos prolongar analíticamente el germen h , si ello es posible, a lo largo de cualquier camino $\alpha : [0, 1] \rightarrow A$ (el cual puede atravesar los cortes $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$) cuyos extremos estén en U . Por construcción, la holonomía generalizada de \mathcal{F} sobre Σ forma parte de la monodromía de su integral primera H . Para precisar esta afirmación necesitaremos una definición.

Definición 7.2. Decimos que un germen de aplicación holomorfa $h : (\Sigma, y_0) \rightarrow (\Sigma, y_1)$ está **asociado** a la monodromía de H si y sólo si existe algún $c \in \Gamma + \Lambda$ tal que para todo punto $y \in \Sigma$ suficientemente cerca de y_0 se tiene que

$$\underline{f}(h(y)) = \underline{f}(y) + c,$$

relación que escribiremos abreviadamente como $\underline{f}_* h = \mathcal{T}_c$.

Proposición 7.3. Todo germen $h_\gamma : (\Sigma, y_0) \rightarrow (\Sigma, y_1)$ de holonomía de \mathcal{F} está asociado a la monodromía de H . Más precisamente, $\underline{f}_* h_\gamma = \mathcal{T}_{M_H(\gamma)}$.

Demostración. Para todo $y \in \Sigma$ suficientemente próximo a y_0 existe un camino γ_y contenido en la hoja por y , próximo a γ y uniendo y con $h_\gamma(y)$. Por tanto, $\underline{H}(h_\gamma(y)) - M_H(\gamma_y) = \underline{H}^{\gamma_y}(h_\gamma(y)) = \underline{H}(y)$, de donde $\underline{f}(h_\gamma(y)) = \underline{f}(y) + M_H(\gamma_y)$. Ahora bien, si γ_y es suficientemente próximo a γ entonces $M_H(\gamma_y) = M_H(\gamma)$. \square

También tenemos la siguiente propiedad que nos será de utilidad más adelante.

Lema 7.4. Si $h_1, h_2 : (\Sigma, y_0) \rightarrow (\Sigma, y'_0)$ son dos gérmenes de aplicaciones asociadas a la monodromía de H y la derivada de \underline{f} no se anula en $y'_0 = h_1(y_0) = h_2(y_0)$ entonces $h_1 = h_2$.

Demostración. Por hipótesis tenemos que $\underline{f} \circ h_i = \underline{f} + a$, $i = 1, 2$ con $a = \underline{f}(y'_0) - \underline{f}(y_0)$. Como $\underline{f}'(y'_0) \neq 0$ existe W un pequeño entorno de y'_0 tal que $\underline{f}|_W : W \rightarrow \underline{f}(W)$ es biyectiva. Entonces tenemos que para todo punto y de un entorno suficientemente pequeño de y_0 se verifica que $h_i(y) = \left(\underline{f}|_W\right)^{-1}(\underline{f}(y) + a)$ para $i = 1, 2$. \square

En la sección 7.2 veremos el siguiente resultado:

Proposición 7.5. *Si $f = \int R$ con R función racional, entonces la función multivaluada f^{-1} es una S -función.*

Por tanto, en este contexto podemos responder afirmativamente al Problema 6.5:

Teorema 7.6. *La holonomía generalizada de una foliación holomorfa de variables separadas en $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ respecto de una fibra vertical u horizontal Σ es una S -función, cuyos gérmenes están asociados a la monodromía de su integral primera.*

Vamos a interesarnos ahora en la prolongación analítica de la holonomía o más generalmente de la de los gérmenes asociados a la monodromía de H . Obtenemos la siguiente propiedad que expresa que el conjunto de gérmenes asociados a la monodromía de H es invariante por prolongación analítica.

Proposición 7.7. *Si $h_0 : (\Sigma, y_0) \rightarrow (\Sigma, y'_0)$ es un germen de aplicación holomorfa asociado a la monodromía de H y $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ es un camino comenzando en y_0 sobre el que la prolongación analítica h_1 de h_0 está definida, entonces el germen h_1 también está asociado a la monodromía de H .*

Demostración. Si $\underline{f}_* h_0 = \mathcal{T}_c$, $c \in \Gamma + \Lambda$ entonces

$$\underline{f} \circ h_0 = \underline{f} + c \quad (7.1)$$

La prolongación analítica $(\underline{f} \circ h_0)^\alpha$ de $\underline{f} \circ h_0$ a lo largo de α es igual a $\underline{f}^{h_0^\alpha(\alpha)} \circ h_0^\alpha = \underline{f} \circ h_1 - M_f(h_0^\alpha(\alpha))$. En cuanto a la prolongación analítica del segundo término de (7.1) tenemos que $(\underline{f} + c)^\alpha = \underline{f} - M_f(\alpha) + c$. Combinando ambas cosas deducimos que

$$\underline{f} \circ h_1 = \underline{f} + \underbrace{(M_f(h_0^\alpha(\alpha)) - M_f(\alpha) + c)}_{\Gamma + \Lambda}. \quad (7.2)$$

□

De manera natural podemos plantear ahora dos preguntas:

Pregunta 7.8. *¿Todo germen de aplicación holomorfa $h : (\Sigma, y_0) \rightarrow (\Sigma, y_1)$ asociado a la monodromía de H es realizable como germen de holonomía?*

Pregunta 7.9. *Dados dos gérmenes $h_i : (\Sigma, y_i) \rightarrow (\Sigma, y'_i)$, $i = 1, 2$ de aplicaciones holomorfas asociados a la monodromía de H , ¿cuándo existe un camino $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ conectando y_0 e y_1 de manera que exista la prolongación analítica h_0^α de h_0 a lo largo de α y se cumpla que $h_0^\alpha = h_1$?*

Observación 7.10. A la vista de la Proposición 7.7, la respuesta afirmativa de la Pregunta 7.8 implica la respuesta afirmativa del Problema 6.3 planteado en el capítulo 6, es decir, que la prolongación analítica de la holonomía continúa siendo holonomía. Por otra parte, podemos reformular la Pregunta 7.9 preguntándonos cómo podemos caracterizar las diferentes componentes conexas de la holonomía generalizada.

En la sección 7.3 consideraremos una familia concreta de foliaciones de Riccati generalizadas de variables separadas y responderemos en ese caso a estas dos preguntas.

7.2 Un teorema de inversión para S -funciones

Hagamos un par de observaciones sobre las singularidades de las S -funciones. El hecho de que una función multivaluada, f , sea una S -función no implica que $\text{Sing}(f)$ sea discreto, por ejemplo, $f(z) = \log(z^\alpha - 1)$ con $\alpha \notin \mathbb{Q}$ cumple que la adherencia de $\text{Sing}(f)$ es toda la circunferencia unidad y el cero. Aunque las singularidades que cada una de las determinaciones que f encuentra al hacer prolongación analítica son aisladas. Sin embargo, ni siquiera esta condición es característica de todas las S -funciones como muestran los siguientes ejemplos:

1. $f(z) = \log \sin \frac{\pi}{z}$ con singularidades $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}^*$ que se acumulan en 0, que también es singularidad.
2. $f(z) = \log \wp(\frac{1}{z})$ con singularidades acumulando también en cero pero no en una recta como en el ejemplo anterior, donde \wp denota la función de Weierstrass.

En general, la inversa de una S -función no admite prolongación analítica fuera de un conjunto numerable, por ejemplo si consideramos $f = P^{-1}$ la inversa, como S -función, de la función $P : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ de Picard, tenemos que $f^{-1} = P$ no admite prolongación analítica fuera del disco. Este primer ejemplo es bastante trivial pues la imagen de $f = P^{-1}$ ya no tiene complementario numerable en \mathbb{C} . Sin embargo, la situación puede ser un poco más sutil: Sea f una función entera, un valor a se dice **asintótico** para f si existe un camino $\gamma : [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ de manera que

$$\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 1} f(\gamma(t)) = a.$$

Es inmediato ver que a es un punto singular para la S -función f^{-1} . ¿Qué se puede decir del conjunto de valores asymptóticos de una función entera? Pues que en general puede ser muy grande, incluido todo $\overline{\mathbb{C}}$, cf. [Hei54, Kie36, Maz31]. Así pues, en general, la inversa de una función entera no es una S -función aunque el Teorema de Picard nos asegure que el complementario de la imagen es a lo más un punto.

Vamos a estudiar con detalle las singularidades que aparecen en la inversa de una S -función, f , en términos de las singularidades y otros elementos de la propia f . Observemos, en primer lugar, que en el caso que f es entera, es decir, no tiene singularidades en \mathbb{C} hemos tenido que recurrir a ∞ para buscar las singularidades de f^{-1} , es decir, hemos tratado ∞ como una singularidad de f , este hecho nos motiva a hacer la siguiente definición.

Definición 7.11. *Sea f una S -función con singularidades en A y $p \in A$. Decimos que a es un **valor asintótico asociado a p** si existe un camino $\gamma : [0, 1) \rightarrow \mathbb{C} \setminus A$ tal que*

$$\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = p \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 1} f(\gamma(t)) = a.$$

De esta forma recuperamos la definición de valor asintótico clásico como la de valor asintótico asociado a ∞ . La misma observación que hemos hecho antes es aplicable ahora, de manera que cualquier valor asintótico asociado a un punto singular de f es singular para f^{-1} . Notaremos por $As(f, p)$ al conjunto de valores asintóticos de f asociados a p y por

$$As(f) = \bigcup_{p \in \text{Sing}(f)} As(f, p).$$

Observación 7.12. Si f es una función entera entonces $As(f) = As(f, \infty)$. Además, si f es una función meromorfa no constante entonces infinito siempre es un valor asintótico de f , cf. [Hei54].

En segundo lugar, es claro que hemos de considerar también dentro de las singularidades de f^{-1} aquellos valores que son imagen por f de puntos donde se anula la derivada f' , ya que corresponderán a puntos de ramificación de f^{-1} . De esta manera tenemos ya un conjunto candidato a ser el conjunto singular de f^{-1} :

$$\Sigma(f) := f((f')^{-1}(0)) \cup As(f) \subseteq \text{Sing}(f^{-1}).$$

Por otra parte, el conjunto de singularidades de una S -función, siendo numerable, no tiene por qué ser discreto, aún más, puede ser denso en \mathbb{C} . Para llegar al resultado que queremos, asegurar que f^{-1} es una S -función, necesitaremos imponer ciertas restricciones a f .

Teorema 7.13. *Sea f una función multivaluada que verifique las siguientes condiciones:*

- (1) *El conjunto de singularidades $\text{Sing}(f)$ de f es finito.*
- (2) *El conjunto de valores asintóticos $As(f)$ de f es numerable.*
- (3) *El conjunto $(f')^{-1}(0)$ no tiene puntos de acumulación regulares de f .*
- (4) *Para cualquier compacto K que no contenga ningún punto de $\text{Sing}(f)$ ni de $(f')^{-1}(0)$, existe una constante $C > 0$ tal que $\frac{1}{C} < |f'| < C$ para cualquier determinación de f sobre K .*

Entonces la función multivaluada f^{-1} es una S -función, más precisamente,

$$\text{Sing}(f^{-1}) = \Sigma(f).$$

Antes de pasar a la demostración hagamos algunas observaciones y aplicaciones interesantes.

Observación 7.14. 1. De la demostración se deduce que las condiciones (1), (3) y (4) implican que $\text{Sing}(f^{-1}) = \Sigma(f)$. La condición (2) sólo se utiliza para asegurar que $\Sigma(f)$ es numerable.

2. Si f' es univaluada automáticamente se verifican las condiciones (3) y (4).

3. La hipótesis (4) no es superflua pues si consideramos la aplicación de Picard $P : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ que nos proporciona el recubrimiento universal holomorfo del plano menos dos puntos por el disco, entonces se tiene que P no es una S -función ya que admite la circunferencia unidad como frontera natural, pero sin embargo la función multivaluada $f = P^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{D}$ verifica todas las hipótesis del Teorema 7.13 excepto la (4). Éste es el caso también de la función $f(z) = \int \frac{1}{\log z}$ pues las determinaciones de f' no están acotadas inferiormente en ningún compacto.

Proposición 7.15. La función $f = \int R$, con R función racional, cumple las hipótesis del Teorema 7.13, de donde se deduce la Proposición 7.5.

Demostración. Por la Observación 7.14 se verifican las hipótesis (3) y (4), pero además, en este caso tenemos una escritura explícita de f como

$$f(z) = p(z) + \sum_j \left(\sum_k \frac{a_k}{(z - \mu_j)^k} + \lambda_j \log(z - \mu_j) \right)$$

donde $p(z)$ es polinómica. De esta manera vemos que $\text{Sing}(f) = \{\mu_j\} \cup \{\infty\}$ son los polos de R , cumpliéndose así la hipótesis (1). La verificación de la hipótesis (2) se reduce a ver que la función $g(z) = z + c \log(z)$ no tiene valores asintóticos finitos asociados a ∞ . En efecto, supongamos que hemos demostrado dicha afirmación, entonces se tiene que los valores asintóticos de f asociados a una singularidad finita μ_j de f son valores asintóticos de la función $g(w)$ haciendo el cambio de variable $w = \frac{a_{n_i}}{z - \mu_j}$ si $a_{n_i} \neq 0$:

$$\lim_{z \rightarrow \mu_i} f(z) = cte + \lim_{w \rightarrow \infty} (w^{n_i} + c \log w^{n_i}) = cte + \lim_{w \rightarrow \infty} (w + c \log w).$$

Por otra parte, si $p \equiv 0$ o bien $a_{n_i} = 0$ entonces debemos calcular los valores asintóticos de f asociados a infinito. En este caso tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_j \lambda_j \log(z - \mu_j) = \lim_{w \rightarrow 0} \sum_j \lambda_j \log \left(\frac{1 - \mu_j w}{w} \right) = \lim_{w \rightarrow 0} \sum_j \lambda_j \log w \\ &= \begin{cases} 2\pi i \sum_j \lambda_j \mathbb{Z} & \text{si } \sum_j \lambda_j = 0 \\ \infty & \text{si } \sum_j \lambda_j \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Para ver que la función $g(z) = z + c \log z$ no tiene valores asintóticos finitos tomemos un camino $z(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow 1$ y escribamos $z(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ con $r(t) \rightarrow \infty$. Poniendo $c = c_0 e^{i\theta_0}$ tenemos que $\lim_{t \rightarrow 1} (z(t) + c \log z(t))$ es igual a

$$e^{i\theta_0} \lim_{t \rightarrow 1} (r(t) \cos(\theta(t) - \theta_0) + c_0 \log r(t)) + i (r(t) \sin(\theta(t) - \theta_0) + c_0 \theta(t)) \quad (7.3)$$

Si este límite existe y es finito entonces como la velocidad de crecimiento de $r(t)$ y $\log r(t)$ son diferentes la única forma de que la parte real tienda a un valor finito es que $\cos(\theta(t) - \theta_0)$ tienda a cero cuando $t \rightarrow 1$ de manera que no difiera mucho del cociente $\frac{-c_0 \log(r(t))}{r(t)}$ cuando $t \rightarrow 1$. Pero ésto en particular implica que $\theta(t)$ no puede crecer indefinidamente, pues sino tendríamos una parte real tendiendo a infinito (cuando $\theta(t) - \theta_0 \in 2\pi\mathbb{Z}$). Por tanto, $\theta(t)$ debería estar acotada, llegando así a una contradicción con el hecho de que la parte imaginaria de (7.3) tiende a un valor finito. \square

Corolario 7.16. *El flujo de un campo racional en \mathbb{C} es una S -función del tiempo complejo para cualquier valor inicial.*

Demostración. Escribimos la ecuación diferencial asociada al campo como

$$\frac{dz}{dT} = \frac{1}{R(z(T))},$$

con $R(z)$ función racional. Tenemos que $f(z) = \int R(z) dz = \int dT = T + f(z_0)$. Aplicando el Teorema 7.13 deducimos que f^{-1} es una S -función, por lo tanto también el flujo, que podemos expresar como $z(T; z_0) = f^{-1}(T + f(z_0))$. \square

Demostración del Teorema 7.13. Como ya hemos observado, $\Sigma(f) \subseteq \text{Sing}(f^{-1})$. Conjugando por una homografía siempre podemos suponer que ∞ es una singularidad de f y por la Observación 7.12 también de f^{-1} . Razonemos por reducción al absurdo, es decir, supongamos que existe un punto $a \in \text{Sing}(f^{-1}) \setminus \Sigma(f)$ y lleguemos a contradicción. Sea z un punto tal que $f'(z) \neq 0$ y consideremos un entorno de $w = f(z)$ donde f^{-1} esté definida. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Sigma(f)$ un camino uniendo w y a de manera que exista prolongación analítica del germen de f^{-1} a lo largo de $\gamma_t = \gamma|_{[0,t]}$ para todo $t < 1$ pero no para $t = 1$. Sea $\tilde{\gamma}$ la imagen de $\gamma|_{[0,1]}$ por dicha prolongación analítica de f^{-1} . Veamos que existe un conjunto compacto K que evita las singularidades de f y de manera que para todo $t < 1$ existe un $t' > t$ con $\tilde{\gamma}(t') \in K$. En efecto, si no fuera así, o bien $\tilde{\gamma}(t) \rightarrow \infty$ y $f(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t) \rightarrow a \in \text{As}(f, \infty)$, o bien existiría un elemento $b \in \text{Sing}(f)$ (debido a su finitud) tal que $\tilde{\gamma}(t) \rightarrow b$, y entonces $a \in \text{As}(f, b)$. Por tanto, existe un punto $p \in K$ y una sucesión $t_n \rightarrow 1$ tal que $\tilde{\gamma}(t_n) \rightarrow p$. Veamos que no existe el límite de $\tilde{\gamma}(t)$ como camino cuando t tiende a 1. De existir, sería un punto $p \in K$ regular de f . Entonces, o bien $f'(p) \neq 0$ (con una cierta determinación de f) de manera que f^{-1} estaría

definida en un entorno de $a \in \text{Sing}(f^{-1})$ lo cual es imposible, o bien $f'(p) = 0$ y entonces $a = \lim_{t \rightarrow 1} f(\tilde{\gamma}(t)) = f(p) \in f((f')^{-1}(0)) \subset \Sigma(f)$!

Agrandando un poco la talla del compacto K si es preciso podemos suponer que el conjunto $K_0 = \left(\bigcap_{t < 1} \overline{\tilde{\gamma}([t, 1])} \right) \cap K$ es infinito (pues sino existiría el límite de $\tilde{\gamma}(t)$ cuando $t \rightarrow 1$). Así pues, para todo $p \in K_0$ existe un entorno U de p y una sucesión de intervalos $I_n = [\alpha_n, \beta_n] \subset [0, 1]$ con $\alpha_n < \beta_n < \alpha_{n+1}$ para todo $n \geq 1$ y tal que $\tilde{\gamma}_n := \tilde{\gamma}(I_n)$ verifica que $\tilde{\gamma}_n \subset U$ y $\partial\tilde{\gamma}_n \subset \partial U$.

Utilizando la hipótesis (3), deducimos que sólo hay un número finito de ceros de f' en K por lo que podemos tomar $p \in K_0$ y un disco D de centro p y radio $r > 0$ de manera que ninguna determinación de f' se anula en D . Sean f_n las determinaciones de f sobre $\tilde{\gamma}_n$, las cuales están bien definidas sobre todo $D \subset K$ debido a que $K \cap \text{Sing}(f) = \emptyset$. La hipótesis (4) nos asegura que existe una constante $C > 0$ tal que para todo $n \geq 1$ se tiene la acotación $\frac{1}{C} < |f'_n|_D < C$. Como consecuencia, el diámetro de $f_n(D)$ está acotado inferiormente. La contradicción provendrá del hecho que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\tilde{\gamma}_n) = \lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = a$. Para ello analicemos la situación con un poco más de detalle.

Definimos una nueva sucesión $g_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ de funciones holomorfas normalizando f_n como sigue: $g_n(z) = \frac{f_n(p+rz) - f_n(p)}{f'_n(p)}$. Observemos que $g_n(0) = 0$, $g'_n(0) = 1$ y además la sucesión g'_n está uniformemente acotada en \mathbb{D} . Por tanto, existe un parcial de g_n , que seguiremos notando igual, convergente a una función $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Veamos que existe un $\delta > 0$ tal que para todo n suficientemente grande $g_n(z) \neq 0$ si $0 < |z| < \delta$: Como $g_n \rightarrow g$ tenemos que $g(0) = 0$, $g'_n \rightarrow g'$ y $g'(0) = 1$, por lo que existe un $\delta > 0$ tal que $g|_{D(0, \delta)}$ es univalente. Así, el único cero de g en $D(0, \delta)$ es $z = 0$ y en particular g no se anula en $\partial D(0, \delta)$. Estamos pues en las hipótesis del Teorema clásico de Hurwitz para poder asegurar que para n suficientemente grande g_n y g tienen el mismo número de ceros en $D(0, \delta)$, es decir, únicamente $z = 0$. Recordemos otro Teorema debido a Hurwitz y que podemos encontrar en [Seg81], cf. pp. 604-606.

Teorema. *Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f(0) = 0$ y $|f'(0)| \geq 1$. Si $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ entonces $f(\mathbb{D}) \supset D(0, \frac{1}{16})$. Además, el radio $\frac{1}{16}$ es el mejor posible.*

Dicho teorema fue demostrado por Hurwitz en 1904 con el valor $\frac{1}{58}$ en lugar de $\frac{1}{16}$. Más tarde, Carathéodory en 1917 y Bochner independientemente en 1926 prueban el resultado tal y como lo hemos enunciado. Notemos que este enunciado (a parte evidentemente de la hipótesis sobre los ceros de f) difiere del Teorema de Koebe en que éste sólo asegura la existencia de un disco de radio $1/4$ pero no da información sobre el centro del mismo.

Observemos que las funciones g_n verifican las hipótesis del Teorema anterior, de donde se obtiene que $g_n(D(0, \delta)) \supset D(0, \frac{\delta}{16})$. Por tanto, existe un $R > 0$ tal que para todo n se cumple que $f_n(D) \supset D(f_n(p), R)$. Por otra parte, existen sucesiones $\sigma'_n, \sigma_n, \sigma''_n \in I_n$ de manera que $\sigma'_n < \sigma_n < \sigma''_n$, $\lim \sigma'_n = 1$, $\tilde{\gamma}(\sigma'_n), \tilde{\gamma}(\sigma''_n) \in \tilde{\gamma}_n \cap \partial D$ y $\lim \tilde{\gamma}(\sigma_n) = p$. Como $\gamma(\sigma_n) = f_n(\tilde{\gamma}(\sigma_n))$ y la sucesión $|f'_n|$ está uniformemente acotada (superiormente) en D se

deduce que $d(\gamma(\sigma_n), f_n(p)) \rightarrow 0$. Además, como f_n es propia, envía el borde de D sobre el borde de $f_n(D)$, de donde $d(\gamma(\sigma'_n), f_n(p)) \geq R$ para todo n . El hecho de que $\lim \gamma(t) = a$ y las desigualdades

$$R \leq d(f_n(p), \gamma(\sigma'_n)) \leq d(f_n(p), \gamma(\sigma_n)) + d(\gamma(\sigma_n), \gamma(\sigma'_n))$$

nos llevan finalmente a una contradicción. \square

7.3 La familia de foliaciones $\mathcal{F}_{\rho,\lambda}$

En esta sección realizamos un estudio detallado de la holonomía generalizada de la familia de foliaciones de Riccati generalizadas $\mathcal{F}_{\rho,\lambda}$ definidas en $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ por las 1-formas

$$\omega_{\rho,\lambda} = x^2 dy + (1 - \lambda x)y(y - 1)(y - \rho)dx \quad (7.4)$$

Recordemos que el Ejemplo 6.12 implica que $\mathcal{F}_{\rho,\lambda}$ es pull-back de una foliación de Riccati si y sólo si $\rho \in \mathbb{Q}$. Aquí sólo analizaremos el caso genérico $\rho \notin \mathbb{R}$. En un primer momento cuando $\lambda = 0$ y luego en el caso $\lambda \neq 0$. El instrumento básico que utilizaremos es la integral primera multivaluada de la foliación $\mathcal{F}_{\rho,\lambda}$ dada por

$$H_{\rho,\lambda}(x, y) = f_\rho(y) - g_\lambda(x) \text{ con } \begin{cases} f_\rho(y) = \frac{1}{\rho} \log(y) + \frac{1}{1-\rho} \log(y-1) + \frac{1}{\rho(\rho-1)} \log(y-\rho) \\ g_\lambda(x) = \frac{1}{x} + \lambda \log x \end{cases}$$

En este caso las monodromías de f_ρ y g_λ vienen dadas por los subgrupos aditivos de \mathbb{C}

$$\Gamma = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \quad \text{y} \quad \Lambda = 2i\pi\lambda\mathbb{Z}$$

respectivamente, siendo

$$e_1 = \frac{-2\pi i}{\rho(\rho-1)} \quad \text{y} \quad e_2 = \frac{2\pi i}{1-\rho},$$

notemos que $\frac{2\pi i}{\rho} = e_1 - e_2$.

Vamos a hacer un breve estudio de las singularidades de la foliación $\mathcal{F}_{\rho,\lambda}$, para ello tendremos que distinguir los dos casos siguientes:

- (1) Si $\lambda = 0$ entonces la foliación $\mathcal{F}_{\rho,0}$ es de Riccati respecto de la fibración horizontal, tiene tres separatrices horizontales $\{y = 0\}$, $\{y = 1\}$ e $\{y = \rho\}$ y una sola separatriz vertical $\{x = 0\}$ de multiplicidad dos. Por tanto las singularidades de $\mathcal{F}_{\rho,0}$ son tres sillas-nodos sobre su separatriz fuerte $\{x = 0\}$. Y éstas son todas como puede observarse haciendo todos los cambios de carta en $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$.

- (2) Si $\lambda \neq 0$, a parte de las tres separatrices horizontales anteriores, tenemos dos separatrices verticales $\{x = 0\}$ de multiplicidad dos y $\{x = \infty\}$ de multiplicidad uno, con tres singularidades cada una. Las correspondientes a $\{x = 0\}$ son sillan-nodo y las correspondientes a $\{x = \infty\}$ son hiperbólicas si ρ y λ son genéricos. Tenemos también una singularidad, de residuo λ^3 , en el punto de abscisa $x = \frac{1}{\lambda}$ de la recta $\{y = \infty\}$.

En la subsección 7.3.1 realizamos un estudio exhaustivo de la función f_ρ que nos permitirá deducir propiedades sobre la holonomía generalizada de la foliación $\mathcal{F}_{\rho,\lambda}$.

7.3.1 Estudio de la función f_ρ

En primer lugar, observemos que f_ρ es una S -función cuyas singularidades verifican

$$\{0, 1, \rho\} \subseteq \text{Sing}(f_\rho) \subseteq \{0, 1, \rho, \infty\}.$$

Sean c_0, c_1, c_ρ curvas disjuntas, sin auto-intersecciones, uniendo $0, 1, \rho$ con ∞ respectivamente. Sobre el abierto simplemente conexo $U = \overline{\mathbb{C}} \setminus (\overline{c_0} \cup \overline{c_1} \cup \overline{c_\rho})$ podemos definir sin ambigüedad $\arg(y), \arg(y-1), \arg(y-\rho)$ y por tanto podemos tomar \underline{f}_ρ una determinación univaluada de

$$f_\rho(y) = \left(\frac{1}{\rho} \log |y| + \frac{1}{1-\rho} \log |y-1| + \frac{1}{\rho(\rho-1)} \log |y-\rho| \right) + i \left(\frac{1}{\rho} \arg(y) + \frac{1}{1-\rho} \arg(y-1) + \frac{1}{\rho(\rho-1)} \arg(y-\rho) \right)$$

en U . Definamos también $P = \underline{f}_\rho(U)$ la imagen de U por dicha determinación. Gracias a la igualdad

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{1-\rho} + \frac{1}{\rho(\rho-1)} = 0 \tag{7.5}$$

deducimos que ∞ no es un punto de ramificación de f_ρ y que si nos restringimos a un entorno W simplemente conexo de ∞ existe el límite de f_ρ cuando y tiende a infinito dentro de W , por tanto $\infty \notin \text{Sing}(f_\rho)$. Es decir,

$$\text{Sing}(f_\rho) = \{0, 1, \rho\}. \tag{7.6}$$

Por otra parte, tenemos que la igualdad (7.5) implica que

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\rho} \log |y| + \frac{1}{1-\rho} \log |y-1| + \frac{1}{\rho(\rho-1)} \log |y-\rho| \right) = 0.$$

Por tanto, los valores asintóticos de f_ρ son los que constituyen el retículo Γ que determina la monodromía de f_ρ . Además, como $f'_\rho(y) = \frac{1}{y(y-1)(y-\rho)}$ no se anula nunca, deducimos del Teorema 7.13 que las singularidades de f_ρ^{-1} son exactamente

$$\text{Sing}(f_\rho^{-1}) = \Gamma. \tag{7.7}$$

Supongamos que las curvas c_0, c_1, c_ρ tienen tangentes en $0, 1, \rho$ respectivamente, así como en ∞ , al transformarlas por la inversión $y \mapsto \frac{1}{y}$ (estas tangentes son las direcciones asintóticas de las curvas c_a).

Sean $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ los ángulos, contados en sentido negativo a partir del semieje real positivo, de las tangentes de c_ρ, c_1 y c_0 en $\rho, 1$ y 0 respectivamente. Sean así mismo α, β y γ los ángulos, medidos de la misma manera, de las direcciones asintóticas (recordemos que desde el infinito, es decir, después de hacer la inversión $\frac{1}{y}$, los ángulos se miden positivamente). Para fijar ideas supondremos en lo que sigue que $0 \leq \beta \leq \gamma \leq \alpha$, cf. Figura 7.1.

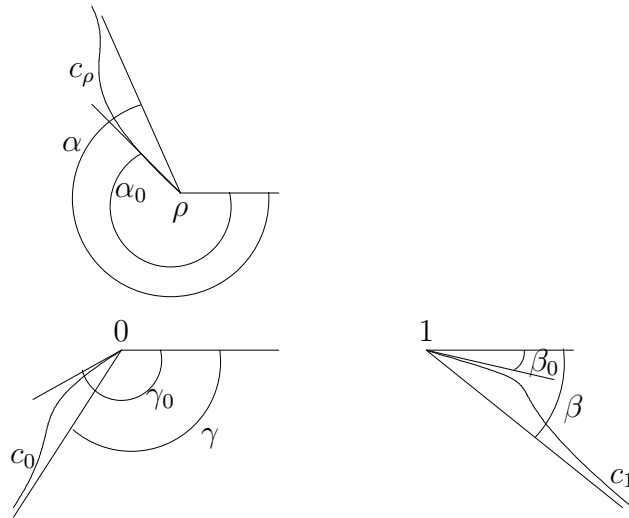


Figura 7.1: Los cortes c_0, c_1 y c_ρ .

La intersección del abierto U con un entorno suficientemente pequeño del infinito tiene tres componentes conexas que notaremos por S_0, S_1 y S_2 , donde S_0 delimitada por c_1 y c_ρ , S_1 por c_0 y c_ρ , y S_2 por c_0 y c_1 , cf. Figura 7.3. Analicemos el comportamiento de la determinación \underline{f}_ρ en el infinito. Para ello consideremos el límite $e_0 = \lim_{y \in S_0, |y| \rightarrow \infty} \underline{f}_\rho(y) = i \left(\frac{1}{\rho} b_0 + \frac{1}{1-\rho} b_1 + \frac{1}{\rho(\rho-1)} b_\rho \right)$, donde b_0, b_1 y b_ρ son los argumentos límites de un punto en S_0 tendiendo a ∞ . Por ejemplo, si contamos los tres argumentos desde una misma semirrecta, el semieje positivo por fijar ideas, entonces $b_0 = b_1 = b_\rho$ y por tanto $e_0 = 0$. Ahora bien, con esta medición fijada del argumento tenemos que

$$\lim_{y \in S_2, |y| \rightarrow \infty} \underline{f}_\rho(y) = i \left(\frac{1}{\rho} a + \frac{1}{1-\rho} (2\pi + a) + \frac{1}{\rho(\rho-1)} a \right) = \frac{2\pi i}{1-\rho} = e_2,$$

cf. Figura 7.2.

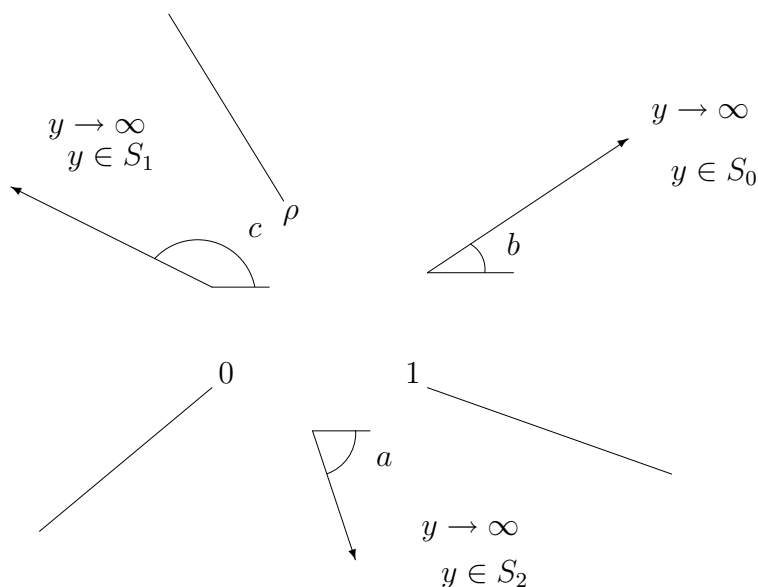


Figura 7.2: Las direcciones asintóticas

De la misma manera obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{y \in S_1, |y| \rightarrow \infty} \underline{f}_\rho(y) &= i \left(\frac{1}{\rho}(2\pi + c) + \frac{1}{1-\rho}(2\pi + c) + \frac{1}{\rho(\rho-1)}c \right) = \frac{2\pi i}{\rho} + \frac{2\pi i}{1-\rho} \\ &= \frac{-2\pi i}{\rho(\rho-1)} = e_2. \end{aligned}$$

Si hacemos el cambio $Y = \frac{1}{y}$ para estudiar \underline{f}_ρ en $y = \infty$, o equivalentemente en $Y = 0$, obtenemos

$$\underline{f}_\rho(y) = \underline{f}_\rho\left(\frac{1}{Y}\right) = \frac{1}{\rho} \log\left(\frac{1}{Y}\right) + \frac{1}{1-\rho} \log\left(\frac{1}{Y} - 1\right) + \frac{1}{\rho(\rho-1)} \log\left(\frac{1}{Y} - \rho\right),$$

es decir, salvo constante aditiva, y utilizando que $\log(1 - \zeta) = -\sum_{n \geq 1} \frac{\zeta^n}{n}$ tenemos que

$$\underline{f}_\rho\left(\frac{1}{Y}\right) = -\frac{1}{1-\rho} \sum_{n \geq 1} \frac{Y^n}{n} - \frac{1}{\rho(\rho-1)} \sum_{n \geq 1} \frac{\rho^n Y^n}{n} = -\frac{1}{2}Y^2 - \frac{1}{3}(\rho+1)Y^3 + \dots$$

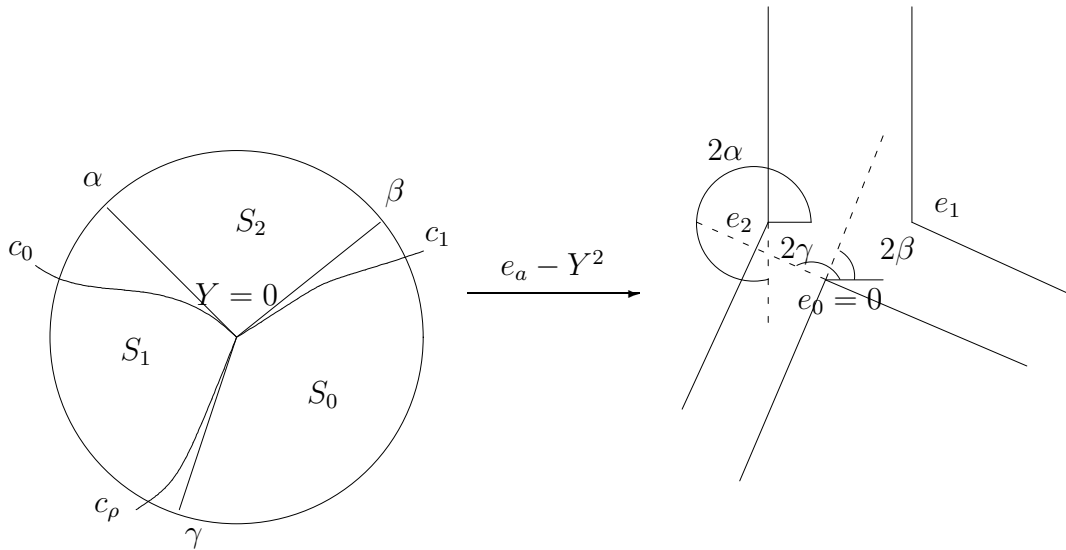


Figura 7.3: El comportamiento de f_ρ en el infinito.

Por tanto, f_ρ restringida a cada sector S_a , $a = 0, 1, 2$, se comporta infinitesimalmente como $Y \mapsto e_a - Y^2$. De esta manera podemos estudiar las tangencias de $f(c_i)$ en e_a , cf. Figura 7.3.

Analicemos ahora el comportamiento de f_ρ cerca de las singularidades $0, 1, \rho$. Por ejemplo, en 1: Para y en un pequeño entorno de 1 tenemos que $f_\rho(y)$ difiere poco de $\frac{1}{1-\rho} \log(y-1)$, por tanto, $\lim_{y \rightarrow 1} |f_\rho(y)| = \infty$. Podemos parametrizar la recta tangente de c_1 en 1 por $y(t) = 1 + te^{i\beta_0}$, para así calcular la dirección asintótica de $f_\rho(c_1)$: dado que $f_\rho(y(t)) \sim \frac{1}{1-\rho} \log t + \frac{i\beta_0}{1-\rho}$, y que cuando $t \rightarrow 0$, $\log t \rightarrow -\infty$, tenemos que la asíntota en 1 es la que tiene por dirección y sentido el de $\frac{-1}{1-\rho}$ y que pasa por $\frac{i\beta_0}{1-\rho}$ y $\frac{i\beta_0}{1-\rho} + \frac{2\pi i}{1-\rho}$. De manera análoga se tratan las otras dos singularidades: 0 y ρ . Vamos ahora a estudiar una propiedad importante de f_ρ .

Proposición 7.17. *Sea U el abierto obtenido al quitar de $\overline{\mathbb{C}}$ semirrectas disjuntas uniendo $0, 1, \rho$ con ∞ . Entonces $f_{\rho|U}$ es univaluada e inyectiva.*

Demostración. Pongamos $f = f_\rho$ y supongamos que existieran dos puntos $y_0, y_1 \in U$ tales que $f(y_0) = f(y_1)$ con la misma determinación sobre U . Entonces existiría un camino simple γ contenido en U uniendo y_0 y y_1 , de manera que $\tilde{\gamma} = f(\gamma)$ sería cerrado. Por otra parte, como $\gamma \subset U$, tenemos que $\tilde{\gamma} \subset P = f(U)$. Sabemos que f^{-1} es una S -función, es decir, admite prolongación analítica salvo en un conjunto numerable de valores. Si hacemos la

prolongación analítica de f^{-1} a lo largo de $\tilde{\gamma}$ tenemos que en $\tilde{\gamma}(1)$ el germen de f^{-1} obtenido por prolongación analítica es diferente al de salida. Por tanto, $\tilde{\gamma}$ debe delimitar una región de P donde se encuentre una singularidad de $(f|_U)^{-1}$. Adaptando la demostración del Teorema 7.13 (sobre inversas de S -funciones) deducimos que las singularidades que podemos encontrar son únicamente los valores asintóticos de f que pueden alcanzarse vía caminos hacia el infinito íntegramente contenidos en U , es decir, $e_0 = 0, e_1, e_2 \in \partial P$, llegando así a una contradicción. \square

Corolario 7.18. *Existen curvas disjuntas c_0, c_1, c_ρ , sin auto-intersecciones uniendo $0, 1$ y ρ con ∞ respectivamente, de manera que si ponemos $U_\rho = \overline{\mathbb{C}} \setminus (\overline{c_0} \cup \overline{c_1} \cup \overline{c_\rho})$ entonces*

1. $f|_{U_\rho} : U_\rho \rightarrow \mathbb{C}$ está bien definida
2. $f|_{U_\rho}$ es inyectiva
3. La región $P_\rho = f(U_\rho)$ está delimitada por semirrectas, cf. Figura 7.5 por ejemplo.

Demostración. A partir del estudio realizado tenemos que existen semirrectas uniendo $0, 1, \rho$ con ∞ de manera que P , la imagen de U –el complementario de dichas semirrectas– por una determinación bien definida de f , contiene en su interior las semirrectas de direcciones asintóticas de ∂P , $\frac{-1}{\rho}, \frac{-1}{1-\rho}, \frac{-1}{\rho(\rho-1)}$ pasando por algún e_a , cf. por ejemplo la Figura 7.4 para el caso $\rho = i$. Como $f|_U$ es inyectiva por la Proposición 7.17, basta tomar los c_a como las antimágenes de dichas semirrectas. \square

Como las consideraciones que siguen no dependen de ρ , de ahora en adelante omitiremos el subíndice ρ en todas las notaciones. Gracias a la inyectividad de \underline{f} podemos "trasladar" la monodromía de f a $P = \underline{f}(U)$ de la manera siguiente: Consideremos la clase \mathcal{A} de caminos **admisibles** para la determinación \underline{f}^{-1} de f^{-1} , es decir, aquellos caminos continuos $\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ sobre los que está definida la prolongación analítica de \underline{f}^{-1} . Como el conjunto de singularidades de la función multivaluada f^{-1} es igual a Γ , cf. (7.7), tenemos que \mathcal{A} contiene a todos los caminos continuos que evitan Γ . Sin embargo, existen caminos que pasan por Γ sobre los cuales está definida la prolongación analítica del germen \underline{f}^{-1} , pues pasan por las singularidades de otra determinación de f^{-1} . Para cada $p \in P$ consideremos las subclases de \mathcal{A} definidas mediante

$$\mathcal{A}_p = \{\delta \in \mathcal{A} \mid \delta(0) = p\} \supset \mathcal{C}_p = \{\delta \in \mathcal{A} \mid \delta(0) = \delta(1) = p\}.$$

Para cada camino $\delta \in \mathcal{A}_p$ consideramos la prolongación de \underline{f}^{-1} a lo largo de δ , así como la imagen γ de δ por dicha prolongación de \underline{f}^{-1} . Entonces definimos el camino (no necesariamente continuo) $\delta_P \subset \overline{P}$ como la imagen por \underline{f} del camino γ anterior. Una descripción alternativa de δ_P es la siguiente: Podemos definir $\delta_P(t)$ y $a_\delta(t) \in \Gamma$ de manera que $\delta_P(t) = \delta(t) + a_\delta(t) \in \overline{P}$. Para ello, sea $t_0 = \inf\{t \mid \delta(t) \notin P\}$; definimos $a_\delta(t) = 0$ para

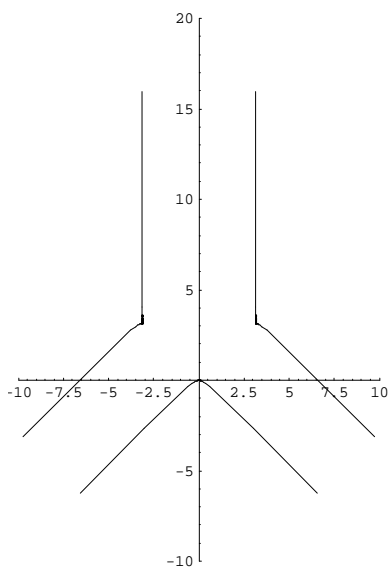


Figura 7.4: La imagen P de U por f cuando $\rho = i$.

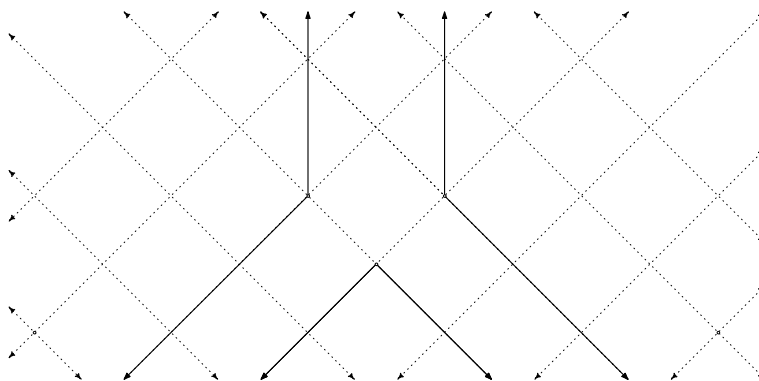


Figura 7.5: $P_i = f(U_i)$

todo $t < t_0$ y $a(t_0)$ como el único elemento de Γ que hace que exista un $\varepsilon > 0$ tal que $\delta(t) + a_\delta(t_0) \in P$ para todo $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$. Sea ahora $t_1 = \inf\{t > t_0 \mid \delta(t) + a_\delta(t_0) \notin P\}$, entonces $a_\delta(t) = a_\delta(t_0)$ para todo $t \in (t_0, t_1)$ y $a_\delta(t_1)$ es el único elemento de Γ que hace que exista un $\varepsilon > 0$ tal que $\delta(t) + a_\delta(t_1) \in P$ para todo $t \in (t_1, t_1 + \varepsilon)$, y así sucesivamente. El proceso concluye por compacidad.

Para cada $p \in P$ definimos ahora $A_p : \mathcal{A}_p \rightarrow \Gamma$ mediante $A_p(\delta) = a_\delta(1) = \delta_P(1) - \delta(1)$. La relación entre la aplicación A_p y la monodromía de f es la siguiente: consideremos γ un camino en $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \rho\}$ que empiece en y_0 , pongamos $p = \underline{f}(y_0)$ y $\delta = \underline{f}^\gamma(\gamma)$. Entonces

$M_f(\gamma) = A_p(\delta)$. El hecho de que M_f es un *morfismo*, es decir, que para todo par de caminos γ_1, γ_2 con $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ se cumpla $M_f(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = M_f(\gamma_1) + M_f(\gamma_2)$, se traduce en términos de las aplicaciones A_p como sigue.

Lema 7.19. *Si $\delta_1 \in \mathcal{A}_p$, $\delta_2 \in \mathcal{A}_q$ y $\delta_1(1) = q = \delta_2(0)$ entonces*

$$A_p(\delta_1 \cdot \delta_2) = A_p(\delta_1) + A_{q+A_p(\delta_1)}(\delta_2 + A_p(\delta_1)).$$

También necesitaremos el siguiente lema técnico que demostraremos por simplicidad en el caso $\rho = i$, siendo análoga la demostración en el resto de los casos.

Lema 7.20. *La imagen de $A_p|_{\mathcal{C}_p}$ contiene a $\{\pm e_1, \pm e_2\} \cap \{a \in \Gamma \mid p + a \in P\}$.*

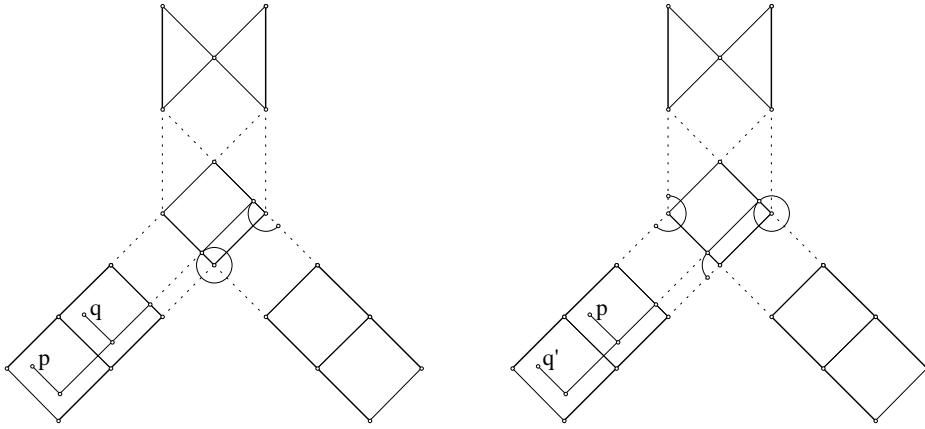
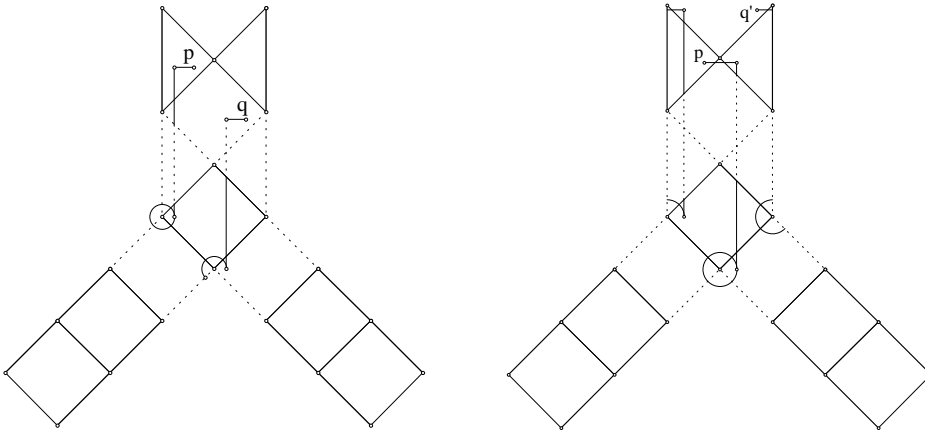
Demostración. De acuerdo a la figura 7.5 distinguiremos varios casos según dónde se encuentre $p \in P$:

1. En la banda del 1. En este caso $\{\pm e_1, \pm e_2\} \cap \{a \in \Gamma \mid p + a \in P\} = \{-e_1, e_1\}$. Si $\delta \in \mathcal{C}_p$ sólo da una vuelta al cero entonces $A_p(\delta) = e_1$. Si $\delta \in \mathcal{C}_p$ sólo da una vuelta al e_1 entonces $A_p(\delta) = -e_1$. Ver la Figura 7.6.
2. En la banda del i . La situación es simétrica a la anterior.
3. En la banda izquierda del 0. En este caso $\{\pm e_1, \pm e_2\} \cap \{a \in \Gamma \mid p + a \in P\} = \{e_1, -e_2\}$. Si $\delta \in \mathcal{C}_p$ sólo da una vuelta al e_2 entonces $A_p(\delta) = -e_2$. Si $\delta \in \mathcal{C}_p$ sólo da una vuelta al cero entonces $A_p(\delta) = e_1$. Ver la Figura 7.7.
4. En la banda derecha del 0. La situación es simétrica a la anterior.
5. En el cuadrado central, de vértices $0, e_1, e_2$ y $e_1 + e_2$. Tenemos dos subcasos:
 - (a) En la parte de la derecha. En este caso $\{\pm e_1, \pm e_2\} \cap \{a \in \Gamma \mid p + a \in P\} = \{-e_1, -e_2, e_2\}$. Si $\delta \in \mathcal{C}_p$ sólo da una vuelta a a , véase la Figura 7.8, entonces

$$A_p(\delta) = \begin{cases} e_2 & \text{si } a = 0 \\ -e_1 & \text{si } a = e_1 \\ -e_2 & \text{si } a = e_2 \end{cases}$$

- (b) En la parte de la izquierda. La situación en este caso es simétrica a la anterior. Tenemos que $\{\pm e_1, \pm e_2\} \cap \{a \in \Gamma \mid p + a \in P\} = \{-e_1, -e_2, e_1\}$. Si $\delta \in \mathcal{C}_p$ sólo da una vuelta a a entonces

$$A_p(\delta) = \begin{cases} e_1 & \text{si } a = 0 \\ -e_1 & \text{si } a = e_1 \\ -e_2 & \text{si } a = e_2 \end{cases}$$

Figura 7.6: $q = p + e_1$ y $q' = p - e_1$ Figura 7.7: $q = p - e_2$ y $q' = p + e_1$

□

Proposición 7.21. *Dados $p, q \in P$ tal que $q - p \in \Gamma$ existe un camino $\delta \in \mathcal{C}_p$ tal que $A_p(\delta) = q - p$, es decir, δ_P acaba en q .*

Demostración. Si $p, q \in P$ y $q - p \in \Gamma$ entonces existen $p = p_0, p_1, \dots, p_n = q \in P$ de manera que $p_i - p_{i-1} \in \{\pm e_1, \pm e_2\} \cap \{a \in \Gamma \mid p_{i-1} + a \in P\}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Aplicando el Lema 7.20 obtenemos caminos $\delta_i \in \mathcal{C}_{p_{i-1}}$ de manera que $A_{p_{i-1}}(\delta_i) = p_i - p_{i-1}$ para $i = 1, \dots, n$. Sean $\tilde{\delta}_i = \delta_i + p_0 - p_{i-1} \in \mathcal{C}_p$ y $\delta = \tilde{\delta}_1 \cdot \tilde{\delta}_2 \dots \tilde{\delta}_n$, veamos que $A_p(\delta) =$

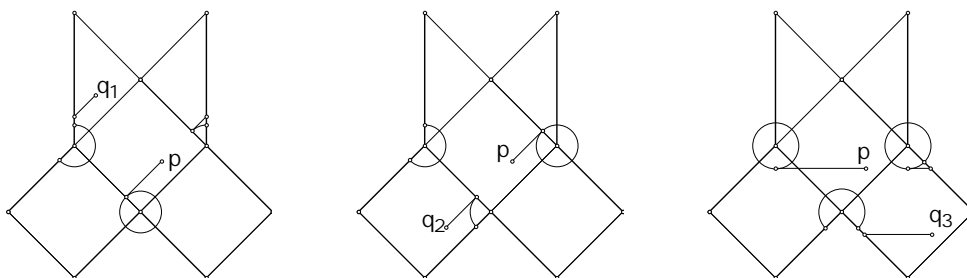


Figura 7.8: $q_1 = p + e_2$, $q_2 = p - e_1$ y $q_3 = p - e_2$

$A_p(\tilde{\delta}_1 \cdot \tilde{\delta}_2 \dots \tilde{\delta}_n) = p_n - p_0 = q - p$ por inducción sobre n : Para $n = 1$ es por construcción del $\tilde{\delta}_1 = \delta_1$ que se cumple $A_p(\delta_1) = p_1 - p_0$. Supongámoslo cierto para $n - 1$ y veámoslo para n .

$$A_p(\tilde{\delta}_1 \cdot \tilde{\delta}_2 \dots \tilde{\delta}_n) = A_p(\tilde{\delta}_1 \cdot \tilde{\delta}_2 \dots \tilde{\delta}_{n-1}) + A_{p+A_p(\tilde{\delta}_1 \cdot \tilde{\delta}_2 \dots \tilde{\delta}_{n-1})}(\tilde{\delta}_n + A_p(\tilde{\delta}_1 \cdot \tilde{\delta}_2 \dots \tilde{\delta}_{n-1}))$$

Ahora, por hipótesis de inducción tenemos que $A_p(\tilde{\delta}_1 \cdot \tilde{\delta}_2 \dots \tilde{\delta}_{n-1}) = p_{n-1} - p_0$, por tanto

$$\begin{aligned} A_p(\tilde{\delta}) &= p_{n-1} - p_0 + A_{p_{n-1}}(\tilde{\delta}_n + p_{n-1} - p_0) = p_{n-1} - p_0 + A_{p_{n-1}}(\tilde{\delta}_n) \\ &= p_{n-1} - p_0 + p_n - p_{n-1} = p_n - p_0. \end{aligned}$$

□

7.3.2 Análisis del caso $\lambda = 0$

En este caso se tiene que $\Lambda = 0$ y la función $g_0(x) = 1/x$ es univaluada y biyectiva. Utilizando la Proposición 7.3 podemos escribir la holonomía generalizada de $\mathcal{F}_{\rho,0}$ como $h = \underline{f}^{-1}(\underline{f} + \Gamma)$. En la sección anterior hemos visto que $\text{Sing}(f) = \{0, 1, \rho\}$ y $\text{Sing}(f^{-1}) = \Gamma$. Por tanto tenemos que

$$\underline{f}^{-1}(\Gamma) \subseteq \text{Sing}(h) \subseteq \underline{f}^{-1}(\Gamma) \cup \{0, 1, \rho, \infty\}.$$

Observemos que $0, 1$ y ρ son puntos de acumulación de $\underline{f}^{-1}(\Gamma)$. Sin embargo, veremos a lo largo de esta sección que ni $0, 1, \rho$ ni ∞ son singularidades de h . Por otra parte, hagamos notar que el conjunto $\underline{f}^{-1}(\Gamma) \subset \Sigma$ es exactamente la intersección de Σ con la hoja L_∞ de \mathcal{F} que pasa por el punto $(x_0, \infty) \in \Sigma = \{x = x_0\}$:

$$\underline{f}^{-1}(\Gamma) = L_\infty \cap \Sigma. \quad (7.8)$$

El siguiente resultado nos permitirá responder a la Pregunta 7.8 en el caso que nos ocupa.

Proposición 7.22. *Todo germen asociado a la monodromía de $H_{\rho,0}$ es un germen de holonomía de la foliación $\mathcal{F}_{\rho,0}$.*

Demostración. Sea $h : (\Sigma, y_0) \rightarrow (\Sigma, y_1)$ un germen de aplicación holomorfa tal que $\underline{f}_* h = \mathcal{T}_a$, $a \in \Gamma$. Debemos mostrar que existe un camino γ con extremos y_0 e y_1 tal que $h = \underline{f}_* h_\gamma$. Pongamos $p = \underline{f}(y_0)$ y $q = \underline{f}(y_1) = p + a$. Por la Proposición 7.21 existe un camino $\delta \in \mathcal{C}_p$ tal que $\overline{A}_p(\delta) = a$. Pongamos $c = \underline{H}(x_0, y_0)$ y $\beta = g^{-1}(\delta - c)$. Como $\delta \in \mathcal{C}_p$ evita las singularidades de \underline{f}^{-1} la imagen α de δ por la prolongación analítica de \underline{f}^{-1} está bien definida. Definamos entonces $\gamma(t) = (\beta(t), \alpha(t))$. Por construcción γ evita las singularidades de H y la prolongación analítica de \underline{H} a lo largo de γ es constante. Por tanto, γ está contenido en una hoja de $\mathcal{F}_{\rho,0}$. Gracias a la Proposición 7.3, tenemos que $h_\gamma = \underline{f}_* \mathcal{T}_{M_H(\gamma)}$. Pero por otra parte, como $\Lambda = 0$ tenemos que $M_H(\gamma) = M_f(\alpha) = A_p(\delta) = a$. Por tanto, $\underline{f}_* h_\gamma = h$. \square

De acuerdo a la Observación 7.10 deducimos inmediatamente el siguiente resultado.

Teorema 7.23. *Toda la holonomía generalizada de $\mathcal{F}_{\rho,0}$ está compuesta por gérmenes de holonomía, es decir, en este caso la prolongación analítica de un germen de holonomía es otro germen de holonomía.*

Observación 7.24. De las demostraciones de las Proposición 7.22, 7.21 y del Lema 7.20 se deduce que el tamaño de los caminos γ_a , $a \in \Gamma$, que realizan los gérmenes h_a asociados a la monodromía de $H_{\rho,0}$ con $\underline{f}_* h_a = \mathcal{T}_a$ no está uniformemente acotada en Γ . Es decir, para poder realizar un germen de holonomía h asociado a la monodromía $a \in \Gamma$ de H necesitamos un camino γ_a , de manera que la asignación $\Gamma \rightarrow \mathbb{R}^+$, que a cada a le asocia la longitud mínima que debe tener un camino γ_a para realizar como holonomía h_a , es no acotada.

Con referencia a la Pregunta 7.9 obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 7.25. *Dos gérmenes de aplicaciones holomorfas diferentes de la identidad en Σ asociados a la monodromía de $H_{\rho,0}$ son prolongación analítica uno de otro mediante un camino adecuado. Es decir, la holonomía generalizada de $\mathcal{F}_{\rho,0}$ tiene sólo dos componentes conexas, una de las cuales es la identidad.*

En la sección 7.3.3 describiremos la segunda componente conexa de la holonomía generalizada de $\mathcal{F}_{\rho,0}$.

Demostración. Basta probar que si $h_i : (\Sigma, y_0) \rightarrow (\Sigma, y_i)$, $i = 1, 2$ son dos gérmenes de aplicaciones holomorfas, distintos de la identidad, asociados a la monodromía de $H_{\rho,0}$, entonces existe un camino cerrado $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma \setminus \{0, 1, \rho, \infty\}$ basado en y_0 de manera que existe la prolongación analítica de h_1 a lo largo de α y coincide con h_2 . Pongamos

$\underline{f}_* h_i = \mathcal{T}_{a_i}$ con $a_i \in \Gamma$ y $p = \underline{f}(y_0)$. Si "traducimos" la igualdad (7.2) a P obtenemos la siguiente información sobre el camino α buscado: el camino $\delta = \underline{f}^\alpha(\alpha)$ verifica que

$$A_{p+a_1}(\delta + a_1) - A_p(\delta) = a_2 - a_1. \quad (7.9)$$

Se concluye la demostración a partir del siguiente resultado. \square

Proposición 7.26. *Dados $y_0 \in U$, $a_0, a_1 \in \Gamma \setminus \{0\}$, $p = \underline{f}(y_0)$, de manera que $p+a_0, p+a_1 \in P$ entonces existe un camino cerrado, α , empezando en y_0 y evitando $0, 1, \rho, \infty$ de manera que $\delta = \underline{f}^\alpha(\alpha)$ verifica $A_{p+a_0}(\delta + a_0) - A_p(\delta) = a_1 - a_0$.*

Demostración. En primer lugar observemos que el que α sea cerrado equivale a que $\delta(0) = \delta_P(1)$ pues $\delta(0) = \underline{f}(\alpha(0)) = \underline{f}(\alpha(1)) = \underline{f}^\alpha(\alpha(1)) - a_\delta(1) = \delta(1) - A_p(\delta) = \delta_P(1)$. Por otra parte, la igualdad $A_p(\delta + a_0) - A_p(\delta) = a_1 - a_0$ es equivalente a $(\delta + a_0)_P(1) - \delta_P(1) = a_1$. Definimos entonces la función $b(\delta, a_0) = (\delta + a_0)_P(1) - \delta_P(1)$. Necesitamos estudiar cómo se comporta b con la composición de caminos.

Lema 7.27. *Sean $p \in P$, $a_0 \in \Gamma$, $\delta_1 \in \mathcal{A}_p$ y $\delta_2 \in \mathcal{A}_q$ tales que $\delta_1(1) = q$, $p + a_0 \in P$ y $p + A_p(\delta_1) \in P$ entonces $b(\delta_1 \cdot \delta_2, a_0) = b(\delta_2 + A_p(\delta_1), b(\delta_1, a_0))$.*

Demostración. Tenemos que $b(\delta_1 \cdot \delta_2, a_0)$ es igual a

$$(\delta_1 \cdot \delta_2 + a_0)_P(1) - (\delta_1 \cdot \delta_2)_P(1) = (\delta_2 + a_0 + A_{p+a_0}(\delta_1 + a_0))_P(1) - (\delta_2 + A_p(\delta_1))_P(1) \quad (7.10)$$

Por otra parte, como

$$\begin{aligned} A_{p+a_0}(\delta_1 + a_0) &= (\delta_1 + a_0)_P(1) - (q + a_0) = b(\delta_1, a_0) + (\delta_1)_P(1) - q - a_0 \\ &= A_p(\delta_1) + b(\delta_1, a_0) - a_0, \end{aligned}$$

tenemos que (7.10) es igual a

$$(\delta_2 + A_p(\delta_1) + b(\delta_1, a_0))_P(1) - (\delta_2 + A_p(\delta_1))_P(1) = b(\delta_2 + A_p(\delta_1), b(\delta_1, a_0)).$$

\square

Utilizaremos también el siguiente resultado.

Lema 7.28. *Dados p, q, r tres puntos distintos en P de manera que $a_0 = q - p$, $a_1 = r - p \in \Gamma$ y se verifique que, o bien $a_1 - a_0 \in \{\pm e_1, \pm e_2\}$, o bien p, q, r estén en tres cuadrados adyacentes de P entonces existe un camino $\delta \in \mathcal{A}_p$ cumpliendo*

$$\delta_P(1) = p \quad y \quad (\delta + a_0)_P(1) = r.$$

Demostración. La prueba es completamente análoga aunque bastante más laboriosa que la del Lema 7.20 y consiste en analizar por separado las diferentes situaciones que se pueden presentar, de acuerdo a en qué regiones de P se encuentren p, q y r , por lo que vamos a omitirla aquí. \square

Para terminar la demostración de la Proposición 7.26 notemos que existen puntos $p_0 = q, p_1, \dots, p_n = r$ de P de manera que $p_j = p_{j-1} \pm e_{i(j)} = p_j = p + a'_j$. Observemos que $a'_0 = a_0$ y $a'_n = a_1$. Vamos a definir una serie de caminos $\delta_j \in \mathcal{A}_p$ siguiendo el orden $j = 1, \dots, n$. Si p, p_{j-1} y p_j son tres puntos diferentes, es decir, si $a'_{j-1}, a'_j \neq 0$, entonces aplicando el Lema 7.28 obtenemos un camino $\delta_j \in \mathcal{A}_p$ tal que $(\delta_j)_P(1) = p$ y $(\delta_j + a'_{j-1})_P(1) = p_j$. Si existe algún $j = 1, \dots, n$ tal que $\text{card} \{p, p_j, p_{j-1}\} < 3$ consideramos j_0 el mínimo de ellos. Entonces $p = p_{j_0}$. En efecto, si $p = p_{j_0-1}$ entonces en el anterior paso de la estrategia tendríamos que $\text{card} \{p, p_{j_0-2}, p_{j_0-1}\} < 3$ por lo que j_0 no sería mínimo. En este caso, $p = p_{j_0}$, ponemos $\delta_{j_0} \equiv p$, el camino constante p , y aplicamos el Lema 7.28 a los puntos p, p_{j_0-1} y p_{j_0+1} para obtener el camino δ_{j_0+1} . A partir de aquí, para $j > j_0 + 1$ los puntos p, p_{j-1}, p_j son diferentes y volvemos a aplicar el Lema 7.28 a éstos, obteniendo los restantes $\delta_j \in \mathcal{A}_p$ de manera que $(\delta_j)_P(1) = p$ y $(\delta_j + a'_{j-1})_P(1) = p_j$. La última igualdad, utilizando la primera, es equivalente a $b(\delta_j, a'_{j-1}) = a'_j$. Definamos ahora $\tilde{\delta}_1 = \delta_1, \tilde{\delta}_j = \delta_j - p + \tilde{\delta}_{j-1}(1)$ para $j > 1$ y $\delta = \tilde{\delta}_1 \cdot \tilde{\delta}_2 \cdots \tilde{\delta}_n$. Veamos que $\delta \in \mathcal{A}_p$ cumple que $\delta_P(1) = p$ y además $b(\delta, a_0) = a'_n = a_1$. Para ello razonemos por inducción sobre n . Para $n = 1$ tenemos que por construcción $(\tilde{\delta}_1)_P(1) = p$ y $b(\tilde{\delta}_1, a_0) = a'_1$. Supongamos ahora, por hipótesis de inducción, que $(\tilde{\delta}_1 \cdot \tilde{\delta}_2 \cdots \tilde{\delta}_{n-1})_P(1) = p$ y $b(\tilde{\delta}_1 \cdot \tilde{\delta}_2 \cdots \tilde{\delta}_{n-1}, a_0) = a'_{n-1}$, entonces, aplicando el Lema 7.27, tenemos que

$$b(\delta, a_0) = b(\tilde{\delta}_n + A_p(\tilde{\delta}_1 \cdot \tilde{\delta}_2 \cdots \tilde{\delta}_{n-1}), b(\tilde{\delta}_1 \cdot \tilde{\delta}_2 \cdots \tilde{\delta}_{n-1}, a_0)) = b(\delta_n, a'_{n-1}) = a'_n$$

pues

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_n + A_p(\tilde{\delta}_1 \cdot \tilde{\delta}_2 \cdots \tilde{\delta}_{n-1}) &= \delta_n - p + \tilde{\delta}_{n-1} + (\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_{n-1})_P(1) - (\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_{n-1})(1) \\ &= \delta_n - p + \tilde{\delta}_{n-1}(1) + p - \tilde{\delta}_{n-1}(1) = \delta_n. \end{aligned}$$

\square

7.3.3 La involución geométrica

Fijemos $W \subset \Sigma$ un pequeño entorno simplemente conexo de ∞ y pongamos \underline{f}^W la prolongación analítica de un germen de f a W , ello es posible pues ∞ no es una singularidad de f . Además podemos hacer la elección de tal manera que $\underline{f}^W(\infty) = 0$. Tal y como vimos en la sección 7.3.1 el desarrollo en serie de \underline{f}^W en la variable $Y = \frac{1}{y}$ es el siguiente:

$$\underline{f}^W\left(\frac{1}{Y}\right) = -\frac{1}{2}Y^2 - \frac{1}{3}(\rho + 1)Y^3 + \cdots = Y^2 \underbrace{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}(\rho + 1)Y + \cdots\right)}_{\psi(Y)}.$$

Como $\psi(0) \neq 0$ existe un entorno W de $Y = 0$ de manera que ψ no se anula en W , y por tanto existe una determinación bien definida de $\sqrt{\psi(Y)}$. Definimos $\varphi(Y) = Y\sqrt{\psi(Y)}$. Como $\varphi'(0) = \sqrt{-\frac{1}{2}} \neq 0$, restringiendo W si es necesario podemos suponer que φ es inyectiva en W .

Sea $\tilde{W} = W \times \{Y = 0\}$ y L una hoja de \mathcal{F} . Entonces podemos caracterizar la intersección de L con Σ en el entorno \tilde{W} como

$$(L \cap \tilde{W}) \cap \Sigma = \{(x_0, Y) \in \Sigma \times W \mid \varphi(Y)^2 = c'\}.$$

Por lo que las hojas de \mathcal{F} cortan dos veces a Σ en el abierto \tilde{W} . De hecho, si $(x_0, Y_0) \in L \cap \tilde{W} \cap \Sigma$ entonces $(x_0, \varphi^{-1}(-\varphi(Y_0)))$ también pertenece a $L \cap \tilde{W} \cap \Sigma$.

Definición 7.29. Definimos la involución geométrica $h_\infty : (W, \infty) \rightarrow (W, \infty)$ de \mathcal{F} como aquella que intercambia los dos puntos de una hoja que están sobre $W \subset \Sigma$. Alternativamente, podemos describir h_∞ analíticamente en la coordenada Y mediante la fórmula $h_\infty(Y) = \varphi^{-1}(-\varphi(Y))$.

Observación 7.30. La involución h_∞ está definida para toda foliación de Riccati generalizada de grado 3 (ya que en todas ellas se tiene una tangencia simple de las hojas de la foliación con la recta $\{y = \infty\}$). Más generalmente, a toda foliación de Riccati generalizada de grado d le podemos asociar un germen de aplicación $(d-1)$ -periódica pues en un entorno de la recta $\{y = \infty\}$ las hojas de la foliación localmente son como las curvas de nivel de la función $y^{d-1} - x$. Conjeturamos que dicha involución generalizada domina la prolongación analítica de la holonomía en el sentido que precisamos a continuación.

Conjetura 7.31. Sea \mathcal{F} una foliación de Riccati generalizada en $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ y Σ una fibra vertical no invariante. Si la 'involución' h_∞ determina una S -función entonces toda la holonomía generalizada de \mathcal{F} es una S -función.

Centrémonos en el ejemplo que nos ocupa:

Proposición 7.32. El punto ∞ es un punto regular de la S -función h determinada por la involución h_∞ .

Demostración. Veamos en primer lugar que ∞ no es un punto de ramificación de ningún germen de holonomía $h : (W, y_0) \rightarrow (\Sigma, y_1)$, es decir que si α un camino cerrado en W empezando y acabando en y_0 entonces la prolongación analítica de h a lo largo de α acaba con el mismo germen h . Escribamos $\varphi(\frac{1}{y_0}) = re^{2\pi it_0}$ y consideremos el camino $\alpha(t) = \frac{1}{\varphi^{-1}(re^{2\pi i(t+t_0)})}$, $t \in [0, 1]$. Cualquier otro camino contenido en W que de una vuelta a ∞ es homótopo a α en $W \setminus \{\infty\}$. Veamos que la prolongación analítica del germen h vuelve a dar la misma determinación. Si al inicio $h = \underline{f}^{-1}(\underline{f} + a_0)$, entonces la relación (7.9) implica que la prolongación analítica de h se escribe como $\underline{f}^{-1}(\underline{f} + a_1)$, con $a_1 =$

$a_0 + A_{p+a_0}(\delta + a_0) - A_p(\delta)$, donde $\delta(t) = \underline{f}^\alpha(\alpha(t)) = r^2 e^{4\pi i(t+t_0)}$ y $p = \underline{f}(y_0) = r^2 e^{4\pi i t_0}$. Ahora bien, $A_p(\delta) = \delta_P(1) - \delta(1) = 0$, cf. Figura 7.9. Y el mismo argumento muestra que $A_{p+a_0}(\delta + a_0) = 0$. Por tanto, $a_1 = a_0$.

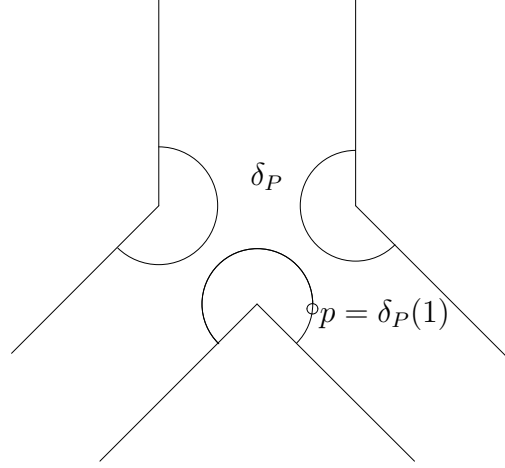


Figura 7.9: El camino δ_P .

Para el germen h_∞ ya sabemos que ∞ es regular, sea $h \neq h_\infty$ otro germen de holonomía centrado en $y_0 \in W$. Supongamos que $y_0 \in S_0$ y que $h = \underline{f}^{-1}(\underline{f} + a_0)$, entonces existe $\lim_{y \rightarrow \infty, y \in S_0} h(y) = \underline{f}^{-1}(a_0) \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \rho\}$. Sean $y_1 \in S_1$, α_1 un camino contenido en W que empieza en y_0 y acaba en y_1 y consideremos la prolongación analítica de h a lo largo de α_1 , que escribimos en un entorno de y_1 como $\underline{f}^{-1}(\underline{f} + a_1)$. Se tiene entonces que $a_1 = a_0 - e_1$, cf. Figura 7.10. Así, tenemos que $\lim_{y \rightarrow \infty, y \in S_1} h(y) = \underline{f}^{-1}(e_1 + a_1) = \underline{f}^{-1}(a_0)$. Y análogamente, $\lim_{y \rightarrow \infty, y \in S_2} h(y) = \underline{f}^{-1}(a_0)$. Por tanto, h es continua en W y holomorfa (es decir, univaluada) en $W \setminus \{\infty\}$ porque hemos mostrado antes que ∞ no era un punto de ramificación de ningún germen de holonomía. Por el Teorema de Extensión de Riemann, h es holomorfa en todo W , y por tanto ∞ es un punto regular para el germen h . \square

Proposición 7.33. *Los puntos $0, 1, \rho$ son regulares para la S -función de holonomía generalizada h , por tanto se tiene que*

$$\text{Sing}(h) = \underline{f}^{-1}(\Gamma) = L_\infty \cap \Sigma,$$

donde, como antes, L_∞ denota la hoja de $\mathcal{F}_{\rho,0}$ que es tangente a Σ en el punto del infinito.

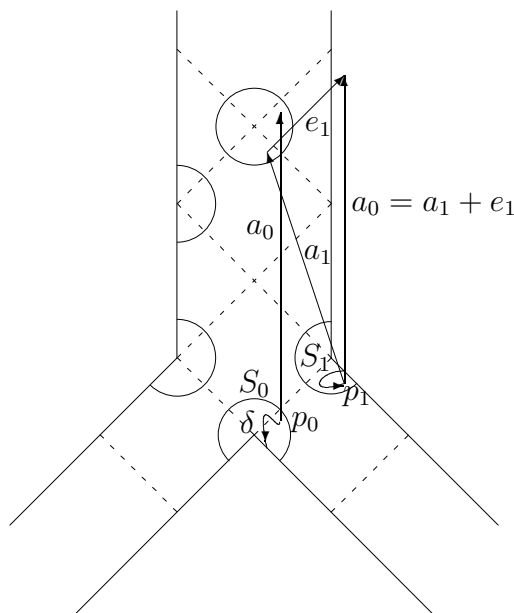


Figura 7.10: Prolongación analítica de h a lo largo de α_1 con $\delta = \underline{f}(\alpha_1)$ uniendo $p_0 = \underline{f}(y_0)$ y $p_1 = \underline{f}(y_1)$.

Demostración. Vamos a estudiar ahora el comportamiento de la holonomía en los puntos $0, 1, \rho$. Como las tres situaciones son análogas sólo trataremos el punto 0 . Fijemos por ejemplo $W_0 = \underline{f}^{-1}(P \cap \{\text{Im } y > 2\pi\})$ un entorno de 0 . Por definición, 0 es un punto regular de h si para cualquier germe de holonomía h_0 en $y_0 \in W_0$ y cualquier camino $\alpha : [0, 1) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \rho\}$, tal que $\alpha(0) = y_0$ y $\lim_{t \rightarrow 1} \alpha(t) = 0$, existe $\varepsilon > 0$ cumpliendo que la prolongación analítica $h_{1-\varepsilon}$ del germe h_0 a lo largo del camino $\alpha|_{[0, 1-\varepsilon]}$, define una función univaluada en W_0 . Escribimos $h_0(y) = \underline{f}^{-1}(\underline{f}(y) + a_0)$ en un entorno de y_0 . Si $\delta = \underline{f}^\alpha(\alpha)$, tenemos que la prolongación analítica de h_0 a lo largo de $\alpha|_{[0, 1-\varepsilon]}$ viene dada en un entorno de $\alpha(t)$ por $y \mapsto \underline{f}^{-1}(\underline{f}(y) + a_0 + a_{\delta+a_0}(t) - a_\delta(t))$. Ahora bien, como $\text{Im } \underline{f}(\alpha(t))$ tiende a infinito cuando t tiende a 1 , llega un momento, para $t = 1 - \varepsilon$, a partir del cual las partes imaginarias de δ_P y $(a_0 + \delta)_P$ también tienden a infinito. Llegados a este punto, estos caminos no dan vueltas alrededor de $0, e_1$ ni e_2 , por lo que ya no hay cambios de determinación en la prolongación analítica $h_{1-\varepsilon}$ restringida a un entorno de $y_1 \in W_0$. Sin

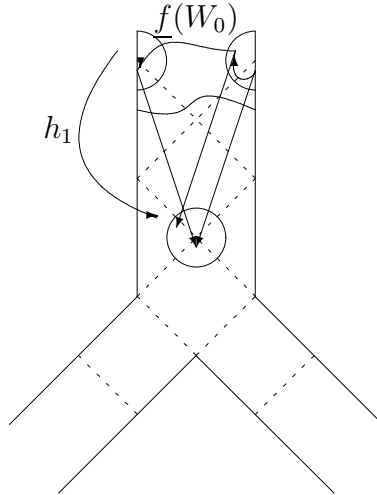


Figura 7.11: El germe h_1 es univaluado en W_0 .

pérdida de generalidad, podemos suponer que $h_{1-\varepsilon}(y_1)$ también pertenece a W_0 . Veamos que $h_{1-\varepsilon}$ define una función holomorfa univaluada en W_0 . En primer lugar, la prolongación analítica de $h_{1-\varepsilon}$ a lo largo de caminos contenidos en $W_0 \setminus \{0\}$ define una función holomorfa en $W_0 \setminus \{0\}$ pues la monodromía de $h_{1-\varepsilon}$ respecto de 0 es la identidad, cf. Figura 7.11. Por otra parte, si $y \in W_0 \setminus \{0\}$ tiende a 0 entonces tanto $\text{Im } \underline{f}(y)$ como $\text{Im } (\underline{f}(y) + a_1)$ tienden a infinito, por lo que $h_{1-\varepsilon}(y)$ tiende a su vez a 0. Por el Teorema de Extensión de Riemann concluimos que $h_{1-\varepsilon} : W_0 \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa. \square

7.3.4 El caso $\lambda \neq 0$

En este caso $g_\lambda(x) = \frac{1}{x} + \lambda \log x$ es una función multivaluada de monodromía aditiva dada por el subgrupo $\Lambda = 2i\pi\lambda\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$. Además, $g'_\lambda(x) = \frac{1-\lambda x}{x^2}$, por lo que g_λ no es inyectiva. Por el Teorema 7.13 tenemos que las singularidades de g_λ^{-1} son $g_\lambda((g'_\lambda)^{-1}(0))$, es decir,

$$\text{Sing}(g_\lambda^{-1}) = \underbrace{\lambda(1 - \log \lambda)}_{g_\lambda(1/\lambda)} + \Lambda, \tag{7.11}$$

donde \underline{g}_λ denota la determinación de g_λ en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ que cumple $\underline{g}_\lambda(1) = 1$. De ahora en adelante haremos la siguiente hipótesis suplementaria sobre la "posición relativa" de Λ y Γ como subgrupos de \mathbb{C} :

$$\Gamma \cap \Lambda = 0. \tag{7.12}$$

Bajo esta suposición, adaptaremos los resultados del caso $\lambda = 0$ a la nueva situación.

Teorema 7.34. *Toda la holonomía generalizada de $\mathcal{F}_{\rho,\lambda}$, con λ verificando (7.12), está formada por gérmenes de holonomía.*

Demostración. Gracias a la Proposición 7.7 es suficiente ver que si $h : (\Sigma, y_0) \rightarrow (\Sigma, y_1)$ es un germen asociado a la monodromía de $H_{\rho,\lambda}$, i.e. tal que $\underline{f}_* h = \mathcal{T}_{a+b}$, $a \in \Gamma$, $b \in \Lambda$, entonces existe un camino γ en la hoja de $\mathcal{F}_{\rho,\lambda}$ por (x_0, y_0) , comenzando en dicho punto y con final en (x_0, y_1) , ya que el Lema 7.4 implicará entonces que $h = h_\gamma$. Omitiremos el subíndice λ en g y reservaremos la notación g_c para referirnos a la función $g + c$. Sea $\beta_1(t)$ un camino cerrado en \mathbb{C}^* basado en x_0 de índice $\frac{b}{2\pi i \lambda}$ respecto de $x = 0$. Pongamos $c = \underline{H}(x_0, y_0) = \underline{f}(y_0) - \underline{g}(x_0)$, $\varepsilon = \underline{g}^{\beta_1}(\beta_1) + c$ y $\beta_2 := \underline{f}^{-1}(\varepsilon_P)$. Por construcción, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ es un camino comenzando en (x_0, y_0) contenido en la hoja de \mathcal{F} por dicho punto. Por tanto, $\underline{f}(\beta_2(1)) = \varepsilon_P(1) = \underline{f}(y_0) + a'$ con $a' \in \Gamma$. De hecho, $\underline{f}_* h_\beta = \mathcal{T}_{a'+b}$. Denotando por $p = \underline{f}(y_0)$ y $q = \varepsilon_P(1) = p + a'$ veremos en el Lema 7.35 que existe un camino $\delta \in \mathcal{C}_q$ tal que $A_q(\delta) = a - a'$ y δ es homótopo a constante en $\mathbb{C} \setminus (c + \underline{g}(1/\lambda) + a' + \Lambda)$. Por tanto, el camino $\alpha_1 = (\underline{g}_c^{-1})^\delta(\delta)$ es cerrado, basado en x_0 . Definimos el camino $\alpha_2 := \underline{f}^{-1}(\delta_P)$ que empieza en $\underline{f}^{-1}(q) = \beta_2(1)$. Finalmente, definimos $\gamma = (\beta_1 \cdot \alpha_1, \beta_2 \cdot \alpha_2)$, el cual es un camino continuo contenido en la hoja por (x_0, y_0) y tal que

$$M_H(\gamma) = M_f(\beta_2 \cdot \alpha_2) + M_g(\beta_1 \cdot \alpha_1) = \underbrace{M_f(\beta_2)}_{a'} + \underbrace{M_f(\alpha_2)}_{A_q(\delta)=a-a'} + \underbrace{M_g(\beta_1)}_b + \underbrace{M_g(\alpha_1)}_0 = a + b.$$

□

Lema 7.35. *Sean $p \in P$, $a \in \Gamma$ tales que $p + a \in P$ y $c \in \mathbb{C}$, entonces existe un camino $\delta \in \mathcal{C}_p$ tal que $A_P(\delta) = a$ y δ es homótopo a constante en $\mathbb{C} \setminus (c + \Lambda)$.*

Demostración. En la Proposición 7.21 se construye un $\delta \in \mathcal{C}_p$ tal que $A_p(\delta) = a$ de manera recurrente: $\delta = \tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_n$, $\tilde{\delta}_i = \delta_i + p_{i-1} - p$, con los $\delta_i \in \mathcal{C}_{p_{i-1}}$ construidos en el Lema 7.20 de manera que sólo den vueltas a puntos de $\Omega = \{0, e_1, e_2\}$; por tanto, $\tilde{\delta}_i$ sólo dan vueltas a puntos de $\Omega_i = p\vec{p}_{i-1} + \Omega$. Como $\Gamma \cap \Lambda = 0$ sólo se pueden presentar dos situaciones:

- Para todo i , $\Omega_i \cap (c + \Lambda) = \emptyset$, con lo que los $\tilde{\delta}_i$ anteriores ya van bien.
- Existe un único i de manera que $\Omega_i \cap (c + \Lambda) = \{b\}$. En este caso necesitamos refinar el Lema 7.20 para obtener un nuevo $\tilde{\delta}'_i$ homótopo a constante en $\mathbb{C} \setminus (c + \Lambda)$ y verificando $A_p(\tilde{\delta}'_i) = A_p(\tilde{\delta}_i)$:

Variante del Lema 7.20: *Sean $p \in P$, $a \in \{\pm e_1, \pm e_2\}$ tales que $p + a \in P$ y $b \in \{0, e_1, e_2\}$, entonces existe $\delta \in \mathcal{C}_p$ tal que $A_p(\delta) = a$ y δ es homótopo a constante en $\mathbb{C} \setminus \{b\}$.*

La demostración es análoga.

□

Utilizando el mismo tipo de técnicas se puede demostrar la siguiente propiedad:

Proposición 7.36. *Sean h_1, h_2 dos gérmenes de aplicaciones holomorfas de Σ asociados a la monodromía de $H_{\rho, \lambda}$ con $\underline{f}_* h_i = \mathcal{T}_{c_i}$, $c_i = a_i + b_i \in \Gamma \oplus \Lambda$. Si Λ verifica la igualdad (7.12) entonces h_1 y h_2 son equivalentes (i.e. son prolongación analítica uno de otro) si y sólo si se verifican las siguientes condiciones*

- (1) $b_1 = b_2$,
- (2) y si $b_1 = b_2 = 0$ entonces $a_1 = 0 \Leftrightarrow a_2 = 0$.

Podemos reformular dicha propiedad de la siguiente manera:

Teorema 7.37. *La holonomía generalizada de $\mathcal{F}_{\rho, \lambda}$, con λ verificando (7.12), tiene una infinidad de componentes conexas. Más precisamente, todo germen de holonomía h con $\underline{f}_* h = \mathcal{T}_{a+b}$, $a \in \Gamma$ y $b \in \Lambda$ pertenece a la componente conexa de*

- (1) la identidad si $a = b = 0$,
- (2) la involución h_∞ si $b = 0$ y $a \neq 0$,
- (3) la holonomía de la elevación de un camino en \mathbb{C}^* de índice $n \in \mathbb{Z}^*$ respecto del origen si $b = 2i\pi\lambda n$.

Bibliografía

- [Abd97] M. N. Abdulrahim, *Complex specializations of the reduced Gassner representation of the pure braid group.*, Proc. Am. Math. Soc. **125** (1997), no. 6, 1617–1624 (English).
- [Bir74] J. S. Birman, *Braids, links, and mapping class groups*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1974, Annals of Mathematics Studies, No. 82.
- [BLL97] M. Belliard, I. Liousse, and F. Loray, *Sur l'existence de points fixes attractifs pour les sous-groupes de $\text{Aut}(\mathbb{C}, 0)$* , C.R. Acad. Sci. Paris, Srie I **324** (1997), 443–446.
- [BLL99] M. Belliard, I. Liousse, and F. Loray, *Absolute transitivity on non solvable dynamics fixing $0 \in \mathbb{C}$* , Pub. Irma, Lille, Vol. 49, NIV, 1999.
- [BPV84] W. Barth, C. Peters, and A. van de Ven, *Compact complex surfaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [Bru97] M. Brunella, *Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **30** (1997), no. 5, 569–594.
- [BZ85] G. Burde and H. Zieschang, *Knots*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1985.
- [CLNS84] C. Camacho, A. Lins Neto, and P. Sad, *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*, J. Differential Geom. **20** (1984), no. 1, 143–174.
- [CaSa82] C. Camacho and P. Sad, *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*, Ann. of Math. (2) **115** (1982), no. 3, 579–595.
- [CeSa86] D. Cerveau and P. Sad, *Problèmes de modules pour les formes différentielles singulières dans le plan complexe*, Comment. Math. Helv. **61** (1986), no. 2, 222–253.

- [CaSc95] C. Camacho and A. Scárdua, *The transcendence of solutions of complex differential equations*, Ecuaciones Diferenciales. Singularidades, Universidad de Valladolid, 1995, pp. 79–102.
- [Ghy00] E. Ghys, *À propos d'un théorème de J.-P. Jouanolou concernant les feuilles fermées des feuilletages holomorphes*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **49** (2000), no. 1, 175–180.
- [GM87] X. Gómez-Mont, *Universal families of foliations by curves*, Astérisque (1987), no. 150-151, 109–129, 186, Singularités d'équations différentielles (Dijon, 1985).
- [GM89a] X. Gómez-Mont, *Holomorphic foliations in ruled surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **312** (1989), no. 1, 179–201.
- [GM89b] X. Gómez-Mont, *Unfoldings of holomorphic foliations*, Publ. Mat. **33** (1989), no. 3, 501–515.
- [GMOB89] X. Gómez-Mont and L. Ortíz-Bobadilla, *Sistemas dinámicos holomorfos en superficies*, Sociedad Matemática Mexicana, México City, 1989.
- [GMSV91] X. Gómez-Mont, J. Seade, and A. Verjovsky, *The index of a holomorphic flow with an isolated singularity*, Math. Ann. **291** (1991), no. 4, 737–751.
- [Gri74] M. C. Grima, *La monodromie rationnelle ne détermine pas la topologie d'une hypersurface complexe*, 580–602. Lecture Notes in Math., Vol. 409.
- [GS72] R. Gérard and A. Sec, *Feuilletages de Painlevé*, Bull. Soc. Math. France **100** (1972), 47–72.
- [Guc70] J. Guckenheimer, *On holomorphic vector fields on $\mathbb{C}P(2)$* , An. Acad. Brasil. Ci. **42** (1970), 415–420.
- [Guc72] J. Guckenheimer, *Hartman's theorem for complex flows in the Poincaré domain*, Compositio Math. **24** (1972), 75–82.
- [Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [Hei54] M. Heins, *The set of asymptotic values of an entire function*, Tofte Skandinaviska Matematikerkongressen, Lund, 1953, Lunds Universitets Matematiska Institution, Lund, 1954, pp. 56–60.
- [Ily78] Y. S. Ilyashenko, *Topology of phase portraits of analytic differential equations on a complex projective plane*, Trudy Sem. Petrovsk. (1978), no. 4, 83–136.

- [JS87] G. A. Jones and D. Singerman, *Complex functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987, An algebraic and geometric viewpoint.
- [Kho95] A. G. Khovanskii, *Topological obstructions to the representability of functions by quadratures*, J. Dynam. Control Systems **1** (1995), no. 1, 91–123.
- [Kie36] S. Kierst, *Sur l'ensemble des valeurs asymptotiques d'une fonction méromorphe dans le cercle unité*, Fund. Math. **27** (1936), 226–233.
- [Kla74] B. Klarès, *Étude des champs de vecteurs holomorphes sur les variétés obtenues par éclatements successifs de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. Problème de la stabilité structurelle*, 465–492. Lecture Notes in Math., Vol. 409.
- [Lad79] N. N. Ladis, *Integral curves of complex homogeneous equations*, Differential Equations **15** (1979), no. 2, 167–171.
- [LN87] A. Lins Neto, *Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two*, J. Differential Geom. **26** (1987), no. 1, 1–31.
- [LNSS98] A. Lins Neto, P. Sad, and B. Scárdua, *On topological rigidity of projective foliations*, Bull. Soc. Math. France **126** (1998), no. 3, 381–406.
- [Lon86] D. D. Long, *A note on the normal subgroups of mapping class groups*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **99** (1986), 79–87.
- [Lor94] F. Loray, *Feuilletages holomorphes à holonomie résoluble*, Ph.D. thesis, Université de Rennes I, 1994.
- [Lor95] F. Loray, *Rigidité topologique pour des singularités de feuilletages holomorphes*, Ecuaciones Diferenciales. Singularidades, Universidad de Valladolid, 1995, pp. 213–234.
- [Lor99] F. Loray, *Reduction formelle des singularités cuspidales de champs de vecteurs analytiques. (Formal reduction of cuspidal singularities of analytic vector fields)*, J. Differ. Equations **158** (1999), no. 1, 152–173 (French).
- [LS77] R. C. Lyndon and P. E. Schupp, *Combinatorial group theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 89.
- [Mal76] B. Malgrange, *Frobenius avec singularités. I. Codimension un*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1976), no. 46, 163–173.
- [Mat91] J. F. Mattei, *Modules de feuilletages holomorphes singuliers. I. Équisingularité*, Invent. Math. **103** (1991), no. 2, 297–325.

- [Mat00] J. F. Mattei, *Quasi-homogénéité et équiréductibilité de feuilletages holomorphes en dimension deux*, Astérisque (2000), no. 261, xix, 253–276, Géométrie complexe et systèmes dynamiques (Orsay, 1995).
- [Maz31] S. Mazurkiewicz, *Sur les points singuliers d'une fonction analytique*, Fund. Math. **17** (1931), 26–29.
- [MKS66] W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar, *Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations*, Interscience Publishers [John Wiley & Sons, Inc.], New York-London-Sydney, 1966.
- [MM80] J. F. Mattei and R. Moussu, *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **13** (1980), no. 4, 469–523.
- [MN94] J. F. Mattei and M. Nicolau, *Equisingular unfoldings of foliations by curves*, Astérisque (1994), no. 222, 6, 285–302, Complex analytic methods in dynamical systems (Rio de Janeiro, 1992).
- [Mou85] R. Moussu, *Holonomie évenescence des équations différentielles dégénérées transverses*, Singularities and dynamical systems (Iraklion, 1983), North-Holland, Amsterdam, 1985, pp. 161–173.
- [Nak94] I. Nakai, *Separatrices for nonsolvable dynamics on $(\mathbf{C}, 0)$* , Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **44** (1994), no. 2, 569–599.
- [Pai1897] M. P. Painlevé, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, Librairie scientifique A. Hermann, 1897, Leçons professées à Stockholm, 1895.
- [Seg81] S. L. Segal, *Nine introductions in complex analysis*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1981, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 80.
- [Sei68] A. Seidenberg, *Reduction of singularities of the differential equation $A dy = B dx$* , Amer. J. Math. **90** (1968), 248–269.
- [Shc84] A. A. Shcherbakov, *Topological and analytic conjugation of noncommutative groups of germs of conformal mappings*, Trudy Sem. Petrovsk. (1984), no. 10, 170–196, 238–239.
- [Sul85] D. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. II. Structural stability implies hyperbolicity for Kleinian groups*, Acta Math. **155** (1985), no. 3-4, 243–260.
- [SV97] J. Seade and A. Verjovsky, *Invariance topologique de la classe d'Euler pour des feuilletages singuliers*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325** (1997), no. 6, 645–648.

- [Tur00] V. Turaev, *Faithful linear representations of the braid groups*, Séminaire Bourbaki, 1999-00, n 878, juin 2000.
- [Wir98] B. Wirtz, *Fixed points and entropy for nonsolvable dynamics on $\mathbf{C}, 0$* , Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **29** (1998), no. 1, 53–74.
- [ZVC80] H. Zieschang, E. Vogt, and H.-D. Coldewey, *Surfaces and planar discontinuous groups*, Springer, Berlin, 1980, Translated from the German by John Stillwell.