

## **CAPÍTULO 4. COSTES FIJOS Y VALOR DE LA EMPRESA**

### **4.1 INTRODUCCIÓN**

El objetivo de este capítulo es introducir los costes fijos en el análisis del valor de la opción de responsabilidad limitada. Los pagos constantes a que dan lugar los costes fijos se asimilan a intereses sobre una deuda perpetua que denominamos *deuda estructural*. A partir de aquí, es posible crear una opción de responsabilidad limitada sobre esta deuda estructural. El ejercicio de esta opción tiene lugar cuando la empresa decide cesar en sus actividades por imposibilidad de asumir los costes fijos.

Esta modelización de los costes fijos conduce a estudiar las diferentes causas del cese de las actividades de la empresa, por una parte, y de la quiebra, por otra. En primer lugar, se estudia la interacción de los costes fijos con el valor de liquidación en una empresa no endeudada, poniéndose de relieve cómo la opción de abandonar puede englobar los efectos de los costes fijos y el valor de liquidación. A continuación, para una empresa endeudada se estudia la interacción entre la opción de responsabilidad limitada y la opción de abandonar. Aparecen tres casos: quiebra sin cese de actividades, cese sin quiebra y cese y quiebra simultáneos.

### **4.2 VALOR DEL ACTIVO Y DEUDA ESTRUCTURAL**

El método de la opción de venta perpetua que hemos aplicado al análisis del coste de la financiación puede igualmente utilizarse para estudiar el efecto de los costes fijos en el valor de la empresa. Los costes fijos obligan a realizar un pago permanente que sólo puede dejarse de satisfacer cesando la actividad de la empresa. Por tanto, los costes fijos pueden asimilarse a una deuda perpetua cuyo interés anual es precisamente el importe de

los costes fijos y sobre la que los accionistas gozan de la opción de responsabilidad limitada. Denominamos a esta deuda, *deuda estructural*. Para definir esta opción debemos definir previamente el valor del activo,  $A'$ , antes de la incidencia de los costes fijos, es decir, el valor actual de la renta que resulta de la diferencia entre ingresos y costes variables. Denominamos a este activo, *activo de coste variable*. Su valor, en el caso en que los valores esperados de los ingresos y los costes variables son constantes en un horizonte perpetuo, es:

$$A' = \frac{ING - CV}{\bar{R}_A} \quad (4.1)$$

donde:

$ING$  = ingresos variables

$CV$  = costes variables

$\bar{R}_A$  = rentabilidad exigida al activo

Siendo  $CF$  el importe anual de los costes fijos y  $r$  la tasa de interés de los activos libres de riesgo, el valor de la deuda estructural,  $DE$ , es:

$$DE = \frac{CF}{r} \quad (4.2)$$

El valor del activo después de la incidencia de los costes fijos se obtiene restando el valor de la deuda estructural del valor del activo de coste variable:

$$A = A' - DE \quad (4.3)$$

Proponemos asimilar el derecho de responsabilidad limitada de la deuda estructural que poseen los accionistas a una *opción de venta americana* de horizonte perpetuo sobre el activo  $A'$  y con un precio de ejercicio igual al valor nominal de la deuda estructural ( $EX=DE$ ).

Por tanto, el valor de la opción de responsabilidad limitada sobre la deuda estructural,  $ORL_{DE}$ , es:

$$ORL_{DE} = \frac{DE}{1+\gamma} \frac{A' (1+\gamma)^{-\gamma}}{\gamma DE} \quad (4.4)$$

debiéndose entender que calculamos el valor de esta opción antes de considerar los efectos del valor de liquidación e igualmente antes de introducir el endeudamiento ordinario.

Teniendo en cuenta la relación entre el valor del activo,  $A$ , y el valor del activo de coste variable,  $A'$ , podemos escribir:

$$ORL_{DE} = \frac{DE}{1+\gamma} \frac{(A+DE) (1+\gamma)^{-\gamma}}{\gamma DE} \quad (4.5)$$

y, normalizando para  $A=I$ , tenemos:

$$orl_{DE} = \frac{\xi}{1+\gamma} \frac{(1+\xi) (1+\gamma)^{-\gamma}}{\gamma \xi} \quad (4.6)$$

donde:

$$\xi = \frac{DE}{A} \quad (4.7)$$

### 4.3 COSTES FIJOS Y CESE DE LA ACTIVIDAD EMPRESARIAL

Para simplificar, comenzamos considerando el caso de una empresa sin deuda financiera, es decir, que se financia exclusivamente con fondos propios. Además, su valor de liquidación es cero y, por tanto, también es cero el valor de la opción de abandonar. La posición de los accionistas es la siguiente:

1. son propietarios del activo de coste variable,  $A'$ ;
2. se comprometen a pagar los costes fijos, es decir, asumen la deuda estructural; y
3. gozan del derecho de responsabilidad limitada en relación a la deuda estructural,  $ORL_{DE}$ .

Teniendo en cuenta el valor del activo que justifica el ejercicio anticipado de la opción de responsabilidad limitada, puede decirse que cuando el valor del activo resulte inferior o igual al siguiente:

$$\frac{\gamma DE}{1 + \gamma}$$

los accionistas de la empresa deciden el cese de sus actividades, pues el valor del activo no justifica continuar asumiendo el pago de los costes fijos. En este caso, el valor de la opción de responsabilidad limitada de la deuda estructural es:

$$ORL_{DE} = \frac{DE}{1 + \gamma} \quad (4.8)$$

Los accionistas se pueden encontrar ante tres escenarios, según el valor que tome el activo de coste variable,  $A'$ :

(I) Valor del activo de coste variable **superior** al valor del mismo activo que justifica el ejercicio anticipado de la opción de responsabilidad limitada de la deuda estructural.

(II) Valor del activo de coste variable **igual** al valor del mismo activo que justifica el ejercicio anticipado de la opción de responsabilidad limitada de la deuda estructural.

(III) Valor del activo de coste variable **inferior** al valor del mismo activo que justifica el ejercicio anticipado de la opción de responsabilidad limitada de la deuda estructural.

Los resultados de estos tres escenarios, quedan reflejados en el cuadro nº1.

**CUADRO nº 1: VALOR DE LAS ACCIONES DE UNA EMPRESA NO ENDEUDADA CON COSTES FIJOS Y SIN VALOR DE LIQUIDACIÓN**

	(I)	(II)	(III)
	$A' > \frac{\gamma DE}{1 + \gamma}$	$A' = \frac{\gamma DE}{1 + \gamma}$	$A' < \frac{\gamma DE}{1 + \gamma}$
ACTIVO	$A'$	$\frac{\gamma DE}{1 + \gamma}$	$A'$
DEUDA ESTRUCTURAL	$-DE$	$-DE$	$-DE$
OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA (deuda estructural)	$ORL_{DE}$	$\frac{DE}{1 + \gamma}$	$ORL_{DE}$
VALOR ACCIONES	$A' - DE + ORL_{DE}$	0	0

En este cuadro nº 1 se indica el valor de las acciones de una empresa no endeudada con costes fijos antes de introducir el efecto de la opción de abandonar. En el primer escenario (I), la empresa sigue su evolución normal. Los accionistas son propietarios del

activo, asumen el pago de los costes fijos y son propietarios de la opción de responsabilidad limitada sobre la deuda estructural. En el segundo escenario se refleja el cese de la actividad de la empresa: el valor del activo es igual al valor del activo que justifica el ejercicio anticipado de la opción de responsabilidad limitada de la deuda estructural, por lo que los accionistas ejercitan esta opción. El valor de las acciones deviene nulo y la empresa cesa en su actividad. El tercer escenario nunca se dará en un contexto eficiente.

#### **4.4 EL CESE DE LA ACTIVIDAD DE LA EMPRESA: COSTES FIJOS Y OPCIÓN DE ABANDONAR**

En este punto estudiamos la interacción entre los costes fijos y la existencia de la opción de abandonar, continuando con el caso de una empresa financiada exclusivamente con fondos propios.

La posición de los accionistas es la siguiente:

1. son propietarios del activo de coste variable,  $A'$ ;
2. se comprometen a pagar los costes fijos, es decir, asumen la deuda estructural;
3. gozan del derecho de la responsabilidad limitada sobre la deuda estructural,  
y
4. son propietarios de una opción de abandonar,  $OA$ .

El derecho de responsabilidad limitada sobre la deuda estructural puede integrarse en la opción de abandonar. Basta, para ello, definir la opción de abandonar como una *opción de venta perpetua* sobre el activo de coste variable,  $A'$ , cuyo precio de ejercicio

consiste en la suma del valor de liquidación y la deuda estructural. En el caso de una empresa sin deuda financiera, la posición de los accionistas equivale a:

1. tener la propiedad del activo de coste variable,
2. asumir el pago de los costes fijos, es decir, reconocer la deuda estructural como pasivo, y
3. ser propietarios de la opción de abandonar.

Designamos el valor de esta opción por  $OA'$ . Su activo subyacente,  $A'=A+DE$ , sigue el mismo proceso estocástico que el activo subyacente de la opción de abandonar estudiada en (3.2), por ser la diferencia entre ambos una constante,  $DE$ . Luego, el valor de  $OA'$  se obtiene sustituyendo en el valor de  $OA$  el nuevo activo subyacente y el nuevo precio de ejercicio:

$$OA' = \frac{VL + DE}{1 + \gamma} \frac{A' (1 + \gamma)^{-\gamma}}{\gamma (VL + DE)} \quad (4.9)$$

Sustituyendo  $A'$  por  $A+DE$  y normalizando para  $A = 1$ , tenemos:

$$oa' = \frac{v + \xi}{1 + \gamma} \frac{(1 + \xi) (1 + \gamma)^{-\gamma}}{\gamma (v + \xi)} \quad (4.10)$$

donde  $\xi = \frac{DE}{A}$ , como se ha definido en la ecuación (4.7).

El máximo valor del activo que justifica el ejercicio de la opción de abandonar y, por tanto, el cese de las actividades de la empresa es:

$$A' = \frac{\gamma}{1 + \gamma} (VL + DE) \quad (4.11)$$

Los accionistas pueden hallarse en uno de los tres escenarios siguientes:

(I) Valor del activo **superior** al valor del activo que justifica el ejercicio de la opción de abandonar:

$$A' > \frac{\gamma}{1 + \gamma} (VL + DE) \quad (4.12)$$

(II) Valor del activo **igual** al valor del activo que justifica el ejercicio de la opción de abandonar:

$$A' = \frac{\gamma}{1 + \gamma} (VL + DE) \quad (4.13)$$

(III) Valor del activo **inferior** al valor del activo que justifica el ejercicio de la opción de abandonar:

$$A' < \frac{\gamma}{1 + \gamma} (VL + DE) \quad (4.14)$$

En el cuadro nº 2 se describe la formación del valor de las acciones en estos tres escenarios.

**CUADRO nº 2: VALOR DE LAS ACCIONES DE UNA EMPRESA NO ENDEUDADA CON VALOR DE LIQUIDACIÓN Y COSTES FIJOS**

	(I)	(II)	(III)
	$A' > \frac{\gamma}{1 + \gamma} (VL + DE)$	$A' = \frac{\gamma}{1 + \gamma} (VL + DE)$	$A' < \frac{\gamma}{1 + \gamma} (VL + DE)$
ACTIVO DE COSTE VARIABLE	$A'$	$\frac{\gamma}{1 + \gamma} (VL + DE)$	$A'$
DEUDA ESTRUCTURAL	$-DE$	$-DE$	$-DE$
OPCIÓN DE ABANDONAR	$OA$	$\frac{1}{1 + \gamma} (VL + DE)$	$VL + DE - A'$
VALOR DE LAS ACCIONES	$A' - DE + OA$	$VL$	$VL$

En el escenario (I), la empresa sigue su evolución normal, los accionistas son propietarios del activo de coste variable, poseen la opción de abandonar y continúan asumiendo el pago de los costes fijos.

En el escenario (II), los accionistas cesan la actividad de la empresa ejercitando la opción de abandonar. Venden los activos percibiendo el valor de liquidación.

El escenario (III) nunca se dará en un contexto eficiente, ya que se habrá ejercitado la opción de abandonar cuando el valor del activo sea el máximo que justifica el ejercicio de esta opción. Su ineficiencia radica en que se ha asumido por más tiempo del necesario el pago de los costes fijos.

#### **4.4.1 LA RELEVANCIA DE INTRODUCIR LOS COSTES FIJOS EN LA OPCIÓN DE ABANDONAR**

Como conocemos por la ecuación (3.4), el valor del activo que provoca el ejercicio de la opción de abandonar antes de introducir explícitamente el papel de los costes fijos es:

$$A^{**} = \frac{\gamma}{1 + \gamma} VL \quad (4.15)$$

Recordando que el valor del activo ordinario consiste en la diferencia entre el valor del activo de coste variable y la deuda estructural ( $A = A' - DE$ ), podemos escribir:

$$A' = \frac{\gamma}{1 + \gamma} VL + DE \quad (4.16)$$

Sin embargo, la consideración explícita de los costes fijos y la integración de la opción de responsabilidad limitada de la deuda estructural en la opción de abandonar nos ha

conducido a establecer el siguiente valor del activo para el cese de las actividades de la empresa en la ecuación (4.12):

$$A' = \frac{\gamma}{1 + \gamma} (VL + DE) \quad (4.17)$$

de donde se deduce que la no consideración específica de los costes fijos da lugar a un cese prematuro de las actividades de la empresa. Concretamente, cuando los costes fijos no se incluyen en la opción de abandonar se decide el cese para un valor del activo que supera en  $\frac{DE}{1 + \gamma}$  unidades monetarias al valor del activo que justifica el ejercicio de la opción de abandonar cuando los costes fijos se toman en consideración.

#### 4.5 DEUDA FINANCIERA, COSTES FIJOS Y OPCIÓN DE ABANDONAR

La modelización mediante opciones de los efectos sobre el valor de la empresa de la deuda financiera, los costes fijos y el valor de liquidación permite analizar las causas y las consecuencias para accionistas y acreedores del cese de actividades y la quiebra de la empresa. Para llevar a cabo este objetivo, analizamos los diferentes casos que resultan de comparar el valor de liquidación, la deuda financiera y la deuda estructural.

Por razones similares a las expuestas en el apartado 4.3, cese y quiebra no siempre aparecen asociados. En el contexto que resulta de la introducción de los costes fijos, tres casos son posibles:

- Quiebra sin cese.
- Cese sin quiebra.

- Cese y quiebra simultáneos.

La incorporación de los costes fijos al modelo da lugar al caso de cese y quiebra simultáneos, que no existía en la situación expuesta en el apartado 4.3.

#### **4.5.1 QUIEBRA SIN CESE**

La declaración de quiebra sin cese de las actividades de la empresa se produce, según se ha visto en el apartado 4.3, cuando los accionistas deciden ejercer su opción de responsabilidad limitada para un valor del activo que resulta superior a aquél que justifica el cese. Para conocer el valor del activo que da lugar al ejercicio de la opción de responsabilidad limitada, tratándose de una opción de venta perpetua, es preciso conocer la varianza del activo subyacente. En consecuencia, abordamos el estudio del caso de quiebra sin cese analizando en primer lugar el activo subyacente y determinando el valor de la opción. A continuación, estudiamos los diversos escenarios en que pueden hallarse accionistas y acreedores.

##### **4.5.1.1 VALOR DE LA OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA CON OPCIÓN DE ABANDONAR CUANDO SE CONSIDERAN LOS COSTES FIJOS**

En este caso, la opción de responsabilidad limitada consiste en una opción de venta cuyo activo subyacente,  $AS$ , viene dado por la suma del activo ( $A=A'-DE$ ) con la opción de abandonar que incorpora el efecto de los costes fijos,  $OA'$ :

$$AS = A + OA' \quad (4.18)$$

En el apéndice 4A, se justifica que el valor de la opción de responsabilidad limitada con opción de abandonar y consideración explícita de los costes fijos viene dado por la siguiente expresión:

$$ORL_{OA'} = \frac{DN}{1 + \hat{\gamma}'} \frac{(1 + \hat{\gamma}') A + \frac{(DE + VL)}{1 + \gamma} \frac{(1 + \gamma) (A + DE)^{-\gamma}}{\gamma VL}}{\hat{\gamma}' (DE + VL)} \quad (4.19)$$

donde:

$$\hat{\gamma}' = \frac{2 r}{\hat{\sigma}^2} \quad (4.20)$$

siendo:

$$\hat{\sigma}' = \frac{A - \frac{(A + DE) (1 + \gamma)^{-1-\gamma}}{(DE + VL) \gamma}}{A + \frac{(DE + VL) \frac{(A + DE) (1 + \gamma)^{-\gamma}}{(DE + VL) \gamma}}{1 + \gamma}} \sigma \quad (4.21)$$

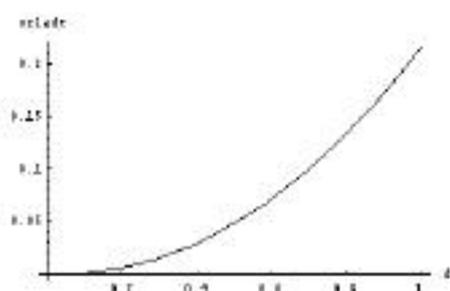
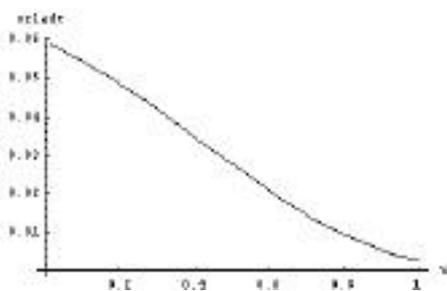
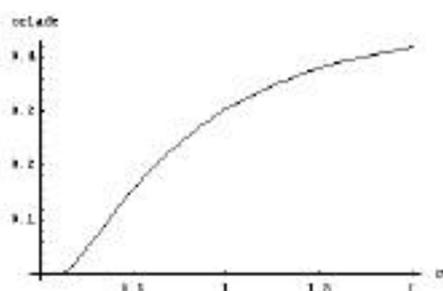
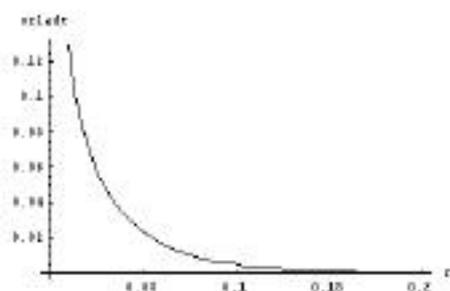
según se justifica en el apéndice 4A.

Normalizando para  $A = 1$ , resulta:

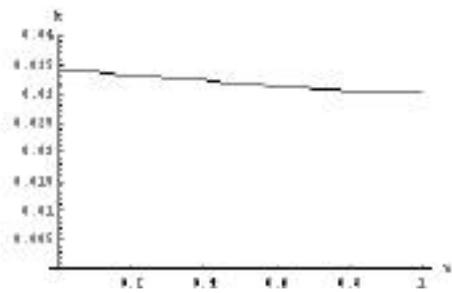
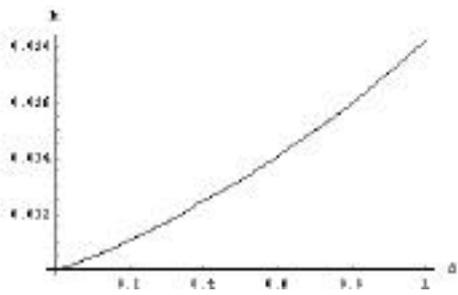
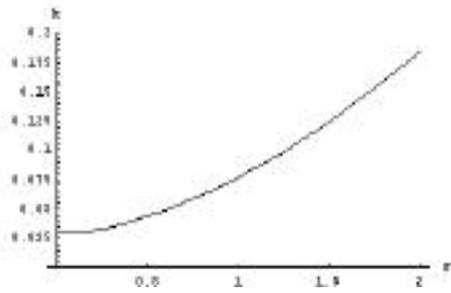
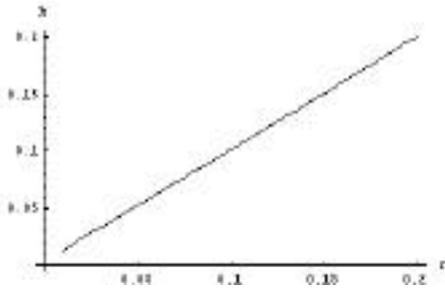
$$orl'_A = \frac{d}{1 + \hat{\gamma}'} \frac{1 + \hat{\gamma}' + \frac{\nu + \xi}{1 + \hat{\gamma}'} \frac{(1 + \gamma) (1 + \gamma)^{-\gamma}}{\gamma (\nu + \xi)}}{\hat{\gamma}' d} \quad (4.22)$$

Obsérvese como a lo largo de este capítulo, tanto  $DE$  como  $\xi$  se interpretan como parámetros, en ningún caso como variables. Las variaciones de su valor no pueden estudiarse sin estudiar a su vez el efecto de los costes fijos en el valor del activo, lo que obliga a considerar la sustitución de costes fijos por costes variables y viceversa.

Presentamos, a continuación, un análisis gráfico del comportamiento de la opción de responsabilidad limitada con opción de abandonar y costes fijos y, asimismo, del coste de la financiación ajena en este caso. Se observa, en ambos casos, que las funciones siguen un comportamiento similar al que ya hemos estudiado en los capítulos anteriores.



Coste de la financiación ajena:



#### 4.5.1.2 ESCENARIOS PARA ACCIONISTAS Y ACREEDORES

Para que el caso de declaración de quiebra sin cese de la actividad de la empresa tenga sentido es preciso que la condición de quiebra domine a la condición de cese. Recordemos ambas condiciones. La condición de cese requiere, según la ecuación (4.14):

$$A' \frac{\gamma}{1 + \gamma} (VL + DE)$$

mientras que la condición de quiebra requiere a su vez:

$$A' \frac{\hat{\gamma}'}{1 + \hat{\gamma}'} DN + DE - OA' \quad (4.23)$$

Para que la quiebra domine al cese es preciso que el valor del activo que determina la declaración de quiebra resulte superior al valor del activo que determina el cese, es decir:

$$\frac{\hat{\gamma}'}{1 + \hat{\gamma}'} DN + DE - OA' > \frac{\gamma}{1 + \gamma} (VL + DE) \quad (4.24)$$

Los accionistas pueden hallarse en uno de los tres escenarios siguientes:

I) Valor del activo más la opción de abandonar **superior** al activo que justifica la quiebra.

(II) Valor del activo más la opción de abandonar **igual** al activo que justifica la quiebra.

(III) Valor del activo más la opción de abandonar **inferior** al activo que justifica la quiebra.

En el cuadro nº 3 se describe la formación del valor de las acciones en estos tres escenarios.

**CUADRO nº 3: VALOR DE LAS ACCIONES CUANDO LA CONDICIÓN DE QUIEBRA DOMINA A LA CONDICIÓN DE CESE**

	(I)	(II)	(III)
	$OA + A > \frac{\hat{\gamma} DN}{1 + \hat{\gamma}}$	$OA + A = \frac{\hat{\gamma} DN}{1 + \hat{\gamma}}$	$OA + A < \frac{\hat{\gamma} DN}{1 + \hat{\gamma}}$
ACTIVO CON OPCIÓN DE ABANDONAR	$OA+A$		$OA+A$
DEUDA	$-DN$	$-DN$	$-DN$
OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA	$ORL_{OA}$	$DN - \frac{\hat{\gamma} DN}{1 + \hat{\gamma}}$	$DN-(OA+A)$
VALOR DE LAS ACCIONES	$OA+A+ORL_{OA}-DN$	$0$	$0$

En el escenario (I), la empresa sigue su evolución normal, los accionistas son propietarios del activo, poseen la opción de responsabilidad limitada y continúan asumiendo el pago de los intereses de la deuda.

En el escenario (II), los accionistas ejercitan la opción de responsabilidad limitada declarando la quiebra. Los acreedores reciben el activo junto con la acción de abandonar y los accionistas quedan liberados del pago de la deuda.

El escenario (III) nunca se dará en un contexto eficiente, ya que se habrá ejercitado previamente la opción de responsabilidad limitada. Su ineficiencia radica en que se ha asumido por más tiempo del necesario el pago de los intereses de la deuda.

Los acreedores afrontan, lógicamente, los mismos escenarios que los accionistas. El valor de la deuda en cada uno de estos escenarios queda descrito en el cuadro nº 4.

**CUADRO nº 4: VALOR DE LA DEUDA CUANDO LA CONDICIÓN DE QUIEBRA DOMINA A LA CONDICIÓN DE CESE**

	(I)	(II)	(III)
	$OA + A > \frac{\hat{\gamma}}{1 + \hat{\gamma}} DN$	$OA + A = \frac{\hat{\gamma}}{1 + \hat{\gamma}} DN$	$OA + A < \frac{\hat{\gamma}}{1 + \hat{\gamma}} DN$
DEUDA	$DN$	$DN$	$DN$
OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA	$-ORL_{OA}$	$-(DN - \frac{\hat{\gamma}}{1 + \hat{\gamma}} DN)$	$-(DN - (OA + A))$
VALOR DE LA DEUDA	$DN - ORL_{OA}$	$\frac{\hat{\gamma}}{1 + \hat{\gamma}} DN (=A + OA)$	$A + OA$

Observamos como los acreedores reciben el valor del activo cuando la condición de quiebra domina a la condición de cese (escenario II y, aunque ineficiente, también escenario III).

#### 4.5.2 CESE SIN QUIEBRA

Para que pueda darse la situación en que se decide el cese de la empresa, sin implicar la declaración de quiebra o sin haber estado precedida por la misma, deben cumplirse las dos condiciones siguientes:

1. La condición de cese debe dominar a la condición de quiebra:

$$\frac{\gamma}{1 + \gamma} (VL + DE) > \frac{\hat{\gamma}'}{1 + \hat{\gamma}'} DN + DE - OA \quad (4.25)$$

2. El valor de liquidación debe ser superior al valor nominal de la deuda:

$$VL > DN. \quad (4.26)$$

Cumpléndose estas condiciones, si se da el caso de que el valor del activo de la empresa se sitúa en aquella cifra que justifica el ejercicio de la opción de abandonar, los accionistas ejercen esta opción y con la cantidad obtenida al realizar el valor de liquidación proceden al pago de la deuda y a distribuirse el resto.

Los accionistas pueden hallarse en uno de los tres escenarios siguientes:

I) Valor del activo **superior** al valor del activo que justifica el ejercicio de la opción de abandonar.

(II) Valor del activo **igual** al activo que justifica el ejercicio de la opción de abandonar.

(III) Valor del activo **inferior** al activo que justifica el ejercicio de la opción de abandonar.

En el cuadro nº 5 se describe la formación del valor de las acciones en estos tres escenarios.

**CUADRO nº 5: VALOR DE LAS ACCIONES CUANDO LA CONDICIÓN DE CESE DOMINA A LA CONDICIÓN DE QUIEBRA Y EL VALOR DE LIQUIDACIÓN SUPERA A LA DEUDA NOMINAL**

	(I)	(II)	(III)
	$A' > \frac{\gamma}{1+\gamma} (VL + DE)$	$A' = \frac{\gamma}{1+\gamma} (VL + DE)$	$A' < \frac{\gamma}{1+\gamma} (VL + DE)$
ACTIVO DE COSTE VARIABLE	$A'$	$\frac{\gamma}{1+\gamma} (VL + DE)$	$A'$
DEUDA ESTRUCTURAL	$- DE$	$- DE$	$- DE$
OPCIÓN DE ABANDONAR	$OA$	$\frac{1}{1+\gamma} (VL + DE)$	$VL + DE - A'$
DEUDA FINANCIERA	$- DN$	$- DN$	$- DN$
$ORL_{OA'}$	$0$	$0$	$0$
VALOR ACCIONES	$A' - DE + OA - DN$	$VL - DN$	$VL - DN$

En el escenario (I), la empresa sigue su evolución normal, los accionistas son propietarios del activo, poseen la opción abandonar y continúan asumiendo el pago de los intereses de la deuda.

En el escenario (II), los accionistas ejercitan la opción de abandonar decidiendo el cese de las actividades de la empresa. Los acreedores recuperan su capital y los accionistas se distribuyen la diferencia entre el valor de liquidación y el nominal de la deuda.

El escenario (III) nunca se dará en un contexto eficiente, ya que se habrá ejercitado previamente la opción de abandonar.

### 4.5.3 CESE Y QUIEBRA SIMULTÁNEOS

#### 4.5.3.1 CONDICIONES Y ESCENARIOS

La simultaneidad del cese y la quiebra exige el cumplimiento de las dos condiciones siguientes:

- 1) La condición de cese debe dominar a la condición de quiebra, como recoge precisamente la ecuación (4.25):

$$\frac{\gamma}{1 + \gamma} (VL + DE) > \frac{\hat{\gamma}'}{1 + \hat{\gamma}'} DN + DE - OA \quad (4.27)$$

- 2) El valor de liquidación debe resultar inferior a la deuda nominal:

$$VL < DN. \quad (4.28)$$

Los accionistas pueden hallarse en uno de los tres escenarios siguientes:

- (I) Valor del activo **superior** al valor del activo que justifica el ejercicio de la opción de abandonar.
- (II) Valor del activo **igual** al valor del activo que justifica el ejercicio de la opción de abandonar.
- (III) Valor del activo **inferior** al valor del activo que justifica el ejercicio de la opción de abandonar.

En el cuadro nº6 se describe la formación del valor de las acciones en estos tres escenarios.

**CUADRO nº6: VALOR DE LAS ACCIONES CUANDO EXISTE CESE Y QUIEBRA SIMULTÁNEOS**

	(I)	(II)	(III)
	$A' > \frac{\gamma}{1+\gamma} (VL + DE)$	$A' = \frac{\gamma}{1+\gamma} (VL + DE)$	$A' < \frac{\gamma}{1+\gamma} (VL + DE)$
ACTIVO DE COSTE VARIABLE	$A'$	$\frac{\gamma}{1+\gamma} (VL + DE)$	$A'$
DEUDA ESTRUCTURAL	$- DE$	$- DE$	$- DE$
OPCIÓN DE ABANDONAR	$OA$	$\frac{1}{1+\gamma} (VL + DE)$	$VL + DE - A'$
DEUDA FINANCIERA	$- DN$	$- DN$	$- DN$
$ORL_{OA'}$	$ORL_{OA'}$	$DN - VL$	$DN - VL$
VALOR DE LAS ACCIONES	$A' - DE + OA$ $-DN + ORL_{OA'}$	$0$	$0$

En el escenario (I), los accionistas son propietarios del activo, poseen la opción de abandonar y asumen el pago de los intereses de la deuda junto con la opción de responsabilidad limitada.

En el escenario (II), se produce el cese y quiebra simultáneos. El valor de las acciones es igual a cero.

El escenario III nunca se producirá en un contexto eficiente.

**TABLA nº 7: VALOR DE LA DEUDA CUANDO EXISTE CESE Y QUIEBRA SIMULTÁNEOS**

	(I)	(II)	(III)
	$A' > \frac{\gamma}{1+\gamma} (VL + DE)$	$A' = \frac{\gamma}{1+\gamma} (VL + DE)$	$A' < \frac{\gamma}{1+\gamma} (VL + DE)$
DEUDA FINANCIERA	$DN$	$DN$	$DN$
- $ORL_{OA'}$	- $ORL_{OA'}$	$VL - DN$	$VL - DN$
VALOR DE LA DEUDA	$DN - ORL_{OA'}$	$VL$	$VL$

Observamos como los acreedores reciben el valor de liquidación, en caso de cese y quiebra simultáneos (escenario II y, aunque ineficiente, también escenario III).

En este caso, la opción de responsabilidad limitada de los accionistas se concreta en la percepción de la diferencia entre el valor nominal de la deuda y el valor de liquidación del activo, cuando el valor del activo se sitúa en la cifra  $\frac{\gamma}{1+\gamma} (VL + DE)$ , que da lugar a la inviabilidad de la empresa.

#### **4.5.3.2. VALOR DE LA OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA EN CASO DE CESE Y QUIEBRA SIMULTÁNEOS**

Acabamos de constatar que, en caso de cese y quiebra simultáneos, la opción de responsabilidad limitada de los accionistas les otorga el derecho a recibir una cifra igual a la diferencia entre el valor nominal de la deuda y el valor de liquidación del activo, cuando el activo alcanza el valor que da lugar al ejercicio de la opción de abandonar. Esta opción puede asimilarse a una opción europea perpetua de barrera inferior de salida con compensación, situándose la barrera en el valor:

$$\frac{\gamma}{1 + \gamma} (VL + DE)$$

y, siendo la compensación igual a  $DN - VL$ .

El activo subyacente de esta opción es el activo de coste variable de la empresa.

Una opción ordinaria europea de venta tiene valor cero (Merton 1990, p.278), ya que el valor de una opción de venta nunca puede superar el valor actual del precio de ejercicio, que en este caso es cero al estar situado en un horizonte infinito. El único pago que tiene valor en esta opción, cuando la opción europea perpetua de venta es, además, de barrera y con compensación, es la propia compensación. De ahí que éste sea el activo para expresar el valor de la opción de responsabilidad limitada en este caso.

Según Rich (1994, p. 293), la expresión del valor de una opción perpetua de barrera es:

$$OV = R \frac{S}{H} \tag{4.29}$$

donde, en la notación usada por Rich, las variables son:

1.  $R$ = valor de la compensación
2.  $S$ = valor del activo subyacente
3.  $H$ = valor de la barrera

En nuestro caso:

$$1. \text{ valor de la compensación : } R = DN - VL \quad (4.30)$$

$$2. \text{ valor de la barrera: } H = \frac{\gamma}{1 + \gamma} (VL + DE) \quad (4.31)$$

$$3. \text{ valor del activo subyacente: } S = A' \quad (4.32)$$

Por tanto, el valor de la opción de responsabilidad limitada en el caso de cese y quiebra simultáneos es:

$$ORL_{OA'} = (DN - VL) \frac{A'}{\frac{\gamma}{1 + \gamma} (VL + DE)} \quad (4.33)$$

#### 4.6 EL COSTE DE LA FINANCIACIÓN AJENA EN CASO DE OPCIÓN DE ABANDONAR Y COSTES FIJOS

La modificación en el coste de la financiación, tanto ajena como propia, que se deriva del reconocimiento explícito de los costes fijos y su integración en la opción de abandonar tiene lugar por medio de la variación del valor de la opción de responsabilidad limitada. Las ecuaciones (2.19) y (2.25) que nos indican el valor de la rentabilidad exigida por acreedores y accionistas continúan siendo aplicables, debiéndose sustituir el término genérico *ORL* por su valoración específica para el escenario en que nos hallamos.

## 4.7 CONCLUSIONES

En este capítulo se han introducido los costes fijos en el análisis del valor de la opción de responsabilidad limitada y el coste de la financiación ajena, obteniéndose las siguientes conclusiones:

1. Los pagos constantes a que dan lugar los costes fijos se asimilan a una deuda perpetua, cuyo interés anual es precisamente el importe de los costes fijos y sobre la que los accionistas gozan de la opción de responsabilidad limitada. Denominamos a esta deuda, *deuda estructural*. El ejercicio de esta opción tiene lugar cuando la empresa decide cesar en sus actividades por imposibilidad de asumir los costes fijos. Esta modelización de los costes fijos conduce a estudiar las diferentes causas del cese de las actividades de la empresa, por una parte, y de la quiebra, por otra.
2. El derecho de responsabilidad limitada de los accionistas sobre la deuda estructural puede asimilarse a una opción de venta americana de horizonte perpetuo sobre el activo de coste variable (valor actual de la diferencia entre ingresos y costes variables),  $A'$ , y con un precio de ejercicio igual al valor nominal de la deuda estructural.
3. En el caso de una empresa sin deuda financiera y valor de liquidación cero, los accionistas deciden el cese de la actividad de la empresa si el valor del activo es igual al valor del activo que expresa el ejercicio anticipado de la opción de responsabilidad limitada de la deuda estructural.
4. En el caso de una empresa sin deuda financiera y opción de abandonar, es decir, con valor de liquidación positivo, el derecho de responsabilidad limitada sobre la deuda estructural puede integrarse en la opción de

abandonar. La opción de abandonar se define ahora como una opción de venta perpetua sobre el activo de coste variable, cuyo precio de ejercicio consiste en la suma del valor de liquidación y la deuda estructural. Los accionistas deciden el cese de la actividad de la empresa ejercitando la opción de abandonar. Venden los activos, perciben el valor de liquidación y, además, quedan liberados de continuar pagando los coste fijos.

5. La no inclusión específica de los costes fijos en la opción de abandonar sitúa el valor del activo que induce el cese de las actividades de la empresa en un valor superior al que se obtiene cuando se incluyen los costes fijos. Puede decirse, por tanto, que la no consideración específica de los costes fijos da lugar a un cese prematuro de las actividades de la empresa.
6. La modelización mediante opciones de los efectos sobre el valor de la empresa de la deuda financiera, los costes fijos y el valor de liquidación permite analizar las causas y las consecuencias para accionistas y acreedores del cese de actividades y la quiebra de la empresa, presentándose tres posibles casos:
  - a) Quiebra sin cese. Tiene lugar cuando el valor del activo que induce la declaración de quiebra es superior al valor del activo que induce la liquidación de la empresa.
  - b) Cese sin quiebra. Tiene lugar cuando el valor del activo que induce la liquidación de la empresa, incluyendo tanto el valor de liquidación como la deuda estructural, es superior al valor del activo que induce la declaración de quiebra y, además, el valor de liquidación resulta superior a la deuda financiera.

- c) Cese y quiebra simultáneos. Tiene lugar cuando la deuda financiera resulta superior al valor de liquidación, manteniéndose la relación expresada en el apartado anterior entre valor de liquidación y la quiebra.

Para todos estos casos se han estudiado el valor de la opción de responsabilidad limitada y el coste de la financiación ajena.

#### APÉNDICE 4A: VALORACIÓN DE LA OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA CON OPCIÓN DE ABANDONAR EN EL CASO DE CONSIDERACIÓN EXPLÍCITA DE LOS COSTES FIJOS

Este caso es similar al estudiado en el apéndice del capítulo anterior. La diferencia entre ambos radica en que ahora consideramos explícitamente los costes fijos, es decir, la deuda estructural. La función del activo subyacente es:

$$AS = A + \frac{VL + DE}{1 + \gamma} \frac{(1 + \gamma) (A + DE)^{-\gamma}}{\gamma (VL + DE)} \quad (4A.1)$$

Siguiendo el mismo razonamiento aplicado en el apéndice del capítulo anterior, procedemos a aplicar el lema de Ito para determinar el proceso estocástico del activo subyacente:

$$dAS = \left( \frac{AS}{A} \mu A + \frac{AS}{t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 AS}{\partial A^2} \sigma^2 A^2 \right) dt + \frac{AS}{A} \sigma A dz \quad (4A.2)$$

donde  $\left( \frac{AS}{A} \mu A + \frac{AS}{t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 AS}{\partial A^2} \sigma^2 A^2 \right)$  es la tasa de tendencia,  $\left( \frac{AS}{A} \sigma A \right)^2$  es la tasa de varianza y  $dz$  un proceso estocástico de Wiener.

El cálculo de las derivadas de  $AS$  proporciona los siguientes valores:

$$\frac{AS}{A} = 1 - \frac{(A + DE) (1 + \gamma)^{-1-\gamma}}{(DE + VL) \gamma} \quad (4A.3)$$

$$\frac{{}^2AS}{A^2} = \frac{(DE + VL) \gamma \frac{(A + DE) (1 + \gamma)^{-\gamma}}{(DE + VL) \gamma}}{(A + DE)^2} \quad (4A.4)$$

$$\frac{\hat{A}}{t} = 0 \quad \text{por tratarse de una opción perpetua,} \quad (4A.5)$$

con lo que el proceso estocástico de  $AS$  resulta ser:

$$dAS = \left[ 1 - \frac{(A + DE) (1 + \gamma)^{-1-\gamma}}{(DE + VL) \gamma} \right] \mu A + \frac{1}{2} \frac{(DE + VL) \gamma \frac{(A + DE) (1 + \gamma)^{-\gamma}}{(DE + VL) \gamma}}{(A + DE)^2} \sigma^2 A^2 dt + \left[ 1 - \frac{(A + DE) (1 + \gamma)^{-1-\gamma}}{(A + DE) \gamma} \right] \sigma A dz \quad (4A.6)$$

El proceso estocástico de la rentabilidad de  $AS$  ( $dAS/AS$ ), es:

$$\frac{dAS}{AS} = \frac{\left[ 1 - \frac{(A + DE) (1 + \gamma)^{-1-\gamma}}{(DE + VL) \gamma} \right] \mu A + \frac{1}{2} \frac{(DE + VL) \gamma \frac{(A + DE) (1 + \gamma)^{-\gamma}}{(DE + VL) \gamma}}{(A + DE)^2} \sigma^2 A^2}{A + \frac{VL + DE}{1 + \gamma} \frac{(1 + \gamma) (A + DE)^{-\gamma}}{\gamma (VL + DE)}} dt + \frac{\left[ 1 - \frac{(A + DE) (1 + \gamma)^{-1-\gamma}}{(A + DE) \gamma} \right] \sigma A}{A + \frac{VL + DE}{1 + \gamma} \frac{(1 + \gamma) (A + DE)^{-\gamma}}{\gamma (VL + DE)}} dz \quad (4A.7)$$

Realizando operaciones, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{dAS}{AS} = & \frac{A \mu + \frac{A \frac{(A+DE)(1+\gamma)^{-1-\gamma}}{(DE+VL)\gamma} \left( 2(A+DE)\mu + A(1+\gamma)\sigma^2 \right)}{2(A+DE)}}{\frac{(DE+VL) \frac{(A+DE)(1+\gamma)^{-\gamma}}{(DE+VL)\gamma}}{A + \frac{(A+DE)(1+\gamma)^{-1-\gamma}}{1+\gamma}}} dt \\ & + \frac{A \left( 1 - \frac{(A+DE)(1+\gamma)^{-1-\gamma}}{(DE+VL)\gamma} \right)}{\frac{(DE+VL) \frac{(A+DE)(1+\gamma)^{-\gamma}}{(DE+VL)\gamma}}{A + \frac{(A+DE)(1+\gamma)^{-1-\gamma}}{1+\gamma}}} \sigma dz \end{aligned} \quad (4A.8)$$

Por tanto, el valor esperado de la rentabilidad de AS ( $\hat{\mu}'$ ) y su desviación típica

( $\hat{\sigma}'$ ) son:

$$\hat{\mu}' = \frac{A \mu + \frac{A \frac{(A+DE)(1+\gamma)^{-1-\gamma}}{(DE+VL)\gamma} \left( 2(A+DE)\mu + A(1+\gamma)\sigma^2 \right)}{2(A+DE)}}{\frac{(DE+VL) \frac{(A+DE)(1+\gamma)^{-\gamma}}{(DE+VL)\gamma}}{A + \frac{(A+DE)(1+\gamma)^{-1-\gamma}}{1+\gamma}}} \quad (4A.9)$$

$$\hat{\sigma}' = \frac{A \left( 1 - \frac{(A+DE)(1+\gamma)^{-1-\gamma}}{(DE+VL)\gamma} \right)}{\frac{(DE+VL) \frac{(A+DE)(1+\gamma)^{-\gamma}}{(DE+VL)\gamma}}{A + \frac{(A+DE)(1+\gamma)^{-1-\gamma}}{1+\gamma}}} \sigma \quad (4A.10)$$

Para calcular el valor de la opción de responsabilidad limitada con opción de abandonar en este caso en que consideramos explícitamente los costes fijos, al igual que en el apéndice del capítulo anterior, procederemos a sustituir en la fórmula de Merton el valor del activo subyacente, la desviación típica y el precio de ejercicio, obteniendo:

$$ORL_{OA}' = \frac{DN}{1 + \hat{\gamma}'} \frac{(1 + \hat{\gamma}') AS}{\hat{\gamma}' DN} \quad (4A.11)$$

donde :

$$\hat{\gamma}' = \frac{2 r}{\hat{\sigma}^2} \quad (4A.12)$$

Sustituyendo AS por su valor, resulta la ecuación 4.20:

$$ORL_{OA}' = \frac{DN}{1 + \hat{\gamma}'} \frac{1 + \hat{\gamma}' \left( A + \frac{(DE + VL)}{1 + \gamma} \frac{(1 + \gamma) (A + DE)}{\gamma VL} \right)^{-\hat{\gamma}'}}{\hat{\gamma}' (DE + VL)} \quad (4A.13)$$

## **CAPÍTULO 5. ENDEUDAMIENTO PERPETUO CON COSTE VARIABLE**

### **5.1 INTRODUCCIÓN**

El modelo presentado en los dos capítulos anteriores puede tomarse como base para un análisis del coste de capital que integre el riesgo, la tasa de interés y la opción de abandonar en un marco en el que estos parámetros no son constantes.

El modelo hasta aquí presentado, como se ha visto, es de parámetros constantes, lo cual limita su operatividad más allá de un contexto financiero estático. Sin embargo, el horizonte perpetuo es en sí mismo una limitación de orden menor, pues aunque las empresas no gozan de proyectos concretos de financiación ajena a un horizonte perpetuo, el conjunto de la financiación ajena a lo largo de la vida de la empresa puede considerarse permanente, puesto que unos proyectos de financiación sustituyen a otros.

Basándonos en estas premisas, procedemos a adaptar el modelo a una realidad cambiante mediante los modelos que a continuación se exponen.

Presentamos la extensión del modelo en el que, manteniéndose el horizonte perpetuo, los parámetros que determinan el coste del endeudamiento pasan a ser variables, de modo que el coste de la financiación varía en cada período en función de los valores de las variables que lo determinan. Conseguimos así determinar el que podemos llamar coste básico conjunto de la financiación ajena que, sin estar referido a una fuente de financiación ajena específica, determina la que debería ser la rentabilidad exigida por el conjunto de ellas teniendo en cuenta el horizonte ilimitado de la vida de la empresa.

En consecuencia, se propone un modelo de coste variable del endeudamiento que incorpora tanto las variaciones del interés libre de riesgo como las variaciones del valor de la opción de responsabilidad limitada. Como paso previo a la elaboración de esta extensión del modelo, demostramos, bajo la hipótesis de que no existen oportunidades de arbitraje, la condición de equivalencia entre la renta que genera el modelo de coste fijo y la renta que genera el modelo de coste variable. A continuación, presentamos el modelo de coste variable en dos versiones:

- modelo de coste variable puro, en el que se trata la variabilidad del tipo de interés como *swaps* sobre tipos de interés y la variabilidad de la opción de responsabilidad limitada como la diferencia de la opción de responsabilidad limitada del período actual y la opción de responsabilidad limitada del período anterior. Este modelo presenta importantes oscilaciones en el coste de la financiación, que pueden no obstante suavizarse mediante la segunda versión del modelo.
- Modelo de coste variable atenuado, en el que se sigue tratando la variabilidad del tipo de interés como *swaps* sobre tipos de interés, pero la variabilidad de la opción de responsabilidad limitada se trata como contratos *forward* sobre el valor de la opción de responsabilidad limitada.

## 5.2 COMPONENTES DEL COSTE DE LA FINANCIACIÓN EN EL MODELO DE COSTE FIJO

Sabemos que en el modelo de parámetros constantes existen las siguientes relaciones entre deuda nominal, financiación ajena, opción de responsabilidad limitada y coste de financiación:

$$k \cdot (DN - ORL_0) = DN \cdot r_0 \quad (\text{ecuación (2.15)})$$

$$D \cdot k = (D + ORL) \cdot r_0 \quad (\text{ecuación (2.19)})$$

$$DN - ORL = D \quad (\text{ecuación (2.20)})$$

La ecuación (2.15) establece la relación funcional entre el coste del endeudamiento en condiciones de riesgo y el valor de la opción de responsabilidad limitada. La ecuación (2.20) nos muestra que la deuda efectiva es igual a la deuda nominal menos el valor de la responsabilidad limitada. La ecuación (2.19) se ha obtenido a partir de la ecuación (2.15), sustituyendo la deuda nominal por la deuda efectiva más la opción de responsabilidad limitada. La ecuación (2.19) nos sirve de base para transformar el modelo de coste fijo en un modelo de coste variable.

A partir de la ecuación (2.19), constatamos que el coste de endeudamiento se divide en dos componentes:

- a) un primer componente que consiste en el tipo de interés libre de riesgo sobre el importe de la financiación ajena efectiva:  $(D \cdot r_0)$ ; y
- b) un segundo componente que consiste en el tipo de interés libre de riesgo sobre el importe de la opción de responsabilidad limitada:  $(ORL_0 \cdot r_0)$ .

### **5.3 CONDICIÓN PARA LA TRANSFORMACIÓN DEL MODELO DE COSTE FIJO EN UN MODELO DE COSTE VARIABLE**

La equivalencia entre el modelo de coste fijo y el modelo de coste variable que pretendemos construir requiere el cumplimiento de la siguiente condición:

El valor actual de la renta generada por el modelo de coste fijo debe ser equivalente al valor actual de la renta generada por el modelo de coste variable, bajo la condición de no arbitraje.

La condición de no arbitraje establece que, si dos activos financieros generan rentas futuras equivalentes, entonces necesariamente en cualquier momento estos dos activos financieros han de tener el mismo valor, ya que en caso de no ser así aparece una oportunidad de arbitraje.

Una oportunidad de arbitraje surge cuando resulta posible obtener un beneficio sin asumir riesgo alguno, como es el caso de una operación que proporciona un ingreso inmediato al inversor sin ningún pago futuro derivado de ella, es decir, los ingresos y pagos futuros se cancelan mutuamente.

#### 5.4 EQUIVALENCIA ENTRE EL VALOR ACTUAL DE UNA INVERSIÓN EN RENTA FIJA Y EL VALOR ACTUAL DE UNA INVERSIÓN EN RENTA VARIABLE: EL CASO DE LA OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA

En el punto 5.3 hemos visto que uno de los componentes del coste de la financiación en el modelo de coste fijo es una serie perpetua de flujo igual al producto del tipo de interés por el valor inicial de la opción de responsabilidad limitada ( $ORL_0 \cdot r_0$ ). A esta serie la denominamos serie 1. Por tanto:

SERIE 1:  $ORL_0 \cdot r_0$

Puede demostrarse que esta serie resulta equivalente a la siguiente, que denominamos serie 2:

SERIE 2:  $(ORL_1 - ORL_0) \quad (ORL_2 - ORL_1) \quad \dots \quad (ORL_t - ORL_{t-1})$

Nótese que se trata asimismo de una serie perpetua cuyo flujo al final del período  $t$  consiste en la diferencia entre el valor de la opción de responsabilidad limitada al final de este período y el valor de la misma opción al final del período anterior, o, lo que es lo mismo, al principio del período en curso. Así el flujo del primer período resulta igual a la diferencia entre  $ORL_1$ , valor de la opción de responsabilidad limitada al final del primer período, y  $ORL_0$ , valor de la opción de responsabilidad limitada al principio de este período.

La equivalencia entre ambas series se demuestra por la condición de no arbitraje.

Se demuestra, a continuación, que el valor actual de la serie 2 es igual al valor inicial de la opción de responsabilidad limitada, y por tanto, equivalente al valor actual de la serie 1.

El valor actual de la serie 1 es, evidentemente,  $ORL_0$ . Supongamos que el valor actual de la serie 2 difiere del anterior, de modo que:

$$VA(2) = ORL_0 + X \quad (5.1)$$

donde  $X \neq 0$

Examinemos los dos casos  $X > 0$  y  $X < 0$ .

**(1) Primer caso:  $X > 0$**

Si  $X > 0$ , el valor actual de la serie 2 es superior al valor inicial de la opción de responsabilidad limitada, lo que da lugar a una oportunidad de arbitraje.

Para desarrollar la operación de arbitraje es preciso crear previamente un activo financiero que replique la serie 2. La creación de este activo consta de los siguientes pasos:

1. adquirimos la opción de responsabilidad limitada por  $ORL_0$  unidades monetarias; y
2. decidimos mantener  $ORL_0$  unidades monetarias de forma permanente en la opción de responsabilidad limitada, de manera que:
  - cuando el valor de la inversión se sitúa por sobre de  $ORL_0$  unidades monetarias, es decir, cuando la diferencia entre  $ORL_t$  y  $ORL_{t-1}$  es positiva, retiramos el superavit.

- cuando el valor de la inversión se sitúa por debajo de  $ORL_0$  unidades monetarias, es decir, cuando la diferencia entre  $ORL_t$  y  $ORL_{t-1}$  es negativa, aportamos la cifra necesaria para cubrir el déficit.

La serie de flujos (aportaciones y retiradas de fondos) que genera esta estrategia es la siguiente:

$$(ORL_1 - ORL_0) \quad (ORL_2 - ORL_1) \quad \dots \quad (ORL_n - ORL_{n-1})$$

donde puede observarse que el saldo al final de un período cualquiera  $n$  es necesariamente igual al valor inicial de la opción de responsabilidad limitada:

$$ORL_n - \sum_{t=1}^n (ORL_t - ORL_{t-1}) = ORL_0 \quad (5.2)$$

con lo que se cumple la condición 3, que acabamos de exponer.

En consecuencia, mediante esta estrategia hemos generado una serie de flujos financieros que replican a la serie 2. Si su valor actual es superior a  $ORL_0$  aparece una oportunidad de arbitraje que se materializa por medio de los siguientes pasos:

1. venta al descubierto de la serie 2, percibiendo  $ORL_0 + X$  unidades monetarias.; y asumiendo en esta posición de venta al descubierto los flujos posteriores.
2. compra de la opción de responsabilidad limitada  $ORL_0$ ; y
3. una vez adquirida la opción de responsabilidad limitada, mantenemos permanentemente  $ORL_0$  unidades monetarias en este activo y realizamos

las aportaciones y retiradas oportunas. De esta manera generamos una réplica de la serie 2.

**CUADRO nº 1 : ARBITRAJE CUANDO  $X > 0$**

	$t = 0$	$T=1$	$T= 2$	...	$T= n$
Venta serie 2	$+ ORL_0 + X$	$-(ORL_1 - ORL_0)$	$-(ORL_2 - ORL_1)$	...	$-(ORL_n - ORL_{n-1})$
Compra $ORL_0$ , réplica de la serie 2	$- ORL_0$	$(ORL_1 - ORL_0)$	$(ORL_2 - ORL_1)$	...	$(ORL_n - ORL_{n-1})$
Beneficio	$+ X$	-	-	...	-

Así se obtiene un beneficio igual a  $X$  en el momento inicial, siendo los flujos futuros de la serie 2 iguales pero de signo contrario a los flujos futuros de la réplica de la serie 2, con lo que los flujos que resultan de agregar ambas series son nulos en todo caso, excepto en el momento inicial. En consecuencia, estamos ante un arbitraje. Resumimos esta oportunidad de arbitraje en el cuadro nº1.

En consecuencia,  $X$  no puede ser positivo puesto que aparecería una oportunidad de arbitraje.

**(2) Segundo caso,  $X < 0$**

Si  $X < 0$ , también existe una oportunidad de arbitraje, siendo la estrategia a realizar la siguiente:

1. compra de la serie 2 pagando  $ORL_0 + X$  unidades monetarias;
2. venta de la opción de responsabilidad limitada por  $ORL_0$  unidades monetarias; y
3. una vez vendida la opción de responsabilidad limitada, mantenemos permanente una posición al descubierto de  $ORL_0$  unidades monetarias en este activo realizando las aportaciones y retiradas oportunas. Replicamos así la serie 2.

El arbitraje, en este caso, queda reflejado en el cuadro nº 2:

**CUADRO nº 2 : ARBITRAJE CUANDO  $X < 0$**

	t= 0	t = 1	t = 2	...	t= n
Compra de la serie 2	$-ORL_0+X$	$(ORL_1-ORL_0)$	$(ORL_2-ORL_1)$	...	$(ORL_n-ORL_{n-1})$
Venta de $ORL_0$ y réplica de la serie 2	$+ORL_0$	$-(ORL_1-ORL_0)$	$-(ORL_2-ORL_1)$	...	$-(ORL_n-ORL_{n-1})$
Beneficio	$+X$	-	-	...	-

En este caso, también se obtiene un beneficio igual a  $X$  en el momento inicial, anulándose los flujos posteriores de la serie 2 con los flujos de la réplica de la misma que hemos creado.

En consecuencia, si  $X$  toma un valor negativo aparece una oportunidad de arbitraje.

Por tanto, dado que  $X$  no puede ser ni positivo ni negativo, el valor actual de la serie 2 debe ser igual al valor inicial de la opción de responsabilidad limitada, y puede considerarse equivalente a la serie 1.

$$VA(\text{serie 2}) = ORL_0 \quad (5.3)$$

$$VA(\text{serie 2}) \equiv VA(\text{serie 1}) \quad (5.4)$$

Este resultado indica que el componente  $ORL_0 \cdot r_0$  del modelo de coste fijo puede sustituirse por el componente de coste variable:

$$ORL_t - ORL_{t-1} \quad (5.5)$$

## 5.5 MODELO DE COSTE VARIABLE PURO

En el modelo de parámetros constantes, el endeudamiento presenta el siguiente coste, asimismo constante:

$$CF_{fijo} = D_0 \cdot r_0 + ORL_0 \cdot r_0 \quad (5.6)$$

donde el interés que se paga por el coste de financiación se desdobra en dos componentes:

1. el interés que se paga por la financiación ajena efectiva; y
2. el interés que se paga por la opción de responsabilidad limitada.

La suma de estos dos componentes es igual a la financiación ajena efectiva por el coste efectivo, que es el interés total. Aplicando (2.19) a este caso tenemos:

$$D_0 k_t = D_0 r_0 + ORL_0 r_0 \quad (5.7)$$

Transformando estos componentes podemos construir un modelo de coste de la financiación variable basado igualmente en la opción de responsabilidad limitada:

1. sobre el componente  $D_0 \cdot r_0$  aplicamos un *swap* sobre tipos de interés (permuta de tipo de interés fijo por tipo de interés variable) que lo transforma en el producto de la deuda efectiva por el tipo de interés del período:  $D_0 \cdot r_t$ ; y
2. el componente  $ORL_0 \cdot r_0$  se sustituye por la diferencia equivalente entre el valor inicial y el valor final de la opción, teniendo en cuenta la equivalencia entre la serie 1 y la serie 2 que se ha demostrado en el apartado 5.4.

Por tanto, el coste fijo de la financiación puede sustituirse por su coste variable equivalente:

$$CVP = D_0 \cdot r_t + (ORL_t - ORL_{t-1}) \quad (5.8)$$

El coste efectivo del endeudamiento en el período  $t$  se calcula, pues a partir de la siguiente expresión, que acabamos de escribir:

$$D_0 k_t = D_0 r_t + (ORL_t - ORL_{t-1}) \quad (5.9)$$

## 5.6 MODELO DE COSTE VARIABLE ATENUADO

Este segundo modelo se basa en el anterior e introduce una transformación consistente en un contrato *forward* sobre el valor de la opción de responsabilidad limitada, que modifica el valor del segundo componente  $ORL_t - ORL_{t-1}$  del modelo de coste variable. El primer componente no sufre alteración alguna. Concretamente al final de  $t-1$  se suscribe en posición de venta un contrato *forward* sobre la opción de responsabilidad limitada con vencimiento en  $t$ .

Las características de este contrato *forward* son:

Vendedor del contrato *forward*: la empresa

Comprador del contrato *forward*: sus acreedores

Activo subyacente:  $ORL$

Precio de la opción de responsabilidad limitada en el momento actual =  
 $ORL_{t-1}$

Precio efectivo en un día futuro de la opción de responsabilidad limitada =  
 $ORL_t$

Precio del día actual para un día futuro (precio *forward*). Al tratarse de un activo sin rendimiento explícito, ni costes de custodia, el precio *forward* es  
 $ORL_{t-1} (1+r_t)$

El cuadro número 3 recoge los movimientos financieros entre comprador y vendedor y los resultados del contrato *forward* a su vencimiento.  $r_t$  indica el tipo de interés para el

período  $t$  que queda fijado al principio del período.  $ORL_t$  expresa como ya conocemos el valor de la opción de responsabilidad limitada al final del período.

**CUADRO nº 3: MOVIMIENTOS FINANCIEROS Y RESULTADOS AL VENCIMIENTO DEL CONTRATO FORWARD**

	COMPRADOR	VENDEDOR
Recibe	$ORL_t$	$ORL_{t-1} (1+r_t)$
Entrega	$ORL_{t-1} (1+r_t)$	$ORL_t$
Resultado al vencimiento	$ORL_t - ORL_{t-1} (1+r_t)$	$ORL_{t-1} (1+r_t) - ORL_t$

Como observamos en el cuadro, la empresa, al estar en posición de vendedora del contrato *forward*, obtiene como resultado del contrato a su vencimiento al final de  $t$  :

$$ORL_{t-1} (1+r_t) - ORL_t \tag{5.10}$$

Veamos, seguidamente, cómo afecta al componente  $ORL_t - ORL_{t-1}$  del modelo de coste variable la introducción de este contrato *forward*. A partir de este momento pasamos a denominar a este nuevo modelo logrado al introducir el contrato *forward*, modelo de coste variable atenuado:

Componente coste variable puro	$ORL_t - ORL_{t-1}$
Resultado contrato <i>forward</i>	<u><math>ORL_{t-1} (1+r_t) - ORL_t</math></u>
Componente coste variable atenuado	$ORL_{t-1} r_t$

Con este nuevo componente del modelo de coste variable atenuado, la empresa al final de cada período paga el interés variable sobre el valor de la opción de responsabilidad limitada del período anterior o, lo que es lo mismo, al principio del período actual.

Dado que el valor inicial de un contrato *forward* es nulo en todo caso, el modelo de coste variable puro resulta equivalente al nuevo modelo de coste variable atenuado.

En este nuevo modelo de coste variable atenuado, el coste de la financiación toma el siguiente valor:

$$CVA = D_0 \cdot r_t + ORL_{t-1} \cdot r_t \quad (5.11)$$

es decir,

$$D_0 \cdot k_t = D_0 \cdot r_t + ORL_{t-1} \cdot r_t \quad (5.12)$$

Este modelo de coste variable atenuado reduce sustancialmente las fluctuaciones del coste de la financiación del modelo de coste variable puro.

## 5.7 COMPARACIÓN DEL MODELO DE COSTE VARIABLE PURO CON EL MODELO DE COSTE VARIABLE ATENUADO

En el apartado 5.5 hemos deducido el modelo de coste variable puro, ecuación (5.8):

$$CVP = D_0 r_t + (ORL_t - ORL_{t-1})$$

Si multiplicamos y dividimos por  $ORL_{t-1}$  el segundo sumando del segundo miembro:

$$ORL_t - ORL_{t-1} = \frac{ORL_t}{ORL_{t-1}} - 1 \cdot ORL_{t-1} \quad (5.13)$$

conseguimos que aparezca explícitamente la tasa de rentabilidad de la opción de responsabilidad limitada  $ORL$ .

Obtenemos:

$$\frac{ORL_t}{ORL_{t-1}} - 1 = \text{tasa de rentabilidad de la opción de responsabilidad limitada.} \quad (5.14)$$

Si comparamos este resultado con el modelo de coste variable atenuado, es decir con ecuación (5.13):

$$CVA = D_0 \cdot r_t + r_t \cdot ORL_{t-1}$$

concluimos que el modelo de coste variable atenuado sustituye en el coste de la financiación la tasa de rentabilidad de la opción de responsabilidad limitada por la tasa de interés libre de riesgo.

## 5.8 SIMULACIONES

En este apartado, realizamos una simulación para los modelos de coste variable puro y coste variable atenuado. Se comprueba cómo éste último presenta menos oscilaciones.

### TABLA DE DATOS

DE	4708,2685
DT	5000
CF fijo	250
%CF fijo	5,31%

Donde

$k_{cv 1}$  = coste de la financiación en el modelo de coste variable puro

$k_{cv 2}$  = coste de la financiación en el modelo de coste variable atenuado

$CF_{var 1}$  = modelo de coste variable puro

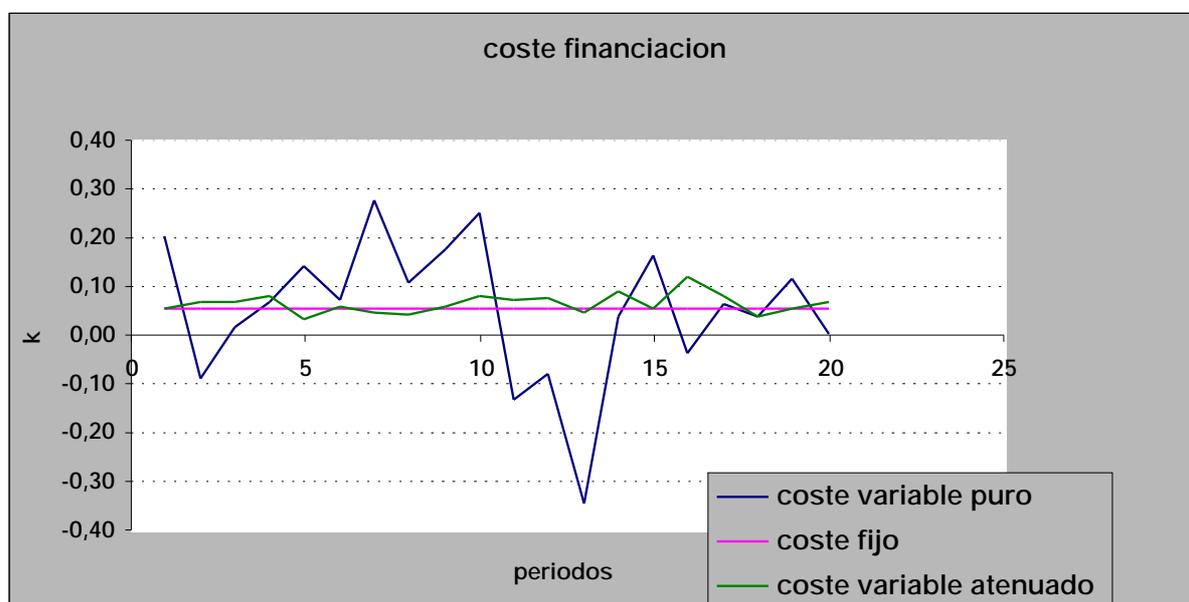
$CF_{var 2}$  = modelo de coste variable atenuado

**TABLA nº 1 : MODELO DE COSTE VARIABLE**

<b><i>T</i></b>	<b><i>r</i></b>	<b><math>\sigma</math></b>	<b><i>A</i></b>	<b><math>ORL_t</math></b>	<b><math>ORL_t - ORL_{t-1}</math></b>	<b><math>ORL_{t-1} * r_t</math></b>	<b><i>k cv1</i></b>	<b><i>k cv2</i></b>
0	0,05	0,25	10.000	291,7315				
1	0,055	0,4	10.000	992,3457	700,6142	16,0452	0,203	0,058
2	0,006	0,3	12.500	299,4717	-692,8740	59,5407	-0,087	0,072
3	0,075	0,25	12.000	77,9725	-221,4992	22,4604	0,027	0,079
4	0,03	0,15	15.000	31,1579	-46,8147	2,3392	0,020	0,003
5	0,05	0,3	10.000	537,3471	506,1892	1,5579	0,157	0,050
6	0,04	0,25	7.500	623,3192	85,9721	21,4939	0,058	0,044
7	0,03	0,4	10.000	1722,5795	1099,2603	18,6996	0,263	0,033
8	0,04	0,5	8.000	2070,8184	348,2389	68,9032	0,113	0,054
9	0,05	0,75	9.500	2706,2122	635,3938	103,5409	0,184	0,071
10	0,04	1	7.500	3639,4206	933,2084	108,2485	0,238	0,062
11	0,045	0,75	10.000	2809,9147	-829,5059	163,7739	-0,131	0,079
12	0,03	0,5	12.000	2203,5713	-606,3434	84,2974	-0,098	0,047
13	0,08	0,4	15.000	416,6667	-1786,9047	176,2857	-0,299	0,117
14	0,05	0,25	12.500	204,1396	-212,5271	20,8333	0,004	0,054
15	0,1	0,5	12.000	720,7464	516,6068	20,4140	0,209	0,104
16	0,075	0,25	12.500	70,6956	-650,0508	54,0560	-0,063	0,086
17	0,035	0,1	12.000	0,5351	-70,1605	2,4743	0,002	0,035
18	0,05	0,15	15.000	2,8233	2,2882	0,0268	0,050	0,050
19	0,06	0,3	12.500	299,4717	296,6484	0,1694	0,123	0,060
20	0,075	0,2	12.500	13,9642	-285,5075	22,4604	0,014	0,079

<i>t</i>	<i>CF var 1</i>	<i>CF var 2</i>	<i>% CF var 1</i>	<i>% CF var 2</i>
0				
1	936,0276	250,0000	0,1988	0,0531
2	-433,9192	313,5338	-0,0922	0,0666
3	60,9969	300,4644	0,0130	0,0638
4	306,3055	358,9681	0,0651	0,0762
5	647,4373	142,1828	0,1375	0,0302
6	321,3855	262,2808	0,0683	0,0557
7	1287,5910	213,2635	0,2735	0,0453
8	489,4870	192,9254	0,1040	0,0410
9	823,7246	271,1635	0,1750	0,0576
10	1168,6218	370,7240	0,2482	0,0787
11	-641,1751	333,9076	-0,1362	0,0709
12	-394,4713	338,3182	-0,0838	0,0719
13	-1645,6566	207,3552	-0,3495	0,0440
14	164,1344	409,9948	0,0349	0,0871
15	752,0202	245,6204	0,1597	0,0522
16	-179,2239	542,9015	-0,0381	0,1153
17	282,9596	358,4223	0,0601	0,0761
18	167,0776	164,8081	0,0355	0,0350
18	532,0618	235,5546	0,1130	0,0500
20	-3,0114	300,4644	-0,0006	0,0638

**GRAFICO nº 1: COMPARACIÓN DE MODELOS DE COSTE VARIABLE**



**5.9 CONCLUSIONES**

Los capítulos anteriores nos han permitido determinar el que podemos denominar coste básico de la financiación ajena conjunto que, sin estar referido a una fuente de financiación específica, establece la que debería ser la rentabilidad exigida por el conjunto de ellas, teniendo en cuenta el horizonte ilimitado de la vida de la empresa.

El resultado obtenido presenta el inconveniente de depender de parámetros constantes que inevitablemente variarán en un horizonte de largo plazo. Para superar esta limitación, hemos construido en este capítulo una variante del modelo anterior en la que los parámetros que determinan el coste del endeudamiento pasan a ser variables, de modo que el coste de capital varía en cada período en función de los valores de estos parámetros.

En concreto, proponemos un modelo de coste variable del endeudamiento que incorpora tanto las variaciones del interés libre de riesgo como las variaciones del valor de la opción de responsabilidad limitada. El coste de la financiación ajena se adapta anualmente a los valores de estos parámetros. Construimos así dos versiones de un modelo de coste de la financiación ajena variable.

En primer lugar, hemos presentado este modelo en su versión de coste variable puro, donde se trata la variabilidad del tipo de interés como *swaps* sobre tipos de interés y la variabilidad de la opción de responsabilidad limitada como la diferencia de la opción de responsabilidad limitada del período actual y la opción de responsabilidad limitada del período anterior. Esta versión del modelo presenta grandes variaciones en el coste de la financiación, que pueden, no obstante, suavizarse mediante la segunda versión del modelo.

La segunda versión del modelo, coste variable atenuado, sigue tratando la variabilidad del tipo de interés como *swaps* sobre tipos de interés, pero la variabilidad de la opción de responsabilidad limitada, principal causa de las fuertes oscilaciones que experimenta el coste de la financiación ajena en la primera versión del modelo, se modera mediante un contrato *forward* sobre el valor de esta opción.