Ph. D. thesis: Modular hyperelliptic curves

Author: Enrique González Jiménez

Advisor: Josep González Rovira

Abstract

The purpose of this Ph. D. thesis is to generalize the so called *Shimura-Taniyama-Weil Conjecture* to nonelliptic curves. The above conjecture stablished that for every elliptic curve defined over $\mathbb{Q}$ there is a cover defined over $\mathbb{Q}$ from some modular curve $X_0(N)$. Recently, this conjecture has been completely proved by Christophe Breuil, Brian Conrad, Fred Diamond and Richard Taylor following Andrew Wiles' works.

Once this conjecture has been proved, it seems natural to determine other families of curves defined over $\mathbb{Q}$ that are modular, where we say that a curve is modular if it admits a nonconstant morphism defined over $\mathbb{Q}$ from some modular curve $X_1(N)$ onto the curve. This is our starting point. To be exact, our goal is the study of the hyperelliptic curves that are modular.

The study of curves defined over $\mathbb{Q}$ of genus greater than one (not necessarily hyperelliptic) that are modular is very different from the study of elliptic curve defined over $\mathbb{Q}$, since the elliptic curves are canonically isomorphic to their jacobians and as abelian varieties they are $\mathbb{Q}$-simple. So, for every modular genus one curve defined over $\mathbb{Q}$ there is a cover defined over $\mathbb{Q}$ from some modular curve $X_1(N)$ such that the corresponding morphism between their jacobians factorices through the new part of the jacobian of $X_1(N)$. However, this condition is not always true for curves of genus greater that one. We say that a curve is *new modular of level* N if satisfies the above condition. This family of curves contains all the elliptic curves defined over $\mathbb{Q}$, and our study will be the new modular curves that are hyperelliptic.

In this thesis we have proved that the set of new modular hyperelliptic curves is finite. This surprising result led us to the determination of these curves, that is, to find equations and the corresponding modular morphisms.

For this goal we have bounded their possible genus and we have found conditions over their corresponding levels. We are able to determine that there are only 213 of such curves when the genus is two and found equations for each one. For the genus greater than two case we found only 75 of such curves. Numerical evidences suggest us that these curves are the set of all new modular hyperelliptic curves.

Título de la tesis doctoral: Curvas hiperelípticas modulares

Autor: Enrique González Jiménez

Director: Josep González Rovira

Resumen

El objetivo de esta tesis es generalizar la anteriormente conocida como *Conjetura de Shimura-Taniyama-Weil* a otras familias de curvas no elípticas. Dicha conjetura, establecía que para toda curva elíptica definida sobre $\mathbb{Q}$ existe un recubrimiento definido sobre $\mathbb{Q}$ desde alguna curva modular $X_0(N)$. Recientemente, esta conjetura ha sido demostrada en su totalidad por Christophe Breuil, Brian Conrad, Fred Diamond y Richard Taylor siguiendo las directrices marcadas por lo trabajos de Andrew Wiles.

Una vez demostrada esta conjetura, parece natural determinar otras familias de curvas definidas sobre $\mathbb{Q}$ que sean modulares, entendida la modularidad de una curva como la propiedad de admitir un recubrimiento definido sobre $\mathbb{Q}$ desde alguna curva modular $X_1(N)$. Éste es el punto de partida de esta tesis. Más concretamente, nuestro objetivo es el estudio de las curvas hiperelípticas que son modulares.

El estudio de curvas de género mayor que 1 definidas sobre $\mathbb{Q}$ (no necesariamente hiperelípticas) que son modulares presenta diferencias notables respecto del caso de curvas elípticas definidas sobre $\mathbb{Q}$, ya que estas últimas se identifican con sus jacobianas y, además, como variedades abelianas son $\mathbb{Q}$-simples. Así, para una curva modular definida sobre $\mathbb{Q}$ de género 1 siempre existe un recubrimiento definido sobre $\mathbb{Q}$ desde alguna curva modular $X_1(N)$, tal que el correspondiente morfismo entre las jacobianas factoriza a través de la parte nueva de la jacobiana de $X_1(N)$. No obstante, esta condición no puede garantizarse para curvas de género mayor que 1. Llamaremos curvas *modulares nuevas de nivel* N a aquéllas que satisfacen la anterior condición. Esta familia de curvas contiene a todas las curvas elípticas definidas sobre $\mathbb{Q}$ y nuestro estudio se restringirá a las curvas modulares nuevas que son hiperelípticas.

A diferencia del caso elíptico y de manera sorprendente, el conjunto de curvas hiperelípticas modulares nuevas es finito, tal como se demuestra en esta tesis. Tras haber obtenido este inesperado resultado, nuestro objetivo se ha encaminado en la determinación de estas curvas, es decir, a encontrar ecuaciones y los correspondientes morfismos que las hacen modulares. Para ello, hemos acotado sus géneros y encontrado condiciones sobre los niveles correspondientes. Creando paquetes computacionales, que recogían los resultados teóricos demostrados, y utilizando propiedades de las curvas modulares y de las curvas hiperelípticas, hemos conseguido probar que solamente existen 213 de tales curvas con género 2 y encontrado ecuaciones para cada una de ellas. Para el caso de género mayor que 2, hemos calculado 75 de tales curvas y presentamos evidencias numéricas que sugieren que éstas son todas las curvas hiperelípticas modulares nuevas.