



JORGE RODRÍGUEZ C.

Existencia, Perturbación y Anulación de
Soluciones Periódicas en un Sistema de
Ecuaciones Diferenciales en el Espacio

Memoria realizada para optar al
Título de Doctor por la UAB
DIRECTOR
CARLES PERELLÓ.

CERTIFICO que la present
memòria

ha estat realitzada per

Jorge L. Rodríguez Contreras,

i dirigida per mi, al

Departament de Matemàtiques de la

Universitat Autònoma de Barcelona

Bellaterra, Maig del 2003.

CARLES PERELLÓ.

Porque, contra lo que se suele creer, las matemáticas no buscan conducirnos a una verdad absoluta e inmutable, como si esta fuera una meta que señala el fin de una carrera; por el contrario, las matemáticas han sido y seguirán siendo las principales cartas de viaje que poseemos y que nos animan a continuar la vasta e interminable exploración del universo -y de nosotros mismos- que hemos emprendido: son, por encima de todo, la marca distintiva de nuestra humanidad.

Jorge Volpi.

A mi madre Martina
A mi padre Alejandro
A mi esposa Ana Rosa
A mis hijos Jorge E. y
Karen S.

Agradecimientos

Quiero expresar mis más sinceros agradecimientos al Doctor Carles Perelló por la gran dedicación e interés con que ha dirigido este trabajo, y desde luego por la formación y el trato que he recibido durante todo este tiempo.

Agradezco a la Universidad del Norte de Barranquilla (Colombia) y a la Universidad del Atlántico por brindarme la oportunidad de realizar estos estudios; al Departamento de Matemática (UAB) por poner a mi disposición los recursos y la infraestructura necesaria para la realización de este trabajo.

Quiero dar las gracias a los compañeros del Programa de Doctorado en Matemática y de manera especial a los de Ecuaciones Diferenciales por la valiosa ayuda que me han ofrecido durante la realización de este trabajo.

Agradezco, al Profesor Alfonso Freidell y a la Doctora Beatriz de Torres por el apoyo incondicional que recibí durante todo este tiempo.

Finalmente, quiero dar las gracias de una manera muy especial a mi familia, a mi esposa y mis hijos por su paciencia, apoyo y comprensión durante todo este tiempo.

Índice general

Agradecimientos	I
Introducción	v
1. Punto de Equilibrio	1
1.1. Introducción	1
1.2. La parte Lineal en el Equilibrio	1
1.2.1. Vectores Propios y Forma Normal	5
1.3. La Parte no Lineal	6
2. El Origen Como Atractor Global	9
2.1. Introducción	9
2.2. La Ecuación	9
2.2.1. Construcción de Función de Lyapunov	10
2.2.2. Estabilidad Asintótica Global	13
3. Esfera Atractora	17
3.1. Introducción	17
3.2. La Función $\Gamma(\lambda, \kappa)$	18
3.3. Técnicas de Construcción	18
3.3.1. La ecuación E_μ^*	19
3.3.2. Construcción de la Función V	19
3.3.3. Formas Cuadráticas	21
3.4. Propiedades de la Superficie	23
3.4.1. Lemas	23
3.4.2. Prueba del Lema 3.3	25
3.5. Extensión del Lema	27
3.5.1. $\kappa \geq D_0(\lambda)$	27
3.5.2. Las Superficies \mathbf{S}^+ , \mathbf{S}^-	28
3.5.3. $S^+(\lambda, \kappa) \cup S^-(\lambda, \kappa)$	28
3.6. Propiedades de \mathbf{S}^+ , \mathbf{S}^-	29
3.6.1. Cálculo de $\frac{d}{dt}V$	29

3.6.2.	$\lambda_0 = 16 \frac{D_5^2}{D_4}$	29
3.6.3.	Lema para $\mathbf{S}^-(\lambda_0, \kappa)$	33
3.7.	Teorema.	33
4.	Existencia de Oscilaciones	35
4.1.	Introducción	35
4.2.	Construcción de la Región Toroidal	36
4.3.	Comportamiento Oscilatorio y Solución Periódica	39
4.4.	Amplitud de las Oscilaciones	39
5.	Acotación de las soluciones de los sistemas perturbados	43
5.1.	Introducción	43
5.2.	Propiedades de las Soluciones $x = x(t)$	43
5.2.1.	Región $ x \leq B + \alpha$	45
5.2.2.	Arco JK	46
5.3.	Propiedades de la solución $\dot{x} = \dot{x}(\omega, t)$	48
5.3.1.	Región $ \dot{x}(\omega, t) \leq d'$	48
5.3.2.	Acotación de $\ddot{x}(\omega, t)$	50
5.4.	Existencia de Constante	50
5.4.1.	Arco $K_s K_{s+1}$	51
5.5.	Lema Dominante	53
5.6.	Prueba del Lema 5.8	56
5.6.1.	Demostración del Lema 5.8	57
6.	Eliminación de las Grandes Oscilaciones	59
6.1.	Introducción	59
6.2.	Perturbación de la Ecuación	60
6.2.1.	Función Perturbada	61
6.2.2.	Función Promedio	63
6.3.	Aproximación	67
6.3.1.	Equivalencia del Sistema Perturbado	69
6.4.	Existencia y Anulación de Oscilaciones	71
.	Bibliografía	73

Introducción

La historia de la ciencia y la tecnología se desarrolla por la necesidad que tiene el hombre de explicar los hechos naturales con miras de predecir el futuro y poder controlarlo activamente. Sin duda, la matemática como lenguaje de ciencia desempeña un papel clave para satisfacer estas necesidades. Desde que I. Newton y G. Leibnitz introdujeron el cálculo diferencial, las ecuaciones diferenciales han sido probablemente una de las herramientas más eficientes para modelar la realidad en un lenguaje abstracto.

El auge del estudio de las ecuaciones diferenciales no llegó sino hasta hace aproximadamente cien años, gracias a H. Poincarè. Cabe decir, que entre la época de Newton y Poincarè muchos matemáticos trabajaron en esta materia. Sin embargo, en una dirección muy distinta a la del matemático francés. Su interés, por lo general, se centraba en la integración y cuadratura de las ecuaciones diferenciales. En la época de Poincarè, este enfoque parecía ser un camino bastante difícil comparado con los resultados que proporcionaba.

La originalidad de la contribución de Poincarè, explicada en un trabajo realizado entre 1881 - 1886 y compuesto por cuatro partes, consiste en una concepción diferente de las ecuaciones diferenciales. Para él, éstas no sólo constituyen objetos puramente formales sujetos a algunas reglas de cálculo, sino también objetos con significado geométrico. Con ello dio inicio a la *Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales*. Aunque él sólo considera las ecuaciones en dos variables, muchas de sus ideas se han aplicado a las dimensiones mayores. Poincarè propuso la descripción del *retrato fase* de la ecuación diferencial, es decir, la colección de información mínima sobre las órbitas requeridas para determinar su estructura topológica.

Oscilaciones en ecuaciones no lineales

Igualmente es importante mencionar los fenómenos oscilatorios en general y las oscilaciones no lineales en particular. Las regularidades generales propias de los procesos oscilatorios en sistemas de diversas naturaleza física componen el objeto *Teoría de Oscilaciones*.

La necesidad del estudio de los procesos oscilatorios no estacionarios, se manifiesta en diversos problemas (por ejemplo el cálculo de las oscilaciones de los rotores de turbina;

de los centrifugadores; de los diferentes sistemas giroscópicos ; en el estudio de las oscilaciones de los sistemas con masa y rigidez variable; en las oscilaciones de los puentes; para el cálculo de los fenómenos de resonancia en un proceso de aceleración de las partículas entre otros aspectos.

Podemos decir que estos problemas nos llevan al estudio de las oscilaciones no lineales, los cuales pertenecen a uno de los dominios más importante de la física y la técnica moderna. Asimismo, se considera necesario resaltar el hecho de que el mayor beneficio de la ingeniería moderna en la teoría de las oscilaciones no lineales, proviene del interés de evitar las oscilaciones indeseadas en los sistemas físicos.

Al comparar los estudios existentes sobre el comportamiento de las soluciones en los sistemas no lineales de segundo orden [4] con las de orden superior se observa, que los sistemas de orden dos son mucho más conocido que los sistemas no lineales de orden superior.

Es importante mostrar algunas contribuciones a la *Teoría de Oscilaciones*:

el interés clásico de la teoría matemática de los sistemas oscilantes, se inicio con el trabajo de Van der Pol. En el cual obtiene una ecuación diferencial para describir las oscilaciones de amplitud constante en un triodo al vacío y el uso de los métodos gráficos con el propósito de probar la existencia de una órbita periódica. Un tiempo después, en 1929, A. Andronov establece la relación entre el experimento de Van der Pol y la idea de ciclo límite de Poincaré -Es la primera confirmación práctica de la existencia de ciclos límite-

La investigación desarrollada por L. L. Rauch [77] trata acerca de las características globales de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de tercer orden. Como en el trabajo de Van der Pol el sistema se presenta en un circuito de tubo al vacío. El sistema es una generalización del trabajo de Van der Pol y de los sistemas de Liénard, en contraste con la generalización de Levinson y Smith que permanecen dentro del marco de las ecuaciones de segundo orden, donde las cuestiones de estabilidad se manejan más fácilmente.

El trabajo de investigación de Kurt O. Friedrichs [38] aborda un problema especial de orden 3 que corresponde a un circuito eléctrico particular que involucra un tubo al vacío. La ocurrencia de soluciones periódicas para tales circuitos se ha establecido experimentalmente. En este artículo la existencia de las soluciones periódicas se deducen de la ecuación diferencial.

En las ecuaciones de 2^0 orden existen varios métodos para investigar sobre la existencia de

soluciones periódicas. En el caso de la ecuación

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t) \quad (1)$$

(con $e(t)$ periódico), un método frecuentemente usado depende del hecho que las soluciones de 1 da lugar a una transformación topológica Γ del espacio, E_2 en sí mismo de manera que un punto fijo P en E_2 que satisface $\Gamma P = P$ corresponde a una solución periódica de (1) con el mismo periodo, λ , de $e(t)$. Por el teorema del punto fijo de Brouwer, la existencia de tal punto fijo está asegurada si un dominio $\Delta \subset E_2$ acotado por una curva simple cerrada de Jordan que satisface

$$\Gamma(\overline{\Delta}) \subset \overline{\Delta} \quad (2)$$

y así la búsqueda de una solución de (1) con un periodo λ es reducido al problema de investigar si el dominio Δ que satisface (2) existe.

Levinson [65] en la investigación de cierta ecuación de segundo orden utilizó un método alternativo para obtener la acotación de la solución de 1. Su método consiste en construir una curva cerrada de Jordan en el espacio fase de la ecuación considerada, de modo que todas las soluciones la cruzan hacia el interior.

Una línea completamente diferente es la inventada por Reuter para investigar la existencia de soluciones periódicas de ecuaciones de segundo orden del tipo (1); Para ello usa la técnica de Leray-Schauder en los Espacios de Banach. El caso especial de esta teoría que es conveniente para discutir las soluciones periódicas se expresa a continuación: Sea X un espacio de Banach y $T = T(\mu, x)$ un operador dependiendo continuamente de un parámetro μ ($0 \leq \mu \leq 1$) y tal que, para cada μ fijo en este rango, T es una aplicación continua y completamente continua de X en mí mismo. Además, dada la familia de ecuaciones

$$x - \mu T(\mu, x) = 0 \quad (E_\mu)$$

supóngase que una cota a priori (véase [63]) y

$$\|x\| < A \quad (3)$$

existe para cualquier x que satisface (E_μ) , donde A es una constante independiente de μ . Entonces la ecuación (E_1) , $x - T(1, x) = 0$, tiene al menos una solución $x \in X$.

Los dos métodos considerados arriba se usan bajo la suposición que cada solución $x(t)$ de (1) satisface

$$|x(t)| \leq D, \quad |\dot{x}(t)| \leq D \quad (4)$$

para todo t grande, donde D es una constante que depende sólo de f , g y e .

Coddington y Levinson [20] examinan las condiciones suficientes para la existencia de soluciones periódicas de

$$\dot{x} = f(x, t, \mu) \tag{5}$$

donde x es un p -vector, μ un parámetro pequeño y f una función continua en t .

Jack Hale trabaja en la pregunta importante de la estabilidad de soluciones periódicas de sistemas diferenciales periódicos y autónomos.

Las observaciones y resultados de la ecuación de Van der Pol llevaron a un interés renovado en problemas que involucran los fenómenos oscilatorios en las ecuaciones diferenciales no lineales. Motivados por un interés en el comportamiento de las soluciones de ecuación de Van der Pol sujetas a fuerzas externas, Krylov y Bogoliubov [53] a principio de 1938 introducen el método del promedio.

El Problema

Origen

El problema objeto de nuestra investigación está expuesto en el libro de J. K. Hale[48] y tiene su origen en una Tesis de Maestría presentada en la Facultad de Ingeniería Mecánica en la Universidad de Purdue, cuyo autor es Boyer, R. C. [11], y titulada Sinusoidal Signal Stabilization (Febrero de 1960).

Se trata de una extinción de oscilaciones de una ecuación diferencial de tercer orden, por medio de la introducción de una perturbación periódica de amplitud y frecuencias suficientemente grandes.

Tal como expone Hale, Boyer considera la ecuación diferencial de tercer orden

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + \dot{x} + Kf(x) = 0 \quad (6)$$

donde $f(x)$ es dada en la Fig 1.

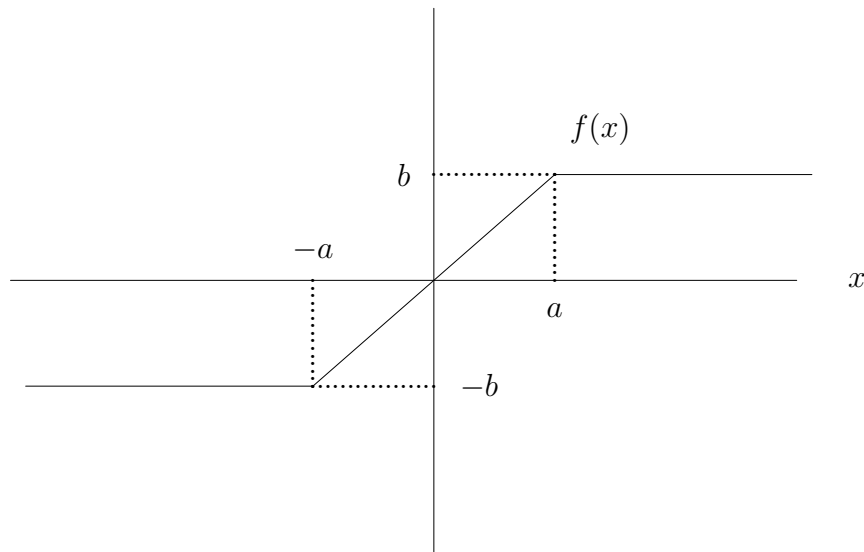


Figura 1: Gráfica de $f(x)$

El sistema 6 para algunos valores de K tiene una oscilación auto-excitada la cual es asintóticamente estable, y el problema es tratar de anular esta oscilación reemplazando $f(x)$ por $f(x + B \sin \omega t)$ y escogiendo B y ω grandes.

Los resultados de Boyer están dados en la tabla con $b = 10$, $a = 5$ en Figura 1, y ω escogido al menos veinte veces la frecuencia de la oscilación auto excitada de (6).

Tabla de valores		
K	B	Amplitud de Oscilación
2	0	13.2
	5	12.2
	7	10.0
	7.5	8.6
	8	0.00
	10	0.00
4	0	26.4
	5	26.3
	10	25.5
	15	23.0
	15.5	22.0
	16	21.0
	17	0.00
	20	0.00

Se debe entender que superpuesta a las oscilaciones que da la tabla existen oscilaciones de amplitud muy pequeña, de frecuencia ω . No hemos tenido la oportunidad de consultar directamente el trabajo de Boyer, por lo cual nos hemos apoyado en el tratamiento de él que Hale en su libro [48], y en el que se dice "Para explicar este fenómeno Boyer utilizó el método de las funciones descriptoras, para analizar el sistema promediado

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + \dot{x} + K f_0(x, B) = 0 \quad (7)$$

donde

$$f_0(x, B) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + B \sin \tau) d\tau \quad (8)$$

El método de las funciones descriptoras, según el mismo Hale, es un procedimiento gráfico que no está justificado rigurosamente.

En el mismo libro de Jack Hale [48] se estudia también la anulación de soluciones periódicas usando el sistema promediado, cuando la órbita periódica del sistema original es hiperbólicamente asintóticamente estable:

Supongamos que el sistema autónomo n -dimensional

$$\dot{x} = X(x) \quad (9)$$

tiene una órbita periódica $x^0(t)$ de período T tal que la ecuación variacional correspondientes tienen $(n - 1)$ exponentes característicos con parte real negativa. Puede ser que

la oscilación $x^0(t)$ sea indeseable. Tendremos la pregunta siguiente: Dado $\epsilon > 0$, ¿Es posible encontrar una función vectorial $g(t, B)$ de frecuencia $\frac{\omega}{2\pi}$ y amplitud B tal que el sistema

$$\dot{x} = X(g(t, B) + x) \quad (10)$$

no tiene ninguna solución periódica que se aparte de $\mathbf{0}$ una cantidad mayor que ϵ ? Si la respuesta de esta pregunta es afirmativa, decimos que la oscilación $x^0(t)$ se ha anulado. Para la resolución de este problema, puede utilizarse el método del promedio. En efecto, sea $\omega > 0$ y sea $g(\tau, B)$ una función n -vectorial periódica de periodo $T = 2\frac{\pi}{\omega}$ dependiendo en algunos parámetros $B = (B_1, \dots, B_N)$, $g(\tau, 0) = 0$, y escribamos la ecuación perturbada 10 como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X_0(B, x) + [X\{g(\tau, B) + x\} - X_0(B, x)] \\ X_0(B, x) &= \frac{1}{T} \int_0^T X\{g(\tau, B) + x\} d\tau \end{aligned} \quad (11)$$

Es claro que $X_0(B, x)$ es independiente de ω . Para algún B fijo, supongamos que la ecuación promediada

$$\dot{x} = X_0(B, x) \quad (12)$$

tiene una órbita periódica $x^0(t, B)$ cuya ecuación lineal variacional asociada tiene $(n - 1)$ exponentes característicos con parte real diferente de cero, y sea C_B el cilindro en x, t generado por esta solución periódica. Del Teorema 16-2 de [48] existe un $\omega_0 = \omega_0(B)$ y un cilindro generalizado $C_{B,\omega}$, $\omega \leq \omega_0$, de modo que la representación paramétrica de $C_{B,\omega}$ es periódica en t de periodo $\frac{T}{\omega}$ y $C_{B,\omega}$ es una variedad integral de (11), $C_{B,\omega} \rightarrow C_B$ cuando $\omega \rightarrow \infty$ y $C_{B,\omega}$ tiene las mismas propiedades de estabilidad que C_B .

Dado que $g(\omega t, 0) = 0$, se sigue que $X_0(0, x) = X(x)$ y así

$$x_0(t, 0) = x^0(t)$$

donde $x^0(t)$ es la órbita periódica de (9). Consecuentemente, si, por ejemplo, $X(x)$ es tal que la naturaleza de la solución periódica $x^0(t, B)$ de (12) satisface $\|x^0(t, B)\| \rightarrow 0$ cuando $\|B\| \rightarrow \infty$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un $B_1(\epsilon)$ de modo que $\|x^0(t, B)\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ y, si $\omega \geq \omega_0(\epsilon)$ es suficientemente grande, entonces la distancia de la variedad integral $C_{B,\omega}$ a la recta $x = 0$ es $< \epsilon$ y la oscilación $x^0(t)$ es anulada, en el sentido anteriormente indicado, es decir, siempre con una pequeña oscilación de frecuencia ω .

Consideremos como Boyer la ecuación

$$\ddot{x} + 2\ddot{x} + \dot{x} + Kf(x + B \sin \omega t) = 0 \quad (13)$$

y estudiemos su carácter oscilatorio para valores grandes de B y ω .

La aplicación del método de promedio esbozado nos da la ecuación

$$\ddot{x} + 2\ddot{x} + \dot{x} + Kf_0(x, B) = 0 \quad (14)$$

donde

$$f_0(x, B) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + B \sin \tau) d\tau \quad (15)$$

Aquí no podemos aplicar el método de promedios acabado de explicar porque no podemos

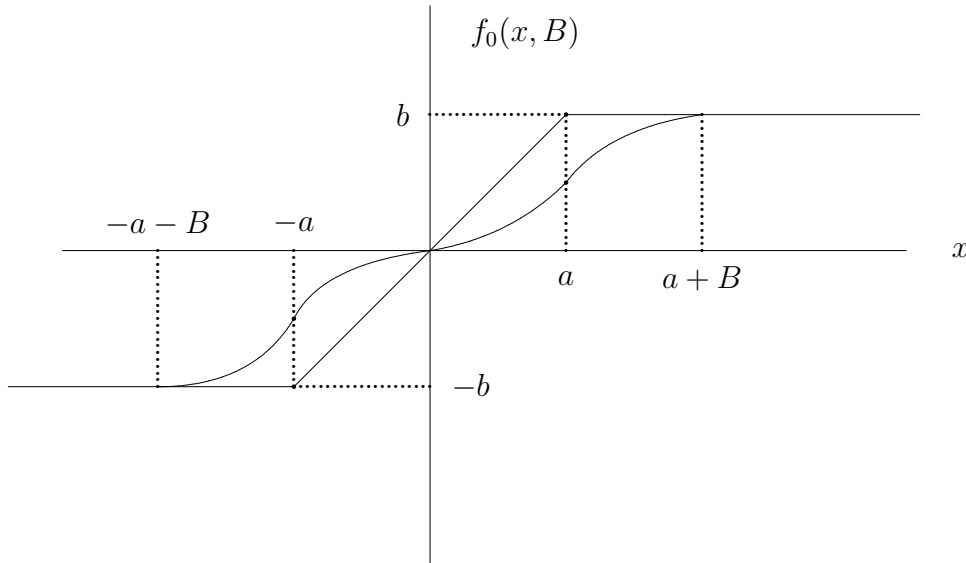


Figura 2: Función Promedio $f_0(x, B)$

determinar la existencia de las órbitas periódicas del sistema original, y menos aún su carácter atractor hiperbólico.

Objetivos

Para dar una explicación al fenómeno de extinción de oscilaciones que presenta el ejemplo de Boyer, investigamos en este trabajo una familia de ecuaciones diferenciales de tercer

orden, o equivalentemente de sistemas dinámicos en dimensión 3, que lo incluyen. No se ha podido probar que existe una órbita periódica atractora, por lo que nos hemos tenido que conformar con una órbita periódica que pueda estar inmersa en un atractor oscilatorio más complicado, pero cuyas oscilaciones tienen una amplitud mayor que cierto valor calculable. Se ha podido establecer que con una perturbación periódica de suficientemente amplitud y frecuencia, todas las soluciones tienden a un entorno de $\mathbf{0}$ tan pequeño como se quiera, con lo cual las oscilaciones, que las hay, tienen una amplitud menor que una ϵ predeterminada, y en este sentido podemos decir que hemos extinguido las oscilaciones originales.

Dada la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx + f(x) = 0$$

o el Sistema Diferencial equivalente

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -az - by - f(x)\end{aligned}\tag{16}$$

con $a > 0$, $b > 0$, f Lipschitz, no nula, no decreciente, f' continua en un entorno de $\mathbf{0}$, $f'(0) = c > 0$, existe $C > 0$ tal que $|f(x)| < C$ para toda x , $\frac{|f(x)|}{|x|} < C$ para todo $x \in (0, 1)$.

Queremos ver que

- a) Si $ab > c > 0$ y $a > 0$ y $f'(x) < ab$ para toda x , entonces la solución trivial es globalmente asintóticamente estable*
- b) Si $ab < c$ y $a^2 > 4b$, entonces existe un atractor oscilatorio de gran amplitud que contiene (o consiste de) una órbita periódica. En el caso que $a^2 \leq 4b$ tenemos que todas las órbitas excepto las dos que tienden al origen oscilan, pero no podemos asegurar que existe una órbita periódica.*

Igualmente se busca estudiar, el efecto que causa para el caso b) el introducir una función sinusoidal gran amplitud y de alta frecuencia, de manera que $f(x)$ queda sustituida por $f(x + B \sin \omega t)$.

Nuestra meta es demostrar la siguiente afirmación:

En el caso b), si $f(-x) = -f(x)$ y si B y la frecuencia ω son suficientemente grandes, las soluciones del sistema perturbado tienden a una vecindad del origen O tan pequeña como querramos. En este caso el sistema perturbado ya no mantiene las oscilaciones de amplitud relativamente grande que presenta el sistema autónomo. En este sentido podemos decir que se han extinguido estas últimas oscilaciones.

Antecedentes

Se conocen numerosos trabajos acerca de la existencia de soluciones periódicas para la ecuación de tercer grado no autónoma, por ejemplo J. O. Ezeilo [35], [36], Rolf Reissig [81], [82], [83] entre otros; mientras en el caso autónomo encontramos poca investigación sobre este tema: Rauch, L. L. [77], J. O. Ezeilo [28].

En su Tesis Doctoral C. Perelló [73] demuestra la existencia de una solución periódica para 16 cuando $a^2 > 4b$, construyendo explícitamente por métodos geométricos elementales un toro positivamente invariante con las órbitas girando alrededor del agujero.

El artículo de Ezeilo [28], On the Existence of Periodic Solutions of a certain Third Order Differential Equation. Camb. Philos. 56 1959, tiene relación con la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\dot{x} + h(x) = p(t) \quad (17)$$

en la cual a y b son constantes, $p(t)$ es una función periódica continua en t con periodo ω . La función $h(x)$ se supone continua para todo x . Las hipótesis explícitas en 17 se establecen, en dos casos distintos:

$$|h(x)| \rightarrow \infty \text{ cuando } |x| \rightarrow \infty \quad (18)$$

$$|h(x)| \leq M < \infty, \text{ para todo } x, \quad (19)$$

bajo las cuales toda solución de 17 satisface

$$|x(t)| \leq D, \quad |\dot{x}(t)| \leq D, \quad |\ddot{x}(t)| \leq D \quad (t \geq t_0), \quad (20)$$

donde t_0 depende de una x escogida, y D es una constante dependiendo solamente de a , b , h y p . Estas hipótesis son en el caso (18),

$$\left. \begin{array}{ll} (i) & a > 0, \quad b > 0, \\ (ii) & h(x) \operatorname{sgn}(x) > 0, \quad |x| \geq 1, \\ (iii) & h'(x) \text{ existe y es continua para todo } x, \text{ y} \\ & h'(x) \leq \begin{cases} c, & ab - c \equiv \delta > 0 \text{ para } |x| \geq 1 \\ C, & ab < C < \infty \text{ para } |x| \leq 1, \end{cases} \\ (iv) & |p(t)| \leq A_1, \quad \left| \int_0^t p(\tau) d\tau \right| \leq A_1, \text{ para todo } t; \end{array} \right\} (H_1)$$

O en el caso (19),

$$\left. \begin{array}{ll} (i) & a > 0, \quad b > 0, \\ (ii) & h(x) \operatorname{sgn}(x) \geq m > 0, \quad |x| \geq 1, \\ (iii) & |p(t)| \leq A_1, \quad \left| \int_0^t p(\tau) d\tau \right| \leq A_1, \text{ para todo } t. \end{array} \right\} (H_2)$$

A continuación nos referiremos a (18) y (H_1) colectivamente como las hipótesis (BH_1) y a (19) y (H_2) como las hipótesis (BH_2) . Ezeilo demuestra la existencia de soluciones periódicas bajo las hipótesis (BH_1) ; mientras que en el caso (BH_2) , no le fue posible construir una superficie en E_3 homeomorfa a una 2-esfera unidad tales que todas las soluciones 17 la cruzan hacia el interior.

Pero el mismo Ezeilo en el artículo [33] A Property of the Phase Space Trajectories of a Third Order Nonlinear Differential Equations, J. London Math. Soc. 37 (1962), 33-41, prueba el siguiente Teorema

Teorema *Suponga que $a > 0$, $b > 0$ y que*

$$(i) \quad h(0) = 0, \quad \frac{h(x)}{x} \geq c > 0 \quad (x \neq 0);$$

$$(ii) \quad h'(x) \text{ existe y es continua y } |h'(x)| \leq C \text{ para todo } x, \text{ donde}$$

$$ab - \frac{C^2}{c} > 0;$$

$$(iii) \quad |p(t)| \leq A_0 < \infty \text{ para todo } t.$$

Entonces existe una superficie Σ en el espacio E_3 tal que todas las trayectorias la cruzan hacia el interior.

Aquí las hipótesis sobre a , b y h implican la estabilidad asintótica de $\mathbf{0}$.

Para nuestro trabajo de investigación nos faltaría el caso cuando $ab < c$, por ello no contamos con un punto de apoyo para lograr nuestro objetivo

En nuestro caso realizamos una parametrización de la ecuación diferencial y de esta forma obtenemos una nueva ecuación diferencial que satisface las condiciones de Routh-Hurwitz de estabilidad y de esta manera logramos construir una Superficie Atractora.

En la segunda parte de este trabajo de investigación, a pesar de las ideas interesantes

propuestas por Jack Hale, no fue posible utilizar el Teorema 16.2 de [48] debido a la imposibilidad de probar la existencia de ciclo límite asintóticamente estable, sino que nos tenemos que conformar con un comportamiento oscilatorio de gran amplitud, con un atractor que contiene al menos una órbita periódica.

No obstante logramos probar que el sistema diferencial Perturbado es una buena aproximación del sistema Promediado para ω suficientemente grande. También demostramos la anulación de las soluciones oscilatorias en el sistema perturbado para ω y B suficientemente grande.

Resumen

En este trabajo de investigación se presenta una modesta contribución a algunos de los temas citados anteriormente, siempre con el uso de los sistemas de ecuaciones diferenciales en el espacio. En él se prueba que el sistema 1.2 con $ab < c$ tiene una solución periódica y se demuestra que el Sistema Perturbado no tiene comportamiento oscilatorio de gran amplitud para B , y ω suficientemente grande.

Para este propósito distribuimos el trabajo de investigación de la siguiente forma:

Capítulo *I*. Se establece el tipo del punto de equilibrio en términos de los parámetros a , b y c , y se reduce el sistema a una forma normal mediante un cambio lineal de coordenadas.

Capítulo *II*. Se parte del criterio de estabilidad de Routh Hurwitz

$$a > 0 \quad c > 0 \quad ab > c$$

bajo el cual cada solución de la ecuación lineal

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx + cx = 0$$

tiende a la solución trivial $x = 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Se construye una función de Lyapunov para el sistema lineal y por analogía se obtiene para el sistema no lineal una función definida positiva con derivada menor que cero. Con ello demostramos que la solución trivial es globalmente asintóticamente estable.

Capítulo *III*. Teniendo en cuenta las condiciones $ab < c$, construimos una Superficie Atractora, la cual se define por medio de $V(x, y, z) + \lambda(z + ay + bx) - \kappa = 0$. La dificultad radica en hallar una función $V(x, y, z)$ ya que no se cumple el criterio de Routh Hurwitz. Para superar esta dificultad se parametriza el sistema con $\mu \in [0, 1]$ y así se obtiene un sistema que depende de este parámetro que bajo ciertas condiciones, satisface las condiciones

de Routh Hurwitz. De esta manera se puede entrar a construir una función de Lyapunov para el sistema lineal resultante y por analogía se construye una función V definida positiva con $\dot{V} \leq 0$ en cierta región. En esta forma se termina la construcción de la Superficie Atractora, que además cumple con la condición de que cualquier semirrecta que parte del origen la corta en un solo punto.

Capítulo *IV*. En el caso que $a^2 > 4b$, a la región limitada por la esfera atractora construida en el capítulo *III* se le quita una región cónica-cilíndrica para formar así una región tridimensional cerrada topológicamente equivalente al toro sólido. El campo vectorial tiene dirección en todos los puntos de la frontera hacia el interior de la región con restricciones convenientes en los parámetros. La trayectoria continua de cualquier punto, se define siguiendo el camino correspondiente alrededor del toro hasta que corte la sección de superficie nuevamente. Aplicando el teorema del punto fijo de Brouwer se establece la existencia de una órbita cerrada alrededor del agujero del toro. Esto corresponde a una solución periódica. Las demás trayectorias tienden a ella o bien a un atractor que la contiene. Cuando $a^2 \leq 4b$ no podemos establecer la región toroidal ni, por tanto, la existencia de una solución periódica alrededor del cilindro \mathbf{C} . Sin embargo todas las órbitas, excepto las dos que tienden a 0, tienen un movimiento oscilatorio de gran amplitud. Ponemos gran para distinguirlas de las oscilaciones que aparecen al perturbar el sistema, y que podemos hacer tan pequeña como querramos. De hecho la amplitud de estas oscilaciones tendrá una cota inferior dada por los parámetros de sistema, tal como calcularemos más adelante.

Capítulo *V*. Teniendo en cuenta que: $a > 0$, $b > 0$, f Lipschitz, no decreciente, con derivada continua en 0 y $f'(0) = c > 0$, $|f(x)| < C$ para toda x , se prueba la acotación de las soluciones de la ecuación diferencial perturbada

$$\ddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + f(x + B \sin(\omega t)) = 0$$

Capítulo *VI*. Considerando el sistema del capítulo *IV*, en que el sistema tiene un comportamiento oscilatorio, se demuestra en el caso que $f(-x) = -f(x)$, que al reemplazar la función $f(x)$ por $f(x + B \sin \omega t)$, y para valores de B y ω suficientemente grande el sistema no tiene movimiento oscilatorio de gran amplitud. De hecho todas las soluciones tienden a una vecindad del origen tan pequeña como se quiera.

Para realizar esta demostración se procede de la siguiente manera:

Inicialmente se expresa la función perturbada en términos de x y $B \sin(\omega t)$, para proceder a calcular la función promedio. Luego se prueba que para $h(\tau, x) = f(x + B \sin \tau) - f_0(x, B)$, existe una función continua $H(\tau, x, \frac{1}{\omega})$ tal que $|H(\tau, x, \frac{1}{\omega})| \leq \omega \eta(\omega)$ donde $\eta(\omega) \rightarrow 0$ cuando $\omega \rightarrow \infty$ y realizando la sustitución $z = s + \frac{1}{\omega} H(t, x, \frac{1}{\omega})$ se demuestra que el sistema

perturbado es equivalente al sistema

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = z + \frac{1}{\omega} H(t, x, \frac{1}{\omega})$$

$$\dot{z} = -az - by - f_0(x, B) - \frac{a-1}{\omega} H(t, x, \omega) - \frac{1}{\omega} \frac{\partial H}{\partial x} y$$

De esta manera se prueba que para ω suficientemente grande, el sistema promediado es una buena aproximación del sistema perturbado. Esto es que toda solución del sistema perturbado esta suficientemente cercana a una solución del sistema promediado.

Igualmente se prueba que existe B_0 tal que $B > B_0$, la solución trivial del sistema promediado es asintóticamente estable para valores de ω suficientemente grandes.

Por último se prueba que para B y ω suficientemente grande el sistema perturbado no tiene movimiento oscilatorio de gran amplitud, es decir, la perturbación ha aniquilado las oscilaciones de gran amplitud.

Capítulo 1

Punto de Equilibrio

1.1. Introducción

Se considera el punto de equilibrio (solución constante) de la ecuación diferencial

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + f(x) = 0 \quad (1.1)$$

donde la función f Lipschitz, f' existe y es continua en un entorno de 0 y $f'(0) = c > 0$, $xf(x) > 0$ si $x \neq 0$, $a > 0$, $b > 0$.

Es conveniente considerar aquí, en lugar de la ecuación 1.1, el sistema diferencial equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -az - by - f(x) \end{cases} \quad (1.2)$$

Es claro que $(0, 0, 0)$ es el único punto de equilibrio del sistema.

1.2. La parte Lineal en el Equilibrio

Para el estudio del punto singular linealizamos el sistema y obtenemos :

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -az - by - cx \end{cases} \quad (1.3)$$

La matriz Jacobiana en $(0, 0, 0)$ es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{bmatrix}$$

y su ecuación característica es:

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (1.4)$$

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ las raíces de la ecuación característica 1.4, las cuales satisfacen:

$$\begin{cases} A_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = -a \\ A_1 = \lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2\lambda_3 & = b \\ A_0 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 & = -c \end{cases}$$

La primera es la traza de la matriz jacobiana y el último el determinante de la matriz.

Tenemos que la gráfica de $\phi(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $a, b, c > 0$ tiene un punto de inflexión en $-\frac{a}{3}$. Si $3b < a^2$, entonces ϕ tiene un máximo en $x_M = (-a - \sqrt{a^2 - 3b})$ y un mínimo en $x_m = (-a + \sqrt{a^2 - 3b})$, ambos valores negativos. Si c es tal que $\phi(x_m) < 0$, entonces tendremos tres ceros reales y negativos de ϕ , que corresponde a un nodo atractor del sistema, y si c es mayor, tendremos un cero real y negativo λ_1 y dos ceros conjugados complejos λ_2 y λ_3 . Cuando $3b > a^2$, entonces ϕ es creciente y para c positiva tenemos una raíz real negativa λ_1 y dos conjugadas complejas λ_2 y λ_3 . En ambos casos la parte real de las raíces complejas vale $-\frac{(a + \lambda_1)}{2}$. Será negativa cuando $a + \lambda_1 > 0$ con lo que el origen será un atractor, y positiva en caso contrario, con lo que el origen será una silla foco con una superficie asintótica inestable. En las siguientes figuras se ilustra la trayectoria de las raíces en el plano complejo cuando c crece.

Los valores de las raíces λ_2 y λ_3 en función de una raíz real λ_1 vienen dados por la fórmula

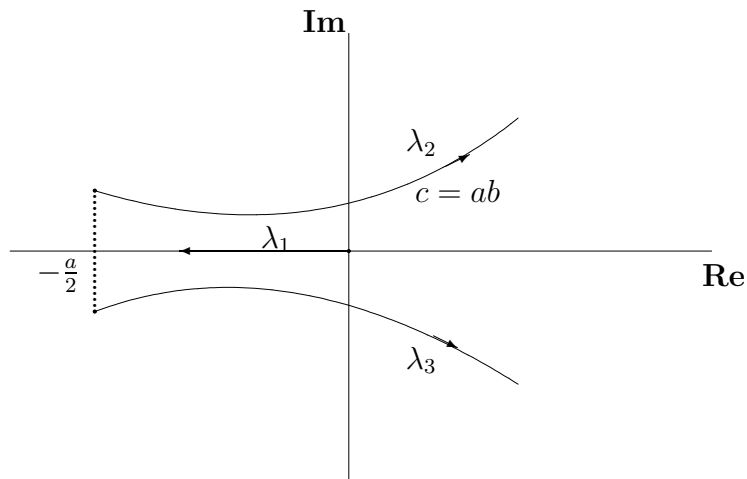


Figura 1.1: Caso $a^2 < 3b$

$$\lambda_{2,3} = -\frac{a + \lambda_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3\lambda_1 - 2a\lambda_1 + a^2 - 4b} \quad (1.5)$$

que permite obtener los diagramas de las raíces al variar λ_1 .

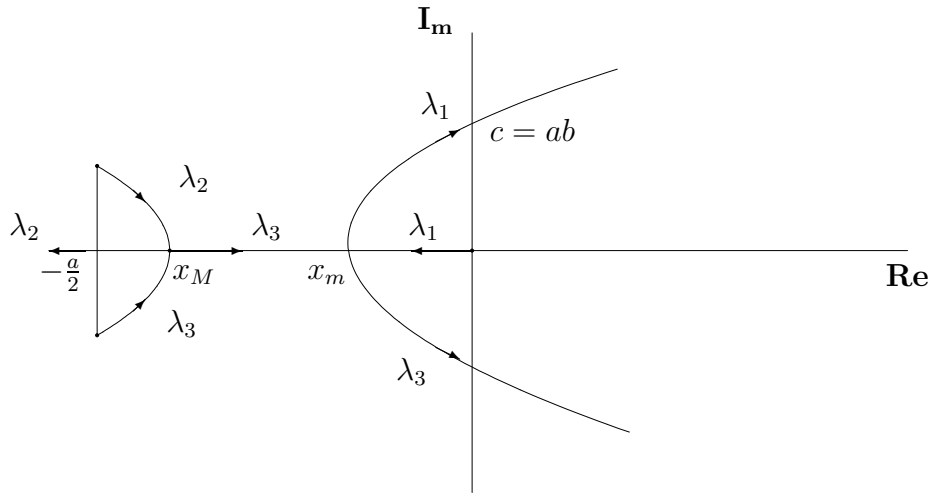


Figura 1.2: Caso $4b > a^2 > 3b$

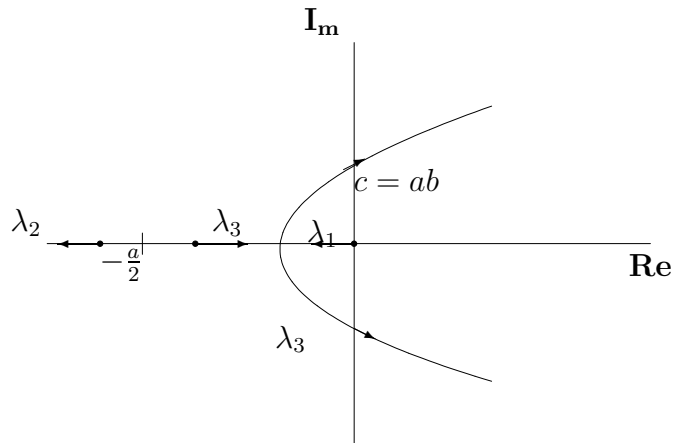


Figura 1.3: Caso $a^2 > 4b$

Lema 1.1. a) Supongamos que $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = \alpha + i\beta$, y, $\lambda_3 = \alpha - i\beta$ raíces de la ecuación característica, entonces:

- $\alpha > 0 \Leftrightarrow ab < c$

- $\alpha < 0 \Leftrightarrow ab > c$
- $\alpha = 0 \Leftrightarrow ab = c$

b) Supongamos que $\lambda_1, \lambda_2, y, \lambda_3$ son raíces reales, entonces λ_2, y, λ_3 son negativas y $ab > c$.

Demostración. Primero hallaremos $-ab + c$ en términos de las raíces:

$$\begin{aligned} A_2 A_1 &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) \\ &= \lambda_1^2 \lambda_2 + \lambda_1^2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2^2 \lambda_3 + \\ &\quad + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3^2 + \lambda_2 \lambda_3^2 \end{aligned}$$

Luego:

$$-ab + c = 2\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_2 + \lambda_1^2 \lambda_3 + \lambda_2^2 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3^2$$

Así que:

$$-ab + c = (\lambda_2 + \lambda_1)(\lambda_3 + \lambda_1)(\lambda_2 + \lambda_3) \quad (1.6)$$

a) Como $\lambda_2 = \alpha + \mathbf{i}\beta$ y $\lambda_3 = \alpha - \mathbf{i}\beta$ se tiene de la ecuación(1.6):

$$-ab + c = 2\alpha \left((\alpha + \lambda_1)^2 + \beta^2 \right)$$

Por lo tanto:

$$\alpha > 0 \Leftrightarrow ab < c \quad \alpha < 0 \Leftrightarrow ab > c \quad \alpha = 0 \Leftrightarrow ab = c$$

b) Supongamos que $\lambda_1 < 0$, λ_2, y, λ_3 son reales, dado que $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -c < 0$, se tiene que $\lambda_2 \lambda_3 > 0$ entonces $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 < 0$ (Porque si $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 > 0$ y como $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -a < 0$, entonces $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ y $\lambda_1 + \lambda_3 < 0$ y así obtenemos que $b = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_3(\lambda_2 + \lambda_1) < 0$ en contradicción con el hecho de que $b > 0$).

Por otra parte de la ecuación (1.6):

$$-ab + c = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3) < 0 \Rightarrow c < ab$$

□

1.2.1. Vectores Propios y Forma Normal

Efectuemos un cambio de lineal de coordenadas P que nos lleva la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{bmatrix}$$

a una forma normal.

Si $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = \alpha + \mathbf{i}\beta$, $\lambda_3 = \alpha - \mathbf{i}\beta$, $\beta > 0$, se tiene que la forma normal puede ser de la siguiente manera

$$N = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

y entonces estableciendo que

$$AP = PN$$

obtenemos

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & \beta & \alpha \\ \lambda_1^2 & 2\beta\alpha & \alpha^2 - \beta^2 \end{bmatrix}$$

Esta transformación nos lleva a un sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) cuyos ejes están a lo largo de los vectores columnas de P , y en el cual la ecuación lineal queda

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_2 - \beta x_3 \\ \dot{x}_3 &= \beta x_2 + \alpha x_3 \end{aligned} \quad (1.8)$$

en el caso complejo.

La matriz \mathbf{P}^{-1} viene dada por:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11}^* & r_{12}^* & r_{13}^* \\ r_{21}^* & r_{22}^* & r_{23}^* \\ r_{31}^* & r_{32}^* & r_{33}^* \end{bmatrix}$$

Donde

$$\begin{aligned}
 r_{11}^* &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{[(\alpha - \lambda_1)^2 + \beta^2]} \\
 r_{12}^* &= \frac{-2\alpha}{[(\alpha - \lambda_1)^2 + \beta^2]} \\
 r_{13}^* &= \frac{1}{[(\alpha - \lambda_1)^2 + \beta^2]} \\
 r_{21}^* &= \frac{\lambda_1[\alpha^2 - \alpha\lambda_1 - \beta^2]}{\beta[(\alpha - \lambda_1)^2 + \beta^2]} \\
 r_{22}^* &= \frac{(-\alpha^2 + \lambda_1^2) + \beta^2}{\beta[(\alpha - \lambda_1)^2 + \beta^2]} \\
 r_{23}^* &= \frac{\alpha - \lambda_1}{\beta[(\alpha - \lambda_1)^2 + \beta^2]} \\
 r_{31}^* &= -\frac{2\alpha\lambda_1 - \lambda_1^2}{[(\alpha - \lambda_1)^2 + \beta^2]} \\
 r_{32}^* &= \frac{2\alpha}{[(\alpha - \lambda_1)^2 + \beta^2]} \\
 r_{33}^* &= -\frac{1}{[(\alpha - \lambda_1)^2 + \beta^2]}
 \end{aligned}$$

1.3. La Parte no Lineal

Aplicando la misma transformación al sistema no lineal, tenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \\ -az - by - cx \end{bmatrix} - P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) - cx \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) - cx \end{bmatrix}$$

El sistema en la parte no lineal queda de la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) - cx \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \alpha x_2 - \beta x_3 \\ \beta x_2 + \alpha x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{[(\alpha - \lambda_1)^2 + \beta^2]} [f(x_1 + x_3) - c(x_1 + x_3)] \\ \frac{\alpha - \lambda_1}{\beta[(\alpha - \lambda_1)^2 + \beta^2]} [f(x_1 + x_3) - c(x_1 + x_3)] \\ -\frac{1}{[(\alpha - \lambda_1)^2 + \beta^2]} [f(x_1 + x_3) - c(x_1 + x_3)] \end{bmatrix}$$

El sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 - \frac{1}{[(\alpha - \lambda_1)^2 + \beta^2]} [f(x_1 + x_3) - c(x_1 + x_3)] \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_2 - \beta x_3 - \frac{\alpha - \lambda_1}{\beta[(\alpha - \lambda_1)^2 + \beta^2]} [f(x_1 + x_3) - c(x_1 + x_3)] \\ \dot{x}_3 &= \beta x_2 + \alpha x_3 + \frac{1}{[(\alpha - \lambda_1)^2 + \beta^2]} [f(x_1 + x_3) - c(x_1 + x_3)] \end{aligned} \quad (1.9)$$

O para un referencia más adelante, en coordenadas cilíndricas,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 - \frac{1}{[(\alpha - \lambda_1)^2 + \beta^2]} [f(x_1 + r \sin \theta) - c(x_1 + r \sin \theta)] \\ \dot{r} &= \alpha r + \frac{1}{[(\alpha - \lambda_1)^2 + \beta^2]} \left[\sin \theta - \frac{\alpha - \lambda_1}{\beta} \cos \theta \right] [f(x_1 + r \sin \theta) - c(x_1 + r \sin \theta)] \\ \dot{\theta} &= \beta + \frac{1}{r[(\alpha - \lambda_1)^2 + \beta^2]} \left[\cos \theta + \frac{\alpha - \lambda_1}{\beta} \sin \theta \right] [f(x_1 + r \sin \theta) - c(x_1 + r \sin \theta)] \end{aligned} \quad (1.10)$$

Capítulo 2

El Origen Como Atractor Global

2.1. Introducción

En los sistemas diferenciales ordinarios no lineales la determinación de la estabilidad global asintótica en los puntos de equilibrio tiene una importancia especial.

Un método importante dado este problema es el método directo de Lyapunov, con el cual podemos resolver el problema de estabilidad asintótica global del sistema por medio de la construcción y estudio de una función de Lyapunov, que es similar a la función de energía del sistema.

El objetivo principal en esta parte de nuestra investigación es el estudio de la estabilidad asintótica global de la solución trivial de una ecuación diferencial de tercer orden no lineal autónoma, relevante para la solución de nuestro problema.

Por medio de analogías se obtiene la correspondiente función de Lyapunov y se establecen algunas condiciones suficientes de estabilidad asintótica global para este tipo de sistemas.

En esta sección se estudia la ecuación no lineal de tercer orden $\ddot{x} + a\dot{x} + bx + f(x) = 0$. Para ello se construye una función de Lyapunov para el sistema lineal bajo las condiciones $ab > c > 0$, $a > 0$ y por analogía se obtiene una función de Lyapunov para el sistema no lineal y con ello se prueba que la solución trivial del sistema es globalmente asintóticamente estable la demostración se basa en Li Qing [76] .

2.2. La Ecuación

En esta sección se estudia la estabilidad asintótica global de la ecuación diferencial de tercer orden no lineal:

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + f(x) = 0 \quad (2.1)$$

Que es equivalente a estudiar el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= z \\ \frac{dz}{dt} &= -az - by - f(x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Donde $f(x)$ es una función que cumple las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} a > 0 \quad \quad \quad b > 0 \quad \quad \quad f \text{ derivable.} \\ ab - f'(x) > 0 \\ xf(x) > 0 \quad \quad \text{para } x \neq 0 \\ \int_0^{\pm\infty} f(x) dx = F(\pm\infty) = +\infty \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.2.1. Construcción de Función de Lyapunov

El método de construcción que esbozaremos es una adaptación de Cartwright [16] y de un teorema de Lyapunov que establece la correspondencia entre cada forma cuadrática definida positiva $U(x, y, z)$ y una forma cuadrática positiva $V(x, y, z)$ tal que

$$\dot{V} = -U. \quad (2.4)$$

Barbashin y Simonov usan una función U qué es un cuadrado perfecto.

Empezamos con la ecuación lineal

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \quad (2.5)$$

o su sistema equivalente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -az - by - cx \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde a , b , y c son constantes que satisfacen las condiciones

$$a > 0 \quad ab > c > 0. \quad (2.7)$$

Sea V dada por

$$V = (k_1x + k_2y)^2 + (k_3y + k_4z)^2 + k_5y^2$$

donde k_1 , k_2 , k_3 , k_4 , y k_5 son constantes positivas; busquemos las constantes de manera que

$$\dot{V} = -U = -(ab - c)y^2 \quad (2.8)$$

y como

$$\begin{aligned} \dot{V} = & 2(k_1^2 - ck_3k_4)xy + 2(k_1k_2 - ck_4^2)xz + 2(k_1k_2 - bk_3k_4)y^2 + \\ & + 2(k_2^2 + k_3^2 - ak_3k_4 - bk_4^2 + k_5)yz + 2k_4(k_3 - ak_4)z^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

De estas dos últimas ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned} k_1^2 - ck_3k_4 &= 0 \\ k_1k_2 - ck_4^2 &= 0 \\ k_1k_2 - bk_3k_4 &= -\frac{ab - c}{2} \\ k_2^2 + k_3^2 - ak_3k_4 - bk_4^2 + k_5 &= 0 \\ k_4(k_3 - ak_4) &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones tenemos que:

$$k_1 = \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{2}} \quad k_2 = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2a}} \quad k_3 = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad k_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad k_5 = \frac{ab - c}{2a}$$

Por lo tanto

$$V = \left(\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2a}}y \right)^2 + \frac{ab - c}{2a}y^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z \right)^2$$

Desarrollando estas expresiones tenemos:

$$V = \frac{1}{2}acx^2 + cxy + \frac{1}{2}(a^2 + b)y^2 + ayz + \frac{1}{2}z^2$$

$$V = a \int_0^x cxdx + cxy + \int_0^y by dy + a^2 \int_0^y y dy + ayz + \int_0^z z dz \quad (2.10)$$

De aquí, por analogía, obtenemos la función de Lyapunov de 2.2

$$V(x, y, z) = aF(x) + f(x)y + \Phi(y) + a^2G(y) + ayz + H(z) \quad (2.11)$$

donde

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx \quad G(y) = \frac{1}{2}y^2 \quad \Phi(y) = bG(y) \quad H(z) = \frac{1}{2}z^2$$

Luego

$$\begin{aligned} \dot{V} &= aF'(x)\frac{dx}{dt} + f'(x)y\frac{dx}{dt} + f(x)\frac{dy}{dt} + \Phi'(y)\frac{dy}{dt} + a^2G'(y)\frac{dy}{dt} + \\ &\quad + a\frac{dy}{dt}z + ay\frac{dz}{dt} + z\frac{dz}{dt} \\ &= af(x)y + f'(x)y^2 + f(x)z + byz + a^2yz + az^2 - \\ &\quad - a^2yz - aby^2 - af(x)y - az^2 - byz - f(x)z \\ \dot{V} &= -(ab - f'(x))y^2 \end{aligned}$$

2.2.2. Estabilidad Asintótica Global

Teorema 2.1. *La solución trivial del sistema 2.2 es globalmente asintóticamente estable si las condiciones 2.3 se cumplen.*

Demostración. Para cualquier solución $(x(t), y(t), z(t))$ de 2.2, donde $\dot{V} = 0$, se tiene que $y(t) \equiv 0$. De la segunda igualdad de 2.2 tenemos que $z(t) \equiv 0$. Luego de la tercera igualdad de 2.2 se tiene que $x(t) \equiv 0$. De aquí, no existe una trayectoria no trivial en el conjunto

$$\{(x, y, z) | \dot{V} = 0\}$$

Ahora probaremos que V está definida positivamente

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= [\sqrt{aF(x)}^2 + 2\frac{f(x)y}{2\sqrt{aF(x)}}\sqrt{aF(x)} + \frac{f^2(x)y^2}{4aF(x)}] + [\Phi(y) - \frac{f^2(x)y^2}{4aF(x)}] + \\ &\quad + [a^2\sqrt{G(y)}^2 + \frac{2yz}{2\sqrt{G(y)}}a\sqrt{G(y)} + \frac{y^2z^2}{4G(y)}] + [H(z) - \frac{y^2z^2}{4G(y)}] \\ V(x, y, z) &= [aF(x) + \frac{f(x)y}{2\sqrt{aF(x)}}]^2 + \frac{1}{aF(x)} \int_0^y y \left\{ \int_0^x [ab - f'(x)]f(x) dx \right\} dy + \\ &\quad + [a\sqrt{G(y)} + \frac{yz}{2\sqrt{G(y)}}]^2 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= [aF(x) + \frac{f(x)y}{2\sqrt{aF(x)}}]^2 + \frac{1}{aF(x)} \int_0^y y \left\{ \int_0^x [ab - c]f(x) dx \right\} dy + \\ &\quad + [a\sqrt{G(y)} + \frac{yz}{2\sqrt{G(y)}}]^2 \end{aligned}$$

Cuando $x \neq 0, y \neq 0, y, z \neq 0$.

I.- Así que, si $x \neq 0, y \neq 0, y, z \neq 0$, tenemos que

$$V(x, y, z) > 0$$

II.- Si $x = 0$, se tiene que

$$V(0, y, z) = \Phi(y) + a^2G(y) + ayz + H(z)$$

A) Si $y = 0$, entonces $V(0, 0, z) = H(z) > 0$.

B) Si $z = 0$, entonces $V(0, y, 0) = \Phi(y) + a^2 G(y) > 0$.

C) Si $y \neq 0$, $y, z \neq 0$, tenemos que

$$V(0, y, z) = \Phi(y) + \left[a\sqrt{G(y)} + \frac{yz}{2\sqrt{G(y)}} \right]^2 > 0.$$

III.- Si $y = 0$, se tiene que $V(x, 0, z) = aF(x) + H(z) > 0$.

IV.- Cuando $z = 0$, entonces

$$V(x, y, 0) = aF(x) + f(x)y + \Phi(y) + a^2 G(y).$$

A) Si $y = 0$, se tiene $V(x, 0, 0) = aF(x) > 0$.

B) Si $x = 0$, tenemos $V(0, y, 0) = \Phi(y) + a^2 G(y) > 0$.

C) Si $x \neq 0$, $y, y \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} V(x, y, 0) &= aF(x) + f(x)y + \Phi(y) + a^2 G(y) \\ &= \left[\sqrt{aF(x)}^2 + 2\frac{f(x)y}{2\sqrt{aF(x)}} + \frac{f^2(x)y^2}{4aF(x)} \right] + \left[\Phi(y) - \frac{f^2(x)y^2}{4aF(x)} \right] + a^2 G(y) \\ &= \left[\sqrt{aF(x)} + \frac{f(x)y}{2\sqrt{aF(x)}} \right]^2 + \frac{1}{aF(x)} \int_0^y y \left[\int_0^x (ab - f'(x))f(x) dx \right] dy + \\ &\quad + a^2 G(y) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} V(x, y, 0) &= \left[\sqrt{aF(x)} + \frac{f(x)y}{2\sqrt{aF(x)}} \right]^2 + \frac{1}{aF(x)} \int_0^y y \left[\int_0^x (ab - c)f(x) dx \right] dy + \\ &\quad + a^2 G(y) > 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto de I, II, III, IV se tiene que $V(x, y, z)$ esta definida positivamente

Consideremos el dominio:

$$D_l = \{(x, y, z) \mid V < l, \quad |x| < N\}$$

en el cual l y N son constantes positivas, y como $0 \leq V < l$ y $|x| < N$, entonces D_l es acotado.

Como $F(\pm\infty) = +\infty$ tenemos que

$$\sqrt{aF(\pm N)} > l$$

Pero tenemos:

$$|\sqrt{aF(x)} + \frac{f(x)y}{2\sqrt{aF(x)}}| < l \quad \text{en } D_l$$

Luego,

$$f(\pm N)y < 0 \quad \text{en } x = \pm N$$

Así que

$$\pm(N)y < 0$$

entonces

$$\frac{dx^2}{dt} = 2(\pm N)y < 0 \quad \text{en } x = \pm N$$

Así que $\dot{V} \leq 0$ en la frontera de D_l , entonces el campo vectorial del sistema 2.2 va de afuera hacia adentro; Por lo tanto cualquier semi-trayectoria de cualquier punto en D_l permanece en D_l .

Vemos que D_l es arbitrariamente grande a medida que l es arbitrariamente grande, entonces cualquier semi-trayectoria positiva de 2.2 es acotada. \square

Capítulo 3

Esfera Atractora

3.1. Introducción

Diferentes autores, Ezeilo [30], [31], [32], [34], [35], [36], Violet Haas [43], Rolf Reissig [81],[82], [83], [84], han tratado sobre la estabilidad de la solución nula y la existencia de soluciones periódicas para la ecuación

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + f(x) = p(t)$$

donde a, b, c son constantes, f es la función continua considerada en el capítulo 1 y p es una función periódica de período ω .

Ezeilo en [33] construye una superficie esférica en \mathbf{R}^3 que encierra al origen y que es atravesada hacia adentro por las curvas integrales del campo vectorial dado por

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = z,$$

$$\frac{dz}{dt} = -az - by - f(x) + p(t)$$

En este capítulo consideramos la ecuación autónoma

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx + f(x) = 0 \tag{3.1}$$

o su sistema equivalente

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= z, \\ \frac{dz}{dt} &= -az - by - f(x),\end{aligned}\tag{3.2}$$

f del tipo considerado en el Teorema 3.1, con la posibilidad de que el origen sea inestable, es decir, con $f'(0) = c > ab$, que corresponde a una silla-foco con una variedad asintótica de dimensión 2 inestable. Mostraremos que en este caso también existe una superficie esférica positivamente invariante.

Diremos que una superficie en E_3 tiene la propiedad \mathbf{P}_1 si es acotada y cada recta dirigida desde el origen de coordenadas a la superficie en E_3 la interseca en uno y sólo un punto.

Teorema 3.1. *Suponga que $a > 0$, $b > 0$, f Lipschitz, no decreciente, con derivada continua en 0 y $f'(0) = c > 0$, Existe un $C > 0$ tal que para toda x $|f(x)| < C$ y $\frac{|f(x)|}{|x|} < C$ para $0 < |x| < 1$.*

Entonces, Existe una superficie esférica \mathbf{S} en el espacio que cumple la propiedad \mathbf{P}_1 y tal que toda trayectoria del sistema autónomo la cruza hacia el interior, para t suficientemente grande.

3.2. La Función $\Gamma(\lambda, \kappa)$

La prueba del teorema descansa directamente en la construcción de la superficie \mathbf{S} .

Buscaremos superficies de la forma

$$\Gamma(\lambda, \kappa) \equiv V(x, y, z) + \lambda(z + ay + bx) - \kappa = 0\tag{3.3}$$

donde λ , y , κ son constantes finitas.

3.3. Técnicas de Construcción

El principal objetivo en esta parte del trabajo de investigación es proporcionar una estructura para la construcción de funciones definidas positivas. La discusión está en el contexto

de la ecuación particular bajo estudio. De esta manera podemos construir la superficie deseada.

3.3.1. La ecuación E_μ^*

Consideremos junto con 3.1 la familia (E_μ^*) de ecuaciones diferenciales

$$(E_\mu^*) \quad \ddot{x} + \alpha(\mu)\ddot{x} + \beta(\mu)\dot{x} + \gamma(\mu)x + \mu^2 f(x) = 0, \quad \mu \in [0, 1]$$

donde

$$\alpha(\mu) = \mu a + (1 - \mu)a_1, \quad \beta(\mu) = \mu b + (1 - \mu)b_1, \quad \gamma(\mu) = (1 - \mu)^2 c_1. \quad (3.4)$$

Los números a_1 , b_1 , c_1 son constantes positivas escogidas de tal forma que las siguientes desigualdades son satisfechas:

$$0 < c_1 < a_1 b_1 \quad (3.5)$$

Por lo tanto:

$$(1 - \mu)^2 c_1 < (1 - \mu)^2 a_1 b_1 \Rightarrow \gamma(\mu) < \alpha(\mu)\beta(\mu)$$

Así que el sistema equivalente a (E_μ^*) es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -\alpha(\mu)z - \beta(\mu)y - \gamma(\mu)x - \mu^2 f(x) \end{aligned}$$

3.3.2. Construcción de la Función V

Ahora consideraremos el Sistema Lineal, para el cual construiremos una función de Liapunov

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= z \\ \frac{dz}{dt} &= -\alpha z - \beta y - \gamma x \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde α , β , y γ son constantes que satisfacen las condiciones

$$\alpha > 0 \quad \alpha\beta > \gamma > 0. \quad (3.7)$$

El método de construcción es el mismo que utilizamos en la Sección 2.2.1

De la ecuación 3.7 existe una constante k tal que

$$\frac{1}{\alpha} < k < \frac{\beta}{\gamma} \quad (3.8)$$

Sea W una función definida positiva dada por

$$W = k_1(Ax + By)^2 + k_2(Dy + Ez)^2 + k_3y^2$$

Busquemos las constantes positivas k_1 , k_2 , k_3 , A , B , D , y, E de manera que

$$\dot{W} = -U = -(\beta - \gamma k)y^2 - (\alpha k - 1)z^2 \quad (3.9)$$

Además se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{W} = & 2(k_1A^2 - 2k_2\gamma ED)xy + (2k_1AB - 2k_2E^2\gamma)xz + \\ & +(2k_1AB - 2k_2D\beta E)y^2 + (2k_1B^2 + 2k_2D^2 - 2k_2\alpha ED + 2k_3)yz + \\ & +(2k_2ED - 2k_2\alpha E^2)z^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

De las ecuaciones 3.9 y 3.10 se tiene:

$$\begin{aligned} k_1A^2 - k_2\gamma ED &= 0 \\ k_1AB - k_2E^2\gamma &= 0 \\ 2(k_1AB - k_2D\beta E) &= -(\beta - \gamma k) \\ k_1B^2 + k_2D^2 - k_2\alpha ED + k_3 &= 0 \\ 2(k_2ED - k_2\alpha E^2) &= -(\alpha k - 1) \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones tenemos que:

$$\begin{aligned} 2k_1 &= \gamma & 2k_2 &= 1 & 2k_3 &= \left(\alpha - \frac{1}{k}\right) + k(\beta - \gamma k) & A &= 1 & B &= k & E &= \sqrt{k} \\ D &= \frac{1}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$2W = \gamma \left(x + ky\right)^2 + \left(\sqrt{k}z + \frac{1}{\sqrt{k}}y\right)^2 + \left(\left(\alpha - \frac{1}{k}\right) + k(\beta - \gamma k)\right)y^2$$

Desarrollando estas expresiones tenemos:

$$\begin{aligned} 2W &= \gamma x^2 + (\alpha + k\beta)y^2 + 2yz + kz^2 + 2k\gamma yx \\ &= 2 \int_0^x \gamma x \, dx + (\alpha + k\beta)y^2 + kz^2 + 2yz + 2ky(\gamma x) \end{aligned}$$

De aquí, por analogía para el sistema no lineal, sustituyendo $\gamma x^2 = 2 \int_0^x \gamma x \, dx$ por $2\mu^2 \int_0^x f(u) \, du + \gamma x^2$, y cambiando $2ky(\gamma x)$ por $2\gamma(kyx + exz)$, de este modo obtenemos la función

$$2V(x, y, z; \mu) = 2\mu^2 \int_0^x f(\xi) \, d\xi + \gamma x^2 + (\alpha + k\beta)y^2 + kz^2 + 2yz + 2\gamma(kyx + exz) \quad (3.11)$$

3.3.3. Formas Cuadráticas

De la función V podemos obtener la forma cuadrática Φ y de su derivada \dot{V} hallamos la forma cuadrática Ψ ; Procederemos a demostrar que estas formas cuadráticas son semidefinidas positivamente, la cual nos será de mucha utilidad más adelante.

Lema 3.1. Sean las funciones α , β , γ definidas por 3.4, donde los números a_1 , b_1 , c_1 satisfacen 3.5 y sea k una constante independiente de μ tal que

$$\frac{1}{\alpha} < k < \frac{\beta}{\gamma} \quad \text{para todo } \mu \in [0, 1] \quad (3.12)$$

(por 3.5 tal número siempre puede ser escogido); Entonces existen números positivos ϵ , λ_1 , λ_2 tal que para $e = \epsilon$, $l = \lambda_1$, $L = \lambda_2$ las formas cuadráticas

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y, z; \mu) &= \gamma x^2 + k(\beta y^2 + z^2) + \alpha y^2 + 2yz + 2\gamma(exz + kxy) - \\
&\quad - l(\gamma x^2 + y^2 + z^2), \\
\Psi(x, y, z; \mu) &= e\gamma^2 x^2 + y^2(\beta - k\gamma) + z^2(k\alpha - 1) - \gamma e(yz - \alpha xz - \beta xy) - \\
&\quad - L(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2) \quad \mu \in [0, 1]
\end{aligned}$$

son semidefinidas positivas en $[0, 1]$.

Demostración. Probaremos que si ϵ , λ_1 , λ_2 son suficientemente pequeños, entonces para $\mu \in [0, 1]$, $e = \epsilon$, $l = \lambda_1$, $L = \lambda_2$ los menores principales de las matrices de las formas Φ y Ψ son positivos. Estos menores son:

$$\begin{aligned}
M_1(l, e, \mu) &= k - l, \\
M_2(l, e, \mu) &= (k\beta + \alpha - l)(k - l) - 1 \\
M_3(l, e, \mu) &= \gamma(1 - l)(k\beta + \alpha - l)(k - l) + 2k\gamma^2 e - \\
&\quad - \gamma^2 e^2(k\beta + \alpha - l) - \gamma(1 - l) - \gamma^2 k^2(k - l), \\
N_1(L, e, \mu) &= k\alpha - 1 - L \\
N_2(L, e, \mu) &= (k\alpha - 1 - L)(\beta - k\gamma - L) - \frac{1}{4}\gamma^2 e^2 \\
N_3(L, e, \mu) &= \gamma^2[(e - L)(\beta - k\gamma - L)(k\alpha - 1 - L) - \frac{1}{4}e^2\alpha\beta\gamma - \\
&\quad - \frac{1}{4}e^2\alpha^2(\beta - k\gamma - L) - \frac{1}{4}e^2\beta^2(k\alpha - 1 - L) - \frac{1}{4}e^2\gamma^2(e - L)].
\end{aligned}$$

tenemos

$$M_i(0, 0, \mu) > 0, \quad N_i(0, 0, \mu) > 0 \quad \text{para} \quad \mu \in [0, 1] \quad i = 1, 2;$$

$$M_3(0, 0, \mu) = \gamma(k\alpha - 1) + \gamma(\beta - \gamma k)k^2 > 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial e} N_3(0, 0, \mu) = \gamma^2(\beta - k\gamma)(k\alpha - 1) > 0$$

por 3.12 para $0 \leq \mu < 1$. En vista de la continuidad de las funciones M_j , N_j ($j = 1, 2, 3$)

las desigualdades anteriores implican que para $\epsilon, \lambda_1, \lambda_2$ bastante pequeño las cantidades $M_j(\lambda_1, \epsilon, \mu), N_j(\lambda_2, \epsilon, \mu)$ son positivos para todos μ que satisfacen $0 \leq \mu < 1$. Es fácil mostrar que $\epsilon, \lambda_1, \lambda_2$ pueden escogerse independiente de μ . Así para $e = \epsilon, l = \lambda_1, L = \lambda_2$ Φ y Ψ están definidas positivas en $[0, 1)$. Dado que $M_3(l, e, 1) = N_3(L, e, 1) = 0$ entonces de las consideraciones anteriores se sigue inmediatamente que $\Phi(x, y, z; 1), \Psi(x, y, z; 1)$ son semidefinidas positivas, y esto finaliza la prueba del Lema 3.1. \square

Lema 3.2. $V(x, y, z) = V(x, y, z; 1)$ tiende a infinito con (x, y, z)

Demostración. Por el Lema 3.1 tenemos la desigualdad

$$2V - 2F(x) - \lambda_1(y^2 + z^2) = \Phi(x, y, z; 1) \geq 0$$

lo cual nos produce

$$2F(x) + \lambda_1(y^2 + z^2) \leq 2V(x, y, z)$$

Por lo tanto

$$0 \leq 2F(x) + \lambda_1(y^2 + z^2) \leq 2V(x, y, z), \quad (3.13)$$

Dado que $F(x) > 0$, para todo $x \neq 0$ y $F(x) \rightarrow \infty$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, $V(x, y, z)$ es definido positivamente y

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow \infty} V(x, y, z) = \infty.$$

\square

3.4. Propiedades de la Superficie

3.4.1. Lemas

Lema 3.3. Existe $D_0(\lambda) \geq 0$ tal que si $\kappa \geq D_0(\lambda)$, entonces la superficie $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\lambda, \kappa)$ definida por 3.3 tiene la propiedad \mathbf{P}_1 .

La prueba del Lema depende de los siguientes resultados:

Lema 3.4. La superficie \mathbf{S} es acotada, para $\kappa \in \mathbb{R}$. Además, si Q es un punto variable de \mathbf{S} y O es el origen de coordenadas entonces

$$\rho = \rho(\lambda, \kappa) \equiv \min_{Q \in \mathbf{S}} OQ \rightarrow \infty$$

cuando $k \rightarrow \infty$.

Demostración. Sabemos que

$$|f(x)| \leq C|x|, \quad 2 \int_0^x f(\xi) d\xi \leq Cx^2$$

y entonces, como

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad |yz| \leq \frac{1}{2}(y^2 + z^2),$$

luego

$$2V \leq Cx^2 + (a + kb)y^2 + kz^2 + 2yz$$

de aquí se tiene que:

$$\begin{aligned} 2V &\leq Cx^2 + (a + kb)y^2 + kz^2 + (y^2 + z^2) \\ &\leq Cx^2 + (a + kb + 1)y^2 + (1 + k)z^2 \end{aligned}$$

se sigue que existe un $D_1 = C + a + kb + 2 + k$ tal que

$$2V \leq D_1(x^2 + y^2 + z^2).$$

Por otro lado tenemos que:

$$V \geq 2F(x) + \lambda_1(y^2 + z^2)$$

Combinando los resultados tenemos que

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &\leq \frac{1}{2}D_1(x^2 + y^2 + z^2) + \lambda(z + ay + bx) - \kappa \\ \Gamma &\geq F(x) + \frac{\lambda_1}{2}(y^2 + z^2) + \lambda(z + ay + bx) - \kappa \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Denotemos por Δ_2 al dominio esférico

$$2F(x) + \lambda_1(y^2 + z^2) + 2\lambda(z + ay + bx) - 2\kappa \leq 0$$

y Δ_1 al solido esférico

$$D_1(x^2 + y^2 + z^2) + 2\lambda(z + ay + bx) - 2\kappa \leq 0 \quad (3.15)$$

Entonces, por 3.14,

$$\Delta_1 \subset \Delta_2, \quad \mathbf{S} \subset (\Delta_2 - \Delta_1) \quad (3.16)$$

Luego $\mathbf{S} \subset \Delta_2$ y Δ_2 es acotado, entonces \mathbf{S} es acotado. Supongamos que $\sup\{x \mid x \in \mathbf{S}\} = M$

Por otra parte si $Q = (x, y, z) \in \mathbf{S}$ se tiene que:

$$D_1(x^2 + y^2 + z^2) + 2\lambda(z + ay + bx) \geq 2\kappa$$

Por lo tanto

$$2\kappa \leq D_1(z^2 + y^2 + x^2) + |\lambda|(x^2 + y^2 + z^2 + 1 + a^2 + b^2)$$

Así que:

$$(D_1 + |\lambda|)(x^2 + y^2 + z^2) + |\lambda|(1 + a^2 + b^2) \geq 2\kappa$$

luego si $\kappa \rightarrow \infty$ se tiene que $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$, por lo tanto $\rho = \rho(\lambda, \kappa) \rightarrow \infty$ si $\kappa \rightarrow \infty$. \square

3.4.2. Prueba del Lema 3.3

Tomemos la ecuación de la recta

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} = r$$

donde l, m, n son los cosenos directores. En general un punto $Q \equiv (x, y, z)$ sobre esta recta tiene coordenadas

$$x = lr \quad y = mr \quad z = nr,$$

donde $r = \overline{OQ}$. Estas coordenadas de la recta intersecan a \mathbf{S} si

$$\Phi(r) \equiv V(lr, mr, nr) + \lambda r(n + am + bl) - \kappa = 0$$

Puesto que $\Phi(0) = -\kappa < 0$ y por 3.14

$$\Phi(r) \geq F(lr) + \frac{\lambda_1}{2}(n^2 + m^2)r^2 + \lambda r(n + am + bl) - \kappa > 0.$$

Para r suficientemente grande; es claro que $\Phi(r)$ tiene al menos un cero, y así la recta interseca a \mathbf{S} en al menos un punto.

Nos falta probar que si κ es suficientemente grande, entonces $\Phi(r)$ tiene solamente un cero.

Supongamos que esta afirmación es falsa, y que en efecto existen al menos dos puntos $Q_i = (lr_i, mr_i, nr_i)$ ($i = 1, 2$), $r_2 \geq r_1 > 0$, tal que

$$\Phi(r_i) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Entonces por el Teorema de Rolle's existe R , $r_1 \leq R \leq r_2$, tal que

$$\Phi'(R) = 0. \quad (3.17)$$

Por otro lado, por cálculos elementales se tiene que:

$$\Phi'(R) = R \left\{ \frac{lf(lR)}{R} + (a + kb)m^2 + kn^2 + 2mn \right\} + \lambda(n + am + bl),$$

y, dado que

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (3.18)$$

se tiene que:

i) Para $\lambda > 0$:

$$-\lambda(1 + a + b) \leq \lambda(n + am + bl) \leq \lambda(1 + a + b)$$

Luego

$$|\lambda(n + am + bl)| \leq |\lambda|(1 + a + b) = D_2(\lambda)$$

ii) Para $\lambda < 0$:

$$\lambda(1 + a + b) \leq \lambda(nam + bl) \leq -\lambda(1 + a + b)$$

Luego

$$|\lambda(n + am + bl)| \leq |\lambda|(1 + a + b) = D_2(\lambda)$$

Por lo tanto:

$$-D_2(\lambda) \leq \lambda(n + am + bl) \leq D_2(\lambda)$$

Así que :

$$\Phi'(R) \geq R\phi(l, m, n, R) - D_2(\lambda). \quad (3.19)$$

donde

$$\phi = \phi(l, m, n, R) = \frac{lf(lR)}{R} + (a + kb)m^2 + kn^2 + 2mn.$$

Como

$$C \geq \frac{f(x)}{x} \geq \delta = \inf \left\{ \frac{f(x)}{x} \mid |x| < M \right\}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\phi &\geq \delta l^2 + (a + kb)m^2 + kn^2 + 2mn \\
&\geq \delta l^2 + (a + kb)m^2 + kn^2 - 2|mn| \\
&= \delta l^2 + \left[\left(a - \frac{1}{k}\right)m^2 + kbm^2 + k(|n| - k^{-1}|m|)^2 \right].
\end{aligned}$$

Denotemos por $\phi_0 = \phi_0(|l|, |m|, |n|)$ a la última expresión en el lado derecho. Entonces ϕ_0 es continua en todos los argumentos, y es más, por 3.12.

$$\begin{aligned}
\phi_0 &> 0 && \text{si } l^2 + m^2 + n^2 \neq 0. \\
&= 0 && = 0.
\end{aligned}$$

En particular, como l, m, n satisfacen 3.18, existe una constante D_3 tal que

$$\phi_0 \geq D_3 > 0$$

y cuando esto es combinado con 3.19 tenemos

$$\Phi'(R) \geq RD_3 - D_2(\lambda). \quad (3.20)$$

Pero por Lema 3.4, existe $D_0(\lambda)$ tal que si $\kappa \geq D_0(\lambda)$ entonces

$$\rho(\kappa) > \frac{D_2(\lambda)}{D_3}.$$

y por lo tanto

$$R \geq r_1 \geq \rho > \frac{D_2(\lambda)}{D_3}. \quad (3.21)$$

Los resultados 3.20 y 3.21 juntos implican que

$$\Phi'(R) > 0$$

con tal que $\kappa \geq D_0(\lambda)$ y, como esto contradice 3.17, nuestro Lema queda demostrado.

3.5. Extensión del Lema

3.5.1. $\kappa \geq D_0(\lambda)$

De aquí en adelante asumiremos que

$$\kappa \geq D_0(\lambda)$$

para cualquier par de valores λ y κ , esto es que todas las superficies $\mathbf{S}(\lambda, \kappa)$ considerada de ahora en adelante tienen la propiedad \mathbf{P}_1 .

3.5.2. Las Superficies \mathbf{S}^+ , \mathbf{S}^-

Sea π el plano

$$z + ay + bx = 0.$$

Como π pasa a través del origen es claro que π interseca la superficie $\mathbf{S}(0, \kappa)$, esto es, la superficie

$$V(x, y, z) = \kappa$$

en un punto real, y, como $\mathbf{S}(0, \kappa)$ tiene la propiedad \mathbf{P}_1 , estos puntos evidentemente están sobre una curva de Jordan J_0 . Dado cualquier punto (ξ, η, ζ) el cual satisface

$$V(\xi, \eta, \zeta) - k = 0, \quad \zeta + a\eta + b\xi = 0,$$

necesariamente $\Gamma(\xi, \eta, \zeta, \lambda, \kappa) = 0$ para todos los valores de λ , es claro que toda superficie $\mathbf{S}(\lambda, \kappa)$ pasa a través de J_0 . En lo que sigue aquí, dada cualquier superficie $S(\lambda, \kappa)$ acostumbraremos a denotar $\mathbf{S}^+(\lambda, \kappa)$ al conjunto de todos los puntos de $\mathbf{S}(\lambda, \kappa)$ los cuales están en o sobre el plano π , y $\mathbf{S}^-(\lambda, \kappa)$ denota el conjunto de todos los puntos de $\mathbf{S}(\lambda, \kappa)$ que están debajo o en π .

3.5.3. $S^+(\lambda, \kappa) \cup S^-(\lambda, \kappa)$

El resultado obtenido en Lema 1 se extiende muy fácilmente a las uniones de \mathbf{S}^+ y \mathbf{S}^- correspondiente a valores distintos de λ . De hecho tenemos

Lema 3.5. *Si λ_1, λ_2 son dos valores de λ , entonces la superficie*

$$\mathbf{S}^+(\lambda_1, \kappa) \cup \mathbf{S}^-(\lambda_2, \kappa)$$

tiene la propiedad \mathbf{P}_1 .

El resultado es una consecuencia del Lema 3.3 y del hecho que ambas $\mathbf{S}(\lambda_1, \kappa)$ y $\mathbf{S}(\lambda_2, \kappa)$ pasan a través de J_0 .

3.6. Propiedades de S^+ , S^-

3.6.1. Cálculo de $\frac{d}{dt}V$

Sea (x, y, z) cualquier solución de 3.2. Entonces, por un cálculo directo de 3.2, tenemos

$$\begin{aligned} 2\dot{V} &= 2f(x)\dot{x} + 2(a + kb)y\dot{y} + 2kz\dot{z} + 2\dot{y}z + 2y\dot{z} + \\ \dot{V} &= f(x)y + (a + kb)yz + kz(-az - by - f(x)) + y(-az - by - f(x)) \end{aligned}$$

Como $f(x) \leq C$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{d}{dt}V(x, y, z) = -by^2 - (ak - 1)z^2 - kzf(x) \\ &\leq -L(y^2 + z^2) + k|z||f(x)| \\ &\leq -L(y^2 + z^2) + kC(|z| + |y|) \end{aligned}$$

Sea

$$D_4 = L = \min\{b, ak - 1\} \quad D_5 = kC$$

Obtenemos que

$$\dot{V} \leq -D_4(y^2 + z^2) + D_5(|y| + |z|) \quad (3.22)$$

en cualquier punto (x, y, z) de la trayectoria de 3.2.

3.6.2. $\lambda_0 = 16\frac{D_5^2}{D_4}$

Sea $\lambda_0 > 0$ definido por

$$\lambda_0 = 16\frac{D_5^2}{D_4}$$

y sean $\mathbf{S}(\lambda_0, \kappa)$, $\mathbf{S}(-\lambda_0, \kappa)$ las superficies denotadas en 3.3 correspondiente a los valores $\lambda = \lambda_0$, $-\lambda_0$ respectivamente, la constante κ en cada caso satisface la restricción de $\kappa \geq D_0(\lambda)$.

Ahora probaremos que:

Lema 3.6. Existe $D_6 = D_6(\lambda_0)$ tal que si $\kappa \geq D_6$ entonces

$$\dot{\Gamma} \equiv \frac{d}{dt}\Gamma(x, y, z, \lambda_0) \leq 0$$

en cualquier punto $T(x, y, z)$ de E_3 en cualquier trayectoria τ de 3.2 que se encuentra en $\mathbf{S}^+(\lambda_0, \kappa)$.

Demostración. Ahora, sea T cualquier punto de una trayectoria τ , un cálculo elemental de 3.3 da

$$\frac{d}{dt}\Gamma(x, y, z, \lambda_0, \kappa) = \dot{V} + \lambda_0(-f(x)),$$

y de aquí, por 3.22,

$$\dot{\Gamma} \leq -D_4(y^2 + z^2) + D_5(|y| + |z|) + \lambda_0(-f(x)) \quad (3.23)$$

Sea σ^+ el conjunto de todos los puntos de la esfera

$$D_1(x^2 + y^2 + z^2) + 2\lambda_0(z + ay + bx) - 2\kappa = 0, \quad (3.24)$$

los cuales permanece en o sobre el plano $z + ay + bx = 0$, y escojamos, como de hecho lo hacemos, un constante D_7 bastante grande para asegurar que cada uno de las condiciones siguientes se satisfacen para $\kappa \geq D_7$:

(I) σ^+ interseca al plano $x = D_8 = \frac{8}{\delta}$

(II) $\max(|y|, |z|) > 8\frac{D_5}{D_4}$, en todos los puntos (x, y, z) de σ^+ los cuales permanecen debajo del plano $x = D_8$; y

(III) No existe ningún punto de intersección entre σ^+ y el paraboloide

$$D_4(y^2 + z^2) + 2\lambda_0 Cx = 0.$$

Subsecuentemente, por 3.20, todo los puntos de $\mathbf{S}(\lambda_0, \kappa)$ permanecen fuera de la esfera 3.24, se sigue que las condiciones (I), (II) y (III) también se cumplen para $\mathbf{S}^+(\lambda_0, \kappa)$ para los valores declarados de κ . De aquí, si $\kappa \geq D_7$, cada punto (x, y, z) de $\mathbf{S}^+(\lambda_0, \kappa)$ necesariamente queda en una de las regiones siguientes en E_3 ;

$$x \geq D_8, \quad (3.25)$$

$$0 \leq x \leq D_8, \quad \max(|y|, |z|) > 8 \frac{D_5}{D_4} \quad (3.26)$$

$$\max(|y|, |z|) > 8 \frac{D_5}{D_4} \quad D_4(y^2 + z^2) + 2\lambda_0 Cx > 0; \quad (3.27)$$

y así el Lema queda demostrado si probamos que, dado cualquier punto $T(x, y, z)$ en τ , entonces

$$\dot{\Gamma} \equiv \frac{d}{dt} \Gamma(x, y, z, \lambda_0, \kappa) \leq 0 \quad (3.28)$$

siempre que T esté en una de las regiones 3.25, 3.26, ó 3.27.

y entonces por 3.22 se tiene,

$$\dot{\Gamma} \leq -D_4(y^2 + z^2) + D_5(|y| + |z|) - \lambda_0 \delta x$$

Así, en particular, si T está en la región 3.25, obtenemos

$$\dot{\Gamma} \leq -D_4(y^2 + z^2) + D_5(|y| + |z|) - \lambda_0 \delta D_8 \quad (3.29)$$

y, dado que $\delta D_8 = 8$, esto da

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma} &\leq -D_4(y^2 + z^2) + D_5(|y| + |z|) - 8\lambda_0 \\ &= -D_4(y^2 + z^2) + D_5(|y| + |z|) - 128 \frac{D_5^2}{D_4} \end{aligned}$$

por 3.22. Es conveniente tratar los casos

$$\max(|y|, |z|) \leq 8 \frac{D_5}{D_4}, \quad \max(|y|, |z|) > 8 \frac{D_5}{D_4}$$

separadamente. En el primer caso, tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma} &\leq D_5(|y| + |z|) - 128 \frac{D_5^2}{D_4} \\ &\leq 16 \frac{D_5^2}{D_4} - 128 \frac{D_5^2}{D_4} < 0. \end{aligned}$$

En el segundo caso, esto si $\max(|y|, |z|) > 8\frac{D_5}{D_4}$, es fácil verificar que

$$\frac{1}{4}D_4(y^2 + z^2) - D_5(|y| + |z|) > 0 \quad (3.30)$$

esto es que

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma} &\leq -\frac{3}{4}D_4(y^2 + z^2) - 128\frac{D_5^2}{D_4} \\ &< 0. \end{aligned}$$

Entonces 3.28 se cumple para todas las posiciones de T en la región 3.25.

Supongamos ahora que T está en la región 3.26. Entonces de 3.29 y 3.30,

$$\dot{\Gamma} \leq -\frac{3}{4}D_4(y^2 + z^2) - \lambda_0\delta x$$

y, dado que

$$\max(|y|, |z|) > 8\frac{D_5}{D_4}, \quad x \geq 0, \quad \lambda_0 = 16\frac{D_5^2}{D_4},$$

Esto nos da,

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma} &\leq -\frac{3}{4}D_4 64\frac{D_5^2}{D_4^2} + 16\frac{D_5^2}{D_4} \\ &= -32\frac{D_5^2}{D_4} < 0. \end{aligned}$$

Supongamos finalmente que T está en la región 3.27. Entonces a causa de

$$\max(|y|, |z|) > 8\frac{D_5}{D_4},$$

se sigue de 3.29 y 3.30 que

$$\dot{\Gamma} \leq -\frac{3}{4}D_4(y^2 + z^2) - \lambda_0\delta x,$$

y, a causa de $D_4(y^2 + z^2) + 2\lambda_0\delta x > 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma} &< -\frac{1}{4}D_4(y^2 + z^2) - \frac{1}{2}D_4(y^2 + z^2) - \lambda_0 Cx \\ &< -\frac{1}{4}D_4(y^2 + z^2) < 0,\end{aligned}$$

por 3.22. Entonces 3.28 es también verdadero para el caso cuando T está en la región 3.27 y esto completa el Lema. \square

3.6.3. Lema para $\mathbf{S}^-(\lambda_0, \kappa)$

Por argumentos similares a los del Lema 3.6, pero con el paraboloide

$$D_4(y^2 + z^2) + 2\lambda_0 Cx = 0$$

reemplazado por

$$D_4(y^2 + z^2) - 2\lambda_0 Cx = 0$$

Puede ser probado este

Lema 3.7. *Existe $D_6 > 0$ tal que si $\kappa \geq D_6$, entonces*

$$\frac{d}{dt}\Gamma(x, y, z, -\lambda_0, \kappa) \leq 0$$

en cualquier punto (x, y, z) de E_3 en la cual una trayectoria de 3.2 encuentra $\mathbf{S}^-(\lambda_0, \kappa)$.

3.7. Teorema.

Teorema 3.2. *Existe una superficie \mathbf{S} en el espacio que cumple la propiedad \mathbf{P}_1 y tal que toda trayectoria de 3.2 cruza solo hacia el interior*

Demostración. Sea $D_7 = \max(D_0(\lambda_0), D_6, D_5)$ y consideremos ahora la superficie Σ definida por

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^+(\lambda_0, D_7) \cup \mathbf{S}^-(\lambda_0, D_7) \quad (3.31)$$

donde D_0 , D_6 , D_5 son las constantes que aparecen en los Lemas 3.3, 3.6, y 3.7 respectivamente. Por Lema, \mathbf{S} tiene la propiedad \mathbf{P}_1 y por Lemas 3.6 y 3.7 las trayectorias de 3.2 cruzan a \mathbf{S} hacia el interior. \square

Capítulo 4

Existencia de Oscilaciones

4.1. Introducción

En este capítulo se investiga acerca de la existencia de oscilaciones en la ecuación diferencial

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + f(x) = 0 \quad (4.1)$$

O el sistema equivalente:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -az - by - f(x) \end{aligned} \quad (4.2)$$

con $a > 0$, $b > 0$, f Lipschitz, no decreciente, $f(0) = 0$, f con derivada continua en 0 y $f'(0) = c > ab$. Existe C tal que para todo x , $|f(x)| < C$ y $\frac{|f(x)|}{|x|} < C$ para $0 < |x| < 1$.

En el caso que $a^2 > 4b$ probamos la existencia de soluciones periódicas, como Friedrichs [38], y Rauch [77], construyendo una región \mathbf{T} positivamente invariante bajo el sistema 4.2 que sea topológicamente equivalente a un toro macizo y que las órbitas giren alrededor del agujero del Toro. Si se toma una sección meridiana de \mathbf{T} , equivalente a un disco, las órbitas van a definir una aplicación continua de esta sección en si misma. El Teorema de Brouwer nos va a garantizar que existe al menos un punto fijo de esta aplicación, que corresponde a una órbita cerrada. No podremos decir si la órbita periódica es única ni cuales son sus características de estabilidad. Lo que si sabremos es que existe un atractor en el interior de \mathbf{T} formado por las órbitas que giran alrededor del agujero. En principio este atractor puede tener una estructura complicada, aunque los experimentos numéricos tienden a mostrar un comportamiento sencillo. El comportamiento oscilatorio tendrá amplitud acotada por

arriba y por abajo por las dimensiones del toro y de su agujero.

Cuando $a^2 \leq 4b$, sólo podemos asegurar que, excepto las dos soluciones que tienden a $\mathbf{0}$, las demás oscilan dentro de la región \mathbf{B} , donde tendrán un atractor alejado de $\mathbf{0}$.

4.2. Construcción de la Región Toroidal

En el capítulo 3 hemos establecido una superficie esferoidal \mathbf{S} que delimita una región positivamente invariante bajo 4.2, que denotaremos por \mathbf{B} . De esta región eliminaremos los puntos correspondientes a una región cónica \mathbf{K} con vértice en el origen, y una región cilíndrica \mathbf{C} que contenga el origen, de tal manera que la región resultante \mathbf{T} sea la región toroidal positivamente invariante mencionada en la introducción. Ciertamente al quitar \mathbf{K} y \mathbf{C} de \mathbf{B} , hemos eliminado las dos órbitas que tienden asintóticamente al origen. La región cónica \mathbf{K} que quitaremos tiene por fronteras el cono definido en el octante $\{x > 0, y < 0, z > 0\}$ por las superficies $\{x = 0 \mid z > 2\frac{by}{a}\}$, $\{y = 0\}$, $\{z = 0 \mid y > f(x)\}$, $\{y > -\frac{f(x)}{b}\}$, y, $\{by + f(x) + \frac{az}{2} = 0\}$ y el cono análogo para el octante simétrico respecto a $\mathbf{0}$.

Lema 4.1. *La región cónica \mathbf{K} es negativamente invariante si $\frac{a^2}{4} - b > 0$.*

Demostración. En el octante $x > 0, y < 0, y z > 0$ el campo $(y, z, -f(x) - by - az)$ para $y > -\frac{f(x)}{b}$.

En el plano $x = 0$ fluye hacia x negativa.

En el plano $y = 0$ fluye hacia y positiva

En el plano $z = 0$ fluye hacia z negativa.

Sea $F(x, y, z) = -by - f(x) - \frac{az}{2} = 0$

El vector normal en la parte superior de la superficie viene dado por $X_N = \nabla F(x, y, z) = (-f'(x), -b, -\frac{a}{2})$, luego el producto interno

$$\begin{aligned} (X_N, \dot{X}) &= -f'(x)y - bz + \frac{a}{2}(az + by + f(x)) \\ &= -f'(x)y + (\frac{a^2}{4} - b)z > 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto las órbitas cruzan al cono de adentro hacia afuera, digamos. \square

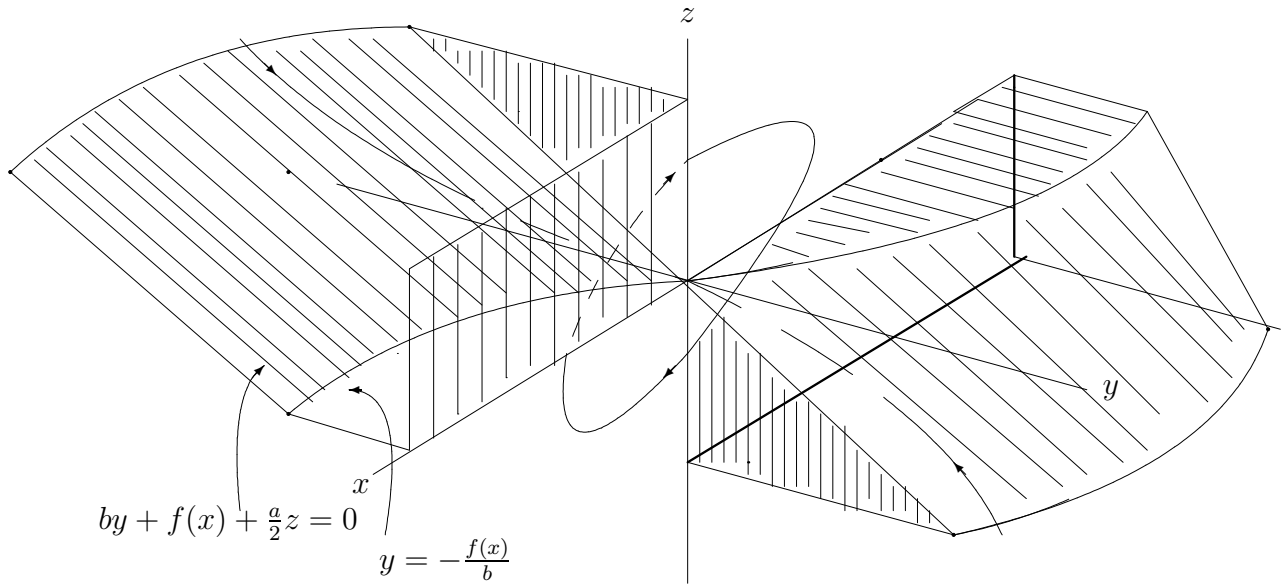


Figura 4.1: Superficie Cónica

Construiremos ahora el cilindro \mathbf{C} que servirá para abrir el agujero que convertirá a $\mathbf{B} \setminus \mathbf{K}$ en un toro macizo y probaremos que cerca el origen \mathbf{C} es negativamente invariante, es decir que las órbitas se introducen en $\mathbf{B} \setminus \mathbf{K}$ a través de su frontera. Para ello utilizaremos la transformación lineal que estudiamos en el capítulo 1 y que nos pone el sistema lineal en forma normal.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Aquí el eje x_1 está a lo largo de la dirección principal de λ_1 y los ejes x_2 y x_3 son determinados por $\lambda_2 = \alpha + i\beta$ y su conjugado; además $\alpha > 0$ por las condiciones $ab - c < 0$, $a > 0$, $b > 0$, y, $c > 0$.

Lema 4.2. *Sea la ecuación del cilindro*

$$0 < r^2 = x_2^2 + x_3^2$$

entonces las soluciones fluyen de adentro hacia fuera del cilindro en aquellos puntos en que $|f(x) - cx| < Ar$, donde A es una constante que depende de a , b y c .

Demostración. De (1.10) en el Capítulo 1, tenemos que si $c > ab$,

$$r' = \alpha r + \frac{f(x) - cx}{(\alpha - \lambda_1)^2 + \beta^2} \left(\sin \theta - \frac{\alpha - \lambda_1}{\beta} \cos \theta \right),$$

donde $x = x_1 + r \sin \theta$.

El cilindro de radio r será atravesado por las órbitas de adentro hacia afuera en aquellos de sus puntos en que $r' > 0$.

El valor más grande que puede tomar el factor entre paréntesis es $\sqrt{1 + \gamma^2}$, con $\gamma = \frac{\alpha - \lambda_1}{\beta}$.

Por otro lado $(\alpha - \lambda_1)^2 + \beta^2 = (\gamma^2 + 1)\beta^2$, y por lo tanto para que r' sea mayor que 0, basta con que

$$|f(x) - cx| < \alpha\beta^2\sqrt{1 + \gamma^2}r = Ar$$

Para que al sustraer el cilindro, anterior, que denominamos \mathbf{C} , de $\mathbf{S} \setminus \mathbf{K}$, de manera que obtengamos una región toroidal positivamente invariante \mathbf{T} , hace falta que en la porción de \mathbf{C} que queda fuera de \mathbf{K} tengamos $r' > 0$, es decir, que se cumplan las condiciones del lema anterior.

Los valores de x_1 , para los puntos de \mathbf{C} fuera de \mathbf{K} , es decir, cercanos al origen, tienen una cota superior que depende de la disposición de \mathbf{K} y \mathbf{C} y del radio r . Los valores máximos de x para estos puntos valdrán $r + \max\{x_1 \mid (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{K}\} = r + B(r)$, donde $B(r)$ es casi lineal y en particular $B(r) = O(r)$ cuando $r \rightarrow 0$ (esto es debido a que el cono \mathbf{K} está limitado por una superficie casi formada por semirrectas partiendo del origen. \square)

Combinando los Lemas 4.2, y, 4.1 obtenemos.

Lema 4.3. *El toro \mathbf{T} es positivamente invariante si en los puntos del cilindro \mathbf{C} fuera de \mathbf{K} se cumple*

$$|f(x) - cx| < Ar$$

para $x < r + B(r)$.

Aquí $A = \alpha\beta^2\sqrt{1 + \gamma^2}$, $\gamma = \frac{\alpha - \lambda_1}{\beta}$ y $B(r)$ nos da el máximo valor de x para los puntos de \mathbf{C} fuera de \mathbf{K} .

Notamos que $A < c - ab = 2\alpha(1 + \gamma^2)\beta^2$, como debe ser.

En particular las condiciones del lema se cumplen si r es suficientemente pequeño, ya que

$$\frac{|f(x) - cx|}{r} < \frac{|f(x) - cx|}{|x|} \rightarrow f'(0) - c = 0$$

cuando $r \rightarrow 0$.

De hecho todas las órbitas de \mathbf{B} , y por lo tanto todas las del sistema, excepto el origen y las dos órbitas que tienden a él, entran en $\mathbf{B} \setminus \mathbf{K}$, ya que la dirección del campo X las fuerza a ello.

4.3. Comportamiento Oscilatorio y Solución Periódica

Debido a la propiedad de \mathbf{S} de ser cortada en solo un punto por las semirrectas que parten del origen (Capítulo 3), la sección meridiana $\Upsilon = \{(x, y, z) \mid x > 0, z < 0, y = 0\} \cap \mathbf{T}$ es cerrada y simplemente conexa, es decir homeomorfa a un disco.

Lema 4.4. *El flujo del sistema (4.2), forma una aplicación continua de la Υ -sección-transversal cerrada y simplemente-conexa del Toro invariante en sí mismo.*

Demostración. Es bastante claro que si empezamos en Υ pasamos al octante $x > 0, y < 0, z < 0$. Ahí tenemos que $x' < 0, y' < 0, z' > 0$. Por lo tanto llegará un momento en que o bien

i) $x = 0$ o bien ii) $z = 0$.

En el primer caso, i), pasamos al octante $x < 0, y < 0, z < 0$, donde $x' < 0, y' < 0, z' > 0$ (esto último porque $-f(x) - by - az > 0$). Llegará un momento en que cruzaremos $z = 0$, con lo que se hará $y' > 0$, y posteriormente cruzaremos $f(x) + by + az = 0$, quedando entonces con $x' < 0, y' > 0$ y $z' < 0$, con lo que eventualmente llegamos a $-\Upsilon$, e decir, $x < 0, y = 0, z > 0$. Por simetría si se sigue la órbita se llega a Υ . En el segundo caso, ii), pasamos a tener o bien $z > 0$ con $y < 0, x > 0$, de donde llegamos a $f(x) + by + ax = 0$ y de ahí a $x = 0$, o bien a $z = 0$ en donde nos encontramos en las mismas condiciones que en el caso i). De este modo hemos demostrado que existe una aplicación continua de Υ en sí mismo, y por lo tanto un comportamiento oscilatorio con al menos una órbita periódica. \square

Así, tenemos finalmente,

Teorema 4.1. *Las órbitas en \mathbf{T} tienen un comportamiento oscilatorio, girando alrededor del agujero de \mathbf{T} , y tienen un atractor \mathbf{A} que contiene al menos una solución periódica*

Demostración. Del Lema 4.4, el flujo del sistema define una aplicación continua, de la sección meridiana Υ cerrada y simplemente-conexa en sí mismo. El Teorema del punto fijo de Brouwer [60] establece en este caso, que la aplicación tiene un punto fijo. Esto establece que el punto fijo define la solución periódica. \square

4.4. Amplitud de las Oscilaciones

Del análisis cualitativo realizado se desprende que las oscilaciones tienen amplitud limitada por arriba por el esferoide \mathbf{S} y por abajo por la parte del cilindro \mathbf{C} que esta en $\mathbf{S} \setminus \mathbf{K}$.

Determinar el radio máximo del cilindro de manera que la porción que limita con $\mathbf{B} \setminus \mathbf{K}$ sea negativamente invariante resulta difícil, debido en parte a la geometría y en parte a los términos no lineales en el calculo de r . Sin embargo del Lema 4.3 tenemos que dada f con $f'(0) > ab$ podemos encontrar $c > ab$ de manera que la gráfica de f caiga entre las de $(c + A)x$ y $(c - A)x$ para $|x| \leq r + B(r)$.

Hallar el máximo valor de r resulta complicado, pues A y $B(r)$ dependen de los parámetros a , b y c y B también de f a través del cono \mathbf{K} .

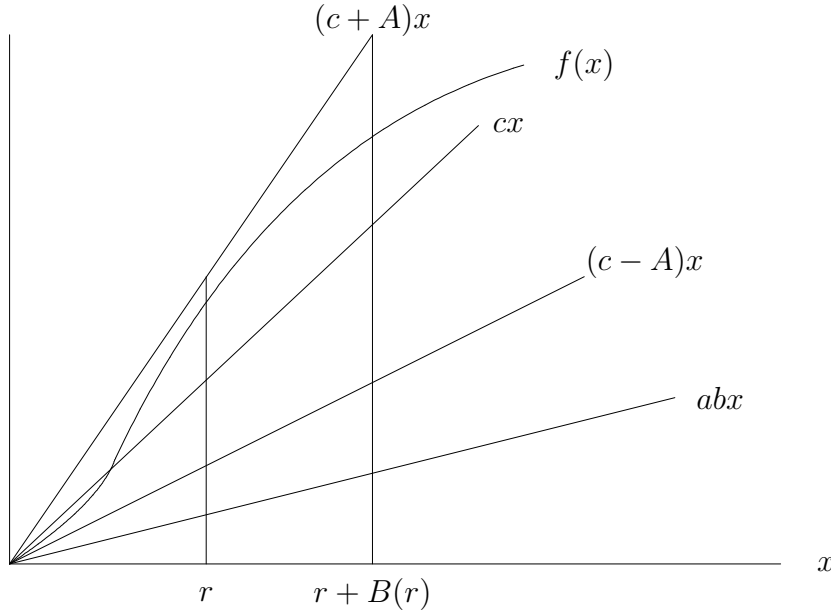


Figura 4.2:

De lo dicho anteriormente tendríamos para el sistema 4.2 en el caso $a^2 > 4b$ la siguiente proposición

Proposición 4.1. *La amplitud mínima de las oscilaciones viene determinada por el valor r que maximiza el valor $r + B(r)$ de manera que para $|x| < r + B(r)$ se tenga que $(c - A)x < f(x) < (c + A)x$ para $x > 0$ y $(c + A)x < f(x) < (c - A)x$ para $x < 0$, para todas las elecciones de los parámetros a , b , c y de la función f .*

Para el caso particular lineal a trozos con

$$\begin{aligned} f(x) &= cx & \text{si } x \in (-1, 1) \\ f(x) &= c \operatorname{sign}(x) & \text{si } x \notin (-1, 1) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Podemos tomar el radio r de manera que $r + B(r) = \frac{c}{c - A}$, que es mayor que 1.

Del estudio del comportamiento de las órbitas tenemos que todas entran y salen sucesivamente de la región $\{|x| < 1\}$, dando vuelta al cilindro \mathbf{C} . Esto de por sí, ya muestra que la diferencia entre el máximo y el mínimo de $x(t)$ es mayor que 1.

Asimismo notamos que la superficie invariante \mathbf{W} inestable de la silla foco que es el origen, coincide con $x_1 = 0$ en una región limitada por las dos órbitas que son tangentes a $\{x = \pm 1, x_1 = 0\}$. Esta variedad (superficie) se extiende siguiendo las órbitas que la componen y, puesto que no puede escapar de \mathbf{T} , ha de tender al atractor \mathbf{A} , que puede ser complicado. A falta de herramientas analíticas, hemos de dirimir con métodos numéricos cual es este atractor. Incluso en el caso lineal a trozos hemos sido incapaces de decidirlo analíticamente. En el caso que $a^2 \leq 4b$, no hemos podido construir el cono \mathbf{K} , y nos tenemos que conformar con la región esférica \mathbf{B} , de donde se pueden escapar las órbitas con t creciente, y un tramo del cilindro \mathbf{C} , en que las órbitas escapan por su superficie lateral y entran por sus extremos. Este cilindro contiene el origen y el tramo final de las dos órbitas que tienden a él. Excepto estas dos órbitas, todas las que entran por la boca del cilindro vuelven a salir. Esto nos dice que todos los conjuntos límites ω de estas órbitas están dentro de \mathbf{B} , pero no están contenidos en el tramo del cilindro \mathbf{C} considerado, excepto claro, el origen mismo, que es inestable.

Por lo tanto existirá un atractor \mathbf{B} , que contendrá puntos fuera del tramo de \mathbf{C} considerado, por lo que podemos decir que todas las órbitas, excepto las dos que tienden al equilibrio inestable 0, tendrán un comportamiento oscilatorio, en el sentido que no tienden a un equilibrio, ni se alejan al infinito.

Capítulo 5

Acotación de las soluciones de los sistemas perturbados

5.1. Introducción

En el capítulo 3, como consecuencia de una esfera atractora de diámetro tan grande como se quiera, resulta que todas las soluciones del sistema (2.2) son acotadas positivamente, es decir, cuando t tiende a infinito. En este capítulo investigaremos la acotación, de las soluciones de la ecuación Perturbada, para t suficientemente grande.

$$\ddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + f(x + B \sin(\omega t)) = 0 \quad (5.1)$$

donde $a > 0$, $b > 0$, $B \geq 0$, f Lipschitz, no decreciente, f con derivada continua en 0, $f'(0) = c > 0$, y, Existe C tal que para toda x $|f(x)| < C$.

Nuestro principal resultado obtenido siguiendo el método de Ezeilo [29]:

Teorema 5.1. *Dada la ecuación Perturbada 5.1, f definida como arriba, entonces existe una constante $D > 0$ que depende solo de a , b , c y C , tal que toda solución $x(\omega, t)$, de la ecuación Perturbada 5.1 satisface*

$$|x(\omega, t)| \leq D \quad |\dot{x}(\omega, t)| \leq D \quad |\ddot{x}(\omega, t)| \leq D,$$

dado que $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, para t suficientemente grande.

5.2. Propiedades de las Soluciones $x = x(t)$

Lema 5.1. *Para cada solución $x(\omega, t)$, de 5.1, $\alpha > 0$ y cada $T > 0$ existe $t_1 \geq T$ tal que $|x(\omega, t_1)| \leq B + \alpha$.*

Demostración. Supongamos por el contrario que no existe tal t_1 y que,

$$x(\omega, t) \geq \alpha + B, \quad \forall t \geq T. \quad (5.2)$$

Integrando 5.1 desde T hasta t ,

$$\ddot{x} + a\dot{x} = Z + aY + bX - bx - \int_T^t f(x(\tau) + B \sin(\omega\tau)) d\tau \quad (5.3)$$

donde $X = x(\omega, T)$, $Y = \dot{x}(\omega, T)$, $Z = \ddot{x}(\omega, T)$. Por otra parte tenemos,

$$f(x(\tau) + B \sin(\omega\tau)) \geq f(\alpha) > 0, \quad \tau \geq T. \quad (5.4)$$

Reemplazando 5.4 en 5.3 obtenemos

$$\begin{cases} \ddot{x} + a\dot{x} & \leq |Z + aY + bX| + Tf(\alpha) - tf(\alpha) \\ & = D(\omega, c, T) - tf(\alpha), \quad t \geq T, \end{cases} \quad (5.5)$$

donde D representa el término $|Z + aY + bX| + Tf(\alpha)$.

Ahora multiplicando ambos lados de 5.5 por e^{at} e integrando desde T hasta t ($t > T$). Se tiene

$$[\dot{x}e^{at}]_T^t \leq \frac{1}{a}D(\omega, c, T)(e^{at} - e^{aT}) - \frac{1}{a}f(\alpha)[te^{at}]_T^t + \frac{1}{a^2}f(\alpha)(e^{at} - e^{aT}),$$

lo cual es equivalente a

$$\dot{x}e^{at} \leq Ye^{aT} + \frac{1}{a}D(c, T)(e^{at} - e^{aT}) - \frac{1}{a}f(\alpha)[te^{at} - Te^{aT}] + \frac{1}{a^2}f(\alpha)(e^{at} - e^{aT}).$$

Dividiendo ambos lados por e^{at} , obtenemos

$$\dot{x} \leq Ye^{aT-at} + \frac{1}{a}D(\omega, c, T)(1 - e^{aT-at}) - \frac{1}{a}f(\alpha)[t - Te^{aT-at}] + \frac{1}{a^2}f(\alpha)(1 - e^{aT-at}). \quad (5.6)$$

lo cual se cumple para todo $t \geq T$.

Ahora hagamos $t \rightarrow \infty$ en 5.6. Dado que $a, y, f(\alpha) > 0$, el lado derecho tiende a $-\infty$ y de esto x' tiende a $-\infty$. Pero esto implica que $x(\omega, t) \rightarrow -\infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ lo cual contradice a 5.2. Por lo tanto es falso que $x(\omega, t) > \alpha + B$ para todo $t \geq T$.

Una contradicción similar encontraremos si suponemos que $x(\omega, t) \leq -\alpha - B$ para todo $t \geq T$ y el lema queda probado. \square

Lema 5.2. *Para cada solución $x(\omega, t)$, de 5.1, la gráfica $x = x(\omega, t)$ en el plano (x, t) , satisface una de las siguientes condiciones:*

- i) *el gráfico permanece en la franja $|x| \leq B + \alpha$ para todo $t \geq t_0$,*
- ii) *El gráfico entra y sale repetidamente de la franja $|x| \geq B + \alpha$ cuando $t \rightarrow \infty$.*

Demostración. Sea $x(\omega, t)$ cualquier solución de 5.1. Para probar el Lema es suficiente probar que para cada T existe un $t_1 \geq T$ tal que $|x(\omega, t_1)| \leq B + \alpha$, que lo obtenemos del Lema 5.1 \square

5.2.1. Región $|x| \leq B + \alpha$

Necesitaremos algunas propiedades de los arcos de $x = x(\omega, t)$ en la región $|x| \leq \alpha + B$ del plano (x, t) .

Lema 5.3. *Supongamos, que para una solución $x(\omega, t)$, de 5.1, que $|x(\omega, t)| \leq \alpha + B$ para $t_0 \leq t \leq t_1$. Entonces $|\ddot{x}(\omega, t_1)| \leq |\ddot{x}(\omega, t_0)| + D$.*

Además supongamos que $|x(\omega, t)| \leq \alpha + B$ para todo $t \geq t_0$. Entonces existe $T_0 \geq t_0$ tal que $|\ddot{x}(\omega, t)| \leq D$ para todo $t \geq T_0$.

Demostración. Para demostrar la primera parte, supongamos que $|x(\omega, t)| \leq \alpha + B$ para $t_0 \leq t \leq t_1$.

Claramente si $\ddot{x}(\omega, t_1)$ satisface

$$|\ddot{x}(\omega, t_1)| \leq |\ddot{x}(\omega, t_0)| + 2\frac{C}{a} \quad (5.7)$$

Entonces el resultado requerido es verdadero.

Suponga que $\ddot{x}(\omega, t_1)$ no satisface 5.7. Entonces existe t'_1 , $t_0 < t'_1 < t_1$, tal que

$$\begin{cases} |\ddot{x}(\omega, t'_1)| &= |\ddot{x}(\omega, t_0)| + 2\frac{C}{a}, \\ |\ddot{x}(\omega, t)| &\geq |\ddot{x}(\omega, t_0)| + 2\frac{C}{a}, \quad t'_1 \leq t \leq t_1. \end{cases} \quad (5.8)$$

Claramente el signo de $\ddot{x}(\omega, t)$ es constante para $t'_1 \leq t \leq t_1$.

Supongamos que $\ddot{x}(\omega, t) > 0$, $t'_1 \leq t \leq t_1$, y por lo tanto

$$a\{\dot{x}(\omega, t_1) - \dot{x}(\omega, t'_1)\} = a \int_{t'_1}^{t_1} \ddot{x}(\omega, t) dt > 2C(t_1 - t'_1) > 0. \quad (5.9)$$

Ahora, integrando 5.1 desde t'_1 hasta t_1 , se tiene que

$$\begin{aligned} \ddot{x}(\omega, t_1) &= \ddot{x}(\omega, t'_1) - a\{\dot{x}(\omega, t_1) - \dot{x}(\omega, t'_1)\} - b\{x(\omega, t_1) - x(\omega, t'_1)\} - \\ &\quad - \int_{t'_1}^{t_1} f(x + B \sin(\omega t)) dt \end{aligned}$$

Usando la condición $|x(\omega, t)| \leq B + \alpha$ para $t_0 \leq t \leq t_1$, tenemos

$$\ddot{x}(\omega, t_1) \leq \ddot{x}(\omega, t'_1) - a\{\dot{x}(\omega, t_1) - \dot{x}(\omega, t'_1)\} + 2b(B + \alpha) + C(t_1 - t'_1)$$

Usando 5.9 se deduce

$$\begin{aligned} \ddot{x}(\omega, t_1) &< \ddot{x}(\omega, t'_1) - \frac{1}{2}a\{\dot{x}(t_1) - \dot{x}(t'_1)\} + 2b(B + \alpha) \\ &< \ddot{x}(\omega, t'_1) + 2b(B + \alpha) \end{aligned}$$

De la misma forma, si $\ddot{x}(\omega, t) < 0$, $t'_1 \leq t \leq t_1$, tenemos

$$-\ddot{x}(\omega, t_1) < -\ddot{x}(\omega, t'_1) + 2b(B + \alpha)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |\ddot{x}(\omega, t_1)| &< |\ddot{x}(\omega, t'_1)| + 2b(B + \alpha) \\ &= |\ddot{x}(\omega, t_0)| + 2b(B + \alpha), \end{aligned}$$

por 5.8. Esto completa la prueba de la primera parte del Lema.

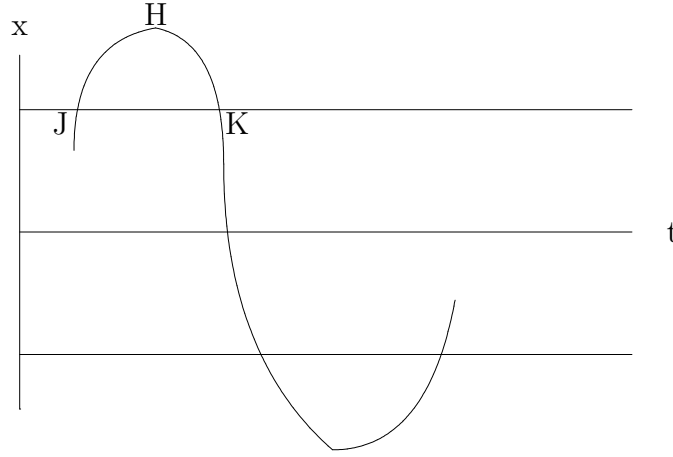
Para probar la segunda parte, supongamos ahora que $|x(\omega, t)| \leq \alpha + B$ para todo $t \geq t_0$. Claramente existe $T_0 \geq t_0$ tal que $|\ddot{x}(\omega, T_0)| \leq \alpha + B$; Por otra parte $|\dot{x}(\omega, t)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ implicando $|x(\omega, t)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ que contradice el resultado del Lema 5.1. Entonces por el resultado de la primera parte del Lema,

$$\begin{aligned} |\ddot{x}(\omega, t)| &\leq |\ddot{x}(\omega, T_0)| + 2b(B + \alpha) \\ &\leq (1 + 2b)(B + \alpha) \end{aligned}$$

para $t \geq T_0$. Esto prueba la segunda parte del Lema. \square

5.2.2. Arco JK

En esta sección probaremos que las soluciones $x(t)$ de la ecuación son acotadas en la región $|x(t)| \geq \alpha + B$:

Figura 5.1: Arcos de $x(t)$

Lema 5.4. Supongamos que JK es un arco en el plano (x, t) tal que

$$|x_J| = \alpha + B = |x_K|; \quad |x(t)| \geq B + \alpha, \quad t_J \leq t \leq t_K.$$

Entonces

$$b|x(\omega, t)| \leq 2Z_{JK} + a|x'_J| + D, \quad t_J \leq t \leq t_K,$$

donde

$$Z_{JK} = \max |x''(\omega, t)|, \quad t_J \leq t \leq t_K$$

.

Demostración. Supongamos primero que $x \geq B + \alpha$ sobre JK . Sea H el punto más alto del arco JK . Integrando 5.1 de t_J a t_H ,

$$b(x_H - \alpha - B) = -(\ddot{x}_H - \ddot{x}_J) - a(\dot{x}_H - \dot{x}_J) - \int_{t_J}^{t_H} f(x + B \sin(\omega t)) dt. \quad (5.10)$$

Como $\dot{x}_H = 0$ se tiene

$$b(x_H - B - \alpha) \leq -(\ddot{x}_H - \ddot{x}_J) + a\dot{x}_J;$$

entonces

$$bx_H \leq 2Z_{JK} + a|\dot{x}_J| + b(B + \alpha).$$

De la misma forma si $x \leq -\alpha - B$ sobre JK tenemos que

$$b|x_H| \leq 2Z_{JK} + a|\dot{x}_J| + b(B + \alpha),$$

donde H denota ahora el punto más bajo de JK . Esto prueba el Lema. \square

5.3. Propiedades de la solución $\dot{x} = \dot{x}(\omega, t)$

Consideraremos ahora, para cualquier solución, el gráfico $\dot{x} = \dot{x}(\omega, t)$ en el plano (\dot{x}, t) . Es claro que de los resultados del Lema 5.2 que $|\dot{x}(\omega, t)|$ no es mayor que $d' > 0$ para todo t ; porque si $|\dot{x}(\omega, t)| \geq d' > 0$ para todo t grande, entonces

$$|\dot{x}(\omega, t)| \rightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty$$

lo cual contradice el resultado del Lema 5.2. Entonces tenemos

Lema 5.5. *Sea $x(\omega, t)$ cualquier solución de (5.1). Entonces para cualquier $d' > 0$ dado, el gráfico $\dot{x} = \dot{x}(\omega, t)$, en el plano (\dot{x}, t) , satisface una de las siguientes condiciones:*

- i) El gráfico permanece en la franja $|\dot{x}| \leq d'$ para todo $t \geq t_0$,*
- ii) el gráfico entra y emerge repetidamente de la franja $|\dot{x}| \geq d'$ cuando $t \rightarrow \infty$.*

En lo que sigue diremos que el Lema 5.5 (i) [d'] o el lema 5.5(ii)[d'] se cumple para una solución $x(t)$, de 5.1, de acuerdo si $\dot{x}(\omega, t)$ satisface el lema según como Lema 5.5(i) o el Lema 5.5(ii). ■

5.3.1. Región $|\dot{x}(\omega, t)| \leq d'$

El resultado siguiente se refiere al caso cuando el Lema 5.5(i)[d'] se cumple para una solución $x(t)$.

Lema 5.6. *Sea $x(\omega, t)$ una solución, de 5.1, tal que*

$$|\dot{x}(\omega, t)| \leq d', \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (5.11)$$

Entonces existe $D_1(d')$ tal que

$$|\ddot{x}(\omega, t_1)| \leq |\ddot{x}(\omega, t_0)| + D_1(d'). \quad (5.12)$$

Además si $|\dot{x}(\omega, t)| \leq d'$ para todo $t \geq t_0$, entonces existe $T_0 \geq t_0$ tal que $|\ddot{x}(\omega, t)| \leq D(d')$ para todo $t \geq T_0$.

Demostración. Para probar la primera parte, supongamos que 5.11 se cumple.

Claramente, si $\ddot{x}(\omega, t_1)$ satisface

$$|\ddot{x}(\omega, t_1)| \leq |\ddot{x}(\omega, t_0)| + d', \quad (5.13)$$

entonces 5.12 es verdadera. Suponga ahora que $\ddot{x}(\omega, t_1)$ no satisface 5.13. Entonces existe t'_1 , $t_0 < t'_1 < t_1$, tal que

$$\begin{cases} |\ddot{x}(\omega, t'_1)| = |\ddot{x}(\omega, t_0)| + d', \\ |\ddot{x}(\omega, t)| \geq |\ddot{x}(\omega, t_0)| + d', \quad t'_1 \leq t \leq t_1 \end{cases} \quad (5.14)$$

Integrando \ddot{x} de t'_1 a t_1 ,

$$\left| \int_{t'_1}^{t_1} \ddot{x} dt \right| = |\dot{x}(\omega, t_1) - \dot{x}(\omega, t'_1)|. \quad (5.15)$$

Por 5.14, $|\ddot{x}(\omega, t)| \geq d'$ para $t'_1 \leq t \leq t_1$. Sustituyendo esto en 5.15 y usando 5.11 obtenemos

$$0 < t_1 - t'_1 \leq 2; \quad (5.16)$$

de donde, también,

$$|x(\omega, t_1) - x(\omega, t'_1)| = \left| \int_{t'_1}^{t_1} \dot{x} dt \right| \leq 2d' \quad (5.17)$$

Después, integrando 5.1 desde t'_1 a t_1 ,

$$\ddot{x}(\omega, t_1) = \ddot{x}(\omega, t'_1) - a(\dot{x}(\omega, t_1) - \dot{x}(\omega, t'_1)) - b(x(\omega, t_1) - x(\omega, t'_1)) - \int_{t'_1}^{t_1} f(x + B \sin(\omega t)) dt$$

Dado que $|f(x + B \sin(\omega t))| \leq C$ para todo x y t , se tiene que

$$|\ddot{x}(\omega, t_1)| \leq |\ddot{x}(\omega, t'_1)| + 2ad' + b|x(\omega, t_1) - x(\omega, t'_1)| + C(t_1 - t'_1)$$

Combinando estas con 5.16 y 5.17 tenemos

$$\begin{aligned} |\ddot{x}(\omega, t_1)| &\leq |\ddot{x}(\omega, t'_1)| + 2(ad' + bd' + C) \\ &= |\ddot{x}(\omega, t_0)| + D(d'), \end{aligned}$$

por 5.14, lo cual prueba 5.12 completamente.

Para la prueba de la segunda parte del Lema suponemos que $|\dot{x}(\omega, t)| \leq d'$ para todo $t \geq t_0$.

Claramente existe un $T_0 \geq t_0$ tal que $|\ddot{x}(\omega, T_0)| \leq 1 + B$; De otra manera $|\ddot{x}(\omega, t)| > 1 + B$ para todo $t \geq t_0$ y de aquí $|\dot{x}(\omega, t)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, lo cual es imposible.

Entonces por el resultado de la primera parte del Lema,

$$\begin{aligned} |\ddot{x}(\omega, t)| &\leq |\ddot{x}(\omega, T_0)| + D_1(d') \\ &\leq D(d') \end{aligned}$$

para $t \geq T_0$, y esto completa la prueba del Lema. \square

5.3.2. Acotación de $\ddot{x}(\omega, t)$

Lema 5.7. Si Lema 5.5 (i)[d'] se cumple para una solución de 5.1, entonces existe $D(d')$ tal que

$$|x(\omega, t)| \leq D(d'), \quad |x''(t)| \leq D(d')$$

para t suficientemente grande.

Demostración. Sea $x(t)$ una solución de 5.1 para la cual el Lema 5.5 (i) [d'] se cumple. Si $x(t)$ no satisface el Lema 5.2(i), entonces satisface el Lema 5.2(ii). En el primer caso $|x(\omega, t)| \leq \alpha + B$ para todo suficientemente grande. En el último caso existe un número infinito de puntos $J_s (s = 1, 2, \dots)$ en el gráfico $x = x(\omega, t)$ que satisfacen

$$|x_{J_s}| = 1 \quad (s = 1, 2, \dots), \quad t_{J_1} < t_{J_2} < t_{J_3} < \dots < t_{J_s} < \dots \rightarrow \infty,$$

y tal que cada arco $J_s J_{s+1}$ esta en una de las regiones $|x| \leq \alpha + B$, $|x| \geq \alpha + B$.

Sea $s_0 \geq 1$ cualquier número entero tal que $t_{J_{s_0}} \geq T_0$, donde T_0 se define en el Lema 5.6. Entonces

$$|\dot{x}(\omega, t)| \leq d', \quad |x''(\omega, t)| \leq D(d'), \quad t \geq t_{J_{s_0}}.$$

De aquí, por el resultado del Lema 5.4, existe una constante $D(d')$ tal que $\max |x(t)|$ sobre cualquier arco $J_s J_{s+1}$, $s \geq s_0$, en la región $|x| \geq \alpha + B$ no excede a $D(d')$. Luego $|x(\omega, t)| \leq D(d')$ para t suficientemente grande. \square

5.4. Existencia de Constante

Evidentemente si existe una constante D tal que el Lema 5.5(i)[d'] se cumple para toda solución de 5.1 entonces el Teorema se sigue del Lema 5.7. Por lo tanto el Teorema será probado si mostramos que

Lema 5.8. Para cualquier solución $x(\omega, t)$, de 5.1, tal que el Lema 5.5 (ii)[$\frac{2C}{b}$] se cumple entonces existe $D(\frac{2C}{b})$ tal que Lema 5.5(i)[$D(\frac{2C}{b})$] se cumple.

Nota 5.1. Sea $x(\omega, t)$ cualquier solución de 5.1, tal que Lema 5.5 (ii) $[\frac{2C}{b}]$ se cumple y consideremos el gráfico $\dot{x} = \dot{x}(t)$ en el plano (\dot{x}, t) . En vista de la formulación del Lema 5.5(ii), existe un número infinito de puntos de este gráfico en el cual $|\dot{x}(\omega, t)| = \frac{2C}{b}$. Denotaremos esta secuencia de puntos por $K_s (s = 1, 2, \dots)$ donde

$$|\dot{x}_{K_s}| = \frac{2C}{b} \quad (s = 1, 2, \dots) \quad 0 \leq t_{K_1} < t_{K_2} < \dots < t_{K_s} < \dots \rightarrow \infty,$$

y cada arco $K_s K_{s+1}$ está en una de las dos regiones

$$|\dot{x}| \leq \frac{2C}{b}, \quad |\dot{x}| \geq \frac{2C}{b}.$$

Para la prueba del Lema 5.8 necesitamos algunos resultados acerca de estos arcos $K_s K_{s+1} (s = 1, 2, \dots)$.

5.4.1. Arco $K_s K_{s+1}$

En esta parte demostraremos dos propiedades que cumple $|\dot{x}|$ en el arco $K_s K_{s+1}$, las cuales están presentes en los Lemas 5.9 y 5.10.

Lema 5.9. Supongamos que $|\dot{x}| \geq \frac{2C}{b}$ en el arco $K_s K_{s+1}$. Entonces existe D_2 tal que

$$|\dot{x}(\omega, t)| \leq D_2 + \frac{|\ddot{x}_{K_s}|}{a}, \quad t_{K_s} \leq t \leq t_{K_{s+1}}.$$

Demostración. Definamos h_s por

$$h_s = \max |\dot{x}(t)|, \quad t_{K_s} \leq t \leq t_{K_{s+1}}.$$

Sea H_s el punto de $K_s K_{s+1}$ en el cual $|\dot{x}(\omega, t)| = h_s$; si existen varios puntos sea H_s uno de ellos.

$$\dot{x}_{H_s} = h_s, \quad \ddot{x}_{H_s} = 0. \quad (5.18)$$

Integrando 5.1 desde t_{K_s} hasta t_{H_s} , y sustituyendo 5.18 obtenemos

$$a(h_s - \frac{2C}{b}) = \ddot{x}_{K_s} - b(x_{H_s} - x_{K_s}) - \int_{t_{K_s}}^{t_{H_s}} f(x + B \sin(\omega t)) dt. \quad (5.19)$$

Ahora

$$|\int_{t_{K_s}}^{t_{H_s}} f(x + B \sin(\omega t)) dt| \leq C(t_{H_s} - t_{K_s}). \quad (5.20)$$

También, como $\dot{x} \geq \frac{2C}{b}$ en $K_s K_{s+1}$,

$$0 < t_{H_s} - t_{K_s} < b \frac{(x_{H_s} - x_{K_s})}{2C}$$

De esto y (5.20) se tiene

$$\begin{aligned} -b(x_{H_s} - x_{K_s}) - \int_{t_{K_s}}^{t_{H_s}} f(x + B \sin(\omega t)) dt &\leq -b(x_{H_s} - x_{K_s}) + \frac{1}{2}b(x_{H_s} - x_{K_s}) \\ &= -\frac{1}{2}b(x_{H_s} - x_{K_s}) \\ &< 0. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Entonces sustituyendo esta en 5.19 resulta

$$a(h_s - \frac{C}{b}) < |\ddot{x}_{K_s}|;$$

donde $h_s < D + \frac{\ddot{x}_{K_s}}{a}$.

De igual forma si $\dot{x} \leq -\frac{2C}{b}$ en $K_s K_{s+1}$ tenemos

$$h_s < D + \frac{\ddot{x}_{K_s}}{a},$$

y la prueba del lema queda completa. □

Lema 5.10. *Supongamos que $|\dot{x}| \geq \frac{2C}{b}$ en el arco $K_s K_{s+1}$. Entonces*

$$t_{K_{s+1}} - t_{K_s} \leq \frac{2}{C}(|\ddot{x}_{K_s}|).$$

Demostración. Supongamos primero que $|\dot{x}| \geq \frac{2C}{b}$ en $K_s K_{s+1}$. Entonces

$$-a(\dot{x}(\omega, t) - \dot{x}_{K_s}) \leq 0, \quad t_{K_s} \leq t \leq t_{K_{s+1}}. \tag{5.22}$$

También, para $t_{K_s} \leq t \leq t_{K_{s+1}}$,

$$x(\omega, t) - x_{K_s} = \int_{t_{K_s}}^t \dot{x} dt \geq (t - t_{K_s}) \frac{2C}{b} \geq 0,$$

esto es

$$0 \leq t - t_{K_s} \leq \frac{1}{2} \frac{b(x(\omega, t) - x_{K_s})}{C}, \quad t_{K_s} \leq t \leq t_{K_{s+1}}. \tag{5.23}$$

Ahora integrando 5.1 desde t hasta t_K ,

$$\ddot{x}(\omega, t) = \ddot{x}_{K_s} - a(\dot{x}(\omega, t) - \dot{x}_{K_s}) - b(x(\omega, t) - x_{K_s}) - \int_{t_{K_s}}^t f(x + B \sin(\omega t)) dt \quad (5.24)$$

Por un argumento similar usado en 5.21 obtenemos,

$$\begin{aligned} -b(x(\omega, t) - x_{K_s}) - \int_{t_{K_s}}^t f(x + B \sin(\omega t)) dt &\leq -\frac{1}{2}b(x(\omega, t) - x_{K_s}), \quad t_{K_s} \leq t \leq t_{K_{s+1}}, \\ &\leq -C(t - t_{K_s}) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Usando 5.23. Entonces, combinando 5.22, 5.24, y 5.25, obtenemos

$$x''(t) \leq \ddot{x}_{K_s} - C(t - t_{K_s}), \quad t_{K_s} \leq t \leq t_{K_{s+1}}.$$

Integrando ambos lados de esta desigualdad desde t_{K_s} hasta $t_{K_{s+1}}$, el integrando del lado derecho se anula, dado que $\dot{x}_{K_s} = \dot{x}_{K_{s+1}}$, y de aquí

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{t_{K_s}}^{t_{K_{s+1}}} (\ddot{x}_{K_s} - C(t)) dt \\ &= (\ddot{x}_{K_s})(t_{K_{s+1}} - t_{K_s}) - \frac{1}{2}C(t_{K_{s+1}} - t_{K_s})^2. \end{aligned}$$

Donde

$$t_{K_{s+1}} - t_{K_s} \leq 2 \frac{(|\ddot{x}_{K_s}|)}{C}.$$

De la misma forma, si $\dot{x} \leq -\frac{2C}{b}$ en $K_s K_{s+1}$, tenemos

$$t_{K_{s+1}} - t_{K_s} \leq 2 \frac{(|\dot{x}_{K_s}|)}{C}$$

y así el Lema queda probado. \square

5.5. Lema Dominante

El siguiente Lema es, en muchos aspectos, es el Lema dominante y su prueba depende de la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\{\ddot{x}(\omega, t)^2 - \ddot{x}(T)^2\} &+ a \int_T^t (\ddot{x})^2 dt + \frac{1}{2}b\{\dot{x}(\omega, t)^2 - \dot{x}(\omega, T)^2\} + \\ &+ \int_T^t \ddot{x} f(x + B \sin(\omega t)) dt = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Esto es obtenido de 5.1 al multiplicarlo por \ddot{x} e integrando desde T hasta t .

Lema 5.11. *Supongamos que $|\dot{x}| \geq 2\frac{C}{b}$ en el arco $K_s K_{s+1}$. Entonces existe D_3 y D_4 , $0 < D_4 < 1$, tal que si $|\ddot{x}_{K_s}| > D_3$, entonces*

$$(\ddot{x})_{K_{s+1}}^2 < (\ddot{x})_{K_s}^2 (1 - D_4).$$

Demostración. Dado que $|\dot{x}_{K_s}| = |\dot{x}_{K_{s+1}}|$, la ecuación 5.26 para el intervalo $(t_{K_s}, t_{K_{s+1}})$ es

$$\frac{1}{2}((\ddot{x})_{K_{s+1}}^2 - (\ddot{x})_{K_s}^2) + a \int_{t_{K_s}}^{t_{K_{s+1}}} \ddot{x}^2 dt + \int_{t_{K_s}}^{t_{K_{s+1}}} \ddot{x} f(x + B \sin(\omega t)) dt = 0$$

Como el hecho $|f(x + B \sin(\omega t))| \leq C$ para todo x , obtenemos

$$((\ddot{x})_{K_{s+1}}^2 - (\ddot{x})_{K_s}^2) \leq 2aI_s(\ddot{x}) + 2C \int_{t_{K_s}}^{t_{K_{s+1}}} |\ddot{x}| dt, \quad (5.27)$$

donde

$$I_s(\ddot{x}) = \int_{t_{K_s}}^{t_{K_{s+1}}} (\ddot{x})^2 dt$$

Ahora, por la desigualdad de Cauchy,

$$\int_{t_{K_s}}^{t_{K_{s+1}}} |\ddot{x}| dt \leq \sqrt{t_{K_{s+1}} - t_{K_s}} \sqrt{I_s(\ddot{x})}. \quad (5.28)$$

Por el Lema 5.10,

$$\begin{aligned} t_{K_{s+1}} - t_{K_s} &\leq 2 \frac{|\ddot{x}_{K_s}|}{C} \\ &< 4 \frac{|\ddot{x}_{K_s}|}{C} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Por lo tanto se sigue de 5.28 y 5.29 que

$$\int_{t_{K_s}}^{t_{K_{s+1}}} |\ddot{x}| dt < 2 \sqrt{\frac{|\ddot{x}_{K_s}| I_s(\ddot{x})}{C}}$$

Entonces, combinando esto último con 5.27,

$$((\ddot{x})_{K_{s+1}}^2 - (\ddot{x})_{K_s}^2) < -2aI_s(\ddot{x}) \left\{ 1 - \frac{2(C)}{\sqrt{C}} \left[\frac{|\ddot{x}_{K_s}|}{I_s(\ddot{x})} \right] \right\} \quad (5.30)$$

El paso siguiente es obtener una estimación para $\min I_s(\ddot{x})$.

Para esto, observamos primero que existe $\ddot{x}(\omega, t) = 0$ en alguna parte de $K_s K_{s+1}$ y por lo

tanto existe un intervalo $(t_{K_s}, t_{K_s} + \tau_0)$, dentro $(t_{K_s}, t_{K_{s+1}})$ tales que

$$|\ddot{x}(t_{K_s} + \tau_0)| = \frac{1}{2}|\ddot{x}_{K_s}| \quad (5.31)$$

$$\frac{1}{2}|\ddot{x}_K| \leq |\ddot{x}(\omega, t)| \leq |\ddot{x}_{K_s}|, \quad t_{K_s} \leq t \leq t_{K_s} + \tau_0 \quad (5.32)$$

Por 5.32,

$$I_s(\ddot{x}) > \int_{t_{K_s}}^{t_{K_s} + \tau_0} (\ddot{x})^2 dt > \frac{1}{4}\ddot{x}_{K_s}\tau_0, \quad (5.33)$$

donde, en vista de 5.31 y 5.32, τ_0 también satisface

$$\frac{1}{2}|\ddot{x}_{K_s}| = \left| \int_{t_{K_s}}^{t_{K_s} + \tau_0} \ddot{x} dt \right| \leq \int_{t_{K_s}}^{t_{K_s} + \tau_0} |\ddot{x}| dt \quad (5.34)$$

Observemos ahora que, para cualquier solución $x(t)$,

$$|\ddot{x}| = |a\ddot{x} + b\dot{x} + f(x + B \sin(\omega t))|$$

esto es por 5.32,

$$|\ddot{x}| \leq a|\ddot{x}_{K_s}| + b|x'| + C, \quad t_{K_s} \leq t \leq t_{K_s} + \tau_0.$$

Combinando estos con el Lema 5.9 resulta

$$|\ddot{x}| \leq \left(a + \frac{b}{a}\right)|\ddot{x}_{K_s}| + bD_2C, \quad t_{K_s} \leq t \leq t_{K_s} + \tau_0.$$

Sustituyendo esto en 5.34 obtenemos

$$\frac{1}{2}|\ddot{x}_{K_s}| \leq \left\{\left(a + \frac{b}{a}\right)|\ddot{x}_{K_s}| + D\right\}\tau_0.$$

De donde

$$\begin{aligned} \tau_0 &\geq \frac{1}{2} \frac{|\ddot{x}_{K_s}|}{\left\{\left(a + \frac{b}{a}\right)|\ddot{x}_{K_s}| + D\right\}} \\ &> \frac{1}{4\left(a + \frac{b}{a}\right)} \end{aligned}$$

Poniendo esta estimación de τ_0 en 5.33 tenemos

$$I_s(\ddot{x}) > \frac{1}{16\left(a + \frac{b}{a}\right)}|\ddot{x}_{K_s}|^2, \quad (5.35)$$

puesto que $|\ddot{x}_{K_s}| > D_3$.

Ahora si I_s satisface 5.35, el contenido de las llaves en 5.30 es mayor que $1 - \sqrt{\frac{D}{|\ddot{x}_{K_s}|}}$ y éste no es menor que $\frac{1}{2}$ para $|\ddot{x}_{K_s}| > D$. Combinando este resultado con 5.30 y después con 5.35 deducimos la existencia de D_3 tales que si $|\ddot{x}_{K_s}| > D_3$, entonces

$$\begin{aligned} (\ddot{x})_{K_{s+1}}^2 - (\ddot{x})_{K_s}^2 &< -aI_s(\ddot{x}) \\ &< -\frac{a}{16(a + \frac{b}{a})}(\ddot{x})_{K_s}^2, \end{aligned}$$

lo cual prueba el lema. \square

5.6. Prueba del Lema 5.8

Nuestro resultado final para la prueba del Lema 5.8 es

Lema 5.12. *Supongamos que $|\dot{x}| \geq 2\frac{C}{b}$ en $K_s K_{s+1}$. Entonces existe $D_5 > D_1(\frac{2C}{b})$ tal que si $|\ddot{x}_{K_s}| > D_5$, entonces*

$$|\ddot{x}_{K_{s+2}}| \leq |\ddot{x}_{K_{s+1}}| + D_1(\frac{2C}{b}).$$

Demostración. Dado que $|\dot{x}| \leq \frac{2C}{b}$ en $K_s K_{s+1}$ se sigue del Lema 5.6, con $d' = \frac{2C}{b}$, que

$$|\ddot{x}_{K_{s+1}}| \leq |\ddot{x}_{K_s}| - D_1(\frac{2C}{b}). \quad (5.36)$$

Notamos del Lema 5.11, que una constante D_6 , $0 < D_6 < 1$, existe tal que

$$|\ddot{x}_{K_{s+1}}| < (1 - D_6)|\ddot{x}_{K_s}| \quad (5.37)$$

Puesto que $|\ddot{x}_{K_s}| > D_3$. Entonces, combinando 5.36 y 5.37,

$$|\ddot{x}_{K_{s+2}}| < (1 - D_6)|\ddot{x}_{K_s}| + D_1(\frac{2C}{b}) \quad (5.38)$$

para $|\ddot{x}_{K_s}| > D_3$. Si, además,

$$|\ddot{x}_{K_s}| \geq \frac{2D_1(\frac{C}{b})}{D_6}$$

el lado derecho de 5.38 no excede $|\ddot{x}_{K_s}| - D_1(\frac{2C}{b})$ y así queda probado el Lema. \square

5.6.1. Demostración del Lema 5.8

Sea $x(\omega, t)$ cualquier solución de 5.1 para la cual el Lema 5.5 (ii) $[\frac{2C}{b}]$ se cumple y sea $K_s (s = 1, 2, \dots)$ los puntos del plano (\dot{x}, t) definido en Nota 5.1. Es claro del Lema 5.9 si D_7 existe tal que $|\ddot{x}_{K_s}| \leq D_7$ para todo s grande, entonces existe $D(D_7)$ tal que

$$|x'(\omega, t)| \leq D(D_7)$$

para t grande. Por lo tanto para probar el lema es suficiente mostrar que existen $D(\frac{2C}{b})$ constantes tales que una pequeña consideración de los resultados de los Lemas 5.6, 5.9, y 5.11 mostrará que si $|\ddot{x}_{K_s}| \leq D(D_8)$ para algún entero s , entonces existe $D(D_8)$ tal que

$$|\ddot{x}_{K_s}| \leq D(\frac{2C}{b}) \quad \text{para todo } s \text{ grande.} \quad (5.39)$$

Por lo tanto 5.39 será establecido si probamos que

$$|\ddot{x}_{K_s}| \leq D(\frac{2C}{b}) \quad \text{para algún } s. \quad (5.40)$$

Ahora escojamos la secuencia $K_s (s = 1, 2, \dots)$ tal que $|\dot{x}| \geq \frac{2C}{b}$ en $K_1 K_2$. Entonces cada arco $K_{2s-1} K_{2s} (s = 1, 2, \dots)$ esta en uno de los semiplanos $\dot{x} \geq \frac{2C}{b}$, $\dot{x} \leq -\frac{2C}{b}$. Para cualquier entero $n \geq 1$

$$|\ddot{x}_{K_s}| \leq D_5, \quad \text{para algún } s, \quad 1 \leq s \leq 2n, \quad (5.41)$$

O

$$|\ddot{x}_{K_s}| > D_5, \quad s = 1, 2, \dots, 2n. \quad (5.42)$$

Desde D_5 , definido en el Lema 5.12, depende de $\frac{2C}{b}$, (1.39) es cierto si 5.41 se cumple.

Supongamos ahora que 5.42 se cumple. Entonces, por Lema 5.12,

$$\begin{aligned} |\ddot{x}_{K_{2n+1}}| &\equiv |\ddot{x}_{K_1} + \sum_{s=2}^n \{|\ddot{x}_{K_{2s+1}}| - |\ddot{x}_{K_{2s-1}}|\}| \\ &< |\ddot{x}_{K_1}| - nD_1(\frac{2C}{b}) \\ &\leq D_5, \end{aligned}$$

para n suficientemente grande; y por lo tanto 5.40 es también verdadera en este caso.

Esto prueba el Lema completamente

Capítulo 6

Eliminación de las Grandes Oscilaciones

6.1. Introducción

En este capítulo estudiamos como la introducción de una función sinusoidal de suficiente amplitud y frecuencia en el sistema 4.2, estudiado en el capítulo 4, elimina las oscilaciones grandes, y deja soluciones periódicas de alta frecuencia y amplitud tan pequeña como se quiera. De hecho conseguiremos que todas las soluciones del sistema perturbado tiendan a un entorno del origen tan pequeño como se quiera, a base de aumentar la amplitud y la frecuencia de la perturbación. Tal como comentamos en la Introducción, los resultados de Boyer[11] muestran, que la introducción de una excitación periódica en el sistema, hacía que se mostrara unas soluciones periódicas atractoras de gran amplitud, que se preservaban al ir aumentando la amplitud y frecuencia de esta excitación, hasta que al llegar a valores suficientemente altos de esta amplitud y frecuencia, estas soluciones periódicas desaparecían y todas las soluciones tendían al origen. Una explicación posible de este fenómeno es que el sistema promediado, que definimos más adelante, posee una órbita cerrada, atractora, que es el límite de las órbitas que emanan del punto fijo en el origen, formando la superficie asintótica inestable del punto de reposo \mathbf{O} . Esta superficie puede continuarse de una manera lisa más allá de esta órbita periódica, que sería única y sería el atractor global de todas las órbitas que no tienden al origen \mathbf{O} . Al aumentar la amplitud y la frecuencia de la perturbación, el sistema promediado experimenta una bifurcación de Hopf en el origen, generándose una órbita periódica inestable que va aumentando de amplitud hasta juntarse con la órbita estable, aniquilándose ambas y dejando libre la superficie asintótica para salir de B . La idea se basa en que para altas frecuencias de la excitación el sistema perturbado dista tan poco como se quiera del sistema promediado. Desafortunadamente no se ha podido determinar con suficiente precisión las características del retrato del sistema promediado, comenzando que ni para el sistema sin perturbar no sabemos las características de unicidad y estabilidad de la órbita periódica. Para el sistema promediado somos capaces, sin embargo, de asegurar la estabilidad asintótica global

de \mathbf{O} para amplitudes y frecuencias suficientemente grandes de la perturbación. Esto nos permite asegurar, para estos casos, que todas las órbitas del sistema perturbado tienden a una vecindad de \mathbf{O} tan pequeña como se quiera. El método utilizado para mostrar la convergencia del sistema perturbado al promediado están inspirado en el tratamiento que hacen en *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations* [10]. Observaremos que al incrementar B lo que se consigue es disminuir la derivada de la función promediada f_0 , con lo que para una B suficientemente grande conseguimos la estabilidad asintótica global para el sistema promediado.

Lo que se consigue al aumentar ϵ es el acercamiento entre los campos vectoriales definidos en \mathbf{R}^3 por los sistemas perturbado y promediado, lo que para ϵ suficientemente pequeña implicará que las soluciones del sistema promediado tenderán a un entorno tan pequeño como se quiera de los atractores del sistema promediado. En particular si el origen es un atractor global del sistema promediado, las soluciones del sistema perturbado tenderán a un entorno tan pequeño como se quiera del \mathbf{O} .

6.2. Perturbación de la Ecuación

En esta sección investigaremos el efecto que causa al introducir una perturbación sinusoidal de gran amplitud y frecuencia, es decir se estudia el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial no lineal de tercer grado:

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + f(x + B \sin \omega t) = 0 \quad (6.1)$$

o el Sistema Perturbado equivalente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -az - by - f(x + B \sin \omega t) \end{aligned} \quad (6.2)$$

para valores de B y ω suficientemente grandes; donde f está definida como en el capítulo 4, es decir f Lipschitz, no decreciente $f(0) = 0$, f con derivada continua en 0 y $f'(0) = c > ab$ Existe C tal que para toda x $|f(x)| < C$ y $\frac{|f(x)|}{|x|} < C$ para $0 < |x| < 1$ y $f(-x) = -f(x)$

6.2.1. Función Perturbada

La función perturbada $f(x + B \sin \omega t)$ se puede visualizar en general por medio de la figura 6.1

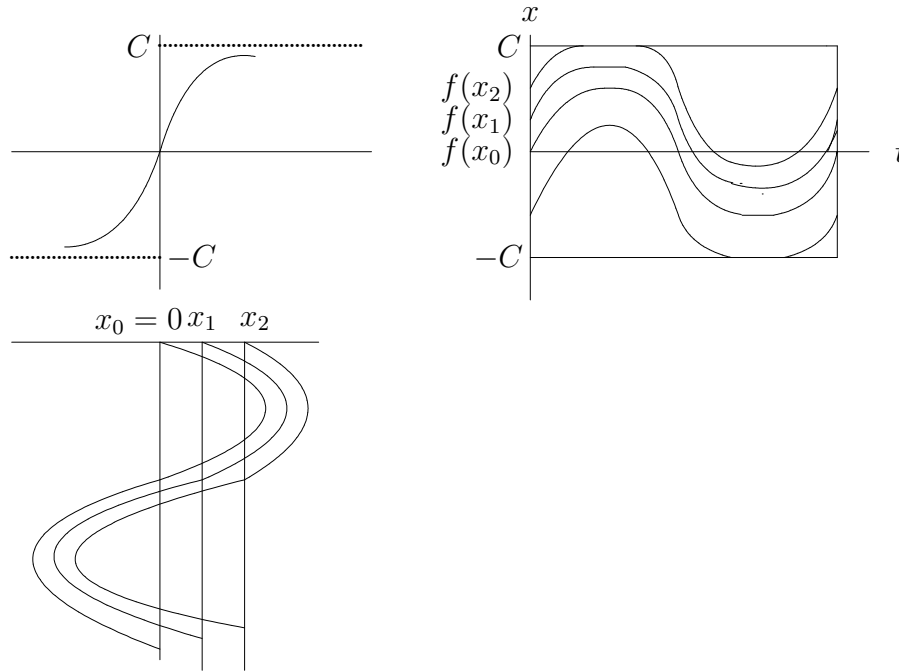


Figura 6.1: Función Perturbada $f(x + B \sin \omega t)$ para $|x| \leq (B + 1)$

En el caso particular en que

$$f(x) = \begin{cases} c \operatorname{sign}(x) & \text{si } |x| > 1 \\ cx & \text{si } |x| \leq 1 \end{cases} \quad (6.3)$$

podemos ser más explícito, en lo que sigue supondremos $B > 1$

1. Si $x \geq (B + 1)$, entonces $x + B \sin \omega t \geq 1$ y así se tiene que $f(x + B \sin \omega t) = c$
2. Si $x \leq -(B + 1)$, entonces se tiene $f(x + B \sin \omega t) = -c$
3. Si $-(B + 1) \leq x \leq (B + 1)$

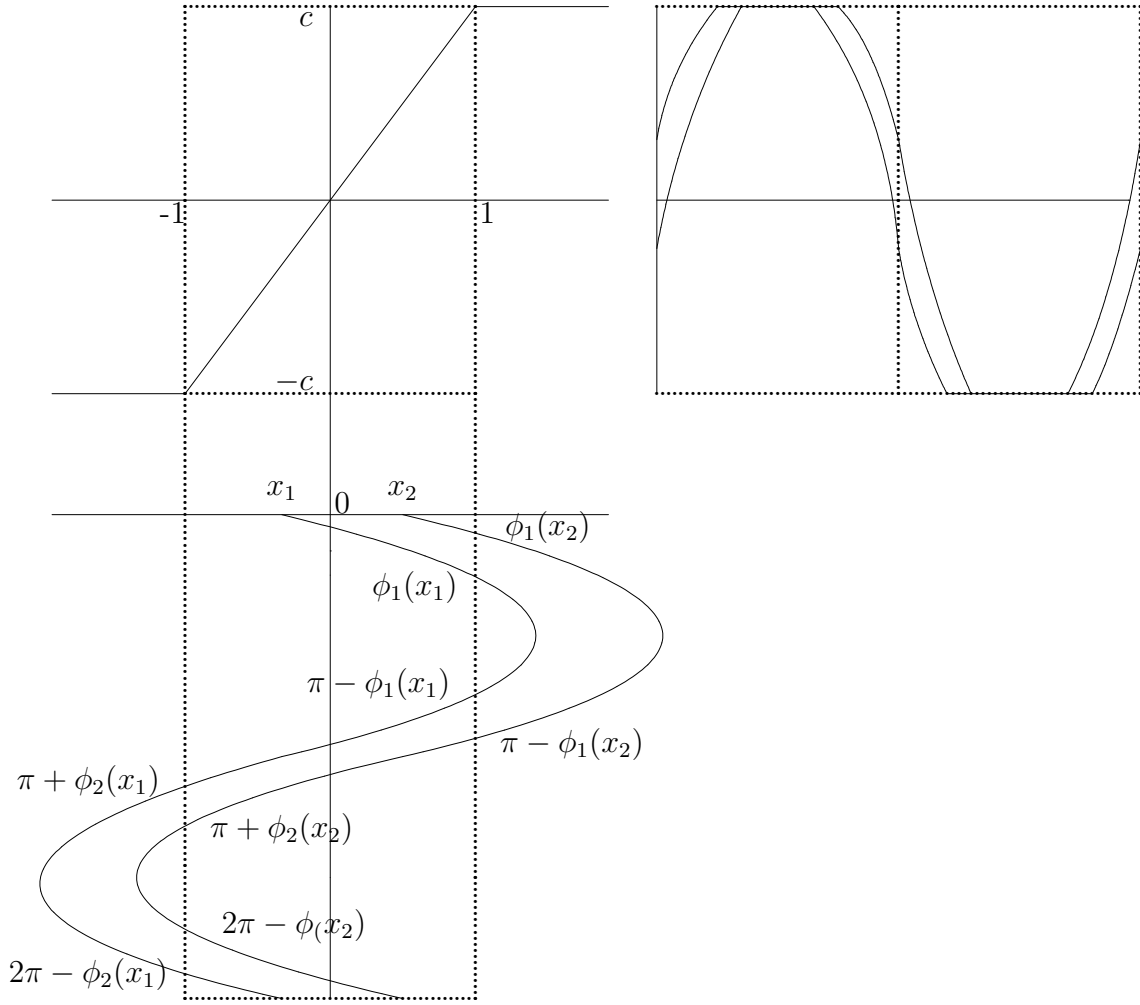


Figura 6.2: Función Perturbada $f(x + B \sin \omega t)$ para $|x| \leq (B + 1)$

$$\begin{aligned}
 f(x + B \sin \omega t) &= c(x + B \sin \omega t) & 0 \leq \omega t \leq \phi_1 \\
 f(x + B \sin \omega t) &= c & \phi_1 \leq \omega t \leq \pi - \phi_1 \\
 f(x + B \sin \omega t) &= c(x + B \sin \omega t) & \pi - \phi_1 \leq \omega t \leq \pi + \phi_2 \\
 f(x + B \sin \omega t) &= -c & \pi + \phi_2 \leq \omega t \leq 2\pi - \phi_2 \\
 f(x + B \sin \omega t) &= c(x + B \sin \omega t) & 2\pi - \phi_2 \leq \omega t \leq 2\pi
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Donde ϕ_1 y $-\phi_2$ son los ángulos más próximos a 0 en que $x + B \sin(\omega t)$ vale c y $-c$

respectivamente.

$$\phi_1(x) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{1-x}{B}\right) & |1-x| < B \\ \frac{\pi}{2} & 1-x \geq B \\ -\frac{\pi}{2} & 1-x \leq -B \end{cases} \quad (6.5)$$

$$\phi_2(x) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{1+x}{B}\right) & |1+x| < B \\ \frac{\pi}{2} & 1+x \geq B \\ -\frac{\pi}{2} & 1+x \leq -B \end{cases} \quad (6.6)$$

6.2.2. Función Promedio

$$f_0(x, B) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + B \sin \omega t) d(\omega t) \quad (6.7)$$

Es claro que $f_0(x, B)$, para B fijado, es creciente y que $|f_0(x, B)| < C$.

Proposición 6.1. *Para toda función f Lipschitz, no decreciente, acotada, con derivada continua en 0 y $f(-x) = -f(x)$, se tiene que:*

- a) $f_0(x, B)$ es derivable para todos los valores de x .
- b) $f_0(0, B) = 0$
- c) $f_0(x, B)$ es no decreciente
- d) $|f_0(x, B)| < C$.
- e) $f'_0(x, B) \rightarrow 0$ cuando $B \rightarrow \infty$.
- f) $f''_0(0, B) = 0$ y es positiva en un intervalo $(0, x_1)$ si B es suficientemente grande. Debido a que f' tiende a 0 cuando x tiende a infinito, $f_0(x, B)$ tiene algún punto de inflexión para alguna $x > 0$.

Demostración. a) inmediata de la definición.

- b) Se sigue inmediatamente de que f es una función impar.
- c) Si $x \leq y$ entonces $f(x + B \sin \tau) \leq f(y + B \sin \tau)$, luego $f_0(x, B) \leq f_0(y, B)$ así que $f_0(x, B)$ es no decreciente.
- d)

$$|f_0(x, B)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(x + B \sin \tau) d\tau \right| < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C d\tau = C.$$

- e) Siendo $f'_0(x, B) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x + B \sin(\omega\tau)) d\tau$, y sabiendo que f es no decreciente y acotada, resulta que $\int_{-M}^{\infty} f' \rightarrow 0$ cuando $M \rightarrow \infty$. Por lo tanto la contribución a la integral de los valores de $|x + B \sin(\omega\tau)| > M$ también tienden a 0 cuando $B \rightarrow \infty$.

Por otro lado la medida del conjunto de las τ en el intervalo $(0, 2\pi)$ para las cuales $|x + B \sin(\omega\tau)| < M$ tiende a 0. Siendo f' acotada en $(-M, M)$, esto implica que $f'_0(x, B)$ tiende a 0 cuando $B \rightarrow \infty$.

- f) Siendo f' una función par, no negativa, y que tiende a cero cuando x tiende a infinito (f' existe casi donde quiera si f es de Lipschitz), resulta que tomando B suficientemente grande podemos lograr que la contribución a la integral de $f'(x + B \sin(\omega t))$ al incrementar x en un intervalo pequeño $(0, x_1)$, sea positiva. Esto se debe a que f' es par, y que la contribución negativa de la onda positiva de la senoide es menor que la contribución positiva de la onda negativa para los mismos valores de f' (correspondientes a valores de x y $-x$), y esta ganancia no es compensada por la disminución del valor de la integral en los extremos de la senoide si B es suficientemente grande, ya que al tender f' a cero, esta diferencia la podemos hacer arbitrariamente pequeña incrementando B

□

Para el caso particular 6.3 tenemos

Realizando las sustituciones propias de las ecuaciones 6.4 en la ecuación 6.7 e integrando se tiene

$$f_0(x, B) = \begin{cases} c \operatorname{sign}(x) & \text{si } |x| \geq (B + 1) \\ \frac{1}{\pi} c [x(\phi_1 + \phi_2) + B(\cos \phi_2 - \cos \phi_1) + (\phi_2 - \phi_1)] & \text{si } |x| \leq (B + 1) \end{cases} \quad (6.8)$$

De la ecuación 6.8 por cálculos elementales se obtiene

$$f'_0(x, B) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq (B+1) \\ \frac{c}{\pi} [\phi_1(x) + \phi_2(x) + x(\phi'_1 + \phi'_2) - \\ -B(\phi'_2 \sin \phi_2 - \phi'_1 \sin \phi_1) + \phi'_2 - \phi'_1] & \text{si } |x| \leq (B+1) \end{cases} \quad (6.9)$$

De las ecuaciones (6.5) y (6.6) se tiene que:

$$\phi_1(x) + \phi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq (B+1) \\ \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1+x}{B}\right) & \text{si } -B-1 < x < -B+1 \\ \arcsin\left(\frac{1-x}{B}\right) + \arcsin\left(\frac{1+x}{B}\right) & \text{si } -B+1 < x < B-1 \\ \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1-x}{B}\right) & \text{si } B-1 < x < B+1 \end{cases} \quad (6.10)$$

De la ecuación (6.10) se tiene:

$$\phi'_1(x) + \phi'_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq (B+1) \\ \frac{1}{\sqrt{B^2 - (1+x)^2}} & \text{si } -B-1 < x < -B+1 \\ -\frac{1}{\sqrt{B^2 - (1-x)^2}} + \frac{1}{\sqrt{B^2 - (1+x)^2}} & \text{si } -B+1 < x < B-1 \\ -\frac{1}{\sqrt{B^2 - (1-x)^2}} & \text{si } B-1 < x < B+1 \end{cases} \quad (6.11)$$

Por lo tanto de (6.9), (6.10) y (6.11) tenemos que:

$$f'_0(x, B) = \frac{c}{\pi} \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq (B+1) \\ \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1+x}{B}\right) & \text{si } -(B+1) \leq x \leq (-B+1) \\ \arcsin\left(\frac{1-x}{B}\right) + \arcsin\left(\frac{1+x}{B}\right) & \text{si } (-B+1) < x < (B-1) \\ \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1-x}{B}\right) & \text{si } B-1 \leq x \leq (B+1) \end{cases} \quad (6.12)$$

Por lo tanto

$$f'_0(0, B) = \frac{2c}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{B}\right) \quad (6.13)$$

Luego la segunda derivada de la función Promedio viene dada por:

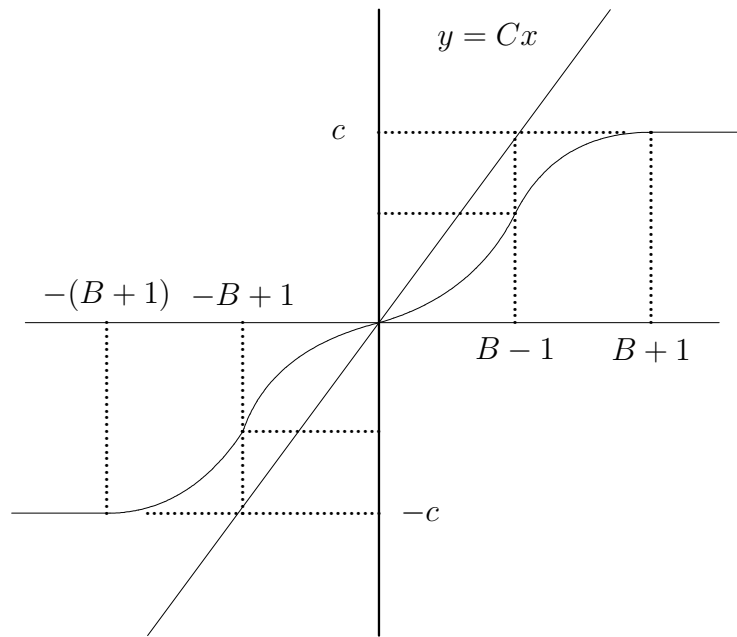
$$f''_0(x, B) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq (B+1) \\ \frac{1}{\sqrt{B^2 - (1+x)^2}} & \text{si } -(B+1) \leq x \leq (-B+1) \\ \frac{-1}{\sqrt{B^2 - (1-x)^2}} + \frac{1}{\sqrt{B^2 - (1+x)^2}} & \text{si } (-B+1) < x < (B-1) \\ \frac{-1}{\sqrt{B^2 - (1-x)^2}} & \text{si } B-1 \leq x \leq (B+1) \end{cases} \quad (6.14)$$

La función promedio $f_0(x, B)$ es dada por, ver Fig.6.3

Así el Sistema Promediado queda

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -az - by - f_0(x, B) \end{aligned} \quad (6.15)$$

En la siguiente sección se demuestra que las soluciones del Sistema Perturbado están suficientemente cercanas a las soluciones del Sistema Promedio para B y ω suficientemente grandes.

Figura 6.3: Función Promedio $f_0(x, B)$

6.3. Aproximación

Esta aproximación nos va a permitir decir cosas sobre el comportamiento del sistema perturbado a partir de las propiedades del sistema promediado. Efectivamente, si el sistema promediado tiene un atractor \mathbf{A} que admite una función de Liapunov, entonces para ω suficientemente grande el sistema promediado tendrá por atractor una vecindad tan pequeña como se quiera de \mathbf{A} . Tal sería el caso si el sistema promediado tiene una órbita periódica asintóticamente estable, entonces las soluciones del sistema perturbado van a entrar todas en una vecindad, tan pequeña como queramos de \mathbf{O} .

Sea $h(t, x) = -f(x + B \sin \omega t) + f_0(x, B)$, es una función periódica de periodo $2\frac{\pi}{\omega}$, acotada y promedio cero.

Sea

$$H(t, x, \omega, B) = \int_{-\infty}^{\omega t} \exp \left[-\frac{1}{\omega}(\omega t - \tau) \right] h(\tau, x) d\tau \quad (6.16)$$

Lema 6.1. *Existe una función continua $\eta(\omega)$ tal que $\eta(\omega) \rightarrow 0$ cuando $\omega \rightarrow \infty$ entonces*

$$|H(t, x, \omega, B)| \leq \omega \eta(\omega) \quad (6.17)$$

Finalmente,

$$\left| \frac{1}{\omega} \frac{\partial H}{\partial t} - h(t, x) \right| \leq \eta(\omega) \quad (6.18)$$

Demostración. Como

$$h_0(x, B) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\tau, x) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(x+B \sin(\omega\tau)) - f_0(x, B) \right) d\tau = f_0(x, B) - f_0(x, B) = 0$$

entonces existe una función decreciente $\varepsilon(T)$ donde $\varepsilon(T) \rightarrow 0$ cuando $T \rightarrow \infty$ tal que

$$\left| T^{-1} \int_t^{t+T} h(\tau, x) d\tau \right| \leq \varepsilon(T)$$

$$\begin{aligned} H(t, x, \omega, B) &= \int_{-\infty}^{\omega t} \exp \left[-\frac{1}{\omega}(\omega t - \tau) \right] h(\tau, x) d\tau \\ &= - \int_{\infty}^0 \exp \left[-\frac{1}{\omega}\tau \right] h(\omega t - \tau, x) d\tau \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} \exp \left[-\frac{\tau}{\omega} \right] h(\omega t - \tau, x) d\tau \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nT}{\omega}} \int_{nT}^{(n+1)T} \exp \left[-\frac{1}{\omega}(\tau - nT) \right] h(\omega t - \tau, x) d\tau \end{aligned}$$

Luego como h es una función acotada, existe un $M > 0$ tal que $|h| \leq M$

$$\begin{aligned} \left| H(t, x, \omega, B) \right| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[-\frac{nT}{\omega} \right] \left| \int_{nT}^{(n+1)T} h(\omega t - \tau, x) d\tau \right| + \\ &\quad + M \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[-\frac{nT}{\omega} \right] \int_{nT}^{(n+1)T} \left(1 - \exp(-\frac{1}{\omega}(\tau - nT)) \right) d\tau \\ \left| H(t, x, \omega, B) \right| &\leq \frac{T\varepsilon(T)}{1 - \exp(-\frac{T}{\omega})} + MT \end{aligned}$$

Escojamos T en función de ω tal que $\varepsilon(T) = 1 - \exp(-\frac{T}{\omega})$. Dado que $\varepsilon(T) \rightarrow 0$ cuando $T \rightarrow \infty$. Es claro que la solución T_ω de la ecuación $\varepsilon(T) = 1 - \exp(-\frac{T}{\omega})$ satisface

$$\frac{T_\omega}{\omega} \rightarrow 0 \text{ cuando } \omega \rightarrow \infty$$

$$\text{Sea } (M+1) \frac{T_\omega}{\omega} = \eta(\omega)$$

Por lo tanto

$$\left| H(t, x, \omega, B) \right| \leq \omega \eta(\omega)$$

Derivando la función $H(t, x, \omega, B)$ con respecto a t se tiene:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -H + \omega h(\omega t, x)$$

Así que

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial H}{\partial t} - h(\omega t, x) = -\frac{1}{\omega} H$$

Además la relación 6.18 se sigue de la identidad

$$\left| \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} H(t, x, \omega, B) - h(t, x) \right| = \frac{1}{\omega} |H(t, x, \omega, B)|$$

y 6.17. □

Corolario 6.1. *Existe una función continua $\eta(\omega)$ tal que $\eta(\omega) \rightarrow 0$ cuando $\omega \rightarrow \infty$ entonces*

$$\left| \frac{\partial H(t, x, \omega, B)}{\partial x} \right| \leq \omega \eta(\omega) \quad (6.19)$$

Finalmente,

$$\left| \frac{1}{\omega} \frac{\partial \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)}{\partial t} - \frac{\partial h(t, x)}{\partial x} \right| \leq \eta(\omega) \quad (6.20)$$

Demostración. De la definición de $H(x, t, \omega, B)$ se tiene que:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\omega t} \exp \left[-\frac{1}{\omega} (\omega t - \tau) \right] \frac{\partial}{\partial x} h(\tau, x) d\tau$$

Siguiendo los mismos pasos del Lema 6.1, se tiene el corolario. □

6.3.1. Equivalencia del Sistema Perturbado

Teorema 6.1. *El Sistema Perturbado es equivalente al Sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z + \frac{1}{\omega} H(t, x, \omega, B) \\ \dot{z} &= -az - by - f_0(x, B) - \frac{a-1}{\omega} H(t, x, \omega, B) - \frac{1}{\omega} \frac{\partial H}{\partial x} y \end{aligned} \quad (6.21)$$

Demostración. Sea $z = s + \frac{1}{\omega}H(t, x, \omega, B)$, entonces

$$\dot{z} = \dot{s} + \frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} \right)$$

De aquí se tiene

$$-az - by - f(x + B \sin(\omega t)) = \dot{s} - \frac{1}{\omega} \left(H(t, x, \omega, B) + \frac{\partial H}{\partial x} y \right) + h(\omega t, x, B)$$

Luego reemplazando z en función de s se tiene:

$$\dot{s} = -as - by - f_0(x, B) - \left[\frac{a-1}{\omega} H(t, x, \omega, B) + \frac{1}{\omega} \frac{\partial H}{\partial x} y \right]$$

Así que

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = s + \frac{1}{\omega} H(t, x, \omega, B)$$

$$\dot{s} = -as - by - f_0(x, B) - \frac{a-1}{\omega} H(t, x, \omega, B) - \frac{1}{\omega} \frac{\partial H}{\partial x} y$$

Por lo tanto el Sistema Perturbado es equivalente al Sistema 6.21. □

Teorema 6.2. *El sistema Perturbado tiende al promediado cuando $\omega \rightarrow \infty$*

Demostración. Por el Corolario (6.1) existe una función continua $\eta(\omega)$ tal que $\eta(\omega) \rightarrow 0$ cuando $\omega \rightarrow \infty$ entonces

$$\left| \frac{\partial H(t, x, \omega, B)}{\partial x} \right| \leq \omega \eta(\omega)$$

Por otra parte del Teorema (5.1) se tiene que existe un $D > 0$ tal que $|y(\omega, t)| < D$ por lo tanto

$$\left| \frac{\partial H(t, x, \omega, B)}{\partial x} y \right| \leq D \omega \eta(\omega)$$

Así que

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\partial H(t, x, \omega, B)}{\partial x} y = 0.$$

Por lo tanto $(x(t, \omega), y(t, \omega), z(t, \omega))$ solución del Sistema 6.21, entonces

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (x(t, \omega), y(t, \omega), z(t, \omega)) = (x(t), y(t), z(t))$$

donde $(x(t), y(t), z(t))$ es solución del Sistema Promediado

$$\dot{x}(t) = y(t)$$

$$\dot{y}(t) = z(t)$$

$$\dot{z}(t) = -az - by - f_0(x, B)$$

□

6.4. Existencia y Anulación de Oscilaciones

Hemos visto en el capítulo 4 que el sistema (4.2), con $a^2 > 4b$, admite soluciones oscilatorias de amplitud finita si $f'(0) > ab$. Por otro lado el Teorema 2.1 nos dice que si $f'(x) < ab$ para cualquier x , el origen es un atractor global. Cuando consideramos el sistema promediado, si $f(0) > ab$, tendremos de la proposición 6.1 que $f'_0(0, B)$ tenderá a 0 de manera continua cuando B tiende a ∞ . En particular llegará un momento en que $f'_0(0, B) = ab$. Tendremos que al crecer B se producirá una bifurcación de Hopf, es decir, el origen se volverá estable y de él emanará una órbita periódica inestable. Para B aún mayor tendremos que $f_0(x, B) < ab$ para toda x , y por lo tanto el Teorema 2.1 nos garantizará que el origen es globalmente asintóticamente estable.

Sean $a > 0$ $b > 0$ f Lipschitz, no decreciente, $f(0) = 0$, f con derivada continua en 0 y $f(-x) = -f(x)$

Teorema 6.3. *El sistema promediado correspondiente al sistema (6.2) cumple*

- a) $ab < f'_0(0, B) < c$ para B en un intervalo $[0, B_0]$. En este caso el sistema promediado tiene soluciones oscilatorias de gran magnitud.
- b) $f'_0(x, B) < ab$ para $B > B_0$. En este caso el sistema promediado tiene el origen globalmente asintóticamente estable.

Lema 6.2. *Sea $\dot{x} = X(x)$ un sistema de ecuaciones diferenciales en \mathbf{R}^n , con X diferenciable. Si el origen \mathbf{O} es un atractor global, entonces existe una función de Liapunov V definida en \mathbf{R}^n tal que $V(0) = 0$, $V(x) \rightarrow \infty$ cuando $|x| \rightarrow \infty$ y $\dot{V} = \left(X, \text{grad}V\right) < 0$ excepto para $x = 0$.*

Una demostración se encuentra en Jack Hale [44].

Teorema 6.4. *Dado $\epsilon > 0$, existen B_0 y ω_0 tales que si $B > B_0$ y $\omega > \omega_0$, todas las soluciones del sistema perturbado (6.2) entran en un entorno de radio ϵ de \mathbf{O} y permanecen en él al crecer el tiempo t .*

Este teorema implica que en estas condiciones el sistema perturbado ya no tiene oscilaciones de gran amplitud. Aunque la perturbación induce movimiento oscilatorio de frecuencia ω , estas oscilaciones están contenidas en un entorno de radio δ de origen \mathbf{O} si B y ω se toman suficientemente grandes.

Para la demostración del teorema, requeriremos el uso de un teorema inverso de Liapunov que damos en la forma de Lema (6.2).

Demostración. Consideremos el campo vectorial $Y(x, t, \omega)$ en \mathbf{R}^3 definido por el sistema perturbado. Del Teorema (6.2), tenemos que $Y(x, t, \omega)$ tiende a $X(x)$ uniformemente en (x, t) en todo acotado.

Tenemos que

$$\dot{V}_Y = (Y, \text{grad}V) = (X, \text{grad}V) + (Y - X, \text{grad}V)$$

Esto será negativo para $x > \delta$ y para todo t , si $|x - y| < \epsilon(\delta)$, de manera que

$$\epsilon(\delta) \max_{\delta < |x| < M} |\text{grad}V| < \min_{\delta < |x| < M} |\dot{V}_X|$$

Aquí M representa el radio de la esfera que nos garantiza que todas las soluciones de X y de Y entran en ella. \square

Bibliografía

- [1] Abou - İl - İla A. M. A. and Sadeq A. I., A Stability Result For Certain Fourth Order Differential Equations. Ann. of Diff. Eqs. 6(1) 1990, pp. 1 - 9.
- [2] Andronov A. A., Leontovich İ., Theory of Bifurcations of Dynamical System on a Plane. I.P.S.T., Jerusalem, 1971.
- [3] Andronov A. A., Leontovich İ., Qualitative Theory of second-order Dynamic Systems. I.P.S.T., Jerusalem, 1973.
- [4] Andronov A. A., A. A. Vitt and S. İ. Chaikin, Theory of Oscillators, Fizmatgiz., Moscow (1959). Translation: Pergamon Press, Oxford - New York (1966).
- [5] Arnold, V., Ecuaciones diferenciales ordinarias, Rubiños-1860 Madrid 1995.
- [6] Barbashin, İ. A., Conditions For Existence of Recurrent Trajectories in Dynamical Systems With a Cylindrical Phase Space. Differential Equations. Vol. 3, N 10, pp. 843 - 846.
- [7] Bibikov, Y. N., The Existence of Conditionally Periodic Solutions Of Differential Equation System, Ordinary Differential Equations, Vol. 7, N 8, pp. 1021 - 1027.
- [8] Blásquez, M. and Tuma İ., Chaotic Behavior of Orbits Close to a Heteroclinic Contour. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 6, N 1(1996) 69-79.
- [9] Blinchevskii, Existence of a Periodic Solution For Systems Autonomous Differential Equations. Mat. Sb. 1960 50 117-126.
- [10] Bogoliubov, N. N. and Mitropolsky Y. A., Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations, Hindustan Publishing Corpn. (India), Delhi-6. 1961. Gordon and Breach science publishers, Inc. New York.
- [11] Boyer, R. C., Sinusoidal Signal Stabilization, Master's Thesis, Purdue University, January, 1960.
- [12] Oldenburger, R., and R. C. Boyer, Effects of Extra Sinusoidal Inputs to Nonlinear Systems, Paper 61-Wa-66 presented at Winter Annual Meeting of American Society of Mechanical Engineers, New York, Nov. 26-Dec 1, 1961.

- [13] Broer H. W., Dumortier F., Van Strien S.J and Takens F. "Structures in Dynamics Studies in Math. Physics vol 2", Èd. È. M de Jaye, North- Holland 1991.
- [14] Cartwright, M. L., Forced Oscillations in Nonlinear Systems, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, vol. 1, pp. 149-241, Annals of Mathematics Studies, N 20, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1950.
- [15] Cartwright, M. L., Almost Periodic Flows and Solutions of Differential Èquations. Proc. London Math. Soc. (3)17(1967)355-380.
- [16] Cartwright, M. L., On The Stability Of Solutions Of Certain Differential Èquations Of The Fourth Order. The Quaterly Journal Of Mechanic and Applied Mathematics, 9(1956), pp 185-194.
- [17] Cañada, A., Series y Transformada de Fourier y Aplicaciones, Universidad de Granada 1994.
- [18] Cesari, L., Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Èquations. Springer-Verlag Berlin Gttingen Heidelberg 1959 and 1963.
- [19] Cesari, L., Èxistence Theorems for Periodic Solutions of Nonlinear Lipschitzian Differential Systems and Fixed Point Theorems. Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, vol. 5, pp. 115-172, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960.
- [20] Coddington, È.A., and N. Levinson, Perturbations of Linear Sistems with Constant Coefficients Possesing Periodic Solutions, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, vol. 2, pp. 19-37, Annals of Mathematics Studies, N 20, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1952.
- [21] Coddington, È.A., and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Èquations. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1955.
- [22] Coleman, C., Asymptotic Stability in 3-Space. Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, vol. 5, pp. 257-268, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960.
- [23] Cunningham, W. J., Introduction To Nonlinear Analysis. McGraw - Hill Book Company, Inc., New York 1958.
- [24] D'Heedene, R. N., A Third Order autonomous Differential Èquation with Almost Periodic Solutions. Journal of Mathematical Analysis and Applications 3, 344-350 (1961).
- [25] Diliberto, S.P., Perturbation Theorems for Periodic Surfaces, Circ. Mat. Palermo(2) 9(1960), 265-299.

- [26] Diliberto, S.P., and G. Hufford. Perturbation Theorems of Nonlinear Differential Equations, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, vol. 3, pp. 257-261, Annals of Mathematics Studies, N 36, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.
- [27] Dou, A., Lecciones sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Universidad de Madrid, 1960-1961.
- [28] İzilo, J. O., On The Existence Of Periodic Solutions Of A Certain Third Order Differential Equation. Camb. Philos. 56 1959.
- [29] İzilo, J. O., On the Boundedness of Solution of a certain Differential Equation of the third order, Proc. London Math. Soc. (3) 9 1959.
- [30] İzilo, J. O., On the Stability of certain Differential Equations of the Third Order. Quart. J. Math. Oxford (2) 11. 64-69 (1960).
- [31] İzilo, J. O., A Note on a Boundedness Theorem for some Third Order Differential Equations. J. London Math. Soc. 36, 439-444 (1961).
- [32] İzilo, J. O., A Boundedness Theorem for some Nonlinear Differential Equations of the Third Order. J. London Math. Soc. 37, 469-474 (1962).
- [33] İzilo, J. O., A Property Of the Phase Space Trajectories of a Third Order Nonlinear Differential Equations. J. London Math. Soc. 37 (1962), 33-41.
- [34] İzilo, J. O., A Stability Result For Solutions Of a Certain Fourth Order Differential Equation. J. London Math. Soc. 37(1962), 28-32.
- [35] İzilo, J. O., Periodic Solutions of a certain third order differential equation. Ann. Mat. Pura Appl. 34-41 (1973).
- [36] İzilo, J. O., A further result on the existence of periodic solutions of the equations $\ddot{x} + \Psi(\dot{x})\ddot{x} + \Phi(x)\dot{x} + \Theta(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = p(t)$ con Θ acotada. Ann. Mat. Pura Appl. 51-57, (1978).
- [37] Friedrichs, K., Special Topics in Analysis, New York University Lectures Notes, 1953-1954.
- [38] Friedrichs, K., On Nonlinear Vibrations of Third Order. Studies in Nonlinear Vibration Theory, New York University Lecture Notes 1946, 65-103.
- [39] Gomory, R. İ., Trajectories Tending to a Critical Point in Three - Space. Annals of Mathematics, Vol. 61, N 1, January, 1955.
- [40] Gomory, R. İ. and F. Haas, A Study of Trajectories Which Tend to a Limit Cycle in Three - Space. Annals of Mathematics, Vol. 62, N 1, July, 1955, pp. 140 - 153.

- [41] Guckenheimer J. y P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Springer- Verlag New-York 1983.
- [42] Gússefeldt, V. G., Zwei Methoden Zum Nachweis von periodischen Lösungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Auszug aus der Disertation des Verfassers: Humboldt - Universität
- [43] Haas V., A Stability Result For a Third Order Nonlinear Differential Equation. Journal London Math. Soc., 40(1965), 31-33.
- [44] Hale, J. K., Ordinary Differential Equations. Wiley Interscience, New York, 1969.
- [45] Hale, J. K., Integral Manifolds of Perturbed Differential Systems, Ann. Math. 73 (1961), 496-531.
- [46] Hale, J. K., On the Behavior of the Solutions of Linear Periodic Differential Systems Resonance Points, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, vol. 5, pp. 55-89, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1960.
- [47] Hale, J. K., On the Stability of Periodic Solutions of Weakly Nonlinear Periodic and Autonomous Differential Systems. Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, vol. 5, pp. 91-114, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960.
- [48] Hale, J. K., Oscillations in Nonlinear Systems McGraw-Hill Book Company, Inc. New York 1963.
- [49] Wolfgang Hahn, Stability of Motion. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1967.
- [50] Hale, J. K. y Koçak H., Dynamics and Bifurcations. Springer-Verlag New-York 1991
- [51] Khalil, H. K., Nonlinear Systems. Macmillan Publishing Company, New York 1992.
- [52] Witold, H., Sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Ediciones Rialp, Madrid, 1978.
- [53] Krylov, N., and N. Bogoliubov, Introduction to Nonlinear Mechanics, Annals of Mathematics Studies, N 11, Princeton University, Princeton, N.J., 1947.
- [54] Klemm, M., and Beckmann, P. J., The Topology of Basin Boundaries in A Class of Three - Dimensional Dynamical Systems. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 6, N 1 (1996) 161-167.
- [55] Korolov, V. V., On the uniqueness of a Limit cycle for higher dimensional autonomous systems. Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. Rsr 1964, 1430 - 1433.

- [56] Korolov, V. V., The existence and uniqueness of periodic solutions of many dimensional autonomous systems, *Ukrain. Mat. Zh.* 17 (1965)47-60.
- [57] Kudaev, M. B., Classification Of Higher - Dimensional Systems Of Ordinary Differential Equation by The Method of Lyapunov Functions. *Differential Equation*, Vol. 1, N 3, pp. 263 - 269, 1965.
- [58] Kyner, W. T., Small Periodic Perturbation of an Autonomous Systems of Vector Equations, *Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations*, vol. 4, pp. 111-125, *Annals of Mathematics Studies*, N 41, Princeton University, Princeton, N. J., 1958.
- [59] La Salle, J., and Lefschetz, S., *Stability by Liapunov Direct Method*. Academic Press, New York, 1961.
- [60] Lefschetz, S., *Introduction to Topology*, Princeton University Press, Princeton, 1949, pp. 117 -119.
- [61] Lefschetz, S., *Differential Equations - Geometric Theory*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.
- [62] Lefschetz, S., *Stability of Nonlinear control Systems*, academic Press, New York- London (1965).
- [63] Leray, J. and Schauder, J. *Topologie et equations fonctionelles*. *Ann. Sci. É. norm. sup.*, Paris, 51 (1934), 45-78.
- [64] Levinson N., Small Periodic Perturbations of an Autonomous System with a Stable Orbit, *Ann. Math.* 52(1950), 727-738.
- [65] Levinson, N., On the existence of periodic solutions of second order differential equations with a forcing term. *J. Math. Phys.* (1943), 41-48.
- [66] Lewis, D. C., On the Role of First Integrals in the Perturbations of Periodic Solutions, *Ann. Math.* 63(1956), 535-548.
- [67] McCarthy, J., A Method for the Calculation of Limit Cycles by Successive Approximation, *Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations*, *Annals of Mathematics Studies* N 29, vol. 2, Princeton University, Princeton 1952, pp. 75-81
- [68] Metlyaev, Y. K. *Periodic Solutions of Differential Equation*. Moscow State Pedagogical Institute. Translate from *Differentsial'nye Uravneniya*, Vol. 6, N18 pp.
- [69] Mitropolski, Y. A., *Problemes de la theorie asymptotique des oscillations non stationnaires*, Gauthier-Villars editeur Paris 1966.
- [70] Nazarov, I. A., Methods of Making The Trajectories of A System Of Tree Differential Equations With Nonanalytic Right Sides Approach a Limit Cycle. *Differential Equation*, Vol 1, N 3, pp. 236 - 239, 1965.

- [71] Nemytskii, V. V., Lyapunov method of rotating functions for investigating oscillations, Dokl. Akad. Nauk SSSR 97 (1954) 33-36.
- [72] Nemytskii, V. V., On certain methods of global qualitative study of many dimensional autonomous systems, Trudy Moskov. Mat. Obshch. 5(1956)455-482.
- [73] Perelló, C., Periodic Solutions of Ordinary Differential Equations with and without time Lag, Ph. D. Thesis . Brown University, 1965.
- [74] Perko L., Differential Equations and Dynamical Systems, 2nd. ed.. Springer-Verlag New-York 1996.
- [75] Pliss, V. A., Nonlocal Problems of the Theory of Oscillations. Academic Press New York and London 1966.
- [76] Qing, L., On the Construction of Globally Asymptotically Stable Liapunovs Functions Of A Type of Nonlinear Third-Order Systems. Ann. of Diff. Eqs. pp. 39-51, 1991
- [77] Rauch, L. L., Oscillation of a Third Order Nonlinear Autonomous System, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, vol.1, Princeton University Press, Princeton, 1950, pp. 39-88.
- [78] Reuter, G.Ì.H. Note on the existence of periodic solutions of certain differential equations.
- [79] Sanders, J. A., and Verhulst, F., Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems. Springer -Verlag New York 1985.
- [80] Sherman, S., Analysis of the Flow of Systems of Third Order Nonlinear Ordinary Differential Equations. Doctoral dissertation, New York University, 1962.
- [81] Reissig, R., On the Existence of Periodic Solutions of a Certain Non-Autonomous Differential Equation. Ann. Mat. Pura Appl. (IV) 85 (1969), 235-240.
- [82] Reissig, R., Periodic Solutions of a Nonlinear n-th Order vector differential equation. Ann. Mat. Pura Appl. Julio 1970, pp. 111 -123.
- [83] Reissig, R., Periodic Solutions of a Third Order Nonlinear Differential Equation. Ann. Mat. Pura Appl. Septiembre 1971, pp. 194 - 198.
- [84] Reissig, R., Perturbation of Certain Critical n-th Order Differential Equation. Bolletino U. M. I. (4)11, Suppl. fasc. 3(1975), 131 - 141.
- [85] Sotomayor, J., Curvas definidas por equações diferenciais no plano. Rio de Janeiro, IMPA, 1981.
- [86] Vaisbord, Ì. M., On the Existence of a Periodic Solution of a Nonlinear Differential Equation of the Third Order. Mat. Sb., 56, 1962, 43 - 58.

-
- [87] M. Vidyasagar, Nonlinear Systems Analysis. Prentice-Hall International Editions 1993.
 - [88] Wiggins S., Global Bifurcations and Chaos. Springer-Verlag New-York 1988.
 - [89] Wiggins S., Introduction to Applied Nonlinear Systems and Chaos. Springer-Verlag New-York 1990.
 - [90] Wolfgang Wasow, The Construction of Periodic Solutions of Singular Perturbation Problems, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, vol. 1, Princeton University, Princeton, 1950, pp. 313-350.
 - [91] Yoshizawa, T., Stability theory by Lyapunov's second method, Math. Soc. Japan, Tokyo (1966).