Localitzacions i complecions d'espais anesfèrics

Gemma Bastardas i Ferrer

Universitat Autònoma de Barcelona

Localitzacions i complecions d'espais anesfèrics

Gemma Bastardas i Ferrer

Memòria presentada per a optar al grau
de Doctor en Matemàtiques.

Departament de Matemàtiques.
Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, abril de 2003.

CERTIFIQUEM que la present memòria ha estat realitzada per la Gemma Bastardas i Ferrer, sota la direcció del Dr. Carles Casacuberta i Vergés, i la tutela del Dr. Manuel Castellet i Solanas.

Bellaterra, abril de 2003.

Dr. Carles Casacuberta i Vergés   Dr. Manuel Castellet i Solanas

Localitzacions i complecions d'espais anesfèrics

Gemma Bastardas i Ferrer

Índex

Introducció **iii**

1 Localitzacions i complecions **1**

1.1 Generalitats sobre functors coaugmentats 1

1.2 Exemples de functors coaugmentats 3

1.2.1 Localitzacions a la categoria dels grups 3

1.2.2 Localitzacions homotòpiques 4

1.2.3 Compleció de Bousfield–Kan 8

1.3 Relacions entre els functors descrits 10

2 Preservació d'estructures a la categoria dels grups **13**

2.1 Morfismes de grups exhaustius 14

2.1.1 Functors idempotents que preserven l'exhaustivitat dels morfismes de grups 15

2.1.2 Contraexemples 19

2.2 Grups nilpotents 22

2.2.1 Localitzacions de grups nilpotents finits 23

3 Unions puntuals de circumferències **31**

3.1 Abelianització de localitzacions a la categoria dels grups . . . 32

3.2 Quasi-anells i localitzacions de grups lliures 41

3.2.1 Breu introducció als quasi-anells 42

3.2.2 Localitzacions de grups lliures 45

3.3 Localitzacions d'unions puntuals de circumferències 51

4 Preservació d'estructures a la categoria homotòpica **63**

4.1 Un nou model per a la P-localització 64

4.1.1 Construcció del model . . . 66
4.1.2 Conseqüències . . . 68
4.2 Espais amb tots els grups d'homotopia finits . . . 72
4.3 Espais virtualment nilpotents . . . 75
4.4 L'ampolla de Klein . . . 79

5 Espais anesfèrics virtualment nilpotents 95
5.1 Origen del problema i enunciat dels resultats . . . 96
5.2 Generalització d'un teorema de McGibbon i Neisendorfer . . 98
5.2.1 Grups d'homotopia amb coeficients . . . 99
5.2.2 Espais quasi-fitats en un primer p . . . 99
5.2.3 Demostració del teorema . . . 100
5.3 Complecions d'espais anesfèrics virtualment nilpotents . . . 104
5.3.1 Conseqüència . . . 113

6 Racionalització de varietats anesfèriques 117
6.1 Motivació i plantejament del problema . . . 118
6.2 Un petit resum d'homotopia racional . . . 122
6.2.1 Models minimals i espais formals . . . 122
6.2.2 El teorema de la dicotomia racional . . . 126
6.3 Classificació d'espais racionalment el·líptics . . . 129
6.4 Racionalització d'infra-nilvarietats . . . 132
6.4.1 Dels grups cristal·logràfics a les infra-nilvarietats . . . 133
6.4.2 Infra-nilvarietats racionalment el·líptiques . . . 135
6.4.3 Extensió dels resultats . . . 141

Bibliografia 145

Introducció

Les localitzacions i complecions dels espais topològics simplement connexos estan àmpliament documentades a la literatura matemàtica. Per contra, l'efecte d'aquestes construccions sobre espais amb grup fonamental no trivial és menys conegut. Alguns dels resultats que s'han obtingut en aquesta direcció al llarg dels anys són difícils d'entendre i encara queden molts problemes sense resoldre. Per exemple, no se sap si la localització homològica entera d'una unió puntual de circumferències té grups d'homotopia superiors no nuls. Malgrat això, les complecions d'espais classificadors de grups i d'altres espais amb grup fonamental no trivial ocupen un lloc molt destacat a la teoria d'homotopia, i és important saber descriure-les tan clarament com sigui possible.

En aquesta memòria s'estudien localitzacions i complecions de diversos espais que tenen la característica comuna de ser de tipus $K(G,1)$ amb G un grup no necessàriament nilpotent. Es dedica especial atenció a la preservació d'algunes propietats sota l'efecte de les localitzacions i les complecions, com per exemple la finitud dels grups d'homotopia o la nilpotència virtual. Els resultats més interessants s'han obtingut per a un cert tipus de varietats topològiques compactes relacionades amb els grups cristal·logràfics (les infranilvarietats).

El nostre estudi parteix, però, d'un marc molt més ampli que les localitzacions i complecions clàssiques en nombres primers. En diverses parts del treball es descriuen propietats generals dels functors idempotents a la categoria homotòpica dels espais topològics i a la categoria dels grups. L'efecte d'aquestes transformacions sobre els grups dóna informació útil per a esbrinar com es comporten sobre els espais.

Functors idempotents

Una referència clau per a l'ús de functors idempotents a teoria d'homotopia és el llibre de Dror Farjoun [33], que es va publicar el 1996. S'hi recullen en llenguatge modern els trets essencials de les diverses teories de localització conegudes des de mitjans del segle passat. En concret, s'hi demostra que, donada una aplicació f qualsevulla entre CW-complexos, existeix un functor idempotent L_f a la categoria homotòpica que transforma f en una equivalència homotòpica de manera universal. Aquest tipus de functors L_f s'anomenen f-localitzacions. Es poden definir a qualsevulla categoria de models que tingui propietats prou bones, i totes les construccions idempotents conegudes a teoria d'homotopia en són casos particulars (per exemple, les localitzacions en nombres primers i les localitzacions respecte d'homologies generalitzades).

Per tal d'estudiar les propietats de les f-localitzacions d'espais, és important disposar d'una construcció anàloga a la categoria dels grups. Fent servir, per exemple, el mètode explicat a [23], es demostra que, donat un morfisme de grups f, existeix un functor idempotent L_f a la categoria dels grups que transforma f en un isomorfisme de manera universal. Moltes vegades, però no sempre, el grup fonamental de la localització d'un espai X es pot descriure com una certa localització del grup fonamental de X.

Els avenços més recents sobre functors idempotents a teoria d'homotopia i a teoria de grups se centren en la preservació de determinades propietats. És a dir, si X és un espai o bé un grup que té una certa propietat i L és un functor idempotent, aleshores s'estudia si LX també té la mateixa propietat. A l'article [20], Casacuberta fa un recull de resultats obtinguts en aquesta direcció per ell mateix i per altres autors, d'entre els quals destaquem Dror Farjoun [33], Libman [58] i Rodríguez [77].

Espais anesfèrics

Un espai anesfèric és un CW-complex amb recobridor universal contràctil; és a dir, un espai d'Eilenberg–Mac Lane de tipus $K(G,1)$. Per exemple, les unions puntuals de circumferències, els productes de circumferències i l'ampolla de Klein són espais anesfèrics. Un espai d'aquest tipus està completament determinat pel seu grup fonamental en el sentit següent: si dos espais anesfèrics tenen grups fonamentals isomorfs, aleshores són homotòpicament equivalents.

Donats un functor idempotent L a la categoria homotòpica i un espai anesfèric X, es pot preguntar si l'espai LX ha de ser necessàriament anesfèric. Aquesta pregunta és massa general i en la majoria de casos la resposta és negativa. Per exemple, si $X = K(G,1)$ amb G un grup finit i p és un nombre primer, aleshores la p-compleció $X_p^\wedge$ de X és un espai anesfèric $K(G_p^\wedge, 1)$ si i només si G és un grup p-nilpotent; és a dir, si el subgrup de G generat per tots els elements de p'-torsió de G és un grup de p'-torsió [18]. És més, en cas que G no sigui p-nilpotent, l'espai $X_p^\wedge$ té infinits grups d'homotopia no nuls [55, teorema 1.1.4].

Si L és un functor idempotent qualsevol a la categoria homotòpica, aleshores, tal i com es demostra a [77], l'espai LS^1 és anesfèric i el seu grup fonamental és una localització de $\mathbb{Z}$ a la categoria dels grups. Més generalment, si $X = K(G,1)$ amb G un grup abelià finitament generat, aleshores LX és un espai anesfèric; però si G no és finitament generat, llavors LX pot tenir dos grups d'homotopia no trivials [77]. Quan G no és abelià, l'espai LX pot ser ben complicat de descriure.

Una unió puntual de circumferències W és un espai d'Eilenberg–Mac Lane $K(F,1)$ amb F un grup lliure. El teorema 8.7 de [22] implica que la localització de W en qualsevol conjunt de primers P és un espai anesfèric amb grup fonamental la P-localització de F a la categoria dels grups. També la R-compleció de Bousfield–Kan de W és un espai anesfèric si $R \subseteq \mathbb{Q}$ o bé $R = \mathbb{Z}/p$ amb p un nombre primer, malgrat que la R-compleció d'espais no sigui un functor idempotent en general [15, IV.5.3]. En canvi, és un problema obert des de fa dècades decidir si la localització homològica entera de W és un espai anesfèric. Es creu que sí que ho és, malgrat que encara no s'hagi pogut demostrar.

Si X és l'ampolla de Klein, aleshores els resultats que s'obtenen s'assemblen molt als obtinguts en considerar una unió puntual de circumferències. La localització de l'ampolla de Klein en un conjunt qualsevol de primers és un espai anesfèric [20] i, tal i com demostrem en aquesta memòria, el mateix passa amb la R-compleció de Bousfield–Kan si $R \subseteq \mathbb{Q}$ o bé $R = \mathbb{Z}/p$ amb p un nombre primer. En canvi, demostrem que la localització homològica entera de l'ampolla de Klein té grups d'homotopia superiors no nuls.

Infra-nilvarietats

Un grup cristal·logràfic de dimensió n és un subgrup discret G de $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ tal que el quocient $\mathbb{R}^n/G$ és compacte (on G actua sobre $\mathbb{R}^n$ per afinitats). Si G és lliure de torsió, aleshores diem que G és un grup de Bieberbach i l'espai quocient $\mathbb{R}^n/G$ és una varietat de Riemann plana compacta. En cas que $G \subset \mathbb{R}^n$, aleshores $\mathbb{R}^n/G$ és un tor. Tota varietat de Riemann plana compacta s'obté d'aquesta forma; és a dir, els grups de Bieberbach són exactament els grups fonamentals de les varietats de Riemann planes compactes [30, pàg. 14].

Una generalització important dels grups cristal·logràfics s'obté considerant un grup de Lie L nilpotent 1-connex en comptes de $\mathbb{R}^n$. Aleshores un subgrup discret cocompacte G de $L \rtimes C$, on C és un subgrup maximal compacte de $\mathrm{Aut}\,(L)$, s'anomena un grup quasi-cristal·logràfic. Si G és lliure de torsió, llavors G es diu quasi-Bieberbach i l'espai quocient L/G s'anomena una infra-nilvarietat. En cas que $G \subset L$, aleshores L/G és una nilvarietat. Tota infra-nilvarietat està recoberta per una nilvarietat amb un nombre finit de fulls. A més, tal i com s'explica a [30, pàg. 16], una infra-nilvarietat està completament determinada pel seu grup fonamental en el sentit següent: si dues infra-nilvarietats tenen grups fonamentals isomorfs, aleshores existeix un difeomorfisme afí entre elles.

Un grup és quasi-cristal·logràfic si i només si és virtualment nilpotent finitament generat i no conté cap subgrup normal finit no trivial [30, teorema 3.1.3]. Per tant, les infra-nilvarietats són espais anesfèrics amb grup fonamental virtualment nilpotent i finitament generat.

Sigui P un conjunt de primers. La P-localització dels grups virtualment nilpotents va ser estudiada amb detall per Casacuberta i Castellet a [21]. Varen demostrar, entre altres resultats, que la P-localització de qualsevol grup virtualment nilpotent és virtualment nilpotent. Una dècada més tard, Descheemaeker va descriure un algorisme per a determinar la P-localització de qualsevol grup virtualment nilpotent finitament generat [31], i el va utilitzar per a calcular la P-localització dels grups quasi-Bieberbach de dimensió menor o igual que 4, tenint en compte la classificació d'aquesta classe de grups duta a terme per Dekimpe a [30].

La correspondència bijectiva, llevat de difeomorfisme afí, entre els grups quasi-Bieberbach i les infra-nilvarietats va permetre a Descheemaeker i Malfait iniciar un estudi de la P-localització de les infra-nilvarietats [32]. Concretament, varen establir criteris per a decidir quan la P-localització d'una infra-nilvarietat de dimensió menor o igual que 4 és un espai anesfèric.

Nosaltres hem anat més enllà en aquesta direcció, estudiant els grups d'homotopia que poden aparèixer quan la P-localització d'una infra-nilvarietat no és un $K(G,1)$. Hem demostrat que aleshores hi ha infinits grups d'homotopia no nuls [6] i hem trobat un criteri, vàlid per a infra-nilvarietats de dimensió menor o igual que 4, que permet decidir en quins casos aquests grups d'homotopia són gairebé tots finits.

Descripció del contingut i els resultats principals

En el primer capítol recordem la definició de f-localització en el sentit de Dror Farjoun [33], així com les seves propietats bàsiques, i en detallem alguns casos particulars importants. També repassem el functor de R-compleció de Bousfield–Kan [15], on R és un subanell dels racionals o bé $R = \mathbb{Z}/p$ amb p un nombre primer.

En el segon capítol considerem functors idempotents arbitraris a la categoria dels grups i estudiem algunes propietats que es conserven sota l'efecte d'aquests functors. La primera pregunta que ens fem és si tot functor idempotent envia epimorfismes a epimorfismes (aquesta pregunta sorgeix de seguida quan s'estudia l'exactitud o manca d'exactitud dels functors de localització). Enunciada d'aquesta manera, la pregunta és enganyosa; de fet, la resposta ràpida és que sí, perquè els functors idempotents tenen un adjunt per la dreta i, per tant, conserven epimorfismes. Ara bé, això vol dir que un epimorfisme de grups $G \to H$ es transforma en un morfisme $LG \to LH$ que és un epimorfisme a la subcategoria plena dels grups L-locals, però això no implica que hagi de ser una aplicació exhaustiva (nosaltres en donem exemples). La pregunta bona és si L transforma morfismes de grups exhaustius en morfismes de grups exhaustius. Aquesta pregunta la responem completament amb el teorema següent, que és el resultat principal del nostre article [2]. Val a dir que tots els exemples existents fins aleshores de functors idempotents a la categoria dels grups (com les localitzacions en nombres primers o les localitzacions homològiques) conserven l'exhaustivitat. El nostre resultat ens va permetre obtenir el primer contraexemple.

Teorema *Sigui L un functor idempotent a la categoria dels grups. Aleshores L transforma morfismes de grups exhaustius en morfismes de grups exhaustius si i només si la classe dels grups L-locals té la propietat de clausura següent: tot subgrup d'un grup L-local que és alhora un quocient d'un grup L-local és L-local.*

La segona pregunta que hem intentat contestar és si tots els functors idempotents envien grups nilpotents a grups nilpotents. Aquest problema ha estat considerat per diversos autors (vegeu [20]) i sembla molt difícil. Nosaltres hem obtingut diversos resultats útils, però no hem resolt el cas general. Fins i tot segueix obert el problema de decidir si els functors idempotents envien p-grups finits a p-grups finits, on p denota un nombre primer qualsevol. Ara bé, se sap, gràcies als treballs de Libman [59] i Göbel–Rodríguez–Shelah [44], que els functors idempotents poden enviar grups finits a grups de cardinalitat tan gran com es vulgui.

En el tercer capítol estudiem l'efecte dels functors idempotents sobre les unions puntuals de circumferències. Tot i que la nostra motivació principal és entendre millor les localitzacions homològiques d'aquests espais, hem trobat una bona quantitat de resultats que són vàlids per a qualsevol functor idempotent. El més interessant és la utilitat de les estructures de quasi-anell en aquest context. Un quasi-anell és l'anàleg a un anell, però on la suma no ha de ser necessàriament commutativa i la multiplicació és distributiva o bé per l'esquerra o bé per la dreta sobre la suma. Els quasi-anells van ser introduïts per Hanna Neumann a [69], [70] per tal d'estudiar les projeccions sobre varietats de grups, i van ser usats per Hubbuck a [51] un parell de dècades més tard per tal d'estudiar autoequivalències de H-espais.

El conjunt d'endomorfismes d'un grup lliure és un bon exemple de quasi-anell per l'esquerra. Nosaltres hem observat que aquesta propietat es manté sota l'efecte dels functors idempotents a la categoria dels grups; és a dir, si F és un grup lliure i L és un functor idempotent, aleshores $\operatorname{Hom}(LF, LF)$ és un quasi-anell per l'esquerra i l'aplicació natural

$$\operatorname{Hom}(F, F) \to \operatorname{Hom}(LF, LF)$$

és un morfisme de quasi-anells que, com a morfisme dels grups subjacents, és un producte de còpies del morfisme de L-localització $\eta\colon F \to LF$. En particular, si L és el functor de localització en un conjunt de primers P i F és un grup lliure de rang finit, aleshores demostrem el següent:

Teorema *Sigui P un conjunt de primers. Sigui F un grup lliure de rang finit. Aleshores l'aplicació natural*

$$\mathrm{Hom}\,(F, F) \to \mathrm{Hom}\,(F_P, F_P)$$

és un epimorfisme a la categoria dels quasi-anells amb unitat.

Com ja hem observat abans, els epimorfismes en el sentit de la teoria de categories no han de ser necessàriament exhaustius. Aquest n'és un cas ben clar, que generalitza el fet que la inclusió $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_P$ és un epimorfisme d'anells. Aquest teorema és destacable perquè se sap molt poca cosa de l'estructura de les P-localitzacions dels grups lliures. Hi ha hagut pocs avenços notables des de la tesi doctoral de Baumslag [7].

Alguns altres resultats que hem obtingut en aquest capítol sobre localitzacions de grups lliures generalitzen resultats de Hanna Neumann referents a projeccions sobre varietats de grups (vegeu [69], [70]).

Les idees desenvolupades per a obtenir resultats sobre localitzacions de grups lliures esdevenen el nostre punt de partida per a determinar propietats de les localitzacions d'unions puntuals de circumferències. El teorema següent n'és un exemple:

Teorema *Sigui L un functor idempotent a la categoria homotòpica. Sigui W una unió puntual de circumferències. El conjunt de classes d'homotopia d'aplicacions $[LW, LW]$ és un quasi-anell per l'esquerra i l'aplicació natural*

$$[W, W] \to [LW, LW]$$

és un morfisme de quasi-anells que, en els grups subjacents, és un producte de còpies de $\eta_*\colon \pi_1(W) \to \pi_1(LW)$.

El darrer dels resultats que destaquem d'entre els obtinguts sobre localitzacions d'unions puntuals de circumferències és la descripció següent del seu primer grup d'homologia, la qual generalitza els resultats coneguts per a les localitzacions homològiques:

Teorema *Sigui L un functor idempotent a la categoria homotòpica. Sigui W una unió puntual de circumferències indexada per un conjunt I. Sigui $A = \pi_1(LS^1)$. Aleshores existeixen successions exactes*

$$H_1(W) \to H_1(LW) \to T \to 0,$$

$$0 \to \bigoplus_{i\in I} A \to H_1(LW;A) \to T\otimes A \to 0 \quad \text{i}$$

$$0 \to \bigoplus_{i\in I} A \to H_1(LW) \to S \to 0,$$

on LT, $L(T\otimes A)$ i LS són trivials. A més, si $\oplus_{i\in I}A$ és L-local, aleshores la segona i la tercera successions exactes escindeixen. Si el morfisme unitat $\mathbb{Z}\to A$ és injectiu, aleshores $H_1(W)\to H_1(LW)$ és també injectiu.

Cal dir que aquest grup $A=\pi_1(LS^1)$ és, en realitat, un anell commutatiu amb unitat 1, tal i com s'explica a [77]. De fet, és un anell rígid, en el sentit que és isomorf al seu propi anell d'endomorfismes a través de l'aplicació d'avaluació en 1.

En el quart capítol es descriu un model per a les localitzacions en nombres primers mitjançant grups simplicials que vam obtenir al nostre article [3], i que es basa en una de les maneres conegudes d'obtenir la R-compleció de Bousfield–Kan, on $R\subseteq\mathbb{Q}$ o bé $R=\mathbb{Z}/p$ amb p un nombre primer. Una propietat destacable de la nostra construcció és que és functorial a la categoria dels conjunts simplicials (amb un sol vèrtex) i no només a la categoria homotòpica.

Aquest nostre model ens dóna un bon control de l'homotopia en dimensions baixes en el sentit següent: si $\pi_k(X)\cong\pi_k(Y)$ per a tot $k\le n$, aleshores $\pi_k(X_P)\cong\pi_k(Y_P)$ per a tot $k\le n$, on P és un conjunt qualsevol de primers. En particular, si P_nX denota la n-èsima peça de Postnikov de X, aleshores $\pi_k((P_nX)_P)\cong\pi_k(X_P)$ per a tot $k\le n$. Un altre avantatge del nostre model és que es pot relativitzar molt fàcilment a una construcció fibra a fibra, tal i com expliquem en el nostre article [3]. La P-localització fibra a fibra havia estat descrita per a espais nilpotents per Llerena [60] i May [62], i per Dror Farjoun en una forma més general a [33, 1.F].

Aquestes dues aplicacions del nostre model de la P-localització són essencials per a resoldre dos problemes de conservació de propietats. El primer problema és saber si la P-localització transforma espais (no necessàriament nilpotents) amb tots els grups d'homotopia finits en espais amb tots els grups d'homotopia finits. Si X és un espai amb tots els grups d'homotopia finits, aleshores la R-compleció de Bousfield–Kan $R_\infty X$ de X és un espai nilpotent amb tots els grups d'homotopia finits, si $R\subseteq\mathbb{Q}$ o bé $R=\mathbb{Z}/p$ amb p un nombre primer [15, proposicions VII.4.1 i VII.4.3]. També la localització homològica amb coeficients a R té el mateix comportament (ja que en aquest cas coincideix amb la R-compleció). Motivats per aquests resultats i fent ús de la P-localització fibra a fibra, demostrem el següent:

Teorema *Sigui P un conjunt de primers. Si X és un espai connex amb tots els grups d'homotopia finits, aleshores X_P també té tots els grups d'homotopia finits.*

El segon problema que considerem i resolem és la preservació de la nilpotència virtual per part de les localitzacions en conjunts de primers. Un espai X és virtualment nilpotent [35] si el seu grup fonamental és virtualment nilpotent i, per a cada $n \geq 2$, el grup fonamental $\pi_1(X)$ conté un subgrup normal nilpotent d'índex finit que actua nilpotentment sobre $\pi_n(X)$. L'anàleg d'aquest resultat a la categoria dels grups va ser demostrat a principis dels anys noranta per Casacuberta i Castellet [21], i des d'aleshores havia quedat pendent de demostrar-ho per a espais.

L'article de Dror–Dwyer–Kan [35] és una referència clau a l'hora d'estudiar localitzacions d'espais virtualment nilpotents. Aquests autors demostren, entre altres resultats, que la localització homològica amb coeficients a R (on $R \subseteq \mathbb{Q}$ o bé $R = \mathbb{Z}/p$ amb p un nombre primer) d'un espai virtualment nilpotent és un espai virtualment nilpotent; de fet, si $R = \mathbb{Q}$, aleshores s'obté un espai nilpotent. Inspirant-nos en alguns dels resultats d'aquest article i usant el control de l'homotopia en dimensions baixes i la P-localització fibra a fibra, hem demostrat el següent:

Teorema *Sigui P un conjunt de primers. Si X és un espai virtualment nilpotent, aleshores X_P també és un espai virtualment nilpotent.*

Aquest teorema l'hem obtingut com a conseqüència d'un altre resultat més tècnic, però important, que hem demostrat: si $Y \to X \to K(Q,1)$ és una fibració homotòpica on Y és un espai nilpotent i Q és un grup generat per elements de P'-torsió, aleshores l'espai X_P és nilpotent. Aquest teorema estén el resultat que havíem obtingut en el nostre article [6] per a espais virtualment nilpotents de tipus $K(G,1)$.

No se sap si la R-compleció de Bousfield–Kan preserva la nilpotència virtual en general per a $R \subseteq \mathbb{Q}$ o bé $R = \mathbb{Z}/p$ amb p un nombre primer. Nosaltres hem considerat l'ampolla de Klein i hem aconseguit descriure les seves complecions de forma explícita. Concretament, hem demostrat que si $X = K(G,1)$ és l'ampolla de Klein, aleshores $R_\infty X = K(G^\wedge_R, 1)$ amb $G^\wedge_R$ la R-compleció de G, per a tot $R \subseteq \mathbb{Q}$ o bé $R = \mathbb{Z}/p$ amb p un nombre primer.

Per tant, el comportament de l'ampolla de Klein és similar al comportament de les unions puntuals de circumferències en alguns aspectes.

Teorema *Sigui P un conjunt de primers que conté el* 2. *L'ampolla de Klein no és un espai $\mathbb{Z}_P$-bo.*

El resultat d'aquest teorema és molt interessant, ja que ens proporciona un nou exemple d'un CW-complex finit que no és $\mathbb{Z}_P$-bo, on P és un conjunt de primers que conté el 2. Fins ara se sabia que el pla projectiu no és un espai $\mathbb{Z}_P$-bo [15], on P és un conjunt de primers que conté el 2, i que, per a $n \geq 2$, l'espai $S^1 \vee S^n$ no és $\mathbb{Z}/p$-bo [12], on p és un nombre primer qualsevol.

Pel que fa a les localitzacions homològiques de l'ampolla de Klein, cal dir que si P és un conjunt de primers que no conté el 2, aleshores X_P és un espai nilpotent i, en conseqüència,

$$X_P \simeq X_{H\mathbb{Z}_P} \simeq (\mathbb{Z}_P)_\infty X.$$

A més, l'espai que obtenim és anesfèric amb grup fonamental $\mathbb{Z}_P$ [17]. Si $2 \in P$, aleshores el teorema anterior implica que $X_{H\mathbb{Z}_P} \not\simeq (\mathbb{Z}_P)_\infty X$ i, en aquest cas, nosaltres demostrem que $X_{H\mathbb{Z}_P}$ té grups d'homotopia superiors no nuls.

En el cinquè capítol considerem espais anesfèrics virtualment nilpotents amb grup fonamental finitament generat i fem un estudi dels efectes dels functors de compleció i de localització en nombres primers sobre ells. Concretament, estudiem quants grups d'homotopia no nuls poden aparèixer quan l'espai obtingut no és un $K(G,1)$.

Les nostres motivacions per a resoldre aquest problema són diverses. La primera és el treball de Descheemaeker–Malfait [32], en el qual s'estudien les localitzacions d'infra-nilvarietats en conjunts de primers i s'estableixen criteris per a saber quan obtenim un espai anesfèric, en cas que la varietat sigui de dimensió menor o igual que 4. La segona motivació són els resultats obtinguts en aquesta direcció per a espais de tipus $K(G,1)$ amb G un grup finit o bé un grup nilpotent, com expliquem tot seguit. Sigui p un nombre primer. Si $X = K(Q,1)$ amb Q un grup finit, aleshores el teorema 3.2 de [18] juntament amb el teorema 1.1.4 de [55] implica que la p-compleció de X és o bé $K(Q^\wedge_p,1)$, on $Q^\wedge_p$ denota la compleció p-profinita de Q, o bé té infinits grups d'homotopia no nuls, els quals són p-grups finits [15, proposició VII.4.3]. D'altra banda, si $X = K(N,1)$ amb N un grup nilpotent finitament generat, aleshores segons els resultats de [15, VI.2], la p-compleció de X és sempre un espai anesfèric nilpotent amb grup fonamental la compleció p-profinita $N_p^\wedge$ de N.

Partint d'aquests resultats i, tenint en compte que un grup virtualment nilpotent finitament generat s'inclou en una extensió amb nucli nilpotent finitament generat i quocient finit, generalitzem els resultats que vam demostrar per a infra-nilvarietats a [6, teoremes 3.5 i 4.3] de la manera següent:

Teorema *Sigui p un nombre primer i sigui $X = K(G,1)$ amb G un grup virtualment nilpotent finitament generat. Aleshores*

(a) $X_p^\wedge$ *és un espai anesfèric amb grup fonamental la compleció p-profinita $G_p^\wedge$ de G o bé $X_p^\wedge$ té infinits grups d'homotopia no nuls, que són finitament generats com a $\mathbb{Z}_p^\wedge$-mòduls;*

(b) $X_{(p)}$ *és un espai anesfèric amb grup fonamental la p-localització $G_{(p)}$ de G o bé $X_{(p)}$ té infinits grups d'homotopia no nuls, que són finitament generats com a $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòduls.*

L'ingredient principal per a la demostració d'aquest resultat és la generalització següent d'un teorema de McGibbon i Neisendorfer sobre la conjectura de Serre [63], que hem provat per a una certa classe d'espais nilpotents i que s'adequa a les nostres necessitats:

Teorema *Sigui X un espai nilpotent p-complet amb els grups d'homotopia superiors finitament generats com a $\mathbb{Z}_p^\wedge$-mòduls. Sigui p un nombre primer tal que*

(i) $\pi_n(X;\mathbb{Z}/p) \neq 0$ *per a algun $n > 1$ i*

(ii) X *és quasi-fitat a p.*

Aleshores, per a infinits valors de n, el grup $\pi_n(X)$ conté un subgrup no nul d'ordre p.

Els arguments per a la demostració d'aquest resultat són anàlegs als usats a [63]. Recordem que un espai és quasi-fitat en un nombre primer p si, per a cada n, existeix un enter $\alpha(n)$ tal que $H_{n+q}(X;\mathbb{Z}/p) \otimes \mathcal{A}^q \to H_n(X;\mathbb{Z}/p)$ és una aplicació nul·la per a tot $q > \alpha(n)$, on $\mathcal{A}$ denota l'àlgebra de Steenrod mòdul p. En particular, si $H_n(X;\mathbb{Z}/p) = 0$ per a tot n suficientment gran, aleshores X és quasi-fitat a p. Cal dir que el teorema continua essent vàlid si suposem que X és un espai nilpotent p-local amb grups d'homotopia superiors finitament generats com a $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòduls [6, teorema 3.2].

Com ja hem dit, si la p-localització d'un espai $X = K(G, 1)$ amb G virtualment nilpotent finitament generat no és un espai anesfèric, aleshores té infinits grups d'homotopia no nuls, que són finitament generats com a $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòduls. Aquí és important preguntar-se si aquests grups d'homotopia $\pi_k(X_{(p)})$ són tots finits per a $k > N$, on N és algun enter positiu (això és el que es podria pensar a partir del fet que G és una extensió d'un grup nilpotent per un grup finit). La manera d'abordar aquesta pregunta és considerar les racionalitzacions dels espais implicats.

Sorprenentment, hem trobat que totes dues possibilitats es donen en exemples concrets: existeixen infra-nilvarietats tals que la seva racionalització no és un espai anesfèric però té només un nombre finit de grups d'homotopia no nuls, i també n'existeixen d'altres on la racionalització té infinits grups d'homotopia no nuls [6, exemples 5.1 i 5.2].

Aquest fenomen és la raó que ens porta a dedicar el sisè i darrer capítol de la memòria a fer un estudi de la racionalització de les infra-nilvarietats. Usant tècniques d'homotopia racional, hem establert el criteri següent:

Teorema *Sigui X una infra-nilvarietat. Sigui P un conjunt de primers tal que X_P és un espai nilpotent no anesfèric. Si $H_n(X; \mathbb{Q}) = 0$ per a tot $n \geq k$, on $k \leq 4$, aleshores existeix un enter positiu N tal que $\pi_n(X_P)$ és un grup finit per a tot $n > N$ si i només si $H^*(X; \mathbb{Q})$ satisfà la dualitat de Poincaré.*

De fet, la hipòtesi que X_P sigui nilpotent no és essencial. Tal i com s'explica en la memòria, aquest resultat s'estén a totes les infra-nilvarietats, passant a un cert recobridor nilpotent de X_P.

En el cas general en què X no és necessàriament una varietat, és a dir, si X és un espai anesfèric virtualment nilpotent amb grup fonamental finitament generat (no necessàriament lliure de torsió), aleshores demostrem que el mateix resultat és cert si $k \leq 3$.

La condició $k \leq 4$ (o bé $k \leq 3$ en el darrer cas) és realment necessària. Aquest fet l'il·lustrem per mitjà d'exemples concrets. Existeix una infranilvarietat X de dimensió 5 que té el mateix tipus d'homotopia racional que la varietat 1-connexa $Y = (S^2 \times S^3)\sharp(S^2 \times S^3)\sharp(S^2 \times S^3)$; la cohomologia racional $H^*(Y; \mathbb{Q})$ de Y satisfà la dualitat de Poincaré, però, en canvi, l'espai $Y_{(0)}$ té infinits grups d'homotopia no nuls [42].

Seria interessant descobrir quina condició cal, doncs, imposar a una infranilvarietat X de dimensió arbitrària per tal que la seva racionalització $X_{(0)}$ sigui un espai racionalment el·líptic (és a dir, $\dim \pi_*(X_{(0)}) < \infty$).

Amb aquesta memòria contribuïm a una millor comprensió de les localitzacions i les complecions d'alguns tipus d'espais no nilpotents. Volem destacar que, tal i com es mostra en el darrer capítol, quan un espai no és nilpotent però la seva racionalització sí que ho és, encara es pot treure molta informació de les tècniques estàndard d'homotopia racional, tenint en compte que la racionalització $X \to X_{(0)}$ de qualsevol espai X indueix isomorfismes $H_*(X; \mathbb{Q}) \cong H_*(X_{(0)}; \mathbb{Q})$ a l'homologia racional.

És evident, però, que encara queden molts problemes pendents per resoldre en aquesta direcció. El nostre objectiu més immediat és acabar de decidir si la localització homològica entera de l'ampolla de Klein, que sabem que no és un espai anesfèric, té un nombre finit o bé un nombre infinit de grups d'homotopia no nuls.

Agraïments

En primer lloc, agraeixo de tot cor a en Carles Casacuberta que em contestés tan amablement un correu electrònic ara ja fa uns quants anys. Aquell va ser el pas que convertí el meu somni en una aventura real. Vull agrair-li no només tot el temps que m'ha dedicat, les converses mantingudes i el seu suport i la seva il·lusió constants, sinó també el fet d'ensenyar-me a estimar tant les matemàtiques i a jugar i a disfrutar amb elles. Aquesta aventura no hauria estat el mateix sense ell.

A la meva amiga belga, l'An Descheemaeker, li dono les gràcies per tot el que hem viscut juntes. Les nostres converses sobre matemàtiques han estat sempre molt enriquidores i han donat lloc a treballs molt interessants. La seva amistat i la seva ajuda han fet més planer el meu camí cap a la meta.

Al meu germanet matemàtic, en Javier Gutiérrez, li agraeixo tots els moments passats junts, ja fos parlant de matemàtiques, prenent un te o bé ajudant-me amb els meus dubtes de LaTeX.

Al meu altre germà matemàtic, en José Luis Rodríguez, li dono les gràcies per haver mostrat sempre un gran interès per al meu treball així com per haver estat sempre a punt a l'hora de respondre les meves preguntes.

Agraeixo al meu amic Assaf Libman haver-me fet perdre la por al famós "llibre groc" de Bousfield i Kan. També vull agrair-li totes les converses mantingudes, sobretot sobre grups nilpotents, així com la seva amistat i la seva hospitalitat.

Vull donar les gràcies també a en Ran Levi per acollir-me durant un mes a la Universitat d'Aberdeen. Les converses mantingudes amb ell van permetre millorar els resultats del capítol 5 de la memòria.

A en Pascal Lambrechts li agraeixo el mes passat a la Universitat de Louvain-la-Neuve, en el qual vaig aprendre la major part de l'homotopia racional que sé. Les converses mantingudes amb ell i amb Yves Félix han estat indispensables a l'hora d'obtenir els resultats del darrer capítol de la memòria. L'altra persona a qui he d'agrair haver compartit els seus coneixements d'homotopia racional amb mi és l'Aniceto Murillo, qui sempre ha estat a punt per a resoldre els meus dubtes, ja fos personalment o bé per correu electrònic.

A la Natàlia Castellana i al Chiqui Crespo els dono les gràcies per haver tingut sempre temps per a respondre les meves preguntes.

Al meu tècnic informàtic personal i alhora company de despatx, l'Albert Ruiz, li agraeixo la seva paciència cada vegada que l'he molestat amb algun problema informàtic o bé amb alguna pregunta de matemàtiques.

Vull expressar la meva gratitud a tots els membres del Grup de Topologia, particularment a en Manuel Castellet per haver estat el meu tutor. També a tots aquells visitants del Centre de Recerca Matemàtica, entre ells en David Chataur, que d'una o altra manera m'han ajudat a dur a terme aquest treball.

Dono les gràcies també als meus companys del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona que fan el dia a dia més agradable, així com al mateix Departament per haver-me proporcionat els recursos necessaris per a elaborar aquesta memòria.

Finalment, només em queda dir que sense l'encoratjament persistent dels meus pares, de la meva germana i de l'Albert no hagués pogut culminar aquest treball. A ells els dedico la tesi.

Gemma Bastardas i Ferrer
Bellaterra, 7 d'abril de 2003

Capítol 1

Localitzacions i complecions

En aquest capítol introduïm les definicions i propietats bàsiques dels dos tipus de construccions que fem servir en aquesta memòria: les localitzacions i les complecions. Ambdues són casos particulars de functors coaugmentats, dels quals parlem primerament. Pel que fa a les localitzacions, recordem el concepte de f-localització en el sentit de Dror Farjoun i en detallem dos exemples clàssics: les localitzacions en conjunts de primers i les localitzacions homològiques de Bousfield. Quant a les complecions, fem memòria del functor de R-compleció de Bousfield–Kan per a R un subanell dels racionals o bé $R = \mathbb{Z}/p$ amb p un nombre primer. Acabem el capítol amb un recull de les relacions entre els diferents functors descrits, tenint en compte el seu ús al llarg d'aquest treball.

1.1 Generalitats sobre functors coaugmentats

Donada una categoria $\mathcal{C}$, un *functor coaugmentat* és un parell (L, η) on $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ és un functor i $\eta\colon \mathrm{Id} \to L$ és una transformació natural que s'anomena *coaugmentació*. Per tant, per a cada objecte X de $\mathcal{C}$ existeix una aplicació $\eta_X\colon X \to LX$ i per a cada morfisme $f\colon X \to Y$ existeix un morfisme $Lf\colon LX \to LY$ que satisfà $Lf \circ \eta_X = \eta_Y \circ f$.

Un functor coaugmentat es diu *idempotent* si els dos morfismes η_{LX} i $L\eta_X$ de LX a LLX són isomorfismes per a tot objecte X de $\mathcal{C}$. Segons la proposició 1.1 de [20], aquest fet implica que $\eta_{LX} = L\eta_X$, per a tot X. Un functor coaugmentat idempotent està caracteritzat per la propietat universal següent [20, proposició 1.2]: per a tot objecte X de $\mathcal{C}$ existeix un morfisme $\eta_X\colon X \to LX$ que és inicial entre tots els morfismes de X a objectes isomorfs a LY per a algun Y. És a dir, per a tot morfisme $\alpha\colon X \to LY$ existeix un únic morfisme, llevat d'isomorfisme, $\beta\colon LX \to LY$ tal que $\beta \circ \eta_X = \alpha$. Aquesta propietat universal també s'expressa dient que L és una *reflexió* sobre la subcategoria plena $\mathcal{D}$ dels objectes isomorfs a LY per a algun Y. Els objectes d'aquesta subcategoria s'anomenen L-*locals*.

Dit d'una altra manera, si pensem el functor L com un functor de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$, aleshores L és adjunt per l'esquerra del functor inclusió $J\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. És a dir, per a tot objecte X de $\mathcal{C}$ i per a tot objecte Y de $\mathcal{D}$, el morfisme $\eta_X\colon X \to LX$ indueix una bijecció natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(LX, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, JY).$$

Una aplicació $f\colon X \to Y$ s'anomena L-*equivalència* si $Lf\colon LX \to LY$ és un isomorfisme. Els objectes L-locals i les L-equivalències són ortogonals en el sentit següent: si X és un objecte L-local i $f\colon A \to B$ és una L-equivalència, aleshores per a tot morfisme $\alpha\colon A \to X$ existeix un únic morfisme $\beta\colon B \to X$ que satisfà $\beta \circ f = \alpha$. A més, un objecte és L-local si i només si és ortogonal a totes les L-equivalències i una aplicació és una L-equivalència si i només si és ortogonal a tots els objectes L-locals [23].

Acabem recordant una propietat molt important i útil dels functors idempotents que utilitzem repetidament en aquest treball [20, proposició 1.3]:

Proposició 1.1.1 *Sigui L un functor idempotent en una categoria $\mathcal{C}$. La classe dels objectes L-locals és tancada per límits i retractes, i la classe de les L-equivalències és tancada per colímits i retractes.* $\square$

Observem que si pensem de nou L com el functor adjunt per l'esquerra del functor inclusió $J\colon \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$, on $\mathcal{D}$ és la subcategoria plena dels objectes L-locals, aleshores el teorema 2.6.10 de [88] ens diu que si $\mathcal{C}$ és una categoria completa i cocompleta, llavors L preserva colímits i J preserva límits. El fet que L preservi colímits implica que per a qualsevol functor $F\colon I \to \mathcal{C}$, on I és una categoria petita, es compleix que

$$L(\mathrm{colim}_{\mathcal{C}} F) = \mathrm{colim}_{\mathcal{D}} LF \cong L(\mathrm{colim}_{\mathcal{C}} LF).$$

El fet que J preservi límits es dedueix directament de la proposició 1.1.1.

1.2 Exemples de functors coaugmentats

Un cop donades la definició i les propietats bàsiques dels functors coaugmentats anem a descriure'n amb detall alguns exemples clàssics.

1.2.1 Localitzacions a la categoria dels grups

Suposem que $\mathcal{C}$ és la categoria dels grups. Donat un morfisme de grups qualsevol $f\colon A \to B$ es defineix un functor idempotent a $\mathcal{C}$ com segueix. Un grup G és *f-local* si és ortogonal a f; és a dir, si per a tot morfisme $\alpha\colon A \to G$ existeix un únic morfisme $\beta\colon B \to G$ tal que $\beta \circ f = \alpha$. Aleshores existeix una reflexió L_f sobre la subcategoria plena dels grups f-locals, anomenada *localització respecte de f* o bé *f-localització*. La construcció del functor idempotent L_f és un cas particular de la construcció d'adjunts per l'esquerra a partir de parells ortogonals duta a terme a [23]. Un morfisme de grups $g\colon G \to H$ és una *f-equivalència* si és ortogonal a tots els grups f-locals o bé, equivalentment, si $L_f(g)\colon L_fG \to L_fH$ és un isomorfisme. Per exemple, l'abelianització és una localització respecte de la projecció $f\colon \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ d'un grup lliure amb dos generadors al seu abelianitzat.

Per definició, tot morfisme f és ortogonal a tots els grups f-locals, és a dir, és una f-equivalència. En conseqüència, [20, lema 2.1],

Lema 1.2.1 *Sigui $f\colon A \to B$ un morfisme de grups. Suposem que per a tot morfisme $\alpha\colon A \to B$ hi ha un únic endomorfisme $\beta\colon B \to B$ tal que $\beta \circ f = \alpha$. Aleshores $B = L_fA$.* $\square$

Observem que si L és un functor idempotent qualsevol a la categoria dels grups amb coaugmentació η, aleshores, per a tot grup G, el morfisme $\eta_G\colon G \to LG$ satisfà la condició del lema 1.2.1. Per tant, $LG = L_fG$ amb $f = \eta_G$. Ara bé, això no implica que L sigui un functor de tipus L_f, sinó que el que ens diu és que si les f-localitzacions preserven una determinada propietat, aleshores tot functor idempotent la preservarà. La qüestió de si tot functor idempotent L a la categoria dels grups és de tipus L_f per a algun morfisme de grups f es resol a [26], on s'explica que la resposta depèn dels axiomes de teoria de conjunts que s'utilitzin.

1.2.2 Localitzacions homotòpiques

Suposem que $\mathcal{C}$ és la categoria homotòpica dels CW-complexos o dels conjunts simplicials. Sigui $f\colon X \to Y$ una aplicació qualsevulla. Un espai Z és *f-local* si l'aplicació

$$f^*\colon \mathrm{map}\,(Y, Z) \to \mathrm{map}\,(X, Z)$$

induïda per f és una equivalència dèbil (on map denota l'espai d'aplicacions contínues). Si treballem amb conjunts simplicials en comptes de CW-complexos, aleshores cal imposar, a més, que Z sigui fibrant; és a dir, que l'aplicació $Z \to *$ sigui una fibració de Kan.

Equivalentment, un CW-complex Z és f-local si i només si cadascuna de les seves components connexes és f-local, i un CW-complex connex és f-local si i només si l'aplicació d'espais puntejats

$$f^*\colon \mathrm{map}_*(Y, Z) \to \mathrm{map}_*(X, Z)$$

induïda per f és una equivalència dèbil. Aleshores existeix una reflexió L_f sobre la subcategoria plena dels espais f-locals, anomenada *localització respecte de f* o bé *f-localització*. L'existència d'aquest functor homotòpic es demostra a [33]. Una aplicació $g\colon Z \to W$ entre espais topològics és una *f-equivalència* si és ortogonal a tots els espais f-locals a la categoria homotòpica, o bé, equivalentment, si $Lg\colon LZ \to LW$ és una equivalència homotòpica.

La f-localització és un functor a la categoria dels espais, tot i que només és idempotent a la categoria homotòpica associada. La qüestió de si tot functor idempotent L a la categoria homotòpica és de tipus L_f per a alguna aplicació f fou plantejada per Dror Farjoun a [33] i resolta per Casacuberta, Scevenels i Smith a [26].

Observació 1.2.2 Donada una aplicació f, si es considera la classe dels espais Z tals que $f^*\colon [B, Z] \to [A, Z]$ és una bijecció de conjunts, aleshores en general no existeix una reflexió a la categoria homotòpica sobre aquesta classe d'espais. L'exemple més senzill d'aquest fet és $f\colon S^1 \to *$: si existís una aplicació universal del pla projectiu real $\mathbb{R}P^2$ en un espai 1-connex X, aleshores

$$H^2(X; \mathbb{Z}) \cong [X, K(\mathbb{Z}, 2)] \cong [\mathbb{R}P^2, K(\mathbb{Z}, 2)] \cong H^2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2,$$

però $H^2(X;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}\,(H_2(X),\mathbb{Z})$, que no pot ser mai isomorf a $\mathbb{Z}/2$; aquest exemple és degut a Mislin. Això no s'ha d'entendre com una anomalia, sinó que la noció de "localització homotòpica" s'ha de veure com pròpia de les categories de models simplicials, on la definició es fa mitjançant l'espai d'aplicacions corresponent, per tal d'assegurar-ne l'existència i les propietats desitjades.

Els exemples de functors idempotents de tipus L_f més rellevants per a aquesta memòria són les localitzacions en conjunts de primers i les localitzacions homològiques de Bousfield. Seguidament les descrivim amb detall.

Localitzacions en conjunts de primers

Sigui $\mu_p\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ el morfisme multiplicació per un nombre primer p. Un grup G és μ_p-local si i només si per a tot $x \in G$ existeix un únic $y \in G$ tal que $y^p = x$. Un grup G que satisfà aquesta propietat s'anomena *únicament p-divisible*. Més generalment, sigui P un conjunt de primers i sigui P' el seu complementari (en el conjunt de tots els primers). Un grup G és *únicament P-divisible* si G és p-divisible per a tot nombre primer $p \in P$. Els grups únicament P'-divisibles s'anomenen grups *P-locals*. Un morfisme $g\colon G \to H$ és una *P-equivalència* si és ortogonal a tots els grups P-locals. Per tant, el functor de P-localització a la categoria dels grups és un functor idempotent de tipus L_f, on f és el producte lliure dels morfismes μ_p per a tot $p \in P'$ [22].

Anàlogament, es defineix el concepte de P-localització a la categoria homotòpica dels espais. Sigui $\rho_n\colon S^1 \to S^1$ l'aplicació definida com $z \mapsto z^n$. Un espai connex X és ρ_n-local si l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} \Omega X & \to & \Omega X \\ \omega & \mapsto & \omega^n \end{array} \tag{1.2.1}$$

és una equivalència dèbil. Sigui P un conjunt de primers i sigui P' el seu complementari (en el conjunt de tots els primers). Un espai connex X és *P-local* si l'aplicació (1.2.1) és una equivalència dèbil per a tot $n \in P'$. Una aplicació $g\colon X \to Y$ és una *P-equivalència* si és ortogonal (a la categoria homotòpica) a tots els espais connexos P-locals. Per tant, el functor de P-localització a la categoria homotòpica és un functor idempotent de tipus L_f, on f és la unió puntual de les aplicacions ρ_n per a tot $n \in P'$ [22].

Sigui G un grup i sigui A un G-mòdul; és a dir, el grup G actua sobre A a través d'algun morfisme $\omega: G \to \mathrm{Aut}\,(A)$. Es diu que l'acció del grup G sobre A és *P-local* si, per a tot $g \in G$ i per a tot $n \in P'$, l'aplicació

$$\begin{array}{rccl} \rho_{n,g}\colon & A & \to & A \\ & a & \mapsto & a + \omega(g)(a) + \cdots + \omega(g^{n-1})(a) \end{array}$$

és bijectiva. Un G-mòdul A s'anomena *P-local* si l'acció de G sobre A és P-local. Aquest concepte permet caracteritzar algebraicament les nocions d'espai connex P-local i de P-equivalència d'espais connexos com segueix [22, teoremes 2.1 i 3.2]:

Teorema 1.2.3 *Un espai connex X és P-local si i només si $\pi_1(X)$ és un grup P-local i $\pi_k(X) \rtimes \pi_1(X)$ és un grup P-local per a tot $k \geq 2$ o, equivalentment, si $\pi_1(X)$ és un grup P-local i $\pi_k(X)$ és un $\pi_1(X)$-mòdul P-local per a tot $k \geq 2$.* $\square$

Teorema 1.2.4 *Sigui $f: X \to Y$ una aplicació entre espais connexos. Aleshores f és una P-equivalència si i només si*

(i) *$\pi_1(f): \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ és una P-equivalència de grups i*

(ii) *$f^n: H^n(Y; A) \to H^n(X; A)$ (equivalentment, $H_n(X; A) \xrightarrow{f_n} H_n(Y; A)$) és un isomorfisme per a tot n i per a tot $\pi_1(Y_P)$-mòdul P-local A.* $\square$

Finalment, observem que si P és un conjunt de primers, aleshores, per a tot $p \in P$, es compleix

$$(X_P)_{(p)} \simeq X_{(p)}.$$

En efecte, sigui $p \in P$. Com que tota P-equivalència és una p-equivalència, en particular, l'aplicació $\eta_P: X \to X_P$ és una p-equivalència. Aquest fet implica que $X_{(p)}$ és ortogonal a η_P; és a dir, existeix una única aplicació $\alpha: X_P \to X_{(p)}$ tal que $\alpha \circ \eta_P = \eta_{(p)}$, on $\eta_{(p)}: X \to X_{(p)}$. A més, com que η_P i $\eta_{(p)}$ són p-equivalències, l'aplicació α també ho és. Per tant,

$$(X_P)_{(p)} \simeq (X_{(p)})_{(p)} \simeq X_{(p)}.$$

La notació $(-)_{(p)}$ per a un nombre primer p prové de l'àlgebra. Recordem que donat un domini R sempre es pot considerar un subconjunt S de R i definir el localitzat de R a S com l'anell més petit que conté a R i tal que els elements de S hi són invertibles. En particular, donats un anell R i un ideal primer $\wp$ podem calcular el localitzat $R_\wp$ de R en el sistema multiplicatiu $S = R \setminus \wp$. Per això, quan el conjunt de primers P escollit és el conjunt buit, escrivim $X_{(0)}$ i diem que $X_{(0)}$ és la *racionalització* de X. Per a tot conjunt de primers P es compleix que

$$(X_P)_{(0)} \simeq X_{(0)}.$$

Localitzacions homològiques

Sigui R un subanell dels racionals (és a dir, $R = \mathbb{Z}_P$ per a un conjunt de primers P) o bé $R = \mathbb{Z}/p$ amb p un nombre primer. Un grup G s'anomena *HR-local* si és ortogonal a tots els morfismes de grups $\varphi\colon A \to B$ tals que el morfisme induït $\varphi_n\colon H_n(A; R) \to H_n(B; R)$ és un isomorfisme per a $n = 1$ i un epimorfisme per a $n = 2$. Un morfisme de grups $\varphi\colon G \to K$ és una *HR-equivalència* si és ortogonal a tots els grups HR-locals. Aleshores [10],

Definició 1.2.5 La *HR-localització* d'un grup G és un morfisme de grups $l_G\colon G \to G_{HR}$ tal que G_{HR} és HR-local i l_G és una HR-equivalència.

Tal i com es demostra a [36], la HR-localització a la categoria dels grups és un functor idempotent de tipus L_f, on f és el producte lliure de tots els endomorfismes d'un grup lliure numerable que indueixen isomorfismes a $H_1(\,-\,; R)$.

Anàlogament, definim el concepte de HR-localització a la categoria homotòpica dels espais. Una aplicació $f\colon X \to Y$ s'anomena *$H_*(\,-\,; R)$-equivalència* si indueix un isomorfisme $f_n\colon H_n(X; R) \to H_n(Y; R)$ per a tot n. Un espai X és *$H_*(\,-\,; R)$-local* si és ortogonal (a la categoria homotòpica) a totes les $H_*(\,-\,; R)$-equivalències. Aleshores [10],

Definició 1.2.6 La *HR-localització* d'un espai topològic X és una aplicació $l_X\colon X \to X_{HR}$ tal que X_{HR} és un espai $H_*(\,-\,; R)$-local i l_X és una $H_*(\,-\,; R)$-equivalència.

El functor de HR-localització a la categoria homotòpica també és un functor idempotent de tipus L_f [34, teorema 3.1], on f és la unió puntual de totes les aplicacions d'una unió puntual numerable de circumferències en ella mateixa que indueixen la identitat a $H_1(\,-\,; R)$.

Sigui G un grup i sigui A un G-mòdul. Diem que A és $H\mathbb{Z}$-local si és ortogonal a tots els morfismes de G-mòduls $\alpha: B \to C$ tals que el morfisme induït $\alpha_n: H_n(G;B) \to H_n(G;C)$ és un isomorfisme per a $n = 0$ i un epimorfisme per a $n = 1$. Aquest concepte permet caracteritzar algebraicament els espais connexos $H_*(\,-\,;R)$-locals de la manera següent [10, teorema 5.5]:

Teorema 1.2.7 *Un espai connex X és $H_*(\,-\,;R)$-local si i només si $\pi_k(X)$ és un grup HR-local per a tot $k \geq 1$ i $\pi_k(X)$ és un $\pi_1(X)$-mòdul $H\mathbb{Z}$-local per a tot $k \geq 2$.* $\square$

1.2.3 Compleció de Bousfield–Kan

Les complecions són functors coaugmentats, però no necessàriament idempotents. Anem a recordar com es defineix i quines propietats bàsiques té el functor de R-compleció de Bousfield–Kan per a R un subanell dels racionals o bé $R = \mathbb{Z}/p$ amb p un nombre primer.

Veiem primer com es defineix a la categoria dels grups. Sigui $R \subseteq \mathbb{Q}$ o bé $R = \mathbb{Z}/p$ amb p un nombre primer. Un grup G és *R-nilpotent* si té una sèrie central finita

$$G = G_1 \supset \cdots \supset G_i \supset \cdots \supset G_k = \{1\},$$

tal que, per a tot i, el quocient G_i/G_{i+1} admet una estructura de R-mòdul. Si $R = \mathbb{Z}$, aleshores diem que G és nilpotent. Considerem el functor que assigna a cada morfisme $G \to N$, on N és R-nilpotent, el grup N i a cada triangle commutatiu

$$\begin{array}{ccc} G & \to & N \\ & \searrow & \downarrow \\ & & N' \end{array}$$

amb N i N' R-nilpotents, el morfisme $N \to N'$. Aleshores [15, IV.2],

Definició 1.2.8 La *R-compleció* d'un grup G és el morfisme natural de grups $\varphi: G \to G^\wedge_R$, on $G^\wedge_R$ és el límit invers del functor que acabem de descriure.

Com que tot morfisme $G \to N$ on N és R-nilpotent factoritza a través de $(G/\Gamma_r G)^\wedge_R$ per a algun r, on $\{\Gamma_r G\}_r$ denota la sèrie central inferior de G, el grup $G^\wedge_R$ és isomorf al límit invers de $(G/\Gamma_r G)^\wedge_R$ [15, IV.2.3]. En particular, si $R = \mathbb{Z}$, aleshores $G^\wedge_R$ és el límit invers dels quocients $G/\Gamma_r G$.

La R-compleció a la categoria dels conjunts simplicials es defineix de la manera següent. Sigui X un espai i sigui $R \otimes X$ l'espai on, per a cada n, $(R \otimes X)_n$ és el R-mòdul lliure en el conjunt X_n. Si $x_0 \in X$ és el punt base de X, es defineix

$$RX = (R \otimes X)/(R \otimes x_0)$$

i, com a conseqüència de la definició d'homotopia i d'homologia de conjunts simplicials [61], tenim

$$\pi_*(RX) \cong \widetilde{H}_*(X; R). \tag{1.2.2}$$

Un *espai cosimplicial* és una successió d'espais juntament amb aplicacions entre ells, anomenades cocares i codegeneracions, que satisfan les identitats duals de les identitats simplicials. La *resolució cosimplicial* d'un espai X respecte de R és l'espai cosimplicial $\underline{R}X$ donat per

- $(\underline{R}X)^k = R^{k+1}X = R(R^k X)$ en codimensió k i
- els operadors cocara i codegeneració definits com:

$$(d^i \colon (\underline{R}X)^{k-1} \to (\underline{R}X)^k) = (R^i \phi R^{k-i} \colon R^k X \to R^{k+1}X),$$
$$(s^i \colon (\underline{R}X)^{k+1} \to (\underline{R}X)^k) = (R^i \psi R^{k-i} \colon R^{k+2}X \to R^{k+1}X),$$

on $\phi \colon \mathrm{Id} \to R$ i $\psi \colon R^2 \to R$ són transformacions naturals induïdes per les aplicacions [15, I.2]

$$\begin{array}{rccc} \phi\colon & X & \to & R\otimes X \\ & x & \mapsto & 1\otimes x \end{array} \quad \text{i} \quad \begin{array}{rccc} \psi\colon & R\otimes(R\otimes X) & \to & R\otimes X \\ & 1\otimes y & \mapsto & y. \end{array}$$

Sigui $\underline{\Delta}$ l'espai cosimplicial estàndard; és a dir, l'espai cosimplicial que en codimensió k consisteix en el k-símplex estàndard $\Delta[k]$ i que té per operadors cocara i codegeneració les aplicacions usuals

$$\delta^j \colon \Delta[k-1] \to \Delta[k] \quad \text{i} \quad \sigma^j \colon \Delta[k+1] \to \Delta[k].$$

Si $\underline{\Delta}^{[n]}$ és el n-esquelet de $\underline{\Delta}$, aleshores es defineix $R_n X$ com l'espai d'aplicacions de $\underline{\Delta}^{[n]}$ a $\underline{R}X$; és a dir, el conjunt simplicial que té en dimensió k el conjunt de les aplicacions cosimplicials $\underline{\Delta}^{[n]} \times \Delta[k] \to \underline{R}X$.

En particular, $R_{-1}X = *$ i $R_0X = (\underline{R}X)^0 = RX$. Per a cada n, la inclusió $\underline{\Delta}^{[n-1]} \subset \underline{\Delta}^{[n]}$ dóna una fibració principal [15, lemes I.6.1 i II.2.6]

$$F_n \to R_nX \to R_{n-1}X, \tag{1.2.3}$$

on $F_n = \Omega^n\left((\underline{R}X)^n \cap \ker s^0 \cap \ldots \cap \ker s^{n-1}\right)$.

Definició 1.2.9 La R*-compleció* d'un espai topològic X és l'aplicació natural $f\colon X \to R_\infty X$, on $R_\infty X$ és el límit invers de la torre de fibracions $\{R_nX\}_n$.

Per a un grup G qualsevol, el límit invers dels grups $\pi_1(R_nK(G,1))$ és isomorf a la R-compleció $G^\wedge_R$ de G; [15, IV.2.4]. Aquest fet es deu a que, per a cada n, el grup $\pi_1(R_nK(G,1))$ és R-nilpotent, ja que l'espai $R_nK(G,1)$ és R-nilpotent. Aleshores per a demostrar que $G^\wedge_R$ és isomorf al límit invers dels grups $\pi_1(R_nK(G,1))$ n'hi ha prou amb veure que, per a tot grup R-nilpotent N, el límit directe de $\mathrm{Hom}\,(\pi_1(R_nK(G,1),N)$ és isomorf a $\mathrm{Hom}\,(G,N)$ o bé, equivalentment, que hi ha una correspondència bijectiva entre el límit directe de $[R_nK(G,1),K(N,1)]$ i les classes d'homotopia d'aplicacions de $K(G,1)$ a $K(N,1)$, la qual cosa és certa per [15, III.6.7].

Sigui $f\colon X \to Y$ una aplicació qualsevulla. Es dedueix de (1.2.2) que l'aplicació $f_*\colon R_\infty X \to R_\infty Y$ induïda per f és una equivalència homotòpica si i només si f és una $H_*(\,-\,;R)$-equivalència. Per tant, el functor de R-compleció transforma les $H_*(\,-\,;R)$-equivalències en equivalències homotòpiques.

Acabem recordant el resultat del teorema IX.3.1 de [15], el qual ens diu que la torre de fibracions

$$\cdots \to R_nX \to R_{n-1}X \to \cdots \to R_{-1}X = *$$

dóna lloc a una successió exacta curta

$$* \to \varprojlim{}^1 \pi_{k+1}(R_nX) \to \pi_k(R_\infty X) \to \varprojlim \pi_k(R_nX) \to *, \tag{1.2.4}$$

per a tot $k \geq 0$.

1.3 Relacions entre els functors descrits

Sigui P un conjunt de primers. Segons el teorema 1.2.4, tota P-equivalència és una $H_*(\,-\,;\mathbb{Z}_P)$-equivalència i, per tant, tot espai $H_*(\,-\,;\mathbb{Z}_P)$-local és

P-local. Això significa que donat un espai topològic X, si $l_X\colon X \to X_P$ és la seva P-localització i $h_X\colon X \to X_{H\mathbb{Z}_P}$ és la seva $H\mathbb{Z}_P$-localització, aleshores existeix una única aplicació (llevat d'equivalència homotòpica)

$$\alpha\colon X_P \to X_{H\mathbb{Z}_P}$$

tal que $\alpha \circ l_X \simeq h_X$. Aquesta aplicació α és una $H_*(\,-\,;\mathbb{Z}_P)$-equivalència, ja que l_X i h_X ho són. En conseqüència,

$$(X_P)_{H\mathbb{Z}_P} \simeq X_{H\mathbb{Z}_P}. \tag{1.3.5}$$

Així doncs, $X_P \simeq X_{H\mathbb{Z}_P}$ si i només si X_P és $H_*(\,-\,;\mathbb{Z}_P)$-local, la qual cosa passa, per exemple, quan X_P és un espai nilpotent [22].

Si R és un subanell dels racionals o bé $R = \mathbb{Z}/p$ amb p un nombre primer, com que $R_\infty X$ és $H_*(\,-\,;R)$-local perquè és un límit invers homotòpic d'espais $H_*(\,-\,;R)$-locals, donat un espai topològic X sempre existeix una aplicació natural

$$\beta\colon X_{HR} \to R_\infty X$$

tal que $\beta \circ h_X \simeq \rho_X$, on $h_X\colon X \to X_{HR}$ i $\rho_X\colon X \to R_\infty X$. El concepte següent, extret de [15, I.5], ens dóna la condició necessària i suficient per tal que β sigui una equivalència homotòpica.

Definició 1.3.1 Sigui R un subanell dels racionals o bé $R = \mathbb{Z}/p$. Un espai X s'anomena R*-bo* si el morfisme $f_n\colon H_n(X;R) \to H_n(R_\infty X;R)$ induït per l'aplicació $f\colon X \to R_\infty X$ és un isomorfisme per a tot n.

Per tant, $X_{HR} \simeq R_\infty X$ si i només si X és un espai R-bo. Aquest resultat implica que el functor de R-compleció de Bousfield–Kan és idempotent si ens restringim a la classe dels espais R-bons. En general, però, és difícil determinar si un espai és R-bo. Per exemple, a [15, VII] es demostra que els espais nilpotents (en particular, els espais simplement connexos), els espais amb tots els grups d'homotopia finits i els espais R-perfectes (un espai X és R-perfecte si $H_1(X;R) = 0$) són espais R-bons. Un altre fet a tenir en compte és que un espai topològic X és R-bo si i només si $R_\infty X$ és R-bo [15, proposició I.5.2]. Per exemple, si $R_\infty X$ és nilpotent, aleshores X és R-bo.

O sigui que, per a tot subanell dels racionals $R = \mathbb{Z}_P$, existeixen aplicacions naturals

$$X_P \xrightarrow{\alpha} X_{H\mathbb{Z}_P} \xrightarrow{\beta} (\mathbb{Z}_P)_\infty X,$$

que són equivalències homotòpiques, és a dir, $X_P \simeq X_{H\mathbb{Z}_P} \simeq (\mathbb{Z}_P)_\infty X$, en alguns casos (per exemple, quan X és un espai nilpotent).

Volem acabar aquest capítol amb un comentari referent a la notació que usem en la memòria per a la R-compleció de Bousfield–Kan quan $R = \mathbb{Z}/p$ amb p un nombre primer. Donat un espai topològic X, escrivim $X_p^\wedge$ per a denotar la seva R-compleció de Bousfield–Kan quan $R = \mathbb{Z}/p$, anomenada també p-compleció. Aquesta notació s'utilitza en altres treballs per a la compleció p-profinita de Sullivan [85]. Ara bé, aquests dos tipus de functors de p-compleció coincideixen sobre els espais amb l'homologia mòdul p finita a cada dimensió [15]. Precisament aquesta classe d'espais és l'única amb la qual treballarem en els capítols on considerem p-complecions.

Capítol 2

Preservació d'estructures a la categoria dels grups

És ben conegut que la localització en nombres primers és un functor exacte a la categoria dels grups nilpotents [49]. És a dir, si $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ és una extensió de grups nilpotents i P és un conjunt de primers, aleshores la successió obtinguda per functorialitat $1 \to N_P \to G_P \to Q_P \to 1$ també és exacta. En general, però, els functors idempotents no són exactes a la categoria dels grups; ni tan sols ho són a la categoria dels grups abelians.

Abans de buscar bones condicions per tal que els functors idempotents siguin exactes, que és un tema difícil, cal preguntar-se si conserven l'exhaustivitat dels morfismes. Aquesta pregunta, la qual se l'han plantejada diversos matemàtics, la responem completament en la primera part d'aquest capítol, caracteritzant els functors idempotents que tenen aquesta propietat. Els nostres resultats estan publicats a [2].

En la segona part del capítol estudiem l'efecte dels functors idempotents sobre els grups nilpotents. Un problema obert des de fa dècades (i complicat de resoldre) és saber si tot functor idempotent preserva la nilpotència dels grups. Fins i tot es desconeix si els functors idempotents envien grups nilpotents finits a grups nilpotents finits. Nosaltres, malgrat que no demostrem aquest fet, obtenim diversos resultats parcials en aquesta direcció.

2.1 Morfismes de grups exhaustius

Els exemples més usuals de functors idempotents a la categoria dels grups, com les localitzacions en nombres primers o, més generalment, les localitzacions homològiques, així com l'abelianització i altres projeccions sobre varietats de grups, conserven l'exhaustivitat dels morfismes.

Pregunta És cert que tot functor idempotent a la categoria dels grups envia morfismes de grups exhaustius a morfismes de grups exhaustius?

Aquí convé recordar la distinció entre epimorfismes i aplicacions exhaustives (que no cal fer a la categoria dels grups, però sí en altres categories, com la dels anells o fins i tot en certes subcategories de grups). Un morfisme $f\colon G \to H$ en una categoria qualsevulla és un *epimorfisme* si per a tot parell de morfismes $\alpha, \beta\colon H \to K$ tals que $\alpha \circ f = \beta \circ f$ es compleix que $\alpha = \beta$. A la categoria dels grups, un morfisme és un epimorfisme si i només si és exhaustiu [74]. Però, per exemple, la inclusió $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ és un epimorfisme a la categoria dels anells amb unitat (ja que tot morfisme d'anells $\alpha\colon \mathbb{Q} \to R$ queda determinat per la imatge de $\mathbb{Z}$) que no és exhaustiu.

Sigui L un functor idempotent a la categoria dels grups. Sigui $\mathcal{D}$ la subcategoria plena dels grups L-locals. Com que un conucli és un cas particular d'un colímit, la proposició 1.1.1 implica que si $f\colon G \to H$ és un epimorfisme de grups, aleshores $Lf\colon LG \to LH$ és un epimorfisme a la categoria $\mathcal{D}$ dels grups L-locals. És a dir, tot functor idempotent envia un epimorfisme de la categoria dels grups a un epimorfisme de la subcategoria plena $\mathcal{D}$ dels grups L-locals. Ara bé, això no implica que donat un morfisme de grups exhaustiu f, el morfisme de grups Lf també sigui exhaustiu, ja que els conceptes d'epimorfisme i de morfisme exhaustiu no coincideixen a totes les subcategories plenes dels grups (vegeu la secció 2.1.2).

El nostre objectiu és, doncs, respondre de forma negativa a la pregunta que hem formulat a l'inici de la secció, tot demostrant una caracterització dels functors idempotents que envien morfismes de grups exhaustius a morfismes de grups exhaustius. Aleshores, a partir d'aquesta caracterització, donem dos exemples concrets de functors idempotents a la categoria dels grups que no preserven l'exhaustivitat dels morfismes.

2.1.1 Functors idempotents que preserven l'exhaustivitat dels morfismes de grups

El primer exemple de functors idempotents que envien morfismes de grups exhaustius a morfismes de grups exhaustius són les epireflexions. Recordem que un functor idempotent L a la categoria dels grups és una *epireflexió* si $\eta_G\colon G \to LG$ és exhaustiu per a tot grup G. És clar, doncs, que si L és una epireflexió i $f\colon G \to H$ és exhaustiu, aleshores Lf també és exhaustiu. En efecte, només cal considerar el diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \eta_G \downarrow & & \downarrow \eta_H \\ LG & \xrightarrow{Lf} & LH, \end{array}$$

on els morfismes de grups η_G i η_H són exhaustius, per definició d'epireflexió. Sigui $f\colon A \to B$ un morfisme de grups. El teorema 2.1 de [78], que recordem tot seguit, caracteritza els functors idempotents de tipus L_f que són epireflexions:

Teorema 2.1.1 *Sigui $f\colon A \to B$ un morfisme de grups. El functor idempotent L_f és una epireflexió si i només si existeix un morfisme de grups exhaustiu g tal que $L_f(G) \cong L_g(G)$ per a tot grup G.* $\square$

O sigui, el teorema ens diu que les epireflexions de tipus L_f són localitzacions respecte de morfismes exhaustius. Per exemple, el functor d'abelianització L és una epireflexió, ja que $L = L_f$ amb f la projecció del grup lliure amb dos generadors $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ sobre el seu abelianitzat $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Més generalment, les projeccions sobre varietats de grups són epireflexions. En efecte, sigui F_∞ el grup lliure en un conjunt infinit numerable de generadors $\{x_i\}_{i \in I}$. Sigui V un conjunt d'elements del grup lliure F_∞. La varietat de grups $\mathcal{V}$ definida pel conjunt de paraules V és la família dels grups G tals que tot morfisme de grups $f\colon F_\infty \to G$ satisfà $f(v) = 1$ per a tot $v \in V$ [70]. Segons la proposició 3.1 de [24], un grup G pertany a la varietat $\mathcal{V}$ si i només si G és ortogonal al morfisme $\varphi\colon F_\infty \twoheadrightarrow F_\infty/VF_\infty$, on VF_∞ s'anomena subgrup verbal de F_∞ i està generat per totes les imatges de les paraules de V per endomorfismes $F_\infty \to F_\infty$. El functor $L = L_\varphi$ és la projecció sobre la varietat $\mathcal{V}$ i és, per tant, una epireflexió. Explícitament, $LG = G/VG$ per a tot grup G, on VG és el subgrup verbal de G, el qual està generat per totes les imatges de paraules de V per morfismes de grups $F_\infty \to G$.

En general, tal i com es demostra a [24], un functor idempotent qualsevol L a la categoria dels grups és una epireflexió si i només si la classe dels grups L-locals és tancada per subgrups. A continuació veurem que tot functor idempotent L que envia morfismes de grups exhaustius a morfismes de grups exhaustius també està caracteritzat per una propietat de clausura de la classe dels grups L-locals. De fet, el nostre objectiu és demostrar el teorema següent:

Teorema A *Sigui L un functor idempotent a la categoria dels grups. Aleshores L envia morfismes exhaustius a morfismes exhaustius si i només si la classe dels grups L-locals compleix la propietat de clausura següent: tot subgrup d'un grup L-local que és alhora quocient d'un grup L-local és L-local.*

La demostració d'aquest resultat es basa en la propietat següent dels functors idempotents a la categoria dels grups:

Teorema 2.1.2 *Sigui L un functor idempotent a la categoria dels grups. Sigui $f\colon G \to H$ un morfisme exhaustiu. Aleshores Lf és un morfisme exhaustiu si i només si la seva imatge és un grup L-local.*

Demostració. Sigui $f\colon G \to H$ un morfisme de grups exhaustiu. Si Lf és exhaustiu, aleshores la imatge de Lf és igual a LH i, per tant, $\operatorname{im} Lf$ és un grup L-local. Suposem ara que $\operatorname{im} Lf$ és un grup L-local. Siguin $\pi\colon LG \twoheadrightarrow \operatorname{im} Lf$ i $\iota\colon \operatorname{im} Lf \rightarrowtail LH$ la projecció i la inclusió canòniques, respectivament. Aleshores, com que

$$(\iota \circ \pi \circ \eta_G)(\ker f) = (Lf \circ \eta_G)(\ker f) = (\eta_H \circ f)(\ker f) = \{1\}$$

i el morfisme ι és injectiu, obtenim que $(\pi \circ \eta_G)(\ker f) = \{1\}$. Aquest fet implica que $\pi \circ \eta_G$ factoritza per la imatge de f, que és H perquè f és exhaustiu, per hipòtesi. És a dir, existeix un morfisme $\alpha\colon H \to \operatorname{im} Lf$ tal que $\alpha \circ f = \pi \circ \eta_G$. Ara bé, estem suposant que $\operatorname{im} Lf$ és L-local. Per tant, hi ha un únic morfisme $\beta\colon LH \to \operatorname{im} Lf$ que satisfà $\beta \circ \eta_H = \alpha$. Anem a veure ara que $\iota \circ \beta = \mathrm{id}_{LH}$; així la inclusió ι serà un morfisme bijectiu, de manera que $\operatorname{im} Lf = LH$ i el morfisme Lf serà, doncs, exhaustiu. En ser f un epimorfisme, a partir de les igualtats

$$\iota \circ \beta \circ \eta_H \circ f = \iota \circ \alpha \circ f = \iota \circ \pi \circ \eta_G = Lf \circ \eta_G = \eta_H \circ f,$$

deduïm que $\iota \circ \beta \circ \eta_H = \eta_H$. Aleshores, com que $\iota \circ \beta$ és un morfisme entre grups L-locals i η_H és una L-equivalència, $\iota \circ \beta = \mathrm{id}_{LH}$. □

Per tant, segons aquest teorema, si L és un functor idempotent tal que la classe dels grups L-locals és tancada per quocients, aleshores L preserva l'exhaustivitat dels morfismes. Observem que un functor d'aquest tipus pot no ser una epireflexió. Anem a demostrar ara el resultat principal d'aquesta secció:

Demostració del teorema A. Sigui $f\colon G \to H$ un morfisme de grups exhaustiu. Si L satisfà la propietat de clausura descrita a l'enunciat del teorema, aleshores la imatge $\operatorname{im} Lf$ del morfisme $Lf\colon LG \to LH$ és un grup L-local, ja que és un quocient de LG i un subgrup de LH. Per tant, segons el teorema 2.1.2, el morfisme de grups Lf és exhaustiu. Suposem ara que L envia morfismes exhaustius a morfismes exhaustius. Sigui S un subgrup d'un grup L-local LH que és alhora quocient d'un grup L-local LG. Siguin $\iota\colon S \rightarrowtail LH$ i $\pi\colon LG \twoheadrightarrow S$ la inclusió i la projecció canòniques, respectivament. Per hipòtesi, el morfisme $L\pi\colon LLG \twoheadrightarrow LS$ és exhaustiu. Per tant, com que $\eta_{LG}\colon LG \to LLG$ és un isomorfisme i es compleix que $\eta_S \circ \pi = L\pi \circ \eta_{LG}$, el morfisme $\eta_S\colon S \to LS$ és exhaustiu. Però $\eta_S\colon S \to LS$ també és injectiu, ja que $\eta_{LH}\colon LH \to LLH$ és un isomorfisme i $\eta_{LH} \circ \iota = L\iota \circ \eta_S$. Per tant, obtenim que $S \cong LS$ és un grup L-local. □

Sigui P un conjunt de primers. La proposició 10 de [75] ens diu que si $f\colon G \to H$ és un morfisme exhaustiu de grups (no necessàriament nilpotents), aleshores $f_P\colon G_P \to H_P$ també és exhaustiu. La demostració que dóna Ribenboim d'aquest fet és un xic laboriosa. Però aquest resultat es pot obtenir de forma immediata aplicant el teorema A, tal i com expliquem seguidament. Sigui S un subgrup d'un grup P-local que és alhora quocient d'un grup P-local. Aleshores S és P-local, és a dir, és un grup únicament P'-divisible, ja que tot quocient d'un grup P-local és P'-divisible i en un subgrup d'un grup P-local les P'-arrels hi són úniques. En conseqüència, segons el teorema A, el functor de P-localització preserva l'exhaustivitat dels morfismes.

Al primer capítol hem vist que les localitzacions en conjunts de primers són functors idempotents de tipus L_f amb f un endomorfisme d'un grup lliure. Per tant, el resultat següent, el qual fou demostrat per primera vegada per Rodríguez a [77], generalitza el cas de les localitzacions en conjunts de primers i s'obté com a conseqüència immediata del teorema A.

Corol·lari 2.1.3 *Sigui* $\varphi\colon F \to K$ *un morfisme amb* F *un grup lliure. Aleshores el functor* $L = L_\varphi$ *envia morfismes exhaustius a morfismes exhaustius.*

Demostració. Sigui S un subgrup d'un grup φ-local LH que és alhora quocient d'un grup φ-local LG. Siguin $\iota\colon S \rightarrowtail LH$ i $\pi\colon LG \twoheadrightarrow S$ la inclusió i la projecció canòniques, respectivament. Veiem que S és un grup φ-local, és a dir, que és ortogonal a φ. Sigui $\alpha\colon F \to S$ un morfisme de grups qualsevol. Aleshores, com que F és lliure i π és un morfisme exhaustiu, existeix $\beta\colon F \to LG$ tal que $\pi \circ \beta = \alpha$. En ser LG φ-local, hi ha un únic morfisme $\tilde{\beta}\colon K \to LG$ tal que $\tilde{\beta} \circ \varphi = \beta$. Llavors definim $\tilde{\alpha} = \pi \circ \tilde{\beta}$, el qual satisfà $\tilde{\alpha} \circ \varphi = \alpha$. A més, aquest morfisme $\tilde{\alpha}$ és l'únic amb aquesta propietat. En efecte, suposem que existeix α' tal que $\alpha' \circ \varphi = \alpha$. Aleshores la igualtat $\iota \circ \tilde{\alpha} \circ \varphi = \iota \circ \alpha' \circ \varphi$ implica que $\iota \circ \tilde{\alpha} = \iota \circ \alpha'$, ja que $\iota \circ \tilde{\alpha}$ i $\iota \circ \alpha'$ són morfismes entre grups φ-locals i φ és una φ-equivalència. Per tant, com que ι és un monomorfisme, $\tilde{\alpha} = \alpha'$. Aplicant el teorema A es conclou que L envia morfismes exhaustius a morfismes exhaustius. □

A partir d'aquest corol·lari obtenim, doncs, que les localitzacions homològiques preserven l'exhaustivitat dels morfismes, ja que aquest tipus de functors són f-localitzacions amb f un endomorfisme d'un grup lliure (vegeu el capítol 1). Aquest fet, però, fou demostrat ja a [11]. En aquest article, Bousfield usa arguments topològics per a provar que un morfisme entre grups HR-locals $f\colon A \to B$, on R és un subanell dels racionals o bé $R = \mathbb{Z}/p$ amb p un nombre primer, és exhaustiu si i només si el morfisme $f_*\colon H_1(A;R) \to H_1(B;R)$ és exhaustiu ([11, corol·lari 2.13]), resultat a partir del qual es dedueix que les localitzacions homològiques envien morfismes de grups exhaustius a morfismes de grups exhaustius.

Un altre exemple de functor idempotent que preserva l'exhaustivitat dels morfismes ens el proporciona la Ext-p-compleció de grups nilpotents. Donat un grup nilpotent N, es defineix la seva Ext-*p-compleció* com l'aplicació natural $l\colon N \to \pi_1(K(N,1)^\wedge_p)$.

Segons la successió exacta (1.2.4) de la secció 1.2.3, hi ha un epimorfisme natural de $\pi_1(K(N,1)^\wedge_p)$ en la p-compleció $N^\wedge_p$, que, en general, no és un isomorfisme. De fet, el nucli d'aquest morfisme és $\lim^1_{\leftarrow}\, \pi_2(\mathbb{Z}/p)_n K(N,1)$, el qual s'anul·la, per exemple, quan N és finit.

En cas que N sigui abelià, el morfisme de Ext-p-compleció coincideix amb l'aplicació l de la successió exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}/p^\infty, N) \to \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}[1/p], N) \to$$

$$\to \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}, N) \xrightarrow{l} \mathrm{Ext}\,(\mathbb{Z}/p^\infty, N) \to \mathrm{Ext}\,(\mathbb{Z}[1/p], N) \to 0,$$

obtinguda aplicant a $\mathbb{Z} \rightarrowtail \mathbb{Z}[1/p] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p^\infty$ el functor $\mathrm{Hom}\,(\ -\ , N)$. Aleshores [15, VI.3.1],

Definició 2.1.4 Un grup nilpotent N és Ext-p-*complet* si l'aplicació de compleció $l\colon N \to \pi_1(K(N,1)^\wedge_p)$ és un isomorfisme. Equivalentment, diem que N és Ext-p-complet si $K(N,1)^\wedge_p \simeq K(N,1)$.

A més, tal i com es demostra a [15, VI.3.2], per a un grup nilpotent N, l'aplicació de compleció l és inicial entre totes les aplicacions de N a grups nilpotents Ext-p-complets. És a dir, la Ext-p-compleció és un functor idempotent a la categoria dels grups nilpotents. Considerem ara la presentació lliure següent del grup $\mathbb{Z}[1/p]$:

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathop{\ast}\limits_{i\in I} \mathbb{Z} & \to & \mathop{\ast}\limits_{i\in I} \mathbb{Z} \\ & \alpha_i & \mapsto & \beta_i\,(\beta_{i+1})^{-p}, \end{array}$$

on α_i són els elements de la base del grup de sortida i β_i són els elements de la base del grup d'arribada. Aleshores, fent servir [15, VI.3.5], es demostra que un grup nilpotent N és Ext-p-complet si i només si és f-local. Dit d'una altra manera, podem pensar L_f com una extensió idempotent de la Ext-p-compleció a la categoria de tots els grups.

Com que f és un morfisme entre grups lliures, a partir del corol·lari 2.1.3 deduïm que el functor idempotent L_f envia morfismes exhaustius a morfismes exhaustius i, per tant, en particular, la Ext-p-compleció de grups nilpotents té aquesta propietat.

2.1.2 Contraexemples

En aquesta secció descrivim dos exemples de functors idempotents a la categoria dels grups que no envien morfismes exhaustius a morfismes exhaustius. Per a cadascun d'aquests functors idempotents, que són de tipus L_f, demostrem l'existència d'un grup que no és f-local, però que és alhora subgrup d'un grup f-local i quocient d'un grup f-local. Aleshores concloem, usant el teorema A, que L_f no preserva l'exhaustivitat dels morfismes de grups.

Exemple 2.1.5 Sigui B el producte cartesià de $\mathbb{Z}/p$ per a tot primer p. Sigui A el subgrup de torsió de B, és a dir, A és la suma directa de $\mathbb{Z}/p$ per a tot primer p. Sigui $f\colon A \to B$ la inclusió de A en B. Aleshores l'aplicació

$$f^*\colon \mathrm{Hom}\,(B,B) \to \mathrm{Hom}\,(A,B)$$

induïda per f és un isomorfisme. En efecte, considerem la successió exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}\,(B/A,B) \to \mathrm{Hom}\,(B,B) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}\,(A,B) \to$$

$$\to \mathrm{Ext}\,(B/A,B) \to \mathrm{Ext}\,(B,B) \to \mathrm{Ext}\,(A,B) \to 0,$$

obtinguda en aplicar a $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B/A$ el functor $\mathrm{Hom}\,(\;-\;,B)$. Aleshores, com que B/A és un grup divisible i B és reduït, $\mathrm{Hom}\,(B/A,B)$ és igual a zero. D'altra banda, com que B/A és isomorf a una suma (no numerable) de còpies de $\mathbb{Q}$, obtenim que $\mathrm{Ext}\,(B/A,B) = 0$. El lema 1.2.1 implica, doncs, que $B = L_f A$.

Observem, a més, que tot grup abelià lliure F és f-local: d'una banda, $\mathrm{Hom}\,(A,F) = 0$ perquè A és un grup de torsió. D'altra banda, si considerem la successió exacta obtinguda en aplicar el functor $\mathrm{Hom}\,(\;-\;,F)$ a la successió exacta $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B/A$, aleshores, tenint en compte que B/A és divisible, s'obté que $\mathrm{Hom}\,(B,F) \cong \mathrm{Hom}\,(B/A,F) = 0$.

Prenem ara una presentació lliure abeliana, $\alpha\colon F \twoheadrightarrow A$, del grup A. Aleshores A és un subgrup del grup f-local B i alhora és un quocient del grup f-local F, però ell mateix no és f-local. El teorema A implica, doncs, que L_f no preserva l'exhaustivitat dels morfismes. En particular, observem que α és exhaustiu, però $L_f\alpha$ no ho és: si $L_f\alpha$ fos exhaustiu, aleshores, segons el diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} F & \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} & A \\ \cong\downarrow & & \downarrow_f \\ L_f F & \to & L_f A = B, \end{array}$$

el morfisme f seria exhaustiu, la qual cosa no és certa.

Exemple 2.1.6 Siguin $A = \Sigma_n$ i $B = \Sigma_{n+1}$ els grups simètrics de grau n i $n+1$, respectivament. Sigui $f\colon A \to B$ la inclusió de A en B. Segons l'exemple 3.4 de [58], si $n > 6$, aleshores l'aplicació

$$f^*\colon \mathrm{Hom}\,(B, B) \to \mathrm{Hom}\,(A, B)$$

induïda per f és un isomorfisme. Per tant, pel lema 1.2.1, $B = L_f A$. Observem, a més, que tot grup lliure és f-local, ja que no hi ha morfismes de grups no trivials d'un grup finit a un grup lliure.

Sigui $\alpha\colon F \twoheadrightarrow A$ una presentació lliure de A. Aleshores A és un subgrup del grup f-local B i alhora és un quocient del grup f-local F, però ell mateix no és f-local. Per tant, el teorema A implica que L_f no preserva l'exhaustivitat dels morfismes. En particular, tal i com passava en l'exemple anterior, el morfisme α és exhaustiu, però $L_f\alpha$ no ho és.

Volem concloure aquesta secció observant que a partir de cadascun dels exemples descrits obtenim una subcategoria plena de la categoria dels grups on els conceptes d'epimorfisme i de morfisme exhaustiu no coincideixen: la subcategoria plena dels grups f-locals. De forma general,

Teorema 2.1.7 *Sigui L un functor idempotent a la categoria dels grups que no envia morfismes exhaustius a morfismes exhaustius. Aleshores a la subcategoria plena dels grups L-locals no tot epimorfisme és exhaustiu.*

Demostració. Com que L no preserva l'exhaustivitat dels morfismes, el teorema A implica que existeix un grup S que no és L-local, però tal que $\iota\colon S \rightarrowtail LH$ per a un grup H i $\pi\colon LG \twoheadrightarrow S$ per a un grup G. A partir del diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccc} LG & \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} & S & \overset{\iota}{\rightarrowtail} & LH \\ \| & & \downarrow\eta_S & & \| \\ LG & \overset{L\pi}{\to} & LS & \overset{L\iota}{\to} & LH, \end{array}$$

s'obté que el morfisme η_S és injectiu. Per tant, com que S no és L-local, la composició

$$LG \twoheadrightarrow S \rightarrowtail LS$$

és un epimorfisme a $\mathcal{D}$ que no és exhaustiu. $\square$

2.2 Grups nilpotents

És ben sabut que tot functor idempotent a la categoria dels grups envia grups abelians a grups abelians [20]. També és ben sabut que les localitzacions en nombres primers i les localitzacions homològiques envien grups nilpotents a grups nilpotents (de la mateixa classe de nilpotència o inferior). Però la pregunta següent és un problema obert:

Pregunta Sigui N un grup nilpotent de classe c. És cert que LN és un grup nilpotent de classe menor o igual que c per a tot functor idempotent L a la categoria dels grups?

La preservació de la nilpotència per part de functors idempotents a la categoria dels grups és un problema difícil que ha estat considerat per diversos autors [20], [25], [58]. Fins ara s'ha aconseguit demostrar que els functors idempotents preserven la nilpotència fins a classe 2:

Teorema 2.2.1 *Sigui L un functor idempotent qualsevol a la categoria dels grups. Si N és un grup nilpotent de classe com a molt 2, aleshores LN també és un grup nilpotent de classe com a molt 2.* $\square$

Aquest fet fou descobert per Dror Farjoun i Dwyer l'any 1997, però no el publicaren. Se'n poden trobar dues demostracions diferents als articles de Casacuberta [20] i de Libman [58]. En aquest darrer article es demostra, a més, que si N és un grup nilpotent qualsevol i LN és nilpotent, aleshores la classe de nilpotència de LN és menor o igual que la classe de nilpotència de N [58, teorema 3.5]. Ara bé, es desconeix si LN ha de ser necessàriament nilpotent per a tot functor idempotent L.

És evident que si L és una epireflexió, aleshores la resposta a la pregunta és afirmativa, ja que tot quocient d'un grup nilpotent és nilpotent. També les f-localitzacions amb f un morfisme entre grups lliures preserven la nilpotència dels grups [77, corol·lari 4.2.2]. La demostració d'aquest resultat només usa les dues propietats següents que tenen les localitzacions respecte de morfismes entre grups lliures: (1) preserven l'exhaustivitat dels morfismes; (2) si tenim una successió exacta central de grups on dos dels grups són f-locals, aleshores el tercer també ho és. Per tant, tot functor idempotent que preservi l'exhaustivitat dels morfismes de grups i que satisfaci la propietat (2) també preservarà la nilpotència dels grups.

2.2.1 Localitzacions de grups nilpotents finits

Els exemples descrits a [44] i a [59] demostren que existeixen functors idempotents a la categoria dels grups que transformen grups finits en grups infinits, i de cardinalitat tan gran com es vulgui (sota certs axiomes de teoria de conjunts). Ara bé, Libman demostra a [57] que si f és un morfisme entre grups lliures, aleshores el morfisme de f-localització $\eta_N\colon N \to L_f N$ és exhaustiu per a tot grup nilpotent N amb exponent finit. En conseqüència, les localitzacions respecte de morfismes entre grups lliures envien grups nilpotents finits a grups nilpotents finits.

Com que tot grup nilpotent finit N és isomorf al producte directe dels seus p-subgrups de Sylow (vegeu, per exemple, [79, 6.4.14]), i com que els functors idempotents a la categoria dels grups preserven productes [20, lema 3.5], tenim:

$$LN \cong \prod_{i=1}^{n} LS_{p_i}(N), \tag{2.2.1}$$

per a tot grup nilpotent finit N, on $S_{p_i}(N)$ denota el p_i-subgrup de Sylow de N. Aquest fet ens diu, doncs, que l'estudi de les localitzacions dels grups nilpotents finits es redueix a l'estudi de les localitzacions dels p-grups finits.

En aquesta secció, malgrat que no arribem a demostrar que els functors idempotents a la categoria dels grups transformen p-grups finits en p-grups finits, obtenim diversos resultats parcials en aquesta direcció.

Localitzacions respecte de morfismes entre grups abelians

Les localitzacions dels grups abelians finits són ben conegudes. Com que tot grup d'aquest tipus és una suma finita de còpies de grups cíclics finits, el lema següent, demostrat per Rodríguez a [77], determina qualsevulla localització d'un grup abelià finit:

Lema 2.2.2 *Sigui L un functor idempotent qualsevol a la categoria dels grups i sigui p un nombre primer. Aleshores $L\mathbb{Z}/p^r \cong \mathbb{Z}/p^i$ per a algun $i \leq r$. En particular, si $L\mathbb{Z}/p^r \cong \mathbb{Z}/p^i$ per a cert $r > i \geq 1$, llavors*

$$L\mathbb{Z}/p^s \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/p^i & \text{si} \quad s \geq i \\ \mathbb{Z}/p^s & \text{si} \quad s \leq i. \end{cases} \qquad \square$$

Segons aquest lema, donats un functor idempotent L a la categoria dels grups i un nombre primer p, té sentit parlar del màxim enter positiu d tal que el grup $\mathbb{Z}/p^d$ és L-local. Aquest nombre s'anomena *dimensió de p-transició* de L. Aquest concepte fou definit a la categoria dels espais topològics a [13] i usat, per exemple, a [25].

Si $\mathbb{Z}/p^r$ és un grup L-local per a tot enter r (això passa, per exemple, si L és el functor de p-localització), aleshores la dimensió de p-transició de L és igual a infinit. Si $L\mathbb{Z}/p = 0$, aleshores la dimensió de p-transició de L és igual a zero i la localització de tot p-grup finit és trivial.

Lema 2.2.3 *Sigui L un functor idempotent qualsevol a la categoria dels grups amb dimensió de p-transició igual a d, on p és un nombre primer.*

(i) *Si G és un grup L-local, aleshores G no conté cap element d'ordre p^k amb $k > d$.*

(ii) *Tot grup abelià amb exponent p^k, on $k \leq d$, és L-local.*

Demostració. Sigui G un grup L-local. Suposem que G conté un element d'ordre p^k amb $k > d$. Siguin S el subgrup cíclic de G generat per aquest element i $\iota\colon S \hookrightarrow G$ la inclusió de S a G. En ser $\eta_G\colon G \to LG$ un isomorfisme, la igualtat $\eta_G \circ \iota = Li \circ \eta_S$ implica que $\eta_S\colon S \to LS$ és un morfisme de grups injectiu, la qual cosa contradiu el lema 2.2.2. Sigui A un grup abelià amb exponent finit p^k, on $k \leq d$. Aleshores A és una suma directa de grups cíclics d'ordres potències de primers [43, teorema 17.2]. Però com que l'exponent de A és p^k amb $k \leq d$, aquests grups cíclics són de la forma $\mathbb{Z}/p^s$ amb $s \leq k \leq d$ i, en conseqüència, són grups L-locals segons el lema 2.2.2. Per tant, el grup A és L-local perquè s'inclou en el producte directe d'aquests grups L-locals, que és L-local d'acord amb la proposició 1.1.1. □

Sigui L un functor idempotent amb dimensió de p-transició igual a d, on p és un nombre primer. Sigui G un p-grup finit. Denotem per G^{p^d} el subgrup de G generat pels elements de la forma g^{p^d}, per a tot $g \in G$. Sigui $\eta_G\colon G \to LG$ el morfisme de L-localització. El primer apartat del lema 2.2.3 implica que G^{p^d} està contingut en el nucli de η_G i, per tant, que η_G factoritza per G/G^{p^d}; és a dir, existeix un morfisme

$$\lambda\colon G/G^{p^d} \to LG$$

tal que $\lambda \circ \eta = \eta_G$ amb $\eta\colon G \twoheadrightarrow G/G^{p^d}$. Aleshores, per a tot grup K, la composició

$$\mathrm{Hom}\,(LG, K) \xrightarrow{\lambda^*} \mathrm{Hom}\,(G/G^{p^d}, K) \xrightarrow{\eta^*} \mathrm{Hom}\,(G, K) \tag{2.2.2}$$

és igual a l'aplicació $\eta_G^*\colon \mathrm{Hom}\,(LG, K) \to \mathrm{Hom}\,(G, K)$.

Proposició 2.2.4 *Sigui L un functor idempotent amb dimensió de p-transició igual a d, on p és un nombre primer. Si G és un p-grup finit, aleshores el morfisme $\eta\colon G \to G/G^{p^d}$ és una L-equivalència, on G^{p^d} és el subgrup de G generat pels elements de la forma g^{p^d}, per a tot $g \in G$.*

Demostració. Sigui K un grup L-local. Per definició, $\eta\colon G \to G/G^{p^d}$ és una L-equivalència si i només si l'aplicació

$$\eta^*\colon \mathrm{Hom}\,(G/G^{p^d}, K) \to \mathrm{Hom}\,(G, K)$$

induïda per η és bijectiva. Veiem, doncs, que η^* és bijectiva. En ser η un epimorfisme, l'aplicació η^* és injectiva. Però η^* també és exhaustiva, ja que, per definició de L-equivalència, $\eta_G^*\colon \mathrm{Hom}\,(LG, K) \to \mathrm{Hom}\,(G, K)$ és bijectiva i, per (2.2.2), $\eta^* \circ \lambda^* = \eta_G^*$. □

Ara bé, el grup G/G^{p^d} no és L-local en general. Per exemple, si L és el functor d'abelianització, aleshores un grup és L-local si i només si és abelià. Per tant, el grup G/G^{p^d} és L-local si i només si és abelià, la qual cosa no és pas sempre certa. En la proposició 2.2.7 demostrem que, sota certes hipòtesis addicionals, el grup G/G^{p^d} és L-local.

El resultat de la proposició 2.2.4 implica que el morfisme $\lambda\colon G/G^{p^d} \to LG$ és una L-equivalència, per a tot p-grup finit G i tot functor idempotent L amb dimensió de p-transició igual a d. Segons expliquem a la secció 3.1, la seva abelianització $\lambda_{\mathrm{ab}}\colon (G/G^{p^d})_{\mathrm{ab}} \to (LG)_{\mathrm{ab}}$ també és una L-equivalència. A més, en ser G un p-grup finit, el quocient $(G/G^{p^d})_{\mathrm{ab}}$ és un grup abelià amb exponent p^k, on $k \leq d$, i així, pel lema 2.2.3, és L-local.

Si G és un p-grup finit amb $(LG)_{\mathrm{ab}}$ finitament generat, aleshores, com que λ_{ab} és una L-equivalència i $(G/G^{p^d})_{\mathrm{ab}}$ és L-local, obtenim que $(LG)_{\mathrm{ab}}$ és un grup L-local. Per tant, la L-equivalència $\lambda_{\mathrm{ab}}\colon (G/G^{p^d})_{\mathrm{ab}} \to (LG)_{\mathrm{ab}}$ és un isomorfisme. És més,

Corol·lari 2.2.5 *Sigui L un functor idempotent amb dimensió de p-transició igual a d, on p és un nombre primer. Sigui G un p-grup finit. Si LG és nilpotent i $(LG)_{\mathrm{ab}}$ és finitament generat, aleshores $\eta_G\colon G \to LG$ és un morfisme de grups exhaustiu.*

DEMOSTRACIÓ. Un morfisme entre grups nilpotents és exhaustiu si i només la seva abelianització és un morfisme exhaustiu [50, VI.9]. Recordem que $\eta_G\colon G \to LG$ és igual a la composició

$$G \xrightarrow{\eta} G/G^{p^d} \xrightarrow{\lambda} LG.$$

Per tant, $(\eta_G)_{\mathrm{ab}} = \lambda_{\mathrm{ab}} \circ \eta_{\mathrm{ab}}$, on λ_{ab} és un isomorfisme (perquè $(LG)_{\mathrm{ab}}$ és finitament generat) i η_{ab} és exhaustiu. Així doncs, l'abelianització de η_G és exhaustiva i, en conseqüència, η_G és un morfisme exhaustiu. $\square$

Aleshores, tenint en compte l'expressió d'un grup nilpotent com a producte directe dels seus subgrups de Sylow (2.2.1), s'obté el mateix resultat per als grups nilpotents finits:

Corol·lari 2.2.6 *Sigui L un functor idempotent a la categoria dels grups. Sigui N un grup nilpotent finit. Si LN és un grup nilpotent finit amb $(LN)_{\mathrm{ab}}$ finitament generat, aleshores $\eta_N\colon N \to LN$ és un morfisme de grups exhaustiu.* $\square$

Suposem ara que $L = L_f$ amb $f\colon A \to B$ un morfisme on A és abelià i B és un grup qualsevol. Sigui d la dimensió de p-transició de L, on p és un nombre primer. Aleshores l'aplicació

$$f^*\colon \mathrm{Hom}\,(B, G) \to \mathrm{Hom}\,(A, G)$$

induïda per f és exhaustiva per a tot grup G amb exponent p^k, on $k \leq d$, tal i com demostrem tot seguit. Sigui $\alpha\colon A \to G$. La imatge de α és un grup abelià amb exponent p^k, on $k \leq d$. Per tant, la segona part del lema 2.2.3 implica que $\mathrm{im}\,\alpha$ és un grup L-local; és a dir, existeix $\tilde{\pi}\colon B \to \mathrm{im}\,\alpha$ tal que $\tilde{\pi} \circ f = \pi$ amb $\pi\colon A \twoheadrightarrow \mathrm{im}\,\alpha$. Definim $\beta\colon B \to G$ com la composició $\iota \circ \tilde{\pi}$, on $\iota\colon \mathrm{im}\,\alpha \rightarrowtail G$, i es compleix que $f^*(\beta) = \beta \circ f = \alpha$ de manera que f^* és exhaustiva.

Si considerem el grup G/G^{p^d} i suposem que el grup B també és abelià, aleshores l'aplicació f^* és bijectiva:

Proposició 2.2.7 *Sigui $L = L_f$ amb $f\colon A \to B$ un morfisme entre grups abelians i sigui d la dimensió de p-transició de L, on p és un nombre primer. Si G és un p-grup finit, aleshores el grup G/G^{p^d} és L-local, on G^{p^d} és el subgrup de G generat pels elements de la forma g^{p^d} per a tot $g \in G$.*

DEMOSTRACIÓ. Segons hem observat, com que G/G^{p^d} és un grup amb exponent p^d, l'aplicació $f^*\colon \mathrm{Hom}\,(B, G/G^{p^d}) \to \mathrm{Hom}\,(A, G/G^{p^d})$ induïda per f és exhaustiva. Per tant, per concloure que G/G^{p^d} és un grup L-local, només cal veure que f^* és injectiva. Siguin $\alpha \in \mathrm{Hom}\,(A, G/G^{p^d})$ i $f^*(\beta) = \alpha$ amb β definit com abans. Suposem que existeix $\beta' \in \mathrm{Hom}\,(B, G/G^{p^d})$ tal que $f^*(\beta') = \alpha$. Si $\beta' = j \circ q$ amb $j\colon \mathrm{im}\,\beta' \rightarrowtail G/G^{p^d}$ i $q\colon B \twoheadrightarrow \mathrm{im}\,\beta'$, aleshores

$$j \circ q \circ f = \beta' \circ f = \alpha = \beta \circ f = \iota \circ \widetilde{\pi} \circ f = j \circ \varepsilon \circ \widetilde{\pi} \circ f,$$

on $\varepsilon\colon \mathrm{im}\,\alpha \rightarrowtail \mathrm{im}\,\beta'$ tal que $j \circ \varepsilon = \iota$. Com que j és injectiva, $q \circ f = \varepsilon \circ \widetilde{\pi} \circ f$. Llavors, en ser q i $\varepsilon \circ \widetilde{\pi}$ morfismes entre grups L-locals (observem que $\mathrm{im}\,\beta$ és L-local perquè és un subgrup de G/G^{p^d} i B és abelià) i f una L-equivalència, obtenim que $q = \varepsilon \circ \widetilde{\pi}$, de manera que $\beta' = \beta$ i així f^* és injectiva. □

Per tant, ajuntant els resultats de les proposicions 2.2.4 i 2.2.7 hem demostrat el següent:

Teorema B *Sigui $L = L_f$ amb $f\colon A \to B$ un morfisme entre grups abelians i sigui d la dimensió de p-transició de L, on p és un nombre primer. Si G és un p-grup finit, aleshores $\eta_G\colon G \to LG$ és exhaustiu i $LG \cong G/G^{p^d}$, on G^{p^d} és el subgrup de G generat pels elements de la forma g^{p^d} per a tot $g \in G$.* □

Tenint en compte la descomposició d'un grup nilpotent finit com a producte directe dels seus subgrups de Sylow (2.2.1), com a conseqüència immediata del teorema B obtenim el resultat següent:

Corol·lari 2.2.8 *Sigui $L = L_f$ amb $f\colon A \to B$ un morfisme entre grups abelians. Siguin $p_1, \ldots, p_n$ el conjunt de primers que divideixen l'ordre de N i sigui d_i la dimensió de p_i-transició de L, $1 \le i \le n$. Si N és un grup nilpotent finit, aleshores $\eta_N\colon N \to LN$ és exhaustiu i*

$$LN \cong \prod_{i=1}^{n} S_{p_i}(N)/S_{p_i}(N)^{p^{d_i}},$$

on $S_{p_i}(N)$ denota el p_i-subgrup de Sylow de N. □

Volem acabar aquesta secció observant que la primera part del teorema B i, en conseqüència, del corol·lari 2.2.8, continua essent vàlida per a grups nilpotents amb exponent finit (no necessàriament finits) i per a un morfisme $f\colon A \to B$ amb A un grup nilpotent de classe com a molt 2 i B un grup qualsevol, tal i com demostrem a continuació. La condició que A i B siguin grups abelians, tot i que és més restrictiva del que cal en realitat, permet descriure de forma explícita la localització de qualsevol grup nilpotent finit.

Proposició 2.2.9 *Sigui L un functor idempotent qualsevol a la categoria dels grups. Si N és un grup nilpotent de classe com a molt 2 i amb exponent finit n, aleshores el morfisme de localització $\eta_N\colon N \to LN$ és exhaustiu. Si, a més, N està inclòs en un grup L-local, aleshores N és L-local.*

Demostració. Suposem que el morfisme $\eta_N\colon N \to LN$ no és exhaustiu. La imatge de η_N és un grup nilpotent de classe com a molt 2 i amb exponent finit n. A més, com que estem suposant que η_N no és exhaustiu, $H = \operatorname{im} \eta_N$ és un subgrup propi de LN. Pel teorema 2.2.1, el grup LN és nilpotent de classe menor o igual que 2, la qual cosa implica, segons el teorema 10.3.3 de [46], que o bé H és normal en LN o bé $H \subset N_{LN}(H) \subset LN$, on $N_{LN}(H)$ denota el normalitzador de H en LN i és un subgrup normal propi de LN que conté a H. El grup LN té exponent finit n [58]. Aleshores, en el primer cas, el quocient LN/H és nilpotent amb exponent finit n. Si p és un primer que divideix n, llavors LN/H es projecta sobre $\mathbb{Z}/p$, via la seva abelianització. Per tant, existeix un subgrup normal M d'índex p a LN que conté a H. De la mateixa manera es demostra que en el segon cas també existeix un tal M. Sigui α la composició d'aplicacions

$$H \overset{\eta_H}{\rightarrowtail} LH \cong LN \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} LN/M \cong \mathbb{Z}/p \overset{\iota}{\rightarrowtail} H \overset{\eta_H}{\rightarrowtail} LH,$$

on $LH \cong LN$ perquè la inclusió $H = \operatorname{im} \eta_N \rightarrowtail LN$ és una L-equivalència. Aleshores $\alpha = \beta \circ \eta_H$, on $\beta = \eta_H \circ \iota \circ \pi$. El morfisme α és trivial, ja que M conté a H. Però, en canvi, el morfisme β no és trivial, la qual cosa contradiu el fet que LN és un grup L-local. Per tant, η_N és un morfisme exhaustiu. Suposem ara que N està contingut en un grup L-local K i sigui $\iota\colon N \hookrightarrow K$ la inclusió. Aleshores η_N és injectiu, ja que $\eta_K\colon K \to LK$ és un isomorfisme i $\eta_K \circ \iota = L\iota \circ \eta_N$. Per tant, η_N és un isomorfisme. $\square$

Corol·lari 2.2.10 *Sigui $L = L_f$ amb $f\colon A \to B$ un morfisme de grups tal que A és nilpotent de classe com a molt 2. Si N és un grup nilpotent amb exponent finit, aleshores $\eta_N\colon N \to LN$ és exhaustiu. En particular, la L-localització de tot grup nilpotent finit és un grup nilpotent finit.*

Demostració. Com que la inclusió $\operatorname{im}\eta_N \rightarrowtail LN$ és una L-equivalència, el morfisme $\eta_N\colon N \to LN$ és exhaustiu si i només si la seva imatge és un grup L-local. Sigui $\alpha\colon A \to \operatorname{im}\eta_N$ un morfisme qualsevol. Aleshores la imatge de α és un grup nilpotent de classe com a molt 2 i amb exponent finit, que, a més, és un subgrup del grup L-local LN. En conseqüència, la proposició 2.2.9 implica que $\operatorname{im}\alpha$ és L-local. Aleshores definim $\beta\colon B \to \operatorname{im}\eta_N$ com la composició

$$B \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \operatorname{im}\alpha \rightarrowtail \operatorname{im}\eta_N,$$

on $\tilde{\alpha}$ és l'únic morfisme tal que $\tilde{\alpha}\circ f = \pi$ amb π la projecció de A sobre $\operatorname{im}\alpha$. La unicitat d'existència de β es dedueix del fet que $\operatorname{im}\eta_N$ està inclosa en el grup L-local LN. $\square$

Capítol 3

Unions puntuals de circumferències

Sigui $W = \vee_{i \in I} S^1$ una unió puntual de circumferències sobre un conjunt d'índexs I qualsevol. Aleshores W és un CW-complex de dimensió 1 i és un espai d'Eilenberg–Mac Lane $K(F,1)$ amb F un grup lliure sobre el conjunt I. Aquestes característiques de W fan que el comportament de les seves localitzacions sigui peculiar. Se sap que la compleció $W_p^\wedge$ en un nombre primer p qualsevol és un espai de tipus $K(G,1)$ amb G la p-compleció del grup lliure F [15, IV.5.3]. També se sap que la localització W_P en un conjunt P qualsevol de primers és un espai de tipus $K(G,1)$, on G és la P-localització de F. De l'efecte d'altres localitzacions sobre W se sap molt poc. En particular, no se sap si la localització homològica entera de W és un $K(G,1)$ o no ho és.

En aquest capítol plantegem un estudi molt general de LW, on L és un functor idempotent qualsevol a la categoria homotòpica dels espais. Sorprenentment, s'obtenen resultats rellevants sense haver de particularitzar el functor L. En el cas concret on L és localització en conjunts de primers, alguns d'aquests resultats generals donen una llum nova sobre l'estudi (antic i complicat [7]) de les immersions de grups lliures en grups amb arrels úniques. En aquest capítol també fem un petit pas endavant en el camí per a decidir si existeix algun functor idempotent L tal que LW no sigui un espai de tipus $K(G,1)$ quan W és una unió puntual de circumferències. Els resultats que demostrem es recullen a [5].

La primera part del capítol la dediquem a l'estudi de les localitzacions dels grups lliures. Les propietats que demostrem sobre LF, on F és un grup lliure, estenen resultats obtinguts per Hanna Neumann en estudiar projeccions sobre varietats de grups [69], [70]. A més, són la base per als resultats que demostrem sobre localitzacions d'unions puntuals de circumferències.

En la segona part del capítol descrivim propietats útils dels espais de la forma LW per mitjà de dos tipus d'estructures algebraiques poc freqüents: els anells rígids i els quasi-anells. Tal i com es demostra a [25], si $W = S^1$, aleshores l'espai LW és sempre un $K(A, 1)$ on $A = \pi_1(LW)$ és, de fet, un anell rígid; és a dir, un anell amb unitat 1 tal que l'aplicació $\mathrm{Hom}\,(A, A) \to A$ que envia cada endomorfisme φ de A a $\varphi(1)$ és bijectiva. D'altra banda, si W és una unió puntual arbitrària de circumferències, aleshores nosaltres demostrem que el conjunt de classes d'homotopia d'aplicacions $[LW, LW]$ és un quasi-anell per l'esquerra; és a dir, un conjunt amb dues operacions binàries, una multiplicació (no necessàriament commutativa) i una composició, la qual és distributiva per l'esquerra sobre la multiplicació.

A part de l'estructura de quasi-anell de $[LW, LW]$ demostrem altres propietats interessants de l'espai LW. D'entre els resultats obtinguts, destaquem la descripció de l'abelianitzat del grup fonamental $\pi_1(LW)$, la qual generalitza resultats coneguts sobre localitzacions homològiques d'unions puntuals de circumferències.

3.1 Abelianització de localitzacions a la categoria dels grups

Sigui L un functor idempotent a la categoria dels grups. Sigui $(\mathcal{D}, \mathcal{S})$ el parell ortogonal associat a L, és a dir, $\mathcal{D}$ és la classe dels grups L-locals i $\mathcal{S}$ és la classe de les L-equivalències. Com que la L-localització d'un grup abelià és un grup abelià (vegeu la secció 2.2), el functor L es pot restringir a la categoria dels grups abelians. Fent un abús de llenguatge, denotem també per L aquesta restricció. Aleshores el parell ortogonal $(\mathcal{D}', \mathcal{S}')$ associat a la restricció de L a la categoria dels grups abelians s'obté com segueix:

- $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cap \{\text{grups abelians}\}$ i
- $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cap \{\text{morfismes de grups abelians}\}$.

En efecte, si $A \in \mathcal{D}'$, aleshores $A \cong LB$ amb B abelià. Per tant, A és un grup abelià L-local. Recíprocament, suposem que $A \in \mathcal{D} \cap \{\text{grups abelians}\}$. Aleshores $A \cong LA$ i A és un grup abelià. Així doncs, $A \in \mathcal{D}'$. Ara sigui $f\colon A \to B$ un morfisme de $\mathcal{S}'$, és a dir, f és un morfisme de grups abelians que és ortogonal a tots els grups abelians L-locals. Suposem que LG és un grup L-local no abelià i sigui $\alpha\colon A \to LG$ un morfisme de grups qualsevol. Aleshores existeix un únic morfisme $\beta\colon B \to LG$ tal que $\beta \circ f = \alpha$, ja que $\eta_A\colon A \to LA$ i $\eta_B\colon B \to LB$ són morfismes de $\mathcal{S}$. Concretament, β és la composició $\gamma \circ (Lf)^{-1} \circ \eta_B$, on $\gamma\colon LA \to LG$ és l'únic morfisme tal que $\gamma \circ \eta_A = \alpha$. Si $f\colon A \to B$ és un morfisme de $\mathcal{S} \cap \{\text{morfismes de grups abelians}\}$, aleshores f és ortogonal a tots els grups L-locals; en particular, f és ortogonal a tots els grups abelians L-locals. Per tant, $f \in \mathcal{S}'$ perquè, per hipòtesi, els grups A i B són abelians.

La demostració d'algunes propietats dels functors idempotents a la categoria dels grups continuen essent vàlides per als functors idempotents definits a la categoria dels grups abelians. Així, per exemple,

(P1) si L és un functor idempotent a la categoria dels grups, aleshores la seva restricció a la categoria dels grups abelians és una epireflexió si i només si la classe $\mathcal{D}'$ dels grups abelians L-locals és tancada per subgrups (vegeu la secció 2.1.1).

(P2) Si L és un functor idempotent a la categoria dels grups i el morfisme $f\colon G \to H$ és una L-equivalència, aleshores $f_{\text{ab}}\colon G_{\text{ab}} \to H_{\text{ab}}$ també és una L-equivalència.

En efecte, com que tot morfisme de H a un grup abelià factoritza per H_{ab}, $f_{\text{ab}}\colon G_{\text{ab}} \to H_{\text{ab}}$ és ortogonal a tot grup abelià L-local. Ara suposem que K és un grup L-local (no necessàriament abelià) i sigui $\alpha\colon G_{\text{ab}} \to K$ un morfisme de grups qualsevol. Aleshores existeix un únic morfisme $\beta\colon L(G_{\text{ab}}) \to K$ tal que $\beta \circ \eta_{G_{\text{ab}}} = \alpha$, on $\eta_{G_{\text{ab}}}\colon G_{\text{ab}} \to L(G_{\text{ab}})$. Com que f_{ab} és una L-equivalència de grups abelians, el morfisme $Lf_{\text{ab}}\colon L(G_{\text{ab}}) \to L(H_{\text{ab}})$ és un isomorfisme. En conseqüència, podem definir $\widetilde{\alpha} = \beta \circ (Lf_{\text{ab}})^{-1} \circ \eta_{H_{\text{ab}}}$ i es compleix que $\widetilde{\alpha} \circ f_{\text{ab}} = \alpha$. La unicitat de $\widetilde{\alpha}$ es dedueix de la unicitat de β.

(P3) Si L és un functor idempotent a la categoria dels grups abelians i D és un grup abelià L-local, aleshores $\operatorname{Hom}(A, D)$ és L-local per a tot grup abelià A. Si $f\colon A \to B$ és una L-equivalència de grups abelians i M és un grup abelià, aleshores $f \otimes M\colon A \otimes M \to B \otimes M$ és també una L-equivalència. (Ambdós resultats es dedueixen a partir de les definicions.)

Sigui L un functor idempotent a la categoria dels grups. Donat un grup G, sigui $a_G\colon G \to G_{\mathrm{ab}}$ el morfisme d'abelianització i sigui $\eta_G\colon G \to LG$ la L-localització de G. Aleshores, com que $L(G_{\mathrm{ab}})$ és un grup abelià, existeix un únic morfisme

$$h_G\colon (LG)_{\mathrm{ab}} \to L(G_{\mathrm{ab}})$$

tal que $h_G \circ a_{LG} = La_G$, on $a_{LG}\colon LG \to (LG)_{\mathrm{ab}}$ i $La_G\colon LG \to L(G_{\mathrm{ab}})$. De fet, $h\colon (L\ )_{\mathrm{ab}} \to L(\ )_{\mathrm{ab}}$ és una transformació natural de functors. En general, però, donat un grup G, el morfisme h_G no és un isomorfisme, ja que el functor d'abelianització normalment no commuta amb les localitzacions. Ara bé,

Teorema 3.1.1 *Sigui L un functor idempotent a la categoria dels grups. El morfisme de grups $h_G\colon (LG)_{\mathrm{ab}} \to L(G_{\mathrm{ab}})$ és una L-equivalència per a tot grup G.*

DEMOSTRACIÓ. Anem a demostrar aquest fet donant una descripció alternativa de h_G. Com que $\eta_G\colon G \to LG$ és una L-equivalència, per la propietat (P2), el morfisme de grups $(\eta_G)_{\mathrm{ab}}\colon G_{\mathrm{ab}} \to (LG)_{\mathrm{ab}}$ és també una L-equivalència. Per tant, existeix un únic morfisme $\alpha\colon (LG)_{\mathrm{ab}} \to L(G_{\mathrm{ab}})$ que satisfà $\alpha \circ (\eta_G)_{\mathrm{ab}} = \eta_{G_{\mathrm{ab}}}$, la qual cosa implica que α també és una L-equivalència. A més, es compleix que $\alpha \circ a_{LG} = La_G$ perquè

$$\alpha \circ a_{LG} \circ \eta_G = \alpha \circ (\eta_G)_{\mathrm{ab}} \circ a_G = \eta_{G_{\mathrm{ab}}} \circ a_G = La_G \circ \eta_G,$$

η_G és una L-equivalència, i $\alpha \circ a_{LG}$ i La_G són morfismes entre grups L-locals. Finalment, degut a la unicitat d'existència, $h_G = \alpha$ i, per tant, el morfisme h_G és una L-equivalència. $\square$

En conseqüència, el morfisme de grups h_G és un isomorfisme si i només si $(LG)_{\mathrm{ab}}$ és un grup L-local. Això passa, per exemple, si L és un functor idempotent tal que la classe dels grups L-locals és tancada per quocients. Aquest és el cas de les projeccions sobre varietats de grups, les quals hem explicat al capítol anterior. Com que aquest darrer tipus de functors idempotents són epireflexions, és natural preguntar-se si donada una epireflexió L, el morfisme h_G és un isomorfisme per a tot grup G. L'exemple que descrivim a continuació demostra que això no és cert:

Exemple 3.1.2 Recordem que un radical és un subfunctor R de la identitat tal que RG és normal en G i $R(G/RG) = 1$ per a tot grup G. Tal i com es demostra a [24], hi ha una correspondència bijectiva entre radicals i epireflexions: si L és un functor idempotent i RG és el nucli del morfisme de L-localització $\eta_G\colon G \to LG$, aleshores R és un radical. D'altra banda, si R és un radical, aleshores $LG = G/RG$ és una epireflexió. Sigui RG el subgrup normal més petit de G tal que $LG = G/RG$ és lliure de torsió. Aleshores R és un radical i, per tant, $\eta_G\colon G \to LG$ és una localització. Observem, a més, que la classe dels grups L-locals (és a dir, els grups lliures de torsió) no és tancada per quocients. Veiem que h_G no és un isomorfisme per a tot grup G. Prenem, per exemple, $G = \langle x, y \mid [x, y] = y^n\rangle$, on n és un enter més gran que 1. Aleshores G és lliure de torsió i, per tant, és L-local, però $G_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ té elements de torsió. O sigui que

$$(LG)_{\mathrm{ab}} \cong G_{\mathrm{ab}} \not\cong \mathbb{Z} \cong L(G_{\mathrm{ab}}).$$

De fet, el morfisme $h_G\colon (LG)_{\mathrm{ab}} \to L(G_{\mathrm{ab}})$ no té perquè ser exhaustiu. La igualtat $h_G \circ a_{LG} = La_G$ juntament amb el fet que a_{LG} és un morfisme de grups exhaustiu implica que

$$\operatorname{im} h_G = \operatorname{im} La_G.$$

És a dir, h_G és un morfisme exhaustiu si i només si La_G ho és. Per tant,

Proposició 3.1.3 *Si L és un functor idempotent a la categoria dels grups que preserva l'exhaustivitat dels morfismes, aleshores el morfisme h_G és exhaustiu per a tot grup G.* $\square$

Així doncs, el teorema A del capítol anterior implica que no sempre el morfisme h_G és exhaustiu. Recordem que a la secció 2.1.2 hem descrit exemples de functors idempotents a la categoria dels grups que no preserven l'exhaustivitat dels morfismes.

Un altre fet a destacar sobre la L-equivalència $h_G\colon (LG)_{\mathrm{ab}} \to L(G_{\mathrm{ab}})$ és que encara que sigui un morfisme exhaustiu per a tot grup G, aquest fet no implica que el morfisme escindeixi, tal i com demostra l'exemple següent:

Exemple 3.1.4 Sigui $G = \langle x, y \mid [x, y] = y^4\rangle$ com en l'exemple 3.1.2. Siguin $\varphi\colon \mathbb{Z}/4 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2$ i $L = L_\varphi$ una epireflexió (vegeu el teorema 2.1.1). Aleshores

$$(LG)_{\mathrm{ab}} \cong G_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4 \quad \text{i} \quad L(G_{\mathrm{ab}}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Per tant, $h_G\colon \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/4 \to \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2$ és un morfisme exhaustiu que no escindeix. O sigui que h_G no té perquè escindir, fins i tot quan G és finitament generat i L és una epireflexió.

Donat un functor idempotent L a la categoria dels grups, un grup G s'anomena *L-acíclic* si LG és trivial. Per exemple, el conucli d'una L-equivalència f qualsevulla és un grup L-acíclic perquè Lf és un isomorfisme (en particular, el seu conucli és trivial) i, com que un conucli és un cas particular d'un colímit, la proposició 1.1.1 implica que $L(\operatorname{coker} f) = L(\operatorname{coker}(Lf))$. Així doncs, tot i que el morfisme de grups h_G no sempre és exhaustiu o bé en cas que ho sigui no sempre escindeix, el que sí podem afirmar, gràcies al teorema 3.1.1, és que el seu conucli és L-acíclic.

Suposem ara que $G = \{G_i\}_{i\in I}$ és una família de grups indexada per un conjunt d'índexs I i considerem el producte lliure

$$\eta\colon \mathop{\ast}_{i\in I} G_i \to \mathop{\ast}_{i\in I} LG_i$$

de les L-equivalències $\eta_{G_i}\colon G_i \to LG_i$. Segons la proposició 1.1.1, el morfisme η és una L-equivalència. Per tant, existeix un únic morfisme

$$\Lambda\colon \mathop{\ast}_{i\in I} LG_i \to L(\mathop{\ast}_{i\in I} G_i)$$

tal que $\Lambda\circ\eta = l$, on $l\colon \ast_{i\in I} G_i \to L(\ast_{i\in I} G_i)$, la qual cosa implica que Λ és una L-equivalència. A més, si L és una epireflexió, aleshores l i, en conseqüència, Λ, és un morfisme exhaustiu.

Anàlogament, si $A = \{A_i\}_{i\in I}$ és una família de grups abelians, aleshores tenim una L-equivalència

$$\lambda\colon \bigoplus_{i\in I} LA_i \to L(\bigoplus_{i\in I} A_i)$$

que coincideix amb la composició

$$\bigoplus_{i\in I} LA_i \xrightarrow{\Lambda_{\mathrm{ab}}} (L(\mathop{\ast}_{i\in I} A_i))_{\mathrm{ab}} \xrightarrow{h} L(\bigoplus_{i\in I} A_i),$$

on Λ_{ab} és l'abelianització de Λ. En particular, la imatge de λ està continguda en la imatge de h. Per tant, si λ és un morfisme de grups exhaustiu, aleshores h també ho és.

Teorema 3.1.5 *Sigui $G = \{G_i\}_{i \in I}$ una família de grups indexada per un conjunt d'índexs I. El nucli de la L-equivalència*

$$\Lambda\colon \mathop{\ast}_{i \in I} LG_i \to L(\mathop{\ast}_{i \in I} G_i)$$

està contingut en el commutador de $\ast_{i \in I} LG_i$. Sigui $A = \{A_i\}_{i \in I}$ una família de grups abelians indexada per un conjunt d'índexs I. La L-equivalència

$$\lambda\colon \bigoplus_{i \in I} LA_i \to L(\bigoplus_{i \in I} A_i)$$

és un morfisme de grups injectiu. A més, si L és una epireflexió, aleshores els morfismes de grups λ i

$$h\colon (L(\mathop{\ast}_{i \in I} A_i))_{\mathrm{ab}} \to L(\bigoplus_{i \in I} A_i)$$

són isomorfismes.

Demostració. Considerem el morfisme de grups

$$\Phi\colon \mathop{\ast}_{i \in I} LG_i \to \prod_{i \in I} LG_i,$$

que ve donat per les projeccions de $\ast_{i \in I} LG_i$ sobre cada sumand lliure. En ser la classe dels grups L-locals tancada per límits (vegeu la proposició 1.1.1), el grup $\prod_{i \in I} LG_i$ és L-local. Per tant, en ser Λ una L-equivalència, existeix un únic morfisme

$$\Psi\colon L(\mathop{\ast}_{i \in I} G_i) \to \prod_{i \in I} LG_i$$

tal que $\Psi \circ \Lambda = \Phi$. Això implica que el nucli de Λ està contingut en el nucli de Φ, el qual, al seu torn, està contingut en el commutador de $\ast_{i \in I} LG_i$. Utilitzant el mateix tipus d'argument i tenint en compte que el morfisme de grups de la suma directa de grups abelians al producte directe de grups abelians és injectiu obtenim que λ és injectiu. Si L és una epireflexió, aleshores tot subgrup d'un grup L-local és L-local (vegeu la secció 2.1.1). Per tant, el grup $\oplus_{i \in I} LA_i$ és L-local, com a subgrup de $\prod_{i \in I} LA_i$ que és. Així doncs, λ és un isomorfisme, ja que és una L-equivalència entre grups L-locals. Veiem ara que també h és un isomorfisme quan L és una epireflexió. Com que $h \circ \Lambda_{\mathrm{ab}} = \lambda$, el morfisme h és un isomorfisme si i només si Λ_{ab} és un isomorfisme. D'una banda, Λ_{ab} és injectiu, ja que λ ho és. D'altra banda, Λ_{ab} és exhaustiu perquè, per hipòtesi, $\ast_{i \in I} A_i \to L(\ast_{i \in I} A_i)$ és exhaustiu i Λ_{ab} és l'abelianització d'aquest morfisme. $\square$

En particular, si suposem que $A = \{A_i\}_{i\in I}$ amb $A_i = \mathbb{Z}$ per a tot i, aleshores obtenim el resultat següent:

Corol·lari 3.1.6 *Sigui L un functor idempotent a la categoria dels grups. Sigui F un grup lliure sobre un conjunt d'índexs I. Aleshores el nucli del morfisme*

$$\Lambda\colon \mathop{\ast}_{i\in I} L\mathbb{Z} \to LF$$

està contingut en el commutador de $\ast_{i\in I} L\mathbb{Z}$ i la L-equivalència

$$\lambda\colon \bigoplus_{i\in I} L\mathbb{Z} \to L(F_{\mathrm{ab}})$$

és un morfisme de grups injectiu. A més, si L és una epireflexió, aleshores λ i $h_F\colon (LF)_{\mathrm{ab}} \to L(F_{\mathrm{ab}})$ són isomorfismes. □

Per tant, si L és una epireflexió, aleshores o bé $L(F_{\mathrm{ab}}) \cong F_{\mathrm{ab}}$ o bé $L(F_{\mathrm{ab}})$ és isomorf a una suma directa de còpies de $\mathbb{Z}/n$ indexada per un conjunt d'índexs I, per a algun enter positiu n, ja que $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow L\mathbb{Z}$ i, per tant, o bé $\mathbb{Z}$ és L-local o bé $L\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n$ per a un enter positiu n.

Teorema 3.1.7 *Sigui L un functor idempotent a la categoria dels grups i sigui F un grup lliure sobre un conjunt d'índexs I. Suposem que $A = L\mathbb{Z}$. Aleshores hi ha una successió exacta*

$$0 \to \bigoplus_{i\in I} A \xrightarrow{\Lambda_{\mathrm{ab}}} (LF)_{\mathrm{ab}} \to T \to 0,$$

on $LT = 0$. A més, si $\oplus_{i\in I} A$ és L-local, aleshores la successió exacta escindeix. Si L és una epireflexió, aleshores $T = 0$.

Demostració. El morfisme Λ_{ab} és l'abelianització de la L-equivalència $\Lambda\colon \ast_{i\in I} L\mathbb{Z} \to LF$. Per tant, per la propietat (P2), Λ_{ab} és una L-equivalència i així el seu conucli T és L-acíclic. Sigui ι la inclusió de $\oplus_{i\in I} A$ en $\prod_{i\in I} A$. Aleshores, com que aquest darrer grup L-local, existeix un únic morfisme $\alpha\colon (LF)_{\mathrm{ab}} \to \prod_{i\in I} A$ que satisfà $\alpha \circ \Lambda_{\mathrm{ab}} = \iota$, la qual cosa implica que Λ_{ab} és un morfisme de grups injectiu. Si $\oplus_{i\in I} A$ és L-local, aleshores el morfisme $\lambda\colon \oplus_{i\in I} A \to L(F_{\mathrm{ab}})$ és un isomorfisme (vegeu el corol·lari 3.1.6). Sigui π la composició $\lambda^{-1} \circ h_F$ amb $h_F\colon (LF)_{\mathrm{ab}} \to L(F_{\mathrm{ab}})$. Llavors $\pi \circ \Lambda_{\mathrm{ab}} = \mathrm{id}$, ja que $h_F \circ \Lambda_{\mathrm{ab}} = \lambda$; és a dir, la successió exacta escindeix (per l'esquerra). Si L és una epireflexió, aleshores, pel corol·lari 3.1.6, els morfismes λ i h_F són isomorfismes. Això implica que Λ_{ab} és un isomorfisme i així $T = 0$. □

Exemple 3.1.8 Sigui F un grup lliure finitament generat de rang finit n. Aleshores, si $A = L\mathbb{Z}$, el grup $\oplus_{i\in I} A = A^n$ és L-local, d'acord amb la proposició 1.1.1. Per tant, segons el teorema que acabem de demostrar,

$$(LF)_{\mathrm{ab}} \cong A^n \oplus T,$$

on $LT = 0$.

1. Si L és el functor de localització en un conjunt de primers P, aleshores $(LF)_{\mathrm{ab}} \cong (\mathbb{Z}_P)^n \oplus T$ amb $T_P = 0$. Aquest resultat fou observat per Baumslag en el teorema 37.3 de [7].

2. Sigui L la localització homològica de Bousfield amb coeficients en un anell R.

   - Sigui P un conjunt de primers i sigui $R = \mathbb{Z}_P$. Aleshores $(LF)_{\mathrm{ab}}$ és isomorf a $(\mathbb{Z}_P)^n \otimes T'$ amb $T' \otimes \mathbb{Z}_P = 0$.
   - Sigui p un nombre primer i sigui $R = \mathbb{Z}/p$. Aleshores $(LF)_{\mathrm{ab}}$ és isomorf a $(\mathbb{Z}^\wedge_p)^n \otimes T''$ amb $T'' \otimes \mathbb{Z}^\wedge_p = 0$, on $\mathbb{Z}^\wedge_p$ denota els enters p-àdics.

3. Sigui $L = L_\varphi$ amb $\varphi\colon F \to K$ un morfisme de grups lliures que indueix un monomorfisme al primer grup d'homologia. Sigui R un subanell dels racionals o bé $R = \mathbb{Z}/p$. Segons el corol·lari 4.2.5 de [77], la φ-localització d'un grup nilpotent qualsevol coincideix amb la seva localització homològica amb coeficients en algun anell R. Per tant,

   $$(LF)_{\mathrm{ab}} \cong (\mathbb{Z}_{HR})^n \oplus T,$$

   on $T_{HR} = 0$, per a un cert anell de coeficients R.

És evident que si I és un conjunt finit o bé si L és una epireflexió, aleshores el grup $\oplus_{i\in I} A$ és L-local (en el primer cas ho és gràcies a la proposició 1.1.1 i en el segon cas degut al corol·lari 3.1.6). Ara bé, aquesta condició que apareix en el teorema 3.1.7 també es compleix en altres situacions. El concepte següent, extret de [43, § 94], tindrà conseqüències importants en el nostre context.

Definició 3.1.9 Un grup abelià lliure de torsió A s'anomena *slender* si per a tot morfisme $\alpha\colon \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} \to A$ es compleix que $\alpha(e_i) = 0$ gairebé per a tot i, on e_i denota un generador del factor i-èsim.

Aquesta classe de grups abelians lliures de torsió és tancada per subgrups, tal i com es dedueix de la definició. Els grups abelians numerables reduïts són exemples de grups slender [43, proposició 94.2]. També són grups slender les sumes directes de grups slender [43, teorema 94.3]. En particular, els subanells propis de $\mathbb{Q}$ i els grups abelians finitament generats lliures de torsió són slender. Però, en canvi, els racionals $\mathbb{Q}$, els enters p-àdics $\mathbb{Z}_p^\wedge$ o bé $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ no són grups slender. També existeix la noció de grup slender no abelià [38].

Teorema 3.1.10 *Sigui L un functor idempotent a la categoria dels grups abelians. Si A és un grup slender L-local, aleshores $\oplus_{i\in I} A$ és un grup slender L-local per a tot conjunt d'índexs I.*

Demostració. Com que A és un grup abelià L-local, per la propietat (P3), $H = \mathrm{Hom}\,(\prod_{i\in I} \mathbb{Z}, A)$ és un grup L-local. Veiem que $\oplus_{i\in I} A$ és un retracte de H i, per tant, és L-local (proposició 1.1.1). Definim un morfisme

$$\begin{array}{rccl} \varphi\colon & \bigoplus\limits_{i\in I} A & \longrightarrow & \mathrm{Hom}\,(\prod\limits_{i\in I} \mathbb{Z}, A) \\ & \mathbf{a} & \longmapsto & \varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{n}) = \Sigma_{i\in I} n_i\, a_i, \end{array}$$

on $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in I} \in \oplus_{i\in I} A$ i $\mathbf{n} = (n_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathbb{Z}$. Com que A és slender, també podem definir un morfisme

$$\Phi\colon \mathrm{Hom}\,(\prod_{i\in I} \mathbb{Z}, A) \to \bigoplus_{i\in I} A.$$

Aleshores la composició $\varphi \circ \Phi$ és la identitat, d'on s'obté que $\oplus_{i\in I} A$ és un retracte de H. $\square$

Segons el corol·lari 94.5 de [43], si el conjunt d'índexs I és no mesurable, aleshores el morfisme Φ que hem definit en la demostració d'aquest teorema és un isomorfisme. El resultat del teorema 3.1.10 permet generalitzar l'exemple 3.1.8 com segueix:

Exemple 3.1.11 Sigui F un grup lliure finitament generat. Si L és el functor de P-localització o bé L és la $H\mathbb{Z}_P$-localització per a un conjunt de primers P, aleshores $A = L\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_P$ és un grup slender. Per tant, el teorema 3.1.10 implica que $\oplus_{i\in I} A$ és L-local i, per tant,

$$(LF)_{\mathrm{ab}} \cong \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_P \oplus T,$$

on $T_P = T \otimes \mathbb{Z}_P = 0$.

Acabem aquesta secció observant que, tot i que $\mathbb{Q}$ no és un grup slender (en particular, no podem aplicar el teorema 3.1.10), també és cert que tota suma directa de còpies de $\mathbb{Q}$ és L-local si $\mathbb{Q}$ és L-local, tal i com demostrem tot seguit. Tota suma directa de còpies de $\mathbb{Q}$ és un retracte d'un producte directe de còpies de $\mathbb{Q}$. Segons el teorema 3.11 de [20], per a tot functor idempotent L a la categoria dels grups es compleix que o bé $L\mathbb{Q} = 0$ o bé $\mathbb{Q}$ és L-local. Si $L\mathbb{Q} \neq 0$, aleshores la proposició 1.1.1 implica que el producte directe de còpies de $\mathbb{Q}$ és un grup L-local i, en conseqüència, que tota suma directa de còpies de $\mathbb{Q}$ és L-local si $\mathbb{Q}$ és L-local. El mateix tipus de raonament és vàlid per a demostrar que $\oplus_{i\in I}K$ és un grup L-local per a tot cos K i per a tot conjunt d'índexs I.

3.2 Quasi-anells i localitzacions de grups lliures

Sigui F un grup lliure sobre un conjunt d'índexs I. Si L és la projecció sobre una varietat de grups $\mathcal{V}$, aleshores el morfisme de L-localització $\eta_F\colon F \to LF$ és exhaustiu i el grup $LF = F_{\mathcal{V}}$ s'anomena relativament lliure [69], [70]. (Recordem que un grup és *relativament lliure* si té un conjunt de generadors tal que tota aplicació d'aquest conjunt al grup s'estén a un endomorfisme del grup.) Exemples d'aquest tipus de grups són els grups nilpotents lliures, és a dir, els grups de la forma $F/\Gamma_r F$, on $\{\Gamma_r F\}$ denota la sèrie central inferior de F, i els grups de Burnside lliures F/F^n, on n és un enter positiu (vegeu [70, § 1.4]).

Ara bé, el morfisme de grups η_F no sempre és exhaustiu. Per exemple, és ben sabut que si P és un conjunt de primers, aleshores el morfisme de P-localització $\eta_F\colon F \to F_P$ és injectiu [7]. El mateix és cert si L és el functor de HR-localització per a un anell R [10]. En el cas particular del grup cíclic infinit, a [25] es demostra que $L\mathbb{Z} = A$ és un anell rígid; és a dir, és un anell commutatiu amb unitat 1 tal que l'aplicació $\mathrm{Hom}\,(A, A) \to A$ que envia cada endomorfisme φ de A a $\varphi(1)$ és bijectiva. Els exemples clàssics d'anells rígids són els anells cíclics, els subanells dels racionals i l'anell dels enters p-àdics $\mathbb{Z}_p^\wedge$, on p és un nombre primer.

En aquesta secció descrivim propietats del grup LF, per a qualsevol functor idempotent L a la categoria dels grups, usant els quasi-anells. Els resultats que demostrem per a LF són la base dels resultats sobre localitzacions d'unions puntuals de circumferències que obtenim a la secció següent i, tal i com hem dit abans, estenen resultats de Hanna Neumann sobre projeccions sobre varietats de grups.

3.2.1 Breu introducció als quasi-anells

Un *quasi-anell per l'esquerra* és un conjunt R juntament amb dues operacions binàries, anomenades multiplicació i composició, tals que

(a) $(R, \cdot)$ té estructura de grup (no necessàriament abelià);

(b) $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, per a tot $x, y, z \in R$, és a dir, la composició és associativa;

(c) $x \circ (y \cdot z) = (x \circ y) \cdot (x \circ z)$, per a tot $x, y, z \in R$, és a dir, la composició és distributiva per l'esquerra sobre la multiplicació.

Si la condició (c) la substituïm per la distribució per la dreta, és a dir,

$$(x \cdot y) \circ z = (x \circ z) \cdot (y \circ z),$$

per a tot $x, y, z \in R$, aleshores parlem de *quasi-anell per la dreta*. De fet, la majoria de quasi-anells que s'han considerat a la literatura són quasi-anells per la dreta.

És clar que tot anell és un quasi-anell. Veiem altres exemples d'aquest tipus d'estructura, la qual fou introduïda per Hanna Neumann en estudiar les projeccions de grups lliures sobre varietats de grups [69], [70].

Exemple 3.2.1 Sigui $(G, \cdot)$ un grup.

1. Definint l'operació $g \circ h = h$ (respectivament, $g \circ h = g$), per a tot g, h de G, dotem G d'una estructura de quasi-anell per l'esquerra (respectivament, per la dreta).

2. El conjunt de funcions $M(G) = \{f\colon G \to G\}$ de G és un quasi-anell per la dreta. El conjunt $M_0(G) = \{f \in M(G) \mid f(0) = 0\}$ també és un quasi-anell per la dreta.

3. Suposem que G és lliure sobre un conjunt I i sigui $\{x_i\}_{i \in I}$ una base de G. Aleshores $\mathrm{Hom}\,(G, G)$ és un quasi-anell per l'esquerra amb la

composició usual de morfismes de grups i una multiplicació component a component definida com segueix:

$$(\varphi\psi)(x_i) = \varphi(x_i)\psi(x_i),$$

per a tot parell de morfismes $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}\,(G, G)$. En general, però, si G no és lliure, aleshores $\mathrm{Hom}\,(G, G)$ no admet una estructura de quasi-anell, ja que en aquest conjunt no sempre hi tenim definida una multiplicació de forma natural.

Donats R i S dos quasi-anells per l'esquerra (respectivament per la dreta) diem que $f: R \to S$ és un *morfisme de quasi-anells per l'esquerra* (respectivament per la dreta) si f preserva l'estructura de quasi-anell; és a dir, si $f(x \circ y) = f(x) \circ f(y)$ i $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, per a tot $x, y \in R$. Les nocions (categòriques) de monomorfisme, d'epimorfisme i d'isomorfisme es defineixen de la forma habitual.

Sigui R un quasi-anell per l'esquerra amb una identitat multiplicativa 1. Un grup G (no necessàriament abelià) és un *R-mòdul per la dreta* si hi ha una funció $\Theta: G \times R \to G$ tal que per a tot $g \in G$ i per a tot $r_1, r_2 \in R$ es compleix el següent:

(a) $\Theta(g, r_1 r_2) = \Theta(g, r_1)\Theta(g, r_2)$;

(b) $\Theta(g, r_1 \circ r_2) = \Theta(\Theta(g, r_1), r_2)$;

(c) $\Theta(g, 1) = g$.

Degut a la manca de simetria dreta-esquerra dels quasi-anells, els mòduls naturals per a un quasi-anell per l'esquerra són els R-mòduls per la dreta. Observem, a més, que el grup R actua a través de funcions, no necessàriament morfismes de grups, i que si $f: R \to S$ és un morfisme de quasi-anells, aleshores el grup S és un R-mòdul via l'aplicació f amb l'acció donada per $\Theta(s, r) = s \circ f(r)$, per a tot $r \in R$ i per a tot $s \in S$.

Acabem aquesta secció recordant les definicions i algunes propietats bàsiques de dos tipus de quasi-anells que apareixen en el nostre estudi de les localitzacions de grups lliures: els quasi-anells de Neumann i els quasi-anells distributivament generats.

Quasi-anells de Neumann

Un subconjunt X d'un grup G s'anomena *base relativament lliure* de G si X genera G i tota aplicació de X a G s'estén de manera única a un endomorfisme del grup G.

Sigui G un grup amb una base relativament lliure X i sigui $N(G)$ el conjunt dels endomorfismes de G. Aleshores es defineix una multiplicació a $N(G)$ determinada per la condició següent: per a tot parell d'endomorfismes $\varphi, \psi \in N(G)$ i per a tot $x \in X$, $\varphi\psi$ és l'endomorfisme de G que s'obté en estendre l'aplicació $x(\varphi\psi) = (x\varphi)(x\psi)$ de X a G. Aleshores [64],

Definició 3.2.2 Sigui G un grup amb una base relativament lliure X. El conjunt $N(G)$ amb la composició usual de morfismes de grups i la multiplicació que acabem de definir s'anomena *quasi-anell de Neumann* sobre G respecte X.

Aquest és un exemple de quasi-anell per la dreta [64, lema 12.23]. Observem que la definició de la multiplicació depèn de l'elecció de la base relativament lliure X de G i no coincideix amb la multiplicació definida a $M_0(G)$. Malgrat tot, bases diferents donen lloc a estructures de quasi-anell isomorfes.

Quasi-anells distributivament generats

Sigui R un quasi-anell per l'esquerra. Un element $d \in R$ s'anomena *distributiu* si per a tot $x, y \in R$ es compleix que $(x \cdot y) \circ d = (x \cdot d) \circ (y \cdot d)$. El conjunt d'elements distributius R_d del quasi-anell R és un semigrup amb la composició [64, lema 9.5]. Per exemple, si $R = M_0(G)$, aleshores $M_0(G)_d = \mathrm{End}\,(G)$.

Definició 3.2.3 Un quasi-anell R s'anomena *distributivament generat* si $(R, \cdot)$ està generat, com a grup, per un semigrup $(S, \circ)$ d'elements distributius.

Els anells són quasi-anells distributivament generats, ja que en un anell tot element és distributiu. Ara bé, en general, el conjunt generador S no té perquè coincidir amb el conjunt de tots els elements distributius R_d. Per exemple, sigui G un grup amb una base relativament lliure X i sigui $N(G)$

el quasi-anell de Neumann sobre G respecte X. Per a tot parell d'elements $y, z \in X$ definim $\varepsilon(y,z) \in N(G)$ com segueix

$$x\varepsilon(y,z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq y \\ z & \text{si} \quad x = y. \end{cases}$$

Aleshores $\varepsilon(y,z)$ és un element distributiu de $N(G)$. El teorema 12.26 de [64] ens assegura que $N(G)$ està generat per elements distributius d'aquest tipus:

Teorema 3.2.4 *Sigui G un grup. Suposem que $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ és una base relativament lliure de G. Aleshores $N(G)$ és un quasi-anell distributivament generat amb un conjunt de generadors distributius donat per*

$$\{\varepsilon(x_i, x_j) \mid 1 \leq i, j \leq n\}. \quad \square$$

3.2.2 Localitzacions de grups lliures

Durant tota aquesta secció L denota un functor idempotent qualsevol a la categoria dels grups, F un grup lliure sobre un conjunt d'índexs I i $\{x_i\}_{i \in I}$ una base de F. A continuació, anem a descriure algunes propietats del grup LF. Els resultats d'aquesta secció estenen el treball sobre projeccions de grups lliures sobre varietats realitzat per Neumann [70], ja que nosaltres no demanem que el morfisme de L-localització $\eta_F \colon F \to LF$ sigui exhaustiu.

Sigui F_2 un grup lliure de rang 2. Si F_2 és L-local, aleshores $\mathbb{Z}$ també és L-local perquè la classe dels grups L-locals és tancada per retractes (proposició 1.1.1). Malgrat que el recíproc no és cert, de forma més general es demostra el següent:

Teorema 3.2.5 *Sigui L un functor idempotent qualsevol a la categoria dels grups. El grup lliure F_2 de rang 2 és L-local si i només si tot grup lliure F en un conjunt finit o bé infinit numerable és L-local.*

Demostració. Una implicació es dedueix del fet que F_2 és retracte de tot grup lliure F de rang més gran o igual que 2. Recíprocament, suposem que F_2 és L-local. Aleshores $\mathbb{Z}$ és L-local perquè és un retracte de F_2 i, en conseqüència, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ és L-local [20, lema 3.5]. Per tant, el resultat s'obté tenint en compte que el nucli d'un morfisme entre grups L-locals, en el nostre cas $F_2 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, és L-local (vegeu la proposició 1.1.1). $\square$

Aquest teorema permet caracteritzar els grups lliures L-locals:

Corol·lari 3.2.6 *Sigui L un functor idempotent qualsevol a la categoria dels grups. Sigui F un grup lliure de rang més gran o igual que 2. Aleshores F és L-local si i només si LF és un grup lliure de rang numerable més gran o igual que 2.*

Demostració. Si F és L-local, aleshores $LF \cong F$ és un grup lliure. Suposem que LF és lliure. Aleshores el grup lliure F_2 de rang 2 és un retracte de LF i, per tant, és un grup L-local (proposició 1.1.1). Aplicant el teorema 3.2.5 s'obté que F és L-local. $\square$

Recordem que, com que LF és un grup L-local, el morfisme $\eta_F\colon F \to LF$ indueix una bijecció natural

$$\eta_F^*\colon \mathrm{Hom}\,(LF, LF) \to \mathrm{Hom}\,(F, LF). \tag{3.2.1}$$

De fet, això és cert per a LG amb G un grup qualsevol (no necessàriament lliure) i el morfisme de L-localització $\eta_G\colon G \to LG$. En el nostre cas, en ser F lliure, també tenim una bijecció

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}\,(F, LF) & \xrightarrow{\cong} & \prod_{i\in I} LF \\ \varphi & \mapsto & \{\varphi(x_i)\}_{i\in I}, \end{array} \tag{3.2.2}$$

on el terme de la dreta és un producte cartesià de còpies de LF indexat per I. Per tant, al conjunt $\mathrm{Hom}\,(LF, LF)$ hi ha dues operacions compatibles: la composició usual de morfismes de grups i una multiplicació component a component definida per mitjà de les bijeccions (3.2.1) i (3.2.2). Explícitament, si $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}\,(LF, LF)$, aleshores la multiplicació $\varphi\psi$ està determinada per la condició següent:

$$(\varphi\psi)(\eta_F(x_i)) = \varphi(\eta_F(x_i))\psi(\eta_F(x_i)) \quad \text{per a tot } i \in I. \tag{3.2.3}$$

Aquestes dues operacions satisfan les propietats (a)-(c) de la definició de quasi-anell per l'esquerra. A més, les bijeccions (3.2.1) i (3.2.2) juntament amb la proposició 1.1.1 impliquen que $\mathrm{Hom}\,(LF, LF)$ és un grup L-local. Així doncs, hem demostrat el següent:

Teorema 3.2.7 *Sigui L un functor idempotent a la categoria dels grups i sigui F un grup lliure. Aleshores el conjunt* $\mathrm{Hom}\,(LF, LF)$ *amb la composició usual de morfismes de grups i la multiplicació induïda per l'elecció d'una base de F és un quasi-anell per l'esquerra i és un grup L-local.* $\square$

Observem que l'estructura de quasi-anell de $\mathrm{Hom}\,(LF, LF)$ depèn de la base escollida, ja que la multiplicació queda determinada per l'expressió (3.2.3). De totes maneres, bases diferents donen lloc a estructures de quasi-anell isomorfes. És més, usant les definicions i el lema 3.5 de [20] s'obté el resultat següent:

Teorema 3.2.8 *Sigui L un functor idempotent a la categoria dels grups. Sigui F un grup lliure sobre un conjunt d'índexs I. Aleshores l'aplicació natural*

$$\mathrm{Hom}\,(F, F) \to \mathrm{Hom}\,(LF, LF)$$

és un morfisme de quasi-anells per l'esquerra que, com a morfisme dels grups subjacents, és un producte de còpies de $\eta_F\colon F \to LF$ indexat per I. Aquest morfisme dota $\mathrm{Hom}\,(LF, LF)$ *d'una estructura de mòdul sobre* $\mathrm{Hom}\,(F, F)$*. A més, si el conjunt d'índexs I és finit, aleshores aquest morfisme és una L-localització.* □

Si L és una epireflexió, aleshores el conjunt d'elements $\{\eta_F(x_i)\}_{i\in I}$ genera el grup LF i és, de fet, una base relativament lliure de F. Per tant, $\mathrm{Hom}\,(LF, LF)$ és un quasi-anell de Neumann.

Si L no és una epireflexió, aleshores el conjunt d'elements $\{\eta_F(x_i)\}_{i\in I}$ genera LF com a grup L-local en el sentit següent. Sigui G un grup L-local i sigui X un subconjunt de G. Diem que X *genera G com a grup L-local* si tot subgrup L-local $H \subseteq G$ que conté a X és igual a G.

Proposició 3.2.9 *Sigui L un functor idempotent qualsevol a la categoria dels grups. Sigui G un grup i sigui $\eta_G\colon G \to LG$ el morfisme de localització. Si X és un conjunt de generadors de G, aleshores els elements $\eta_G(x)$ amb $x \in X$ generen LG com a grup L-local.*

Demostració. Sigui $H \subseteq LG$ un subgrup L-local de LG que conté els elements $\eta_G(x)$ amb $x \in X$. Llavors η_G factoritza per H, és a dir, existeix un morfisme de grups $\alpha\colon G \to H$ tal que $\iota \circ \alpha = \eta_G$, on $\iota\colon H \hookrightarrow LG$. En ser H un grup L-local i η_G una L-equivalència, existeix un únic morfisme $\beta\colon LG \to H$ tal que $\beta \circ \eta_G = \alpha$. Aleshores, com que η_G és una L-equivalència i $\iota \circ \beta$ és un morfisme entre grups L-locals, a partir de la igualtat $\iota \circ \beta \circ \eta_G = \iota \circ \alpha = \eta_G$ obtenim que $\iota \circ \beta = \mathrm{id}$. Per tant, el monomorfisme ι és exhaustiu i així $H \cong LG$. □

El teorema 3.2.4 implica que tot quasi-anell de Neumann finitament generat és distributivament generat. Més generalment, es demostra el resultat següent:

Teorema 3.2.10 *Sigui F un grup lliure finitament generat de rang n. Aleshores hi ha un conjunt de n^2 elements distributius que generen* $\mathrm{Hom}\,(LF, LF)$ *com a grup L-local.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $\{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunt de generadors lliures de F. Per a tot $1 \leq i, j \leq n$ definim $\varepsilon^i_j \in \mathrm{Hom}\,(LF, LF)$ com segueix

$$\varepsilon^i_j(\eta_F(x_k)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq i \\ x_i & \text{si} \quad k = i. \end{cases}$$

Aleshores ε^i_j, on $1 \leq i, j \leq n$, són elements distributius de $\mathrm{Hom}\,(LF, LF)$, els quals són imatges d'un conjunt de generadors distributius de $\mathrm{Hom}\,(F, F)$ via el morfisme de localització $\mathrm{Hom}\,(F, F) \to \mathrm{Hom}\,(LF, LF)$. Per tant, la proposició 3.2.9 implica que ε^i_j, on $1 \leq i, j \leq n$, generen $\mathrm{Hom}\,(LF, LF)$ com a grup L-local. $\square$

Sigui F_{ab} l'abelianització del grup lliure F. Aleshores el conjunt d'elements $\{\overline{x_i}\}_{i \in I}$, on $\overline{x_i} = a_F(x_i)$ amb $a_F \colon F \twoheadrightarrow F_{\mathrm{ab}}$, forma una base de F_{ab}. Això ens permet obtenir una bijecció natural

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}\,(F_{\mathrm{ab}}, L(F_{\mathrm{ab}})) & \xrightarrow{\cong} & \prod_{i \in I} L(F_{\mathrm{ab}}) \\ \varphi & \mapsto & \{\varphi(\overline{x_i})\}_{i \in I}, \end{array} \tag{3.2.4}$$

que defineix una suma component a component a $\mathrm{Hom}\,(L(F_{\mathrm{ab}}), L(F_{\mathrm{ab}}))$ determinada per la condició següent:

$$(\varphi + \psi)(\eta_{F_{\mathrm{ab}}}(\overline{x_i})) = \varphi(\eta_{F_{\mathrm{ab}}}(\overline{x_i})) + \psi(\eta_{F_{\mathrm{ab}}}(\overline{x_i})) \quad \text{per a tot } i \in I. \tag{3.2.5}$$

Per tant, el grup abelià $\mathrm{Hom}\,(L(F_{\mathrm{ab}}), L(F_{\mathrm{ab}}))$ admet una estructura de quasi-anell per l'esquerra amb la composició usual de morfismes de grups i la suma que acabem de definir. A més, tal i com passava en el cas del grup LF, l'aplicació natural

$$\mathrm{Hom}\,(F_{\mathrm{ab}}, F_{\mathrm{ab}}) \to \mathrm{Hom}\,(L(F_{\mathrm{ab}}), L(F_{\mathrm{ab}})) \tag{3.2.6}$$

és un morfisme de quasi-anells per l'esquerra. De fet, aquesta estructura de quasi-anell que hem definit no és altra que l'estructura usual d'anell que existeix a $\mathrm{Hom}\,(A,A)$ per a tot grup abelià A, i el morfisme (3.2.6) és un morfisme d'anells. En efecte, la suma $(\varphi+\psi)(a)=\varphi(a)+\psi(a)$ està ben definida a $\mathrm{Hom}\,(L(F_{\mathrm{ab}}),L(F_{\mathrm{ab}}))$ i, per tant, coincideix amb la suma (3.2.5) que hem definit, de manera que aquesta també és distributiva per la dreta. Aleshores a partir de les definicions s'obté el resultat següent:

Teorema 3.2.11 *Sigui L un functor idempotent a la categoria dels grups. Sigui F un grup lliure sobre un conjunt d'índexs I. Aleshores l'aplicació natural*

$$\prod_{i\in I} LF \to \prod_{i\in I} L(F_{\mathrm{ab}})$$

és un morfisme de quasi-anells per l'esquerra que dota $\prod_{i\in I} L(F_{\mathrm{ab}})$ d'una estructura de mòdul sobre $\prod_{i\in I} LF$. $\square$

Observem que si F és lliure finitament generat de rang n, aleshores

$$L(F_{\mathrm{ab}})=L(\mathbb{Z}^n)\cong(L\mathbb{Z})^n$$

i, per tant, el producte $\prod_{i=1}^{n} L(F_{\mathrm{ab}})$ és un anell de matrius amb coeficients a l'anell commutatiu $A=L\mathbb{Z}$.

Epimorfismes de quasi-anells

Si $F=\mathbb{Z}$, aleshores LF és un grup abelià i la seva estructura de quasi-anell és, de fet, una estructura d'anell commutatiu. Més concretament, LF és un anell commutatiu amb unitat 1 tal que l'aplicació $\mathrm{Hom}\,(LF,LF)\to LF$ definida com $\varphi\mapsto\varphi(1)$ és bijectiva; és a dir, LF és un anell rígid. A més, el morfisme de localització $\eta_F\colon F\to LF$ és un morfisme d'anells [77].

Un anell R és *sòlid* si és un anell amb unitat tal que l'aplicació de multiplicació $R\otimes R\to R$ és bijectiva. Per exemple, els subanells dels racionals o bé els grups cíclics són anells sòlids. Però l'anell dels enters p-àdics $\mathbb{Z}_p^\wedge$, on p és un nombre primer, no és un anell sòlid.

Segons la proposició XI.1.2 de [84], un morfisme d'anells $\varphi\colon\mathbb{Z}\to S$ és un epimorfisme si i només si S és un anell sòlid. Per tant, el morfisme de localització $\eta_{\mathbb{Z}}\colon\mathbb{Z}\to L\mathbb{Z}$ és un epimorfisme si i només si $L\mathbb{Z}$ és un anell sòlid. Per exemple, això es compleix si L és localització en conjunts de primers.

En canvi, aquest resultat no és cert quan L és el functor de p-compleció, ja que aleshores $L\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p^{\wedge}$. De forma general,

Teorema 3.2.12 *Sigui L un functor idempotent qualsevol a la categoria dels grups. Sigui F un grup lliure sobre un conjunt d'índexs finit I i sigui F_{ab} la seva abelianització. Si l'anell $A = L\mathbb{Z}$ és sòlid, aleshores el morfisme de localització*

$$\eta\colon \bigoplus_{i\in I} F_{\mathrm{ab}} \to L(\bigoplus_{i\in I} F_{\mathrm{ab}})$$

és un epimorfisme d'anells.

Demostració. En ser I un conjunt finit, segons el lema 3.5 de [20], el grup $L(\oplus_{i\in I}F_{\mathrm{ab}})$ és isomorf a $\oplus_{i\in I}L(F_{\mathrm{ab}})$, el qual, al seu torn, és isomorf a una suma directa finita de còpies de A. Siguin R un anell i $\alpha, \beta\colon L(\oplus_{i\in I}F_{\mathrm{ab}}) \to R$ dos morfismes d'anells tals que $\alpha \circ \eta = \beta \circ \eta$. Aleshores podem pensar R com un A-mòdul via α. Com que el morfisme de localització $\eta_{\mathbb{Z}}\colon \mathbb{Z} \to A$ és un epimorfisme d'anells, $\eta_{\mathbb{Z}}$ és ortogonal a tots els A-mòduls [25, § 7]. Per tant, l'anell R és ortogonal a η com a grup, ja que η és una suma directa de còpies de $\mathbb{Z} \to A$. Així doncs, $\alpha = \beta$. $\square$

En general, no sabem sota quines condicions el morfisme de quasi-anells

$$\mathrm{Hom}\,(F, F) \to \mathrm{Hom}\,(LF, LF)$$

és un epimorfisme. Seguidament demostrem que si L és una localització en un conjunt de primers i F és un grup lliure de rang finit, aleshores aquest morfisme de quasi-anells és un epimorfisme.

Teorema 3.2.13 *Sigui L el functor de P-localització per a un conjunt de primers P. Sigui F un grup lliure sobre un conjunt d'índexs finit I. Aleshores tot mòdul R sobre el quasi-anell $\prod_{i\in I} F_P$ és P-local com a grup.*

Demostració. Sigui $r \in R$ un element qualsevol. Hem de veure que per a tot primer $n \notin P$ l'element r té una única arrel n-èsima $r^{1/n}$. Sigui

$$\Theta\colon R \times \prod_{i\in I} F_P \to R$$

l'acció de $\prod_{i\in I} F_P$ sobre R. Aleshores escrivim $r = \Theta(r, 1)$, on 1 correspon al morfisme identitat per l'aplicació d'avaluació $\mathrm{Hom}\,(F_P, F_P) \cong \prod_{i\in I} F_P$.

Sigui $\xi \in \prod_{i \in I} F_P$ l'element corresponent al morfisme $\alpha \in \mathrm{Hom}\,(F_P, F_P)$ determinat per $\alpha(\eta_F(x_i)) = \eta_F(x_i)^{1/n}$ per a tot $i \in I$. Observem que ξ^n correspon al morfisme identitat. Per tant,

$$r = \Theta(r, 1) = \Theta(r, \xi^n) = [\Theta(r, \xi)]^n,$$

la qual cosa implica que r té una arrel n-èsima. Suposem que existeix $z \in R$ tal que $z^n = r$. El morfisme $\beta\colon F_P \to F_P$ determinat per $\beta(\eta_F(x_i)) = \eta_F(x_i)^n$, per a tot $i \in I$, és l'invers multiplicatiu de α, és a dir, $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}$ i $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$. Sigui $\tau \in \prod_{i \in I} F_P$ l'element corresponent a β per l'aplicació d'avaluació. Aleshores $\xi\tau = \tau\xi = 1$ i, per tant, $z = \Theta(z, \tau\xi) = \Theta(\Theta(z, \tau), \xi)$. Finalment, si $u = \Theta(z, \tau)$, llavors les igualtats

$$r = z^n = [\Theta(u, \xi)]^n = \Theta(u, \xi^n) = \Theta(u, 1) = u$$

impliquen que $z = \Theta(u, \xi) = \Theta(r, \xi)$. $\square$

Teorema C *Sigui L el functor de localització en un conjunt de primers P. Sigui F un grup lliure sobre un conjunt d'índexs finit I. Aleshores l'aplicació natural*

$$\eta\colon \mathrm{Hom}\,(F, F) \to \mathrm{Hom}\,(F_P, F_P)$$

que, com a morfisme dels grups subjacents, coincideix amb un producte de còpies del morfisme $F \to F_P$ indexat per I és un epimorfisme a la categoria dels quasi-anells amb unitat.

Demostració. Sigui R un quasi-anell i siguin $\alpha, \beta\colon \prod_{i \in I} F_P \to R$ dos morfismes de quasi-anells tals que $\alpha \circ \eta = \beta \circ \eta$. Aleshores podem pensar R com un mòdul sobre $\prod_{i \in I} F_P$ via el morfisme α. Per tant, el teorema 3.2.13 implica que R és P-local com a grup. Així, com que η és una P-equivalència, obtenim que $\alpha = \beta$. $\square$

3.3 Localitzacions d'unions puntuals de circumferències

L'estudi de les localitzacions d'unions puntuals de circumferències, és a dir, espais de tipus $K(F, 1)$ amb F un grup lliure, no és gens fàcil. Si F és cíclic, aleshores $K(F,1) = S^1$ i LS^1 és un espai d'Eilenberg–Mac Lane $K(A,1)$ amb $A = L\mathbb{Z}$ un anell rígid [25].

Per a una unió puntual de circumferències $W = \vee_{i\in I} S^1$ sobre un conjunt d'índexs I, se sap que la seva localització en un conjunt de primers qualsevol és un espai de tipus $K(G,1)$ [22, teorema 8.7]. Ara bé, en general, es desconeix si LW és un espai de tipus $K(G,1)$ per a tot functor idempotent L a la categoria homotòpica; fins i tot, quan L és una localització homològica.

En aquesta secció, fent ús de les idees desenvolupades en les seccions anteriors, descrivim algunes propietats de l'espai LW per a qualsevol functor idempotent L a la categoria homotòpica. El darrer resultat que demostrem, el teorema E, dóna esperances a que sigui cert el fet que no hi hagi cap functor idempotent L tal que LW no sigui un espai de tipus $K(G,1)$.

Sigui L un functor idempotent a la categoria homotòpica i sigui $K(G,1)$ amb G un grup qualsevol (no necessàriament lliure). Aleshores, tenint en compte que la classe dels espais L-locals és tancada per retractes homotòpics (vegeu la proposició 1.1.1), s'obté el resultat següent:

Teorema 3.3.1 *Sigui L un functor idempotent a la categoria homotòpica i sigui G un grup qualsevol. Si $\eta\colon K(G,1) \to LK(G,1)$ indueix un isomorfisme de grups fonamentals, aleshores η és una equivalència homotòpica.*

Demostració. Segons les hipòtesis del teorema, la composició de η amb l'aplicació natural

$$LK(G,1) \to K(\pi_1(LK(G,1)),1)$$

indueix un isomorfisme de grups fonamentals i, per tant, és una equivalència homotòpica. Així doncs, l'espai $K(G,1)$ és un retracte homotòpic de l'espai L-local $LK(G,1)$, la qual cosa implica que $K(G,1)$ és L-local, de manera que la L-equivalència η és una equivalència homotòpica. $\square$

Així doncs, segons aquest teorema, si L canvia el tipus d'homotopia d'un espai $K(G,1)$, aleshores necessàriament ha de modificar-ne el grup fonamental. En particular, si W és una unió puntual de circumferències, aleshores $W = K(F,1)$ amb F un grup lliure. Així, el teorema 3.3.1 aplicat a W ens diu que si $\eta\colon W \to LW$ indueix un isomorfisme al grup fonamental, aleshores W és un espai L-local.

A tot functor idempotent L a la categoria homotòpica podem associar-li un parell ortogonal a la categoria dels grups de la manera següent. Un grup G s'anomena *L-local* si l'espai $K(G,1)$ és L-local. Un morfisme de grups $\varphi\colon A \to B$ és una *L-equivalència* si existeix una L-equivalència d'espais connexos $f\colon X \to Y$ tal que $\pi_1(f) = \varphi$.

Aquest parell ortogonal que acabem de descriure ens serà molt útil en el nostre estudi de localitzacions d'unions puntuals de circumferències. De totes maneres, aquest parell l'utilitzarem sense tenir en compte si prové o no d'un functor idempotent a la categoria homotòpica. Els resultats de [26] ens asseguren que això és cert sota hipòtesis de cardinals grans.

La majoria de les propietats descrites per als functors idempotents (per exemple, les propietats de clausura de la proposició 1.1.1) continuen essent vàlides per a aquest parell ortogonal. En aquest context, diem que un grup G és *L-acíclic* si l'aplicació trivial $G \to 1$ és una L-equivalència.

Tenint en compte aquesta definició, a partir del corol·lari 3.2.6 podem caracteritzar les unions puntuals de circumferències L-locals com segueix:

Teorema 3.3.2 *Sigui L un functor idempotent qualsevol a la categoria homotòpica. Sigui W una unió puntual de circumferències. Aleshores W és L-local si i només si $\pi_1(LW)$ és un grup lliure de rang numerable ≥ 2.*

Demostració. Si W és L-local, aleshores $\pi_1(LW) \cong \pi_1(W)$ és un grup lliure. Suposem que $\pi_1(LW)$ és un grup lliure de rang més gran o igual que 2 i considerem l'aplicació natural

$$\psi\colon LW \to K(\pi_1(LW), 1).$$

Com que $\pi_1(LW)$ és lliure, existeix una aplicació

$$s\colon K(\pi_1(LW), 1) \to LW$$

tal que $\psi \circ s \simeq \mathrm{id}$. Per tant, $K(\pi_1(LW), 1)$ és un retracte homotòpic de l'espai L-local LW, la qual cosa implica que $K(\pi_1(LW), 1)$ és L-local (proposició 1.1.1). Així doncs, per definició, el grup $\pi_1(LW)$ és L-local, de manera que $L\pi_1(W) \cong \pi_1(LW)$ és un grup lliure. Aplicant el corol·lari 3.2.6 s'obté que $\pi_1(W)$ és L-local i, en conseqüència, l'espai W és L-local. $\square$

Sigui L un functor idempotent a la categoria homotòpica i sigui X un espai qualsevol. Aleshores, segons la definició que hem donat, el morfisme de grups

$$\eta_*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(LX)$$

induït $\eta\colon X \to LX$ és una L-equivalència a la categoria dels grups. Per tant, existeix una única L-equivalència

$$\beta\colon \pi_1(LX) \to L(\pi_1(X))$$

tal que $\beta \circ \eta_* = l$, on $l\colon \pi_1(X) \to L(\pi_1(X))$. És a dir, $L(\pi_1(LX)) \cong L(\pi_1(X))$ per a tot espai X i tot functor idempotent L a la categoria homotòpica.

Aleshores diem que un functor idempotent L a la categoria homotòpica és π_1-*compatible* si el grup fonamental $\pi_1(LX)$ és L-local per a tot espai X; o, dit d'una altra manera, si la L-equivalència $\beta\colon \pi_1(LX) \to L(\pi_1(X))$ és un isomorfisme per a tot espai X. Els functors π_1-compatibles van ser definits per Casacuberta a [19] i satisfan la propietat següent:

Lema 3.3.3 *Sigui L un functor idempotent a la categoria homotòpica. Si L és π_1-compatible, aleshores l'aplicació natural $X \to K(G,1)$, on $G = \pi_1(X)$, indueix un isomorfisme $\pi_1(LX) \cong \pi_1(LK(G,1))$.*

Demostració. Com que l'aplicació $X \to K(G,1)$ indueix un isomorfisme de grups fonamentals i les aplicacions $X \to LX$ i $K(G,1) \to LK(G,1)$ indueixen L-equivalències al grup fonamental, el morfisme natural

$$\pi_1(LX) \to \pi_1(LK(G,1))$$

és una L-equivalència entre grups L-locals, la qual cosa implica que és un isomorfisme. □

Així doncs, si L és π_1-compatible, aleshores el parell ortogonal format pels grups L-locals i les L-equivalències que hem definit fa un moment està associat a un functor idempotent a la categoria dels grups que ve donat per

$$LG = \pi_1(LK(G,1)),$$

per a tot grup G. És més, el lema 3.3.3 implica que això és equivalent, llevat d'isomorfisme, a definir $L\pi_1(X) = \pi_1(LX)$, on X és un espai connex. Aquesta igualtat justifica el terme π_1-compatible.

Suposem ara que $W = S^1 \vee S^1$. Si W és un espai L-local, aleshores S^1 també ho és perquè la classe dels espais L-locals és tancada per retractes homotòpics (vegeu la proposició 1.1.1). Tot i que el recíproc no és cert, de forma més general, es demostra el següent, que és l'anàleg del teorema 3.2.5:

Teorema 3.3.4 *Sigui L un functor idempotent a la categoria homotòpica. Aleshores $S^1 \vee S^1$ és L-local si i només si $\vee_{i \in I} S^1$ és L-local per a tot conjunt d'índexs I finit o infinit numerable.*

Demostració. Una implicació es dedueix del fet que $S^1 \vee S^1$ és retracte de tota unió puntual de dues o més circumferències. L'altra implicació es una conseqüència del fet que la classe dels espais L-locals és tancada per límits inversos homotòpics, ja que la fibra homotòpica de la inclusió de $S^1 \vee S^1$ a $S^1 \times S^1$ és una unió puntual infinita numerable de circumferències. □

Sigui W una unió puntual de circumferències i sigui $\eta: W \to LW$ l'aplicació de localització. Com que W és un complex de dimensió 1, el teorema 3.5 de [19] implica que el functor idempotent L_η definit a la categoria homotòpica és π_1-compatible. Per tant, segons el lema 3.3.3, el functor L_η permet definir un functor idempotent a la categoria dels grups com $L'_\eta G = \pi_1(L_\eta K(G,1))$, per a tot grup G. De fet, $L'_\eta = L_{\eta_*}$ amb $\eta_*: \pi_1(W) \to \pi_1(LW)$ el morfisme induït per η al grup fonamental.

Proposició 3.3.5 *Sigui L un functor idempotent a la categoria homotòpica. Sigui W una unió puntual de circumferències i sigui $\eta: W \to LW$ el morfisme de localització. Aleshores la funció*

$$\begin{array}{rccc} \eta^*: & \mathrm{Hom}\,(\pi_1(LW), \pi_1(LW)) & \to & \mathrm{Hom}\,(\pi_1(W), \pi_1(LW)) \\ & \varphi & \mapsto & \varphi \circ \eta_* \end{array}$$

induïda per $\eta_*: \pi_1(W) \to \pi_1(LW)$ és exhaustiva.

Demostració. Sigui $\psi \in \mathrm{Hom}\,(\pi_1(W), \pi_1(LW))$ un morfisme qualsevol. Aleshores ψ està induït per una aplicació $f: W \to LW$, única llevat d'equivalència homotòpica, ja que W és un complex de dimensió 1. Per tant, com que LW és η-local, existeix una única aplicació $g: LW \to LW$ tal que $g \circ \eta = f$. Així, $\eta^*(g_*) = g_* \circ \eta_* = \psi$. □

En general, no sabem si la funció η^* induïda per η_* és bijectiva. El que sí és cert, però, és que cadascuna de les condicions següents impliquen que η^* és injectiva i, per tant, bijectiva:

(a) Si LW és un $K(G,1)$, aleshores η^* és bijectiva.

(b) Si LW és homòtopament equivalent a un CW-complex de dimensió 2, aleshores η^* és bijectiva.

(c) Si $\eta_*\colon \pi_1(W) \to \pi_1(LW)$ és exhaustiva, aleshores η^* és bijectiva.

(d) Si $\pi_1(LW)$ s'inclou en un grup L-local, aleshores η^* és bijectiva. En particular, si L és π_1-compatible, aleshores η^* és bijectiva.

La demostració de (a) i de (b) es basa en el fet que tot endomorfisme de $\pi_1(LW)$ es pot elevar a una aplicació $LW \to LW$. Pel que fa a (c) i a (d), la demostració és immediata.

Així doncs, si es compleix alguna de les condicions (a)-(d), aleshores el grup $\pi_1(LW)$ és η_*-local i és, per tant, la η_*-localització de $\pi_1(W)$ (vegeu el lema 1.2.1), de manera que satisfà totes les propietats sobre les localitzacions de grups lliures descrites en les seccions anteriors. Per exemple, a partir del teorema 3.1.7 s'obté el següent:

Corol·lari 3.3.6 *Sigui L un functor idempotent a la categoria homotòpica. Sigui W una unió puntual de circumferències sobre un conjunt d'índexs I. Suposem que el morfisme $\eta_*\colon \pi_1(W) \to \pi_1(LW)$ és exhaustiu. Aleshores*

$$H_1(LW) \cong \bigoplus_{i\in I} A,$$

on $A = \pi_1(LS^1)$. □

Sigui A el grup fonamental de LS^1. Tal i com hem explicat abans, $LS^1 = K(A,1)$, la qual cosa implica, segons la nostra definició, que el grup A és L-local. (De fet, sabem que A és, a més, un anell rígid.) Així doncs, per a tota aplicació $f\colon W \to K(A,1)$ existeix una única aplicació, llevat d'equivalència homotòpica, $g\colon LW \to K(A,1)$ tal que $g \circ \eta = f$. Per tant, $\eta\colon W \to LW$ indueix un isomorfisme

$$H^1(LW; A) \cong H^1(W; A) \cong \prod_{i\in I} A,$$

on pensem en cohomologia amb coeficients trivials. El resultat corresponent per al primer grup d'homologia de LW és el següent:

Teorema D *Sigui L un functor idempotent a la categoria homotòpica. Sigui W una unió puntual de circumferències sobre un conjunt d'índexs I. Sigui $A = \pi_1(LS^1)$. Aleshores existeixen successions exactes*

$$H_1(W) \to H_1(LW) \to T \to 0,$$

$$0 \to \bigoplus_{i\in I} A \to H_1(LW;A) \to T\otimes A \to 0 \quad \text{i}$$

$$0 \to \bigoplus_{i\in I} A \to H_1(LW) \to S \to 0,$$

on T, $T\otimes A$ i S són L-acíclics. A més, si $\oplus_{i\in I}A$ és L-local, aleshores la segona i la tercera successions exactes escindeixen. Si el morfisme unitat $\mathbb{Z}\to A$ és injectiu, aleshores $H_1(W)\to H_1(LW)$ és també injectiu.

Demostració. Comencem pensant en la primera successió. La propietat (P2) de la secció 3.1 ens diu que $H_1(W)\to H_1(LW)$ és una L-equivalència perquè s'obté en abelianitzar la L-equivalència $\pi_1(W)\to\pi_1(LW)$. Per tant, el seu conucli T és L-acíclic. Si $\mathbb{Z}\to A$ és un morfisme de grups injectiu, aleshores existeix un morfisme injectiu $H_1(W)\to\prod_{i\in I}A$. Com que aquest darrer grup és L-local, aquest morfisme injectiu factoritza per $H_1(LW)$, la qual cosa implica que el morfisme $H_1(W)\to H_1(LW)$ també és injectiu.

Tensoritzant la primera successió exacta per A, obtenim la segona successió, que és exacta per l'esquerra perquè $\oplus_{i\in I}A$ és un subgrup del grup L-local $\prod_{i\in I}A$ i $\oplus_{i\in I}A \to H_1(LW;A)$ és una L-equivalència. A més, el grup $T\otimes A$ és L-acíclic perquè, per la propietat (P3) de la secció 3.1, el morfisme $\oplus_{i\in I}A\to H_1(LW;A)$ és una L-equivalència.

Pel que fa a la tercera successió, cal dir que el morfisme

$$\bigoplus_{i\in I} H_1(LS^1)\to H_1(LW)$$

és la suma dels morfismes naturals $H_1(LS^1)\to H_1(LW)$ induïts per les inclusions $S^1\hookrightarrow W$ dels termes de la unió puntual. La seva composició amb la L-equivalència

$$\bigoplus_{i\in I} H_1(S^1)\to\bigoplus_{i\in I} H_1(LS^1)$$

coincideix amb la L-equivalència natural $H_1(W)\to H_1(LW)$. Així, el morfisme $\oplus_{i\in I}H_1(LS^1)\to H_1(LW)$ és una L-equivalència, la qual cosa implica que el seu conucli S és L-acíclic.

Finalment, si el grup $\oplus_{i\in I}A$ és L-local, aleshores la segona i la tercera successions exactes escindeixen (per l'esquerra) perquè ambdues aplicacions

$$\bigoplus_{i\in I} A\rightarrowtail H_1(LW;A) \quad \text{i} \quad \bigoplus_{i\in I} A\rightarrowtail H_1(LW)$$

són L-equivalències. $\square$

A la secció 3.1 hem vist que hi ha moltes situacions en les quals el grup $\oplus_{i\in I}A$ que apareix en el teorema D és L-local quan A ho és. De fet, no sabem cap contraexemple d'aquest resultat. Ara bé, en general no és cert que els grups $T\otimes A$ i S del teorema D siguin zero. Per exemple, sigui L la localització homològica amb coeficients a $\mathbb{Z}/p$ i sigui $W=S^1$. Aleshores la segona successió exacta del teorema D és la següent:

$$0\to \mathbb{Z}_p^{\wedge} \xrightarrow{\not\cong} \mathbb{Z}_p^{\wedge}\otimes\mathbb{Z}_p^{\wedge}\to \mathbb{Z}_p^{\wedge}/\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_p^{\wedge}\to 0.$$

Sigui ara L la localització en un conjunt de primers P i sigui $W=S^1\vee S^1$. Aleshores la tercera successió exacta del teorema D és la següent:

$$0\to \mathbb{Z}_P\oplus\mathbb{Z}_P \xrightarrow{\not\cong} ((\mathbb{Z}*\mathbb{Z})_P)_{\mathrm{ab}}\to S\to 0.$$

El resultat següent es l'anàleg al teorema 3.1.5:

Teorema 3.3.7 *Sigui L un functor idempotent a la categoria homotòpica. Sigui W una unió puntual de circumferències sobre un conjunt d'índexs I. Sigui $A=\pi_1(LS^1)$. Aleshores hi ha una L-equivalència*

$$\mathop{\ast}_{i\in I} A\to\pi_1(LW),$$

el nucli de la qual està contingut en el commutador de $*_{i\in I}A$.

Demostració. Com que la unió puntual de les aplicacions de localització,

$$\vee\eta_i\colon \bigvee_{i\in I} S^1\to\bigvee_{i\in I} LS^1,$$

és una L-equivalència, existeix una única aplicació $\alpha\colon\vee_{i\in I}LS^1\to LW$ que satisfà $\alpha\circ\vee\eta_i=\eta$, on $\eta\colon W\to LW$. En ser α una L-equivalència, el morfisme induït $\alpha_*\colon\pi_1(\vee_{i\in I}LS^1)\to\pi_1(LW)$ és una L-equivalència de grups, on $\pi_1(\vee_{i\in I}LS^1)\cong *_{i\in I}A$. Per tant, com que $\prod_{i\in I}A$ és L-local, la composició

$$\mathop{\ast}_{i\in I} A\twoheadrightarrow\bigoplus_{i\in I} A\hookrightarrow\prod_{i\in I} A$$

s'estén de manera única a $\pi_1(LW)$. O sigui que el nucli de $*_{i\in I}A\to\pi_1(LW)$ està contingut en el nucli de la projecció $*_{i\in I}A\twoheadrightarrow\oplus_{i\in I}A$. $\square$

Donats un functor idempotent L a la categoria homotòpica i una unió puntual de circumferències W, volem demostrar que el conjunt de les classes d'homotopia $[LW, LW]$ és un quasi-anell per l'esquerra. De fet, veurem que aquest resultat és cert per a $[LX, LX]$ per a tot co-H-espai X.

Recordem que un *co-H-espai* és un espai X amb un punt base x_0 juntament amb una aplicació $\gamma\colon X \to X \vee X$, anomenada *comultiplicació*, tal que les composicions $\gamma \circ p_1$ i $\gamma \circ p_2$ són homòtopes a aplicacions constants, on p_1 i p_2 denoten les projeccions de $X \vee X$ a X; o bé, equivalentment, $\iota \circ \gamma = \Delta$, on $\iota\colon X \vee X \hookrightarrow X \times X$ és la inclusió natural i $\Delta\colon X \to X \times X$ és l'aplicació diagonal.

El grup fonamental d'un co-H-espai és o bé trivial o bé lliure [37]. En particular, aquest fet implica que si X és un co-H-espai, aleshores LX no té per què ser-ho, ja que la L-localització d'un grup lliure no sempre és lliure.

Les unions puntuals de circumferències són exemples de co-H-espais, on la comultiplicació és l'aplicació que col·lapsa l'equador a un sol punt. Aleshores, tenint en compte el teorema 3.3.2, obtenim el resultat següent:

Proposició 3.3.8 *Sigui L un functor idempotent qualsevol a la categoria homotòpica. Sigui W una unió puntual de circumferències sobre un conjunt d'índexs I. Aleshores LW és un co-H-espai si i només si W és L-local.* □

La condició de la proposició se satisfà, per exemple, quan $LW \vee LW$ és L-local. En efecte, sigui $\gamma\colon W \to W \vee W$ la comultiplicació a W. Aleshores $L\gamma\colon LW \to L(W \vee W)$ és la comultiplicació a LW, ja que, en ser $LW \vee LW$ un espai L-local, $L(W \vee W) \simeq LW \vee LW$.

Un co-H-espai X amb comultiplicació γ és *homòtopament associatiu* si es compleix que $(\gamma \vee \mathrm{id}) \circ \gamma \simeq (\mathrm{id} \vee \gamma) \circ \gamma$. Un co-H-espai que sigui homòtopament associatiu s'anomena *co-H-grup*, ja que tot co-H-espai homòtopament associatiu té, automàticament, inversos homotòpics. Per exemple, una unió puntual de circumferències és un co-H-grup.

En general, si X és un co-H-grup, aleshores el conjunt de les classes d'homotopia d'aplicacions amb punt base $[X, Y]$ és un grup per a tot espai Y, on la multiplicació està definida en els representants com $fg = (f \vee g) \circ \gamma$.

Teorema 3.3.9 *Sigui L un functor idempotent qualsevol a la categoria homotòpica. Si X és un co-H-grup, aleshores el conjunt de les classes d'homotopia d'aplicacions puntejades $[LX, LX]$ és un quasi-anell per l'esquerra, on les operacions són la composició usual d'aplicacions i la multiplicació ve induïda per la bijecció $[LX, LX] \cong [X, LX]$ i per la comultiplicació de X.*

Demostració. Com que l'aplicació $\eta\colon X \to LX$ indueix una bijecció

$$[LX, LX] \cong [X, LX],$$

si $\gamma\colon X \to X \vee X$ és la comultiplicació de X, aleshores la multiplicació de dues aplicacions $f, g\colon LX \to LX$ està determinada per la condició següent:

$$(f \cdot g) \circ \eta \simeq ((f \circ \eta) \vee (g \circ \eta)) \circ \gamma.$$

Llavors, a partir d'aquesta expressió obtenim que

$$h \circ (f \cdot g) \circ \eta \simeq ((h \circ f) \cdot (h \circ g)) \circ \eta,$$

la qual cosa implica que $[LX, LX]$ és un quasi-anell per l'esquerra. □

Dualment, si X és un H-espai, aleshores $[LX, LX]$ és un quasi-anell per la dreta, per a qualsevol functor idempotent L a la categoria homotòpica. De totes maneres, aquest resultat no aporta cap novetat perquè l'espai LX és un H-espai per a tot H-espai X i per a tot functor idempotent L a la categoria homotòpica, tal i com es demostra a [33]. L'estructura de quasi-anell per la dreta de $[X, X]$ quan X és un H-grup fou considerada per Hubbuck a [51] per tal d'estudiar autoequivalències de H-espais.

Sigui W una unió puntual de circumferències sobre un conjunt d'índexs I. Aleshores, segons el teorema 3.3.9, com que W és un co-H-espai, els isomorfismes

$$[LW, LW] \cong [W, LW] \cong \prod_{i \in I} \pi_1(LW)$$

impliquen que el producte $\prod_{i \in I} \pi_1(LW)$ és un quasi-anell per l'esquerra. És més, usant les definicions es demostra el resultat següent:

Teorema E *Sigui L un functor idempotent qualsevol a la categoria homotòpica. Sigui W una unió puntual de circumferències sobre un conjunt d'índexs I. Sigui $\eta\colon W \to LW$ l'aplicació de localització. Aleshores l'aplicació natural*

$$[W, W] \to [LW, LW]$$

és un morfisme de quasi-anells per l'esquerra i coincideix amb un producte de còpies de η_* indexat per I,

$$\prod_{i \in I} \pi_1(W) \to \prod_{i \in I} \pi_1(LW). \quad \square$$

El resultat d'aquest teorema dóna esperances al fet que el grup $[LW, LW]$ sigui isomorf al grup $\mathrm{Hom}\,(\pi_1(LW), \pi_1(LW))$, malgrat que no sabem si això és cert en general. Tal i com hem explicat després de la proposició 3.3.5, aquest fet és veritat, per exemple, quan LW és un $K(G,1)$ o bé sota altres condicions. Malgrat que no està demostrat que $LW = K(G,1)$ per a tot functor idempotent L a la categoria homotòpica, tampoc no es coneix cap contraexemple.

Capítol 4

Preservació d'estructures a la categoria homotòpica

En el nostre article [3] es descriu un model per a la localització en conjunts de primers mitjançant grups simplicials (recordem que la categoria homotòpica dels grups simplicials és equivalent a la categoria homotòpica dels CW-complexos [45]). Aquest model té alguns avantatges i alguns inconvenients respecte d'altres construccions de la localització.

Els avantatges més rellevants d'aquest nou model per a aquesta memòria són els següents. D'una banda, proporciona un bon control de l'homotopia en dimensions baixes; en concret, si $\pi_k(X) \cong \pi_k(Y)$ per a tot $k \leq n$ (on els espais X i Y no són necessàriament nilpotents), aleshores $\pi_k(X_P) \cong \pi_k(Y_P)$ per a tot $k \leq n$ i tot conjunt de primers P. D'altra banda, el nostre model de localització a la categoria dels grups simplicials es relativitza molt fàcilment a una localització functorial fibra a fibra.

En aquest capítol comencem exposant la nostra construcció i les conseqüències esmentades. Aleshores utilitzem aquestes conseqüències per a demostrar que les localitzacions en conjunts de primers preserven certs tipus d'homotopia.

En primer lloc, demostrem que les localitzacions en conjunts de primers transformen els espais que tenen tots els grups d'homotopia finits en espais que també tenen tots els grups d'homotopia finits. Aquest resultat està motivat pel fet que això mateix es compleix per a la R-compleció de Bousfield–Kan, tal i com consta a [15, VII.4]. Un corol·lari que cal destacar és que si X és un $K(G,1)$ amb G un grup finit, aleshores la P-localització X_P en un conjunt de primers P qualsevol és un espai que té tots els grups d'homotopia finits (que, per tant, són de P-torsió).

En segon lloc, demostrem que les localitzacions en conjunts de primers envien espais virtualment nilpotents a espais virtualment nilpotents. Aquest resultat s'havia demostrat per a grups a [21], però havia quedat pendent de veure-ho per a espais.

A la darrera secció del capítol considerem l'exemple concret de l'ampolla de Klein, que és un espai d'Eilenberg–Mac Lane amb grup fonamental virtualment nilpotent, i estudiem amb detall l'efecte de totes les construccions homotòpiques que hem estat considerant: les localitzacions en conjunts de primers (que ja s'havien tractat a [17]), la R-compleció de Bousfield–Kan per a $R \subseteq \mathbb{Q}$ i $R = \mathbb{Z}/p$, i les localitzacions homològiques. En el cas de les P-localitzacions i de les R-complecions s'obté sempre un espai de tipus $K(G,1)$, mentre que la localització homològica entera (i, més generalment, la localització homològica respecte d'un subanell dels racionals on 2 no sigui invertible) té grups d'homotopia superiors no trivials. Per tant, l'ampolla de Klein no és un espai $\mathbb{Z}_P$-bo quan $2 \in P$ (malgrat que tots els espais virtualment nilpotents són $\mathbb{Q}$-bons i $\mathbb{Z}/p$-bons per a tot primer p, tal i com es demostra a [35]).

La major part dels resultats d'aquest capítol es recullen a [4].

4.1 Un nou model per a la P-localització

Sigui SS_0 la categoria dels conjunts simplicials reduïts; és a dir, conjunts simplicials amb un únic símplex en dimensió 0 o vèrtex. Sigui SGr la categoria dels grups simplicials. Aleshores existeix un parell de functors adjunts [52, § 10],

$$G\colon SS_0 \to SGr \quad \text{i} \quad \overline{W}\colon SGr \to SS_0,$$

que es defineixen de la manera següent. La construcció G de Kan [52, § 10] és l'anàleg simplicial de l'espai de llaços Ω i assigna a cada conjunt simplicial X un grup simplicial lliure GX (recordem que un grup simplicial A és lliure si té una base estable per degeneracions; és a dir, si existeix un conjunt de símplexs S, anomenat base, tal que A_n és un grup lliure generat lliurement per $S \cap A_n$, per a tot n, i $s_i x \in S \cap A_{n+1}$, per a tot $x \in S \cap A_n$ i per a tota degeneració s_i amb $0 \le i \le n$.):

- $(GX)_n$ és el grup amb un generador $\overline{x}$ per a cada $x \in X_{n+1}$ i una relació $\overline{s_0 y} = 1$ per a cada $y \in X_n$.

- Els operadors cara i degeneració vénen donats per:

$$\begin{aligned} \delta_0 \overline{x} &= \overline{(d_1 x)} \cdot \overline{(d_0 x)^{-1}}; \\ \delta_i \overline{x} &= \overline{(d_{i+1} x)} \text{ si } i > 0; \\ \sigma_i \overline{x} &= \overline{(s_{i+1} x)} \text{ si } i \geq 0. \end{aligned}$$

El functor $\overline{W}$ és un classificador per a fibrats principals que assigna a un grup simplicial A un complex de Kan $\overline{W}A$; és a dir, un conjunt simplicial que satisfà la condició d'extensió (recordem que un conjunt simplicial X satisfà la condició d'extensió si tota aplicació $f\colon \Lambda^k[n] \to X$ s'estén a una aplicació $g\colon \Delta[n] \to X$) [52, § 10]:

- $(\overline{W}A)_n = A_{n-1} \times \cdots \times A_0$ per a $n > 0$.

- Els operadors cara i degeneració vénen donats per:

$$\begin{aligned} d_0(a_{n-1}, \ldots, a_0) &= (a_{n-2}, \ldots, a_0); \\ d_i(a_{n-1}, \ldots, a_0) &= (\delta_{i-1} a_{n-1}, \ldots, \delta_0 a_{n-i} \cdot a_{n-i-1}, a_{n-i-2}, \ldots, a_0); \\ s_i(a_{n-1}, \ldots, a_0) &= (\sigma_{i-1} a_{n-1}, \ldots, \sigma_0 a_0 \cdot a_{n-i}, e, a_{n-i-1}, \ldots, a_0). \end{aligned}$$

Si R és un subanell dels racionals o bé $R = \mathbb{Z}/p$ amb p un nombre primer i X és un conjunt simplicial reduït, aleshores, segons la proposició IV.4.1 de [15], la R-compleció de Bousfield–Kan $R_\infty X$ de X és dèbilment equivalent a $\overline{W}(GX)^\wedge_R$. En el nostre article [3] descrivim un model per a les localitzacions en conjunts de primers per mitjà de grups simplicials. Aquest nou model ens permet demostrar que la P-localització X_P d'un conjunt simplicial reduït X és dèbilment equivalent a $\overline{W}(GX)_P$, on P denota un conjunt qualsevol de primers.

Seguidament recordem la construcció d'aquest model, així com les seves conseqüències més rellevants per a demostrar que les localitzacions en conjunts de primers envien espais amb tots els grups d'homotopia finits a espais amb tots els grups d'homotopia finits i espais virtualment nilpotents a espais virtualment nilpotents.

4.1.1 Construcció del model

Donat un functor L d'una categoria $\mathcal{C}$ a una categoria $\mathcal{D}$, s'anomena *prolongació simplicial* (o simplement *prolongació*) de L el functor de la categoria dels objectes simplicials sobre $\mathcal{C}$ a la categoria dels objectes simplicials sobre $\mathcal{D}$ que s'obté aplicant L a cada dimensió i als operadors cara i degeneració [28].

Sigui Δ^{op} la categoria oposada a la categoria que té per objectes els conjunts ordenats $[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$ i per morfismes les aplicacions que preserven l'ordre $[n] \to [m]$. Si pensem un objecte simplicial sobre $\mathcal{C}$ com un functor $X\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$, aleshores la prolongació de L assigna a cada objecte X el functor composició

$$\Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{X} \mathcal{C} \xrightarrow{L} \mathcal{D}.$$

Segons el lema 2.1 de [3], tot functor $L\colon SGr \to SGr$ que s'obté com a prolongació d'un functor a la categoria dels grups és un functor simplicial. És a dir, per a tot grup simplicial A i per a tot conjunt simplicial X hi ha un morfisme de grups simplicials

$$LA \otimes X \to L(A \otimes X),$$

natural en A i en X, que és la identitat quan X es redueix a un únic punt. (Recordem que si A és un grup simplicial i X és un conjunt simplicial, definim $A \otimes X$ com el grup simplicial tal que $(A \otimes X)_n$ és un producte lliure de còpies de A_n indexades per X_n.)

Sigui P un conjunt de primers i sigui $L\colon Gr \to Gr$ el functor de P-localització a la categoria dels grups Gr. Denotem per L_P la prolongació de L a la categoria dels grups simplicials SGr. Explícitament, aquest functor es defineix com segueix:

- si A és un grup simplicial, aleshores $L_P A$ és el grup simplicial tal que $(L_P A)_n = L(A_n)$, per a tot n, i amb operadors cara i degeneració

  $$\tilde{d}_i = Ld_i\colon (L_P A)_n \to (L_P A)_{n-1} \quad \text{i} \quad \tilde{s}_i = Ls_i\colon (L_P A)_n \to (L_P A)_{n+1},$$

  on $d_i\colon A_n \to A_{n-1}$ i $s_i\colon A_n \to A_{n+1}$. Les identitats simplicials es compleixen, ja que L és un functor.

- Si $f\colon A \to B$ és un morfisme de grups simplicials, és a dir, f és una successió de morfismes de grups $\{f_n\colon A_n \to B_n\}$, aleshores $L_P f$ es defineix com

$$(L_P f)_n = L(f_n)\colon (L_P A)_n \to (L_P B)_n.$$

Com que $L_P f$ commuta amb els operadors cara i degeneració, $L_P f$ és un morfisme de grups simplicials.

Observem que L_P és realment un functor, ja que satisfà $L_P(\mathrm{id}_G) = \mathrm{id}_{L_P G}$ i $L_P(f \circ g) = L_P f \circ L_P g$.

Sigui X un conjunt simplicial reduït. Aleshores podem aplicar-li la construcció G de Kan i obtenim un grup simplicial lliure GX. Sigui P un conjunt qualsevol de primers i sigui L_P la prolongació del functor de P-localització a la categoria dels grups. Aleshores $L_P(GX)$ és un grup simplicial P-local. El teorema següent, que és el resultat principal del nostre article [3, teorema 4.6], ens diu que si apliquem a $L_P(GX)$ el functor $\overline{W}$, llavors obtenim un conjunt simplicial reduït que és dèbilment equivalent a la P-localització de X.

Teorema 4.1.1 *Sigui P un conjunt de primers i sigui X un conjunt simplicial reduït. Aleshores*

$$X_P \simeq \overline{W} L_P(GX). \quad \square$$

A la pràctica, però, hom acostuma a treballar amb CW-complexos connexos en comptes de conjunts simplicials reduïts. Veiem, doncs, com podem estendre la construcció del teorema 4.1.1 per a obtenir un model manejable per a la P-localització de CW-complexos connexos.

Sigui X un CW-complex connex. Suposem que X té una sola 0-cel·la. En cas contrari, substituïm X per un CW-complex homotòpicament equivalent a ell i amb una sola 0-cel·la (això sempre es pot fer perquè col·lapsar un arbre maximal no canvia el tipus d'homotopia). Sigui J un grup simplicial lliure amb un generador no degenerat en dimensió n per a cada $(n+1)$-cel·la de X [53]. Aleshores J i el grup simplicial lliure GX que s'obté en aplicar el functor G de Kan al complex singular reduït de X són dèbilment equivalents; és a dir, existeix un morfisme de grups simplicials $f\colon J \to GX$ que indueix isomorfismes als grups d'homotopia. De fet, com que J i GX són grups simplicials lliures, aleshores la proposició 6.5 de [52] implica que f és una equivalència homotòpica de grups simplicials; és a dir, existeix un morfisme

$g\colon GX \to J$ de grups simplicials tal que $g \circ f$ i $f \circ g$ són homotòpicament equivalents a id_J i a id_{GX}, respectivament, a SGr. (Recordem que dos morfismes $f, g\colon A \to B$ de grups simplicials són homotòpicament equivalents a SGr si existeix un morfisme $H\colon A \otimes \Delta[1] \to B$, anomenat equivalència homotòpica simplicial, tal que $H_0 = f$ i $H_1 = g$.) Aleshores obtenim el resultat següent:

Teorema 4.1.2 *Sigui P un conjunt de primers i sigui X un conjunt simplicial reduït. Si J és un grup simplicial lliure dèbilment equivalent a GX, aleshores $\overline{W}L_P J \simeq X_P$.*

Demostració. Com que J és un grup simplicial lliure, la proposició 6.5 de [52] ens assegura que hi ha una equivalència homotòpica $f\colon J \to GX$ de grups simplicials. Pel lema 2.1 de [3], $L_P f$ és una equivalència homotòpica de grups simplicials. Per tant, l'aplicació induïda $\overline{W}L_P J \to \overline{W}L_P GX$ és una equivalència homotòpica i es conclou aplicant el teorema 4.1.1. □

El teorema 4.1.2 continua essent cert si en comptes de suposar que J és lliure suposem que els morfismes

$$H_k(J_n; A) \to H_k(LJ_n; A)$$

induïts per la P-localització $J_n \to LJ_n$ són isomorfismes per a tot k i n i per a tot mòdul P-local A sobre $\pi_0(L_P J)$. Això es deu al fet que aquesta és realment la propietat necessària per tal que sigui vàlida la demostració del teorema 4.1.1; vegeu [3].

4.1.2 Conseqüències

Gràcies al fet que la nostra construcció és dimensió a dimensió, aquest nou model per al functor de P-localització ens permet obtenir un control de l'homotopia en dimensions baixes. Concretament, si els n-esquelets de dos CW-complexos o bé dos conjunts simplicials X i Y són isomorfs, aleshores els n-esquelets de X_P i de Y_P també ho són, on $n \geq 0$. El mateix passava amb la R-compleció de Bousfield–Kan [15], on R denota un subanell dels racionals o bé $R = \mathbb{Z}/p$ amb p un nombre primer. El resultat anàleg a la proposició IV.5.1 de [15] en el cas de la P-localització és el següent:

Teorema 4.1.3 *Sigui P un conjunt de primers. Si $f\colon X \to Y$ és una aplicació d'espais tal que $\pi_k(f)\colon \pi_k(X) \to \pi_k(Y)$ és un isomorfisme per a tot $k \leq n$ i un epimorfisme per a $k = n+1$, aleshores el morfisme $\pi_k(X_P) \to \pi_k(Y_P)$ és un isomorfisme per a $k \leq n$ i un epimorfisme per a $k = n+1$, on $n \geq 0$.* $\square$

Dit d'una altra manera, si la fibra homotòpica d'una aplicació $f\colon X \to Y$ és n-connexa per a cert $n \geq 1$, aleshores la fibra homotòpica de $f_P\colon X_P \to Y_P$ també és n-connexa. Observem que aquest fet s'aplica, en particular, a les fibracions

$$K(\pi_{n+1}(X), n+1) \to P_{n+1}X \to P_nX,$$

on P_nX denota la n-peça de Postnikov d'un CW-complex X. És a dir, si

$$X \to \cdots \to P_nX \to P_{n-1}X \to \cdots$$

denota la torre de Postnikov d'un CW-complex X, aleshores l'aplicació induïda

$$X_P \to \varprojlim (P_nX)_P$$

és una equivalència homotòpica.

La segona conseqüència important que volem destacar del nou model obtingut per a les localitzacions en conjunts de primers és el fet que es relativitza fàcilment a una P-localització fibra a fibra, on P denota un conjunt qualsevol de primers.

La P-localització fibra a fibra fou descrita per a espais nilpotents per Llerena a [60] i per May a [62]. Posteriorment, Dror Farjoun dóna una definició més general de la localització fibra a fibra a [33, 1.F]. A continuació presentem una construcció detallada de la P-localització fibra a fibra, usant la nostra construcció de la P-localització.

Sigui $F \to E \to B$ una fibració a la categoria dels conjunts simplicials reduïts. Per tant, implícitament estem suposant que l'aplicació $f\colon E \to B$ és exhaustiva i que el morfisme induït $\pi_1(f)\colon \pi_1(E) \to \pi_1(B)$ és un epimorfisme. Segons [72, II.3.10], l'epimorfisme $Gf\colon GE \to GB$ induït per f és una fibració de grups simplicials amb fibra el grup simplicial K, on $K_n = \ker(Gf)_n$. A més, el morfisme natural $GF \to K$, així com la seva aplicació adjunta $F \to \overline{W}K$, és una equivalència dèbil [72, II.3.11].

Lema 4.1.4 *El nucli K de l'epimorfisme $Gf\colon GE \to GB$ és un grup simplicial lliure.*

DEMOSTRACIÓ. Com que $(GE)_n$ és lliure per a tot n, el subgrup K_n també és lliure per a tot n. Per tant, per a demostrar que K és lliure, només cal determinar una base de K_n, per a cada n, tal que sigui estable per les degeneracions de K. Per evitar complicar la notació, denotarem els operadors degeneració de tots els grups simplicials amb la mateixa lletra s_i. Sigui $s_i\colon (GE)_{n-1} \to (GE)_n$ el morfisme generat per $s_{i+1}\colon E_n \to E_{n+1}$, per a $i = 0, \ldots, n-1$. Com que, per definició, el grup $(GB)_n$ és lliure en el conjunt $B_{n+1} \setminus s_0(B_n)$, per a cada n, podem definir, de forma inductiva, morfismes

$$\sigma_n\colon (GB)_n \to (GE)_n,$$

imposant que $\sigma_n \circ s_i = s_i \circ \sigma_{n-1}$, per a $i = 0, \ldots, n-1$, on $n \geq 1$, i que $(Gf)_n \circ \sigma_n$ sigui la identitat per a tot n. Aleshores la imatge de σ_n és un sistema de Schreier (vegeu [29, definició 4.4]) dels representants de les classes del nucli K_n en $(GE)_n$. Per tant, segons el corol·lari 4.7 de [29], el grup K_n està generat lliurement pels elements

$$\sigma_n(w)\, x\, \sigma_n((Gf)_n(x))^{-1}\, \sigma_n(w)^{-1},$$

on $w \in (GB)_n$ i $x \in E_{n+1} \setminus s_0(E_n) \setminus \sigma_n(B_{n+1} \setminus s_0(B_n))$. La nostra elecció de σ_n ens assegura que aquests elements formen una base que és tancada per les degeneracions de GE i, per tant, per les degeneracions de K. $\square$

Ara considerem, per a cada n, la successió exacta

$$K_n \rightarrowtail (GE)_n \twoheadrightarrow (GB)_n$$

i li apliquem el functor L de P-localització relatiu descrit a [21] per tal d'obtenir el diagrama commutatiu següent:

$$\begin{array}{ccccc} K_n & \rightarrowtail & (GE)_n & \twoheadrightarrow & (GB)_n \\ \downarrow & & \downarrow_{\epsilon_n} & & \downarrow_{\mathrm{id}} \\ LK_n & \rightarrowtail & X_n & \twoheadrightarrow & (GB)_n. \end{array} \tag{4.1.1}$$

Aquest diagrama és universal entre tots els morfismes de l'extensió superior a extensions amb nucli P-local a la categoria de les extensions de grups [21, teorema 1.4]. Aquest fet ens permet dotar la successió de grups X_n

d'una estructura de grup simplicial que denotem per X. D'aquesta manera, obtenim una fibració $X \to GB$ de grups simplicials amb fibra $L_P K$, així com un diagrama commutatiu de fibracions

$$\begin{array}{ccccc} F & \to & E & \to & B \\ \downarrow_l & & \downarrow_e & & \downarrow_{\simeq} \\ \overline{W}L_P K & \to & \overline{W}X & \to & \overline{W}GB, \end{array} \tag{4.1.2}$$

on l és la composició $F \to \overline{W}K \to \overline{W}L_P K$ i e és l'aplicació adjunta de $\epsilon \colon GE \to X$. El teorema següent justifica el fet d'anomenar el diagrama (4.1.2) la P-localització fibra a fibra de la fibració donada.

Teorema 4.1.5 *L'aplicació $l \colon F \to \overline{W}L_P K$ és una P-localització i l'aplicació $e \colon E \to \overline{W}X$ és una P-equivalència de conjunts simplicials reduïts.*

Demostració. La primera part del teorema és una conseqüència immediata del teorema 4.1.2, ja que, pel lema 4.1.4, K és un grup simplicial lliure que és dèbilment equivalent a GF. Per a provar la segona part del teorema utilitzem la caracterització de les P-equivalències descrita en el teorema 1.2.4. Segons la proposició 1.3 de [21], per a tot n, el morfisme ϵ_n del diagrama (4.1.1) és una P-equivalència. En primer lloc, com que ϵ_0 i ϵ_1 són P-equivalències, el teorema 4.1 de [3] implica que el morfisme $\pi_0(GE) \to \pi_0(X)$ induït per ϵ_0 i, per tant, $\pi_1(E) \to \pi_1(\overline{W}X)$, és una P-equivalència de grups. Ara sigui A un mòdul P-local sobre $L_P\pi_0(X)$. Aleshores el diagrama (4.1.2) indueix un morfisme de successions espectrals de primer quadrant de cohomologia amb coeficients a A [73, proposició 2.1]. En ser l'aplicació l del diagrama (4.1.2) una P-equivalència, obtenim un isomorfisme $l^n \colon H^n(\overline{W}L_P K; A) \to H^n(F; A)$ per a tot n. Per tant, $e^n \colon H^n(E; A) \xrightarrow{\cong} H^n(\overline{W}X; A)$ i així l'aplicació e és una P-equivalència de conjunts simplicials reduïts. $\square$

En particular, recordem el teorema 9.2 de [20], el qual s'obté com a conseqüència immediata del teorema 4.1.5:

Corol·lari 4.1.6 *Sigui P un conjunt de primers i sigui Q un grup de P-torsió. Si $Y \to X \to K(Q,1)$ és una fibració, aleshores $Y_P \to X_P \to K(Q,1)$ també és una fibració.* $\square$

4.2 Espais amb tots els grups d'homotopia finits

Els espais amb tots els grups d'homotopia finits són molt especials. Tal i com s'explica a [15, VII.4], els espais d'aquest tipus són R-bons per a tot subanell R dels racionals o bé $R = \mathbb{Z}/p$ amb p un nombre primer. És a dir, si X és un espai amb tots els grups d'homotopia finits, aleshores la seva localització homològica amb coeficients a R i la seva R-compleció de Bousfield–Kan coincideixen, $X_{HR} \simeq R_\infty X$.

Sigui p un nombre primer qualsevol i sigui X un espai amb tots els grups d'homotopia finits. Aleshores, segons la proposició 8.3 de [22], com que X té tots els grups d'homotopia finits, l'espai $X_{(p)}$ és nilpotent i, en conseqüència, $X_{(p)} \simeq (\mathbb{Z}_{(p)})_\infty X$. A més, com que tots els grups d'homotopia de X són finits, la proposició VII.4.1 de [15] implica que existeix una aplicació natural

$$(\mathbb{Z}_{(p)})_\infty X \to X_p^\wedge$$

que és una equivalència homotòpica, on $X_p^\wedge$ denota la $\mathbb{Z}/p$-compleció de Bousfield–Kan de X. En conseqüència, si prenem un conjunt de primers P format per un sol nombre primer p, aleshores combinant tots els resultats que hem esmentat obtenim el següent:

Proposició 4.2.1 *Sigui p un nombre primer. Si X és un espai amb tots els grups d'homotopia finits, aleshores*

$$X_{(p)} \simeq X_{H\mathbb{Z}_{(p)}} \simeq (\mathbb{Z}_{(p)})_\infty X \simeq X_p^\wedge \simeq X_{H\mathbb{Z}/p}. \quad \square$$

Si X és un espai amb tots els grups d'homotopia finits i $R = \mathbb{Z}/p$ amb p un nombre primer qualsevol, aleshores, per la proposició VII.4.1 de [15], els grups d'homotopia de $X_{H\mathbb{Z}/p} \simeq X_p^\wedge$ són p-grups finits. Seguidament demostrem que el mateix resultat és cert per a la P-localització de X.

Teorema F *Sigui P un conjunt de primers. Si X és un espai amb tots els grups d'homotopia finits, aleshores X_P també és un espai amb tots els grups d'homotopia finits, que són de P-torsió.*

Demostració. Com que $\pi_1(X)$ és un grup finit, el morfisme de grups $\eta\colon \pi_1(X) \to (\pi_1(X))_P$ és exhaustiu i, per tant, $\pi_1(X_P) \cong (\pi_1(X))_P$ és un grup finit. A més, el nucli de η, que denotem per N, és el subgrup normal de $\pi_1(X)$ generat per tots els elements de P'-torsió de $\pi_1(X)$ [76]. En ser X un espai connex, existeix una bijecció natural,

$$[X, K((\pi_1(X))_P, 1)] \cong \mathrm{Hom}\,(\pi_1(X), (\pi_1(X))_P),$$

entre les classes d'homotopia d'aplicacions $X \to K((\pi_1(X))_P, 1)$ i el conjunt dels morfismes $\pi_1(X) \to (\pi_1(X))_P$. Sigui $f\colon X \to K((\pi_1(X))_P, 1)$ un representant de la classe d'homotopia $[f]$ corresponent a η. Sigui Y la fibra homotòpica de f. En particular, observem que $\pi_1(Y) \cong N$ és un grup generat per elements de P'-torsió i, per tant, $\pi_1(Y_P) \cong (\pi_1(Y))_P = \{1\}$. És a dir, l'espai Y_P és 1-connex. D'altra banda, la fibració

$$Y_P \to X_P \to K((\pi_1(X))_P, 1),$$

obtinguda aplicant el corol·lari 4.1.6 a la fibració $Y \to X \to K((\pi_1(X))_P, 1)$, ens diu que $\pi_n(X_P)$ és un grup finit per a tot $n \geq 2$ si i només si $\pi_n(Y_P)$ és un grup finit per a tot $n \geq 2$.

Recordem que tot espai amb grups d'homotopia finits té els grups d'homologia finits. Per tant, l'espai Y té els grups d'homologia $H_n(Y)$ finits per a tot n. En particular, $H_n(Y; \mathbb{Z}_P) \cong H_n(Y) \otimes \mathbb{Z}_P$ és un grup finit per a tot $n > 0$. Aleshores, com que l'espai Y_P és 1-connex, pel teorema II.3B de [49], $H_n(Y_P) \cong H_n(Y_P; \mathbb{Z}_P)$, per a tot n. Així doncs, Y_P és un espai 1-connex amb tots els grups d'homologia finits i, en conseqüència, $\pi_n(Y_P)$ és un grup finit, per a tot $n \geq 2$; vegeu [82, § 9.6]. A més, un grup finit és P-local si i només si és de P-torsió [76]. $\square$

Tal i com hem explicat al primer capítol, tant les localitzacions en conjunts de primers com les localitzacions homològiques són f-localitzacions amb f una aplicació entre unions puntuals de circumferències. El resultat que acabem de demostrar motiva la pregunta següent:

Pregunta Sigui $f\colon \vee S^1 \to \vee S^1$ una aplicació qualsevulla. És cert que la f-localització d'un espai amb tots els grups d'homotopia finits és un espai amb tots els grups d'homotopia finits?

El treball desenvolupat per Rodríguez a [77] sobre localitzacions d'espais respecte d'aplicacions entre unions puntuals de circumferències ens permet respondre parcialment la pregunta quan X és un espai nilpotent. Si X és un espai 1-connex, aleshores s'obté una resposta positiva, tal i com veurem tot seguit.

Sigui f una aplicació entre unions puntuals de circumferències i sigui $\varphi = \pi_1(f)$ el morfisme induït al grup fonamental. El teorema 4.3.3 i la proposició 4.5.5 de [77] impliquen que els espais nilpotents f-locals es poden caracteritzar algebraicament de la manera següent: un espai nilpotent X és f-local si i només si $\pi_k(X)$ és un grup φ-local, per a tot k. Aquesta caracterització generalitza el teorema 5.5 de [10], on es demostra aquest resultat per a les localitzacions homològiques.

Si N és un grup nilpotent, aleshores la φ-localització de N coincideix amb la seva localització homològica amb coeficients en algun anell R [77, corol·lari 4.2.5]. En conseqüència, un espai nilpotent X és f-local si i només si X és $H_*(\,-\,;R)$-local per a algun anell R.

Sigui f una aplicació entre unions puntuals de circumferències. Aleshores el functor $L = L_f$ és π_1-compatible; és a dir, $\pi_1(L_f X) \cong L_\varphi(\pi_1 X)$ per a tot espai X, on $\varphi = \pi_1(f)$ és el morfisme induït per f al grup fonamental. Per tant, les f-localitzacions transformen espais 1-connexos en espais 1-connexos, la qual cosa implica que $L_f X \simeq X_{HR}$ per a tot espai 1-connex X i per a cert anell R. Així doncs,

Proposició 4.2.2 *Sigui $L = L_f$ amb f una aplicació entre unions puntuals de circumferències. Si X és un espai 1-connex que té tots els grups d'homotopia finits, aleshores l'espai 1-connex LX té tots els grups d'homotopia finits.* $\square$

No se sap si les localitzacions respecte d'aplicacions entre unions puntuals de circumferències transformen espais nilpotents en espais nilpotents. Si aquest resultat fos cert, aleshores aquest tipus de localitzacions serien sempre localitzacions homològiques i, en conseqüència, podríem estendre el resultat de la proposició 4.2.2 a espais nilpotents.

Sigui f una aplicació entre unions puntuals de circumferències. El problema de saber si les f-localitzacions preserven la nilpotència dels espais no és fàcil. Com hem vist en el capítol 2, si $\varphi = \pi_1(f)$ és el morfisme induït per f al grup fonamental, aleshores la φ-localització d'un grup nilpotent és un grup nilpotent. El problema és saber si l'acció del grup fonamental sobre els grups d'homotopia superiors continua essent nilpotent quan localitzem un espai nilpotent respecte de l'aplicació f.

4.3 Espais virtualment nilpotents

Un grup G és *virtualment nilpotent* si conté un subgrup normal nilpotent d'índex finit. Per tant, existeix una extensió $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$, on N és un grup nilpotent i Q és un grup finit. Un espai topològic X s'anomena *virtualment nilpotent* si el seu grup fonamental $\pi_1(X)$ és virtualment nilpotent i, per a tot $n \geq 2$, $\pi_1(X)$ conté un subgrup normal nilpotent d'índex finit que actua nilpotentment sobre $\pi_n(X)$ [35].

Una propietat molt important dels espais virtualment nilpotents és que el tipus d'homotopia de la seva localització homològica amb coeficients en un subanell dels racionals està completament determinat per informació en cada nombre primer i per informació racional de la manera següent [35]:

Teorema 4.3.1 *Sigui R un subanell dels racionals i sigui P la suma directa de $\mathbb{Z}/p$ per a tot primer p. Si X és un espai virtualment nilpotent, aleshores el quadrat aritmètic*

$$\begin{array}{ccc} X_{HR} & \to & X_{H(P\otimes R)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{H\mathbb{Q}} \simeq (X_{HR})_{H\mathbb{Q}} & \to & (X_{H(P\otimes R)})_{H\mathbb{Q}} \end{array}$$

és un pull-back homotòpic. $\square$

Sigui X un espai virtualment nilpotent. D'acord amb la proposició 3.4 de [35], si $R = \mathbb{Q}$ o bé $R = \mathbb{Z}/p$ amb p un nombre primer, aleshores l'espai X és R-bo i $X_{HR} \simeq R_\infty X$ és un espai virtualment nilpotent. Per tant, usant el quadrat aritmètic del teorema 4.3.1, obtenim que si R és un subanell dels racionals, aleshores X_{HR} també és un espai virtualment nilpotent.

En aquesta secció demostrem que les localitzacions en conjunts de primers també transformen espais virtualment nilpotents en espais virtualment nilpotents. El lema següent resol un problema tècnic que es planteja en el camí que hem seguit per a demostrar aquest resultat:

Lema 4.3.2 *Sigui $A \overset{\iota}{\rightarrowtail} B \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} C$ una successió exacta. Sigui $\beta\colon B \to D$ una aplicació tal que la composició $\beta \circ \iota\colon A \to D$ és exhaustiva. Aleshores l'aplicació $\gamma\colon B \to C \times D$ tal que $\gamma(b) = (\alpha(b), (\beta \circ \iota)(b))$ és exhaustiva.*

Demostració. Sigui $(c, d) \in C \times D$ un element qualsevol. Com que α i $\beta \circ \iota$ són aplicacions exhaustives, existeixen $b \in B$ i $a \in A$ tals que

$$\alpha(b) = c \quad \text{ i } \quad (\beta \circ \iota)(a) = d\,\beta(b)^{-1}.$$

Aleshores

$$\gamma(ab) = (\alpha(ab), (\beta \circ \iota)(ab)) = (\alpha(a)\alpha(b), (\beta \circ \iota)(a)(\beta \circ \iota)(b)) = (c, d)$$

i, per tant, γ és exhaustiva. $\square$

El resultat següent és molt important per a nosaltres. D'una banda, és l'ingredient clau de la demostració del fet que les localitzacions en conjunts de primers envien espais virtualment nilpotents a espais virtualment nilpotents. D'altra banda, és un resultat indispensable en l'estudi dels grups d'homotopia de les complecions i localitzacions d'espais virtualment nilpotents en nombres primers que fem en el capítol següent.

Teorema 4.3.3 *Sigui P un conjunt de primers. Sigui $Z \to Y \to K(F,1)$ una fibració amb Z un espai nilpotent i F un grup finit generat per elements de P'-torsió. Aleshores Y_P és un espai nilpotent.*

Demostració. Anem a veure que l'espai Y és P-equivalent a un espai nilpotent; és a dir, que existeix una aplicació $Y \to \overline{Y}$ amb $\overline{Y}$ nilpotent que és una P-equivalència. Aleshores, com que sabem que el functor de P-localització preserva espais nilpotents [49], tindrem que $Y_P \simeq \overline{Y}_P$ és un espai nilpotent.

Comencem aplicant el teorema 4.1.5 a la fibració donada per a obtenir el diagrama commutatiu de fibracions següent:

$$\begin{array}{ccccc} Z & \to & Y & \to & K(F,1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z_P & \to & Y' & \to & K(F,1), \end{array}$$

on l'aplicació $Y \to Y'$ és una P-equivalència i l'espai Z_P és nilpotent [49]. Suposem que F està generat pels elements de P'-torsió $x_1, \ldots, x_r$. Aleshores, per a cada $1 \leq i \leq r$, considerem la successió exacta

$$\pi_1(Z_P) \rightarrowtail \pi^{-1}(\langle x_i \rangle) \twoheadrightarrow \langle x_i \rangle, \tag{4.3.3}$$

on $\langle x_i \rangle$ és el subgrup de F generat per x_i i $\pi\colon \pi_1(Y') \twoheadrightarrow F$ és el morfisme induït per $Y' \to K(F,1)$. Llavors, com que $\pi_1(Z_P)$ és un grup nilpotent P-local i $\langle x_i \rangle$ té ordre $m \in P'$, la proposició VI.5.9 de [83] ens assegura que la successió exacta (4.3.3) escindeix. Sigui s_i la secció corresponent.

Sigui S el subgrup normal de $\pi_1(Y')$ generat pels elements de P'-torsió $s_1(x_1), \ldots, s_r(x_r)$. En ser Y' un espai connex, hi ha una correspondència bijectiva natural,

$$[Y', K(\pi_1(Y')/S, 1)] \cong \mathrm{Hom}\,(\pi_1(Y'), \pi_1(Y')/S),$$

entre el conjunt de les classes d'homotopia d'aplicacions de l'espai Y' a $K(\pi_1(Y')/S, 1)$ i el conjunt dels morfismes de grups de $\pi_1(Y')$ a $\pi_1(Y')/S$. Siguin $pr\colon \pi_1(Y') \to \pi_1(Y')/S$ la projecció canònica i $[f]$ la classe d'homotopia corresponent a $[Y', K(\pi_1(Y')/S, 1)]$. Prenem $f\colon Y' \to K(\pi_1(Y')/S, 1)$ un representant d'aquesta classe i diem M a la fibra homotòpica de f. Aplicant de nou el teorema 4.1.5 obtenim un diagrama commutatiu de fibracions

$$\begin{array}{ccccc} M & \to & Y' & \to & K(\pi_1(Y')/S, 1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M_P & \to & \overline{Y} & \to & K(\pi_1(Y')/S, 1), \end{array}$$

on l'aplicació $Y' \to \overline{Y}$ és una P-equivalència i l'espai M_P és 1-connex, ja que el grup fonamental de M és isomorf a S i, per tant, està generat per elements de P'-torsió. Veiem que l'espai $\overline{Y}$ és nilpotent.

D'una banda, observem que el morfisme $\pi_1(Z_P) \to \pi_1(Y')/S$ és exhaustiu. En efecte, considerem

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(Z_P) & \rightarrowtail & \pi_1(Y') & \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} & F \\ & & \downarrow pr & & \\ & & \pi_1(Y')/S. & & \end{array} \tag{4.3.4}$$

Si $[y] \in \pi_1(Y')/S$, aleshores existeix $y \in \pi_1(Y')$ tal que $pr(y) = [y]$. Com que F està generat pel conjunt d'elements de P'-torsió $x_1, \ldots, x_r$, $\pi(y) = \omega(x_1, \ldots, x_r)$. Ara prenem $z = y \cdot \omega(s_1(x_1), \ldots, s_r(x_r))^{-1}$ i obtenim $\pi(z) = 1$, la qual cosa implica que $z \in \pi_1(Z_P)$. A més, $pr(z) = pr(y) = [y]$ perquè el producte $s_r(x_r)^{-\alpha_r} \cdot \ldots \cdot s_1(x_1)^{-\alpha_1}$ és de S. Aplicant el lema 4.3.2 al diagrama (4.3.4) s'obté que $\pi_1(Y') \to \pi_1(Y')/S \times F$ és una aplicació exhaustiva. Per tant, el lema 5.1 de [35] aplicat a les fibracions

$$Z_P \to Y' \to K(F, 1) \quad \text{i} \quad M \to Y' \to K(\pi_1(Y')/S, 1),$$

on Z_P és un espai nilpotent, implica que el grup $\pi_1(Y')/S$ és nilpotent (de fet, això ja ho sabíem perquè és un quocient de $\pi_1(Z_P)$) i actua nilpotentment sobre $H_*(M;A)$ per a tot grup de coeficients A. En particular, el grup $\pi_1(Y')/S$ actua nilpotentment sobre $H_n(M;\mathbb{Z}_P) \cong H_n(M_P;\mathbb{Z}_P) \cong H_n(M_P)$, per a tot n, on el darrer isomorfisme es deu al fet que M_P és 1-connex [49, teorema II.1B]. Per tant, tenim una fibració

$$M_P \to \overline{Y} \to K(\pi_1(Y')/S, 1),$$

on M_P és 1-connex, és a dir, l'espai M_P té el mateix tipus d'homotopia que el recobridor universal de $\overline{Y}$. Així doncs, l'espai $\overline{Y}$ és nilpotent, ja que $\pi_1(\overline{Y}) \cong \pi_1(Y')/S$ és nilpotent i actua nilpotentment sobre l'homologia del recobridor universal de $\overline{Y}$ [49, II.2.19]. $\square$

En particular, si P és el conjunt buit, és a dir, si racionalitzem, aleshores ens queda el resultat següent:

Corol·lari 4.3.4 *Sigui $Z \to Y \to K(F,1)$ amb Z un espai nilpotent i F un grup finit. Aleshores la racionalització $Y_{(0)}$ de Y és nilpotent.* $\square$

Observem que aquest corol·lari ens diu que la racionalització d'un espai de tipus $K(G,1)$ amb G virtualment nilpotent és sempre un espai nilpotent. Aquest resultat és essencial per a la teoria que desenvolupem en el darrer capítol de la memòria sobre racionalització de varietats.

La darrera eina necessària per a la demostració del fet que les localitzacions en conjunts de primers envien espais virtualment nilpotents a espais virtualment nilpotents és la propietat següent:

Proposició 4.3.5 *Sigui P un conjunt de primers. Si X és un espai que té un recobridor regular finit que és nilpotent, aleshores X_P també té un recobridor regular finit que és nilpotent.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $Z \to X \to K(Q,1)$ una fibració amb Z un espai nilpotent i Q un grup finit. Sigui $F = I_{P'}(Q)$ el P'-aïllador de Q; és a dir, el subgrup de Q generat per tots els elements de P'-torsió de Q. Considerem el diagrama commutatiu de fibracions següent:

$$\begin{array}{ccccc}
Z & \to & Y & \to & K(F,1) \\
\| & & \downarrow & & \downarrow \\
Z & \to & X & \to & K(Q,1) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
* & \to & K(Q_P,1) & = & K(Q_P,1).
\end{array}$$

D'una banda, pel teorema 4.3.3, com que el grup finit F està generat per elements de P'-torsió, l'espai Y_P és nilpotent. D'altra banda, aplicant el corol·lari 4.1.6 a la fibració $Y \to X \to K(Q_P, 1)$ obtenim una fibració

$$Y_P \to X_P \to K(Q_P, 1),$$

que demostra que l'espai X_P té un recobridor regular finit Y_P que és nilpotent. □

Els resultats del teorema 4.3.3 i de la proposició 4.3.5 juntament amb el teorema 4.1.3 ens permeten demostrar el resultat desitjat:

Teorema G *Sigui P un conjunt de primers. Si X és un espai virtualment nilpotent, aleshores X_P és un espai virtualment nilpotent.*

Demostració. Es dedueix de la definició que un espai X és virtualment nilpotent si i només si cada peça de Postnikov P_nX de X té un recobridor regular finit que és nilpotent; és a dir, per a cada n, hi ha una fibració

$$Z_n \to P_nX \to K(Q, 1),$$

on Z_n és un espai nilpotent i Q és un grup finit. Per tant, la proposició 4.3.5 implica que, per a cada n, l'espai $(P_nX)_P$ té un recobridor regular finit que és nilpotent. Considerem, per a cada n, la fibració

$$X\langle n\rangle \to X \to P_nX,$$

on $X\langle n\rangle$ denota el recobridor n-connex de X. Aleshores, segons el teorema 4.1.3, la fibra de l'aplicació $X_P \to (P_nX)_P$ és n-connexa. Per tant, l'espai $P_n(X_P)$ és homotòpicament equivalent a l'espai $P_n(P_nX)_P$, el qual té un recobridor finit que és nilpotent (això es deu al fet que si un espai té aquesta propietat, aleshores cadascuna de les seves peces de Postnikov també la té). Com que això és cert per a cada n, segons la proposició 2.3 de [35], l'espai X_P és virtualment nilpotent. □

4.4 L'ampolla de Klein

A l'inici de la secció anterior hem vist que els espais virtualment nilpotents són $\mathbb{Z}/p$-bons i $\mathbb{Q}$-bons. Ara bé, no és cert que tot espai virtualment nilpotent sigui R-bo quan R és un subanell propi dels racionals. Per exemple, Bousfield i Kan demostren a [15, VII.5.2] que el pla projectiu no és un espai $\mathbb{Z}_P$-bo, on P és un conjunt de primers que conté el 2.

En aquesta secció considerem l'ampolla de Klein, que és un espai virtualment nilpotent de tipus $K(G,1)$, i veiem que no és un espai $\mathbb{Z}_P$-bo, quan P és un conjunt de primers que conté el 2. Concretament, estudiem l'efecte dels functors que estem considerant (localitzacions en primers, localitzacions homològiques i R-complecions per a un subanell R dels racionals o bé $R = \mathbb{Z}/p$ amb p un nombre primer) i descrivim l'espai que s'obté en cada cas.

Sigui $X = K(G,1)$ l'ampolla de Klein, on $G = \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta = 1\rangle$. Aleshores hi ha una successió exacta curta

$$\langle \beta \rangle = \mathbb{Z} \rightarrowtail G \twoheadrightarrow \mathbb{Z} = \langle \alpha \rangle, \tag{4.4.5}$$

on l'acció de $\mathbb{Z} = \langle \alpha \rangle$ sobre $\mathbb{Z} = \langle \beta \rangle$ és el canvi de signe. A més, aquesta successió exacta escindeix i, per tant,

$$G \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}. \tag{4.4.6}$$

Si fem $\alpha^2 = a$ i $\beta = b$, obtenim la presentació següent:

$$G = \langle a, b, \alpha \mid [b,a] = 1, \alpha a = a\alpha, \alpha b = b^{-1}\alpha, \alpha^2 = a\rangle,$$

de manera que G s'inclou en una successió exacta curta

$$\langle b, a \rangle = \mathbb{Z}^2 \rightarrowtail G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2 = \langle \overline{\alpha} \rangle, \tag{4.4.7}$$

on l'acció de $\mathbb{Z}/2$ sobre $\mathbb{Z}^2$ ve donada per la matriu

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

És a dir, el grup G és virtualment nilpotent i, en conseqüència, l'ampolla de Klein és un espai virtualment nilpotent. En particular, aquest fet implica, segons la proposició 3.4 de [35], que X és un espai $\mathbb{Z}/p$-bo per a tot primer p. Per tant,

$$X_{H\mathbb{Z}/p} \simeq X^{\wedge}_p.$$

Considerem la fibració associada a la successió exacta (4.4.7) descrita anteriorment

$$K(\mathbb{Z}^2, 1) \to X \to K(\mathbb{Z}/2, 1) \tag{4.4.8}$$

i anem a comparar els efectes de les localitzacions en conjunts de primers, les localitzacions homològiques i la R-compleció de Bousfield–Kan sobre l'ampolla de Klein.

La fibració (4.4.8) divideix l'estudi en dos casos: quan el conjunt de primers P conté el 2 i quan P no el conté. Comencem per aquest segon cas, el qual és més senzill.

Cas 1: $2 \notin P$

Si P és un conjunt de primers que no conté el 2, aleshores, com que $\mathbb{Z}/2$ està generat per elements de P'-torsió, segons el teorema 4.3.3, l'espai X_P és nilpotent. Per tant, la proposició 8.1 de [22] implica que l'espai X és $\mathbb{Z}_P$-bo i, en conseqüència,

$$X_P \simeq X_{H\mathbb{Z}_P} \simeq (\mathbb{Z}_P)_\infty X.$$

És més, l'espai X_P és anesfèric. Tot i que aquest fet fou demostrat per Casacuberta a [17], a continuació en donem una demostració usant un raonament basat en la demostració del teorema 4.3.3.

Sigui $K((\mathbb{Z}_P)^2, 1) \to E \to K(\mathbb{Z}/2, 1)$ la fibració obtinguda en aplicar la P-localització fibra a fibra a (4.4.8). Recordem que $X_P \simeq E_P$ (per construcció). La successió exacta $(\mathbb{Z}_P)^2 \rightarrowtail \pi_1(E) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2$ associada a aquesta fibració escindeix perquè $H^2(\mathbb{Z}/2; (\mathbb{Z}_P)^2) = 0$. Sigui s la secció corresponent i sigui τ el generador de $\mathbb{Z}/2$. El subgrup normal de $\pi_1(E)$ generat per $s(\tau)$ és $S = \mathbb{Z}_P \rtimes \mathbb{Z}/2$, on $\mathbb{Z}/2$ actua sobre $\mathbb{Z}_P$ per canvi de signe. Aplicant la P-localització fibra a fibra a $K(S, 1) \to E \to K(\mathbb{Z}_P, 1)$ obtenim una fibració

$$K(S, 1)_P \to Z \to K(\mathbb{Z}_P, 1),$$

tal que $E_P \simeq Z_P$. Aleshores, com que S està generat per elements de 2-torsió, l'espai $K(S, 1)_P$ és 1-connex. Per tant, per a tot $n > 0$,

$$H_n(K(S, 1)_P) \cong H_n(K(S, 1)_P; \mathbb{Z}_P) \cong H_n(S; \mathbb{Z}_P) = 0.$$

En conseqüència, l'espai $K(S, 1)_P$ és contràctil, la qual cosa implica que $Z \simeq K(\mathbb{Z}_P, 1)$. Finalment,

$$X_P \simeq E_P \simeq Z_P \simeq K(\mathbb{Z}_P, 1).$$

Observem que en cas que $P = \emptyset$, aleshores

$$X_{(0)} \simeq X_{H\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}_\infty X \simeq K(\mathbb{Q}, 1).$$

Sigui p un primer diferent de 2. L'aplicació de p-localització $X \to X_{(p)}$ de l'espai X és, en particular, una $H_*(\ -\ ;\mathbb{Z}/p)$-equivalència i, per tant, $X_p^\wedge \simeq (X_{(p)})_p^\wedge$, on $X_p^\wedge$ denota la $\mathbb{Z}/p$-compleció de Bousfield–Kan de X. Així doncs, com que hem dit que tot espai virtualment nilpotent és $\mathbb{Z}/p$-bo, obtenim que

$$X_{H\mathbb{Z}/p} \simeq X_p^\wedge \simeq K(\mathbb{Z}_p^\wedge, 1).$$

Cas 2: $2 \in P$

Si P és un conjunt de primers que conté el 2, aleshores X_P no és nilpotent, però sí que és anesfèric i virtualment nilpotent. En concret, aplicant el corol·lari 4.1.6 a (4.4.8), obtenim una fibració

$$K(\mathbb{Z}^2, 1)_P \to K(G, 1)_P \to K(\mathbb{Z}/2, 1),$$

on $K(\mathbb{Z}^2, 1)_P \simeq K((\mathbb{Z}_P)^2, 1)$ i, per tant,

$$X_P = K(G_P, 1)$$

amb $(\mathbb{Z}_P)^2 \rightarrowtail G_P \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2$. De fet, $G_P \cong \mathbb{Z}_P \rtimes \mathbb{Z}_P$, tal i com demostrem a continuació. Aplicant el functor de P-localització a la successió exacta escindida $\mathbb{Z} \rightarrowtail G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ (4.4.5), obtenim una successió exacta escindida $A \rightarrowtail G_P \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_P$, on A és un grup P-local perquè és el nucli d'un morfisme entre grups P-locals. Veiem que, en aquest cas, $A \cong \mathbb{Z}_P$. Només cal observar que podem construir el diagrama commutatiu de successions exactes següent:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z}_P & \rightarrowtail & \mathbb{Z}_P \oplus \mathbb{Z}_P & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}_P \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
A & \rightarrowtail & G_P & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}_P \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
1 & \rightarrowtail & \mathbb{Z}/2 & = & \mathbb{Z}/2,
\end{array}$$

on les columnes són exactes i el morfisme $\mathbb{Z}_P \rightarrowtail \mathbb{Z}_P$ és multiplicació per 2, ja que prové del morfisme $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ (on $\mathbb{Z}$ denota el segon sumand de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$) el qual és multiplicació per 2. Per tant, el diagrama implica que $A \cong \mathbb{Z}_P$.

Si $p = 2$, en ser X un espai $\mathbb{Z}/2$-bo, tenim que $X_{H\mathbb{Z}/2} \simeq X_2^\wedge$. El grup fonamental de la base de la fibració (4.4.8), $\mathbb{Z}/2$, actua nilpotentment sobre l'homologia mòdul 2 de la fibra, $H_*(K(\mathbb{Z}^2, 1); \mathbb{Z}/2)$. Per tant, segons el lema II.4.8 de [15], la $\mathbb{Z}/2$-compleció preserva la fibració (4.4.8) i obtenim una nova fibració:

$$K(\mathbb{Z}^2,1)^\wedge_2 \to K(G,1)^\wedge_2 \to K(\mathbb{Z}/2,1).$$

Així doncs, com que $K(\mathbb{Z}^2,1)^\wedge_2 \simeq K((\mathbb{Z}^\wedge_2)^2,1)$, obtenim que

$$X_{H\mathbb{Z}/2} \simeq X^\wedge_2 \simeq K(G^\wedge_2,1)$$

amb $(\mathbb{Z}^\wedge_2)^2 \rightarrowtail G^\wedge_2 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2$. De fet, tenint en compte la successió exacta (4.4.5), es demostra, de forma anàloga al cas de X_P amb P un conjunt de primers que conté el 2, que $G^\wedge_2 \cong \mathbb{Z}^\wedge_2 \rtimes \mathbb{Z}^\wedge_2$.

Veiem ara que $(\mathbb{Z}_P)_\infty X$ també és un espai anesfèric virtualment nilpotent. Recordem que l'espai $(\mathbb{Z}_P)_\infty X$ és el límit invers d'una torre de fibracions principals

$$\cdots \to (\mathbb{Z}_P)_t X \to (\mathbb{Z}_P)_{t-1} X \to \cdots \to (\mathbb{Z}_P)_{-1} X = *,$$

cadascuna de les quals té fibra connexa (1.2.3):

$$F_t \to (\mathbb{Z}_P)_t X \to (\mathbb{Z}_P)_{t-1} X,$$

on, per a tot n, $\pi_n(F_t)$ és un subgrup de $\pi_{n+t}(((\underline{\mathbb{Z}_P})X)^t)$. L'homologia de l'ampolla de Klein amb coeficients a $\mathbb{Z}_P$ és la següent:

$$H_n(X;\mathbb{Z}_P) = \begin{cases} \mathbb{Z}_P & \text{si} \quad n=0, \\ \mathbb{Z}_P \oplus \mathbb{Z}/2 & \text{si} \quad n=1, \\ 0 & \text{si} \quad n>1. \end{cases}$$

Tenint en compte que, per definició, $\pi_*((\mathbb{Z}_P)^t X) \cong \widetilde{H}_*((\mathbb{Z}_P)^{t-1}X;\mathbb{Z}_P)$, per a tot $t \geq 1$, anem a calcular $((\underline{\mathbb{Z}_P})X)^t$.

- $((\underline{\mathbb{Z}_P})X)^0 = (\mathbb{Z}_P)^1 X \simeq K(\mathbb{Z}_P,1) \times K(\mathbb{Z}/2,1)$, ja que

$$\pi_n((\mathbb{Z}_P)^1 X) \cong H_n((\mathbb{Z}_P)^0 X;\mathbb{Z}_P) \cong H_n(X;\mathbb{Z}_P), \text{ per a tot } n \geq 1.$$

- $((\underline{\mathbb{Z}_P})X)^1 = (\mathbb{Z}_P)^2 X \simeq K(\mathbb{Z}_P,1) \times \prod_{n\geq 1} K(\mathbb{Z}/2,n)$, ja que

$$\pi_n((\mathbb{Z}_P)^2 X) \cong H_n((\mathbb{Z}_P)^1 X;\mathbb{Z}_P) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_P \oplus \mathbb{Z}/2 & \text{si} \quad n=1 \\ \mathbb{Z}/2 & \text{si} \quad n\geq 2. \end{cases}$$

- Suposem que $((\underline{\mathbb{Z}_P})X)^{t-1} \simeq K(\mathbb{Z}_P,1) \times \prod_{n\geq 1} K((\mathbb{Z}/2)^{k_{t-1,n}},n)$, on $k_{t-1,n} \in \mathbb{N}$, i veiem que tenim una expressió anàloga per a $((\underline{\mathbb{Z}_P})X)^t$.

$$\pi_n(((\underline{\mathbb{Z}_P})X)^t) \cong H_n(((\underline{\mathbb{Z}_P})X)^{t-1};\mathbb{Z}_P) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_P \oplus \mathbb{Z}/2 & \text{si} \quad n=1 \\ (\mathbb{Z}/2)^{k_{t,n}} & \text{si} \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Així doncs, $((\underline{\mathbb{Z}_P})X)^t \simeq K(\mathbb{Z}_P,1) \times \prod_{n\geq 1} K((\mathbb{Z}/2)^{k_{t,n}},n)$, $k_{t,n} \in \mathbb{N}$.

Lema 4.4.1 *$\pi_2(\mathbb{Z}_P)_tX$ és un 2-grup abelià finit per a tot t.*

Demostració. Procedim per inducció sobre t. Si $t=0$, aleshores

$$(\mathbb{Z}_P)_0X = ((\underline{\mathbb{Z}_P})X)^0 \simeq K(\mathbb{Z}_P,1) \times K(\mathbb{Z}/2,1).$$

Per tant, $\pi_2((\mathbb{Z}_P)_0X) = 0$. Si $t=1$, aleshores considerem la fibració principal

$$F_1 \to (\mathbb{Z}_P)_1X \to (\mathbb{Z}_P)_0X.$$

A partir de la successió exacta llarga d'homotopia associada a ella,

$$\cdots \to 0 \to \pi_2(F_1) \to \pi_2((\mathbb{Z}_P)_1X) \to 0 \to$$

$$\to \pi_1(F_1) \to \pi_1((\mathbb{Z}_P)_1X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_P \times \mathbb{Z}/2,$$

tenim que $\pi_2((\mathbb{Z}_P)_1X)$ és un 2-grup abelià finit, ja que $\pi_2(F_1)$ és un subgrup de $\pi_3((\mathbb{Z}_P)^2X) = \mathbb{Z}/2$. Suposem ara que $\pi_2((\mathbb{Z}_P)_nX)$ és un 2-grup finit per a tot $n<t$. Anem a veure que $\pi_2((\mathbb{Z}_P)_tX)$ també és un 2-grup abelià finit. De nou, considerem la fibració (1.2.3)

$$F_t \to (\mathbb{Z}_P)_tX \to (\mathbb{Z}_P)_{t-1}X,$$

així com la successió exacta llarga d'homotopia associada a ella:

$$\cdots \to \pi_2(F_t) \to \pi_2((\mathbb{Z}_P)_tX) \to \pi_2((\mathbb{Z}_P)_{t-1}X) \to$$

$$\to \pi_1(F_t) \to \pi_1((\mathbb{Z}_P)_tX) \twoheadrightarrow \pi_1((\mathbb{Z}_P)_{t-1}X).$$

D'una banda, tenim que $\pi_2(F_t)$ és un 2-grup abelià finit perquè és un subgrup de $\pi_{t+2}((\mathbb{Z}_P)^{t+1}X) = (\mathbb{Z}/2)^{k_{t,t+2}}$. D'altra banda, per hipòtesi d'inducció, $\pi_2((\mathbb{Z}_P)_{t-1}X)$ és un 2-grup abelià finit. Per tant, $\pi_2((\mathbb{Z}_P)_tX)$ també és un 2-grup abelià finit. $\square$

Corol·lari 4.4.2 $\pi_1((\mathbb{Z}_P)_\infty X) \cong G^\wedge_{\mathbb{Z}_P}$.

DEMOSTRACIÓ. Acabem de veure que $\pi_2((\mathbb{Z}_P)_t X)$ és un grup abelià finit per a tot t. Per tant, $\lim_{\leftarrow}{}^1 \pi_2((\mathbb{Z}_P)_t X) = 0$ [88, p. 83]. A partir de la successió exacta (1.2.4)

$$\lim_{\leftarrow}{}^1 \pi_2((\mathbb{Z}_P)_t X) \rightarrowtail \pi_1((\mathbb{Z}_P)_\infty X) \twoheadrightarrow \lim_{\leftarrow} \pi_1((\mathbb{Z}_P)_t X)$$

i tenint en compte que $\lim_{\leftarrow} \pi_1((\mathbb{Z}_P)_t X) = G^\wedge_{\mathbb{Z}_P}$ [15, IV.2.4], obtenim l'isomorfisme desitjat. $\square$

De fet, en ser el grup $G^\wedge_{\mathbb{Z}_P}$ el límit invers dels grups $\pi_1((\mathbb{Z}_P)_t K(G,1))$, aprofitant els càlculs fets obtenim que $G^\wedge_{\mathbb{Z}_P}$ s'inclou a la successió exacta següent:

$$\mathbb{Z}_2^\wedge \oplus \mathbb{Z}_P \rightarrowtail G^\wedge_{\mathbb{Z}_P} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2.$$

De fet, anàlogament al cas de la $\mathbb{Z}/2$-compleció i de la P-localització (amb P un conjunt de primers que conté el 2), es demostra que $G^\wedge_{\mathbb{Z}_P} \cong \mathbb{Z}_2^\wedge \rtimes \mathbb{Z}_P$. Veiem ara que els grups d'homotopia superiors de l'espai $(\mathbb{Z}_P)_\infty X$ són nuls i, per tant, l'espai $(\mathbb{Z}_P)_\infty X \simeq K(G^\wedge_{\mathbb{Z}_P}, 1)$ és anesfèric i virtualment nilpotent.

Per a cada t, l'espai $(\mathbb{Z}_P)_t X$ és $\mathbb{Z}_P$-nilpotent [15, III.5.6]. Això ens permet obtenir el pull-back homotòpic següent:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}_P)_t X & \to & \prod_{p\in P} ((\mathbb{Z}_P)_t X)^\wedge_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q}_\infty(\mathbb{Z}_P)_t X & \to & \mathbb{Q}_\infty(\prod_{p\in P} ((\mathbb{Z}_P)_t X)^\wedge_p). \end{array} \tag{4.4.9}$$

Aleshores, la $\mathbb{Z}_P$-torre $X \to (\mathbb{Z}_P)_t X$ per a X (és a dir, per a tot $n \geq 1$ hi ha un pro-isomorfisme $H_n(X; \mathbb{Z}_P) \approx H_n((\mathbb{Z}_P)_t X; \mathbb{Z}_P)$ [15, III.6.1,6.5]) és també una $\mathbb{Z}/p$-torre per a X, per a tot $p \in P$. En efecte, considerem el diagrama següent de successions exactes llargues d'homologia induïdes per la successió exacta curta $\mathbb{Z}_P \overset{\cdot p}{\rightarrowtail} \mathbb{Z}_P \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p$:

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(X;\mathbb{Z}_P) & \to & H_n(X;\mathbb{Z}_P) & \to & H_n(X;\mathbb{Z}/p) & \to \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ H_n((\mathbb{Z}_P)_t X;\mathbb{Z}_P) & \to & H_n((\mathbb{Z}_P)_t X;\mathbb{Z}_P) & \to & H_n((\mathbb{Z}_P)_t X;\mathbb{Z}/p) & \to \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \to & H_{n-1}(X;\mathbb{Z}_P) & \to & H_{n-1}(X;\mathbb{Z}_P) \\ & \downarrow & & \downarrow \\ \to & H_{n-1}((\mathbb{Z}_P)_t X;\mathbb{Z}_P) & \to & H_{n-1}((\mathbb{Z}_P)_t X;\mathbb{Z}_P). \end{array}$$

Aplicant el lema dels cinc per a torres de grups [15, III.2.7] obtenim el pro-isomorfisme desitjat. Aleshores, el lema III.6.2 de [15] implica que, per a tot $p \in P$, $X_p^\wedge \simeq \lim_\leftarrow ((\mathbb{Z}_P)_t X)_p^\wedge$. De manera anàloga es demostra que $\mathbb{Q}_\infty X \simeq \lim_\leftarrow \mathbb{Q}_\infty (\mathbb{Z}_P)_t X$. Així doncs, prenent el límit invers sobre t a (4.4.9), obtenim un nou pull-back homotòpic

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}_P)_\infty X & \rightarrow & \prod_{p\in P} X_p^\wedge \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q}_\infty X & \rightarrow & \lim_\leftarrow \mathbb{Q}_\infty(\prod_{p\in P} ((\mathbb{Z}_P)_t X)_p^\wedge). \end{array}$$

Ja hem vist que cadascun dels espais $X_p^\wedge$ és anesfèric; per tant, el producte $\prod_{p\in P} X_p^\wedge$ és anesfèric. D'altra banda, sabem que $X_{(0)} \simeq X_{H\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}_\infty X$ és un espai anesfèric amb grup fonamental isomorf a $\mathbb{Q}$ (vegeu el cas $2 \notin P$). Així doncs, en ser $\prod_{p\in P} X_p^\wedge$ i $\mathbb{Q}_\infty X$ espais anesfèrics, obtenim que, per a tot $n \geq 2$,

$$\pi_n((\mathbb{Z}_P)_\infty X) \cong \pi_{n+1}(\lim_{\leftarrow} \mathbb{Q}_\infty(\prod_{p\in P} ((\mathbb{Z}_P)_t X)_p^\wedge)).$$

Per a calcular aquests grups d'homotopia, considerem la successió exacta

$$\lim_{\leftarrow}{}^1 \pi_{n+1}(\mathbb{Q}_\infty(\prod_{p\in P} ((\mathbb{Z}_P)_t X)_p^\wedge)) \rightarrowtail \pi_n(\lim_{\leftarrow} \mathbb{Q}_\infty(\prod_{p\in P} ((\mathbb{Z}_P)_t X)_p^\wedge)) \twoheadrightarrow$$

$$\lim_{\leftarrow} \pi_n(\mathbb{Q}_\infty(\prod_{p\in P} ((\mathbb{Z}_P)_t X)_p^\wedge)), \quad (*)$$

associada a la torre $\{\mathbb{Q}_\infty(\prod_{p\in P} ((\mathbb{Z}_P)_t X)_p^\wedge)\}$. Com que l'espai $(\mathbb{Z}_P)_t X$ és nilpotent, la proposició 3.3 de [35] ens diu que $\prod_{p\in P} ((\mathbb{Z}_P)_t X)_p^\wedge$ també és un espai nilpotent. Per tant, per a tot n, tenim un isomorfisme

$$\pi_n(\mathbb{Q}_\infty(\prod_{p\in P} ((\mathbb{Z}_P)_t X)_p^\wedge)) \cong (\prod_{p\in P} \pi_n(((\mathbb{Z}_P)_t X)_p^\wedge))_{(0)}.$$

Lema 4.4.3 *Per a tot $n \geq 2$, el grup abelià $\pi_n((\mathbb{Z}_P)_t X)$ és un 2-grup finit. El grup fonamental $\pi_1((\mathbb{Z}_P)_t X)$ és nilpotent finitament generat.*

Demostració. Procedint per inducció sobre t com en el lema 4.4.1 i usant la successió exacta llarga d'homotopia induïda per la fibració principal

$$F_t \rightarrow (\mathbb{Z}_P)_t X \rightarrow (\mathbb{Z}_P)_{t-1} X,$$

es demostra que $\pi_n((\mathbb{Z}_P)_t X)$ és un 2-grup abelià finit per a tot $n \geq 2$ i que $\pi_1((\mathbb{Z}_P)_t X)$ és un grup nilpotent finitament generat. $\square$

Aquest lema implica que $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, \pi_{n-1}((\mathbb{Z}_P)_t X)) = 0$ i

$$\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, \pi_n((\mathbb{Z}_P)_t X)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p \neq 2 \\ \pi_n((\mathbb{Z}_P)_t X) & \text{si} \quad p = 2, \end{cases}$$

per a tot $n \geq 2$. Per tant, a partir de la successió exacta curta [15, VI.5.1]

$$\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, \pi_n((\mathbb{Z}_P)_t X)) \rightarrowtail \pi_n(((\mathbb{Z}_P)_t X)^\wedge_p) \twoheadrightarrow$$

$$\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, \pi_{n-1}((\mathbb{Z}_P)_t X)),$$

s'obté que, per a tot $n \geq 2$,

$$\pi_n(((\mathbb{Z}_P)_t X)^\wedge_p) \cong \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p \neq 2 \\ \pi_n((\mathbb{Z}_P)_t X) & \text{si} \quad p = 2. \end{cases}$$

Així doncs, substituint aquestes dades a la successió exacta (*) tenim que, per a tot $n \geq 2$,

$$\pi_n(\lim_{\leftarrow} \mathbb{Q}_\infty \prod_{p \in P} ((\mathbb{Z}_P)_t X)^\wedge_p) = 0.$$

Per tant, hem demostrat el següent:

Teorema 4.4.4 *Sigui X l'ampolla de Klein i sigui $\mathbb{Z}_P$ amb P un conjunt de primers que conté el 2. Aleshores l'espai $(\mathbb{Z}_P)_\infty X$ és anesfèric virtualment nilpotent amb grup fonamental $G^\wedge_{\mathbb{Z}_P} \cong \mathbb{Z}_2^\wedge \rtimes \mathbb{Z}_P$.* $\square$

En particular, si P és un conjunt de primers que conté el 2, aleshores el resultat d'aquest teorema implica que, malgrat que tant X_P com $(\mathbb{Z}_P)_\infty X$ són espais anesfèrics virtualment nilpotents,

$$X_P \not\simeq (\mathbb{Z}_P)_\infty X.$$

Finalment, calculem la localització homològica $X_{H\mathbb{Z}_P}$ de l'ampolla de Klein per a tot conjunt de primers P tal que $2 \in P$. Demostrarem que $X_{H\mathbb{Z}_P}$ té grups d'homotopia superiors no nuls i, per tant, no és un espai anesfèric.

Lema 4.4.5 *Sigui X l'ampolla de Klein i sigui P un conjunt de primers tal que $2 \in P$. Aleshores, per a tot $n \geq 2$,*

$$\pi_n(X_{H\mathbb{Z}_P}) \cong \pi_{n+1}((X_2^\wedge)_{(0)}).$$

Demostració. Considerem el pull-back homotòpic del teorema 4.3.1

$$\begin{array}{ccc} X_{H\mathbb{Z}_P} & \rightarrow & \prod_{p\in P} X_{H\mathbb{Z}/p} \\ \downarrow & & \downarrow_f \\ X_{H\mathbb{Q}} \simeq (X_{H\mathbb{Z}_P})_{H\mathbb{Q}} & \xrightarrow{g} & (\prod_{p\in P} X_{H\mathbb{Z}/p})_{H\mathbb{Q}}. \end{array} \tag{4.4.10}$$

Hem vist que els espais $\prod_{p\in P} X_{H\mathbb{Z}/p} \simeq \prod_{p\in P} X_p^\wedge$ i $X_{H\mathbb{Q}} \simeq X_{(0)}$ són anesfèrics. Sigui

$$\cdots \to 0 \to \pi_3((\prod_{p\in P} X_p^\wedge)_{H\mathbb{Q}}) \to \pi_2(X_{H\mathbb{Z}_P}) \to 0 \to$$

$$\to \pi_2((\prod_{p\in P} X_p^\wedge)_{H\mathbb{Q}}) \to \pi_1(X_{H\mathbb{Z}_P}) \twoheadrightarrow B \subseteq \prod_{p\in P} \pi_1(X_p^\wedge) \times \pi_1(X_{H\mathbb{Q}}),$$

la successió exacta llarga d'homotopia associada al pull-back (4.4.10) amb B el pull-back del diagrama obtingut en aplicar π_1 a (4.4.10). Aleshores a partir d'aquesta successió exacta obtenim el següent:

$$\pi_2((\prod_{p\in P} X_p^\wedge)_{H\mathbb{Q}}) \rightarrowtail \pi_1(X_{H\mathbb{Z}_P}) \twoheadrightarrow B \tag{4.4.11}$$

i, per a tot $n \geq 2$,

$$\pi_n(X_{H\mathbb{Z}_P}) \cong \pi_{n+1}((\prod_{p\in P} X_p^\wedge)_{H\mathbb{Q}}).$$

El producte $\prod_{p\in P} X_p^\wedge$ es pot separar en

$$\prod_{p\in P} X_p^\wedge \simeq (\prod_{2\neq p\in P} X_p^\wedge) \times X_2^\wedge \simeq (\prod_{2\neq p\in P} K(\mathbb{Z}_p^\wedge, 1)) \times K(G_2^\wedge, 1),$$

on la primera part és un espai nilpotent i la segona és un espai virtualment nilpotent. Per tant, per a tot n,

$$\begin{aligned} \pi_n((\textstyle\prod_{p\in P} X_p^\wedge)_{H\mathbb{Q}}) &\cong \pi_n((\textstyle\prod_{2\neq p\in P} K(\mathbb{Z}_p^\wedge, 1))_{H\mathbb{Q}}) \times \pi_n(K(G_2^\wedge, 1)_{H\mathbb{Q}}) \\ &\cong (\pi_n(\textstyle\prod_{2\neq p\in P} K(\mathbb{Z}_p^\wedge, 1)))_{(0)} \times \pi_n(K(G_2^\wedge, 1)_{(0)}) \\ &\cong (\textstyle\prod_{2\neq p\in P} \pi_n(K(\mathbb{Z}_p^\wedge, 1)))_{(0)} \times \pi_n(K(G_2^\wedge, 1)_{(0)}), \end{aligned}$$

d'on s'obté que, per a tot $n \geq 2$,

$$\pi_n((\prod_{p\in P} X_p^\wedge)_{H\mathbb{Q}}) \cong \pi_n(K(G_2^\wedge, 1)_{(0)}),$$

tal i com volíem demostrar. $\square$

El grup B que apareix en la successió exacta curta (4.4.11)

$$\pi_2((X_2^\wedge)_{(0)}) \cong \pi_2((\prod_{p\in P} X_p^\wedge)_{(0)}) \rightarrowtail \pi_1(X_{H\mathbb{Z}_P}) \twoheadrightarrow B$$

és, de fet, la $\mathbb{Z}_P$-compleció $G^\wedge_{\mathbb{Z}_P}$ del grup fonamental G de l'ampolla de Klein. En efecte, per definició, B és el pull-back del diagrama que s'obté en aplicar π_1 a (4.4.10); és a dir,

$$\begin{aligned} B = \ & \{(x,a) \in \textstyle\prod_{p\in P} \pi_1(X_p^\wedge) \times \pi_1(X_{(0)}) \mid f(x) = g(a)\} \\ = \ & \{((y,z),a) \in \textstyle\prod_{2\neq p\in P} \pi_1(X_p^\wedge) \times G_2^\wedge \times \pi_1(X_{(0)}) \mid f(y,z) = g(a)\} \\ = \ & \{((y,(z_1,z_2)),a) \in \textstyle\prod_{2\neq p\in P} \mathbb{Z}_p^\wedge \times (\mathbb{Z}_2^\wedge \rtimes \mathbb{Z}_2^\wedge) \times \mathbb{Q} \mid f(y,(z_1,z_2)) = g(a)\} \end{aligned}$$

El subgrup de B format pels elements de la forma $((y,(z_1,z_2)),a)$ amb $z_1 = 0$ és isomorf al pull-back del diagrama

$$\prod_{p\in P} \mathbb{Z}_p^\wedge \xrightarrow{\pi_1(f)} (\prod_{p\in P} \mathbb{Z}_p^\wedge)_{(0)} \xleftarrow{\pi_1(g)} \mathbb{Q}$$

el qual sabem que és igual a $\mathbb{Z}_P$. Així doncs, hi ha un epimorfisme $B \to \mathbb{Z}_P$, que envia $((y,(z_1,z_2)),a)$ a $((y,(0,z_2)),a)$, el qual escindeix. Com que el nucli d'aquest epimorfisme és isomorf a $\mathbb{Z}_2^\wedge$, obtenim que

$$B \cong \mathbb{Z}_2^\wedge \rtimes \mathbb{Z}_P \cong G^\wedge_{\mathbb{Z}_P}.$$

Per tant, tenim una successió exacta curta

$$\pi_2((X_2^\wedge)_{(0)}) \rightarrowtail \pi_1(X_{H\mathbb{Z}_P}) \twoheadrightarrow G^\wedge_{\mathbb{Z}_P},$$

on $\pi_2((X_2^\wedge)_{(0)}) \neq 0$ (vegeu les proposicions 4.4.6 i 4.4.7). En conseqüència, hem demostrat el següent:

Teorema H *L'ampolla de Klein no és un espai $\mathbb{Z}_P$-bo, on P és un conjunt de primers que conté el* 2. $\square$

Observem que, en particular, obtenim que l'ampolla de Klein no és un espai $\mathbb{Z}$-bo. Aquest és un resultat destacable, ja que no hi ha gaires espais no nilpotents per als quals se sàpiga si són o no $\mathbb{Z}$-bons. Com hem dit, Bousfield i Kan demostren a [15, VII.5.2] que el pla projectiu no és un espai $\mathbb{Z}$-bo. I no és fins dues dècades més tard que Bousfield dóna a [12] el primer exemple d'un complex finit, $S^1 \vee S^n$ amb $n \geq 1$, que no és $\mathbb{Z}/p$-bo, per a tot nombre primer p.

Segons el lema 4.4.5, per veure que $X_{H\mathbb{Z}_P}$ no és un espai anesfèric, cal saber què passa quan racionalitzem la $\mathbb{Z}/2$-compleció de l'ampolla de Klein.

Proposició 4.4.6 *Sigui $X = K(G,1)$ l'ampolla de Klein i sigui P un conjunt de primers tal que $2 \in P$. Aleshores, per a tot $n \geq 2$,*

$$\pi_n(X_{H\mathbb{Z}_P}) \cong \pi_{n+1}(K(S,1)_{(0)}),$$

on $S \cong \mathbb{Q}_2^\wedge \rtimes \mathbb{Z}/2$ amb $\mathbb{Z}/2$ actuant sobre $\mathbb{Q}_2^\wedge$ per canvi de signe.

Demostració. Hem vist que si 2-completem la fibració (4.4.8), aleshores s'obté una fibració

$$K(\mathbb{Z}_2^\wedge \oplus \mathbb{Z}_2^\wedge, 1) \to K(G_2^\wedge, 1) \to K(\mathbb{Z}/2, 1),$$

on $G_2^\wedge \cong \mathbb{Z}_2^\wedge \rtimes \mathbb{Z}_2^\wedge$. Si racionalitzem fibra a fibra aquesta fibració, llavors hi ha un diagrama commutatiu de fibracions

$$\begin{array}{ccccc}
K(\mathbb{Z}_2^\wedge \oplus \mathbb{Z}_2^\wedge, 1) & \to & K(G_2^\wedge, 1) & \to & K(\mathbb{Z}/2, 1) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
K(\mathbb{Q}_2^\wedge \oplus \mathbb{Q}_2^\wedge, 1) & \to & E & \to & K(\mathbb{Z}/2, 1),
\end{array}$$

on l'aplicació $K(G_2^\wedge, 1) \to E$ és una equivalència racional. A nivell de grup fonamental tenim el diagrama commutatiu de successions exactes següent:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z}_2^\wedge \oplus \mathbb{Z}_2^\wedge & \rightarrowtail & G_2^\wedge & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}/2 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{Q}_2^\wedge \oplus \mathbb{Q}_2^\wedge & \rightarrowtail & \pi_1(E) & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}/2,
\end{array}$$

on el morfisme $G_2^\wedge \to \pi_1(E)$ és una equivalència racional. La successió exacta que hem obtingut en racionalitzar escindeix perquè $H^2(\mathbb{Z}/2; \mathbb{Q}_2^\wedge \oplus \mathbb{Q}_2^\wedge) = 0$; és a dir, existeix $s\colon \mathbb{Z}/2 \to \pi_1(E)$ tal que $\pi \circ s = \mathrm{id}$, on $\pi\colon \pi_1(E) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2$. Sigui τ

el generador de $\mathbb{Z}/2$ i sigui S el subgrup normal de $\pi_1(E)$ generat per $s(\tau)$. Aleshores $S \cong \mathbb{Q}_2^\wedge \rtimes \mathbb{Z}/2$, on $\mathbb{Z}/2$ actua sobre $\mathbb{Q}_2^\wedge$ per canvi de signe. A més, com que S està generat per elements de 2-torsió, la seva racionalització és trivial. Així, aplicant la racionalització relativa a la successió exacta $S \rightarrowtail \pi_1(E) \twoheadrightarrow \pi_1(E)/S$ s'obté una successió exacta $1 \rightarrowtail H \twoheadrightarrow \pi_1(E)/S$. Per tant,

$$(G_2^\wedge)_{(0)} \cong (\pi_1(E))_{(0)} \cong H_{(0)} \cong (\pi_1(E)/S)_{(0)} \cong \pi_1(E)/S \cong \mathbb{Q}_2^\wedge.$$

Utilitzant de nou la racionalització fibra a fibra s'obté el diagrama commutatiu de fibracions següent:

$$\begin{array}{ccccc} K(S,1) & \to & E & \to & K(\pi_1(E)/S,1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K(S,1)_{(0)} & \to & Z & \to & K(\pi_1(E)/S,1), \end{array}$$

on l'aplicació $E \to Z$ és una equivalència racional i l'espai $K(S,1)_{(0)}$ és 1-connex, de manera que té el mateix tipus d'homotopia que el recobridor universal de Z. A més, el lema 5.1 de [35] aplicat a les fibracions

$$K((\mathbb{Q}_2^\wedge)^2,1) \to E \to K(\mathbb{Z}/2,1) \quad \text{i}$$

$$K(S,1) \to E \to K(\pi_1(E)/S,1)$$

implica que $\pi_1(E)/S$ actua nilpotentment sobre l'homologia de $K(S,1)$ amb qualssevol coeficients. En particular, $\pi_1(E)/S$ actua nilpotentment sobre

$$H_n(K(S,1);\mathbb{Q}) \cong H_n(K(S,1)_{(0)};\mathbb{Q}) \cong H_n(K(S,1)_{(0)}),$$

per a tot n, i, per tant, l'espai 0-local Z és nilpotent [49, II.2.19]. Això implica que

$$K(G_2^\wedge,1)_{(0)} \simeq E_{(0)} \simeq Z_{(0)} \simeq Z$$

i, en conseqüència,

$$\pi_n((X_2^\wedge)_{(0)}) \cong \pi_n(K(S,1)_{(0)})$$

per a tot $n \geq 2$. Usant el lema 4.4.5 s'obté el resultat desitjat. □

Així doncs, segons aquesta proposició, per a demostrar que la localització homològica de l'ampolla de Klein amb coeficients a $\mathbb{Z}_P$ (on $2 \in P$) no és un espai anesfèric, només cal estudiar els grups d'homotopia superiors de l'espai $K(S,1)_{(0)}$, on $S \cong \mathbb{Q}_2^\wedge \rtimes \mathbb{Z}/2$ amb $\mathbb{Z}/2$ actuant sobre $\mathbb{Q}_2^\wedge$ per canvi de signe.

Proposició 4.4.7 *L'espai $K(S,1)_{(0)}$ no és un espai de tipus $K(A,2)$, on $S \cong \mathbb{Q}_2^\wedge \rtimes \mathbb{Z}/2$ amb $\mathbb{Z}/2$ actuant sobre $\mathbb{Q}_2^\wedge$ per canvi de signe.*

Demostració. Sigui $\mathbb{Q}_2^\wedge \rightarrowtail S \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2$. Aleshores a partir de la successió espectral de Lyndon–Hochschild–Serre amb coeficients racionals associada a aquesta successió exacta deduïm que, per a tot n,

$$H_n(K(S,1)_{(0)}) \cong H_n(S;\mathbb{Q}) \cong H_0(\mathbb{Z}/2; H_n(\mathbb{Q}_2^\wedge;\mathbb{Q})).$$

L'acció de canvi de signe de $\mathbb{Z}/2$ sobre $\mathbb{Q}_2^\wedge$ indueix una acció de $\mathbb{Z}/2$ sobre $H_n(\mathbb{Q}_2^\wedge)$, que és trivial quan n és parell i canvi de signe quan n és senar (això es deu al fet que $\mathbb{Q}_2^\wedge = \lim_{\leftarrow} \mathbb{Q}^n$ i sabem que aquest resultat és cert per a sumes finites de còpies de $\mathbb{Q}$). Així doncs,

$$H_n(K(S,1)_{(0)}) \cong \begin{cases} H_n(\mathbb{Q}_2^\wedge) & \text{si } n \text{ és parell} \\ 0 & \text{si } n \text{ és senar.} \end{cases} \tag{4.4.12}$$

Suposem que $K(S,1)_{(0)}$ és un $K(A,2)$. Aleshores, pel teorema de Hurewicz,

$$\pi_2(K(S,1)_{(0)}) \cong H_2(K(S,1)_{(0)}) \cong H_2(\mathbb{Q}_2^\wedge),$$

la qual cosa implica que $A = H_2(\mathbb{Q}_2^\wedge)$. Sigui

$$f\colon K(S,1)_{(0)} \to K(H_2(\mathbb{Q}_2^\wedge),2) \tag{4.4.13}$$

una equivalència homotòpica. Aquesta aplicació es pot escollir de manera que $H_2(f)$ sigui la identitat. A més, observem que $H_3(f)$ és un isomorfisme, ja que, $H_3(K(S,1)_{(0)}) = 0$ per (4.4.12), i usant la successió espectral de Serre associada a la fibració $K(H_2(\mathbb{Q}_2^\wedge),1) \to * \to K(H_2(\mathbb{Q}_2^\wedge),2)$ es demostra que $H_3(K(H_2(\mathbb{Q}_2^\wedge),2)) = 0$. Anem a veure, però, que $H_4(f)$ no és un isomorfisme.

Sigui $\{e_i\}$ una base de $\mathbb{Q}_2^\wedge$ com a espai vectorial sobre $\mathbb{Q}$. Aleshores l'homologia $H_*(\mathbb{Q}_2^\wedge)$ és una àlgebra exterior sobre el conjunt $\{e_i\}$ amb el producte de Pontryagin, i la cohomologia $H^*(\mathbb{Q}_2^\wedge)$ és una àlgebra exterior sobre la base dual $\{w_i\}$. Si denotem $x_{ij} = e_ie_j$, aleshores el morfisme

$$H^*(f)\colon H^*(K(H_2(\mathbb{Q}_2^\wedge),2)) \to H^*(K(S,1)_{(0)})$$

és l'aplicació natural d'una àlgebra de polinomis sobre els elements $\{x_{ij}\}$ amb $i<j$ en la part de graus parells d'una àlgebra exterior en els elements $\{w_i\}$. En particular, en dimensió 4 tenim un epimorfisme

$$H^4(f)\colon H^4(K(H_2(\mathbb{Q}_2^\wedge),2)) \to H^4(\mathbb{Q}_2^\wedge)$$

que s'expressa com $x_{ij}x_{kl} \mapsto w_iw_jw_kw_l$, i que no és injectiu. Per tant, el morfisme dual

$$H_4(f)\colon H_4(\mathbb{Q}_2^\wedge) \to H_4(K(H_2(\mathbb{Q}_2^\wedge), 2))$$

és injectiu, però no exhaustiu. Això implica que l'aplicació (4.4.13) no és una equivalència homològica i, en conseqüència, tampoc no és una equivalència homotòpica. $\square$

Ajuntant els resultats de les proposicions 4.4.6 i 4.4.7 s'obté el següent:

Teorema 4.4.8 *Sigui X l'ampolla de Klein i sigui P un conjunt de primers tal que $2 \in P$. Aleshores $X_{H\mathbb{Z}_P}$ no és un espai anesfèric.* $\square$

Sigui $X = K(G, 1)$ l'ampolla de Klein. La taula següent resumeix els diversos resultats que hem demostrat sobre l'efecte de diversos functors sobre aquest espai.

$2 \notin P$	$2 \in P$
X és $\mathbb{Z}_P$-bo	X no és $\mathbb{Z}_P$-bo
$X_P \simeq K(\mathbb{Z}_P, 1)$	$X_P \simeq K(\mathbb{Z}_P \rtimes \mathbb{Z}_P, 1)$
$X_{H\mathbb{Z}_P} \simeq K(\mathbb{Z}_P, 1)$	$X_{H\mathbb{Z}_P}$ no és anesfèric
$(\mathbb{Z}_P)_\infty X \simeq K(\mathbb{Z}_P, 1)$	$(\mathbb{Z}_P)_\infty X \simeq K(\mathbb{Z}_2^\wedge \rtimes \mathbb{Z}_P, 1)$
$p \neq 2$	$p = 2$
$X_{H\mathbb{Z}/p} \simeq X_p^\wedge \simeq K(\mathbb{Z}_p^\wedge, 1)$	$X_{H\mathbb{Z}/2} \simeq X_2^\wedge \simeq K(\mathbb{Z}_2^\wedge \rtimes \mathbb{Z}_2^\wedge, 1)$

Tenint en compte tot el que hem explicat fins ara, així com el resultat del teorema F i els resultats sobre l'ampolla de Klein, la pregunta que un es planteja a continuació és la següent:

Pregunta Sigui X un espai virtualment nilpotent. Sigui R un subanell propi dels racionals, és a dir, $R = \mathbb{Z}_P$ per a un conjunt de primers P (en particular, $R = \mathbb{Z}$). És cert que $R_\infty X$ és un espai virtualment nilpotent?

Si X és l'ampolla de Klein, aleshores hem vist que quan $R = \mathbb{Z}_P$ és un subanell dels racionals tal que $2 \notin P$, llavors $R_\infty X$ és un espai nilpotent. Si $R = \mathbb{Z}_P$ és un subanell dels racionals tal que $2 \in P$ (en particular, $R = \mathbb{Z}$ i $R = \mathbb{Z}_{(2)}$), aleshores $\pi_1((\mathbb{Z}_P)_\infty X) \cong \mathbb{Z}_2^\wedge \rtimes \mathbb{Z}_P$ és un grup virtualment nilpotent. De forma més general, demostrem el següent:

Proposició 4.4.9 *Sigui G un grup virtualment nilpotent. La $\mathbb{Z}$-compleció $G^\wedge$ de G és un grup virtualment nilpotent.*

Demostració. Recordem que $G^\wedge$ és igual al límit invers dels quocients $G/\Gamma_r G$, on $\Gamma_r G$ és el terme r-èsim de la sèrie central inferior de G. Per a cada r, considerem el quadrat aritmètic

$$\begin{array}{ccc} G/\Gamma_r G & \to & \prod_p (G/\Gamma_r G)_{H\mathbb{Z}/p} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (G/\Gamma_r G)_{H\mathbb{Q}} & \to & (\prod_p (G/\Gamma_r G)_{H\mathbb{Z}/p})_{H\mathbb{Q}} \end{array}$$

que és un pull-back, ja que $G/\Gamma_r G$ és un grup nilpotent per a tot r. Aleshores aplicant el límit invers a aquest diagrama obtenim el pull-back següent:

$$\begin{array}{ccc} G^\wedge & \to & \prod_p G_p^\wedge \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_{(0)}^\wedge & \to & \lim_{\leftarrow}((\prod_p (G/\Gamma_r G)_{H\mathbb{Z}/p})_{H\mathbb{Q}}). \end{array} \tag{4.4.14}$$

Sigui $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ amb N un grup nilpotent de classe c i Q finit. El grup $\prod_p G_p^\wedge \times G_{(0)}^\wedge$ és virtualment nilpotent, ja que $G_{(0)}^\wedge$ i $G_p^\wedge$, per a tot p, són grups virtualment nilpotents [35] cadascun dels quals s'inclou en una successió exacta $M \rightarrowtail A \twoheadrightarrow F$ amb M nilpotent de classe $\leq c$ i F finit. Aleshores el diagrama (4.4.14) implica que $G^\wedge$ és un subgrup de $\prod_p G_p^\wedge \times G_{(0)}^\wedge$ i, per tant, és virtualment nilpotent. □

A partir d'aquesta proposició s'obté el resultat següent:

Corol·lari 4.4.10 *Si X és un espai virtualment nilpotent amb $\pi_1(\mathbb{Z}_\infty X)$ isomorf a $(\pi_1(X))^\wedge$, aleshores $\pi_1(\mathbb{Z}_\infty X)$ és virtualment nilpotent.* □

Per exemple, si X és un espai amb tots els grups d'homologia $H_n(X; R)$ finits, aleshores $\pi_1(R_\infty X) \cong (\pi_1(X))_R^\wedge$ i, per tant, $\pi_1(R_\infty X)$ és un grup virtualment nilpotent (això es pot veure fent càlculs com en el cas de l'ampolla de Klein). Malauradament, encara no sabem si sempre és cert que $\pi_1(\mathbb{Z}_\infty X)$ és virtualment nilpotent per a tot espai virtualment nilpotent X.

Capítol 5

Espais anesfèrics virtualment nilpotents

En aquest capítol estudiem els grups d'homotopia superiors de les complecions i les localitzacions en nombres primers d'espais d'Eilenberg–Mac Lane $K(G,1)$ amb G un grup virtualment nilpotent finitament generat; és a dir, G és un grup finitament generat que conté un subgrup normal nilpotent d'índex finit.

Demostrem que, donat un nombre primer p, la p-compleció d'un espai d'aquest tipus és o bé un espai anesfèric o bé un espai amb infinits grups d'homotopia no nuls, que són finitament generats com a $\mathbb{Z}_p^\wedge$-mòduls. Com a conseqüència d'aquest fet obtenim que el mateix resultat és cert per a la p-localització, canviant $\mathbb{Z}_p^\wedge$ per $\mathbb{Z}_{(p)}$, i, més generalment, per a les localitzacions en conjunts no buits de primers. Aquests resultats generalitzen els teoremes 3.5 i 4.3 del nostre article [6], on vam considerar el cas en què el grup virtualment nilpotent finitament generat G era lliure de torsió.

Les racionalitzacions d'espais de tipus $K(G,1)$ amb G un grup virtualment nilpotent finitament generat tant poden tenir un nombre finit com un nombre infinit de grups d'homotopia no nuls; és a dir, existeixen espais d'aquest tipus que en racionalitzar-los no són anesfèrics i, en canvi, tenen només un nombre finit de grups d'homotopia no nuls. Aquest fenomen l'estudiem amb detall en el darrer capítol de la memòria.

5.1 Origen del problema i enunciat dels resultats

Sigui p un nombre primer. Quan parlem de p-compleció ens referirem a la $\mathbb{Z}/p$-compleció de Bousfield–Kan, tot i que escriurem $X^\wedge_p$ per denotar-la. Segons el corol·lari VI.2.3 de [15], si N és un grup nilpotent, aleshores l'espai $K(N,1)^\wedge_p$ és nilpotent i té, com a molt, dos grups d'homotopia no nuls: el grup fonamental i el segon grup d'homotopia. En particular, si N és abelià, aleshores [15, VI.2.2]

$$\pi_1 K(N,1)^\wedge_p \cong \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, N) \quad \text{i} \quad \pi_2 K(N,1)^\wedge_p \cong \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, N).$$

Si N és un grup nilpotent finitament generat, llavors l'espai $K(N,1)^\wedge_p$ és anesfèric amb grup fonamental la compleció p-profinita $N^\wedge_p$ de N [15, proposició VI.2.6]. La p-localització d'un espai $K(N,1)$ amb N un grup nilpotent (no necessàriament finitament generat) és sempre un espai anesfèric amb grup fonamental la p-localització $N_{(p)}$ de N [15, V.4], [49].

Si Q és un grup finit, aleshores la p-compleció i la p-localització de $K(Q,1)$, on p és un nombre primer qualsevol, coincideixen,

$$K(Q,1)_{(p)} \simeq K(Q,1)^\wedge_p,$$

tal i com es dedueix de la proposició 4.2.1.

Recordem que donat un grup qualsevol G es defineix el seu p'-aïllador $I_{p'}(G)$ com el subgrup normal més petit de G tal que el quocient no té elements no trivials de p'-torsió. Si el grup G és finit, aleshores el p'-aïllador és el subgrup generat pels elements de p'-torsió de G i coincideix amb el més gran subgrup normal p-perfecte de G. Un grup finit és *p-nilpotent* si el seu p'-aïllador és un grup de p'-torsió. Casacuberta demostra a [18, teorema 3.2] que si Q és finit, aleshores l'espai $K(Q,1)^\wedge_p$ és anesfèric si i només si el grup Q és p-nilpotent. Suposem ara que Q és un grup finit que no és p-nilpotent. Aleshores p divideix l'ordre de $I_{p'}(Q)$. Considerem la fibració

$$K(I_{p'}(Q),1) \to K(Q,1) \to K(Q^\wedge_p,1) \tag{5.1.1}$$

associada a la successió exacta $I_{p'}(Q) \rightarrowtail Q \twoheadrightarrow Q^\wedge_p$. Tal i com demostra Levi a [55, teorema 1.1.4], l'espai $K(I_{p'}(Q),1)^\wedge_p$ té infinits grups d'homotopia no nuls. Aleshores aplicant el lema següent a la fibració (5.1.1) obtenim que l'espai $K(Q,1)^\wedge_p$ també té infinits grups d'homotopia no nuls.

Lema 5.1.1 *Si $Y \to X \to K(Q,1)$ és una fibració amb Q un p-grup finit, aleshores $Y^\wedge_p \to X^\wedge_p \to K(Q,1)$ també és una fibració.*

Demostració. Com que l'acció d'un p-grup finit sobre un $\mathbb{Z}/p$-mòdul és nilpotent [15, p. 215], el grup Q actua nilpotentment sobre $H_k(Y;\mathbb{Z}/p)$ per a tot k. Per tant, el resultat es dedueix del lema II.5.1 de [15], ja que aquest lema ens diu que la p-compleció preserva una fibració amb fibra connexa precisament quan l'acció del grup fonamental de la base sobre l'homologia de la fibra amb coeficients a $\mathbb{Z}/p$ és nilpotent. $\square$

Així doncs, combinant la proposició VII.4.3 de [15] amb els resultats del teorema 3.2 de [18] i del teorema 1.1.4 de [55] obtenim el següent:

Teorema 5.1.2 *Sigui p un nombre primer i sigui $X = K(Q,1)$ amb Q un grup finit. Aleshores o bé $X^\wedge_p$ és un espai anesfèric $K(Q^\wedge_p,1)$ o bé $X^\wedge_p$ té infinits grups d'homotopia no nuls, que són p-grups finits.* $\square$

Després d'això, podríem preguntar-nos què passa amb la p-compleció d'un espai d'Eilenberg–Mac Lane $K(G,1)$ amb G un grup virtualment nilpotent finitament generat. La possibilitat que el teorema 5.1.2 es generalitzi a aquest cas ens va venir suggerida pel fet següent. Les infra-nilvarietats són varietats compactes de tipus $K(G,1)$ amb G un grup virtualment nilpotent finitament generat. Les p-complecions de les infra-nilvarietats són espais que tenen l'homologia mòdul p fitada i, en conseqüència, el teorema de Serre [81], generalitzat per McGibbon i Neisendorfer a [63], ens assegura que quan són espais 1-connexos no poden ser seccions de Postnikov no trivials. El primer que hem fet ha estat estendre la validesa del teorema de McGibbon i Neisendorfer per tal de poder eliminar la hipòtesi que aquestes p-complecions siguin espais 1-connexos. Gràcies a aquesta millora hem demostrat el resultat següent:

Teorema I *Sigui p un nombre primer i sigui $X = K(G,1)$ amb G un grup virtualment nilpotent finitament generat. Aleshores o bé $X^\wedge_p$ és un espai anesfèric amb grup fonamental la compleció p-profinita $G^\wedge_p$ de G o bé $X^\wedge_p$ té infinits grups d'homotopia no nuls, que són finitament generats com a $\mathbb{Z}^\wedge_p$-mòduls.*

Aquest resultat generalitza el teorema 3.5 del nostre article [6], en el qual demostrem la certesa del teorema I per a les infra-nilvarietats. El fet és que l'estudi de les p-complecions d'infra-nilvarietats correspon al cas en què el grup fonamental és lliure de torsió. Aquesta restricció ha resultat ser innecessària, ja que hem vist que n'hi ha prou amb què el grup fonamental de l'espai $K(G,1)$ considerat tingui un subgrup normal nilpotent finitament generat d'índex finit i lliure de torsió, la qual cosa passa per a tot grup virtualment nilpotent finitament generat G (vegeu el lema 5.3.2).

Com a conseqüència del teorema I demostrem que les localitzacions en conjunts no buits de primers d'un espai d'Eilenberg–Mac Lane $K(G,1)$ amb G un grup virtualment nilpotent finitament generat és o bé un espai anesfèric o bé un espai amb infinits grups d'homotopia no nuls, que són finitament generats com a $\mathbb{Z}_P$-mòduls, on P denota un conjunt no buit de primers. En el cas particular en què el conjunt de primers és buit, és a dir, la racionalització, el teorema deixa de ser cert. Aquest tema l'estudiarem amb detall en el capítol següent.

5.2 Generalització d'un teorema de McGibbon i Neisendorfer

L'eina principal per a demostrar el teorema I enunciat al final de la secció anterior és una generalització del teorema següent sobre la conjectura de Serre, demostrat per McGibbon i Neisendorfer a [63].

Teorema 5.2.1 *Sigui X un espai 1-connex i sigui p un nombre primer tal que*

(i) $H_n(X;\mathbb{Z}/p) \neq 0$ *per a algun* $n > 0$ *i*

(ii) $H_n(X;\mathbb{Z}/p) = 0$ *per a tot n suficientment gran.*

Aleshores per a infinits valors de n, $\pi_n(X)$ conté un subgrup d'ordre p. □

En el teorema 3 de [71], Oda i Yosimura demostren que l'enunciat del teorema 5.2.1 també és cert si en comptes de suposar que l'espai X és 1-connex, hom suposa que X és un espai nilpotent connex tal que $H_1(X)\otimes\mathbb{Z}/p^\infty$ és igual a 0. Uns anys més tard, Wenhuai [89, teorema 3] millora de nou el teorema 5.2.1 refinant la condició d'Oda i Yosimura: és suficient que l'espai X sigui nilpotent i l'aplicació $x \mapsto x^p$ a $\pi_1(X)$ sigui bijectiva o bé no injectiva. Nosaltres presentem una nova versió del teorema 5.2.1 que s'adapta a les nostres necessitats i que el millora en el sentit que demostrem el mateix resultat per a una certa classe d'espais nilpotents. Abans d'enunciar i demostrar el teorema, però, introduïm les nocions que hi intervenen.

5.2.1 Grups d'homotopia amb coeficients

Sigui p un nombre primer. Donat un espai topològic X, per a tot $n \geq 2$ es defineix el *grup d'homotopia n-èsim amb coeficients a $\mathbb{Z}/p$* de X com

$$\pi_n(X; \mathbb{Z}/p) = [S^{n-1} \cup_p \mathrm{e}^n, X],$$

on $S^{n-1} \cup_p \mathrm{e}^n$ denota l'espai que s'obté adjuntant una n-cel·la a S^{n-1} via l'aplicació estàndard de grau p. Dit d'una altra manera, $S^{n-1} \cup_p \mathrm{e}^n$ és un espai de Moore $M(\mathbb{Z}/p, n-1)$, és a dir, un espai amb un únic grup d'homologia no trivial; en aquest cas H_{n-1}, que és isomorf a $\mathbb{Z}/p$.

Tal i com s'explica a [68], si $n \geq 3$, aleshores $\pi_n(X; \mathbb{Z}/p)$ té una estructura de grup amb l'operació suma definida gràcies al fet que $M(\mathbb{Z}/p, n-1) = \Sigma M(\mathbb{Z}/p, n-2)$ per a $n \geq 3$, on $\Sigma Y = S^1 \wedge Y$ és la suspensió d'un espai qualsevol Y. Si $n \geq 4$, aleshores $\pi_n(X; \mathbb{Z}/p)$ és un grup abelià, ja que $M(\mathbb{Z}/p, n-1)$ és una suspensió doble $\Sigma^2 M(\mathbb{Z}/p, n-3)$. El resultat següent correspon a la proposició 1.4 de [68].

Proposició 5.2.2 *Si $n \geq 2$, aleshores hi ha una successió exacta natural*

$$\pi_n(X) \otimes \mathbb{Z}/p \rightarrowtail \pi_n(X; \mathbb{Z}/p) \twoheadrightarrow \mathrm{Tor}\,(\pi_{n-1}(X), \mathbb{Z}/p). \quad \square$$

Si $n = 2$, aleshores la successió de la proposició 5.2.2 és una successió de conjunts puntejats, on $\mathrm{Tor}\,(\pi_1(X), \mathbb{Z}/p)$ es defineix com el conjunt d'elements de p-torsió de $\pi_1(X)$; o bé, equivalentment, com el nucli de l'aplicació $x \mapsto x^p$ a $\pi_1(X)$. A més, la successió és exacta en el sentit següent: les antiimatges de $\mathrm{Tor}\,(\pi_1(X), \mathbb{Z}/p)$ són les òrbites de l'acció de $\pi_2(X)$ sobre $\pi_2(X; \mathbb{Z}/p)$.

5.2.2 Espais quasi-fitats en un primer p

Sigui p un nombre primer. Sigui $\mathcal{A}$ l'àlgebra de Steenrod mòdul p i sigui $\mathcal{A}^d$ el conjunt dels seus elements de grau d. Un *$\mathcal{A}$-mòdul* és un $\mathbb{Z}/p$-espai vectorial graduat $M_* = \oplus_{n \in \mathbb{N}} \{M_n\}$ juntament amb un conjunt d'aplicacions lineals $M_{n+d} \otimes \mathcal{A}^d \to M_n$ que satisfan les relacions usuals de mòdul per la dreta. Recordem les definicions següents, extretes de [54].

Definició 5.2.3 Sigui M_* un $\mathcal{A}$-mòdul. Si M_n és zero per a n prou gran, aleshores M_* es diu *fitat*. Diem que M_* és *quasi-fitat* si per a tot enter n existeix un enter $\alpha(n)$ tal que l'aplicació $M_{n+d} \otimes \mathcal{A}^d \to M_n$ és nul·la per a tot $d > \alpha(n)$.

Donat un espai X, la seva homologia $H_*(X; \mathbb{Z}/p)$ és un $\mathcal{A}$-mòdul, la qual cosa ens permet definir la noció següent:

Definició 5.2.4 Un espai X s'anomena *fitat* (respectivament, *quasi-fitat*) en un nombre primer p si $H_*(X; \mathbb{Z}/p)$ és un $\mathcal{A}$-mòdul fitat (respectivament, quasi-fitat).

Per exemple, si G és un grup finit p-perfecte, aleshores $\Omega BG^\wedge_p$ és un espai quasi-fitat a p [55, proposició 6.1.1], però no necessàriament fitat a p.

La condició (ii) del teorema 5.2.1 ens diu que l'espai 1-connex que cal considerar ha de tenir l'homologia mòdul p fitada. Ara bé, aquesta condició es pot afeblir: si demanem que l'espai 1-connex considerat sigui quasi-fitat a p, aleshores el teorema continua essent cert. En efecte, només cal tenir present que la demostració del teorema 5.2.1 es basa en el teorema de Miller sobre la conjectura de Sullivan sobre aplicacions d'espais classificadors [65], la versió més general del qual és la següent:

Teorema 5.2.5 *Sigui G un grup localment finit, és a dir, un grup que és un límit directe dels seus subgrups finits. Sigui X un espai nilpotent quasi-fitat en un nombre primer p. Aleshores l'espai d'aplicacions puntejat* $\mathrm{map}_*(BG^\wedge_p, X)$ *és dèbilment contràctil.* $\square$

Acabem aquesta secció recordant la proposició 0.6 de [54], segons la qual l'espai de llaços d'un espai 1-connex quasi-fitat a p també és un espai quasi-fitat a p, on p denota un nombre primer qualsevol:

Proposició 5.2.6 *Sigui X un CW-complex* 1*-connex. Si X és un espai quasi-fitat a p, aleshores ΩX també és quasi-fitat a p, on p denota un nombre primer.* $\square$

5.2.3 Demostració del teorema

Ara ja estem a punt per a enunciar i demostrar la versió del teorema de McGibbon i Neisendorfer que s'adequa a les nostres necessitats. L'argument de la demostració segueix el raonament de la demostració del teorema 5.2.1 explicat a [63] amb les adaptacions pertinents.

Teorema 5.2.7 *Sigui X un espai nilpotent p-complet amb els grups d'homotopia superiors finitament generats com a $\mathbb{Z}_p^\wedge$-mòduls. Sigui p un nombre primer tal que*

(i) $\pi_n(X;\mathbb{Z}/p) \neq 0$ *per a algun* $n > 1$ *i*

(ii) X *és quasi-fitat a* p.

Aleshores per a infinits valors de n, el grup $\pi_n(X)$ conté un subgrup no nul d'ordre p.

Demostració. Suposem que $\pi_n(X) \neq 0$ per a un nombre finit de valors de n. Aleshores usant la successió exacta curta de la proposició 5.2.2,

$$\pi_n(X) \otimes \mathbb{Z}/p \rightarrowtail \pi_n(X;\mathbb{Z}/p) \twoheadrightarrow \mathrm{Tor}\,(\pi_{n-1}(X), \mathbb{Z}/p), \tag{5.2.2}$$

obtenim que $\pi_n(X;\mathbb{Z}/p) \neq 0$ per a un nombre finit de valors de n. Segons la condició (i), existeix un nombre enter $m > 1$ que és el màxim nombre tal que $\pi_n(X;\mathbb{Z}/p) = 0$ per a tot $n > m$ i $\pi_m(X;\mathbb{Z}/p) \neq 0$. Aleshores per (5.2.2) tenim que

$$\pi_n(X) \otimes \mathbb{Z}/p = 0 \text{ per a tot } n > m \quad \text{i} \quad \mathrm{Tor}\,(\pi_n(X), \mathbb{Z}/p) = 0 \text{ per a tot } n \geq m.$$

Per tant, com que per a $n \geq 2$ el grup $\pi_n(X)$ és finitament generat com a $\mathbb{Z}_p^\wedge$-mòdul, $\pi_n(X) = 0$ per a tot $n > m$ i $\pi_m(X)$ és lliure de torsió, és a dir, $\pi_m(X)$ és isomorf a una suma finita de còpies de $\mathbb{Z}_p^\wedge$.

Suposem que $\pi_m(X) \otimes \mathbb{Z}/p \neq 0$. Com que $\mathrm{Tor}\,(\pi_m(X), \mathbb{Z}/p) = 0$, el grup $\pi_m(X)$ conté $\mathbb{Z}_p^\wedge$ com a sumand directe. Per tant, existeix una aplicació essencial

$$f_2\colon K(\mathbb{Z}_p^\wedge, 2) \to K(\pi_m(X), 2) \simeq K(\pi_2(\Omega^{m-2}X), 2),$$

la composició de la qual amb un generador de $H^2(K(\mathbb{Z}/p, 1); \mathbb{Z}_p^\wedge)$,

$$g_2\colon K(\mathbb{Z}/p, 1) \to K(\pi_2(\Omega^{m-2}X), 2),$$

és essencial. Ara volem elevar g_2 a través de la torre de Postnikov del recobriment universal $\Omega^{m-2}X\langle 1\rangle$ de $\Omega^{m-2}X$ a una aplicació

$$g_\infty\colon K(\mathbb{Z}/p, 1) \to \Omega^{m-2}X\langle 1\rangle.$$

Les obstruccions a aquesta elevació viuen a $H^*(\mathbb{Z}/p; \pi_n(X))$ per a $n > m$. Però aquests grups són nuls, ja que $\pi_n(X) = 0$ per a $n > m$. Així doncs, existeix una aplicació essencial g_∞. Per hipòtesi, l'espai X és nilpotent i quasi-fitat a p. Per tant, l'existència de g_∞ contradiu el teorema 5.2.5, segons el qual $\mathrm{map}_*(K(\mathbb{Z}/p, 1), X)$ i, en conseqüència, $\mathrm{map}_*(K(\mathbb{Z}/p, 1), \Omega^{m-2}X)$, és dèbilment contràctil.

Suposem que $\pi_m(X) \otimes \mathbb{Z}/p = 0$. Com que $\mathrm{Tor}\,(\pi_m(X), \mathbb{Z}/p)$ és zero, obtenim que $\pi_m(X) = 0$. Per tant, segons la successió exacta (5.2.2), necessàriament $\mathrm{Tor}\,(\pi_{m-1}(X), \mathbb{Z}/p) \neq 0$. Això implica que $\mathbb{Z}/p$ és un subgrup de $\pi_{m-1}(X)$, per la qual cosa existeix una aplicació essencial

$$f_1 \colon K(\mathbb{Z}/p, 1) \to K(\pi_{m-1}(X), 1) \simeq K(\pi_1(\Omega^{m-2}X), 1).$$

Ara volem elevar f_1 a través de la torre de Postnikov de $\Omega^{m-2}X$ a una aplicació

$$f_\infty \colon K(\mathbb{Z}/p, 1) \to \Omega^{m-2}X.$$

Les obstruccions a aquesta elevació viuen a $H^*(\mathbb{Z}/p; \pi_n(X))$ per a $n \geq m$ (observem que ara tenim coeficients amb una acció). Però aquests grups són nuls, ja que $\pi_n(X) = 0$ per a $n \geq m$. Per tant, existeix una aplicació essencial f_∞, la qual cosa contradiu, pel mateix motiu que en el cas anterior, el teorema 5.2.5.

Per concloure amb la demostració, suposem que $\mathrm{Tor}\,(\pi_n(X), \mathbb{Z}/p) \neq 0$ per a un nombre finit de valors de n. Aleshores existeix un enter m suficientment gran tal que per a tot $q > 0$,

$$\mathrm{Tor}\,(\pi_{m+q}(X), \mathbb{Z}/p) \cong \mathrm{Tor}\,(\pi_q(\Omega^m X), \mathbb{Z}/p) = 0 \quad \text{i}$$

$$\pi_{m+2}(X) \otimes \mathbb{Z}/p \cong \pi_2(\Omega^m X) \otimes \mathbb{Z}/p \neq 0.$$

Com que $\pi_2(\Omega^m X)$ és finitament generat com a $\mathbb{Z}_p^\wedge$-mòdul, existeix una aplicació injectiva $\mathbb{Z}_p^\wedge \rightarrowtail \pi_2(\Omega^m X)$ que dóna lloc a una aplicació essencial

$$f_2 \colon K(\mathbb{Z}_p^\wedge, 2) \to K(\pi_2(\Omega^m X), 2).$$

Ara volem elevar f_2 a través de la torre de Postnikov del recobriment universal $\Omega^m X\langle 1\rangle$ de $\Omega^m X$ a una aplicació

$$f_\infty \colon K(\mathbb{Z}_p^\wedge, 2) \to \Omega^m X\langle 1\rangle.$$

Al pas n la situació és la següent:

$$\begin{array}{ccccc} & & P_{n+1}\Omega^m X\langle 1\rangle & & \\ & & \downarrow & & \\ K(\mathbb{Z}_p^\wedge, 2) & \xrightarrow{f_n} & P_n\Omega^m X\langle 1\rangle & \xrightarrow{k} & K(\pi, n+2), \end{array}$$

on $\pi = \pi_{n+1}(\Omega^m X\langle 1\rangle)$ i f_n denota una elevació de f_2. Com que $\Omega^m X\langle 1\rangle$ és un H-espai, racionalment és dèbilment equivalent a un producte d'espais d'Eilenberg–Mac Lane $\prod K(\pi_i(\Omega^m X\langle 1\rangle), i)$. Per tant, el k-invariant i, en conseqüència, $k \circ f_n$, és l'aplicació zero en racionalitzar. D'altra banda, com que π és lliure de torsió, tenim una injecció $\pi \rightarrowtail \pi \otimes \mathbb{Q}$, de manera que l'aplicació induïda

$$H^*(K(\mathbb{Z}_p^\wedge, 2); \pi) \to H^*(K(\mathbb{Z}_p^\wedge, 2); \pi \otimes \mathbb{Q})$$

és injectiva. Per tant, $k \circ f_n$ representa la classe del zero a $H^*(K(\mathbb{Z}_p^\wedge, 2); \pi)$, és a dir, l'aplicació $k \circ f_n$ és nul-homòtopa. Això implica que existeix una elevació $f_{n+1}\colon K(\mathbb{Z}_p^\wedge, 2) \to P_{n+1}\Omega^m X\langle 1\rangle$. Com que aquest raonament és vàlid per a qualsevol valor de n, l'aplicació f_∞ existeix. Finalment, la composició de f_∞ amb l'aplicació recobridora $\Omega^m X\langle 1\rangle \to \Omega^m X$ ens dóna una aplicació essencial $K(\mathbb{Z}/p, 1) \to \Omega^m X$ que contradiu el teorema 5.2.5, ja que X és un espai nilpotent quasi-fitat a p. $\square$

Les hipòtesis del teorema 5.2.7 són les que apareixen de forma natural quan hom vol que el teorema 5.2.1 continuï essent vàlid per a espais nilpotents. Ja hem explicat abans que fàcilment es pot debilitar el fet que l'espai considerat tingui l'homologia mòdul p fitada a demanar que aquest espai sigui quasi-fitat a p. Pel que fa a (i), observem que tenim una condició homotòpica en comptes d'homològica. Aquest canvi és degut al fet de treballar amb espais no necessàriament 1-connexos. Finalment, observem que, tot i que la condició de nilpotència exigida a X sembla irrellevant, aquesta propietat és crucial a l'hora de demostrar el teorema: ens permet aplicar el teorema 5.2.5 de Miller i manté la validesa de la demostració quan $m = 2$.

D'una manera similar s'obté la versió del teorema 5.2.7 per al cas de la p-localització. La demostració és idèntica a la que acabem de donar, substituint $\mathbb{Z}_p^\wedge$ per $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Teorema 5.2.8 *Sigui X un espai nilpotent p-local amb els grups d'homotopia superiors finitament generats com a $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòduls. Sigui p un nombre primer tal que*

(i) $\pi_n(X;\mathbb{Z}/p) \neq 0$ *per a algun* $n > 1$ *i*

(ii) X *és quasi-fitat a* p.

Aleshores per a infinits valors de n, *el grup* $\pi_n(X)$ *conté un subgrup no nul d'ordre* p. $\square$

5.3 Complecions d'espais anesfèrics virtualment nilpotents

Un *espai anesfèric* és un CW-complex amb recobridor universal contràctil; és a dir, un espai d'Eilenberg–Mac Lane $K(G,1)$ amb G un grup qualsevol. Diem que un espai anesfèric és *virtualment nilpotent* si el seu grup fonamental és virtualment nilpotent.

Sigui p un nombre primer. Nosaltres estem interessats en saber què passa amb els grups d'homotopia de $X_p^\wedge$ quan X és un espai anesfèric virtualment nilpotent tal que $X_p^\wedge$ no és anesfèric. Treballem amb espais anesfèrics virtualment nilpotents de tipus finit; és a dir, suposem que el grup fonamental de X és finitament generat. Aquest tipus d'espais tenen bones propietats. Per exemple, el teorema 7.2 de [12] implica el següent:

Proposició 5.3.1 *Sigui* p *un nombre primer. Si* $X = K(G,1)$ *amb* G *un grup virtualment nilpotent finitament generat, aleshores l'espai* X *és* $\mathbb{Z}/p$*-bo, els grups d'homotopia superiors de* $X_p^\wedge$ *són finitament generats com a* $\mathbb{Z}_p^\wedge$*-mòduls i* $\pi_1(X_p^\wedge) \cong \pi_1(X)_p^\wedge$. $\square$

Aquesta proposició ens dóna informació sobre l'estructura dels grups d'homotopia de la p-compleció d'un espai anesfèric virtualment nilpotent amb grup fonamental finitament generat. Veiem, però, què més podem dir sobre l'efecte del functor de p-compleció sobre aquest tipus d'espais.

L'objectiu d'aquesta secció és demostrar el resultat principal d'aquest capítol, el qual recordem tot seguit:

Teorema I *Sigui* p *un nombre primer i sigui* $X = K(G,1)$ *amb* G *un grup virtualment nilpotent finitament generat. Aleshores o bé* $X_p^\wedge$ *és un espai anesfèric amb grup fonamental la compleció* p*-profinita* $G_p^\wedge$ *de* G *o bé* $X_p^\wedge$ *té infinits grups d'homotopia no nuls, que són finitament generats com a* $\mathbb{Z}_p^\wedge$*-mòduls.*

Els passos a seguir per a demostrar el teorema I són essencialment dos: la reducció del problema a un de més senzill i la demostració d'aquesta reducció fent ús de la generalització del teorema de McGibbon i Neisendorfer demostrada a la secció anterior.

Pas 1: Reducció del problema

La generalització del teorema de McGibbon i Neisendorfer que hem demostrat a la secció anterior s'aplica a espais nilpotents quasi-fitats en un nombre primer p. La propietat següent dels grups virtualment nilpotents finitament generats serà la que ens permetrà arribar a tenir un espai d'aquest tipus, sense necessitat de demanar que l'homologia mòdul p del nostre espai sigui fitada:

Lema 5.3.2 *Si G és un grup virtualment nilpotent finitament generat, aleshores existeix una successió exacta curta $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ amb N un grup nilpotent finitament generat lliure de torsió i Q un grup finit.*

Demostració. Tot grup virtualment nilpotent finitament generat és, de fet, virtualment policíclic. Per tant, per la proposició 1.2 de [80], el grup G és virtualment poli-$\mathbb{Z}$. O sigui que existeix una successió exacta $N' \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q'$, on Q' és finit i N' és poli-$\mathbb{Z}$; és a dir, N' té una sèrie normal finita

$$N' = N'_1 \lhd N'_2 \lhd \ldots \lhd N'_m = \{1\},$$

tal que, per a cada i, el quocient N'_i/N'_{i+1} és isomorf a $\mathbb{Z}$. Per tant, el grup N' és virtualment nilpotent finitament generat i lliure de torsió. Sigui $\mathrm{Fitt}(N')$ el subgrup de Fitting de N'; és a dir, el subgrup de N' generat per tots els seus subgrups normals nilpotents. Com que aquest grup és nilpotent i és característic a N', obtenim que $\mathrm{Fitt}(N')$ és un subgrup normal nilpotent finitament generat lliure de torsió de G i d'índex finit. Aleshores $N = \mathrm{Fitt}(N')$ i $Q = G/\mathrm{Fitt}(N')$ són els grups que buscàvem. $\square$

Sigui X un espai anesfèric virtualment nilpotent amb grup fonamental finitament generat. Segons el lema que acabem de demostrar, si $G = \pi_1(X)$, aleshores existeix una successió exacta curta $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ amb N un grup nilpotent finitament generat lliure de torsió i Q un grup finit. Sigui F el p'-aïllador de Q; és a dir, el subgrup de Q generat per tots els elements de

p'-torsió de Q. Si F és trivial, aleshores Q és un grup finit p-local i, per tant, és un p-grup finit. Així doncs, a partir de la fibració

$$K(N_p^\wedge, 1) \to X_p^\wedge \to K(Q, 1),$$

obtinguda aplicant el lema 5.1.1 a la fibració $K(N, 1) \to X \to K(Q, 1)$, es dedueix que l'espai $X_p^\wedge$ és anesfèric amb grup fonamental $G_p^\wedge$ que s'inclou a la successió exacta $N_p^\wedge \rightarrowtail G_p^\wedge \twoheadrightarrow Q$. Suposem que F no és trivial i sigui $Y = K(E, 1)$ amb E l'antiimatge de F a G (si $F = Q$, llavors $Y = X$). Aleshores, aplicant el lema 5.1.1 a la fibració $Y \to X \to K(Q_p^\wedge, 1)$, obtenim una fibració

$$Y_p^\wedge \to X_p^\wedge \to K(Q_p^\wedge, 1).$$

Per tant, l'espai $X_p^\wedge$ és anesfèric (respectivament, té un nombre infinit de grups d'homotopia no nuls) si i només si $Y_p^\wedge$ és un espai anesfèric (respectivament, té un nombre infinit de grups d'homotopia no nuls). Així doncs, el lema 5.3.2 juntament amb el que acabem d'observar implica que demostrar el teorema I es redueix a demostrar el resultat següent:

Teorema 5.3.3 *Sigui $Y = K(E, 1)$ amb E un grup finitament generat tal que $N \rightarrowtail E \twoheadrightarrow F$ amb N un grup nilpotent finitament generat lliure de torsió i F un grup finit p-perfecte. Aleshores o bé $Y_p^\wedge$ és un espai anesfèric amb grup fonamental la p-compleció $E_p^\wedge$ de E o bé $Y_p^\wedge$ té infinits grups d'homotopia no nuls, que són finitament generats com a $\mathbb{Z}_p^\wedge$-mòduls.*

De fet, si denotem per $Y_p^\wedge\langle 1\rangle$ el recobridor universal de l'espai $Y_p^\wedge$ del teorema 5.3.3, aleshores demostrar el teorema 5.3.3 és equivalent a demostrar el teorema següent, ja que $\pi_n(Y_p^\wedge\langle 1\rangle) \cong \pi_n(Y_p^\wedge)$, per a tot $n \geq 2$:

Teorema 5.3.4 *Sigui $Y = K(E, 1)$ amb E un grup finitament generat tal que $N \rightarrowtail E \twoheadrightarrow F$ amb N un grup nilpotent finitament generat lliure de torsió i F un grup finit p-perfecte. El recobridor universal $Y_p^\wedge\langle 1\rangle$ de $Y_p^\wedge$ o bé és contràctil o bé té infinits grups d'homotopia no nuls, que són finitament generats com a $\mathbb{Z}_p^\wedge$-mòduls.*

Pas 2: Demostració del teorema 5.3.4

La idea de la demostració és ben senzilla. Si l'espai 1-connex $Y_p^\wedge\langle 1\rangle$ no és contràctil, aleshores el seu espai de llaços tampoc no és contràctil.

Llavors veurem que aquest espai nilpotent, $\Omega Y_p^\wedge\langle 1\rangle$, satisfà les condicions de la generalització del teorema de McGibbon i Neisendorfer que hem demostrat i, en conseqüència, té infinits grups d'homotopia no nuls. Descrivim primer de forma explícita el recobridor universal de $Y_p^\wedge$.

Descripció del recobridor universal de $Y_p^\wedge$

Sigui $Y = K(E,1)$ amb $N \rightarrowtail E \twoheadrightarrow F$, on N és un grup nilpotent finitament generat lliure de torsió i F és un grup finit p-perfecte. L'argument que usem per a obtenir una descripció del recobridor universal de $Y_p^\wedge$ és anàleg al raonament usat en la demostració del teorema 4.3.3.

Sigui $K(N_{(p)},1) \to Z \to K(F,1)$ la fibració obtinguda després d'aplicar la p-localització fibra a fibra a la fibració $K(N,1) \to Y \to K(F,1)$ (vegeu el teorema 4.1.5). Per construcció, l'aplicació $Y \to Z$ és una p-equivalència, la qual cosa implica que $Y_{(p)} \simeq Z_{(p)}$. Siguin $x_1,\dots,x_r$ un conjunt de generadors de p'-torsió de F. Per a cada i, $1 \le i \le r$, existeix una successió exacta

$$N_{(p)} \rightarrowtail \pi^{-1}(\langle x_i\rangle) \twoheadrightarrow \langle x_i\rangle,$$

on $\langle x_i\rangle$ denota el subgrup de F generat per x_i i $\pi\colon \pi_1(Z) \twoheadrightarrow F$. Com que $N_{(p)}$ és un grup nilpotent p-local i $\langle x_i\rangle$ té ordre $m \in p'$, la proposició VI.5.9 de [83] implica que la successió exacta escindeix. Sigui s_i la secció corresponent. Sigui S el subgrup normal de $\pi_1(Z)$ generat per $s_1(x_1),\dots,s_r(x_r)$. Aleshores tenim fibracions

$$K(S,1) \to Z \to K(\pi_1(Z)/S,1) \quad \text{i} \quad K(N_{(p)},1) \to Z \to K(F,1), \tag{5.3.3}$$

on $K(N_{(p)},1)$ és un espai nilpotent. Com que el morfisme $N_{(p)} \to \pi_1(Z)/S$ és exhaustiu, el lema 4.3.2 ens assegura que l'aplicació induïda

$$\pi_1(Z) \to F \times \pi_1(Z)/S$$

és exhaustiva. Per tant, aplicant el lema de la fibració nilpotent 5.1 de [35] a les fibracions (5.3.3) obtenim que el grup $\pi_1(Z)/S$ és nilpotent (de fet, això ja ho sabíem perquè hem vist que aquest grup era un quocient del grup nilpotent $N_{(p)}$) i actua nilpotentment sobre els grups $H_*(K(S,1);A)$ per a tot grup de coeficients A. En particular, $\pi_1(Z)/S$ actua nilpotentment sobre $H_n(K(S,1)_{(p)}) \cong H_n(K(S,1);\mathbb{Z}_{(p)})$ per a tot n. Per tant, a partir de la fibració

$$K(S,1)_{(p)} \to W \to K(\pi_1(Z)/S,1), \tag{5.3.4}$$

obtinguda en p-localitzar $K(S,1) \to Z \to K(\pi_1(Z)/S,1)$ fibra a fibra, deduïm que l'espai W és nilpotent i, en conseqüència, la fibració (5.3.4) és nilpotent. A més, segons el lema II.4.8 de [15], si p-localitzem obtenim una fibració $K(S,1)_{(p)} \to W_{(p)} \to K(\pi_1(Z)/S,1)_{(p)}$. Tenint en compte que $K(\pi_1(Z)/S,1)_{(p)} \simeq K((\pi_1(Z)/S)_{(p)},1)$ i que $K(S,1)_{(p)}$ és 1-connex (perquè S està generat per elements de p'-torsió), com que, per construcció, $Y_{(p)} \simeq Z_{(p)} \simeq W_{(p)}$, tenim una fibració nilpotent

$$K(S,1)_{(p)} \to Y_{(p)} \to K(\pi_1(Y_{(p)}),1).$$

Per tant, segons [15, II.4], p-completant obtenim una fibració

$$K(S,1)^\wedge_p \to Y^\wedge_p \to K(\pi_1(Y^\wedge_p),1),$$

ja que si X és un espai $\mathbb{Z}/p$-bo, aleshores $(X_{(p)})^\wedge_p \simeq X^\wedge_p$ (vegeu el lema 5.3.9) i, a més, si T és un grup nilpotent finitament generat com a grup p-local, aleshores $K(T,1)^\wedge_p \simeq K(T^\wedge_p,1)$. Per tant, hem demostrat el següent:

$$Y^\wedge_p\langle 1\rangle \simeq K(S,1)^\wedge_p.$$

Observació 5.3.5 El grup S és un grup virtualment nilpotent que s'inclou en un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccc}
H & \rightarrowtail & N_{(p)} & \twoheadrightarrow & \pi_1(Z)/S \\
\downarrow & & \downarrow & & \| \\
S & \rightarrowtail & \pi_1(Z) & \twoheadrightarrow & \pi_1(Z)/S \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
F & = & F, & &
\end{array}$$

on les columnes són també successions exactes curtes. Per tant, $K(S,1)$ és un espai virtualment nilpotent tal que $K(S,1)^\wedge_p$ és 1-connex. A més, $K(S,1)^\wedge_p$ té tots els grups d'homotopia finitament generats com a $\mathbb{Z}^\wedge_p$-mòduls, ja que, segons la proposició 5.3.1, l'espai $Y^\wedge_p$ té els grups d'homotopia superiors finitament generats com a $\mathbb{Z}^\wedge_p$-mòduls.

L'espai $\Omega Y^\wedge_p\langle 1\rangle$ és quasi-fitat a p

Sigui $Y = K(E,1)$ amb $N \rightarrowtail E \twoheadrightarrow F$, on N és un grup nilpotent finitament generat lliure de torsió i F és un grup finit p-perfecte. Suposem que $Y^\wedge_p\langle 1\rangle$ no és contràctil i anem a veure que $\Omega Y_p^\wedge\langle 1\rangle$ és quasi-fitat a p. Per a demostrar-ho utilitzarem les mateixes tècniques usades per Levi a [56] per a demostrar que si G és un grup finit p-perfecte, aleshores $\Omega K(G,1)_p^\wedge$ és un retracte de l'espai de llaços de la p-compleció de cert complex finit.

Sigui $\rho\colon F\to SU(n)$ una representació homotòpica fidel de F en $SU(n)$ i considerem el diagrama commutatiu següent:

$$\begin{array}{ccccc}
K(H,1) & = & K(H,1) & \longrightarrow & * \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
SU(n)_{hS} & \longrightarrow & K(S,1) & \stackrel{B\rho\circ B\alpha}{\longrightarrow} & BSU(n) \\
\downarrow & & \downarrow & & \| \\
SU(n)/F & \longrightarrow & K(F,1) & \longrightarrow & BSU(n),
\end{array} \tag{5.3.5}$$

on $B\alpha$ és l'aplicació induïda per la projecció $\alpha\colon S\twoheadrightarrow F$, H és el nucli de α i $SU(n)_{hS}$ és el quocient homotòpic de $SU(n)$ per l'acció de S; és a dir, $SU(n)_{hS}=(SU(n)\times ES)/S$ on l'acció de S és diagonal. El nostre primer objectiu és demostrar que l'espai $SU(n)_{hS}$ és finit mòdul p; és a dir, que $H_k(SU(n)_{hS};\mathbb{Z}/p)$ és finit per a tot k i $H_k(SU(n)_{hS};\mathbb{Z}/p)=0$ per a tot k suficientment gran. Per a demostrar aquest fet, ens fa falta el lema tècnic següent:

Lema 5.3.6 *Tot subgrup tancat T de la p-compleció $N_p^\wedge$ d'un grup nilpotent finitament generat lliure de torsió N és finit mòdul p.*

Demostració. Si $N=\mathbb{Z}$, aleshores $N_p^\wedge=\mathbb{Z}_p^\wedge$. Tot subgrup tancat de $\mathbb{Z}_p^\wedge$ és finit mòdul p. En efecte, sigui $0\neq x\in\mathbb{Z}_p^\wedge$ i sigui $\langle x\rangle_t$ el subgrup tancat de $\mathbb{Z}_p^\wedge$ generat per x. Aleshores $x=\Sigma a_ip^i$ amb $a_i\in\mathbb{Z}/p$. De fet, $x=p^n\xi$, on $n\geq 0$ i $\xi=(a_n+a_{n+1}p^{n+1}+\cdots)$ és un element invertible a $\mathbb{Z}_p^\wedge$. Per tant, $\langle x\rangle_t\cong p^n\mathbb{Z}_p^\wedge$ i així doncs és finit mòdul p. Si prenem $T\subseteq\mathbb{Z}_p^\wedge$ un subgrup tancat qualsevol, aleshores T està generat per un conjunt d'elements (no necessàriament finit) $x_\alpha\in\mathbb{Z}_p^\wedge$. Si $0\neq x\in T$, aleshores el subgrup tancat $\langle x\rangle_t$ generat per x és isomorf a $p^n\mathbb{Z}_p^\wedge$ per a cert n. Com que $T/\langle x\rangle_t\subseteq\mathbb{Z}_p^\wedge/\langle x\rangle_t\cong\mathbb{Z}/p=\langle y\rangle$, el grup T està generat per x i y. Per tant, T és finit mòdul p, ja que

$$T=p^n\mathbb{Z}_p^\wedge+p^m\mathbb{Z}_p^\wedge\cong\mathbb{Z}_p^\wedge.$$

Suposem ara que $N=\oplus_k\mathbb{Z}$ i procedim per inducció sobre k. Si $k=1$, aleshores ja hem vist que el resultat és cert. Suposem ara que es compleix per a $l < k-1$ i veiem que és cert per a $l = k$. Sigui $T \subseteq N_p^\wedge$ un subgrup tancat. Aleshores tenim un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}_p^\wedge & \rightarrowtail & \oplus_k \mathbb{Z}_p^\wedge & \twoheadrightarrow & \oplus_{k-1} \mathbb{Z}_p^\wedge \\ \cup & & \cup & & \cup \\ T \cap \mathbb{Z}_p^\wedge & \rightarrowtail & T & \twoheadrightarrow & T/(T \cap \mathbb{Z}_p^\wedge), \end{array}$$

on la darrera inclusió es deu al fet que $T/(T \cap \mathbb{Z}_p^\wedge) \cong (T + \mathbb{Z}_p^\wedge)/\mathbb{Z}_p^\wedge$ i tenim un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}_p^\wedge & \rightarrowtail & \oplus_k \mathbb{Z}_p^\wedge & \twoheadrightarrow & \oplus_{k-1} \mathbb{Z}_p^\wedge \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \mathbb{Z}_p^\wedge & \rightarrowtail & T + \mathbb{Z}_p^\wedge & \twoheadrightarrow & (T + \mathbb{Z}_p^\wedge)/\mathbb{Z}_p^\wedge. \end{array}$$

Per tant, com que per hipòtesi d'inducció $T \cap \mathbb{Z}_p^\wedge$ i $T/(T \cap \mathbb{Z}_p^\wedge)$ són finits mòdul p, usant la successió espectral de Lyndon–Hochschild–Serre obtenim de forma immediata que T és finit mòdul p.

Finalment suposem que N és nilpotent i considerem la sèrie normal finita

$$N_p^\wedge = N_1 \lhd N_2 \lhd \ldots \lhd N_m = \{1\}$$

de $N_p^\wedge$ amb quocients $N_i/N_{i+1} \cong \mathbb{Z}_p^\wedge$ per a tot i. Aleshores, si T és un subgrup tancat de $N_p^\wedge$, es comprova fàcilment que existeix una sèrie normal finita amb quocients isomorfs a $\mathbb{Z}_p^\wedge$,

$$T = N_1 \cap T \lhd N_2 \cap T \lhd \ldots \lhd N_m \cap T = \{1\}.$$

Això juntament amb la certesa del resultat en el cas abelià implica que T és finit mòdul p. $\square$

Sigui $H \rightarrowtail N_{(p)} \twoheadrightarrow \pi_1(Z)/S$ una de les successions exactes curtes que apareix a l'observació 5.3.5 i sigui $K(H,1) \to K(N_{(p)},1) \to K(\pi_1(Z)/S,1)$ la fibració associada. Aquesta fibració és nilpotent, ja que $\pi_1(Z)/S$ actua nilpotentment sobre H [49, proposició 4.1]. Per tant, aplicant el lema II.4.8 de [15] obtenim una fibració $K(H_p^\wedge,1) \to K(N_p^\wedge,1) \to K(\pi_1(Y_p^\wedge),1)$ i, en conseqüència, una successió exacta

$$H_p^\wedge \rightarrowtail N_p^\wedge \twoheadrightarrow \pi_1(Y_p^\wedge).$$

En ser $H_p^\wedge$ un subgrup tancat de $N_p^\wedge$, el lema 5.3.6 implica que $H_p^\wedge$ és finit mòdul p. Aleshores, l'espai $K(H,1)$ és finit mòdul p perquè, per a tot k,

$$H_k(K(H,1); \mathbb{Z}/p) \cong H_k(K(H,1)_p^\wedge; \mathbb{Z}/p) \cong H_k(H_p^\wedge; \mathbb{Z}/p).$$

En conseqüència, si considerem la fibració

$$K(H,1) \to SU(n)_{hS} \to SU(n)/F$$

del diagrama (5.3.5) i la seva successió espectral de Serre mòdul p associada obtenim el següent:

Corol·lari 5.3.7 *L'espai $SU(n)_{hS}$ és finit mòdul p.*

DEMOSTRACIÓ. Considerem la successió espectral de Serre associada a la primera columna del diagrama (5.3.5), el terme E^2 de la qual és el següent:

$$E^2_{r,s} = H_r(SU(n)/F; H_s(K(H,1);\mathbb{Z}/p)) \Rightarrow H_{r+s}(SU(n)_{hS};\mathbb{Z}/p).$$

Un espai homogeni d'un grup de Lie compacte és una varietat compacta [16]. Per tant, l'espai $SU(n)/F$ és finit mòdul p i, tal i com hem vist, l'espai $K(H,1)$ també ho és. Tenim dos casos: Si l'acció de $\pi_1(SU(n)/F) \cong F$ sobre $H_s(K(H,1);\mathbb{Z}/p)$ és nilpotent, aleshores es conclou immediatament que l'espai $SU(n)_{hS}$ és finit mòdul p. Suposem que $\pi_1(SU(n)/F) \cong F$ no actua nilpotentment sobre $H_s(K(H,1);\mathbb{Z}/p)$. Sigui $S_p(F)$ un p-subgrup de Sylow de F i considerem el diagrama commutatiu següent:

$$\begin{array}{ccccc} * & \to & K(H,1) & = & K(H,1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F/S_p(F) & \to & L & \to & SU(n)_{hS} \\ \| & & \downarrow & & \downarrow \\ F/S_p(F) & \to & SU(n)/S_p(F) & \to & SU(n)/F. \end{array} \tag{5.3.6}$$

Com que $H_*(SU(n)_{hS};\mathbb{Z}/p)$ és un retracte de $H_*(L;\mathbb{Z}/p)$, només cal veure que l'homologia mòdul p de L és finita. Considerem la successió espectral de Serre associada a la segona columna del diagrama (5.3.6), el terme E^2 de la qual és el següent:

$$E^2_{r,s} = H_r(SU(n)/S_p(F); H_s(K(H,1);\mathbb{Z}/p)) \Rightarrow H_{r+s}(L;\mathbb{Z}/p).$$

Així doncs, l'espai L és finit mòdul p, ja que $\pi_1(SU(n)/S_p(F)) \cong S_p(F)$ actua nilpotentment sobre $H_s(K(H,1);\mathbb{Z}/p)$ [15, p. 215] i ambdós espais $SU(n)/S_p(F)$ i $K(H,1)$ són finits mòdul p. $\square$

Ara ja disposem de les eines necessàries per a demostrar que l'espai de llaços del recobridor universal de $Y_p^\wedge$ és quasi-fitat a p.

Proposició 5.3.8 *L'espai* $\Omega Y_p^\wedge\langle 1\rangle \simeq \Omega K(S,1)_p^\wedge$ *és quasi-fitat a* p.

Demostració. Sigui $SU(n) \to SU(n)_{hS} \to K(S,1)$ la fibració principal amb fibra connexa que s'obté a partir de la segona fila del diagrama (5.3.5). Segons el lema II.2.2 de [15], p-completant obtenim una nova fibració principal

$$SU(n)_p^\wedge \to (SU(n)_{hS})_p^\wedge \to K(S,1)_p^\wedge.$$

Siguin Z la cofibra de l'aplicació $SU(n)_p^\wedge \to (SU(n)_{hS})_p^\wedge$ i D la fibra homotòpica de $Z \to K(S,1)_p^\wedge$. Considerem el diagrama commutatiu següent:

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega K(S,1)_p^\wedge & \to & SU(n)_p^\wedge & \to & (SU(n)_{hS})_p^\wedge & \to & K(S,1)_p^\wedge \\ \| & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\ \Omega K(S,1)_p^\wedge & \to & D & \to & Z & \to & K(S,1)_p^\wedge. \end{array} \tag{5.3.7}$$

Com que $SU(n)_p^\wedge \to D$ és trivial, l'aplicació $\Omega K(S,1)_p^\wedge \to D$ també ho és. Això implica que $\Omega Z \simeq \Omega D \times \Omega K(S,1)_p^\wedge$, on $\Omega K(S,1)_p^\wedge$ és un espai connex, ja que $K(S,1)_p^\wedge$ és 1-connex. Per tant, podem aplicar el lema II.2.2 de [15] a la segona fila del diagrama (5.3.7) i obtenir així una fibració

$$\Omega K(S,1)_p^\wedge \xrightarrow{*} D_p^\wedge \to Z_p^\wedge \to K(S,1)_p^\wedge,$$

d'on en deduïm la descomposició següent:

$$\Omega Z_p^\wedge \simeq \Omega D_p^\wedge \times \Omega K(S,1)_p^\wedge. \tag{5.3.8}$$

Com que Z és la cofibra de l'aplicació $SU(n)_p^\wedge \to (SU(n)_{hS})_p^\wedge$, pel corol·lari 5.3.7, l'espai Z és finit mòdul p. Així, $Z_p^\wedge$ té l'homologia mòdul p finita, ja que $Z_p^\wedge$ és 1-connex i, per tant, $H_n(Z;\mathbb{Z}/p) \cong H_n(Z_p^\wedge;\mathbb{Z}/p)$ per a tot n. Això implica que $Z_p^\wedge$ és quasi-fitat a p (de fet, és fitat a p) i, segons la proposició 5.2.6, l'espai $\Omega Z_p^\wedge$ també ho és. Finalment, la descomposició (5.3.8) ens assegura que l'espai $\Omega K(S,1)_p^\wedge$ és quasi-fitat a p. □

Demostració del teorema 5.3.4

Sigui $Y = K(E,1)$ amb $N \rightarrowtail E \twoheadrightarrow F$, on N és un grup nilpotent finitament generat lliure de torsió i F és un grup finit p-perfecte. Recordem que volem veure que el recobridor universal de $Y_p^\wedge$ o bé és contràctil o bé té infinits grups d'homotopia no nuls, que són finitament generats com a $\mathbb{Z}_p^\wedge$-mòduls.

Suposem que $Y_p^\wedge\langle 1\rangle \simeq K(S,1)_p^\wedge$ no és contràctil. Aleshores l'espai de llaços $\Omega K(S,1)_p^\wedge$ no és contràctil i existeix $k>1$ tal que $\pi_k(\Omega K(S,1)_p^\wedge;\mathbb{Z}/p)$ és no nul. En efecte, suposem que $\pi_k(\Omega K(S,1)_p^\wedge;\mathbb{Z}/p)$ és zero per a tot $k>1$. Llavors, en ser $\Omega K(S,1)_p^\wedge$ un espai amb els grups d'homotopia finitament generats com a $\mathbb{Z}_p^\wedge$-mòduls (vegeu l'observació 5.3.5), a partir de les successions exactes

$$\pi_k(\Omega K(S,1)_p^\wedge)\otimes \mathbb{Z}/p \rightarrowtail \pi_k(\Omega K(S,1)_p^\wedge;\mathbb{Z}/p) \twoheadrightarrow \mathrm{Tor}\,(\pi_{k-1}(\Omega K(S,1)_p^\wedge),\mathbb{Z}/p),$$

on $k\geq 1$, obtenim que

$$\pi_1(\Omega K(S,1)_p^\wedge;\mathbb{Z}/p)\cong \pi_1(\Omega K(S,1)_p^\wedge)\otimes\mathbb{Z}/p\neq 0 \ \text{ i } \ \pi_k(\Omega K(S,1)_p^\wedge)=0,$$

per a tot $k>1$. A més, com que $\mathrm{Tor}\,(\pi_1(\Omega K(S,1)_p^\wedge),\mathbb{Z}/p)=0$, existeix una aplicació essencial $K(\mathbb{Z}_p^\wedge,1)\to K(\pi_1(\Omega K(S,1)_p^\wedge),1)$. La composició d'aquesta aplicació amb un generador de $H^1(\mathbb{Z}/p;\mathbb{Z}_p^\wedge)$ dóna lloc a una aplicació essencial

$$f_2\colon K(\mathbb{Z}/p,1)\to K(\pi_1(\Omega K(S,1)_p^\wedge),1).$$

Les obstruccions a elevar aquesta aplicació a través de la torre de Postnikov de $\Omega K(S,1)_p^\wedge$ a una aplicació

$$f_\infty\colon K(\mathbb{Z}/p,1)\to \Omega K(S,1)_p^\wedge$$

viuen a $H^*(\mathbb{Z}/p;\pi_k(\Omega K(S,1)_p^\wedge))$, per a tot $k>1$. Però aquests grups són zero, ja que, per a tot $k>1$, $\pi_k(\Omega K(S,1)_p^\wedge)=0$. Per tant, l'aplicació f_∞ existeix, la qual cosa contradiu el teorema 5.2.5 perquè $\Omega K(S,1)_p^\wedge$ és un espai nilpotent quasi-fitat a p.

Per tant, l'espai nilpotent $\Omega K(S,1)_p^\wedge$ satisfà les condicions (i) i (ii) del teorema 5.2.7 i, en conseqüència, té infinits grups d'homotopia no nuls. Això implica, doncs, que si el recobridor universal de $Y_p^\wedge$ no és contràctil, aleshores té infinits grups d'homotopia no nuls.

5.3.1 Conseqüència

Sigui p un nombre primer qualsevol. El resultat que acabem de demostrar sobre les p-complecions d'espais anesfèrics virtualment nilpotents amb grup fonamental finitament generat continua essent cert si p-localitzem aquest tipus d'espais. De fet, el resultat per a les p-localitzacions s'obté com a conseqüència del teorema I. La propietat següent té molt a veure amb aquest fet:

Lema 5.3.9 *Si X és un espai $\mathbb{Z}/p$-bo, aleshores $(X_{(p)})^\wedge_p \simeq X^\wedge_p$.*

Demostració. Segons hem explicat en el primer capítol, en ser X un espai $\mathbb{Z}/p$-bo,

$$X_{H\mathbb{Z}/p} \simeq X^\wedge_p.$$

Per tant, l'espai $X^\wedge_p$ és ortogonal a totes les $H_*(\ -\ ;\mathbb{Z}/p)$-equivalències. Com que, en particular, l'aplicació de p-localització $\eta\colon X \to X_{(p)}$ és una $H_*(\ -\ ;\mathbb{Z}/p)$-equivalència (vegeu el teorema 1.2.4), existeix una única aplicació

$$\alpha\colon X_{(p)} \to X^\wedge_p$$

tal que $\alpha\circ\eta = \mu$, on $\mu\colon X \to X^\wedge_p$. A més, α és una $H_*(\ -\ ;\mathbb{Z}/p)$-equivalència, ja que η i μ ho són. Així doncs, $(X_{(p)})^\wedge_p \simeq X^\wedge_p$. $\square$

Sigui $X = K(G,1)$ amb G un grup virtualment nilpotent finitament generat. Aleshores, a partir del teorema G sobre la preservació dels espais virtualment nilpotents (vegeu el capítol 4) i del resultat de la proposició 3.4 de [22], obtenim l'anàleg a la proposició 5.3.1 per a la p-localització de X:

Proposició 5.3.10 *Sigui p un nombre primer. Si $X = K(G,1)$ amb G un grup virtualment nilpotent finitament generat, aleshores X és $\mathbb{Z}/p$-bo, els grups d'homotopia superiors de $X_{(p)}$ són finitament generats com a $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòduls i $\pi_1(X_{(p)}) \cong (\pi_1(X))_{(p)}$.* $\square$

En particular, aquesta proposició ens diu que si X és un espai anesfèric virtualment nilpotent amb grup fonamental finitament generat, aleshores podem aplicar el lema 5.3.9 a X i obtenir que $(X_{(p)})^\wedge_p \simeq X^\wedge_p$. Tenint en compte aquest fet demostrem l'anàleg del teorema I per a la p-localització.

Teorema J *Sigui p un nombre primer i sigui $X = K(G,1)$ amb G un grup virtualment nilpotent finitament generat. Aleshores o bé $X_{(p)}$ és un espai anesfèric amb grup fonamental la p-localització $G_{(p)}$ de G o bé $X_{(p)}$ té infinits grups d'homotopia no nuls, que són finitament generats com a $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòduls.*

Demostració. Sigui $X = K(G,1)$ amb G virtualment nilpotent finitament generat. Segons el lema 5.3.2, existeix una successió exacta curta $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ amb N un grup nilpotent finitament generat lliure de torsió i Q un grup finit. Sigui F el p'-aïllador de Q, és a dir, el subgrup de Q

generat per tots els elements de p'-torsió de Q, i sigui $Y = K(E,1)$ amb E l'antiimatge de F a G. Aleshores si apliquem el corol·lari 4.1.6 a la fibració $Y \to X \to K(Q/F,1)$ obtenim una fibració

$$Y_{(p)} \to X_{(p)} \to K(Q/F,1),$$

ja que $Q/F \cong Q_{(p)}$ és un p-grup finit [76]. Per tant, n'hi ha prou amb veure que el teorema és cert per a l'espai Y. El teorema 4.3.3 ens diu que l'espai $Y_{(p)}$ és nilpotent. Aleshores, aplicant la proposició VI.5.1 de [15] a $Y_{(p)}$ obtenim, per a tot $n \geq 2$, una successió exacta curta que escindeix

$$\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, \pi_n(Y_{(p)})) \rightarrowtail \pi_n((Y_{(p)})^\wedge_p) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, \pi_{n-1}(Y_{(p)})).$$

Com que tot espai nilpotent és $\mathbb{Z}/p$-bo [15], usant el lema 5.3.9 i tenint en compte que $Y_{(p)}$ té els grups d'homotopia superiors finitament generats com a $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòduls (vegeu la proposició 5.3.10), obtenim que, per a tot $n \geq 2$,

$$\pi_n(Y^\wedge_p) \cong \pi_n((Y_{(p)})^\wedge_p) \cong \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, \pi_n(Y_{(p)})).$$

Per tant, l'espai $Y_{(p)}$ i, en conseqüència, $X_{(p)}$, és anesfèric (respectivament, té infinits grups d'homotopia no nuls) si i només si $Y^\wedge_p$ és anesfèric (respectivament, té infinits grups d'homotopia no nuls). El resultat s'obté, doncs, de forma immediata a partir del teorema I. □

Recordem que si P és un conjunt de primers, aleshores

$$(X_P)_{(p)} \simeq X_{(p)}$$

per a tot espai X i per a tot nombre primer $p \in P$. Aquest fet permet estendre el resultat del teorema J a localitzacions en conjunts no buits de primers com segueix:

Corol·lari 5.3.11 *Sigui P un conjunt no buit de nombres primers i sigui $X = K(G,1)$ amb G un grup virtualment nilpotent finitament generat. Aleshores o bé X_P és un espai anesfèric amb grup fonamental la P-localització G_P de G o bé X_P té infinits grups d'homotopia no nuls, que són finitament generats com a $\mathbb{Z}_P$-mòduls.*

Demostració. Sigui $Y = K(E,1)$ l'espai descrit en la demostració del teorema J. Suposem que X_P no és anesfèric. Aleshores Y_P tampoc no és anesfèric i existeix $k > 1$ tal que $\pi_k(X_P) \cong \pi_k(Y_P) \neq 0$. Pel teorema 4.3.3, l'espai Y_P és nilpotent i, per tant, $H_n(Y_P) \cong H_n(Y_P; \mathbb{Z}_P)$ per a tot n. Segons [48], la classe dels grups nilpotents P-locals finitament generats (que, en el cas abelià, són els $\mathbb{Z}_P$-mòduls finitament generats) és una classe de Serre. Per tant, com que Y_P és un espai nilpotent i $H_n(Y_P; \mathbb{Z}_P) \cong H_n(Y; \mathbb{Z}_P)$ és finitament generat com a $\mathbb{Z}_P$-mòdul per a tot n, obtenim que $\pi_n(Y_P)$ és finitament generat com a $\mathbb{Z}_P$-mòdul per a tot $n \geq 2$ i $\pi_1(Y_P)$ és un grup nilpotent P-local finitament generat. Així, per a algun $p \in P$,

$$\pi_k(Y_{(p)}) \cong \pi_k((Y_P)_{(p)}) \cong (\pi_k(Y_P))_{(p)} \neq 0,$$

on k és estrictament més gran que 1. Per tant, el teorema J ens diu que l'espai $Y_{(p)}$ té infinits grups d'homotopia no nuls. Aquest fet implica que Y_P i, en conseqüència, X_P, té infinits grups d'homotopia no nuls, que són finitament generats com a $\mathbb{Z}_P$-mòduls. $\square$

En particular, si $X = K(Q, 1)$ amb Q un grup finit el resultat es pot obtenir de forma més directa. Sabem que $\eta_Q\colon Q \to Q_P$ és una aplicació exhaustiva amb $\ker \eta_Q = I_{P'}(Q)$ el P'-aïllador de Q [76]. Sigui $Y = K(I_{P'}(Q), 1)$ i considerem la fibració

$$Y_P \to X_P \to K(Q_P, 1),$$

obtinguda en aplicar el corol·lari 4.1.6 a la fibració $Y \to X \to K(Q_P, 1)$. L'espai Y_P és 1-connex, ja que $\pi_1(Y_P) \cong (\pi_1(Y))_P \cong (I_{P'}(Q))_P = \{1\}$. Si X_P és un espai no anesfèric, aleshores existeix algun $k > 1$ tal que $\pi_k(Y_P) \cong \pi_k(X_P) \neq 0$. Com que Y_P és 1-connex amb tots els grups d'homotopia finitament generats com a $\mathbb{Z}_P$-mòduls i $(Y_P)_{(p)} \simeq Y_{(p)}$ per a tot $p \in P$,

$$\pi_k(Y_{(p)}) \cong \pi_k((Y_P)_{(p)}) \cong (\pi_k(Y_P))_{(p)} \neq 0$$

per a algun $p \in P$. Aleshores el resultat s'obté aplicant el teorema J a $Y_{(p)}$.

La condició que P sigui un conjunt no buit de primers és realment necessària. Observem que si P és el conjunt buit, aleshores $X_P = X_{(0)}$ és la racionalització de X. Per tant, si, per exemple, $X = K(Q, 1)$ amb Q un grup finit, aleshores l'espai X_P és trivial. Si $X = K(G, 1)$ amb G un grup virtualment nilpotent finitament generat, aleshores veurem en el capítol següent que X_P pot no ser anesfèric i tenir només un nombre finit de grups d'homotopia no nuls (vegeu l'exemple 6.1.1).

Capítol 6

Racionalització de varietats anesfèriques

Les infra-nilvarietats són varietats compactes de tipus $K(G,1)$ amb G un grup virtualment nilpotent finitament generat lliure de torsió. Segons el corol·lari 5.3.11 del capítol anterior, les localitzacions de les infra-nilvarietats en conjunts no buits de primers donen o bé espais anesfèrics o bé espais amb infinits grups d'homotopia no nuls.

En aquest capítol fem un estudi detallat de les racionalitzacions de les infra-nilvarietats. Hem trobat infra-nilvarietats tals que la seva racionalització no és un espai anesfèric, però, en canvi, només té un nombre finit de grups d'homotopia no nuls. Aleshores donem una condició necessària i suficient que ens permet decidir quan la racionalització d'una infra-nilvarietat, de dimensió menor o igual que 4, té aquesta propietat. Aquest criteri el generalitzem a espais anesfèrics virtualment nilpotents amb grup fonamental finitament generat (no necessàriament lliure de torsió) i de dimensió homològica racional menor o igual que 3.

Com a conseqüència d'aquest criteri, obtenim informació nova sobre els grups d'homotopia de les localitzacions en nombres primers de les infra-nilvarietats i, més generalment, dels espais anesfèrics virtualment nilpotents amb grup fonamental finitament generat. Aquestes localitzacions són molt sovint espais nilpotents i, quan no ho són, hi ha un raonament amb recobridors que ens permet tractar-les com si ho fossin. Per a un espai nilpotent Y, l'afirmació que $\pi_k(Y_{(0)}) = 0$ per a $k > N$ és equivalent a afirmar que $\pi_k(Y)$

és de torsió per a $k > N$. Per tant, obtenim un criteri per a decidir en quins casos els infinits grups d'homotopia no nuls de les p-localitzacions de les infra-nilvarietats són tots finits a partir d'una certa dimensió.

6.1 Motivació i plantejament del problema

Hem vist al capítol 4 que les localitzacions en conjunts de primers transformen espais amb tots els grups d'homotopia finits en espais amb tots els grups d'homotopia finits. Per exemple, la localització d'un espai d'Eilenberg–Mac Lane de tipus $K(Q, 1)$ amb Q un grup finit en un conjunt qualsevol de primers és un espai amb tots els grups d'homotopia finits. D'altra banda, la localització d'un espai de tipus $K(N, 1)$ amb N un grup nilpotent finitament generat en un conjunt qualsevol de primers P és un espai anesfèric amb grup fonamental la localització de N en el conjunt P a la categoria dels grups. Per tant, és natural preguntar-se el següent:

Pregunta Sigui $X = K(G, 1)$ amb G un grup virtualment nilpotent finitament generat i sigui P un conjunt qualsevol de primers. Suposem que X_P no és un espai anesfèric. És cert que existeix un enter positiu N tal que els grups d'homotopia $\pi_k(X_P)$ de X_P són finits per a tot $k > N$?

Sigui X un espai anesfèric virtualment nilpotent amb grup fonamental G finitament generat. El lema 5.3.2 ens diu que existeix una successió exacta curta $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ amb N un grup nilpotent finitament generat lliure de torsió i Q un grup finit. Sigui F el P'-aïllador de Q, és a dir, el subgrup de Q generat per tots els elements de P'-torsió de Q i sigui $Y = K(E, 1)$ amb E l'antiimatge de F a G. Com que el grup Q_P és de P-torsió, aplicant el corol·lari 4.1.6 a la fibració $Y \to X \to K(Q_P, 1)$ obtenim una fibració

$$Y_P \to X_P \to K(Q_P, 1) \tag{6.1.1}$$

amb fibra Y_P nilpotent (vegeu el teorema 4.3.3). Pel teorema J, els grups d'homotopia superiors de X_P són finitament generats com a $\mathbb{Z}_P$-mòduls. Per tant, si X_P no és un espai anesfèric, aleshores $\pi_k(X_P) \cong \pi_k(Y_P)$ és un grup finit per a tot $k > N$ si i només si $\pi_k(Y_{(0)}) = 0$ per a tot $k > N$. Dit d'una altra manera, per a respondre a la pregunta formulada, n'hi ha prou amb veure què passa quan racionalitzem l'espai virtualment nilpotent Y que acabem de descriure.

Observem que $Y = K(E, 1)$ amb $N \rightarrowtail E \twoheadrightarrow F$, on N és un grup nilpotent finitament generat lliure de torsió i F és un grup finit generat per elements de P'-torsió. Per tant, l'homologia racional $H_n(Y; \mathbb{Q})$ de Y és un $\mathbb{Q}$-espai vectorial de dimensió finita per a cada n i és zero per a tot n suficientment gran; és a dir, l'espai Y és $\mathbb{Q}$-finit. En conseqüència, l'espai racional $Y_{(0)}$ també és $\mathbb{Q}$-finit, ja que $H_n(Y_{(0)}) \cong H_n(Y; \mathbb{Q})$. Aleshores, en ser $Y_{(0)}$ un espai nilpotent (vegeu el corol·lari 4.3.4) $\mathbb{Q}$-finit, tenim dues possibilitats:

- o bé és racionalment el·líptic, és a dir, només té un nombre finit de grups d'homotopia no nuls,
- o bé és racionalment hiperbòlic, és a dir, té infinits grups d'homotopia no nuls. En aquest cas, la successió tal que el seu k-èsim terme és $\rho_k = \Sigma_{n \leq k} \dim(\pi_n(Y_{(0)}))$ creix exponencialment.

Anem a veure un exemple de cada cas.

Exemple 6.1.1 Sigui $X = K(G, 1)$ la varietat orientable de dimensió 3 anomenada de Hantzsche–Wendt, on

$$\begin{array}{llll} G = \langle a, b, c, \alpha, \beta \mid & [a,b] = 1, & [a,c] = 1, & [b,c] = 1, \\ & \alpha a = a^{-1}\alpha, & \alpha b = b^{-1}\alpha, & \alpha c = c\alpha, \\ & \beta a = a^{-1}\beta, & \beta b = b\beta, & \beta c = c^{-1}\beta, \\ & \alpha^2 = c, & \beta^2 = b, & \beta\alpha = a^{-1}bc^{-1}\alpha\beta \,\rangle, \end{array}$$

és a dir, hi ha una extensió $\mathbb{Z}^3 \rightarrowtail G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. Sigui P un conjunt de primers. Si $2 \in P$, aleshores el corol·lari 4.1.6 implica que X_P és un espai anesfèric amb grup fonamental G_P tal que

$$(\mathbb{Z}_P)^3 \rightarrowtail G_P \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2.$$

Ara bé, si $2 \notin P$, aleshores $X = Y$ i X_P és un espai 1-connex, ja que, segons el teorema 2.1 de [21],

$$\pi_1(X_P) \cong G_P \cong (G_{\mathrm{ab}})_P = \{1\}.$$

Per tant, $\pi_n(X_{(0)}) \cong (\pi_n(X_P))_{(0)} \cong \pi_n(X_P) \otimes \mathbb{Q}$. Segons el teorema J, l'espai X_P té infinits grups d'homotopia no nuls perquè $\pi_3(X_P) \twoheadrightarrow H_3(X_P)$

i $H_3(X_P) \neq 0$. Ara, com que X és una varietat orientable, $H_*(X;\mathbb{Q})$ satisfà la dualitat de Poincaré i, en conseqüència, tenim un espai 1-connex tal que

$$H_n(X_{(0)}) \cong H_n(X;\mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } n = 0, 3 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Utilitzant el morfisme de Hurewicz obtenim que $X_{(0)}$ té el mateix tipus d'homotopia que $S^3_{(0)}$, de manera que $\pi_n(X_{(0)}) = 0$, per a tot $n > 3$. Això implica que $\pi_n(X_P)$ és un grup finit per a tot $n > 3$.

De fet, segons [87], en cada dimensió senar existeix una varietat de Riemann plana compacta que té el tipus d'homotopia racional d'una esfera. O sigui que tenim una família d'exemples de varietats tals que, per a un cert conjunt de primers P, la seva P-localització no és un espai anesfèric i té els grups d'homotopia finits a partir d'un cert lloc.

Exemple 6.1.2 Sigui $X = K(G, 1)$ la varietat no orientable de dimensió 4 amb

$$\begin{array}{llll} G = \langle a, b, c, d, \alpha, \beta \mid & [a, b] = 1, & [a, c] = 1, \ldots, & [c, d] = 1, \\ & \alpha^2 = c, & \beta^2 = d, & \alpha\beta = b^{-1}cd^{-1}\beta\alpha, \\ & \alpha a = a^{-1}\alpha, & \alpha b = b^{-1}\alpha, & \alpha c = c\alpha, \\ & \alpha d = d^{-1}\alpha, & \beta a = a^{-1}\beta, & \beta b = b^{-1}\beta, \\ & \beta c = c^{-1}\beta, & \beta d = d\beta & \rangle, \end{array}$$

és a dir, hi ha una extensió $\mathbb{Z}^4 \rightarrowtail G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. Tal i com passa en l'exemple anterior, si $2 \in P$, aleshores X_P és un espai anesfèric amb grup fonamental G_P que s'inclou en una successió exacta $(\mathbb{Z}_P)^4 \rightarrowtail G_P \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. En canvi, si $2 \notin P$, aleshores $Y = X$ i X_P és 1-connex, ja que, segons el teorema 2.1 de [21],

$$\pi_1(X_P) \cong G_P \cong (G_{\mathrm{ab}})_P = \{1\}.$$

Per tant, $\pi_n(X_{(0)}) \cong (\pi_n(X_P))_{(0)} \cong \pi_n(X_P) \otimes \mathbb{Q}$. A més, el teorema J implica que l'espai X_P té infinits grups d'homotopia no nuls perquè $\pi_2(X_P) \cong H_2(X_P) \neq 0$. Usant la successió espectral de Lyndon–Hochschild–Serre associada a la successió exacta anterior, obtenim que

$$H^n(X_{(0)}) \cong H^n(X_{(0)};\mathbb{Q}) \cong H^n(X;\mathbb{Q}) \cong H^n(\mathbb{Z}^4;\mathbb{Q})^{\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2}.$$

Fent els càlculs corresponents, s'obté el següent:

$$H^n(X_{(0)}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } n = 0, 2 \\ \mathbb{Q}^2 & \text{si } n = 3 \\ 0 & \text{altrament,} \end{cases}$$

on $[x] \in H^2(X_{(0)})$ i $[y_1], [y_2] \in H^3(X_{(0)})$, amb $[xy_i] = 0$ per a $i = 1, 2$ i $[y_1 y_2] = 0$. Per tant, tenim un espai 1-connex tal que la seva àlgebra de cohomologia és isomorfa a l'àlgebra de cohomologia de $W = S^2_{(0)} \vee S^3_{(0)} \vee S^3_{(0)}$. Com que X és un espai formal i W és un espai intrínsicament formal (vegeu l'apartat següent), resulta que $X_{(0)}$ i W tenen el mateix tipus d'homotopia. Per tant, es compleix que $\dim \pi_n(X_{(0)}) = \infty$, la qual cosa implica, en particular, que X_P té infinits grups d'homotopia no finits.

En aquest capítol, el nostre objectiu és demostrar criteris per a decidir quan la racionalització d'una infra-nilvarietat i, més generalment, d'un espai anesfèric virtualment nilpotent amb grup fonamental finitament generat, té només un nombre finit de grups d'homotopia no nuls. La condició necessària i suficient per tal que la racionalització d'un espai d'aquest tipus sigui racionalment el·líptic (un espai nilpotent Y és racionalment el·líptic si $\dim H_*(Y;\mathbb{Q}) < \infty$ i $\dim \pi_*(Y) \otimes \mathbb{Q} < \infty$) l'hem deduïda a partir dels exemples que acabem de descriure i aleshores hem demostrat el següent:

Teorema K *Sigui $X = K(G, 1)$ una infra-nilvarietat. Si $H_n(X;\mathbb{Q}) = 0$ per a tot $n \geq k$, on $k \leq 4$, aleshores $X_{(0)}$ és racionalment el·líptic si i només si $H^*(X;\mathbb{Q})$ satisfà la dualitat de Poincaré.*

Si en comptes de considerar una infra-nilvarietat prenem un espai anesfèric virtualment nilpotent amb grup fonamental finitament generat (no necessàriament lliure de torsió), aleshores el teorema continua essent vàlid si suposem que $k \leq 3$. Per tant, en estendre la classe d'espais, disminuïm la dimensió homològica racional.

Tal i com hem explicat abans, el resultat del teorema K ens permetrà obtenir informació sobre la finitud dels grups d'homotopia de les localitzacions de les infra-nilvarietats i, més generalment, dels espais anesfèrics virtualment nilpotents amb grup fonamental finitament generat, en conjunts de primers.

6.2 Un petit resum d'homotopia racional

En aquesta secció introduïm les nocions i resultats bàsics de teoria d'homotopia racional que usem al llarg del capítol per tal de demostrar el teorema K, que hem enunciat al final de la secció anterior.

6.2.1 Models minimals i espais formals

Una *àlgebra graduada diferencial* és una àlgebra graduada $A = \{A_i\}_{i\geq 0}$ juntament amb una aplicació $d\colon A \to A$ de grau 1 tal que $d \circ d = 0$ i que és una derivació; és a dir, per a tot $x, y \in A$,

$$d(x \cdot y) = d(x) \cdot y + (-1)^{\operatorname{grau}(x)} x \cdot d(y).$$

Diem que (A, d) és *commutativa* si, per a tot $x \in A^p$ i $y \in A^q$, se satisfà la igualtat $x \cdot y = (-1)^{pq} y \cdot x$.

Sigui V un $\mathbb{Q}$-espai vectorial graduat; és a dir, $V = \{V_i\}_{i\geq 0}$ amb V_i un $\mathbb{Q}$-mòdul lliure per a cada i. Els elements de la forma

$$v \otimes w - (-1)^{\operatorname{grau}(v)\cdot\operatorname{grau}(w)} w \otimes v$$

generen un ideal $I \subset T(V)$, on $T(V) = \oplus_q T^q(V)$ amb $T^q(V) = V \otimes \overset{q}{\cdots} \otimes V$ és l'àlgebra tensorial sobre V. Aleshores $\Lambda V = T(V)/I$ s'anomena *àlgebra graduada commutativa lliure* sobre V.

Definició 6.2.1 Una àlgebra graduada diferencial commutativa (A, d) s'anomena *minimal* si és lliure sobre un espai vectorial graduat V i aquest espai V admet una base $\{v_i\}$ d'elements ben ordenats compatible amb el grau (és a dir, si $v_i < v_j$, llavors $i < j$) tal que $dv_i \in \Lambda(v_j, j < i)$.

Sigui V un $\mathbb{Q}$-espai vectorial graduat 1-connex, és a dir, $V^0 = V^1 = 0$. Aleshores $(\Lambda V, d)$ és minimal si i només si d és descomponible: $d(V) \subset \Lambda^{\geq 2} V$.

Sigui (A, d) una àlgebra graduada diferencial commutativa. Suposem que $H^0(A, d) \cong \mathbb{Q}$. Aleshores existeix una àlgebra minimal $(\Lambda V, d)$ juntament amb un morfisme

$$\varphi\colon (\Lambda V, d) \to (A, d)$$

que indueix un isomorfisme en cohomologia [47]. L'àlgebra $(\Lambda V, d)$ s'anomena *model minimal* de (A, d) i és única, llevat d'isomorfisme [14], [47].

Model minimal d'un espai topològic

Sigui Top la categoria dels espais topològics i sigui $\mathcal{A}$ la categoria de les àlgebres graduades diferencials commutatives. Un morfisme d'àlgebres graduades diferencials commutatives $f\colon A \to B$ és un *quasi-isomorfisme* si f indueix un isomorfisme d'àlgebres graduades $f^*\colon H^*(B;\mathbb{Q}) \to H^*(A;\mathbb{Q})$; en tal cas escriurem $A \simeq B$. Aleshores existeix un functor contravariant

$$A_{PL}\colon Top \to \mathcal{A}$$

que assigna a un espai topològic X una àlgebra graduada diferencial commutativa $A_{PL}(X)$ tal que

$$A_{PL}(X) \simeq C^*(X;\mathbb{Q});$$

és a dir, $H^*(A_{PL}(X;\mathbb{Q})) \cong H^*(C^*(X;\mathbb{Q})) = H^*(X;\mathbb{Q})$ com a àlgebres graduades, on $C^*(X;\mathbb{Q})$ és el complex de cocadenes singular de X [42, § 10], [86].

Definició 6.2.2 Sigui X un espai topològic. El model minimal de l'àlgebra graduada diferencial commutativa $A_{PL}(X)$ s'anomena *model minimal de Sullivan* de X.

Per tant, com que tota àlgebra graduada diferencial commutativa (A,d) tal que $H^0(A,d) \cong \mathbb{Q}$ té un model minimal, tot espai connex té un model minimal de Sullivan.

Una aplicació $f\colon X \to Y$ entre espais nilpotents connexos és una equivalència racional si i només si $H^*(f;\mathbb{Q})$ és un isomorfisme; en tal cas escriurem $X \approx_{\mathbb{Q}} Y$. Per tant, si $f\colon X \to Y$ és una aplicació entre espais nilpotents connexos, aleshores f és una equivalència racional si i només si $A_{PL}(f)$ és un quasi-isomorfisme. Aleshores, tal i com s'explica a [39], hi ha una correspondència bijectiva entre els tipus d'homotopia racional dels espais nilpotents de tipus $\mathbb{Q}$-finit (un espai X és de tipus $\mathbb{Q}$-finit si $H^n(X;\mathbb{Q})$ és un $\mathbb{Q}$-espai vectorial de dimensió finita per a tot n) i les classes d'isomorfisme de models minimals de Sullivan de tipus finit (és a dir, tals que l'espai vectorial graduat V és finit a cada dimensió).

Sigui X un espai nilpotent de tipus $\mathbb{Q}$-finit i sigui $(\Lambda V, d)$ el seu model minimal de Sullivan. Aleshores, segons el teorema 2.3.1 de [39], existeixen isomorfismes

$$H(\Lambda V, d) \cong H^*(X;\mathbb{Q}) \quad \text{i} \quad V \cong \operatorname{Hom}(\pi_*(X),\mathbb{Q}). \tag{6.2.2}$$

Aquests isomorfismes ens diuen, d'una banda, que V^k és un $\mathbb{Q}$-espai vectorial de dimensió finita, per a tot k, i, d'altra banda, que el tipus d'homotopia racional de X està determinat, en alguns casos, per la seva àlgebra de cohomologia racional.

Model minimal d'una fibració

Sigui $\Lambda(t, dt)$ l'àlgebra graduada commutativa lliure amb base $\{t, dt\}$, on $\operatorname{grau}(t) = 0$ i $\operatorname{grau}(dt) = 1$. Sigui d la diferencial que envia t a dt. Aleshores $H(\Lambda(t, dt), d) \cong \mathbb{Q}$. Definim, per a $i = 0, 1$,

$$\begin{array}{rccc} e_i\colon & \Lambda(t, dt) & \to & \mathbb{Q} \\ & t & \mapsto & i \\ & dt & \mapsto & 0. \end{array}$$

Aleshores diem que dues aplicacions $f, g\colon (A, d) \to (B, d)$ d'àlgebres graduades diferencials són *homòtopes*, $f \sim g$, si existeix una aplicació

$$H\colon (A, d) \to (B, d) \otimes \Lambda(t, dt)$$

tal que $(1 \otimes e_0) \circ H = f$ i $(1 \otimes e_1) \circ H = g$. L'aplicació H s'anomena *homotopia*. Aquest concepte defineix una relació d'equivalència. A més, si $f \sim g$, aleshores $H^*(f) = H^*(g)$.

Sigui $f\colon (A, d) \to (B, d)$ una aplicació d'àlgebres graduades diferencials commutatives. Siguin $\varphi\colon (\Lambda V, d) \to (A, d)$ i $\psi\colon (\Lambda W, d) \to (B, d)$ models minimals. Aleshores existeix una única aplicació, llevat d'homotopia,

$$\phi\colon (\Lambda W, d) \to (\Lambda V, d),$$

que s'anomena *model minimal de* f, que fa el diagrama següent commutatiu, llevat d'homotopia:

$$\begin{array}{ccc} (A, d) & \xrightarrow{f} & (B, d) \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \psi \\ (\Lambda V, d) & \xrightarrow{\phi} & (\Lambda W, d). \end{array}$$

Si suposem que (A, d) i (B, d) són de tipus finit, aleshores existeix un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccc} (A, d) & \xrightarrow{f} & (B, d) & & \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \psi & & \\ (\Lambda V, d) & \xrightarrow{\phi} & (\Lambda V \otimes \Lambda V', D) & \longrightarrow & (\Lambda V', \overline{D}) \end{array}$$

tal que

(a) φ és un model minimal de (A, d),

(b) ψ és un quasi-isomorfisme i

(c) existeix una base $\{v'_i\}$ de V' d'elements ben ordenats tal que $D(v'_i) \in \Lambda V \otimes \Lambda(v'_j, j < i)$.

Llavors $(\Lambda V \otimes \Lambda V', D)$ s'anomena *model minimal relatiu* de f i és únic, llevat d'isomorfisme [39].

Sigui $F \to E \xrightarrow{p} B$ una fibració. Siguin $(\Lambda W, d) \to A_{PL}(B)$ un model minimal de $A_{PL}(B)$ i $(\Lambda W, d) \to (\Lambda W \otimes \Lambda V, d)$ un model minimal relatiu de $A_{PL}(p)$. Aleshores existeix un diagrama commutatiu amb una aplicació induïda m

$$\begin{array}{ccccc} A_{PL}(B) & \xrightarrow{A_{PL}(p)} & A_{PL}(E) & \longrightarrow & A_{PL}(F) \\ \uparrow\simeq & & \uparrow\simeq & & \uparrow m \\ (\Lambda W, d) & \longrightarrow & (\Lambda W \otimes \Lambda V, d) & \longrightarrow & (\Lambda V, \overline{d}). \end{array}$$

Si la fibració és nilpotent, aleshores el teorema 2.3.3 de [39] ens assegura que m és un quasi-isomorfisme; és a dir, el model per a p ens permet obtenir un model per a la fibra F.

Exemple 6.2.3 Si $(\Lambda V, d)$ és un model minimal d'un espai nilpotent de tipus $\mathbb{Q}$-finit X, aleshores

$$(\Lambda V^{\leq n}, d) \to (\Lambda V, d) \to (\Lambda V^{>n}, \overline{d})$$

és un model de la fibració $P_n X \leftarrow X \leftarrow X\langle n\rangle$. En efecte, només cal recordar els isomorfismes (6.2.2) i que, per definició,

$$\pi_k(X) \cong \begin{cases} \pi_k(P_n X) & \text{si} \quad k \leq n \\ \pi_k(X\langle n\rangle) & \text{si} \quad k > n. \end{cases}$$

Espais formals

Dues àlgebres graduades diferencials commutatives són *dèbilment equivalents* si tenen el mateix model minimal. Aleshores, una àlgebra graduada diferencial commutativa (A, d) tal que $H^0(A) \cong \mathbb{Q}$ s'anomena *formal* si és dèbilment equivalent a l'àlgebra de cocadenes $(H^*(A), 0)$. Diem que A és *intrínsicament formal* si per a tota àlgebra de cocadenes commutativa (B, d) amb $H^0(B) \cong \mathbb{Q}$ tal que $H^*(B) \cong H^*(A)$ tenim que $A \simeq B$.

Definició 6.2.4 Un espai topològic connex X és *formal*, respectivament *intrínsicament formal*, si $A_{PL}(X)$ és una àlgebra graduada diferencial commutativa formal, respectivament intrínsicament formal.

O sigui, (A, d) i X són formals si i només si els seus models minimals de Sullivan s'obtenen directament a partir de les seves àlgebres de cohomologia. I (A, d) i X són intrínsicament formals si i només si hi ha un únic tipus d'homotopia racional que realitza llur cohomologia.

Un espai intrínsicament formal és formal, però el recíproc no és cert. Per exemple, sigui X l'espai total de la fibració trivial

$$S^5 \to X \to S^3 \times S^3.$$

D'una banda, $(\Lambda(x, y), d)$ amb $\operatorname{grau}(x) = \operatorname{grau}(y) = 3$ i $d(x) = d(y) = 0$ és el model minimal de Sullivan de $S^3 \times S^3$. D'altra banda, $(\Lambda(z), d)$ amb $\operatorname{grau}(z) = 5$ i $d(z) = 0$ és el model minimal de Sullivan de S^5. Per tant, el model minimal de Sullivan de X és

$$(\Lambda(x, y, z), d)$$

amb $\operatorname{grau}(x) = \operatorname{grau}(y) = 3$, $\operatorname{grau}(z) = 5$ i $d(x) = d(y) = 0$, $d(z) = xy$. Però,

$$H^n(X; \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } n = 0, 11 \\ \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & \text{si } n = 3, 8 \\ 0 & \text{altrament,} \end{cases}$$

de manera que $H^*(X; \mathbb{Q}) \cong H^*(Y; \mathbb{Q})$, on $Y = (S^3 \times S^8) \sharp (S^3 \times S^8)$. Segons [42], l'espai Y és formal, però no és intrínsicament formal perquè el seu model minimal de Sullivan $(\Lambda V, d)$ no és isomorf al model minimal de Sullivan de X (l'espai vectorial V té una base que inclou dos elements de grau 8).

6.2.2 El teorema de la dicotomia racional

Donat un espai topològic X definim la seva *dimensió formal*, n_X, com el màxim enter n (o bé ∞) tal que $H^n(X; \mathbb{Q}) \neq 0$. Si $(\Lambda V, d)$ denota el model minimal de Sullivan d'un espai connex X, aleshores definim la *dimensió formal* de $(\Lambda V, d)$, n_V, com el màxim enter n (o bé ∞) tal que $H^n(\Lambda V, d) \neq 0$.

Definició 6.2.5 Sigui X un espai topològic. La *categoria de Lusternik–Schnirelmann* de X, $\operatorname{cat} X$, és el mínim enter n (o bé ∞) tal que X és la unió de $n+1$ subconjunts U_i cadascun d'ells contràctil a X.

Per exemple, $\operatorname{cat} X = 0$ si i només si X és contràctil; $\operatorname{cat} S^n = 1$ per a tot $n \geq 0$. Si un espai topològic X té dimensió formal n_X finita, aleshores $\operatorname{cat} X \leq n_X$. Si X és un espai nilpotent de tipus $\mathbb{Q}$-finit, es defineix la seva *categoria racional*, $\operatorname{cat}_0 X$, com la categoria LS de la seva racionalització. A més, es compleix que $\operatorname{cat}_0 X = \operatorname{cat} X_{(0)} \leq \operatorname{cat} X$.

Un espai topològic nilpotent X de tipus $\mathbb{Q}$-finit s'anomena *racionalment el·líptic* si satisfà les dues condicions següents:

$$\dim H_*(X;\mathbb{Q}) < \infty \quad \text{i} \quad \dim \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} < \infty.$$

De manera anàloga, una àlgebra minimal de Sullivan $(\Lambda V, d)$ és *el·líptica* si $H(\Lambda V, d)$ i V són de dimensió finita. Aleshores els isomorfismes (6.2.2) impliquen que un espai nilpotent de tipus $\mathbb{Q}$-finit és racionalment el·líptic si i només si el seu model minimal de Sullivan és el·líptic.

Definició 6.2.6 Sigui X un espai topològic. Diem que $H^*(X;\mathbb{Q})$ satisfà la *dualitat de Poincaré* si existeix un nombre m tal que $H^n(X;\mathbb{Q}) = 0$ per a tot $n > m$ i $H^m(X;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$, i, per a tot $n \leq m$, el producte

$$H^n(X;\mathbb{Q}) \times H^{m-n}(X;\mathbb{Q}) \to H^m(X;\mathbb{Q})$$

és una forma bilineal no degenerada.

Els espais racionalment el·líptics tenen diverses propietats. Les més rellevants per a nosaltres són les següents [39, § 5]:

Teorema 6.2.7 *Si X és un espai nilpotent racionalment el·líptic, aleshores*

(a) *la característica d'Euler de X,*

$$\chi(X) = \Sigma(-1)^i \dim H^i(X;\mathbb{Q}),$$

és positiva o zero;

(b) *la característica d'Euler homotòpica de X,*

$$\chi_\pi(X) = \Sigma(-1)^i \dim \pi_i(X) \otimes \mathbb{Q},$$

és negativa o zero;

(c) $H^*(X;\mathbb{Q})$ *satisfà la dualitat de Poincaré.*

(d) $\operatorname{cat}_0 X \geq \dim \pi_{\text{senar}}(X) \otimes \mathbb{Q}$.

(e) *La dimensió formal* n_X *de* X *satisfà la igualtat següent:*

$$n_X = \dim V^{\text{parell}} - \Sigma_i\,(-1)^i\, i \dim V^i,$$

on $(\Lambda V, d)$ *és el model minimal de Sullivan de* X. $\square$

Un espai topològic nilpotent X de tipus $\mathbb{Q}$-finit s'anomena *racionalment hiperbòlic* si $\operatorname{cat}_0 X < \infty$ i $\dim \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} = \infty$. Aquest tipus d'espais compleixen el següent [39]:

Teorema 6.2.8 *Si* X *és un espai nilpotent racionalment hiperbòlic, aleshores*

(a) $\dim \pi_{\text{senar}} \otimes \mathbb{Q} = \infty$;

(b) *per a algun* $C > 1$ *i per a algun enter positiu* K,

$$\Sigma_{i=0}^k \dim \pi_i(X) \otimes \mathbb{Q} \geq C^k, \ \ \forall\ k \geq K;$$

(c) *per a alguns enters* N *i* K, $\pi_{N+kK}(X) \otimes \mathbb{Q} \neq 0$, $\forall\ k \geq 0$. $\square$

Per tant, els espais nilpotents de tipus $\mathbb{Q}$-finit i de categoria racional finita o bé són

- racionalment el·líptics amb $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ de dimensió finita, o bé
- racionalment hiperbòlics amb $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ de creixement exponencial.

En cas que els espais nilpotents de tipus $\mathbb{Q}$-finit considerats tinguin dimensió formal n_X finita, aleshores el teorema 33.3 de [42] ens diu el següent:

Teorema 6.2.9 *Sigui* X *un espai nilpotent de tipus* $\mathbb{Q}$*-finit amb dimensió formal* n_X *finita. Aleshores o bé* X *és racionalment el·líptic i* $\pi_k(X) \otimes \mathbb{Q} = 0$ *per a tot* $k \geq 2\,n_X$ *o bé* X *és racionalment hiperbòlic i per a tot* $i \geq 1$, $\pi_k(X) \otimes \mathbb{Q} \neq 0$ *per a algun* $k \in (i, i + n_X)$. $\square$

6.3 Classificació d'espais racionalment el·líptics

L'objectiu d'aquesta secció és donar la classificació completa de dos tipus d'espais nilpotents racionalment el·líptics: els que tenen dimensió formal igual a 3, i els que tenen dimensió formal igual a 4 i la seva característica d'Euler és igual a zero.

Les classificacions d'aquest tipus d'espais són les eines bàsiques per a la demostració de la caracterització de les infra-nilvarietats, de dimensió menor o igual que 4, tals que la seva racionalització és un espai racionalment el·líptic, i la generalització d'aquest resultat als espais de tipus $K(G,1)$ amb G virtualment nilpotent finitament generat i dimensió cohomològica racional menor o igual que 3.

Sigui X un espai nilpotent de tipus $\mathbb{Q}$-finit. Aleshores hem vist que el model minimal de Sullivan $(\Lambda V, d)$ de X satisfà

$$\dim V^k < \infty \text{ per a tot } k.$$

Si, a més, suposem que X és racionalment el·líptic, aleshores tenim que $\pi_k(X) \otimes \mathbb{Q} = 0$ per a tot $k \geq 2\, n_X$, on n_X és la dimensió formal de X. Per tant, com que $V^k \cong \operatorname{Hom}(\pi_k(X), \mathbb{Q})$, es compleix que

$$V^k = 0 \text{ per a tot } k \geq 2\, n_X.$$

Suposem, doncs, que X és un espai nilpotent de tipus $\mathbb{Q}$-finit racionalment el·líptic, i sigui $(\Lambda V, d)$ el seu model minimal de Sullivan. Aleshores, segons el teorema 6.2.7, la dimensió formal n_X de X satisfà el següent:

$$n_X = \dim V^{\text{parell}} + \dim V^1 - 2\dim V^2 + \cdots - 2n_X \dim V^{2n_X}, \qquad (6.3.3)$$

on $\dim V^1 \leq n_X$, segons el teorema 6.2.7. Aquests resultats ens permeten obtenir les classificacions que hem esmentat:

Espais nilpotents racionalment el·líptics amb dimensió formal 3

Sigui X un espai nilpotent racionalment el·líptic amb dimensió formal igual a 3. En aquest cas, segons (6.3.3), tenim la igualtat següent:

$$3 = \dim V^{\text{parell}} + \dim V^1 - 2\, \dim V^2 + \cdots + 5\, \dim V^5 - 6\, \dim V^6,$$

on $\dim V^1 \leq 3$. Per tant, hi ha quatre casos possibles:

1. $\dim V^1 = 3$
   Com que $\dim \pi_{\text{senar}} \otimes \mathbb{Q} \leq n_X = 3$, la dimensió de $V^{2i+1} = 0$ per a tot $i \geq 1$, de manera que $V^{\text{parell}} = 0$. Per tant, $V = V^1$ i així $(\Lambda V, d) = (\Lambda(x_1, x_2, x_3), d)$ amb $\text{grau}\,(x_i) = 1$ i $d(x_i) = 0$ per a tot i, la qual cosa implica que $X \approx_{\mathbb{Q}} S^1 \times S^1 \times S^1$.

2. $\dim V^1 = 2$
   Aleshores $1 = \dim V^{\text{parell}} - 2 \dim V^2 + 3 \dim V^3 + \cdots - 6 \dim V^6$. Siguin $x, y \in V^1$. Aleshores $xy \in V^2$ i, com que $H^*(X; \mathbb{Q})$ satisfà la dualitat de Poincaré, existeix $z \in V^2$ tal que $d(z) = 0$, la qual cosa implica que $\dim V^2 = 1$. Però llavors $z^i \in V^{2i}$ per a tot $i \geq 1$; per tant, ha d'existir $t \in V^{2i-1}$ amb $i \leq 3$ tal que $dt = z^i$, d'on $\dim \pi_{\text{senar}}(X) \otimes \mathbb{Q} \geq 3$. En conseqüència, $V^{\text{parell}} = 0$. Però $1 = 3 \dim V^3 + 5 \dim V^5$ és impossible.

3. $\dim V^1 = 1$
   Aleshores $2 = \dim V^{\text{parell}} - 2 \dim V^2 + 3 \dim V^3 + \cdots - 6 \dim V^6$. Sigui $x \in V^1$. Com que $H^*(X; \mathbb{Q})$ satisfà la dualitat de Poincaré, existeix $y \in V^2$ tal que $d(y) = 0$; és a dir, $\dim V^2 = 1$. Aleshores $y^2 \in V^4$ amb $d(y^2) = 0$, de manera que existeix $z \in V^3$ tal que $d(z) = y^2$ perquè $n_X = 3$; és a dir, $\dim V^3 = 1$. Per tant, $(\Lambda V, d) = (\Lambda(x, y, z), d)$ amb $\text{grau}\,(x) = 1$, $\text{grau}\,(y) = 2$, $\text{grau}\,(z) = 3$ i $d(x) = d(y) = 0$, $d(z) = y^2$. És a dir, $X \approx_{\mathbb{Q}} S^1 \times S^2$.

4. $\dim V^1 = 0$
   Aleshores $3 = \dim V^{\text{parell}} - 2 \dim V^2 + 3 \dim V^3 + \cdots - 6 \dim V^6$. Com que $H^*(X; \mathbb{Q})$ satisfà la dualitat de Poincaré, tenim que $\dim V^2 = 0$ i $\dim V^3 = 1$. Per tant, segons la fórmula, $\dim V^i = 0$ per a tot $i \neq 3$. Així, $(\Lambda V, d) = (\Lambda(x), d)$ amb $\text{grau}\,(x) = 3$ i $d(x) = 0$. És a dir, $X \approx_{\mathbb{Q}} S^3$.

Espais nilpotents racionalment el·líptics amb dimensió formal 4 i característica d'Euler zero

Sigui X un espai nilpotent racionalment el·líptic amb dimensió formal igual a 4 i suposem que $\chi(X) = 0$. En aquest cas, segons (6.3.3), tenim la igualtat següent:

$$4 = \dim V^{\text{parell}} + \dim V^1 - 2 \dim V^2 + \cdots + 7 \dim V^7 - 8 \dim V^8,$$

on $\dim V^1 \leq 4$. Per tant, hi ha cinc casos possibles:

1. $\dim V^1 = 4$
   Aleshores $\dim V^{2i+1} = 0$ per a tot $i \geq 1$ i, per tant, $V^{\text{parell}} = 0$. És a dir $V = V^1$ i així $(\Lambda V, d) = (\Lambda(x_1, x_2, x_3, x_4), d)$ amb $\text{grau}\,(x_i) = 1$ i $d(x_i) = 0$ per a tot i, la qual cosa implica que $X \approx_{\mathbb{Q}} S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$.

2. $\dim V^1 = 3$
   Aleshores $1 = \dim V^{\text{parell}} - 2\,\dim V^2 + 3\,\dim V^3 + \cdots - 8\,\dim V^8$, la qual cosa implica que $V^{\text{parell}} = 0$. Però $1 = 3\,\dim V^3 + 5\,\dim V^5 + 7\,\dim V^7$ és impossible.

3. $\dim V^1 = 2$
   Aleshores $2 = \dim V^{\text{parell}} - 2\,\dim V^2 + \cdots - 8\,\dim V^8$, d'on s'obté que $\dim V^2 = 1 = \dim V^3$. Per tant, $(\Lambda V, d) = (\Lambda(x, y, z, t), d)$ amb $\text{grau}\,(x) = \text{grau}\,(y) = 1$, $\text{grau}\,(z) = 2$, $\text{grau}\,(t) = 3$ i $d(x) = d(y) = d(z) = 0$, $d(t) = z^2$. És a dir, $X \approx_{\mathbb{Q}} S^1 \times S^1 \times S^2$.

4. $\dim V^1 = 1$
   Aleshores $3 = \dim V^{\text{parell}} - 2\,\dim V^2 + 3\,\dim V^3 + \cdots - 8\,\dim V^8$, d'on es dedueix que $V^{\text{parell}} = 0$ i $\dim V^3 = 1$. Per tant, $(\Lambda V, d) = (\Lambda(x, y), d)$ amb $\text{grau}\,(x) = 1$, $\text{grau}\,(y) = 3$ i $d(x) = 0$, $d(y) = 0$. És a dir, $X \approx_{\mathbb{Q}} S^1 \times S^3$.

5. $\dim V^1 = 0$
   Aleshores X és un espai 1-connex. Però la característica d'Euler d'un espai 1-connex amb dimensió formal igual a 4 no pot ser mai zero. Per tant, aquest cas no és possible.

En les taules següents resumim els resultats de les classificacions que hem obtingut en aquesta secció:

TAULA 1. ESPAIS NILPOTENTS RACIONALMENT EL·LÍPTICS AMB DIMENSIÓ FORMAL IGUAL A 3

$\dim V^1$	$(\Lambda V, d)$	$X_{(0)}$
3	$(\Lambda(x_1,x_2,x_3),d)$, grau $(x_i)=1$ i $d(x_i)=0$ per a tot i	$S^1_{(0)} \times S^1_{(0)} \times S^1_{(0)}$
2	no és possible	–
1	$(\Lambda(x,y,z),d)$, grau $(x)=1$, grau $(y)=2$, grau $(z)=3$, $d(x)=d(y)=0$, $d(z)=y^2$	$S^1_{(0)} \times S^2_{(0)}$
0	$(\Lambda(x),d)$, grau $(x)=3$ i $d(x)=0$	$S^3_{(0)}$

TAULA 2. ESPAIS NILPOTENTS RACIONALMENT EL·LÍPTICS AMB DIMENSIÓ FORMAL IGUAL A 4 I CARACTERÍSTICA D'EULER IGUAL A 0

$\dim V^1$	$(\Lambda V, d)$	$X_{(0)}$
4	$(\Lambda(x_1,x_2,x_3,x_4),d)$, grau $(x_i)=1$ i $d(x_i)=0$ per a tot i	$S^1_{(0)} \times \overset{4}{\cdots} \times S^1_{(0)}$
3	no és possible	–
2	$(\Lambda(x,y,z,t),d)$, grau $(t)=3$, grau $(x)=$ grau $(y)=1$, grau $(z)=2$, $d(x)=d(y)=d(z)=0$, $d(t)=z^2$	$S^1_{(0)} \times S^1_{(0)} \times S^2_{(0)}$
1	$(\Lambda(x,y),d)$, grau $(x)=1$, grau $(y)=3$ i $d(x)=d(y)=0$	$S^1_{(0)} \times S^3_{(0)}$
0	no és possible	–

6.4 Racionalització d'infra-nilvarietats

Abans de demostrar la caracterització de les infra-nilvarietats de dimensió menor o igual que 4 tals que la seva racionalització és un espai el·líptic (teorema K), així com la seva conseqüència sobre l'estructura dels grups d'homotopia de les localitzacions d'aquests espais en conjunts de primers, anem a parlar breument de les infra-nilvarietats.

6.4.1 Dels grups cristal·logràfics a les infra-nilvarietats

Un *grup cristal·logràfic* de dimensió n és un subgrup discret G de $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ tal que el quocient $\mathbb{R}^n/G$, on G actua sobre $\mathbb{R}^n$ per afinitats, és compacte. Si G és un grup lliure de torsió, aleshores G és un *grup de Bieberbach* i el quocient $\mathbb{R}^n/G$ és una varietat compacta que s'anomena *varietat de Riemann plana*. Quan $G \subseteq \mathbb{R}^n$, llavors l'espai quocient obtingut és un tor.

Tal i com s'explica a [30, p. 14], tota varietat de Riemann plana compacta s'obté d'aquesta manera. És a dir, els grups de Bieberbach són exactament els grups fonamentals d'aquest tipus de varietats topològiques compactes. De fet, una varietat de Riemann plana compacta està completament determinada pel seu grup fonamental en el sentit següent: si dues varietats de Riemann planes compactes tenen grups fonamentals isomorfs, aleshores existeix un difeomorfisme afí entre elles.

Els grups de Bieberbach són ben coneguts gràcies als treballs de Bieberbach [8], [9], i el llibre de Charlap [27] n'és una referència estàndard. Per exemple, se sap que, per a cada n, només hi ha un nombre finit de varietats de Riemann planes compactes de dimensió n, llevat de difeomorfisme afí.

Aquests conceptes, però, es poden generalitzar de la manera següent [30]. Sigui L un grup de Lie nilpotent 1-connex. Sigui C un subgrup compacte maximal de $\mathrm{Aut}\,(L)$. Un *grup quasi-cristal·logràfic* és un subgrup discret G de $L \rtimes C$ tal que el quocient L/G és compacte. Si G és lliure de torsió, aleshores G és un *grup quasi-Bieberbach* i el quocient L/G és una varietat compacta que s'anomena *infra-nilvarietat*. Quan $G \subset L$, llavors l'espai quocient obtingut és una *nilvarietat*. Tota infra-nilvarietat està recoberta per una nilvarietat amb un nombre finit de fulls. Per tant, les infra-nilvarietats són les generalitzacions immediates de les varietats de Riemman planes i les nilvarietats es corresponen amb els tors.

Segons el teorema 2.2.2 de [30], tota infra-nilvarietat s'obté d'aquesta manera: hi ha una correspondència bijectiva, llevat d'equivalència afí, entre els grups quasi-Bieberbach i els grups fonamentals de les infra-nilvarietats. O sigui que les infra-nilvarietats estan completament determinades pel seu grup fonamental, en el sentit que si dues infra-nilvarietats tenen grups fonamentals isomorfs, aleshores existeix un difeomorfisme afí entre elles [30, p. 16]. Per tant, la classificació dels grups quasi-Bieberbach de dimensió menor o igual que 4 duta a terme per Dekimpe a [30] és, de fet, una classificació de les infra-nilvarietats fins a dimensió 4.

L'espai quocient L/G d'un grup de Lie nilpotent 1-connex L per un grup quasi-cristal·logràfic G és un espai d'Eilenberg–Mac Lane de tipus $K(G,1)$. En efecte, com que el grup G actua de manera pròpiament discontínua sobre L, l'aplicació $L \to L/G$ és un recobriment. Per tant, $\pi_n(L) \cong \pi_n(L/G)$ per a tot $n \geq 2$. O sigui que $\pi_n(L/G) = 0$ per a tot $n \geq 2$ perquè tot grup de Lie nilpotent 1-connex és contràctil. D'altra banda, com que L és 1-connex, tenim que $\pi_1(L/G) \cong G$. El teorema següent [1, teorema 1 i proposició 2] caracteritza algebraicament el grup G:

Teorema 6.4.1 *Sigui $G \subset L \rtimes \mathrm{Aut}\,(L)$ un grup quasi-cristal·logràfic de dimensió n. Aleshores $N = G \cap L$ és un subgrup normal nilpotent de G tal que G/N és finit. A més, N és maximal entre tots els subgrups (normals nilpotents) de G.* $\square$

És a dir, l'espai quocient L/G és un espai de tipus $K(G,1)$ amb G tal que $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$, on N és un grup nilpotent finitament generat lliure de torsió anomenat *subgrup de Fitting* de G i Q és un grup finit anomenat *quocient de Fitting*. En cas que G sigui un grup quasi-Bieberbach (és a dir, un grup quasi-cristal·logràfic lliure de torsió), aleshores $K(G,1)$ és una infra-nilvarietat.

Un grup policíclic és un grup que té una sèrie normal finita tal que cadascun dels quocients és un grup cíclic. Per exemple, els grups nilpotents finitament generats són policíclics [80]. Segons el teorema 6.4.1, un grup quasi-cristal·logràfic G té un subgrup normal nilpotent finitament generat N d'índex finit. Es defineix la *longitud de Hirsch* de G com el nombre de factors cíclics infinits de la sèrie normal finita de N com a grup policíclic. Un grup quasi-cristal·logràfic té *dimensió n* si la seva longitud de Hirsch és igual a n.

A diferència del que passava amb les varietats de Riemman planes, no és cert que a cada dimensió hi hagi un nombre finit d'infra-nilvarietats, llevat de difeomorfisme afí. Tot i així, es pot demostrar [30, p. 20] que cada nilvarietat recobreix d'una certa forma només un nombre finit d'infra-nilvarietats.

Acabem amb una propietat molt interessant de les infra-nilvarietats, la qual serà important a l'hora d'assolir el nostre objectiu. La demostració d'aquest resultat és senzilla si es té en compte la caracterització algebraica de les infra-nilvarietats; és a dir, el fet que aquestes varietats compactes estiguin determinades pel seu grup fonamental, un grup quasi-Bieberbach, el qual té un subgrup normal nilpotent d'índex finit [30, teorema 6.4.2].

Teorema 6.4.2 *Si G és un grup quasi-Bieberbach, aleshores la seva característica d'Euler $\chi(G)$ és igual a zero.* $\square$

6.4.2 Infra-nilvarietats racionalment el·líptiques

Segons el corol·lari 4.3.4 del capítol 4, si X és un espai de tipus $K(G,1)$ amb G un grup virtualment nilpotent finitament generat (en particular, una infra-nilvarietat), aleshores la seva racionalització $X_{(0)}$ és un espai nilpotent. Per tant, podem aplicar la teoria d'homotopia racional coneguda, així com els resultats que hem obtingut a la secció 6.3, a l'espai $X_{(0)}$.

Sigui X un espai topològic tal que $X_{(0)}$ és un espai nilpotent. Suposem que $X_{(0)}$ és racionalment el·líptic; és a dir, que $\dim \pi_*(X_{(0)}) < \infty$ i $H_*(X_{(0)}) < \infty$. Aleshores, segons el teorema 6.2.7, l'àlgebra de cohomologia $H^*(X_{(0)})$ de $X_{(0)}$ satisfà la dualitat de Poincaré. Considerem la fibració

$$X_{(0)}\langle 1\rangle \to X_{(0)} \to K(\pi_1(X_{(0)}),1),$$

on $X_{(0)}\langle 1\rangle$ denota el recobridor universal de $X_{(0)}$. Aleshores, com a conseqüència dels teoremes 3.6 i 4.3 de [41], s'obté que les àlgebres de cohomologia racional de $X_{(0)}\langle 1\rangle$ i de $K(\pi_1(X_{(0)}),1)$ també satisfan la dualitat de Poincaré. Explícitament, el resultat que s'obté és el següent:

Teorema 6.4.3 *Sigui X un espai nilpotent racional de tipus finit. Aleshores $H^*(X)$ satisfà la dualitat de Poincaré si i només si $H^*(X\langle 1\rangle)$ i $H^*(\pi_1(X))$ satisfan la dualitat de Poincaré, on $X\langle 1\rangle$ denota el recobridor universal de X.*
$\square$

Una altra propietat que tenen els espais nilpotents racionals de tipus finit i que és de gran rellevància per a nosaltres és la següent:

Teorema 6.4.4 *Sigui X un espai nilpotent racional de tipus finit. Aleshores*

$$n_X = n_{X\langle 1\rangle} + \operatorname{rang}(\pi_1(X)),$$

on $X\langle 1\rangle$ denota el recobridor universal de X.

Demostració. Sigui $(\Lambda V, d) \simeq A_{PL}(X)$ un model minimal de X. Aleshores podem escriure $\Lambda V = \Lambda V^1 \otimes \Lambda W$ amb $W = W^{\geq 2}$ i, tal i com hem vist a l'exemple 6.2.3, obtenim un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccc} A_{PL}(X\langle 1\rangle) & \leftarrow & A_{PL}(X) & \leftarrow & A_{PL}(K(\pi_1(X),1)) \\ \uparrow\simeq & & \uparrow\simeq & & \uparrow\simeq \\ (\Lambda W, \overline{d}) & \leftarrow & (\Lambda V, d) & \leftarrow & (\Lambda V^1, d). \end{array}$$

Veiem primer que $n_W < \infty$ i, per tant, $n_{X\langle 1\rangle} < \infty$. Per a veure-ho, construirem el model $(\Lambda W, d)$ a partir de $(\Lambda V^1, d)$. Com que X és nilpotent de tipus finit, $V^1 < \infty$. Sigui $p = \dim V^1$ i $\Lambda V^1 = \Lambda(v_1, \ldots, v_p)$. Construïm $\overline{V} = (\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_p})$ en grau zero tal que $\dim \overline{V} = \dim V^1$ i $d\overline{V} \subset V^1 \otimes \Lambda\overline{V}$. (És a dir, si v_1 és el primer element de grau 1, aleshores $d(\overline{v_1}) = v_1$. Si v_2 és el segon element de grau 1, aleshores $d(\overline{v_2}) = v_2$. Si v_3 és el tercer element, aleshores $d(v_3) = 0$ o bé $d(v_3) = v_1 \cdot v_2$ perquè el model és minimal; en el primer cas, $d(\overline{v_3}) = v_3$ i en el segon cas, $d(\overline{v_3}) = v_3 - \overline{v_1} \cdot v_2$. I així successivament.)

Sigui $n_V = n$. Sigui $I \subset \Lambda V$ l'ideal diferencial definit com segueix:

$$I = (\Lambda V)^{>n} \oplus S,$$

amb $S \subset (\Lambda V)^n$ i $S \oplus ((\Lambda V)^n \cap \ker d) = (\Lambda V)^n$. Observem que $H^*(I) = 0$, és a dir, I és acíclic. Per tant, existeix un quasi-isomorfisme

$$\Lambda V \xrightarrow{\simeq} \Lambda V/I = A,$$

amb $A^{>n} = 0$. Com que $\Lambda\overline{V}$ és un objecte lliure,

$$\Lambda V \otimes \Lambda\overline{V} \xrightarrow{\simeq} A \otimes \Lambda\overline{V},$$

d'on $(A \otimes \Lambda\overline{V})^{>n} = 0$, ja que $(\Lambda V)^{>n} = 0$ i $\Lambda\overline{V}$ té grau zero. Per tant,

$$H^{>n}(\Lambda V \otimes \Lambda\overline{V}) = 0$$

o, equivalentment, existeix un quasi-isomorfisme

$$\Lambda V \otimes \Lambda\overline{V} \xrightarrow{\simeq} \Lambda W.$$

Per tant, $\dim H^*(\Lambda W, d) < \infty$ i escrivim $r = n_W$.

Sigui $F^p = \Lambda^{\geq p} V^1 \otimes \Lambda W$. Aleshores existeix una successió espectral amb

$$(E_0, d_0) = (\Lambda V^1 \otimes \Lambda W, 1 \otimes \overline{d}),$$

on $d_0(u \otimes v) = d_0(u) \otimes v + (-1)^{\mathrm{grau}\,(u)} u \otimes d_0(v)$. Per tant,

$$(E_1, d_1) = (\Lambda V^1 \otimes H(\Lambda W), d_1),$$

on $\Lambda V^1 \otimes H(\Lambda W) = 0$ en graus més grans que $n_{X\langle 1\rangle} + \mathrm{rang}\,(\pi_1(X))$. Això implica que

$$n_X \leq n_{X\langle 1\rangle} + \mathrm{rang}\,(\pi_1(X)).$$

Veiem ara que, de fet, tenim una igualtat. La condició de nilpotència del model minimal de Sullivan ens diu que existeix una base $x_1, \ldots, x_t$ de $H^r(\Lambda W)$ tal que $d_1(x_i) \in V^1 \otimes (x_1, \ldots, x_{i-1})$. A més, sabem que d_1 és zero sobre els elements de $\Lambda^p V^1 \otimes H^r(\Lambda W)$. Veiem que existeix un cocicle de $\Lambda^p V^1 \otimes H^r(\Lambda W)$ que no és una covora. Sigui $\alpha \in \Lambda^p V^1$. Aleshores $\alpha \otimes x_t$ no és una covora. En efecte, suposem que $\alpha \otimes x_t = d_1 \gamma$ per a cert γ. Aleshores

$$\mathrm{grau}\,(d_1\gamma) = p + r \Rightarrow \mathrm{grau}\,(\gamma) = p + r - 1,$$

és a dir, $\gamma \in \Lambda^{p-1} V^1 \otimes H^r(\Lambda W)$. Però, per definició dels x_i,

$$d_1\gamma \in \Lambda^p V^1 \otimes (x_1, \ldots, x_{t-1}),$$

de manera que obtenim una contradicció. En conseqüència, existeix un element no zero de grau $p + r$ que sobreviu fins al terme E_∞ de la successió espectral. Per tant, $H^{p+r}(\Lambda V) \neq 0$ i així $n_X = n_{X\langle 1\rangle} + \mathrm{rang}\,(\pi_1(X))$. $\square$

Tal i com hem dit, la racionalització d'una infra-nilvarietat és un espai nilpotent de tipus $\mathbb{Q}$-finit. Aleshores els resultats dels teoremes 6.4.3 i 6.4.4 juntament amb les taules 1 i 2 de la secció 6.3 ens permeten demostrar el resultat següent:

Teorema K *Sigui $X = K(G, 1)$ una infra-nilvarietat. Si la dimensió formal n_X de X és menor o igual que 4, aleshores $X_{(0)}$ és racionalment el·líptic si i només si $H^*(X; \mathbb{Q})$ satisfà la dualitat de Poincaré.*

Demostració. El teorema 6.2.7 ens assegura que si $X_{(0)}$ és un espai nilpotent racionalment el·líptic, aleshores $H^*(X_{(0)}) \cong H^*(X; \mathbb{Q})$ satisfà la dualitat de Poincaré. Per tant, només cal veure que el recíproc és cert quan suposem que la dimensió formal de X és menor o igual que 4.

(a) Si $n_X = 1$, aleshores $X_{(0)} \simeq K(\pi_1(X_{(0)}), 1) \simeq S^1_{(0)}$, ja que l'àlgebra de cohomologia $H^*(X_{(0)})$ satisfà la dualitat de Poincaré.

(b) Si $n_X = 2$, aleshores o bé $\operatorname{rang}(\pi_1(X_{(0)})) = 1$ o bé $\operatorname{rang}(\pi_1(X_{(0)})) = 2$. El primer cas no és possible, ja que llavors, pel teorema 6.4.4, tindríem que la dimensió formal de l'espai 1-connex $X_{(0)}\langle 1\rangle$ és 1. Si el rang del grup fonamental és 2, aleshores $X_{(0)} \simeq K(\pi_1(X_{(0)}), 1) \simeq S^1_{(0)} \times S^1_{(0)}$ perquè $H^*(X_{(0)})$ satisfà la dualitat de Poincaré.

(c) Si $n_X = 3$, aleshores hi ha diversos casos possibles:

(c.1) $n_{X_{(0)}\langle 1\rangle} = 0$ i $\operatorname{rang}(\pi_1(X_{(0)})) = 3$.
En aquest cas, $X_{(0)} \simeq K(\pi_1(X_{(0)}), 1)$ és racionalment el·líptic. És més, segons la classificació de la taula 1, $X_{(0)} \simeq S^1_{(0)} \times S^1_{(0)} \times S^1_{(0)}$.

(c.2) $n_{X_{(0)}\langle 1\rangle} = 1$ i $\operatorname{rang}(\pi_1(X_{(0)})) = 2$.
Aquest cas és impossible, ja que l'espai $X_{(0)}\langle 1\rangle$ és 1-connex.

(c.3) $n_{X_{(0)}\langle 1\rangle} = 2$ i $\operatorname{rang}(\pi_1(X_{(0)})) = 1$.
L'espai $X_{(0)}\langle 1\rangle$ és 1-connex i té dimensió formal igual a 2. A més, pel teorema 6.4.3, l'àlgebra de cohomologia $H^*(X_{(0)}\langle 1\rangle)$ satisfà la dualitat de Poincaré i, per tant, $X_{(0)}\langle 1\rangle \simeq S^2_{(0)}$. D'altra banda, $K(\pi_1(X_{(0)}), 1) \simeq S^1_{(0)}$. Finalment, utilitzant la classificació de la taula 1, obtenim que $X_{(0)} \simeq S^1_{(0)} \times S^2_{(0)}$ és racionalment el·líptic.

(c.4) $n_{X_{(0)}\langle 1\rangle} = 3$ i $\operatorname{rang}(\pi_1(X_{(0)})) = 0$.
En aquest cas, $X_{(0)}$ és 1-connex i $H^*(X_{(0)})$ satisfà la dualitat de Poincaré, la qual cosa implica que $X_{(0)} \simeq S^3_{(0)}$ és un espai racionalment el·líptic.

(d) Si $n_X = 4$, aleshores hi ha diversos casos possibles:

(d.1) $n_{X_{(0)}\langle 1\rangle} = 0$ i $\operatorname{rang}(\pi_1(X_{(0)})) = 4$.
En aquest cas, $X_{(0)} \simeq K(\pi_1(X_{(0)}), 1)$ és racionalment el·líptic i, segons la classificació de la taula 2, $X_{(0)} \simeq S^1_{(0)} \times S^1_{(0)} \times S^1_{(0)} \times S^1_{(0)}$.

(d.2) $n_{X_{(0)}\langle 1\rangle} = 1$ i $\operatorname{rang}(\pi_1(X_{(0)})) = 3$.
Aquest cas és impossible, ja que l'espai $X_{(0)}\langle 1\rangle$ és 1-connex.

(d.3) $n_{X_{(0)}\langle 1\rangle} = 2$ i $\operatorname{rang}(\pi_1(X_{(0)})) = 2$.

L'espai $X_{(0)}\langle 1\rangle$ és 1-connex i té dimensió formal 2. A més, com que, pel teorema 6.4.3, l'àlgebra de cohomologia $H^*(X_{(0)}\langle 1\rangle)$ satisfà la dualitat de Poincaré, $X_{(0)}\langle 1\rangle \simeq S^2_{(0)}$. Aleshores, com que $K(\pi_1(X_{(0)}),1) \simeq S^1_{(0)} \times S^1_{(0)}$, segons la classificació de la taula 2, obtenim que $X_{(0)} \simeq S^1_{(0)} \times S^1_{(0)} \times S^2_{(0)}$ és racionalment el·líptic.

(d.4) $n_{X_{(0)}\langle 1\rangle} = 3$ i rang $(\pi_1(X_{(0)})) = 1$.
En aquest cas, $X_{(0)}\langle 1\rangle$ és un espai 1-connex tal que $H^*(X_{(0)}\langle 1\rangle)$ satisfà la dualitat de Poincaré, pel teorema 6.4.3. En conseqüència, $X_{(0)}\langle 1\rangle \simeq S^3_{(0)}$ és un espai racionalment el·líptic. D'altra banda, $K(\pi_1(X_{(0)}),1) \simeq S^1_{(0)}$ i usant la classificació de la taula 2, $X_{(0)} \simeq S^1_{(0)} \times S^3_{(0)}$.

(d.5) $n_{X_{(0)}\langle 1\rangle} = 4$ i rang $(\pi_1(X_{(0)})) = 0$.
Aquest cas no és possible, ja que no existeix cap espai 1-connex amb dimensió formal 4 i característica d'Euler igual a zero. □

Observem que, de fet, el teorema és vàlid per a qualsevol espai nilpotent racional de tipus finit amb dimensió formal estrictament menor que 4 o bé amb dimensió formal igual a 4 i característica d'Euler igual a zero. És a dir, el teorema caracteritza els espais nilpotents racionals de dimensió formal menor que 4 (o igual a 4 amb característica d'Euler igual a zero) que són racionalment el·líptics. En particular, el teorema K ens diu que la racionalització de tota infra-nilvarietat orientable de dimensió menor o igual que 4 és un espai racionalment el·líptic.

Sigui P un conjunt de primers i sigui $X = K(G,1)$ una infra-nilvarietat. Suposem que $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ amb N nilpotent finitament generat lliure de torsió i Q finit. Sigui F el P'-aïllador de Q, és a dir, el subgrup de Q generat per tots els elements de P'-torsió de Q. Sigui $Y = K(E,1)$ amb E l'antiimatge de F a G. El corol·lari 4.1.6 aplicat a la fibració $Y \to X \to K(Q_P,1)$, on Q_P és la P-localització de Q, ens permet obtenir una fibració

$$Y_P \to X_P \to K(Q_P,1)$$

amb fibra Y_P nilpotent (vegeu el teorema 4.3.3). A més, per a tot k, $\pi_k((Y_P)_{(0)}) \cong \pi_k(Y_{(0)})$ perquè $(Y_P)_{(0)} \simeq Y_{(0)}$. Tenint en compte que, per a tot $k \geq 2$,

$$\pi_k((Y_P)_{(0)}) \cong (\pi_k(Y_P))_{(0)} \cong \pi_k(Y_P) \otimes \mathbb{Q} \cong \pi_k(X_P) \otimes \mathbb{Q}$$

i els grups d'homotopia $\pi_k(X_P)$ són finitament generats com a $\mathbb{Z}_P$-mòduls, aplicant el teorema K a l'espai Y obtenim el resultat següent:

Teorema L *Sigui $X = K(G,1)$ una infra-nilvarietat i sigui P un conjunt de primers tal que X_P no és un espai anesfèric. Si la dimensió formal n_X de X és menor o igual que 4, aleshores existeix un enter positiu N tal que $\pi_k(X_P)$ és un grup finit per a tot $k > N$ si i només si $H^*(Y;\mathbb{Q})$ satisfà la dualitat de Poincaré.* $\square$

La condició $n_X \leq 4$ que apareix en els teoremes K i L és realment necessària. Tal i com ens mostra l'exemple següent, hi ha infra-nilvarietats orientables (en particular, la seva àlgebra de cohomologia racional satisfà la dualitat de Poincaré) de dimensió més gran estrictament que 4 tals que la seva racionalització no és un espai racionalment el·líptic.

Exemple 6.4.5 Sigui $X = K(G,1)$ la varietat de Riemann plana orientable de dimensió 5 amb

$$G = \langle a,b,c,d,e,\alpha,\beta \mid \begin{array}{lll} [a,b]=1,\dots & [d,e]=1, & \alpha^2 = d, \\ \beta^2 = a, & \alpha\beta = e^{-1}d\alpha\beta\alpha & \alpha a = a^{-1}\alpha \\ \alpha b = b^{-1}\alpha, & \alpha c = c^{-1}\alpha, & \alpha d = d\alpha, \\ \alpha e = e^{-1}\alpha, & \beta a = a\beta, & \beta b = b\beta, \\ \beta c = c\beta, & \beta d = d^{-1}\beta, & \beta e = e^{-1}\beta \,\rangle. \end{array}$$

És a dir, hi ha una successió exacta $\mathbb{Z}^5 \rightarrowtail G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2$. Usant la successió de Lyndon–Hochschild–Serre associada a ella, obtenim

$$H^n(X;\mathbb{Q}) \cong H^0(\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2; H^n(\mathbb{Z}^5;\mathbb{Q})) \cong H^n(\mathbb{Z}^5;\mathbb{Q})^{\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2}$$

i, fent els càlculs necessaris,

$$H^n(X;\mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si} \quad n = 0,5 \\ 0 & \text{si} \quad n = 1,4 \\ \mathbb{Q}^3 & \text{si} \quad n = 2,3, \end{cases}$$

amb $[x_1],[x_2],[x_3] \in H^2(X;\mathbb{Q})$ i $[y_1],[y_2],[y_3] \in H^3(X;\mathbb{Q})$ tals que

- $[x_i x_j] = 0$ per a $i,j = 1,2,3$.
- $[x_1y_3] = [x_2y_2] = [x_3y_1] \in H^5(X;\mathbb{Q})$ i $[x_iy_j] = 0$ altrament.

Per tant, la varietat X té dimensió formal 5 i la seva àlgebra de cohomologia $H^*(X;\mathbb{Q})$ satisfà la dualitat de Poincaré. Veiem que $X_{(0)}$ no és racionalment el·líptic, ans al contrari, racionalment hiperbòlic. En primer lloc, observem que $X_{(0)}$ és un espai 1-connex, ja que, usant el teorema 2.1 de [21],

$$\pi_1(X_{(0)}) \cong (\pi_1(X))_{(0)} \cong (\pi_1(X)_{\text{ab}})_{(0)} = H_1(X;\mathbb{Q}) = 0.$$

Aleshores, com que la dimensió formal de $X_{(0)}$ és menor que 6, la proposició 4.6 de [67] implica que $X_{(0)}$ és un espai formal; és a dir, $X_{(0)}$ té el mateix tipus d'homotopia que qualsevol espai formal que tingui la mateixa àlgebra de cohomologia que $X_{(0)}$.

Considerem $Y = (S^2 \times S^3)\sharp(S^2 \times S^3)\sharp(S^2 \times S^3)$. Com que Y és una varietat 1-connexa de dimensió formal $5 < 6$, resulta que Y és intrínsicament formal [66]. És a dir, només existeix un tipus d'homotopia racional tal que la seva àlgebra de cohomologia sigui isomorfa a $H^*(Y;\mathbb{Q})$. Per tant, en ser $H^*(X;\mathbb{Q}) \cong H^*(Y;\mathbb{Q})$, resulta que $X \approx_{\mathbb{Q}} Y$ és racionalment hiperbòlic [40, proposició 7.4].

6.4.3 Extensió dels resultats

Les infra-nilvarietats són espais anesfèrics virtualment nilpotents amb grup fonamental finitament generat lliure de torsió. Si repassem la demostració del teorema K, veurem que només hem usat el fet de tenir varietats per a descartar el cas en què tenim un espai racional 1-connex i de dimensió formal igual a 4. Per tant, més generalment, podem enunciar el teorema K com segueix.

Teorema 6.4.6 *Sigui $X = K(G,1)$ amb G un grup virtualment nilpotent finitament generat. Suposem que la dimensió formal n_X de X és menor o igual que 3 o bé que $n_X = 4$ i $\pi_1(X_{(0)}) \neq 0$. Aleshores $X_{(0)}$ és racionalment el·líptic si i només si $H^*(X;\mathbb{Q})$ satisfà la dualitat de Poincaré.* $\square$

Tal i com passava en el cas de les infra-nilvarietats, aquest teorema continua essent cert si suposem que X és un espai nilpotent racional de tipus finit amb dimensió formal ≤ 3 o bé amb dimensió formal igual a 4 i grup fonamental no trivial. A més, a partir d'aquest teorema podem obtenir un resultat sobre l'estructura dels grups d'homotopia de les localitzacions d'espais anesfèrics virtualment nilpotents amb grup fonamental finitament generat en conjunts de primers.

Sigui P un conjunt de nombres primers i sigui X un espai anesfèric virtualment nilpotent amb grup fonamental G finitament generat tal que $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$, on N és nilpotent finitament generat lliure de torsió i Q és finit. Recordem que es defineix $Y = K(E,1)$ com l'espai anesfèric virtualment nilpotent amb E l'antiimatge del P'-aïllador de Q a G. Aleshores tenim una fibració $Y_P \to X_P \to K(Q_P,1)$ amb fibra Y_P nilpotent (vegeu el teorema 4.3.3). Usant el mateix tipus d'arguments que a la secció anterior, a partir del teorema 6.4.6 obtenim el resultat següent:

Teorema 6.4.7 *Sigui $X = K(G,1)$ amb G un grup virtualment nilpotent finitament generat. Sigui P un conjunt de nombres primers tal que X_P no és un espai anesfèric. Si la dimensió formal n_X de X és menor o igual que* 3 *o bé $n_X = 4$ i $\pi_1(X_{(0)}) \neq 0$, aleshores existeix un enter positiu N tal que $\pi_k(X_P)$ és un grup finit per a tot $k > N$ si i només si $H^*(Y;\mathbb{Q})$ satisfà la dualitat de Poincaré.* $\square$

No sabem si realment és necessari que $\pi_1(X_{(0)}) \neq 0$ quan X té dimensió formal igual a 4. Tanmateix, a continuació veiem un exemple d'una varietat 1-connexa de dimensió 4 tal que la seva àlgebra de cohomologia racional satisfà la dualitat de Poincaré, però, en canvi, la seva racionalització no és un espai racionalment el·líptic.

Exemple 6.4.8 Sigui X la varietat 1-connexa $(S^2 \times S^2)\sharp(S^2 \times S^2)$. Aleshores $X_{(0)}$ és un espai 1-connex. A més, té dimensió formal igual a 4 i la seva àlgebra de cohomologia $H^*(X_{(0)};\mathbb{Q}) \cong H^*(X;\mathbb{Q})$ satisfà la dualitat de Poincaré. En efecte, segons l'exercici 11.3 [42], l'àlgebra de cohomologia de la suma connexa de dues varietats orientables de dimensió n és igual a la suma directa de les àlgebres de cohomologia amb les identitats i les classes d'orientació identificades. És a dir, en el nostre cas tenim $[x_1],[x_2],[y_1],[y_2] \in H^2(X;\mathbb{Q})$ tals que per a $i = 1,2$, $[x_i]^2 = 0 = [y_i]^2$ i $0 \neq [x_1][x_2] = [y_1][y_2] \in H^4(X;\mathbb{Q})$. Però, en canvi, l'espai X és racionalment hiperbòlic, ja que la suma connexa d'espais sempre ho és [40, proposició 7.4].

En conseqüència, si trobem un grup G virtualment nilpotent finitament generat tal que $H^*(G;\mathbb{Q}) \cong H^*(X;\mathbb{Q})$, on $X = (S^2 \times S^2)\sharp(S^2 \times S^2)$, aleshores $K(G,1)_{(0)} \simeq X_{(0)}$ perquè X és un espai intrínsicament formal.

De fet, el teorema 2 de [90] ens assegura que el tipus d'homotopia d'un espai 1-connex de dimensió formal igual a 4 i tal que la seva àlgebra de cohomologia satisfà la dualitat de Poincaré està completament determinat per l'estructura de la seva àlgebra de cohomologia. O, de forma encara més precisa, està determinat per la forma quadràtica

$$\begin{array}{rccc} q\colon & H^2(X;\mathbb{Z}) \times H^2(X;\mathbb{Z}) & \to & \mathbb{Z} \\ & (u,v) & \mapsto & \langle u \cup v, [x] \rangle, \end{array}$$

on $[x] \in H^4(X;\mathbb{Z})$ és la classe fonamental i $\langle -,- \rangle$ és l'avaluació de cohomologia en homologia. Observem que sobre $\mathbb{Q}$ la forma quadràtica

$$q\colon H^2(X;\mathbb{Q}) \times H^2(X;\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$$

queda totalment determinada per la seva signatura i per la dimensió de $H^2(X;\mathbb{Q})$. Per tant,

Proposició 6.4.9 *Tot espai* 1*-connex de dimensió formal igual a* 4 *i tal que la seva àlgebra de cohomologia satisfà la dualitat de Poincaré té el tipus d'homotopia racional d'una suma connexa de* $S^2 \times S^2$*, de* $\mathbb{C}P(2)$ *i/o de* $-\mathbb{C}P(2)$ *(és a dir,* $\mathbb{C}P(2)$ *amb l'orientació inversa).* $\square$

És a dir, n'hi ha prou amb trobar un grup G virtualment nilpotent finitament generat tal que l'espai $K(G,1)_{(0)}$ sigui 1-connex, tingui dimensió formal igual a 4 i la seva àlgebra de cohomologia satisfaci la dualitat de Poincaré.

Sigui X un espai nilpotent racional amb dimensió formal $n_X > 3$ tal que la seva àlgebra de cohomologia $H^*(X;\mathbb{Q})$ satisfà la dualitat de Poincaré. És possible demostrar, en alguns casos, que aleshores l'espai és racionalment el·líptic? El teorema següent és el resultat més general que hem aconseguit demostrar en aquesta direcció:

Teorema 6.4.10 *Sigui* X *un espai nilpotent racional de tipus* $\mathbb{Q}$*-finit amb dimensió formal* n_X *més gran estrictament que* 3*. Suposem que* $H^*(X;\mathbb{Q})$ *satisfà la dualitat de Poincaré. Aleshores* X *és racionalment el·líptic si*

$$\operatorname{rang}(\pi_1(X)) > n_X - 4.$$

Demostració. El teorema 6.4.4 ens diu que $n_X = n_{X\langle 1\rangle} + \operatorname{rang}(\pi_1(X))$, on $X\langle 1\rangle$ denota el recobridor universal de X. Suposem que el rang de $\pi_1(X)$ és més gran estrictament que $n_X - 4$.

- Si $\operatorname{rang}(\pi_1(X)) = n_X - 3$, aleshores $n_{X\langle 1\rangle} = 3$ i $X\langle 1\rangle$ és un espai 1-connex tal que $H^*(X\langle 1\rangle;\mathbb{Q})$ satisfà la dualitat de Poincaré (vegeu el teorema 6.4.3). Per tant, $X\langle 1\rangle \simeq S^3_{(0)}$ i $X \simeq S^3_{(0)} \times (S^1)^{n_X-3}_{(0)}$.
- Si $\operatorname{rang}(\pi_1(X)) = n_X - 2$, aleshores $n_{X\langle 1\rangle} = 2$ i $X\langle 1\rangle$ és un espai 1-connex tal que $H^*(X\langle 1\rangle;\mathbb{Q})$ satisfà la dualitat de Poincaré (vegeu el teorema 6.4.3). Per tant, $X\langle 1\rangle \simeq S^2_{(0)}$ i $X \simeq S^2_{(0)} \times (S^1)^{n_X-2}_{(0)}$.
- Si $\operatorname{rang}(\pi_1(X)) = n_X - 1$, aleshores $n_{X\langle 1\rangle} = 1$, la qual cosa és impossible, ja que $X\langle 1\rangle$ és un espai 1-connex.
- Si $\operatorname{rang}(\pi_1(X)) = n_X$, aleshores $X \simeq (S^1)^{n_X}_{(0)}$.

Per tant, hem demostrat que en els quatre casos l'espai X és racionalment el·líptic, tal i com volíem veure. □

Sigui X un espai nilpotent racional amb dimensió formal més gran estrictament que 3. Suposem que $H^*(X;\mathbb{Q})$ satisfà la dualitat de Poincaré. Quina altra condició cal imposar a X per tal de concloure que la seva racionalització $X_{(0)}$ és un espai racionalment el·líptic?

El primer pas és tornar a pensar en les infra-nilvarietats. De totes maneres, fins i tot en aquest cas és complicat establir criteris per a decidir si en racionalitzar obtenim un espai racionalment el·líptic. En primer lloc, caldria, per exemple, demostrar que aquests espais són formals per tal que la seva àlgebra de cohomologia racional determinés, unívocament, el seu tipus d'homotopia racional.

Acabem observant que el criteri que hem establert per a les infra-nilvarietats és vàlid per a les varietats de dimensió menor o igual que 4 i precisament són aquestes infra-nilvarietats les que estan classificades [30]. Encara no hi ha una classificació de les infra-nilvarietats de dimensions més grans, malgrat que es coneix la presentació dels seus grups fonamentals, els grups quasi-Bieberbach, fins a dimensió 6 (http://wwwb.math.rwth-aachen.de/carat/).

Bibliografia

[1] Auslander, L., Bieberbach's theorem on space groups and discrete uniform subgroups of Lie groups, Ann. of Math. **71** (1960), 579–590.

[2] Bastardas, G., Surjectivity need not be preserved by group localizations, J. Pure Appl. Algebra **171** (2002), 165–170.

[3] Bastardas, G. i Casacuberta, C., A homotopy idempotent construction by means of simplicial groups, Israel J. Math. **121** (2001), 333–349.

[4] Bastardas, G., Casacuberta, C. i Descheemaeker, A., Preservation of homotopy properties of virtually nilpotent spaces under completions, prepublicació (2002).

[5] Bastardas, G., Casacuberta, C. i Tan, G. C., Using rigid rings and near-rings to study localizations of wedges of circles, prepublicació (1999).

[6] Bastardas, G. i Descheemaeker, A., On the homotopy type of p-completions of infra-nilmanifolds, Math. Z. **241** (2002), 685–696.

[7] Baumslag, G., Some aspects of groups with unique roots, Acta Math. **104** (1960), 217–303.

[8] Bieberbach, L., Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume I, Math. Ann. **70** (1911), 297–336.

[9] Bieberbach, L., Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume II, Math. Ann. **72** (1911), 400–412.

[10] Bousfield, A. K., The localization of spaces with respect to homology, Topology **14** (1975), 133–150.

[11] Bousfield, A. K., Homological Localization Towers for Groups and π-modules, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 10, no. 186, Amer. Math. Soc., Providence, 1977.

[12] Bousfield, A. K., On the p-adic completions of nonnilpotent spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **331** (1992), 335–359.

[13] Bousfield, A. K., Homotopical localizations of spaces, Amer. J. Math. **119** (1997), 1321–1354.

[14] Bousfield, A. K. i Gugenheim, V. K. A. M., On PL de Rahm theory and rational homotopy theory, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 8, no. 179, Amer. Math. Soc., Providence, 1976.

[15] Bousfield, A. K. i Kan, D. M., Homotopy Limits, Completions and Localizations, Lecture Notes in Math., vol. 304, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972.

[16] Bröcker, T. i tom Dieck, T., Representations of Compact Lie Groups, Graduate Texts in Math., vol. 98, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1985.

[17] Casacuberta, C., Espais topològics amb accions P-locals, Tesi doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, 1988.

[18] Casacuberta, C., The behaviour of the homology in the localization of finite groups, Canad. Math. Bull. **34** (3) (1991), 311–320.

[19] Casacuberta, C., Anderson localization from a modern point of view, Contemp. Math., vol. 181, Amer. Math. Soc., Providence (1995), 35–44.

[20] Casacuberta, C., On structures preserved by idempotent transformations of groups and homotopy types, Contemp. Math., vol. 262, Amer. Math. Soc., Providence (2000), 39–68.

[21] Casacuberta, C. i Castellet, M., Localization methods in the study of the homology of virtually nilpotent groups, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **112** (1992), 551–564.

[22] Casacuberta, C. i Peschke, G., Localizing with respect to self-maps of the circle, Trans. Amer. Math. Soc. **339** (1993), 117–140.

[23] Casacuberta, C., Peschke, G. i Pfenniger, M., On orthogonal pairs in categories and localisation, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **175** (1992), 211–223.

[24] Casacuberta, C., Rodríguez, J. L. i Scevenels, D., Singly generated radicals associated with varieties of groups, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **260** (1999), 202–210.

[25] Casacuberta, C., Rodríguez, J. L. i Tai, J.-Y., Localizations of abelian Eilenberg–Mac Lane spaces of finite type, prepublicació (1998).

[26] Casacuberta, C., Scevenels, D. i Smith, J. H., Implications of large-cardinal principles in homotopical localization, prepublicació (1999).

[27] Charlap, L. S., Bieberbach Groups and Flat Manifolds, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1986.

[28] Curtis, E. B., Some relations between homotopy and homology, Ann. of Math. **83** (1965), 386–413.

[29] Curtis, E. B., Simplicial homotopy theory, Adv. Math. **6** (1971), 107–209.

[30] Dekimpe, K., Almost-Bieberbach Groups: Affine and Polynomial Structures, Lecture Notes in Math., vol. 1639, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1996.

[31] Descheemaeker, A., Localization of virtually nilpotent groups: Algebraic results, computational tools and topological implications, Tesi doctoral, Katholieke Universiteit Leuven, 2000.

[32] Descheemaeker, A. i Malfait, W., Preserving asphericity of virtually nilpotent spaces under P-localization, Topology **42** (2003), 1143–1154.

[33] Dror Farjoun, E., Cellular Spaces, Null Spaces and Homotopy Localization, Lecture Notes in Math., vol. 1622, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1996.

[34] Dror Farjoun, E., Higher homotopies of natural constructions, J. Pure Appl. Algebra **108** (1996), 23–34.

[35] Dror Farjoun, E., Dwyer, W. G. i Kan, D. M., An arithmetic square for virtually nilpotent spaces, Illinois J. Math. **21** (2) (1977), 242–254.

[36] Dror Farjoun, E., Orr, K. i Shelah, S., Bousfield localization as an algebraic closure of groups, Israel J. Math **66** (1989), 143–153.

[37] Eckmann, B. i Hilton, P. J., Structure maps in group theory, Fund. Math. **50** (1961), 207–221.

[38] Eda, K., Free σ-products and noncommutatively slender groups, J. Algebra **148** (1992), 243–263.

[39] Félix, Y., La dichotomie elliptique-hyperbolique en homotopie rationnelle, Astérisque, no. 176 (1989), 187 pp.

[40] Félix, Y. i Halperin, S., Rational LS-category and its applications, Trans. Amer. Math. Soc. **273** (1982), 1–37.

[41] Félix, Y. Halperin, S. i Thomas, J.-C., Gorenstein spaces, Adv. Math. **71** (1988), 92–112.

[42] Félix, Y. Halperin, S. i Thomas, J.-C., Rational Homotopy Theory, Graduate Texts in Math., vol. 205, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2000.

[43] Fuchs, L., Infinite Abelian Groups, vol. II, Academic Press, London New York, 1973.

[44] Göbel, R., Rodríguez, J. L. i Shelah, S., Large localizations of finite simple groups, J. Reine Angew. Math. **550** (2002), 1–24.

[45] Goerss, P. G. i Jardine, J. F., Simplicial Homotopy Theory, Progress in Mathematics, vol. 174, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[46] Hall, M. H., The Theory of Groups, The Macmillan Company, New York, 1959.

[47] Halperin, S., Lectures on Minimal Models, Mém. Soc. Math. France, no. 9/10 (1982).

[48] Hilton, P., On a family of Serre classes of nilpotent groups, J. Pure Appl. Algebra **89** (1993), 127–133.

[49] Hilton, P. J., Mislin, G. i Roitberg, J., Localization of Nilpotent Groups and Spaces, North-Holland Math. Studies, vol. 15, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[50] Hilton, P. J. i Stammbach, U., A Course in Homological Algebra, Graduate Texts in Math., vol. 4, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1970.

[51] Hubbuck, J. R., Self maps of H-spaces, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **139** (1989), 105–110.

[52] Kan, D. M., On homotopy theory and c.s.s. groups, Ann. of Math. **68** (1958), 282–312.

[53] Kan, D. M., A relation between CW-complexes and free c.s.s. groups, Amer. J. Math. **81** (1959), 512–528.

[54] Lannes, J. i Schwartz, L., À propos de conjectures de Serre et Sullivan, Invent. Math. **83** (1986), 593–603.

[55] Levi, R., On finite groups and homotopy theory, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 118, no. 567, Amer. Math. Soc., Providence, 1995.

[56] Levi, R., On p-completed classifying spaces of discrete groups and finite complexes, J. London Math. Soc. **59** (2) (1999), 1064–1080.

[57] Libman, A., Localization of groups, G-modules and chain complexes, Tesina, Universitat Hebrea de Jerusalem, 1997.

[58] Libman, A., Cardinality and nilpotency of localizations of groups and G-modules, Israel J. Math. **117** (2000), 221–237.

[59] Libman, A., A note on the localization of finite groups, J. Pure Appl. Algebra **148** (2000), 271–274.

[60] Llerena, I., Localization of fibrations with nilpotent fibre, Math. Z. **188** (1985), 397–410.

[61] May, J. P., Simplicial Objects in Algebraic Topology, Van Nostrand Mathematics Studies, vol. 11, Van Nostrand, Princeton, 1967.

[62] May, J. P., Fibrewise localization and completion, Trans. Amer. Math. Soc. **258** (1980), 127–146.

[63] McGibbon, C. A. i Neisendorfer, J. A., On the homotopy groups of a finite dimensional space, Comment. Math. Helv. **59** (1984), 253–257.

[64] Meldrum, J. D. P., Near-rings and their links with groups, Research Notes in Math., vol. 134, Pitman Advanced, 1990.

[65] Miller, H., The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces, Ann. of Math. **120** (1984), 39–87.

[66] Miller, T. J., On the formality of $(k-1)$-connected compact manifolds of dimension less than or equal to $4k-2$, Illinois J. Math. **23** (2) (1979), 253–258.

[67] Miller, T. J. i Neisendorfer, J., Formal and coformal spaces, Illinois J. Math. **22** (4) (1978), 565–580.

[68] Neisendorfer, J. A., Primary Homotopy Theory, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 25, no. 232, Amer. Math. Soc., Providence, 1980.

[69] Neumann, H., On varieties of groups and their associated near-rings, Math. Z. **65** (1956), 36–69.

[70] Neumann, H., Varieties of Groups, Ergeb. Math. Grenzgeb. Band 37, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1967.

[71] Oda, N. i Yosimura, Z.-Y., On the McGibbon–Neisendorfer theorem resolving the Serre conjecture, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A **40** (1986), 125–135.

[72] Quillen, D. G., Homotopical Algebra, Lecture Notes in Math., vol. 43, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1967.

[73] Quillen, D. G., An application of simplicial profinite groups, Comment. Math. Helv. **44** (1969), 45–60.

[74] Reid, G. A., Epimorphisms and surjectivity, Invent. Math. **9** (1970), 295–307.

[75] Ribenboim, P., Torsion et localisation de groupes arbitraires, Lecture Notes in Math., vol. 740, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1979), 444–456.

[76] Ribenboim, P., Equations in groups, with special emphasis on localization and torsion II, Portugal Math. **44** (4) (1987), 417–445.

[77] Rodríguez, J. L., On homotopy colimits of spaces with a single homology or homotopy group, Tesi doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, 1997.

[78] Rodríguez, J. L. i Scevenels, D., Universal epimorphic equivalences for group localizations, J. Pure. Appl. Algebra **148** (3) (2000), 309–316.

[79] Scott, W. R., Group Theory, Dover Books on Advanced Mathematics, Dover Publications, New York, 1987.

[80] Segal, D., Polycyclic Groups, Cambridge University Press, 1983.

[81] Serre, J. P., Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg–Mac Lane, Comment. Math. Helv. **27** (1953), 198–232.

[82] Spanier, E. H., Algebraic Topology, McGraw-Hill Publishing Company Ltd., New Delhi, 1966.

[83] Stammbach, U., Homology in Group Theory, Lecture Notes in Math., vol. 359, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1973.

[84] Stenström, B., Rings of Quotients, Grund. Math. Wiss. Einz. Band 217, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975.

[85] Sullivan, D., Genetics of homotopy theory and the Adams conjecture, Ann. of Math. **100** (1974), 1–79.

[86] Sullivan, D., Infinitesimal computations in topology, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **47** (1977), 269–331.

[87] Szczepański, A., Aspherical manifolds with the $\mathbb{Q}$-homology of a sphere, Mathematika **30** (2) (1983), 291–294.

[88] Weibel, C. A., An introduction to homological algebra, Cambridge University Press, 1994.

[89] Wenhuai, S., Note on the Serre conjecture theorem of McGibbon–Neisendorfer, Topology Appl. **55** (1994), 195–202.

[90] Whitehead, J. H. C., On simply connected 4-dimensional polyhedra, Comment. Math. Helv. **22** (1949), 48–92.