

LA GESTIÓ DE LES INVERSIONS FINANCERES EN LES EMPRESES D'ASSEGURANCES

**El risc d'inversió de les assegurances de
vida amb garantia de tipus d'interès**

Jordi Celma

Universitat Autònoma de Barcelona
Facultat de Ciències Econòmiques i Empresariales
Departament d'Economia de l'Empresa

**LA GESTIÓ DE LES INVERSIONS
FINANCERES EN LES EMPRESES
D'ASSEGURANCES**

**El risc d'inversió de les assegurances de
vida amb garantia de tipus d'interès**

Tesi doctoral presentada per:
Jordi Celma i Sanz

Direcció de la tesi:
Dr. Cèsar Villazón i Hervàs

Bellaterra

Maig de 2002

ÍNDEX

Introducció

| | pàgina |
|--|--------|
| 1. Anàlisi preliminar, objectius i tesis | 2 |
| 2. Altres aspectes que cal considerar | 16 |
| 3. Estructuració del treball presentat | 22 |

Primera part

Metodologia, anàlisi normativa i segmentació del contracte estudiat

Cap. 1: Els riscos financers, metodologia de l'anàlisi

| | |
|--|----|
| 1. Les assegurances de vida des de la perspectiva de la teoria financera | 31 |
| 1.1 La modelització del passiu com un conjunt d'opcions | 32 |
| 1.2 Interpretació de la modelització d'opcions amb preu explícit | 36 |
| 2. Modelització de les opcions amb restricció de recursos i sense preu explícit | 38 |
| 2.1 Preu explícit amb recursos limitats | 38 |
| 2.2 La modelització del passiu amb cost nul de les opcions | 42 |
| 2.3 La modelització amb opcions calculant el preu d'exercici prospectivament | 48 |
| 2.4 L'ajust dinàmic de les opcions: estratègia <i>ratchet</i> | 49 |
| 3. Anàlisi de les estratègies empíriques emprades pels asseguradors | 50 |
| 3.1 Anàlisi ex post del resultat de les opcions incorporades | 50 |
| 3.2 Condicions que permetrien mantenir constant la participació en guanys | 51 |
| 3.3 Diferents tècniques emprades pels asseguradors en la gestió financera | 52 |

Cap. 2: Les assegurances de vida en l'entorn de les directives comunitàries

| | |
|--|----|
| 1. La tercera directiva de vida i la 79/267/CEE | 57 |
| 1.1 El tipus d'interès que cal emprar en la valoració | 58 |
| 1.2 Consideracions pel que fa als actius | 59 |
| 1.3 Correlació entre el valor del passiu i el rendiment del deute de l'Estat | 59 |

| | |
|--|----|
| 2. L'adaptació espanyola a la tercera directiva | 61 |
| 2.1 El Reglament d'ordenació i supervisió de 1998 | 61 |
| 2.2 Contractes de vida vinculats a actius específics | 62 |
| 2.3 El marge de solvència en les assegurances de vida | 64 |
| 2.4 Sistemes de càlcul de la participació en guanys | 66 |
| 3. Efectes dels canvis en els tipus d'interès emprats en la valoració | 67 |
| 3.1 L'asimetria de la situació actual; preponderància del risc de reinversió | 67 |
| 3.2 La problemàtica d'estimar el valor de la provisió | 68 |
| 3.3 La problemàtica de la fixació del valor de rescat | 70 |
| 3.4 La no-neutralitat del sistema de participació en guanys | 71 |

Cap. 3: Segmentació dels fluxos de les assegurances de vida

| | |
|---|----|
| 1. Descripció i anàlisi de l'assegurança que s'estudia | 73 |
| 1.1 Equació general d'equilibri conjunt d'ambdós vessants | 74 |
| 1.2 Equació d'equilibri en funció dels capitals en risc i a venciment | 75 |
| 1.3 Relació general de recurrència de la provisió d'un contracte | 77 |
| 1.4 La provisió global gestionada per l'assegurador | 78 |
| 2. Segmentació del contracte: vessant de risc i vessant d'estalvi | 80 |
| 2.1 Relació de recurrència del vessant d'estalvi d'un contracte | 82 |
| 2.2 Determinació de la prima anivellada del vessant d'estalvi | 84 |
| 2.3 Determinació de la prima única del vessant d'estalvi | 85 |
| 2.4 Valor total de la provisió del vessant d'estalvi | 86 |
| 2.5 Anàlisi de les components principals del contracte | 89 |
| 2.6 Anàlisi de les components en el cas de prima única | 90 |
| 2.7 Equilibri prospectiu del conjunt de recursos que gestiona l'assegurador | 90 |
| 3. Incorporació dels fluxos derivats de la participació en guanys | 93 |
| 3.1 Incorporació de la participació en guanys com a prima única | 94 |
| 3.2 Incorporació de la participació en guanys com a primes periòdiques | 96 |
| 3.3 Igualtat del capital final fruit de la participació en guanys | 96 |
| 3.4 Comparació dels fluxos d'acord amb el sistema de participació escollit | 98 |

Segona part
***Anàlisi de la solvència de l'assegurança de vida com
un projecte d'inversió***

Cap. 4: La solvència financera a partir del control de l'excedent anual

| | |
|--|-----|
| 1. Les diferents accepcions del concepte de solvència | 102 |
| 1.1 La solvència estàtica i dinàmica | 102 |
| 1.2 Els models estadístics i financers de control de la solvència | 103 |
| 1.3 Els models financers i la correlació entre el valor de l'actiu i passiu | 105 |
| 2. Valoració de fluxos que depenen de l'evolució dels tipus d'interès | 106 |
| 2.1 Dos paradigmes per analitzar el valor del passiu | 107 |
| 2.2 Metodologia directa de valoració | 107 |
| 2.3 Metodologia indirecta de valoració | 108 |
| 2.4 Objectius cercats amb la valoració del passiu | 109 |
| 2.5 Peculiaritats de les tècniques d'immunització | 109 |
| 3. La solvència financera immediata cercant la immunització | 111 |
| 3.1 La solvència de l'assegurador i la immunització de l'excedent | 112 |
| 3.2 Condicions aproximades per aconseguir la immunització | 113 |
| 3.3 Aproximació de la immunització emprant la Duració | 115 |
| 4. La Duració com a mesura de risc en canviar el tipus d'interès | 118 |
| 4.1 Aproximació absoluta i relativa del canvi de valor de la provisió | 119 |
| 4.2 Estimació del risc addicional d'un contracte a primes periòdiques | 122 |
| 5. Factors de risc si se cerca la immunització de l'excedent | 123 |
| 5.1 La convexitat en el cas de contractes a primes periòdiques | 123 |
| 5.2 La minimització del risc en una estratègia d'immunització | 124 |
| 5.3 Estratègia immunitzadora de l'excedent versus casament de fluxos | 126 |
| 5.4 Altres condicions necessàries per mantenir la solvència dinàmica | 128 |

Cap. 5: La solvència financera dinàmica a partir del control del projecte agregat

| | |
|---|-----|
| 1. Descripció del projecte agregat | 132 |
| 1.1 Descripció del projecte de finançament d'un contracte | 132 |
| 1.2 Descripció del projecte d'inversió d'un contracte | 134 |
| 1.3 Descripció del projecte agregat | 134 |
| 1.4 Relació entre el valor actual i final del projecte agregat | 136 |
| 1.5 Taxa mitjana de rendibilitat aconseguida | 137 |
| 1.6 La taxa mitjana dins de les tècniques de <i>profit-testing</i> | 138 |
| 2. Restriccions per obtenir la rendibilitat garantida al contracte | 141 |
| 2.1 Condició d'equilibri inicial i de suficiència del valor dels actius | 142 |
| 2.2 Generalització de l'equilibri per a una cartera de contractes | 143 |
| 2.3 Interpretació de les dues equacions d'equilibri | 144 |
| 3 Determinació del tipus d'interès garantit | 146 |
| 3.1 Aproximacions emprades per cercar el tipus i | 147 |
| 3.2 El tipus garantit funció de la <i>TRI</i> dels actius i del tipus de reinversió | 148 |
| 3.3 Anàlisi de la funció que determina el tipus d'interès garantit | 149 |
| 4. Criteris d'estimació de l'excedent obtingut | 151 |
| 4.1 Procés per estimar l'excedent realment aconseguït | 151 |
| 4.2 Criteris de valoració considerats | 152 |
| 4.3 Discrepàncies entre els diferents sistemes de valoració emprats | 153 |

Tercera part

Segmentació del resultat financer i assignació de la participació en guanys

Cap. 6: Segmentació del resultat financer aconseguït

| | |
|---|-----|
| 1. Segmentació del resultat financer | 158 |
| 1.1 Rendibilitat atribuïble a priori a l'actiu i exigible al passiu | 158 |

| | |
|--|------------|
| 1.2 Canvis que poden incidir en la rendibilitat atribuïble o exigible | 159 |
| 1.3 L'excedent financer en funció dels factors de risc | 161 |
| 2. Estratègies de minimització del risc de reinversió | 165 |
| 2.1 Minimització dels efectes d'un canvi en el valor de l'OAS | 165 |
| 2.2 Minimització dels efectes d'un canvi en l'actiu de referència | 166 |
| 2.3 La major convexitat quan l'actiu és la suma dels actius reals i virtuals | 168 |
| 3. Anàlisi de l'extrarendibilitat del nou projecte agregat | 170 |
| 3.1 La participació en guanys respecte a la provisió matemàtica | 170 |
| 3.2 La participació en guanys respecte al total de pagaments esperats | 174 |
| 3.3 La incidència dels criteris de valoració | 175 |

Cap. 7: Anàlisi del sistema d'assignació de la participació en guanys i de dotació de la reserva de valor

| | |
|---|------------|
| 1. Criteris d'aplicació de l'excedent | 178 |
| 1.1 Aplicació de l'excedent emprant el sistema tradicional | 178 |
| 1.2 Aplicació de l'excedent emprant el nou sistema proposat | 179 |
| 1.3 El sistema de participació en guanys que proposem | 180 |
| 2. Anàlisi dels factors de risc del sistema de participació en guanys | 183 |
| 2.1 Anàlisi del factor de risc financer del sistema tradicional | 183 |
| 2.2 Anàlisi del factor de risc del sistema que proposem | 184 |
| 2.3 Anàlisi comparativa del risc financer d'ambdós sistemes | 185 |
| 3. Combinació dels diferents criteris de valoració i d'assignació de l'excedent | 187 |
| 3.1 Valoració de l'actiu a preu d'adquisició i provisió a l'interès tècnic però assignant la participació amb el nou sistema proposat | 187 |
| 3.2 Interpretació de les semblances i divergències d'ambdós sistemes | 188 |

Conclusions 189

Bibliografia 197

Introducció

LA GESTIÓ DE LES INVERSIONS FINANCERES EN LES EMPRESES D'ASSEGURANCES

El risc d'inversió de les assegurances de vida amb garantia de tipus d'interès

1. Anàlisi preliminar, objectius i tesis

*Life insurance is a form of saving for the rainy
day, and it is usually superior to the conventional forms of saving*

Karl H. Borch (Economics of Insurance)

Històricament, l'assegurança havia estat considerada una activitat econòmica en certa forma autònoma i dedicada exclusivament a la gestió de riscos, per al desenvolupament de la qual calia utilitzar tècniques específiques.

Però l'assegurança (més concretament la de vida) ha esdevingut també una activitat financera especialitzada en la captació, gestió i pagament de capitals i rendes financeres d'acord amb unes determinades regles; des d'aquesta perspectiva, compartim l'opinió de Laurent (1998) en el sentit que l'assegurador és un intermediari financer com altres i, d'acord amb el que expressen Browne *et al.* (1999), ha de gestionar els mateixos riscos (de tipus d'interès, liquiditat, de crèdit) que qualsevol altre intermediari.¹

Durant els darrers anys la intermediació financera ha estat sotmesa a importants canvis, encara que les funcions socials de les assegurances han continuat sent les mateixes: la forma en què s'ha efectuat la gestió dels recursos captats dels clients ha sofert l'impacte d'esdeveniments com la desregulació i desintermediació dels mercats o la innovació fruit de la puixança dels derivats i l'enginyeria financera.

¹ L'assegurador ha de gestionar també riscos de tipus demogràfic que són especialment importants, com a conseqüència de l'increment de l'esperança de vida humana, en el cas de les rendes de supervivència. Aquests riscos no han estat considerats en el present treball, atès que ens hem centrat en contractes amb una data límit coneguda en què finalitzen els compromisos contractuals de l'assegurador.

Per tant, cada vegada més l'assegurador necessita tenir un important saber fer (*know-how*) financer per tal de poder redistribuir adequadament els recursos captats d'accionistes i assegurats, els quals han d'haver invertit amb la finalitat de maximitzar el rendiment però mantenint uns adequats nivells adequats de solvència i liquiditat.

Aquesta gestió ha de ser especialment acurada en el cas dels recursos captats de les assegurances de vida perquè aquestes acostumen a incorporar un horitzó d'inversió molt llarg en què s'atorguen unes garanties financeres que no són usals en altres tipus de productes. Resulta imprescindible analitzar si les estratègies que permetrien maximitzar els excedents a curt termini són realment les que millor garanteixen l'assoliment del resultat pactat a llarg termini.

L'objectiu principal d'una assegurança de vida,² d'acord amb l'opinió de Borch (1990), és garantir els ingressos per *consum* en el futur, òbviament estalviant en l'actualitat. L'assegurança de vida ajuda, doncs, a periodificar els recursos monetaris disponibles durant tota la vida de l'assegurat,³ la qual cosa li ha de permetre poder disposar de la resta dels seus recursos de forma més arriscada, consumint-los o cercant altres alternatives d'inversió amb més rendibilitat esperada i, possiblement, amb més risc.

En conseqüència, una de les condicions que l'assegurat exigeix de l'assegurador és que sigui solvent tant ara com en el futur. La preocupació per la solvència està present en tot el desenvolupament d'aquest treball que ara presentem, l'origen del qual ha estat dual:

- D'una banda, la constatació dels efectes perniciosos que en el sector de les assegurances de vida van provocar els decrements dels tipus d'interès a finals dels anys noranta, que van seguir als elevats tipus que s'estaven produint (i garantint als contractes) des de la dècada dels setanta.
- D'altra, la limitació dels models teòrics existents per copsar adequadament l'exposició al risc financer d'aquestes assegurances quan garanteixen un tipus d'interès a llarg termini, tant sobre les aportacions ja efectuades al contracte com sobre les que puguin produir-se en el futur.

La volatilitat dels tipus d'interès en les darreres dues dècades ha coincidit amb una globalització del mercat financer en general, on també s'ha vist

² Des del vessant d'estalvi, que és el que estudiem en el present treball.

³ En endavant considerarem que la figura del prenedor, l'assegurat i el beneficiari (en cas que aquest darrer visqui) recauen en la mateixa persona i obviarem que de vegades poden ser diferents, la qual cosa no té cap incidència econòmica, al marge d'un tractament fiscal diferent.

involucrat el segment de productes destinats a captar l'estalvi a mitjà i llarg termini (que tradicionalment havia estat monopolitzat pels asseguradors).

Els nous productes d'estalvi van començar a ser comercialitzats en un moment en el qual es produïen les esmentades oscil·lacions de tipus d'interès junt amb canvis estructurals en el sector, la qual cosa va generar que s'hi incorporessin, entre altres modificacions, rendibilitats sensiblement superiors a les que històricament havien estat ofertes. Aquesta estratègia va ser replicada pels asseguradors de vida i, d'aquesta manera també va augmentar l'interès garantit dels seus contractes.

No obstant això, com que les condicions pactades en les assegurances de vida no es poden modificar durant tota la seva vigència, la posterior davallada de la rendibilitat dels actius on els asseguradors materialitzaven les seves inversions va acabar generant problemes financers per a les empreses que no havien valorat adequadament els compromisos subscrits.

La constatació formal d'aquests problemes ha estat reconeguda a l'Estat espanyol quan en la publicació del nou reglament⁴ s'ha modificat el criteri (general) de **càlcul de les provisions matemàtiques, passant d'una visió estàtica**, que emprava de forma indefinida el tipus d'interès pactat en el contracte, **a una visió dinàmica** que obliga a efectuar el càlcul a un tipus (màxim) comunicat anualment per la Direcció General d'Assegurances, el qual és el 60% de la mitjana ponderada dels darrers tres anys de la rendibilitat que ofereixen els bons de l'Estat a cinc o més anys (en endavant actiu de referència).⁵

L'acceptació implícita que l'aplicació del nou criteri podia provocar dèficits de provisions per certs asseguradors es va veure confirmada per dues circumstàncies:

- Amb la inclusió en l'esmentat Reglament d'una disposició transitòria segona, aplicable a la cartera ja existent, que admet un ajornament en el temps del nou sistema de càlcul mentre que els asseguradors (de forma retrospectiva) puguin acreditar que estan obtenint una rendibilitat suficient.

⁴ Reial decret 2486/1998 de 20 de novembre que aprova el Reglament d'ordenació i supervisió de les assegurances privades.

⁵ Podem, doncs, considerar que el tipus d'interès que cal emprar en el càlcul de les provisions matemàtiques passa a ser dinàmic ja que recull, via actiu de referència, l'efecte dels canvis en l'estructura de tipus d'interès.

- Mitjançant el desenvolupament de l'article 33.2 del Reglament en una Ordre⁶ del Ministeri d'Economia i Hisenda on es preveuen dues vies per tal de no calcular les provisions en funció de la rendibilitat vigent del deute de l'Estat, podent emprar amb certes restriccions un tipus relacionat amb la taxa de rendibilitat interna de les inversions materialitzades.

Aquesta aparent disparitat dels possibles sistemes de càlcul de les provisions de vida ens ha dut a plantejar-nos si aquests criteris són del tot diferents o bé si tenen alguna relació entre ells. Si arribem a la conclusió que són realment diferents caldria després plantejar-nos quina incidència té el fet que l'assegurador esculli un o altre en el valor final de la solvència.

El fet que l'interès pel problema que analitzem en aquest treball hagi estat comú en diferents països⁷ ha provocat que els seus efectes s'hagin inclòs en l'àrea d'estudi que analitza els aspectes econòmics de les assegurances. Aquesta àrea té una antiguitat d'uns trenta anys⁸, com remarca Loubergé (1998) en el seu article "Risk and Insurance Economics 25 Years After", però en aquest temps no s'ha aconseguit imposar un únic model de gestió financera; per tant, la situació que volem estudiar ara no té tampoc un únic marc de referència on puguem trobar la solució adequada.

Els estudis que analitzen empíricament els comportaments dels asseguradors de vida, com el de Smink i van de Meer (1997), "Life-Insurance Asset-Liability Management: An International Survey", confirmen que usualment en la pràctica se superposen diferents estratègies de gestió, sent les més comunament emprades la segmentació de productes, la projecció de fluxos generats, la gestió de la Duració i la cobertura del risc mitjançant derivats.⁹

⁶ Ordre de 23 de desembre de 1998 on es desenvolupen determinats aspectes de l'esmentat Reglament.

⁷ L'any 1974, en una de les primeres reunions de The Geneva Association, presidida aleshores pel professor Raymond Barre, es van reunir nou professors de diferents universitats europees on s'estudiava aspectes econòmics i de risc financer de les assegurances.

⁸ S'acostuma a prendre com a referència el treball d'Arrow (1970) en què va definir els contractes d'assegurança com un bescanvi monetari de capitals financers avui contra capitals financers condicionats en el futur.

⁹ La utilització d'aquestes estratègies s'adiu plenament amb la normativa espanyola: a l'article 33.2 de l'esmentat Reglament ja preveu la possibilitat de gestionar les provisions emprant el casament de fluxos (*cash flow matching*) o bé la immunització de l'actiu i el passiu cercant Duracions equivalents.

Els problemes derivats de la solvència financera en alguns casos han estat especialment greus la qual cosa ha provocat fins i tot fallides. Així als Estats Units l'any 1991 es va aconseguir un doble rècord: hi va haver 58 insolvències d'asseguradors de vida¹⁰ (màxim històric) i va ser l'únic any en què aquest valor va superar les fallides de les asseguradores de riscos diversos (les més importants van ser: Mutual Benefit Life i Executive Life).

Cal no oblidar que no totes les empreses es van trobar en la mateixa situació (de fet les fallides van representar al voltant de l'1% de les empreses del sector). A Espanya la situació no va ser tan dramàtica (encara que va propiciar la venda d'alguna empresa) però no per això s'ha de negar la importància del problema, que com veurem en l'anàlisi posterior, pot estar latent durant anys segons el sistema de valoració escollit.

Sembla, doncs, evident que fóra important aportar millores als models de gestió que s'han estat emprant, aprofitant els avantatges relatius de cada una de les anteriors tècniques i cercant nous enfocaments que permetin minimitzar sensiblement el problema de la solvència financera en el futur.

No ens plantegem, però, aprofundir en la casuística de la pròpia gestió concreta (que només serviria per a un país i un moment del temps determinat) sinó en l'enfocament estratègic d'aquesta mitjançant l'anàlisi dels diferents factors de risc, la discussió de la forma en què es neutralitza o redueix l'efecte d'aquests factors i el sistema per mesurar els resultats mitjançant una variable de control.

Normativament ja hi ha establerts, però, uns mecanismes de control. Així en el cas de **les assegurances de vida amb risc d'inversió a càrrec de l'assegurador** (que són les que estudiarem en aquest treball centrant-nos especialment en el risc de tipus d'interès) se l'obliga, a més a més de tenir correctament dotades les provisions matemàtiques, a disposar de recursos propis addicionals equivalents com a mínim al 4% de la provisió constituïda, com a marge de solvència.¹¹

¹⁰ Es pot consultar Carson i Hoyt (1995).

¹¹ De fet, s'està considerant el valor de la provisió matemàtica com una estimació del compromís financer adquirit per l'assegurador en un moment determinat, sent aquesta una esperança de la diferència entre els pagaments i els cobraments esperats actualitzats a un determinat tipus d'interès.

Com a alternativa al cost (d'oportunitat) que per a l'assegurador suposa dotar aquest marge i a la limitació comercial que per a les assegurances de vida suposa que en l'actualitat la rendibilitat de la renda fixa no sigui massa elevada, han aparegut en el mercat altres productes (per exemple els vinculats o *unit-linked*) que transfereixen el risc d'inversió a l'assegurat.¹²

Aquests darrers ofereixen expectatives d'una rendibilitat més elevada però a canvi d'assumir (l'assegurat) un major nivell de risc, ja que no es garanteix contractualment un tipus d'interès mínim i, en conseqüència tampoc cap capital o renda al venciment; malgrat això gaudeixen d'una forta tradició en països com el Regne Unit i han estat introduïts a Espanya des de l'any 1999 amb força èxit comercial.

Creiem, però, que per les seves especials característiques no suposaran l'eliminació de les **assegurances** que es coneixen amb el nom de **tradicionals** (en el sentit que **garanteixen un tipus d'interès** durant tota la seva vigència) i que són les que presenten un important repte de gestió per a l'assegurador pel risc d'inversió que incorporen. Aquestes són les que han copsat la nostra atenció en el desenvolupament del present treball.

En qualsevol cas volem remarcar que no hem inclòs en l'estudi els productes vinculats la qual cosa possiblement hagués estat un error metodològic ja que aquests han de ser comparats amb els fons d'inversió, dels quals sovint només difereixen en el tractament fiscal de les plusvàlues latents.¹³

En l'actualitat els productes de vida amb garantia de tipus d'interès continuen suscitant força expectativa acadèmica malgrat que l'anàlisi conceptual dels problemes financers que incorporen està força desenvolupada. Potser un dels estats de la qüestió més elaborat el presentat en el Third International Congress on Insurance: Mathematics and Economics, per Grosen i Jorgensen (1999) en el seu article "Fair Valuation of Life Insurance Liabilities: The impact of Interest Rate Guarantees, Surrender Options, and Bonus Policies".

¹² En aquests productes els asseguradors només han de disposar d'un marge de solvència de l'1% de la provisió.

¹³ Aquesta és la comparació que efectuen Alvargonzález i Garcia (2000) a *Manual de Unit-linked*.

Els esmentats autors proposen la modelització del tipus d'interès com una variable aleatòria independent. Si de forma empírica analitzem la rendibilitat anual realment obtinguda pels asseguradors (d'acord amb les dades de què disposem de l'Estat espanyol) veiem que existeix una clara correlació entre aquesta rendibilitat i l'evolució dels tipus d'interès vigents al mercat d'actius. Aquesta idea també es trasllada implícitament a la normativa vigent quan aquesta obliga a valorar els actius a preu de mercat i la provisió al 60% del tipus de rendibilitat del deute de l'Estat;¹⁴ alhora serveix de referència del tipus d'interès màxim que es pot garantir per la nova producció d'assegurances de vida.

El tema de la correlació no es nou com tampoc no ho és la importància que tenen els canvis en els tipus d'interès sobre el resultat financer de les assegurances de vida. Així, els professors Doherty i Garven (1995), en el seu article "Insurance Cycles: Interest Rates and the Capacity Constraint Model" ja reflexionaven sobre els comportaments cíclics dels rendiments dels asseguradors i com aquests cicles incidien de forma diferent en la solvència en funció de l'estructura de l'actiu, el passiu i els recursos propis de cada assegurador.

En els darrers anys (pel que fa a l'Estat espanyol) ens hem trobat dins d'una tendència decreixent dels tipus d'interès, que ara sembla que comença a evolucionar a l'alça, però els canvis de tendència no es fan d'avui per demà, per tant, no podem pensar que els resultats financers d'un exercici comptable es compensaran amb els resultats de l'exercici posterior.

Tampoc no podem obviar la importància de les assegurances de vida dins de la composició de l'estalvi familiar, que per a l'any de 1999 va representar al voltant del 8% del total de l'estalvi espanyol amb unes provisions matemàtiques de 10,8 bilions de pessetes i una recaptació de primes de 2,8 bilions de pessetes.¹⁵

¹⁴ Se sobreentén, doncs, que qualsevol canvi en l'estructura de tipus d'interès que pugui afectar els actius (de renda fixa) es correlaciona amb l'estructura de tipus del deute i a partir d'aquest valor incideix en el càlcul de l'import de la provisió.

¹⁵ Dades de l'informe "Estadística del ramo de vida, año 1999". Informe 794 d'ICEA.

Si deduïm del total de primes de 1999 els 862.235 milions recaptats en els productes vinculats podem estimar que al voltant de 2 bilions de primes corresponen a productes amb garantia de tipus d'interès. En alguns d'aquests contractes els asseguradors de vida estant garantint fins al 6% de tipus d'interès¹⁶ quan la rendibilitat del deute de l'Estat ofereix al voltant del 4,50%, per tant, es troben immersos en un problema de tipus estructural que té dues característiques:

- A curt termini incideix de forma sistemàtica en la reducció del marge financer del conjunt del sector i, en certs casos (que analitzarem), obligarà a dotar de provisions addicionals
- A llarg termini pot tenir conseqüències en la solvència ara per ara desconegudes.

D'entrada no sembla que l'actual escenari de tipus d'interès hagi de canviar molt a curt termini, però si això es produís una bona part del possible superàvit seria traspasat als mateixos assegurats (com ja es va fer al final dels anys vuitanta, quan hi havia excedents financers), ja que **és usual en els contractes de vida atorgar** cada any un important percentatge de **participació en guanys** sobre els rendiments que superin l'interès garantit.

En la nostra opinió, tenint en compte l'elevat tipus d'interès garantit als contractes, **les participacions en guanys es van atorgar en el passat de forma excessivament generosa** quan ha hagut excedents i pensem que una part d'aquest s'hagués hagut de reservar per als anys de tendència decreixent en la rendibilitat.

El professor Neil Doherty, que va tancar el Third International Congress on Insurance abans esmentat, en la seva conferència va parlar de forma genèrica sobre la solvència dels asseguradors i va argumentar que al marge de l'equilibri tècnic una important part d'aquesta es fonamenta en els recursos obtinguts en els anys en què es produeixen excedents i la reserva que es fa d'aquests excedents per als anys en què hi pugui haver dèficit.

Aquesta idea, que subscriu plenament, resumeix la nostra pròpia filosofia i encara és més aplicable en el cas concret de les assegurances de vida on es garanteix un tipus d'interès a llarg termini i en particular per a les carteres (ara tancades) formades en part per contractes on s'estigui garantint fins a un 6% d'interès tècnic.

¹⁶ No podem saber, però, quina part correspon a contractes que estiguin garantint un 6% (que és l'interès màxim que normativament s'ha pogut assegurar fins que al BOE 126 de 27 de maig de 1997 es va limitar el tipus màxim garantit al 4%), o bé tipus inferiors.

Si és cert que hi ha cicles en els tipus d'interès i que finalment aquests acaben revertint cap a un tipus mitjà, s'ha de ser especialment acurat si s'està a la part alta del cicle, com va succeir a Espanya en els anys vuitanta, quan la rendibilitat que es podia aconseguir invertint sense risc en renda fixa era de més del 10% anual.

Cal remarcar, en el cas concret de l'Estat espanyol, que els possibles efectes perniciosos de la davallada dels tipus d'interès no afectaran per igual totes les empreses. Els asseguradors gestionen carteres on hi ha productes que garanteixen diferents tipus d'interès; d'una banda, no tots van arribar a garantir el 6%, de l'altra, ja han hagut de modificar els seus productes per tal d'adaptar-los a un escenari de tipus d'interès molt reduïts;¹⁷ creiem, però, que també els serà necessari disposar d'elements d'anàlisi molt acurats (el marge financer serà força minvat) que ara per ara són insuficients i, de vegades, contradictoris.

Tanmateix no és immediat ni segur que una davallada en el tipus de rendibilitat dels actius impliqui una disminució de la solvència de les empreses d'assegurances, tal com indiquem Staking i Babbel (1995); el resultat depèn entre altres factors del volum de l'import de l'actiu i passiu, de les respectives Duracions i de la mesura del diferencial (*spread*) de rendibilitat existent entre ambdòs components del balanç.

Finalment només volem recordar les opinions de Staking i Babbel¹⁸ (referides als Estats Units però vàlides també per a Espanya) en el sentit que **amb les normes tradicionals de valoració de l'actiu i passiu** (respectivament a preu d'adquisició i valorant a l'interès tècnic) **els asseguradors poden modificar quasi a voluntat el resultat financer d'un exercici concret venent actius infravalorats respecte el seu valor de mercat**, amb la qual cosa poden ajornar la declaració d'insolvència un cert nombre d'anys.

No disposem d'estudis equivalents pel que fa a Espanya. El que sí que és cert és que les dades de l'increment de primes de vida durant el darrer any 2000¹⁹ permeten constatar que les corresponents als productes vinculats han estat molt superiors a les dels productes tradicionals. Podem pensar, però, que aquesta tendència obeeix a un veritable desig dels assegurats o bé que són els asseguradors els que es troben més *segurs* comercialitzant productes sense garantia de tipus d'interès? Tampoc no sabem si aquesta situació és només conjuntural i podrà ser diferent en el futur.

¹⁷ Han hagut de reduir el tipus garantit establint-lo al voltant del 2,50 o 3%.

¹⁸ *Op. cit.* pàg. 700. Aquesta problemàtica també ha estat estudiada a Celma (1994).

¹⁹ Informe d'ICEA, "Las inversiones de las entidades aseguradoras en 2000".

Per tot el que hem comentat, **l'objectiu d'aquesta tesi** ultrapassa l'anàlisi d'un problema concret (de desequilibri entre el tipus d'interès garantit als contractes i la rendibilitat que actualment es pot obtenir de les inversions) i **s'emmarca en l'anàlisi estructural de la solvència de les assegurances de vida amb interès garantit a llarg termini de dues maneres:**

- **Incidint en el resultat de les carteres d'assegurances de vida ja existents.**
- **Projectant la necessitat d'aquesta anàlisi cap al futur amb la pretensió d'oferir una estratègia que permeti dissenyar (a priori) i controlar (a posteriori) la viabilitat financera dels nous productes de vida amb risc d'inversió²⁰ suportat per l'assegurador.**

Considerarem que una assegurança de vida, al marge d'altres aspectes, és en sentit ampli una inversió i no podem oblidar que, emprant una cita de Sharpe (1978, pàg. 2): "Investment is the sacrifice of certain present value for (possibly uncertain) future value". L'assegurança de vida, com qualsevol altra inversió, porta incorporada una incertesa pel que fa a la percepció futura, ja sigui en l'import del capital financer o en el moment en què aquest pugui estar disponible o en ambdós casos alhora.

Cal recordar que l'enfocament de les assegurances de vida tradicionals ha estat fonamentat en considerar el tipus d'interès com a únic i constant durant tota la vida del contracte, la qual cosa veurem que ha estat un error greu dins de l'actual situació de volatilitat de tipus.

En paraules de Daykin *et al.* (1994, pàg. XI) en el seu prefaci introductori en *Practical Risk Theory for Actuaries* es comenta:

Classical actuarial mathematics was based on deterministic approaches, for example decrement tables representing the average expected outcome, such as the probability of death or survival. The invested return was represented by a single fixed rate of interest.

Els mateixos autors (pàg. 3) consideren que les transaccions d'un assegurador poden ser interpretades com una sèrie d'entrades (*inputs*) i sortides (*outputs*), les entrades s'afegeixen als actius els quals poden interpretar-se com una reserva de valor per satisfer les diferents sortides del contracte.

The reservoir of assets could, in the simplest case, be a working balance of cash, but will more normally be invested in a variety of different forms of investment, including deposits, bonds, equities, property, subsidiary companies, loans, and so on. An analogous process would be a water reservoir where some pipes supply water into a reservoir, whilst others drain it out.

²⁰ Equival a afirmar que s'està garantint un tipus d'interès mínim sobre les aportacions de l'assegurat.

La interpretació dels autors en què consideren l'actiu com una reserva de valor que té diferents fonts d'alimentació alhora que nodreix diferents tipus de sortides ens permet raonar que hi ha diferents subsistemes que incideixen en aquesta provisió (definició d'acord amb la normativa actual del concepte tradicional de reserva), sent un d'ells el que analitzarem després en profunditat, el subsistema financer, que ha de tenir el seu propi equilibri.

Així, hem desenvolupat aquesta tesi amb els objectius següents:

- **Determinar les causes reals del desequilibri en el subsistema financer.**
- **Analitzar la millor forma de mesurar aquest equilibri/desequilibri i presentar possibles estratègies per tal d'evitar (o minimitzar) els eventuais problemes en el futur.**
- **Relacionar els diferents criteris que normativament pot emprar l'assegurador per valorar l'actiu i el passiu així com el sistema tradicionalment emprat per assignar la participació en guanys, respecte al criteri teòric que proposarem en aquest treball, el qual minimitza la incidència dels eventuais canvis en els tipus d'interès alhora que s'adiu amb la filosofia de la tercera directiva de vida, no contradiu l'adaptació de la normativa espanyola i, per tant, podria ser implementat empíricament si calgués.**

Les tesis que volem analitzar d'acord amb el primer dels objectius que hem exposat són aquestes:

1. **Una primera causa de desequilibri financer en les assegurances de vida amb interès garantit ha estat el fet de no estimar adequadament l'excedent financer aconseguit any rere any, per haver emprat criteris de valoració estàtics que no consideraven aspectes del risc de tipus d'interès de la cartera d'assegurances.**
2. **Una segona causa ha estat emprar criteris d'assignació de la participació en guanys massa generosos els anys que ha hagut excedents, sense reservar part d'aquests recursos per als possibles dèficits que es poguessin produir en el futur.**
3. **Una altra causa ha estat considerar el marge de solvència legal, establert en un 4% del valor de la provisió matemàtica (que recordem és l'actualització a un tipus d'interès fix d'un valor esperat)**

com a mesura de la solvència, sense valorar d'altres aspectes específics de risc.

Les tesis que caldria contrastar d'acord amb el segon objectiu exposat són les següents:

4. Cal discriminar entre les estratègies de gestió que permeten controlar el risc de preu del contracte d'assegurança i les que, de forma més complexa (perquè impliquen una projecció a llarg termini), permeten controlar altres riscos financers, estratègies que demostrarem que no són sempre coincidents.
5. L'estratègia a adoptar per atorgar participacions en guanys modifica el risc de reinversió que està suportant l'assegurador atès que usualment comporta incrementar el pagament que cal efectuar al venciment del contracte.
6. Una solució minimitzadora del risc de reinversió consisteix a modificar el concepte (tradicional) d'actiu i passiu del contracte d'assegurança. Proposem que a l'actiu (fins ara les inversions ja efectuades) s'incorporin també les primes pendents de percebre i llavors el passiu en lloc de considerar la provisió matemàtica es relacionarà amb el conjunt de pagaments esperats. A aquesta nova interpretació hi afegirem un sistema de participació en guanys que atorga de forma irrevocable només una part de l'extrarendibilitat obtinguda i reserva l'altra part fins al venciment del contracte.

És a dir, passarem del sistema tradicional:

| <u>Actiu</u> | <u>Passiu</u> |
|--------------|---|
| Actius reals | Pagaments esperats - Primes pendents |

A un altre, on proposem que:

| <u>Actiu</u> | <u>Passiu</u> |
|-----------------------------------|--------------------|
| Actius reals + Primes pendents | Pagaments esperats |

Com més endavant analitzarem, aquest canvi (malgrat que pugui semblar comptablement irrellevant) té implicacions financeres importants.

I les tesis que volem contrastar d'acord amb el tercer objectiu són:

- 7. Els diferents criteris de valoració i d'assignació de la participació en guanys que preveu la normativa vigent a Espanya no són neutrals respecte a les dues grans components que engloba el risc d'inversió (risc de preu i de reinversió); per tant, tampoc no és indiferent pel que fa a la solvència que l'assegurador esculli un criteri o altre.**
- 8. Fins i tot havent emprat el sistema tradicional de valoració d'actius i provisions (quan normativament era possible) si els asseguradors haguessin escollit el sistema d'assignació de participació en guanys que proposem haurien reduït sensiblement el risc financer.**

Totes les tesis anteriors tenen un fil conductor comú que es fonamenta en la consideració que una gestió financera dels contractes d'assegurança (amb garantia de tipus d'interès) centrada en objectius a curt termini menysprea l'existència de factors de risc que només es materialitzen a mitjà i llarg termini, els quals d'acord amb quina sigui l'estructura dels fluxos de la cartera en el moment en què aquells *apareguin* poden provocar greus problemes de solvència financera.

A tall de resum, la idea que volem argumentar i defensar és la següent:

En un contracte d'assegurança on s'està garantint un tipus d'interès durant un horitzó de diversos anys, sent els fluxos previstos aleatoris, és impossible cercar (a priori) exactament quin ha de ser aquest tipus. Qualsevol estimació ha de ser consistent amb un tipus de reinversió prudent, pel fet de ser prudent serà òbviament *superat* en diferents anys, amb la qual cosa permetrà, llavors, obtenir excedents financers.

La forma de calcular quin ha estat aquest excedent financer i el criteri d'assignació de la participació en guanys que s'acredita a l'assegurat esdevé un element cabdal en el control de la solvència financera. L'assegurador disposa d'un doble element de control de l'excedent:

- **aplicant un criteri prudent en el moment de valorar el passiu, -i cal dir que ja és un element de discussió què entenem exactament per passiu (en especial en els contractes a primes periòdiques)-,**
- **aplicant un criteri prudent d'assignació dels guanys preveient els diferents factors de risc que poden incidir en el resultat futur.**

Pensem que durant les dècades dels vuitanta i dels noranta el criteri de valoració del passiu emprat pels asseguradors espanyols (que denominarem tradicional) en el cas dels contractes a primes periòdiques no era adequat en el sentit que implicava excedents excessius respecte els riscos futurs assumits. També pensem que el criteri d'assignació de la participació en guanys usualment emprat era igualment inadequat.

Finalment, creiem que fins i tot havent aplicat el criteri de valoració tradicional si s'hagués emprat una assignació de participació en guanys diferent (que proposarem explícitament) la incidència de la davallada dels tipus d'interès i el canvi d'un sistema de valoració estàtic (el tradicional) a un sistema dinàmic a finals de 1999 hauria tingut un efecte menor en la rendibilitat que en l'actualitat s'està oferint als contractes amb garantia de tipus d'interès.

2. *Altres aspectes que cal considerar*

Al marge de les tesis que acabem d'explicitar formalment hi ha altres aspectes que creiem oportú comentar per tal de centrar més acuradament el treball que desenvoluparem.

Analitzant els diferents tipus de contractes existents al mercat hem comprovat que no totes les assegurances de vida tenen la mateixa problemàtica ja que encara que la finalitat social continuï sent la mateixa, el risc assumit per l'assegurador pel que fa a la garantia de la inversió pot ser força diferent. Llavors en cap cas no podem generalitzar un model únic de gestió financera vàlid per a tots els casos.

Per tant, fent nostra una de les estratègies emprades pels asseguradors de vida, hem segmentat els diferents tipus de contractes centrant la nostra anàlisi exclusivament en els casos on el risc d'inversió es fa més palès, és a dir, en els que s'estigui garantint un tipus d'interès a llarg termini, ja sigui mitjançant la percepció d'una prima única o, encara més arriscat, quan el contracte és a primes periòdiques i l'assegurat gaudeix de l'opció addicional de seguir efectuant aportacions o bé d'aturar-les, fins i tot rescatant el contracte.

Així, sota el nom genèric d'assegurança de vida ens trobem amb un conjunt de diferents instruments financers²¹ que, en no ser iguals tampoc no es gestionen de la mateixa forma ni ofereixen perfils de risc/rendibilitat semblants; és, doncs, raonable afirmar que els asseguradors no haurien d'haver permès que els clients valoressin els contractes estrictament en paràmetres de rendibilitat en lloc d'emfasitzar la seguretat i la solvència que ha de prevaler en aquest tipus de producte (Curiale, 1993).

Potser un primer error conceptual va ser permetre que els clients percebessin les assegurances de vida com altres productes d'estalvi tradicional sense valorar els aspectes diferencials d'aquestes (Santomero, 1997). Els asseguradors van entrar en el *joc* de comercialitzar els contractes intentant maximitzar el tipus d'interès i la rendibilitat a curt termini, representada aquesta per la suma de la rendibilitat garantida més el muntant de la participació en guanys atorgada.

Entre totes les característiques de les assegurances de vida, la que es considera més diferenciadora (Brys i de Varenne, 1997) d'aquests productes és el llarg horitzó dels compromisos subscrits amb els assegurats.

Mai no pot ser comparable la rendibilitat que es garanteix a horitzons llargs, com és el cas de les assegurances de vida, respecte a la que es pot oferir en

²¹ L'assegurança, al marge de ser un instrument financer, sol incorporar la cobertura de diferents capitals de risc però en aquest treball segmentarem el contracte centrant-nos exclusivament en l'anàlisi del vessant d'estalvi.

altres productes a horitzons molt més curts. Tampoc no és comparable la rendibilitat que es pot oferir a una prima única (normalment d'import elevat) respecte a la que és raonable oferir a un contracte a primes periòdiques d'import molt més minvat que l'anterior.

A més a més hi una altra característica que no podem oblidar: **les assegurances de vida incorporen normalment, de forma implícita, un gran nombre d'opcions de les quals gaudeix l'assegurat i que garanteix l'assegurador.**

Aquestes opcions, com ara tenir un tipus d'interès garantit sobre les aportacions efectuades, poder efectuar noves aportacions amb garantia de tipus, veure reinvertida en l'assegurança la participació en guanys o rescatar anticipadament el contracte, tenen un cost implícit que directament o indirectament minva la rendibilitat financera del producte. L'assegurat valora adequadament el cost de les opcions incorporades al contracte?

L'estructura del passiu dels contractes d'assegurança, que és on s'inclouen les opcions, **és força diferent del que gestionen altres entitats financeres**, sent aquell de molt difícil valoració. Contràriament la materialització de les inversions dels contractes s'efectua en actius semblants als que empen altres intermediaris financers, per tant, el *sostre* de rendibilitat és igual per a tothom. Si l'assegurat gaudeix, doncs, d'opcions que no necessita o no valora adequadament llavors pot tenir la impressió que la remuneració aconseguida és baixa si la compara amb altres alternatives.

Pensem que l'aspecte cabdal de control de la solvència rau en el coneixement de l'assegurador de l'estructura del passiu que es gestiona, dels factors de risc que poden incidir en el seu valor i dels criteris emprats en la seva correcta valoració a priori i a posteriori, sent:

- el tipus d'interès que s'hagi garantit al contracte un element implícit de modulació a priori del risc molt important, i
- la forma com es calcula la rendibilitat obtinguda i com s'assigna anualment l'eventual participació en guanys un element explícit de control a posteriori.

Un desconeixement de l'assegurador del veritable valor de les opcions pot comportar que aquest sigui fins i tot incapaç de determinar quin ha estat el veritable resultat aconseguït en un exercici comptable.

A més a més el fet addicional que l'assegurador no pugui rescindir ni modificar les condicions del contracte al final de cada any²² fa que aquest disposi de molt poc marge d'actuació si ha efectuat una valoració inadeguada.

Finalment, en ser l'assegurança el prototipus del contracte aleatori, és normal que hi hagi desviacions entre les fluxos previstos i els fluxos reals. Per als asseguradors pot ser, doncs, difícil decidir quina part dels recursos s'han d'invertir a curt termini (per disposar de liquiditat) i quina part es pot invertir a llarg termini. Cal també incorporar en l'anàlisi el cost de la iliquiditat que es pugui produir (Prieto, 1993 a).

Com abans hem comentat, durant les dècades dels vuitanta i dels noranta van coincidir canvis sobtats en els tipus d'interès i diferents fallides entre els asseguradors de vida als Estats Units (Santomero i Babbel, 1997), la qual cosa ha fet que molts d'ells afirmessin (en enquestes respecte a la seva percepció de la situació) que **la principal preocupació de la seva gestió era controlar el risc de tipus d'interès.**²³

També hem anticipat que en el món acadèmic les tècniques emprades en l'anàlisi d'aquest tipus de riscos no són coincidents. Per tal de no efectuar cap exclusió a priori hem considerat que cada una d'elles és susceptible d'analitzar el problema adequadament però des d'una perspectiva específica i emprant diferents variables d'acord amb l'objectiu cercat; en conseqüència, hem cregut que valia la pena intentar trobar un nexa comú.

Hi ha autors que han pensat de la mateixa forma oferint la seva interpretació dels aspectes comuns. Així McLaughlin (1998) considera que totes les tècniques que empen els asseguradors de vida prenen en consideració tres aspectes:

- Els diferents fluxos projectats, ja sigui pel mateix contracte d'assegurança com pels actius que materialitzen les inversions.
- Els tipus d'interès emprats en la valoració dels esmentats fluxos.
- Un criteri de valoració dels capitals financers resultants, entre els quals el més comunament emprat és el de l'esperança matemàtica²⁴.

²² Pràctica habitual per a altres assegurances de rams diversos.

²³ Concepte una mica més específic que el de risc d'inversió abans esmentat però que representa la part d'aquest que és més difícil de controlar i no és diversificable.

²⁴ Aquest és el criteri escollit pel mètode de valoració actuarial que també pren en consideració els altres conceptes esmentats.

En la nostra opinió caldria afegir-hi que també s'ha de considerar l'aspecte següent:

- Una variable de control del resultat (financer) aconseguit en els diferents moments intermedis.

Si ens adonem observarem amb facilitat que els anteriors aspectes són comuns a les tècniques de valoració d'opcions (ja sigui de forma analítica o mitjançant simulacions tipus Monte Carlo), a les de casament de fluxos (*cash flow matching*) i també a les de gestió de la Duració.

Creiem que un dels aspectes determinants a l'hora d'arribar a conclusions divergents a partir d'aquests aspectes serà les diferents relacions de dependència que s'estableixi entre els fluxos, els tipus d'interès emprats en la valoració i els tipus vigents en el mercat d'actius així com els estimats per a la reinversió.

També creiem que, per tal que les aportacions acadèmiques puguin ser d'aplicació en les empreses d'assegurances, han d'incloure com a casos particulars les diferents normatives que obliga a emprar l'Administració. Aquesta, que vetlla essencialment pels interessos dels assegurats, regula entre altres les taules de mortalitat que permeten projectar els fluxos dels contractes, els tipus d'interès màxims que poden ser garantits, o els criteris de valoració d'actius i provisions; per tant, incideix de forma sensible en la gestió financera que *realment* pot implementar l'assegurador.

Així, l'anàlisi de la forma en què l'Administració enfoca el control de les assegurances de vida també ha estat un element de reflexió en aquest treball. Hem observat que no hi ha molta preocupació pel que fa a la forma com els asseguradors gestionen riscos específics sempre que es mantinguin unes garanties financeres, mesurades a partir de la comparació del valor de les provisions versus el valor de l'actiu que materialitza aquestes més uns recursos propis suficients.

La normativa, encara que incorpora unes disposicions de tipus generals, admet també certes *excepcions* i permet cercar el valor de l'actiu i les provisions per diferents camins.

Segons la nostra opinió aquesta divergència entre les estratègies adients per controlar el risc de preu i les adients per controlar el risc de reinversió s'agregen en les assegurances a primes periòdiques, on poden dur-nos a conclusions oposades. Demostrarem que el valor de la provisió pot ser comparat amb el valor de l'actiu si centrem l'anàlisi en la vessant de risc de preu. Per analitzar, però, la problemàtica de la reinversió no sempre és suficient fer aquesta comparació.

Creiem que des de la vessant de l'assegurador la millor forma de copsar aquestes discrepàncies és assimilar la cartera dels contractes de vida (amb garantia d'interès i dret a gaudir d'una participació en guanys) a un projecte agregat d'inversió a llarg termini al qual s'han afegit uns capitals en risc a percebre pels hereus de l'assegurat en cas que es produeixin alguna de les eventualitats previstes en el contracte (per exemple, en cas de mort).

El projecte agregat serà la suma d'un projecte de finançament més un projecte d'inversió. El primer reflectirà com a entrades les aportacions dels assegurats i com a sortides els capitals a satisfer per l'assegurador. El cost del capital és el tipus d'interès garantit a l'assegurança.

El segon reflectirà com a entrades els excedents entre primes i pagaments que són materialitzats en diferents tipus d'actius. En aquest cas els fluxos que generen són les sortides del projecte de finançament. Part d'aquestes sortides revertiran posteriorment en el projecte de finançament per incrementar els capitals a satisfer per l'assegurador (ens trobem, doncs, amb un cost de capital fix al qual s'afegeix un altre de variable).

Si el projecte d'inversió té més valor que el projecte de finançament, la qual cosa equival a dir que el valor del conjunt de l'actiu és més gran que el del passiu, es manté l'equilibri, per tant, considerarem una condició necessària que aquest excedent de valor sigui zero o positiu durant tota la vigència de la cartera.

Sovint, però, **l'import de l'excedent en valor absolut no ens permet copsar la magnitud del risc que s'està assumint si es produeixen canvis en els tipus d'interès** emprats en les valoracions, **llavors creiem més acurat controlar no tant l'import de l'excedent sinó el diferencial (*spread*) de rendibilitat entre ambdós projectes**, d'inversió i finançament.

Aquesta variable de control és especialment necessària en el cas dels contractes a primes periòdiques on pot semblar que s'ha produït només un canvi relativament petit en l'excedent en valor absolut i si el comparem respecte al valor de la provisió observem que la incidència sobre la rendibilitat pot ser molt elevada.

És evident que aquesta incidència depèn també de la magnitud del canvi en els tipus d'interès i del moment del temps en què aquests es produeixin. No serà el mateix l'adaptació d'una cartera que estigui garantint un 6% que una altra al 4%; totes dues, d'acord amb el nou sistema de valoració de les provisions, hauran de ser actualitzades al 3,15% d'interès²⁵ per al tancament de l'any 2001.

²⁵ Tipus d'interès publicat al BOE del 26 de gener de 2001.

Com que les dades de les quals disposem ens ofereixen volum globals de provisions per al conjunt d'empreses del sector sense distingir el tipus d'interès garantit ni l'horitzó estimat de cada un dels contractes, mesurar l'efecte dels esmentats canvis esdevé impossible.

Per tant, el que proposem és el següent:

- D'una banda, demostrar que en alguns casos els criteris tradicionalment emprats no han calculat correctament la rendibilitat del projecte d'inversió conjunta que modelitza la cartera.
- D'altra, oferir estratègies alternatives que en una situació de volatilitat dels tipus d'interès ens permeti reduir els factors de risc (i, en conseqüència, els eventuais resultats desfavorables) encara que no puguem efectuar una quantificació precisa.

3. Estructuració del treball presentat

Per tal de desenvolupar els diferents conceptes que han aparegut en aquesta exposició preliminar i contrastar les tesis proposades hem estructurat el present treball en tres parts, cada una clarament diferenciada pel que fa a l'enfocament:

- **La primera part és essencialment metodològica i d'anàlisi normativa, metodològica** perquè s'hi modelitza l'assegurança de vida com un passiu al qual s'hi ha afegit un conjunt d'opcions (garantides per l'assegurador), algunes amb valor immediat i altres que iniciaran la seva vigència en el futur segons quina hagi estat l'evolució de diferents paràmetres; **normativa** ja que s'estudien les directives comunitàries i la legislació espanyola pel que fa a criteris de valoració, control de solvència i assignació de participació en guanys; **i també de segmentació de l'àmbit d'estudi** del present treball ja que es defineix la família d'assegurances objecte d'anàlisi presentant la forma de segmentar els fluxos generats en el seu vessant de risc i vessant d'estalvi, que es el que tractarem.
- **La segona part se centra en l'anàlisi del manteniment de la solvència financera** copsant com pot plantejar-se aquest objectiu des de diferents enfocaments. Bàsicament **es contraposen dues estratègies: una d'estàtica**, que parteix de l'existència a priori d'un tipus d'interès garantit prudent i cerca la immunització any a any de l'excedent (*surplus*) financer (demostrarem que aquesta estratègia presenta força limitacions) **i una altra de dinàmica** que analitza a priori la forma de determinar quin és el tipus a garantir i a posteriori quins són els aspectes que incideixen en l'obtenció d'un excedent financer per sobre d'aquest tipus garantit, però donant prioritat no al valor de l'excedent²⁶ en un any determinat sinó al conjunt de l'assegurança com un projecte d'inversió a llarg termini.
- **La tercera part se centra en dos aspectes:** d'una banda, en la discussió **sobre la forma d'aproximar i segmentar l'excedent financer** aconseguit en funció dels efectes induïts pel risc de preu, dels produïts pel risc de reinversió i dels eventuais *reshaping effects*, **controlant-lo mitjançant la variable de rendibilitat obtinguda, de l'altra en l'anàlisi dels diferents sistemes de participació en guanys**, en la qual es presenta una variant respecte el sistema tradicional, que

²⁶ Excedent entre el valor del conjunt de l'actiu i el del passiu una vegada ha estat calculada la provisió d'acord amb els criteris de valoració emprats.

usualment ha aplicat tot l'excedent com una prima única, i es proposa en lloc seu assignar només una part de l'excedent com a participació en guanys irrevocable creant amb la resta una reserva per compensar eventuais dèficits financers futurs. També hem cercat la forma de relacionar la nostra proposta amb la usualment emprada pels asseguradors espanyols, la qual cosa demostra que si no hi ha dèficit financer ambdós sistemes acaben atorgant el mateix capital final però que en cas de canvi sobtat dels tipus d'interès el sistema que proposem implica un risc financer molt inferior.

La primera part d'aquest treball consta de tres capítols.

En el primer presentem l'esmentada modelització de les assegurances de vida des de la perspectiva de la teoria d'opcions financeres, on constatem que és justament el fet d'assumir com a garant i gestionar certs riscos per part de l'assegurador el que dóna característiques específiques al seu passiu. La valoració del passiu esdevé més difícil d'obtenir que no pas la de l'actiu pel gran nombre d'opcions que aquell acostuma a incorporar (opcions sense preu explícit, amb pagament diferit i que sovint són exercides de forma no racional) i també pel fet de no disposar d'un mercat secundari organitzat que serveixi de referència donant liquiditat a l'assegurador.

El fet de modelitzar els diferents contractes de vida mitjançant opcions ens permetrà obtenir certes relacions de racionalitat econòmica entre el tipus d'interès garantit, la rendibilitat esperada dels actius que materialitzen les inversions de l'assegurador i la rendibilitat de l'actiu lliure de risc en cada un dels moments de vigència del contracte. Així podrem entendre millor l'estructura dels fluxos generats al final de cada període quan s'han d'exercir de forma automàtica opcions tipus *put* o tipus *call* amb preu d'exercici també estocàstic.

També remarquem en aquest capítol la importància que des de la perspectiva financera té el risc de tipus d'interès i que la seva incidència ha de analitzar-se observant l'evolució conjunta dels canvis de valor de l'actiu i passiu (de fet el preu d'exercici de les opcions incorporades al contracte és, entre altres, funció del tipus d'interès emprat en la valoració) i que la rendibilitat realment obtinguda cada any de la cartera d'assegurances és un instrument de control de l'equilibri financer global.

En el segon capítol analitzem la tercera directiva (comunitària) de vida i la legislació espanyola, tant l'anterior al moment d'aplicació de l'esmentada directiva com la posterior, i molt concretament **la disposició reglamentària de 1998.** Ens centrem en l'anàlisi dels aspectes financers remarcant la gran importància que es dóna en tota la normativa al risc d'inversió quan aquest és a

càrrec de l'assegurador així com la relació que s'estableix entre el valor de l'actiu i del passiu o provisió matemàtica.

L'obligatorietat, a partir del 31 de desembre de 1999, de valorar les provisions de forma dinàmica en funció de la rendibilitat vigent del deute de l'Estat ens acabarà duent a analitzar la triple relació que s'estableix entre el tipus d'interès emprat per calcular la provisió, la rendibilitat del deute de l'Estat i la rendibilitat de la resta d'actius (reals i virtuals) que materialitzen les inversions de l'assegurador.

Posem també èmfasi a analitzar les excepcions que respecte a la normativa general estableix el Reglament de 1998 i l'Ordre del Ministeri d'Economia i Hisenda de 23 de desembre de 1998, la qual desenvolupa criteris de càlcul de la provisió en funció no d'un actiu de referència sinó de la taxa interna de rendibilitat de les inversions si es compleixen requisits addicionals relacionats amb estratègies de casament de fluxos o d'equivalència de Duracions.

També comentem la gran llibertat de l'assegurat i l'assegurador per pactar la forma de càlcul del valor de rescat, atès que normativament només cal que la provisió sigui com a mínim igual o superior a aquest valor, així com per calcular la participació en guanys. Aquest darrer aspecte és molt important en aquest treball ja que ens permet demostrar que no hi hauria cap impediment legal per efectuar la implementació del sistema que més endavant presentarem.

En el tercer capítol definim clarament les característiques dels contractes d'assegurança que analitzarem detallant el procés per segmentar els fluxos del vessant de risc dels del vessant d'estalvi. Cal recordar que en aquest treball ens centrem exclusivament en l'anàlisi d'aquests darrers, que són els que permeten constituir un capital a venciment (per tant tindrem una provisió matemàtica sempre creixent) i que en conseqüència poden veure's més afectats pel risc d'inversió.

Finalment, en referència a les diferents formes d'assignar la participació en guanys, demostrarem que el sistema d'assignació escollit no és pas neutral des del punt de vista del risc de tipus d'interès, aquesta és, doncs, una eina que l'assegurador pot emprar com a element de modulació del risc atès que des del punt de vista normatiu ja hem comentat que disposa d'una quasi absoluta llibertat a l'hora de pactar un sistema o altre.

La segona part del treball, que gira al voltant del concepte de *solvència financera*²⁷, consta de dos capítols:

²⁷ Hem pres el nom del text "Financial Models of Insurance Solvency" publicat com a compendi de The first International Conference on Insurance Solvency, desenvolupat del 18 al 20 de juny de 1986 en la Wharton School (Universitat de Pennsilvània).

En el quart capítol introduïm el concepte de solvència estàtica i dinàmica així com les característiques específiques de la solvència estrictament financera. **En aquest capítol ens centrem en l'estàtica**, analitzant en primer lloc les diferents metodologies de valoració del passiu i la gran incidència que té aquest valor per controlar quantitativament tant la solvència estàtica com la dinàmica.

Per tal de relacionar els efectes que provoca un canvi en els tipus d'interès del mercat d'actius i la seva correlació amb el tipus a emprar en la valoració del passiu (que tradicionalment es representa pel valor de la provisió matemàtica) definirem el concepte de Duració de la provisió i demostrarem que si es modifica el tipus d'interès que s'ha d'emprar en el seu càlcul aquesta Duració és una mesura relativa (aproximada) del risc de canvi del seu valor comptable, la qual cosa incideix, doncs, també en la rendibilitat aconseguida a final d'any.

També relacionarem el valor de la Duració de la provisió respecte el valor de la Duració de l'actiu per intentar cercar de forma aproximada les condicions per immunitzar l'excedent financer quan un canvi en els tipus d'interès afecti ambdós vessants.

Copsarem després les limitacions que comporta adoptar una estratègia d'immunització (relacionada amb el risc de preu) si es vol efectuar un enfocament realment dinàmic i a llarg termini de la solvència. Demostrarem que en el cas d'un contracte de vida a primes periòdiques cercar la immunització de l'excedent no és una estratègia adequada.

Constatem, doncs, la necessitat de cercar una altra funció, diferent del valor de l'excedent, que permeti augmentar la possibilitat de mantenir la solvència dinàmica durant tota la vida del contracte de forma que ens permeti efectuar una anàlisi plurianual, és a dir, no limitada a un únic exercici comptable ni a una oscil·lació puntual del valor dels actius i passius quan canvien els tipus d'interès.

És en el cinquè capítol on presentem l'assegurança de vida de forma dinàmica com un projecte agregat d'inversió a llarg termini on per la cartera de contractes de la mateixa classe que administra l'assegurador s'ha d'obtenir un valor final zero (o positiu). El projecte agregat és la unió d'un projecte de finançament, en el qual considerarem com a entrades els fluxos que l'assegurat aporta com a primes i com a sortides els pagaments que haurà d'efectuar l'assegurador, i d'un projecte d'inversió mitjançant el qual l'assegurador materialitzarà els fluxos del projecte de finançament.

En el projecte de finançament entrades i sortides han de relacionar-se en funció del tipus d'interès garantit (per tant, el cost del projecte de finançament ha de ser conegut) mentre que el projecte d'inversió haurà de generar els fluxos *ordinaris* previstos per satisfer el cost financer del projecte de finançament més

uns fluxos financers addicionals a repartir entre l'assegurat i l'assegurador²⁸. Així doncs, una decisió prèvia (i molt important) a l'obtenció dels fluxos *ordinaris* és la fixació de quin és el tipus que cal garantir al contracte.

Ens trobarem en disposició d'efectuar una estimació aproximada d'aquest tipus en funció del valor que prenguin diversos paràmetres en un moment determinat i de la previsió que es faci de la rendibilitat futura de les inversions. Demostrarem que el criteri emprat per determinar aquest tipus d'interès garantit no és contradictori amb la normativa espanyola (analitzada en el capítol anterior) ja que les hipòtesis implícites d'aquesta són les mateixes que les que hem considerat en el treball.

El criteri de fixació del tipus d'interès garantit és fruit d'una aproximació a priori d'un valor final de la cartera d'assegurances zero o positiu, però a posteriori aquest valor pot evolucionar respecte a les previsions efectuades. Per tant, com a complement de l'estimació a priori també discutirem els possibles criteris de control de l'esmentat valor a posteriori, projectant aquest valor a venciment d'acord a les noves hipòtesis i contrastant si es manté l'equilibri.

Considerarem el valor final estimat com una variant dins dels mètodes de *profit testing* (malgrat que estem emprant un valor final enlloc d'un valor actual) i constatarem que la proposta que efectuem s'adiu perfectament amb les anàlisis de tipus estàtic que estan emprant els asseguradors en l'actualitat alhora que presenta avenços (des de la vessant dinàmica) ja que permet incorporar aspectes que incideixen en el risc financer (com el tipus d'interès previst per a les reinversions) que fins ara no s'havien analitzat globalment.

Ara bé, una vegada s'hagi constatat que l'excedent obtingut cada any és només **una estimació prendrà ple sentit l'objectiu de la tercera part** del treball, que és **la discussió des d'una perspectiva innovadora de quina és la millor forma d'estimar l'excedent, determinar l'extrarendibilitat que aquest implica i com repartir aquesta extrarendibilitat aproximada creant alhora una reserva de valor que garanteixi la solvència futura.**

La tercera part²⁹ consta també de dos capítols.

En el capítol sisè analitzem els efectes sobre la rendibilitat aconseguida de diferents factors de risc. Proposem com a mesura per determinar aquesta rendibilitat una variant del model de Ho *et al.* (1995) que permet analitzar de forma separada els efectes del risc de preu i els previsibles efectes del risc de

²⁸ Amb la modelització d'opcions efectuada, on l'assegurador rep el preu de forma diferida, és condició necessària (però no suficient) que es produeixin excedents financers addicionals.

²⁹ On s'efectuen la majoria d'aportacions pròpies, la qual cosa justifica que no hi hagi quasi cap referència a altres autors.

reinversió emprant com a factors de risc tant la Duració de l'actiu com la Duració del passiu.

Aquesta variant ens permet subdividir la rendibilitat anual aconseguida en una part implícita i una altra d'explícita, i aquesta darrera consta de tres components; una fruit del mer pas del temps, una altra de totalment aleatòria (canvis en el valor dels diferents actius al marge de l'evolució del tipus d'interès de referència) els efectes de la qual suposem que poden compensar-se a llarg termini, i una darrera, de directament relacionada amb la tendència dels tipus d'interès; la qual, si és persistent al llarg del temps (com en els darrers anys), no pot ser compensada.

Aquesta forma de dividir la rendibilitat obtinguda va ser presentada al Third International Congress on Insurance³⁰ on vam comentar que la presumible compensació dels resultats de la part aleatòria quedava pendent per un estudi posterior. En aquest treball ens centrem en la primera (pas del temps) i la darrera component (canvis de tipus d'interès que incideixen alhora en l'actiu i el passiu).

Cercarem, doncs, una expressió per fitar la rendibilitat aconseguida i després relacionarem l'expressió general aconseguida amb el cas particular que representa el sistema tradicional emprat pels asseguradors espanyols fins el 1999 i també el que representa la interpretació de la normativa de la tercera directiva.

A continuació veurem que sempre subsisteix un risc de reinversió i analitzarem les condicions que permeten minimitzar-lo, la qual cosa ens durà a redefinir els diferents fluxos del projecte d'inversió i finançament proposant el repartiment de l'excedent respecte a una base diferent de la provisió matemàtica del contracte que ha estat el criteri tradicionalment emprat.

Concretament en aquest capítol és on, **per minimitzar el risc de reinversió, demostrarem els avantatges de passar del sistema tradicional**, on d'una banda es consideraven només els actius corresponents a les primes ja percebudes (que denominarem actius reals) i la provisió matemàtica es considerava sinònim de passiu del contracte, **a un altre enfocament on considerarem com a actius la suma dels reals més les primes pendents** (que denominarem actius virtuals).

En el capítol setè ens centrarem en els sistemes de participació en guanys i analitzarem el sistema tradicional versus el que proposem en el treball. Aquesta comparació s'efectua còpsant les hipòtesis implícites d'ambdós sistemes i identificant les diferències conceptuals que representa assignar tot l'excedent com una nova prima única o bé aplicar només una part a aquesta finalitat dotant

³⁰ En l'article "Interest rate convergence in the Euro zone and its implications on the life insurance sector: the Spanish case"; Jordi Celma i César Villazón, Londres, 1999.

amb la resta una reserva de valor que permet disminuir el risc de dèficits financers en el futur.

Des d'una perspectiva metodològica discutirem la contradicció que representa que en un contracte a primes periòdiques, on l'assegurat té el dret a interrompre voluntàriament les seves aportacions, la participació en guanys se li acrediti de forma irrevocable com una prima única. Proposarem mantenir la coherència fent l'assignació com un conjunt de primes periòdiques i demostrarem que si no hi ha cap any en què la rendibilitat real se situï per sota de la garantida ambdós sistemes acaben oferint un capital final equivalent.

Contràriament demostrarem que en cas d'un canvi sobtat en els tipus d'interès l'assignació com un conjunt de primes periòdiques (de les quals només la primera és irrevocable) té un risc financer força inferior a l'assignació tradicional com a prima única.

Si aquesta demostració és vàlida de forma genèrica (sigui quin sigui el canvi sofert per l'estructura de tipus d'interès) quedarà contrastat l'avantatge del sistema que proposem respecte al tradicional, ja que abans haurem demostrat que aquest ha estat sovint generós durant els anys en que ha estat vigent.

Finalment raonarem com encara que tan sols s'hagués actuat en l'àmbit del repartiment de l'excedent, emprant el sistema de participació en guanys que desenvoluparem, l'impacte que pot suposar el nou sistema de càlcul de provisions (vigent a partir del desembre de 1999) seria molt més reduït.

Primera Part

Metodologia, anàlisi normativa i segmentació del contracte estudiat

Capítol 1

Els riscos financers, metodologia de l'anàlisi

When an insurer engages in risk insurance he sells his clients put options for different elements of their assets at strike prices which depend on the scope of the coverage

A. Laurent (Insurance in the light of Financial Theory and Innovation)

El negoci de les assegurances de vida té un important component financer ja que l'assegurador percep, en general, per endavant uns capitals financers (les primes) que gestiona amb la finalitat d'atendre diferents pagaments futurs condicionats al fet que succeeixin determinats esdeveniments pactats contractualment.

Les característiques d'aquest component financer han estat estudiats amb profunditat i en l'actualitat disposem d'estats de la qüestió que ens permeten identificar clarament les diferents classes de riscos que la seva gestió comporta per a l'assegurador. No hi ha, però, unanimitat en la forma de gestionar-los; ens trobem, doncs, amb diverses metodologies d'anàlisi sense que cap no hagi demostrat la seva superioritat respecte a les altres.

Hem dividit el present capítol en tres parts, en la primera part modelitzem les assegurances fent explícit el cost de les opcions com si aquestes fossin negociables en un mercat financer, en la segona les modelitzem de forma que l'assegurador actui realment de garant cercant un equilibri que s'adigui amb la realitat quotidiana del mercat espanyol i en la tercera analitzem el problema de la seva valoració versus el risc de tipus d'interès.

1. LES ASSEGURANCES DE VIDA DES DE LA PERSPECTIVA DE LA TEORIA FINANCERA

Compartim l'opinió de Laurent (1998) quan de forma genèrica considera que el negoci d'assegurances recapta fons d'accionistes i assegurats que s'inverteixen en diferents actius. La diferència entre el que s'obté com a rendibilitat dels actius menys el cost del passiu (hi incloem les provisions dels assegurats¹ de vida) es destina a cobrir despeses d'intermediació, remunerar els accionistes i satisfer els pagaments pactats, però no tots els creditors tenen el mateix dret de cobrament preferent.

Amb aquest rerafons de drets preferents Loubergé (1998) va definir un contracte d'assegurança com el dret a un pagament condicionat adquirit per l'assegurat i garantit per l'assegurador. Com que els assegurats tenen dret preferent de cobrament (per davant dels accionistes) sobre els actius de l'empresa, es pot considerar que el que fa l'assegurador es assignar part d'aquests actius com la garantia dels compromisos adquirits amb aquells.

Per tant, acceptarem que a la inversió feta amb les primes dels assegurats s'afegeixen d'altres actius del propi assegurador amb la finalitat d'oferir una cobertura similar a la que aconseguiria l'assegurat *comprant* opcions de venda (*put*) de forma que es pogués garantir a cada moment el cobrament del capital pactat.

L'assegurador tindria, doncs, la funció d'actuar de garant d'una opció implícita mentre que seria l'assegurat qui la *compraria* i hauria de pagar el preu corresponent. Després analitzarem com les assegurances de vida no es limiten a incorporar una única opció. Així, junt amb la garantia de tipus d'interès és usual trobar-nos amb diversos sistemes de distribució de *bonus* (com a participació en guanys) o amb la possibilitat de rescatar el contracte de forma anticipada.

Totes aquestes opcions tenen un valor econòmic, per tant, haurien d'oferir d'una banda un ingrés per a l'assegurador i d'altra uns pagaments esperats, l'equilibri entre ambdues vessants pot comportar un possible risc per a la seva solvència futura, risc que es materialitzaria a mesura que les diferents opcions s'exercissin.

Sembla, doncs, redundant afirmar que aquestes opcions haurien d'haver estat correctament valorades i comptabilitzades però històricament no ha estat així. Potser perquè en el moment d'emetre el contracte es trobaven molt *out of money* i el seu valor era força reduït o potser també perquè hi ha mancances en les eines analítiques de valoració emprades.

¹ En endavant considerarem que recau en la mateixa persona la figura del contractant i l'assegurat.

Cal però no oblidar que el desencadenant (*main trigger*) dels problemes dels asseguradors de vida als Estats Units en la dècada dels vuitanta, com comenten Grosen i Jorgensen (1999), va ser la reducció de la rendibilitat que podien aconseguir de les noves inversions en actius passant llavors les opcions d'estar *out of the money* a *in the money*,² moment en el qual l'exercici de les opcions perjudicaria el garant, o sigui, l'assegurador.

Creiem que aquesta explicació és un xic simplista ja que no sempre una reducció del tipus de reinversió fa reduir el valor dels actius de forma que les opcions entrin en situació de diner. Hi ha altres aspectes que caldria considerar, alguns de quantitativs (sobre els quals parlarem a continuació) i altres de qualitativs, però no menys importants.

Un dels aspectes qualitativs, com indica Boulier (1996), és que les opcions incorporades a les assegurances de vida són força peculiars perquè els assegurats no sempre les exerceixen quan *racionalment* és previsible³. Aquest aspecte tindrà una importància cabdal quan analitzem la incidència del nombre de rescats en un any determinat.

El que resulta inqüestionable és que l'assegurador gestiona tant actius com passius i pel que fa al vessant d'aquests darrers hi ha incorporades unes determinades opcions que poden ser analitzades conceptualment però, com ara veurem, són molt difícils de valorar.

Podem afirmar, però, amb rotunditat que l'assegurança de vida és un producte financer estructurat on les característiques diferenciadores es troben bàsicament en la *definició*⁴ que l'assegurador fa del passiu ja que les inversions en actius que efectuarà són semblants a les que fan altres intermediaris financers.

1.1 La modelització del passiu com un conjunt d'opcions

Els primers treballs que van analitzar les opcions incorporades als contractes de vida, com és el cas de Brennan i Schwartz (1976) o Boyle i Schwartz

² Com després veurem, el preu d'exercici de l'opció és funció del temps transcorregut i del tipus d'interès garantit, si el valor de l'actiu no segueix aquesta evolució l'opció pot quedar dins de la posició de diner.

³ Hi ha també altres opcions que no sempre són exercides de forma racional, es troba comentat a Celma (1995 b).

⁴ És el mateix assegurador, quan decideix comercialitzar un producte, qui decideix quina serà l'estructura del passiu.

(1977), van considerar en el seu model únicament el fet de garantir un tipus d'interès durant tota la vida del contracte, i van considerar l'opció de tipus europeu ja que analitzaven assegurances a prima única (sense noves aportacions dels assegurats) sense dret de rescate i que només s'exercien a venciment.

Aquests estudis⁵ acceptaven de forma implícita que l'assegurat pagava explícitament l'opció corresponent i obtenia la garantia de tipus d'interès promesa, no analitzaven si era l'assegurador amb els seus propis recursos qui garantia l'opció o bé si el garant era un tercer que percebia la prima corresponent.

D'acord amb aquest enfocament, en un moment $t = 0$ l'assegurador adquireix una cartera d'actius amb valor A_0 que es finança amb primes d'assegurances de vida per un valor igual a L_0 .

Sense considerar la correcció sobre el nombre de contractes en vigor corresponent a la mortalitat o els rescats i admetent que el tipus d'interès garantit és r , sent aquest constant durant la vigència del contracte fins al moment T , el capital garantit X , que té també el sentit del preu d'exercici de l'opció, serà:

$$X = L_0 \cdot e^{rT},$$

i l'excedent financer obtingut amb aquesta operació d'inversió seria:

$$A_T - A_0,$$

Sent A_T el valor de l'actiu subjacent en el moment d'exercici T .

L'aportació de Brennan i Schwartz feia referència a la valoració d'una assegurança vinculada (l'assegurat tenia dret sobre el valor de l'actiu) però amb garantia mínima de tipus d'interès; si representem per L_T el valor (aleatori) que realment percep l'assegurat en T , aquest seria el màxim entre el subjacent o bé el valor d'exercici, és a dir:

$$L_T = \max [A_T, L_0 \cdot e^{rT}] \quad (1.1.1)$$

Aquest valor també el podem així:

$$L_T = L_0 \cdot e^{rT} + \max [A_T - L_0 \cdot e^{rT}, 0] \quad (1.1.2)$$

o, de forma alternativa, per:

$$L_T = A_T + \max [L_0 \cdot e^{rT} - A_T, 0] \quad (1.1.3)$$

⁵ Que consideren una distribució lognormal del valor del subjacent.

on, com es pot comprovar a qualsevol text dedicat a opcions financeres:

$\max [A_T - L_0 \cdot e^{rT}, 0]$ és el flux (*payoff*) d'una opció *call* europea i, on

$\max [L_0 \cdot e^{rT} - A_T, 0]$ és el flux (*payoff*) d'una opció *put* també europea.

Per analitzar el valor en el moment zero dels fluxos que percebrà l'assegurat el que farem serà calcular el valor actual de les expressions (1.1.2) i (1.1.3) actualitzant els fluxos a la rendibilitat lliure de risc (que denominarem i), i obtenint, respectivament:

$$V_0[L_T] = V_0[L_0 \cdot e^{rT}] + V_0[\max [A_T - L_0 \cdot e^{rT}, 0]]$$

i per a la segona expressió:

$$V_0[L_T] = V_0[A_T] + V_0[\max [L_0 \cdot e^{rT} - A_T, 0]]$$

on:

- $V_0[\max [A_T - L_0 \cdot e^{rT}, 0]]$ representa el valor actual dels fluxos esperats per a una *call* europea i, per tant, ha de ser financerament equivalent a la prima que cal pagar per aquesta opció, a la qual denominarem C_E .
- $V_0[\max [L_0 \cdot e^{rT} - A_T, 0]]$ representa el valor actual dels fluxos esperats per a una *put* europea, també financerament equivalent a la prima que s'ha de pagar per aquesta opció, a la qual denominarem P_E .

Llavors, el valor que percep l'assegurat en contractar una assegurança amb garantia de tipus d'interès a canvi de la seva prima única és el valor actual de (1.1.2) o de (1.1.3), és a dir, respectivament:

$$Vo[L_T] = Vo[L_0 \cdot e^{rT}] + C_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i] \quad (1.1.4)$$

o bé:

$$Vo[L_T] = Vo[A_T] + P_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i]. \quad (1.1.5)$$

Com que, sense entrar a considerar cap mena de despesa,

- el valor actual de l'import a percebre per l'assegurat ha de ser igual a l'aportació que ell fa (prima única) que hem denominat L_0 , i
- $Vo[L_0 \cdot e^{rT}]$ és el valor actual del preu d'exercici de l'opció, és a dir: $L_0 \cdot e^{rT} \cdot e^{-iT}$,

llavors l'equivalència financera entre la prima aportada per l'assegurat pot ser reescrita a partir de l'expressió (1.1.4), de la manera següent:

$$L_0 = L_0 \cdot e^{rT} \cdot e^{-iT} + C_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i]. \quad (1.1.6)$$

Això ens indica que l'aportació de l'assegurat li atorga el dret a percebre amb una part de la prima el preu d'exercici d'una opció (d'igual import al capital garantit) i a més a més compra una opció *call* que li permetrà accedir a un *bonus* (una extrarendibilitat) quan el valor dels actius ultrapassi el preu d'exercici esmentat.

Si aquesta expressió la reescrivim a partir de la (1.1.5) en lloc de la (1.1.4) resulta:

$$L_0 = Vo[A_T] + P_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i]. \quad (1.1.7)$$

Aquesta expressió ens indica també que la prima de l'assegurat pot interpretar-se com una inversió en actius amb risc més la compra d'una opció *put* sobre els valors d'aquests actius de la qual serà garant l'assegurador.

Aquesta doble interpretació s'adiu perfectament amb la relació de paritat entre el preu d'una opció *call* i una opció *put* (la podem trobar a qualsevol manual) que afirma que el valor actual del preu d'exercici més el cost d'una *call* és igual al valor actual de l'actiu subjacent més el preu d'una *put*.

En les expressions anteriors han aparegut dos tipus d'interès (i , r), el primer correspon a la rendibilitat lliure de risc (suposadament coneguda) i el segon a la rendibilitat garantida al contracte d'assegurança. També es considera que l'assegurat ha de satisfer de forma explícita el preu de les opcions.⁶

⁶ Més endavant veurem que no sempre és necessari.

1.2 Interpretació de la modelització d'opcions amb preu explícit

Devolder (1991) analitza⁷ la relació usual entre ambdós tipus d'interès considerats en l'epígraf anterior i considera aconsellable que en el moment de contractació $r < i$.⁸

També demostra a partir d'una expressió anàloga a (1.1.7) que quan l'assegurador garanteix un tipus inferior a la rendibilitat lliure de risc i actualitza els fluxos esperats de l'opció al tipus garantit està rebent un recàrrec respecte al preu teòric que hauria de percebre si hagués emprat en la valoració la fórmula de Black-Scholes.

L'equilibri teòric respecte a la valoració de Black-Scholes s'aconsegueix quan el tipus d'interès garantit al contracte és idèntic a la rendibilitat lliure de risc ($r = i$), sempre que aquest equilibri es mantingui durant tota la vigència del contracte.

Devolder també demostra⁹ que si la desigualtat és del tipus $r > i$ l'assegurador tindria un resultat esperat negatiu una vegada hagués pagat a un tercer el preu que ha rebut per l'opció (valorada d'acord amb Black-Scholes), la qual cosa és important des del punt de vista de la solvència futura.

Sorgeixen, doncs, diverses qüestions sobre aquesta modelització:

- Realment externalitzen els asseguradors les opcions incorporades als contractes?
- Si no ho fan, com gestionen els recursos necessaris per atendre els pagaments que es puguin produir?
- Encara que inicialment $r < i$, si una assegurança és a primes periòdiques i , per tant, hi ha més opcions al marge de la primera prima (que és l'única fins ara valorada) hi ha garantia que en anys posteriors les desigualtats continuïn sent del mateix signe?
- Si inicialment $r < i$, el recàrrec que inicialment rep l'assegurador servirà per compensar dèficits posteriors?

⁷ Es pot veure desenvolupat a la pàgina 206.

⁸ Aquesta afirmació és versemblant en el moment de la contractació de l'assegurança, el problema és que es mantingui la desigualtat en anys posteriors.

⁹ Es pot veure desenvolupat a Devolder *op. cit.*, pàgina 208.

Cal, doncs, analitzar si realment els asseguradors cobren el preu de les opcions o contràriament no el reben de forma explícita perquè tenen altres compensacions econòmiques equivalents, com l'esmentat recàrrec.

També cal analitzar si realment les opcions són de tipus europeu o americà i si el preu d'exercici és de tipus determinista (en funció del tipus d'interès garantit) com s'ha considerat fins ara o bé depèn d'altres aspectes aleatoris com el valor de la provisió matemàtica al final de cada any natural.

2. MODELITZACIÓ DE LES OPCIONS AMB RESTRICCIÓ DE RECURSOS I SENSE PREU EXPLÍCIT

Posteriorment, han aparegut noves aportacions teòriques que efectuen altres enfocaments, ja sigui incloent-hi la valoració del rescab (opció de tipus americà) o bé considerant la possibilitat d'atorgar participacions en guanys sobre part de l'extrarendibilitat aconseguida.

Podem destacar els treballs de Brennan (1993), Bris i de Varenne (1997), Grosen i Jorgensen (1997), Miltersen i Person (1998) o Grosen i Jorgensen (1999). Una aportació força interessant és el fet de considerar, com fan Bris i de Varenne, que l'assegurador gestiona internament les opcions i té recursos limitats (apreciació força realista), per tant, la garantia de tipus d'interès atorgada a l'assegurat es troba condicionada pel valor dels seus actius.

2.1 Preu explícit amb recursos limitats

En aquest cas l'enfocament (també per a una opció de tipus europeu) seria que en un moment $t = 0$ l'assegurador adquireix una cartera d'actius amb valor igual a A_0 que es finança amb recursos propis per a un valor E_0 i amb un import de primes de vida igual a L_0 . Amb aquests recursos s'haurà d'atendre, si s'escau, els pagaments derivats de l'exercici de les opcions.

$$\text{Per tant: } A_0 = E_0 + L_0,$$

$$\text{llavors s'estableix la relació: } L_0 = \mathbf{a} \cdot A_0 \quad \text{i} \quad E_0 = (1 - \mathbf{a}) \cdot A_0$$

i si s'admet que el tipus d'interès garantit continua sent r , també constant durant la vigència del contracte fins al moment T , el capital garantit (també preu d'exercici de l'opció) serà:

$$L_T(r) = L_0 \cdot e^{rT}$$

sent l'excedent financer total obtingut:

$$A_T - A_0.$$

D'aquest excedent la part sobre la qual tindrà dret l'assegurat serà exclusivament $\mathbf{a} \cdot (A_T - A_0)$ ¹⁰.

¹⁰ Si se li atorgués, com feien Brennan i Schwartz (perquè suposaven que s'havia pagat una prima explícita per l'opció) un 100% de l'excedent obtingut.

Però és habitual que l'assegurador atorgui a l'assegurat una participació en guanys \mathbf{d} (inferior al 100%) sobre l'excedent, llavors, el valor d'aquesta participació o *bonus* seria o bé zero o bé el nivell de participació en guanys atorgat sobre la part de l'excedent que correspongui a l'assegurat. És a dir:

$$B_T = \max \left[\mathbf{d} \cdot (\mathbf{a} \cdot (A_T - A_0) - (L_0 \cdot e^{rT} - L_0)), 0 \right].$$

Però com que abans hem establert la relació: $L_0 = \mathbf{a} \cdot A_0$, substituint aquesta en l'expressió anterior, el valor del *bonus* resulta que és:

$$B_T = \mathbf{d} \cdot \max \left[\mathbf{a} \cdot A_T - L_0 \cdot e^{rT}, 0 \right]. \quad (2.1.1)$$

Fins ara hem modelitzat només el valor del *bonus*, ara generalitzarem el valor de la percepció global segons quin sigui el valor dels actius.

Així si representem per L_T el valor que realment percep l'assegurat en T , **les diferents situacions possibles són:**

- En el cas més desfavorable ni tan sols amb tots els actius (dels assegurats més els dels accionistes) es podrà atendre el capital garantit, llavors, en aquesta situació de fallida de l'assegurador, l'assegurat percebrà:

$$L_T = A_T \quad \text{si} \quad A_T < L_0 \cdot e^{rT}.$$

- Pot ser, però, que, encara que amb la part d'actius dels assegurats no hi hagi suficient per satisfer el capital garantit, afegint-hi part d'actius dels accionistes sí que sigui possible rebre el capital garantit. Llavors:

$$L_T = L_0 \cdot e^{rT} \quad \text{si} \quad L_0 \cdot e^{rT} \leq A_T < \frac{L_0 \cdot e^{rT}}{\mathbf{a}}.$$

- Pot ser (matemàticament possible) que el valor dels actius dels assegurats coincideixi amb el capital garantit, llavors també es rep aquest import:

$$L_T = L_0 \cdot e^{rT} \quad \text{si} \quad A_T = \frac{L_0 \cdot e^{rT}}{\mathbf{a}}.$$

- Finalment, la situació més favorable es produeix quan el valor dels actius dels assegurats excedeix el capital garantit i llavors aquests a més a més reben també un *bonus*, per tant:

$$L_T = L_0 \cdot e^{rT} + B_T \quad \text{si} \quad \frac{L_0 \cdot e^{rT}}{\mathbf{a}} < A_T .$$

L'expressió del valor d'aquest darrer *bonus* ja l'hem obtingut abans.

Així, de forma globalitzadora podem afirmar que en general l'assegurat rebrà:

$$L_T = \min [A_T, L_0 \cdot e^{rT}] + B_T . \quad (2.1.2)$$

Aquesta expressió es pot escriure també:

$$L_T = A_T - \max [A_T - L_0 \cdot e^{rT}, 0] + B_T . \quad (2.1.3)$$

Després de substituir el valor del *bonus* per l'expressió (2.1.1) abans obtinguda podem reescriure l'import que l'assegurat pot rebre en el moment T de la manera següent:

$$L_T = A_T - \max [A_T - L_0 \cdot e^{rT}, 0] + \mathbf{d} \cdot \max [\mathbf{a} \cdot A_T - L_0 \cdot e^{rT}, 0] . \quad (2.1.4)$$

Si ara considerem el valor actual de l'expressió (2.1.4) actualitzant els fluxos a la rendibilitat lliure de risc, obtenim:

$$V_0[L_T] = V_0[A_T] - V_0[\max [A_T - L_0 \cdot e^{rT}, 0]] + \mathbf{d} \cdot V_0[\max [\mathbf{a} \cdot A_T - L_0 \cdot e^{rT}, 0]]$$

on:

- $V_0[\max [A_T - L_0 \cdot e^{rT}, 0]]$ representa el valor actual dels fluxos esperats per a una *call* europea que hem denominat C_E .
- $V_0[\max [L_0 \cdot e^{rT} - A_T, 0]]$ representa el valor actual dels fluxos esperats per a una *put* europea que hem denominat P_E .

Llavors el valor actual del que percebrà l'assegurat, que per equivalència financera haurà de ser igual a la prima aportada, serà:

$$L_0 = V_0[A_T] - C_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i] + \mathbf{d} \cdot C_E[\mathbf{a} \cdot A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i] . \quad (2.1.5)$$

Si a partir de l'expressió (2.1.5) considerem un cas extrem, per exemple una participació en guanys màxima o del 100% i una limitació màxima dels recursos propis de l'assegurador, hauríem de fer, respectivament:

- $d = 1$ per a la participació del 100%
- i també $a = 1$ perquè tots els actius han estat “comprats” amb recursos de l'assegurat.

Llavors, l'expressió (2.1.5) resultaria ser:

$$L_0 = Vo[A_T] - C_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i] + C_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i] = Vo[A_T]. \quad (2.1.6)$$

Si comparem aquesta darrera expressió (2.1.6) amb l'expressió (1.1.7) amb recursos il·limitats, que era:

$$L_0 = Vo[A_T] + P_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i],$$

ens adonem que per a l'assegurat afirmar que una assegurança equival a haver fet una inversió en actius amb risc però protegits amb una opció *put* no sempre és certa ja que la versemblança d'aquesta afirmació depèn clarament de la quantia de recursos propis que també hagi invertit l'assegurador o bé que hagi externalitzat la garantia de l'opció.

Resulta, però, obvi que el més freqüent sigui una situació intermèdia on no hi hagi recursos il·limitats de l'assegurador ni tampoc que aquests recursos siguin iguals a zero. En aquesta situació l'equilibri dependrà del tipus d'interès garantit considerat (que incideix en el preu d'exercici de les opcions), del valor de participació en guanys considerat així com de la relació existent entre els recursos propis de l'assegurador i les primes aportades per l'assegurat.

Els autors **Bris i de Varenne** afirmen que el tipus d'interès garantit en el contracte d'assegurança no pot ser calculat explícitament a partir de les expressions anteriors i consideren aquest com una dada que ofereix l'assegurador. A partir d'aquest supòsit determinaren quin ha de ser el nivell de participació en guanys per tal que ni els accionistes atorguin subsidis als assegurats ni viceversa.

Per fer-ho considerem que és conegut el valor actual dels actius invertits, és a dir:

$$Vo[A_T] = A_0$$

i que les primes dels assegurats representen una part coneguda a del total d'actius i per tant:

$$Vo[L_T] = a \cdot A_0.$$

Llavors, substituint les anteriors expressions en (2.1.5) resulta:

$$\mathbf{a} A_0 = A_0 - C_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i] + \mathbf{d} \cdot C_E[\mathbf{a} \cdot A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i]. \quad (2.1.7)$$

I com que:

$$\mathbf{d} \cdot C_E[\mathbf{a} \cdot A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i] = \mathbf{d} \cdot \mathbf{a} \cdot C_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i]$$

si simplifiquem (2.1.7) obtenim:

$$(1 - \mathbf{a}) \cdot A_0 = (1 - \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}) \cdot C_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i]. \quad (2.1.8)$$

I, per tant, aïllant el valor de la participació en guanys resulta:

$$\mathbf{d} = \frac{C_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i] - (1 - \mathbf{a}) \cdot A_0}{\mathbf{a} \cdot C_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i]}. \quad (2.1.9)$$

Aquesta expressió permet obtenir la participació en guanys que cal atorgar en funció del preu de les opcions *call* i de la part dels recursos dels assegurats respecte al total de recursos invertits per l'assegurador.

2.2 La modelització del passiu amb cost nul de les opcions

Hem comprovat com, en general, el tipus d'interès garantit en el contracte d'assegurança es considera una dada exògena a la modelització del passiu mitjançant opcions. **Aquesta interpretació creiem que és inadeguada ja que no copsa correctament la realitat, atès que la decisió sobre aquest interès té una gran importància a llarg termini i incideix en el preu d'exercici de les opcions.**

Quan l'assegurador ha decidit garantir un tipus per una cartera de contractes ja no el pot modificar durant tota la seva vigència; sembla, doncs, que la modelització amb opcions *aparegui* a posteriori d'aquesta decisió i, per tant, no permeti una gestió global del contracte d'assegurança. En efecte, quan ja s'ha decidit quin és el tipus d'interès garantit l'assegurador disposa d'un marge de maniobra quasi nul.

D'acord amb les expressions abans obtingudes, i observant (2.1.8), l'assegurador només tindria capacitat per modificar el nivell de participació en guanys però com que aquest no pot ser negatiu no hi ha garantia suficient de poder mantenir l'equilibri financer en el futur. A més a més sembla molt difícil que des del punt de vista comercial l'assegurat pogués acceptar que una de les variables que cal considerar en la determinació de l'esmentada participació fos

la part de recursos propis de l'assegurador respecte el total invertit, que hem representat per $(1 - \mathbf{a})$.

D'altra banda, malgrat que des d'una perspectiva de solvència els recursos propis de l'assegurador són importants, des d'una perspectiva de gestió financera creiem que l'equilibri s'hauria d'obtenir al marge seu, és a dir, considerant exclusivament les aportacions de l'assegurat. Aquest equilibri hauria de considerar la forma de determinar el tipus d'interès garantit en el contracte i el criteri de determinació de la participació en guanys.

Per tant, d'ara en endavant,

- defugirem de considerar el tipus garantit com una informació exògena i
- analitzarem la rendibilitat que s'obté dels recursos que aporta l'assegurat sense entrar en la casuística de si els recursos de l'assegurador són il·limitats o no.¹¹

Com que volem seguir atorgant a l'assegurat la garantia de poder percebre el capital pactat al contracte però sense comprometre recursos de l'assegurador només ho podem fer reduint la participació en guanys dels anys en què hi hagi superàvit i aconseguint que el valor actual del total de fluxos esperats (positius i negatius) sigui igual a zero.

Llavors ens situarem en una posició intermèdia entre la proposta de Brennan i Schwartz i la de Bris i de Varenne; per fixar l'equilibri no considerarem els recursos de l'assegurador¹²; per tant, en disposar únicament de les aportacions de l'assegurat considerarem el cas d' $\mathbf{a} = 1$ però admitem una participació en guanys inferior al 100%.¹³

D'acord amb aquest criteri, els fluxos que ha de percebre contractualment l'assegurat en les diferents situacions possibles seran:

- $L_T = L_0 \cdot e^{rT}$ si $A_T < L_0 \cdot e^{rT}$.

Però en aquest cas l'assegurador tindrà un dèficit puntual que, en no voler comprometre recursos propis, s'hauria de poder compensar amb altres superàvits.

¹¹ Considerem que al marge que l'assegurador tingui recursos suficients l'equilibri entre els fluxos esperats de les opcions ha d'oferir a l'assegurador un saldo nul.

¹² Ells implícitament els consideraven il·limitats.

¹³ Situació usual en el mercat espanyol.

$$\bullet \quad L_T = L_0 \cdot e^{rT} \quad \text{si} \quad A_T = L_0 \cdot e^{rT} .$$

En aquest cas ens trobem en una situació d'equilibri:

$$\bullet \quad L_T = L_0 \cdot e^{rT} + \mathbf{d} \cdot (A_T - L_0 \cdot e^{rT}) \quad \text{si} \quad L_0 \cdot e^{rT} < A_T .$$

si \mathbf{d} és el nivell de participació en guanys atorgat, aquesta darrera expressió pot escriure's també així:

$$\bullet \quad L_T = A_T - (1 - \mathbf{d}) \cdot A_T + (1 - \mathbf{d}) \cdot L_0 \cdot e^{rT} \quad \text{si} \quad L_0 \cdot e^{rT} < A_T .$$

Només en aquest darrer cas l'assegurat gaudirà de participació en guanys.

De forma globalitzadora podem afirmar que en general l'assegurat rebrà:

$$L_T = A_T + \max [L_0 \cdot e^{rT} - A_T, 0] - (1 - \mathbf{d}) \cdot \max [A_T - L_0 \cdot e^{rT}, 0] . \quad (2.2.1)$$

Si ara considerem el valor actual de l'expressió (2.2.1) actualitzant els fluxos a la rendibilitat lliure de risc obtindrem:

$$V_0[L_T] = V_0[A_T] + V_0[\max [L_0 \cdot e^{rT} - A_T, 0]] - (1 - \mathbf{d}) \cdot V_0[\max [A_T - L_0 \cdot e^{rT}, 0]]$$

on:

- $V_0[\max [A_T - L_0 \cdot e^{rT}, 0]]$ representa el valor actual dels fluxos esperats per a una *call* europea, que hem denominat C_E .
- $V_0[\max [L_0 \cdot e^{rT} - A_T, 0]]$ representa el valor actual dels fluxos esperats per a una *put* europea, que hem denominat P_E .

Llavors el valor actual del que rebrà l'assegurat i que ha de ser igual a la prima que ell ha aportat L_0 , pot representar-se per:

$$L_0 = A_0 + P_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i] - (1 - \mathbf{d}) \cdot C_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i] . \quad (2.2.2)$$

Per tant, d'acord amb aquesta darrera expressió (2.2.2), l'aportació de l'assegurat pot interpretar-se com una inversió en actius amb risc, més la compra d'una opció *put* per garantir una rendibilitat mínima, més la venda d'una opció *call* per una part de la inversió igual al complement fins a la unitat del valor que correspongui al nivell de participació en guanys assignat al contracte.

La interpretació pot semblar un xic complicada però **si impossem com condició a addicional:**

$$P_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i] = (1 - d) \cdot C_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i], \quad (2.2.3)$$

aconsegüim que el cost de les opcions que l'assegurador ha de satisfer sigui nul; llavors l'assegurador (com és usual en la pràctica) no ha de cobrar cap preu per les opcions.

Per tant, a partir de l'expressió (2.2.3) podem aïllar quin ha de ser el nivell de participació en guanys que l'assegurador ha d'atorgar coherentment amb la condició que no calgui pagar cap preu per les opcions incorporades. Aquest nivell de participació seria:

$$d = 1 - \frac{P_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i]}{C_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i]} \quad (2.2.4)$$

Com que òbviament el nivell de participació en guanys no pot ser mai negatiu **cal que es doni sempre la relació:**

$$P_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i] < C_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i]. \quad (2.2.5)$$

És a dir, per mantenir l'equilibri i la possibilitat d'una participació en guanys diferent de zero cal que el preu de l'opció *put* sigui inferior al preu de l'opció *call*, la qual cosa pot aconseguir l'assegurador ajustant el preu d'exercici de l'opció modulant el tipus d'interès garantit, ja que aquell és funció d'aquest tipus i del temps transcorregut fins al moment d'exercici.

De fet, si s'establís la condició $r = i$ s'aconseguiria l'equilibri ja que llavors es dona la igualtat:¹⁴

$$P_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i] = C_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i]$$

També és conegut que si el preu d'exercici d'una opció baixa llavors augmenta el preu d'aquesta opció si és de tipus *call* i disminueix es si és de tipus *put*; per tant, queda demostrat (malgrat que no es cobri per les opcions) que l'equilibri anterior està relacionat amb el fet que l'assegurador hagi escollit un tipus d'interès garantit prudent que facilita que el preu de la *call* sigui superior al de la *put*.

Aquest enfocament, innovador en el cas d'assegurances de vida, és similar al proposat per Gemmill (1993) quan analitza les opcions tipus

¹⁴ Es pot veure comentat a Merrill i Thorley (1996).

participating forward aplicades als metalls preciosos. L'inversor (en el nostre cas seria l'assegurat) comprava el metall preciós i un garant (l'assegurador) li oferia un determinat preu d'exercici del metall. Per tant, l'inversor hauria de pagar el preu d'una *put* per la garantia però en lloc de satisfer-ho cedeix al garant una part de la inversió, que en el supòsit que estem presentant seria $(1-d)$, al preu d'exercici fixat.

Si en el moment previst d'exercici el preu real del subjacent és inferior al preu d'exercici, el garant té pèrdues ja que es queda el metall al preu d'exercici, que és superior al de mercat; si, contràriament, el preu del subjacent és superior té guanys ja que l'inversor li ha de cedir obligatòriament una part del metall al preu d'exercici (inferior al real). En cap cas no s'ha pagat cap preu explícit per les opcions.

De forma anàloga l'assegurat s'està garantint un preu mínim d'exercici i , per tant, una rendibilitat alhora que s'està reservant per a si mateix una part d que té el sentit de participació en guanys per sobre del preu ja garantit pels actius. Per aquest bescanvi no ha de pagar res ja que el garant ja està rebent a canvi $(1-d)$ de la inversió, que recordem s'ha efectuat únicament i exclusivament amb recursos de l'assegurat.

La condició cabdal per mantenir l'equilibri durant tota la vigència de l'assegurança està reflectida a l'expressió (2.2.5), que recordem que ens indica que el preu de l'opció *call* ha de ser sempre superior al preu de l'opció *put*. En la pràctica l'horitzó temporal d'aquestes opcions és a un any ja que al final d'aquest període l'assegurador normativament ha de calcular el valor dels actius i de les provisions de la seva cartera de vida i assignar, si s'escau, la participació en guanys.

Si els contractes són a primes periòdiques caldrà anar afegint cada any la inversió efectuada amb les noves aportacions i, per tant, caldrà poder valorar diverses opcions *forward* a un termini d'un any i emeses amb un preu d'exercici, en funció de l'any en què ens trobem i de la participació en guanys acreditada fins a aquell moment.

En realitat és molt difícil saber quin serà el tipus lliure de risc en el moment d'emetre les diferents opcions *forward* considerades, per tant, és virtualment impossible saber de forma segura si el valor de la *call* serà superior al de la *put*, la qual cosa ens condueix a afirmar que el nivell de participació en guanys no hauria de fix sinó estocàstic.

Ara bé, malgrat que no disposem de recursos teòrics per calcular el preu de les opcions, el que és segur és que al final de cada any o bé s'exercirà l'opció *call* o bé l'opció *put*¹⁵ i el resultat financer obtingut pel assegurador ha de ser interpretat com la contraprestació diferida que li correspongui com a garant de les opcions.

Com que aquest preu diferit, gran o petit, ha de ser sempre positiu la condició perquè ho sigui és que sempre hi hagi excedents financers per acreditar la participació en guanys (rendibilitat explícita positiva), és a dir, que a mesura que es vagin exercint les opcions els fluxos generats per la *call* siguin superiors als fluxos generats per la *put*.

En ser virtualment impossible garantir aquesta situació durant tota la vida de l'assegurança caldrà reservar part dels excedents produïts durant els anys en els quals es generi superàvit per disposar d'aquests recursos en els anys amb dèficit.

La interpretació d'aquesta idea des de la perspectiva de la modelització amb opcions que estem oferint és evident ja que la part d'excedents no repartits permet augmentar el valor del actius que materialitzen la provisió que podem interpretar com el valor del subjacent sobre el qual es garanteix l'opció.

És sabut que el valor de la *call* augmenta en créixer el valor del subjacent mentre que el valor de la *put* disminueix¹⁶, per tant, per mantenir l'equilibri de forma que la *call* valgui més que la *put* si ha canviat el valor de l'interès lliure de risc (i no es pot canviar l'interès emprat per calcular el preu d'exercici) només cal *augmentar* el valor del subjacent fins a un punt on s'aconsegueixi l'esmentat equilibri.

Per tant, encara que admetem que l'assegurador estigui oferint un tipus d'interès garantit prudent sempre caldrà *discutir* el nivell de participació en guanys de forma que no s'ofereixi un *excés* de guanys a l'assegurat i que resti un romanent suficient pels anys amb dèficit però, també caldrà evitar una participació en guanys tan *minsa* que faci poc comercialitzable el contracte d'assegurança.

¹⁵ O bé cap de les dues en l'hipotètic cas que el valor dels actius sigui exactament al preu d'exercici de les opcions (idèntic per a ambdues).

¹⁶ Aquesta afirmació (derivada del valor la *put* i la *call* respecte el valor del subjacent) es pot veure demostrada a Cox i Rubinstein (1985), pàg. 221 i 229.

2.3 La modelització amb opcions calculant el preu d'exercici prospectivament

Al marge de tot el que hem exposat anteriorment hi ha encara més arguments per justificar la gran dificultat que suposa el càlcul del valor de les opcions que usualment s'incorporen a les assegurances de vida.

Com analitzarem en el proper capítol, la normativa comunitària estableix que el valor de la provisió d'una assegurança de vida, que es correspondrà amb el preu d'exercici d'ambdues opcions considerades (*put* i *call*) ha de ser sempre igual (o inferior) al valor dels actius que serveixen per materialitzar les inversions efectuades i que es correspon amb el valor de l'actiu subjacent.

Per determinar el valor de la provisió hem calculat el preu d'exercici X (com fan tots el treballs teòrics analitzats) en funció del tipus d'interès garantit r i del temps transcorregut T i hem d'efectuar una valoració retrospectiva.

Així el que hem fet fins ara ha estat considerar: $X = L_0 \cdot e^{rT}$.

Però com veurem a continuació (en el proper capítol, en analitzar la normativa) no serà aquesta la forma *correcta* de calcular el preu d'exercici de les opcions, el qual s'haurà d'obtenir de forma prospectiva en funció dels tipus d'interès vigents en cada moment per l'actiu sense risc (rendibilitat mitjana del bo del tresor a cinc anys o més).

Llavors el preu d'exercici X esdevé també aleatori ja que aquest s'ha de calcular com a diferència (en el eventual moment d'exercici de l'opció) entre el valor actual dels pagaments futurs que s'espera que faci l'assegurador i de les primes esperades a percebre, actualitzats a un tipus diferent del garantit.

El valor actual en el moment T dels pagaments esperats, que denominarem $C_T(i_T^*)$, i el valor actual de les primes esperades a percebre, que denominarem $P_T(i_T^*)$, han de ser valorats ambdós a un tipus i_T^* que pot ser diferent en cada un dels moments en què s'hagi de calcular el preu d'exercici (normalment un cop a l'any).

Per tant, ara:

$$X = C_T(i_T^*) - P_T(i_T^*) \quad (2.3.1)$$

i llavors la condició d'equilibri (1.3.5) abans considerada que era:

$$P_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i] = (1 - \mathbf{d}) \cdot C_E[A_T, L_0 \cdot e^{rT}, T, i]$$

passaria a ser:

$$P_E[A_T, \{C_T(i_T^*) - P_T(i_T^*)\}, T, i] = (1 - \mathbf{d}) \cdot C_E[A_T, \{C_T(i_T^*) - P_T(i_T^*)\}, T, i]. \quad (2.3.2)$$

2.4 L'ajust dinàmic de les opcions: estratègia *ratchet*

La condició imposada per l'expressió (2.3.2) implica que l'assegurat pot percebre al final del període (normalment anual) una participació en guanys igual a zero¹⁷ o bé una part \mathbf{d} de l'excedent financer representat per la diferència $A_T - \{C_T(i_T^*) - P_T(i_T^*)\}$.

Aquesta part de l'excedent li pot ser retornada en efectiu però és més usual incorporar-la a la provisió del contracte incrementant llavors el capital pactat a venciment en la proporció que correspongui.

L'ajust dinàmic del capital pactat també implica modificar la base de càlcul del preu d'exercici per a posteriors períodes i es correspon amb el que es coneix dintre del camp d'estudi de les opcions financeres exòtiques¹⁸ com una estratègia tipus *ratchet*.

Les estratègies tipus *ratchet*, relacionades amb un grup de diverses opcions en cascada, *tanquen* nous preus d'exercici de les opcions quan el valor de l'actiu subjacent en diferents moments intermedis supera el preu d'exercici calculat per al període anterior, de forma que l'inversor es protegeix de futures davallades del valor del subjacent. La valoració d'aquestes opcions és força complexa i exigeix, com comenta Figlewski (1993), emprar tècniques de simulació.

El cost d'aquest tipus d'opció és força elevat ja que període a període si l'actiu evoluciona a l'alça s'ajusta també a l'alça el preu d'exercici, mentre que quan passa al contrari no hi ha forma de fer *retrocedir* els dèficits.

Per tant, en moments en què s'espera que el subjacent obtingui una rendibilitat semblant a la de l'actiu lliure de risc es considera preferible (pel cost financer que suposa) liquidar la posició i no contractar les opcions.¹⁹ Malauradament l'assegurador no pot cancel·lar la seva cartera de vida en una situació com aquesta.

¹⁷ Si no hi ha hagut guanys addicionals.

¹⁸ Podem comprovar-ho a Ang i Sherris (1997), pàg. 18.

¹⁹ Es pot veure a Figlewski *et al.* (1993), pàg. 46.

3. ANÀLISI DE LES ESTRATÈGIES EMPÍRIQUES EMPRADES PELS ASSEGURADORS

La modelització de les assegurances de vida emprant la teoria d'opcions és força interessant des d'una perspectiva conceptual però presenta limitacions pel fet que en general no serem capaços de valorar aquestes opcions ni tampoc contrastar en un mercat organitzat si la valoració ha estat correcta.

En la pràctica els asseguradors espanyols no han calculat el cost d'aquestes opcions exòtiques i el que han fet és gestionar any rere any aspectes parcials del risc financer al qual es troben sotmesos.

Ara descriurem algunes de les actuacions que duen a terme i analitzarem la relació que tenen amb el model teòric que hem presentat.

3.1 Anàlisi ex post del resultat de les opcions incorporades

Presuposarem que l'assegurador ja gestiona acuradament el riscs de tipus demogràfic-actuarial i controla les despeses de gestió-comercialització, per tant, no incidirem en aquests aspectes.

Adicionalment, des del punt de vista estrictament financer el que ha de fer normativament l'assegurador al final de cada any és comprovar si el valor dels actius supera el valor de les provisions (preu estimat per a l'exercici de les opcions implícites), és a dir, si es troba en una de les dues situacions.

- El valor dels actius és suficient, per tant:

$$A_T \geq \{C_T(i_T^*) - P_T(i_T^*)\} .$$

- Al contrari, el valor dels actius és inferior al preu d'exercici:

$$A_T < \{C_T(i_T^*) - P_T(i_T^*)\} .$$

Per tant, hi ha un dèficit de valor dels actius assignats a la cobertura de les provisions.

En el primer cas s'acreditarà mitjançant algun sistema (que analitzarem posteriorment) la participació en guanys preestablerta, és a dir:

$$d \cdot [A_T - \{C_T(i_T^*) - P_T(i_T^*)\}] .$$

En cas contrari l'assegurador assumirà el dèficit:

$$\{C_T(i_T^*) - P_T(i_T^*)\} - A_T$$

Al marge del que hem argumentat en apartats anteriors podem afirmar (per constatació d'informacions del sector) que els asseguradors a Espanya han aplicat en general el nivell de participació en guanys de forma *flat*, és a dir, constant durant els diferents anys de vida l'assegurança i independent del risc inherent al tipus de contracte comercialitzat.

Aquesta forma d'actuació pot tenir dues explicacions:

- O bé els asseguradors han actuat de forma ingènua.
- O bé han desenvolupat altres actuacions de control per tal que la relació entre el valor de l'opció *call* i l'opció *put* es mantingués constant al llarg dels diferents anys.

3.2 Condicions que permetrien mantenir constant la participació en guanys

Per analitzar aquestes condicions cal considerar que en el cas de l'Estat espanyol la major part de les materialitzacions efectuades pels asseguradors de vida ho són en actius de renda fixa²⁰, per tant, el seu preu de mercat és funció inversa del tipus d'interès emprat en la valoració.

Recordem l'expressió (2.2.4) que ens permetia determinar la participació en guanys quan el preu d'exercici es calculava retrospectivament, sent el seu valor:

$$d = 1 - \frac{P_E[A_T, L_T(r), T, i]}{C_E[A_T, L_T(r), T, i]} .$$

Llavors, de forma anàloga, la participació en guanys quan el preu d'exercici es calcula prospectivament, seria:

$$d = 1 - \frac{P_E[A_T, C_T(i_T^*) - P_T(i_T^*), T, i]}{C_E[A_T, C_T(i_T^*) - P_T(i_T^*), T, i]}$$

En teoria, per tal que es mantingui l'equilibri si es produeix un canvi en el tipus d'interès només cal que la derivada del valor de la *call* i de la *put* respecte a l'esmentat tipus siguin iguals. És a dir, cal que es compleixi:

²⁰ Ho podem constatar en els informes d'ICEA: "Las inversiones de las entidades aseguradoras", corresponents als anys de 1990 a 1999.

$$\frac{d P_E [A_T, C_T(i_T^*) - P_T(i_T^*), T, i]}{d i} = \frac{d C_E [A_T, C_T(i_T^*) - P_T(i_T^*), T, i]}{d i}$$

Però una dificultat addicional rau en el fet que també el preu d'exercici $\{C_T(i_T^*) - P_T(i_T^*)\}$ i A_T depèn de l'esmentat canvi en el tipus d'interès i .

Aquesta anàlisi de l'equilibri de la participació en guanys pot ser estudiada globalment analitzant el canvi de valor de les opcions respecte al tipus d'interès i fent estimacions futures de la seva evolució o bé de forma indirecta (i a curt termini) analitzant el canvi del valor dels actius i de les provisions en un moment concret encara que no s'estudiïn les implicacions d'aquest canvi a llarg termini.

Com després veurem, el que acostumen a fer en la pràctica els asseguradors es analitzar aïlladament com incideix el canvi del tipus d'interès en alguna de les components de les opcions, especialment el preu d'exercici i els actius que materialitzen les inversions, o bé en ambdós conjuntament.

3.3 Diferents tècniques emprades pels asseguradors en la gestió financera

En el control dels diferents riscos financers els asseguradors de vida empen tècniques que de forma general podem considerar relacionades amb l'*Asset-Liability Management* sense que hi hagi una tècnica entre les possibles que sigui utilitzada exclusivament; al contrari: en general, els asseguradors, com afirmen Smink i van de Meer (1997), les utilitzen de forma combinada.

Així, és usual emprar la gestió segmentada de productes, les projeccions de fluxos d'acord amb diferents escenaris mitjançant tècniques de casament de fluxos (*cash-flow matching*) i també l'equilibri de Duracions d'actius i passius,²¹ la qual cosa vol dir que empíricament no s'ha comprovat que cap d'elles sigui suficient i tampoc que es pugui prescindir del tot de les seves aportacions per analitzar aspectes concrets de la gestió.

Pensem que la decisió que prengui l'assegurador respecte a escollir una o altra tècnica estarà en funció dels objectius que s'hagi proposat, els quals no han de ser sempre els mateixos. Així Cummins (1991) ens indica: "The first step in applying an Asset-Liability Management technique is to decide what to manage".

²¹. La utilització d'aquestes tècniques està actualment autoritzada en la normativa espanyola.

D'acord amb els objectius cercats les tècniques es classifiquen en diferents categories, una proposta de Smink i van de Meer (1997) considera tres grans grups:

- Tècniques estàtiques.
- Tècniques dinàmiques que tenen com a objectiu controlar un valor.
- Tècniques dinàmiques que tenen com a objectiu controlar la rendibilitat.

Les tècniques estàtiques consideren la cartera d'assegurances en un moment específic, sent aquesta la seva principal limitació atès que ignoren el fet de que decisions futures dels assegurats dependran dels diferents estats de la natura en moments intermedis.

Així una assegurança que estigui garantint un tipus d'interès fix tindrà una probabilitat de rescat més elevada com més es vagin apujant els tipus d'interès d'inversions alternatives (amb risc similar) a la mateixa assegurança, i a l'inrevés.

De fet la matemàtica actuarial de vida (clàssica) es fonamenta en aquest principi estàtic ja que no considera possibles canvis en les taules de mortalitat o en els tipus d'interès. També les tècniques de *cash flow matching* o de gestió de la Duració de Macaulay tenen en general aquestes limitacions i per tant són útils durant períodes de temps molt curts.

Les tècniques de tipus dinàmic incorporen en la seva anàlisi variables aleatòries; en general, es considera que tant el valor dels actius com dels passius segueixen un procés estocàstic, llavors s'acostuma a analitzar en quines situacions el valor del passiu pot ser superior al valor de l'actiu i produir-se una situació d'insolvència.

La majoria d'estudis dinàmics existents se centren en l'anàlisi del valor del *surplus* o excedent financer (no de la rendibilitat) però sense considerar la relació d'aquest amb l'eventual participació en guanys que s'atorga ni tampoc l'especificitat que comporta el fet que el contracte sigui a primes periòdiques (consideren que l'assegurat ja ha satisfet tota la seva aportació com a prima única).

Mentre que alguns estudis consideren adequat cercar la immunització de l'excedent altres autors com Babbel i Stricker (1989) argumenten que l'*Asset-Liability Management* no necessàriament ha de cercar un objectiu d'immunització i proposen no oblidar la maximització del guany aconseguit.

En la nostra opinió si l'assegurat no gaudeix de cap participació en guanys pot semblar que el control la rendibilitat resulti una mica redundant ja que tot l'excedent queda en mans dels accionistes i l'assegurat només gaudeix del tipus d'interès garantit, però la situació real al mercat espanyol, on usualment sí que s'han atorgat importants participacions en guanys, ha estat força diferent.

A més a més creiem que en l'actual situació de tipus d'interès garantits molt reduïts (al voltant del 2,50 o 3%) aquest enfocament és un xic reduccionista ja que si un producte de vida no té l'incentiu de la participació addicional en guanys o la possibilitat de seguir efectuant aportacions de primes tindrà molt poca acceptació comercial.

En aquest treball ens decantem per controlar la rendibilitat de la cartera d'assegurances de forma dinàmica, i no cerquem l'objectiu de maximitzar el resultat d'un any concret sinó que intentem raonar com es pot aconseguir que en tots els anys hi hagi excedent positiu (l'opció *call* val més que la *put*) o bé, si un any hi ha dèficit, que es pugui disposar d'una reserva de valor generada abans amb els excedents financers per la cartera d'assegurances, de forma que permeti eixugar l'esmentat dèficit sense haver de recórrer a aportacions extraordinàries.

Capítol 2

Les assegurances de vida en l'entorn de les directives comunitàries

C-4 risks are miscellaneous risks... Also included is the risk that laws or legal interpretations will change in a way that will alter the firm's obligations ex post

A. Santomero i D. Babbel (Financial Risk Management by Insurers: an Analysis of the Process)

Qualsevol proposta de gestió financera de les assegurances de vida ha tenir en consideració la normativa vigent en cada moment perquè en cas contrari es desenvoluparia un model teòric que mai no podria ser implementat en la pràctica ni contrastat empíricament amb dades reals. Per tant, és convenient estudiar aquesta normativa i relacionar-la amb els criteris d'anàlisi que proposarem.

Per fer-ho hem dividit el capítol en tres parts, en la primera analitzem el document normatiu de referència per als asseguradors de vida del paísos integrats a la Unió Europea. És, sens dubte, la tercera directiva de les assegurances de vida, que formalment rep el nom de Directiva 92/96/CEE ¹ i atès que modifica dues directives anteriors, la 79/267/CEE i la 90/619CEE, per això és coneguda col·loquialment com a tercera.

En la segona estudiem la forma en què la normativa espanyola està adaptada a les disposicions esmentades malgrat que òbviament matisa aspectes que poden ser objecte de decisió, interpretació o implementació dins dels diferents paísos. La filosofia subjacent és, però, plenament coincident amb les directives comunitàries com comprovarem a continuació.

¹ Publicada al Diari Oficial de les Comunitats Europees el 9 de desembre de 1992.

De les regulacions normatives ens centrarem especialment en tres aspectes que tenen una forta relació amb la gestió financera. Concretament ens interessa analitzar:

- La identificació que es produeix entre el concepte de provisió matemàtica i el passiu del contracte d'assegurança, del qual és garant l'assegurador, i la normativa relativa al càlcul d'aquesta per la incidència que té en el resultat financer obtingut.
- La normativa relativa al càlcul del marge de solvència per tal de cercar si de debò serveix per garantir-la veritablement a llarg termini.
- La normativa relativa al sistema de participació en guanys perquè demostrarem que la forma de implementar-ho no és neutral pel que fa al resultat final obtingut de la gestió financera de les assegurances de vida.

En aquest capítol analitzarem fonamentalment el risc de canvis de tipus legal (la modificació del sistema de càlcul de la provisió és un clar exemple) que s'hauria de considerar com de tipus C-4 d'acord amb la classificació i nomenclatura de riscos proposada pel Comitè de Valoració de l'Associació d'Actuaris dels Estats Units que els agrupa en quatre grups d'anàlisi: C-1, C-2, C-3 i C-4.

Però els canvis de tipus legal no poden analitzar-se de forma aïllada, ja que pel que fa als criteris de valoració incideixen en el grup C-1 on s'analitzen el riscos que afecten la vessant del actius de l'empresa d'assegurances i per tant aprofundeixen entre altres en el risc de tipus d'interès, el risc de crèdit de l'emissor, el risc de divisa, etc.

Tenen també relació amb el grup C-2 on s'analitzen el riscos que poden afectar la vessant del passiu de l'empresa entenent aquest com el preu al qual l'assegurador comercialitza els seus productes; i també amb el grup C-3 on s'analitzen els riscos com a conseqüència de desajustos entre els valors dels actius i dels passius ja que si el valors d'ambdues components varien en diferents direccions es poden produir problemes d'il·liquiditat o d'insolvència.

Per tot això hem volgut unificar aquests riscos en un únic enfocament centrant-nos en la tercera part del capítol en els efectes globals dels canvis en els tipus d'interès i en la incidència que per als asseguradors espanyols ha tingut aquests canvis en el moment d'adaptar-se a la normativa comunitària.

1. LA TERCERA DIRECTIVA DE VIDA I LA 79/267/CEE

Pel que fa al mètode de càlcul de les provisions hi ha una sèrie de generalitats que convé destacar per tal d'entendre la filosofia subjacent en la tercera directiva.

- La directiva propugna el càlcul de la provisió matemàtica emprant el mètode prospectiu (es pot fer servir el retrospectiu si el resultat obtingut no és inferior al que correspondria al prospectiu o bé si el prospectiu no es pot determinar) emprant en el càlcul hipòtesis de valoració prudents.

Per tal d'aclarir què es consideren hipòtesis prudents es remarca que s'han de prendre en consideració totes les prestacions garantides, així com els drets de rescat, participacions en guanys, totes les opcions de l'assegurador i totes les despeses del contracte incloent-hi les comissions.

A fi d'equilibrar les prestacions futures que s'espera que satisfaci l'assegurador s'especifica que es prendran en consideració les primes futures a percebre.²

- Per tant, s'entén que és el valor de la provisió matemàtica el que s'ha de calcular com a passiu de l'assegurador per ser comparat amb el valor dels actius.

També s'indica que un càlcul prudent no significa un càlcul fonamentat en els valors més usuals sinó un que prengui en consideració de forma raonable el resultat de les desviacions desfavorables de les variables considerades. En la nostra opinió s'està criticant sense dir-ho l'acceptació automàtica que sovint es fa del criteri de l'esperança matemàtica.

Es remarca que el criteri de valoració de la provisió a més a més de ser prudent ha de ser coherent amb el criteri de càlcul del valor dels actius, que aquest no es pot canviar d'any en any, que s'ha d'efectuar el càlcul contracte a contracte (es poden permetre però generalitzacions que ofereixin un resultat molt aproximat) i, finalment, no es pot admetre cap valor de la provisió que sigui inferior al valor de rescat garantit en aquell moment.

Pel que fa al marge de solvència cal recordar que es troba regulat a la directiva 79/267/CEE i que s'estableix en funció de les provisions matemàtiques de vida i dels capitals en risc.

Pel que fa a la participació en guanys cal remarcar que no s'explicita cap sistema en concret, només s'expressa clarament en la tercera directiva que les

² No s'aclareix la forma de prendre en consideració les primes, en aquest treball proposarem un criteri prudent considerant les expectatives futures de reinversió.

participacions atorgades, independentment del sistema emprat, s'han de prendre en consideració en el moment de calcular les provisions.

1.1 El tipus d'interès que cal emprar en la valoració

L'article 18 de la tercera directiva remarca el criteri de la prudència i es delega en cada estat membre la determinació del tipus o dels tipus màxims a emprar en cada cas.

En l'esmentat article es marquen però unes restriccions molt clares en el cas que l'assegurador estigui garantint un tipus d'interès.³

- En aquest cas, el tipus màxim garantit al contracte no podrà ser més gran que el 60% del tipus d'interès del deute de l'Estat, corresponent al termini o conjunt de terminis (llavors es farà una mitjana) que de forma reglamentària s'estableixi cada any.

Malgrat això quan els actius que materialitzin les provisions estiguin valorats d'acord amb el seu preu de mercat es podrà autoritzar un tipus d'interès garantit que superi l'anterior màxim sempre que aquest tipus es relacioni (de forma prudent) amb la rendibilitat esperada dels esmentats actius.

La directiva fa menció implícita al possible risc de reinversió de l'assegurador ja que obliga a considerar també la rendibilitat esperada dels actius futurs. També fa especial referència al fet que l'interès màxim obtingut d'acord amb els criteris esmentats no ha de ser emprat necessàriament per les empreses d'assegurances que sempre podran utilitzar un tipus inferior, per tant, no es posa límit als criteris de prudència que els asseguradors vulguin considerar d'acord amb el risc específic d'inversió que estiguin assumint.

La directiva també concedeix als diferents estats membres certes excepcions per tal de no haver d'aplicar la limitació del tipus d'interès en alguns tipus de contractes, en particular:

- En els contractes en unitats de compte (ja que no garanteixen cap tipus d'interès).
- En els contractes a prima única fins a vuit anys (suposem que el fet que siguin a prima única i a un termini màxim de vuit anys fa que es consideri més reduït el risc de reinversió).
- En els contractes sense participació en guanys i les rendes vitalícies sense valor de rescat.

³ Que és el cas que estem analitzant en aquest treball.

En aquests casos excepcionals es torna a remarcar, però, que el tipus d'interès no podrà superar el rendiments dels actius que materialitzen les provisions després d'efectuar una *reducció adequada*.

1.2 Consideracions pel que fa als actius

Pel que fa als tipus d'inversions en les quals els asseguradors poden efectuar la materialització de les provisions, la directiva deixa en mans dels diferents estats membres la implementació específica de les restriccions d'admissió i limitacions de risc en cada tipus específic d'actiu.

El que es pretén és garantir una adequada diversificació, per tal que l'evolució del valor de la cartera d'inversions no depengui especialment d'un grup reduït d'actius. La directiva també indica que la seva valoració ha de ser prudent i en cap cas s'hi ha d'incloure l'import que s'hagi satisfet per despeses d'adquisició; també aconsella que la majoria d'actius financers siguin negociables en mercats organitzats o que si no ho són siguin especialment líquids.

Per tal de no caure en la repetició comentarem amb més detall els criteris de valoració d'actius quan analitzem la normativa específica de l'Estat espanyol.

1.3 Correlació entre el valor del passiu i el rendiment del deute de l'Estat

Pel que fa als criteris de valoració desenvolupats en la tercera directiva hi ha dos aspectes que considerem especialment importants per la seva incidència en el treball que estem desenvolupant.

- El primer és que s'incorpora el criteri que el tipus d'interès és dinàmic durant tota la vida del contracte.

És obvi que ens estem referint a l'emprat en la valoració de la provisió del contracte ja que el garantit per l'assegurador no pot ser modificat en el futur. La directiva marca, però, que en el moment de contractació aquell no pot superar el que s'obtidria efectuant l'anterior càlcul del 60% sobre el tipus del deute de l'Estat vigent en aquell moment.

Per tant, és possible que a mesura que passi el temps puguin existir divergències entre el tipus garantit (calculat pel moment $t = 0$) i el tipus emprat en la valoració (calculat per al moment $t = k$).

La directiva indica que si en un moment determinat, com a conseqüència d'una reducció en la rendibilitat del deute de l'Estat, el tipus d'interès màxim fos

superior al que estigués garantit per l'assegurador, llavors aquest hauria de calcular la provisió d'acord amb el nou tipus; s'estableix, doncs, un criteri dinàmic d'adaptació del tipus d'interès emprat en el càlcul de la provisió.

- El segon és que el tipus d'interès emprat en la valoració del passiu es troba relacionat amb la rendibilitat que es pot aconseguir del deute de l'Estat.⁴

Això implica considerar el deute de l'Estat com un actiu de referència per als asseguradors de vida, els quals materialitzen una part de les provisions en el mateix deute i la resta en altres actius (majoritàriament de renda fixa) amb un risc i una rendibilitat esperada superiors.

Així, aquests altres actius, de forma coherent amb el risc assumit, haurien d'oferir un diferencial (*spread*) positiu sobre la rendibilitat del deute (rendibilitat mínima que sempre es pot aconseguir) i quan aquesta es modifiqués també haurien de veure modificada la seva rendibilitat, encara que potser en un grau diferent de la d'aquell.

El fet que la directiva obligui a emprar en el càlcul de la valoració de la provisió un tipus que sigui el 60% de la rendibilitat actual del deute de l'Estat implica actuar de forma prudent considerant que en el futur la rendibilitat per a les noves reinversions podria disminuir fins a situar-se al voltant de l'esmentat valor. Òbviament, si no es produís aquesta situació hi hauria excedents en el futur que poden ser canalitzats en part a l'assegurat via participació en guanys.

No existeix cap contrastació empírica que demostrï que en el passat aquest 60% hagi estat suficient com a mesura de protecció en una conjuntura decreixent dels tipus d'interès.

En qualsevol cas la suficiència a llarg termini d'aquest 60% creiem que no pot ser aliena al tipus de contracte d'assegurança considerat i a certs factors de risc com poden ser la forma de calcular el valor de rescat o d'establir la participació en guanys.

Queda, però, contrastat, d'acord amb el que estableix la normativa comunitària el següent:

- En no conèixer el valor de la provisió matemàtica copsant el seu *preu* en un mercat secundari organitzat es pot aproximar aquest preu correlacionant-lo amb la rendibilitat vigent per al conjunt d'actius, mesurada a partir de la rendibilitat d'un actiu de referència com és la del deute de l'Estat.

⁴ Per garantir que sigui un canvi no puntual és la mateixa Direcció General d'Assegurances qui publica el tipus a emprar calculat com a mitjana d'un període de temps prou ampli; d'aquesta forma evitem el problema que pot suposar la coexistència de diferents tipus a diferents terminis.

2. L'ADAPTACIÓ ESPANYOLA A LA TERCERA DIRECTIVA

L'any 1998 va ser promulgat el Reglament ⁵ que desenvolupa la Llei de 1995 ⁶ la qual incorporava els criteris de la Directiva 92/96/CEE (tercera) del Consell, abans esmentada.

En la situació anterior a la promulgació d'aquest Reglament la provisió matemàtica dels contractes de vida es calculava d'acord amb el tipus d'interès emprat en la base tècnica (per tant, era un tipus fix independent de les conjuntures del mercat). També cal recordar que des de l'any 1987 a Espanya estava autoritzada l'aplicació d'un tipus d'interès garantit (per a contractes a cinc o més anys) de fins al 6%.

En la pràctica, encara que el 6% no era pas obligatori per als asseguradors, en ser la rendibilitat dels actius de renda fixa superior al 10%, la majoria van dissenyar productes que incorporaven l'esmentat tipus del 6% com a garantit durant tota la vida del contracte.

Abans, però, de l'entrada en vigor de l'esmentat Reglament del 1998 i quan l'evolució del tipus d'interès era ja de clara davallada (any 1997) va ser publicada una ordre⁷ que retallava el tipus d'interès garantit als contractes de vida que es formalitzessin d'aquell moment en endavant.

L'esmentada ordre, encara que a les consideracions inicials admetia que la seva vida seria efímera (fins a la publicació del nou reglament), modificava el tipus d'interès tècnic màxim (que recordem que no havia canviat des del 1987) i el fixava en el 4% per a les assegurances en pessetes i en el 60% de la mitjana dels tres darrers anys de la rendibilitat del deute de l'Estat a 5 anys (del país que correspongui) en el cas d'assegurances en divises.

En aquell moment no es va modificar però el sistema de càlcul de les provisions dels antics contractes i, per tant, es podia continuar emprant el 6%.

2.1 El Reglament d'ordenació i supervisió de 1998

Aquest reglament recull l'esperit de la tercera directiva de vida i va una mica més enllà donant pautes concretes de càlcul per a aspectes específics, fent palès el següent:

⁵ Reglament d'ordenació i supervisió de les assegurances privades, Reial decret 2486/1998, promulgat al BOE de 25-11-98.

⁶ Llei 30/1995, de 8 de novembre, d'ordenació i supervisió de les assegurances privades, promulgada al BOE de 9-11-95.

⁷ Ordre del 21 de maig de 1997 del Ministeri d'Economia i Hisenda, promulgada al BOE de 27-5-97.

- Les provisions es calcularan prospectivament com a diferència entre el valor actual dels compromisos de l'assegurador menys el valor actual dels compromisos de l'assegurat.

S'emprarà el sistema de càlcul contracte a contracte. Com que les provisions es calculen per anys complets de vida del contracte i no per anys cronològics el valor comptable de la provisió a 31 de desembre s'obtindrà mitjançant una interpolació lineal del valor sencer anterior de la provisió i el valor sencer posterior, incloent-hi la periodificació de la prima acreditada (que sempre es paga per endavant).

Pel que fa al tipus d'interès emprat en el càlcul de les provisions ⁸ es determina que no podrà ser superior al 60% d'una mitjana aritmètica ponderada de la rendibilitat en el darrer trimestre de cada un dels darrers tres anys del tipus del deute de l'Estat a cinc anys o més. La Direcció General d'Assegurances (DGA) publicarà anualment l'esmentat tipus de referència.

Malgrat això, si la rendibilitat de l'assegurador dins de l'annualitat considerada fos inferior al tipus de rendibilitat que publiqui la DGA l'assegurador haurà d'emprar aquest tipus més reduït en el càlcul llevat que hagi acreditat de forma fefaent que en el futur podrà obtenir una rendibilitat suficient per assumir els compromisos pactats.

- En general, podem afirmar que l'interès de càlcul de la provisió serà el menor entre la rendibilitat obtinguda en l'annualitat per l'assegurador o el 60% de la mitjana ponderada de la rendibilitat del deute de l'Estat.

2.2 Contractes de vida vinculats a actius específics

El Reglament preveu (article 33.2), però, que si hi ha contractes d'assegurança als quals l'assegurador ha assignat unes inversions específiques i que tinguin un venciment previst adequat amb els compromisos pactats, es podrà calcular la provisió emprant un tipus en funció de la rendibilitat interna de les inversions efectuades.

El Reglament era inicialment ambigu i restava pendent de desenvolupament (en aquell moment) el criteri d'adequació de les inversions específiques que s'havia proposat a l'apartat 2 de l'article 33; posteriorment⁹ una ordre del Ministeri d'Economia i Hisenda va aclarir aquests aspectes.

⁸ Es desenvolupa a l'article 33.1 del Reglament.

⁹ Ordre de 23 de desembre de 1998, promulgada al BOE de 31-12-98.

Si l'assegurador assignava unes inversions a la cobertura de les provisions d'una cartera de contractes podria, en certs casos, i només amb la finalitat de calcular les provisions, emprar un tipus d'interès que ja no es relacionaria amb el vigent pel deute de l'Estat sinó amb la taxa de rendibilitat interna de les inversions. Els actius haurien de ser necessàriament de renda fixa, dipòsits en entitats de crèdit o tresoreria i, d'acord amb la solvència (*rating*) de les inversions, la provisió es calcularia emprant com a tipus d'interès de càlcul un valor al voltant del 90% de la taxa de rendibilitat interna.

Per poder calcular la provisió en funció de la taxa de rendibilitat interna dels actius cal, però, que es compleixin altres requisits. La normativa admet una doble alternativa:

- D'una banda d'acord amb el que s'estableix a l'article 2 de l'Ordre, una possibilitat és implementar una estratègia de tipus *cash flow matching*.

Amb fluxos aleatoris (com és el cas de les assegurances de vida) és impossible garantir un *cash flow matching* exacte; s'accepta, però, considerar els cobraments i pagaments de forma mensual i centrats en el dia 15 de cada mes i que pugui haver-hi una anticipació dels cobraments sobre els pagaments (per l'import que sigui) i també ocasionalment un dèficit mensual (més pagaments que cobraments) que no ultrapassi l'equivalent als pagaments del trimestre anterior i un dèficit anual que no ultrapassi el 12,5% dels pagaments de l'any.

Cal remarcar que els excedents positius que es produeixen han de ser capitalitzats al tipus de reinversió que correspongui en cada cas d'acord amb l'article 33, apartat 1, del Reglament, és a dir, a un tipus al voltant del 60% de la rendibilitat vigent del deute de l'Estat. En cas de dèficit, aquest haurà de capitalitzar-se a l'esmentat tipus més un increment del 50%.

Si analitzem el contingut de l'apartat b) de l'article 2 on diu: "... que el saldo financiero obtenido al final de cada mes, resultante de capitalizar al tipo de reinversión los cobros y los pagos diarios que se hayan producido en ese mes y en los anteriores, resulte positivo en todos y cada uno de los meses..." **veiem que de forma implícita el que es vol controlar és l'evolució d'un valor final dinàmic estimat a partir dels fluxos dels actius i passius emprant un interès mínim de reinversió.**

- D'altra banda, d'acord amb l'article 3 de l'Ordre, hi ha una segona possibilitat per calcular la provisió en funció de la taxa de rendibilitat interna, que exigeix que es compleixin tres requisits:
 1. Que el valor de mercat de les inversions sigui igual o superior al valor actual de les obligacions derivades dels contractes, valorades al tipus d'interès de mercat corresponents al termini de cada flux.

2. Que les Duracions financeres modificades, calculades a tipus d'interès de mercat, de l'actiu i passiu siguin equivalents.
3. Que la sensibilitat davant de canvis en els tipus d'interès també sigui equivalent per a actius i passius.¹⁰

Hem d'entendre que tan *correcte* és emprar una tècnica de *cash flow matching* com una immunització via Duracions.¹¹ Respecte a aquestes és força conegut el càlcul de la Duració d'actius de renda fixa però menys usual el càlcul de la Duració del passiu d'un contracte d'assegurança; en el quart capítol la calcularem en funció dels valors esperats¹² que ha de satisfer l'assegurador (capitals) i que ha de satisfer l'assegurat (primes).

2.3 El marge de solvència en les assegurances de vida

A més a més d'un adequat càlcul de les provisions i de disposar d'uns actius suficients respecte al valor d'aquelles, les empreses d'assegurances han de tenir, com a marge adicional de solvència, un volum de recursos propis suficients en funció del seu negoci; cada ram d'assegurances té diferents sistemes per establir quin és aquest volum suficient de recursos.

En el cas de les assegurances de vida cal distingir criteris diferents segons facin referència al vessant de risc o al vessant d'estalvi i dins d'aquest cal considerar si l'assegurador assumeix o no el risc d'inversió.

Una fórmula genèrica per calcular el marge de solvència de les assegurances de vida en els països de la Unió Europea seria:¹³

$$MS_k = f_1 \cdot V_k(i) + f_2 \cdot (C_k - V_k(i))$$

On:

MS_k és el marge de solvència requerit en el moment k .

¹⁰ Equivalent, d'acord amb l'Ordre vol dir diferències inferiors a l'1% tant pel que fa al valor de les Duracions com pel que fa al valor de l'actiu i passiu en canviar els tipus d'interès i efectuar l'anàlisi de sensibilitat del valor obtingut.

¹¹ L'Ordre estableix que les Duracions s'han de reajustar com a mínim al final de cada un dels trimestres de l'any.

¹² Com proposen, entre altres, Li i Panjer (1994), a "Immunitzation Measures for Life Contingencies", 4t. ed. AFIR. Orlando.

¹³ Expressió que podem trobar a Booth *et al.* (1999) pàg. 203.

$V_k(i)$ és el valor de la provisió en funció del tipus d'interès emprat.

C_k és el valor del capital que caldrà satisfer en cas de mort de l'assegurat.

f_1, f_2 són diferents factors a emprar en cada cas concret.

Queda clar en l'expressió anterior així com en el reglament espanyol¹⁴ la independència del càlcul pel que fa al vessant de risc i al d'estalvi de cada contracte ja que el marge es calcula separatament i després se sumen els valors obtinguts. Pel que fa al vessant d'estalvi, que és el que estudiem en aquest treball, la forma de càlcul genèrica es limita a obtenir el 4% del valor de la provisió ($f_1 = 0,04$).

Aquest valor correspon als contractes on l'assegurador assumeix el risc d'inversió, que òbviament existirà sempre que es garanteixi un tipus d'interès. En cas que no assumeixi aquest risc¹⁵ el marge es limita a l'1% de la provisió.

També en contractes de capitalització (no hi ha cobertura de risc inherent a la vida humana) s'ha de calcular el 4%; per tant, queda clar que aquest import correspon únicament i exclusivament al marge necessari com a conseqüència del risc d'inversió que està assumint l'assegurador en relació amb la funció d'intermediari financer que ha acceptat en aquest tipus d'assegurances.

En qualsevol cas la suficiència a llarg termini d'aquest valor del marge de solvència creiem que no pot ser aliena al tipus de producte d'assegurança considerat i a altres aspectes com són el termini de l'assegurança ni si s'han percebut o no en el moment del càlcul totes les primes pactades en el contracte.

- Si el marge es calcula (d'acord amb la normativa) en funció d'un percentatge fix del valor de la provisió implícitament s'està considerant que la provisió és una mesura correcta del risc que està assolint l'assegurador com a intermediari financer.

Des d'aquesta perspectiva **s'hauria d'inferir que un contracte amb més provisió que un altre té més risc d'inversió perquè la normativa vigent li està exigint un marge de solvència superior.** Com que els contractes a prima única aporten tota la prima a l'inici tenen sempre més provisió que contractes anàlegs però a primes periòdiques, per tant, haurien de tenir, doncs, més risc, **la qual cosa demostrarem que no sempre és així.**

¹⁴ Es desenvolupa a l'article 62, 3.

¹⁵ Es desenvolupa a l'article 62. 2. c.

2.4 Sistemes de càlcul de la participació en guanys

El Reglament 2486/1998 en el seu article 78 (que fa referència a les bases tècniques de les assegurances de vida, apartat c) indica que el sistema de càlcul de la participació en guanys i els criteris per imputar aquesta a cada un dels assegurats ha de fer-se explícita en l'esmentada base tècnica del contracte.

A continuació s'indica que les empreses d'assegurances podran atorgar als assegurats la participació en guanys que desitgin, ja sigui referida als guanys financers, als tècnics o a una combinació d'ambdós. Per tant, hi ha absoluta llibertat sempre que s'utilitzi el sistema i el criteri de repartiment indicat amb anterioritat a la nota tècnica.

Malgrat que normativament no es faci cap esment hem de recordar que en qualsevol procés d'acreditació de guanys hi ha tres etapes clarament diferenciades.

- La determinació de l'excedent aconseguit que es fa comparant el valor a final d'any dels actius afectes a la cobertura de provisions menys el valor de les esmentades provisions, d'acord amb la legislació vigent.
- La fixació d'un percentatge de l'excedent i el criteri de repartiment escollit.¹⁶
- La forma en què s'implementa la participació específica de cada contracte, que pot ser reduint la propera prima, considerant la participació com una prima única de un contracte amb les mateixes característiques, incrementat la provisió matemàtica però incrementant també les primes successives, etc.

¹⁶ Normalment s'estableix que cada contracte gaudirà d'una part de l'excedent global repartit en funció del valor de la seva provisió.

3. EFECTES DELS CANVIS EN EL TIPUS D'INTERÈS EMPRATS EN LA VALORACIÓ

Amb els actuals criteris tant el tipus d'interès a emprar en el càlcul de la provisió com el propi valor dels diferents actius poden experimentar canvis i si l'assegurador està assumint el risc d'inversió serà ell qui haurà de dotar els dèficits que puguin generar-se com a conseqüència d'aquestes modificacions.

Aquests dèficits poden ser merament transitoris. En aquest supòsit la normativa obliga a *anticipar* a l'assegurador unes pèrdues que potser finalment no es produiran, però també en cas de produir-se superàvits poden ser només transitoris. Cal, doncs, aprofundir en la relació entre els efectes d'aquests canvis i els diferents riscos financers que justifiquen la dotació d'una reserva per a un dèficit latent o l'atorgament d'una participació d'uns eventuals *guanys* que no sabem segur si es produiran.

3.1 L'asimetria de la situació actual, preponderància del risc de reinversió

Com és sabut el risc d'inversió té dues vessants amb característiques diferents:

- D'una banda, el risc de preu, el qual cospa les eventuals desviacions entre el valor actual dels actius i de la provisió en l'hipotètic cas que s'hagués de liquidar de forma anticipada la inversió, traspasant a un altre assegurador la cartera de contractes existents junt amb les provisions materialitzades.¹⁷
- D'altra banda, el risc de reinversió, el qual pren en consideració les eventuals desviacions que puguin produir-se en el futur com a conseqüència de reinversions a efectuar a tipus diferents als estimats.

En un moment intermedi de la vida del contracte d'assegurança tant el risc de preu com el de reinversió són riscos *potencials*: el de preu perquè si no es liquida la inversió no es materialitzarà i fins i tot revertirà cap al seu valor d'amortització amb el pas del temps; el de reinversió perquè ningú no sap amb certesa quins seran els tipus futurs, encara que considerarem els tipus actuals com a previsió d'aquells.

¹⁷ O bé cedint el valor de rescat a l'assegurat, per això la provisió mai no pot ser inferior a l'esmentat valor.

És el mateix mercat el que ens ofereix el valor actual dels actius que materialitzen les inversions i és l'actiu de referència el que ens ofereix el tipus per calcular el valor de la provisió; per tant, en teoria, els canvis en els tipus d'aquells i d'aquest ens permeten repercutir la incidència del risc de preu en el valor de la cartera d'assegurances de vida.

Però el fet d'haver d'emprar el 60% del tipus de l'actiu de referència en lloc del 100%¹⁸ no té altra justificació que donar preponderància al risc de reinversió, ja que implica cercar l'equilibri en l'hipotètic cas que l'assegurador decidís efectuar totes les reinversions de la forma més *segura* possible (en l'actiu de referència) i que la rendibilitat que pogués obtenir fos el 60% de l'actual.

No es considera, doncs, l'excés de rendibilitat que es pot aconseguir invertint en altres actius que ofereixin un diferencial positiu sobre el 60% de l'actual rendibilitat del deute de l'Estat.

Podem, doncs, concloure que la normativa actual, al marge de les excepcions dels contractes que afecten actius específics per materialitzar les provisions, posa especial èmfasi en el risc de reinversió emprant en el càlcul de la provisió un tipus força prudent.

- El que implícitament està fet la normativa és efectuar una estimació sobre quin pot ser el mínim interès que es pot aconseguir en el futur de la reinversió dels fluxos excedentaris, la qual cosa no és en absolut rebutjable. Aquesta és també una idea que desenvoluparem en aquest treball i que només fa que refermar la importància que es dona al risc de reinversió.

De fet, creiem que si l'assegurador volgués cedir la seva cartera d'assegurances de vida a un tercer la valoració no es correspondria amb els criteris de la normativa, dependria més de la veritable estimació de les inversions ja materialitzades (en funció dels diferencials respecte al tipus d'interès garantit) i dels recàrrecs incorporats als contractes.

3.2 La problemàtica d'estimar el valor de la provisió

Sembla evident que si un assegurador decideix emprar les prerrogatives de seguir valorant els actius a preu d'adquisició o bé, al contrari, s'adapta a la normativa general vigent i, per tant, ha d'emprar per a calcular la provisió el 60% del tipus del deute de l'Estat, no obtindrà els mateixos resultats financers a final d'any.

¹⁸ Aquesta és la norma general que cal emprar.

La utilització d'un criteri o altre en el càlcul de la provisió té una gran importància ja que incideix en els fets següents:

- El valor de l'excedent obtingut i, per tant, en el tipus de rendibilitat a posteriori obtinguda cada any.
- El càlcul del marge de solvència.
- L'import del total de recursos a repartir com a participació en guanys.¹⁹

Si, pel motiu que sigui, la provisió augmenta, l'excedent obtingut es redueix i viceversa; si aquest excedent fos de disposició exclusiva de l'assegurador es podria argumentar que els imports d'un any es compensarien amb els d'altres períodes posteriors però, com que en general s'atorga part de l'excedent a l'assegurat com a participació en guanys, els *excessos* d'un any no es compensen amb dèficits o guanys menors d'anys posteriors.

Per a l'assegurador (i per als seus accionistes) el resultat òptim seria aconseguir cada any una rendibilitat semblant, sempre per sobre de la rendibilitat garantida, així sempre acreditaria participació en guanys gaudint d'una part de l'excedent. Contràriament, anys amb rendibilitat extremadament per sobre de la garantida junt amb anys amb rendibilitats per sota són globalment menys interessants ja que els anys amb superàvit una bona part de l'excedent passa a l'assegurat mentre que els anys amb dèficit tota la pèrdua és a càrrec de l'assegurador.

Com que la determinació de la rendibilitat aconseguida en moments intermedis és una aproximació de la realitat ja que a priori és impossible saber quin serà exactament el volum de fluxos que caldrà reinvertir en el futur i la rendibilitat que es podrà obtenir, llavors el criteri de la seva estimació de forma que la seva dispersió (d'un any a altre) sigui mínima és força important a l'hora d'assignar la participació en guanys.²⁰

En aquest sentit té interès per a l'assegurador analitzar si és preferible emprar els criteris de valoració a preu de mercat o bé seguir amb el criteri tradicional (que ha emprat la valoració d'actius a preu d'adquisició i el càlcul de

¹⁹ Més endavant veurem que a més a més de l'import a repartir podem incidir en el sistema d'assignació. Sobre aquest aspecte no hi ha res de normativament establert.

²⁰ El criteri d'obtenir una variància mínima en les rendibilitats obtingudes any rere any és coherent amb la modelització del contracte d'assegurances mitjançant opcions proposada al capítol primer ja que una variància de les rendibilitats reduïda anirà associada amb una menor volatilitat del valor del subjacent i amb un cost inferior de les opcions i, per tant, amb una participació en guanys més elevada.

la provisió al tipus d'interès garantit) tal com es permet normativament encara que amb certes restriccions.

No obstant això, també tindrà una gran importància teòrica el fet d'analitzar si els diferents criteris que estableix l'adaptació espanyola a la normativa comunitària poden ser inclosos en un únic model de valoració que permeti interpretar les variants de la normativa com a diferents casos particulars.

3.3 La problemàtica de la fixació del valor de rescat

La normativa vigent no explicita la forma de càlcul del valor de rescat. Només indica que la provisió obtinguda no ha de ser inferior en cap cas a l'esmentat valor. Queda, doncs, a discreció dels pactes establerts en el contracte entre assegurat i assegurador qui es farà càrrec de les eventuais desviacions que pugui provocar el risc de preu en cas de rescat.

Com que l'essència financera del contracte de vida és garantir una rendibilitat a llarg termini i les inversions efectuades estan dirigides a obtenir aquesta finalitat creiem que en cas que l'assegurat decidís trencar aquest compromís hauria de ser ell qui suportés els resultats negatius que pogués tenir la venda anticipada d'actius en el mercat secundari.

Per tant, som partidaris d'establir els valors de rescat no mitjançant unes taules fixes en funció dels anys pendents fins al venciment del contracte sinó de forma dinàmica en funció de la vida residual del contracte però també tenint en compte l'evolució de la rendibilitat d'un actiu de referència.²¹

Una estratègia d'aquest tipus no impedirà que es produeixin rescats però evitarà una actuació especulativa dels assegurats cancel·lant contractes i reinvertint l'import rescatat en altres de nous.

Si s'aconsegueix que el valor de rescat es determini en funció del valor de mercat dels actius invertits llavors, per a l'assegurador, la variació del nombre de rescats modificarà els fluxos esperats de la cartera d'assegurances. Però serà neutral des d'un punt de vista financer encara que no ho sigui necessàriament des del punt de vista de l'amortització de les despeses generades en la captació del negoci d'assegurances.

L'avantatge d'aquesta neutralitat des del punt de vista financer és que per a l'assegurador (des del vessant d'estalvi del contracte) serà indiferent que el contracte es cancel·li perquè s'hagi esdevingut un dels fets assegurats (s'alliberarà la provisió constituïda valorada a preu de *mercat* i es disposarà

²¹ El problema del valor de rescat pot analitzar-se considerant que és una opció la prima de la qual es paga en el moment de l'exercici (només si aquest es materialitza). Així ho consideren Alegre i Borrell (1989).

d'actius valorats a preu de mercat) o bé que la cancel·lació sigui per decisió voluntària de l'assegurat (també s'alliberarà la provisió a preu de *mercat* i es disposarà dels corresponents actius).

Per tant, per incloure l'impacte dels rescats en l'anàlisi només caldrà modificar la taula de mortalitat emprada en la valoració incorporant-hi les eventuais cancel·lacions voluntàries com si fossin més sinistres produïts dins del període que s'estigui analitzant.

3.4 La no-neutralitat del sistema de participació en guanys

Tal com hem observat en les normatives comunitària i espanyola el sistema de participació en guanys pot ser escollit lliurement per l'assegurador, que només ha de tenir cura de reconèixer les participacions acreditades com a drets dels assegurats i tenir-les en compte en el moment de calcular les provisions. Podria semblar aparentment que des del vessant financer fos indiferent el sistema de participació que s'escollís.

La realitat és força diferent: no és el mateix retornar a l'assegurat l'import de la participació en guanys, la qual cosa implica la desinversió de part dels actius, que reconèixer a l'assegurat certs drets addicionals com a contraprestació de l'esmentada participació.

Aquest reconeixement pot ser irrevocable i a tots els efectes. Llavors, en cas de rescat l'assegurat tindria dret a la participació, o pot trobar-se condicionat al compliment d'alguna condició addicional, per exemple, seguir pagant totes les primes previstes en el contracte o que l'assegurador no tingui dèficits financers en la resta d'anys pendents del contracte. Resulta evident que les característiques específiques del sistema de participació escollit no són pas neutrals des de la perspectiva del risc financer de l'assegurador.

De fet, dels tres aspectes analitzats de la normativa comunitària i la legislació espanyola, que són: forma de càlcul de la provisió, determinació del marge de solvència i acreditació de la participació en guanys, només en aquest darrer cas l'assegurador pot escollir quasi lliurement l'estratègia que vol adoptar.

És, doncs, amb el sistema de participació en guanys -que esdevindrà un element cabdal de control de la solvència financera de l'assegurador a llarg termini- on l'assegurador pot esmerçar *imaginació* per tal d'oferir un sistema atractiu a l'assegurat i alhora que ajudi a mantenir la solvència a llarg termini.

Capítol 3

Segmentació dels fluxos de les assegurances de vida

Ever since the Equitably Society was formed in the United Kingdom in 1762, life insurance contracts have been sold which guarantee continuation of cover year after year at the same level of premium and benefit and with no further evidence of medical health.

P.Booth et al. (Modern Actuarial Theory and Practice)

Hem dividit aquest capítol en tres parts: en la primera part fem una descripció de l'assegurança que estudiem, primer des de la perspectiva de l'assegurat i després des de la perspectiva de l'assegurador que gestiona una cartera de contractes de les mateixes característiques.

En la segona part analitzarem la forma de segmentar els fluxos que genera l'assegurança de vida en els vessants de risc i d'estalvi, la qual cosa ens permetrà entendre com els canvis en els tipus d'interès afecten el contracte i podrem analitzar els factors que incrementen o disminueixen aquest risc.

Per fer-ho copsarem l'evolució de l'assegurança primer retrospectivament i després cercarem una interpretació prospectiva d'aquell vessant d'estalvi (és el que analitzarem profundament) que s'adiu millor amb la forma de calcular el valor dels compromisos adquirits per l'assegurador d'acord amb els criteris de la tercera directiva de vida.

També analitzarem, en la tercera part, com es poden incorporar els fluxos provinents de la participació en guanys i demostrarem que la forma en què es faci aquesta assignació no és neutral respecte al risc financer d'un assegurador que està gestionant una cartera.

1 DESCRIPCIÓ I ANÀLISI DE L'ASSEGURANÇA QUE S'ESTUDIA

Dins dels productes de vida amb garantia de tipus d'interès i participació amb guanys ens hem centrat en un tipus d'assegurança de vida molt usual ja que és una de les classificades com a elementals.¹ Es coneix com a *endowment insurance*.

En un *endowment* **l'assegurat percep un capital si arriba viu al moment prefixat com a venciment del contracte o bé percep un capital** (igual o diferent a l'anterior) **si mor² en qualsevol moment abans de l'esmentat venciment**. La relació entre el capital al venciment (o de supervivència) i el capital en cas de mort pot ser ben diversa:

- De vegades el capital en cas de supervivència és igual a zero i l'assegurat només té dret a una prestació si mor abans del venciment n , llavors es parla d'un *term insurance*.
- De vegades el capital en cas mort és zero. Llavors l'assegurat només té dret a una prestació en cas de supervivència al venciment n ; en aquest cas es parla d'un *pure endowment insurance*.
- De vegades coexisteixen ambdós tipus de prestacions; per tant, és segur que hi haurà un pagament en un moment $t \leq n$. És un cas particular que la prestació sigui sempre la mateixa, al marge de quin sigui el moment en el qual es faci el pagament.
- Totes aquestes assegurances poden ser contractades a prima única o a primes periòdiques amb un nombre d'anys de pagament igual al termini màxim previst pel contracte. Un cas particular força freqüent és que totes les primes periòdiques siguin del mateix import.

En aquest treball considerarem el cas més general on es combina la percepció d'un capital en cas de mort amb un capital al venciment (no necessàriament iguals). L'assegurança pot ser contractada a prima única o a primes periòdiques.

L'assegurança gaudirà en tots els casos d'un tipus d'interès garantit (sempre el mateix) **durant tota la vigència del contracte** (encara que aquesta no

¹ Així la defineix Gerber (1997) a *Life Insurance Mathematics*, pàg. 25; o bé, Daykin, Pentikäinen i Pesonen (1994) a *Practical Risk Theory for Actuaries*, pàg. 409.

² També es poden considerar cobertures complementàries com per exemple la bestreta del capital en cas de mort si l'assegurat esdevé invàlid.

és condició necessària per a un *endowment insurance*). **També s'inclourà el dret a gaudir d'una participació en guanys anual si existeix excedent financer per a atorgar-la**, la qual en principi s'acreditarà com una prima única per a una assegurança de les mateixes característiques que la considerada i amb un termini igual a la vida residual del contracte.

Per tant, la participació en guanys una vegada atorgada tindrà el mateix tractament que qualsevol prima que pugui aportar l'assegurador, és a dir, a partir d'aquell instant gaudirà també del tipus d'interès garantit.

1.1 Equació general d'equilibri conjunt d'ambdós vessants

Igual que per a la resta d'assegurances, quan es considera un únic tipus d'interès, l'equació inicial d'equilibri (sense incorporar-hi recàrrecs) s'estableix igualant el valor actual dels fluxos esperats a satisfer per l'assegurador (pagaments esperats) i els fluxos que ha de satisfer l'assegurat (primes esperades).

En endavant considerarem que els pagaments s'efectuen a final de l'any en el qual ens trobem mentre que els cobraments es perceben a l'inici. Denominarem:

- $E(C_j)$ el valor esperat del capital que ha de satisfer l'assegurador al final de l'any j d'acord amb una taula de mortalitat específica.
- $E(\Pi_j)$ el valor esperat de la prima que ha de satisfer l'assegurat a l'inici de l'any j d'acord amb una taula de mortalitat específica.
- El valor actual de tots els capitals ha de satisfer l'assegurador, valorats al tipus d'interès tècnic (garantit) i , s'expressarà així:³

$$C_0(i) = \sum_{j=1}^n E(C_j) \cdot e^{-ij}$$

i el valor actual de totes les primes:

$$\Pi_0(i) = \sum_{j=1}^n E(\Pi_j) \cdot e^{-i(j-1)}.$$

Així doncs, l'equació inicial d'equilibri és:

³ Admetem que som capaços de determinar quin serà aquest tipus i posteriorment discutirem el seu mètode d'estimació.

$$C_0(i) = \Pi_0(i), \quad (1.1.1)$$

la qual també es pot expressar en funció del valor de la provisió matemàtica en el moment zero, que denominem $V_0(i)$ i la definim com la diferència en aquest moment entre el valor actual dels compromisos futurs de l'assegurador menys el valor actual dels compromisos de l'assegurat.

Per tant, l'equació inicial d'equilibri és, també:

$$V_0(i) = C_0(i) - \Pi_0(i) = 0. \quad (1.1.2)$$

El valor de la provisió matemàtica adquirirà força importància al llarg d'aquest treball pels motius següents:

- D'una banda incideix en el càlcul de l'excedent financer aconseguit.
- D'altra serveix de base per al càlcul del marge legal de solvència.
- Sovint serveix com a base per assignar la participació en guanys atorgada a l'assegurat.

1.2 Equació d'equilibri en funció dels capitals en risc i a venciment

El resultat econòmic que obté l'assegurador que gestiona una cartera d'assegurances formada amb contractes com l'esmentat pot veure's influït tant per desviacions en els aspectes demogràfic i actuària (afecten la taula de mortalitat) com per desviacions en els aspectes financers.⁴

Qualsevol anàlisi tècnica acurada d'una assegurança ha de separar ambdós efectes i així ho fem en aquest treball amb les consideracions següents:

- La finalitat bàsica del vessant de risc és poder satisfer el capital en risc en cas de mort de l'assegurat, és a dir, el capital pactat al contracte menys la provisió constituïda fins llavors pel vessant d'estalvi del contracte⁵.
- La finalitat bàsica del vessant d'estalvi és la constitució del capital sol·licitat per l'assegurat al venciment.

⁴ No analitzem eventuais desviacions en les despeses.

⁵ Els hereus de l'assegurat percebran llavors tot el capital ja que la vessant d'estalvi afegirà al pagament de la vessant de risc la provisió constituïda i s'anul·laran ambdós vessants del contracte.

Considerarem primer el cas més general de contractes a primes periòdiques, després tractarem com a cas particular el de primes úniques. Per acabar subdividim les diferents prestacions que apareixen en l'equació d'equilibri en vessant d'estalvi i vessant de risc.

Primer explicitarem la forma tradicional de determinar quins són els pagaments i cobraments esperats (per l'assegurador) en una assegurança de vida formalitzada per un assegurat d'edat actuarial x .

Es considera C el capital pactat a venciment i C_j el capital que ha de pagar l'assegurador en l'any j en cas de mort de l'assegurat. Denominem:

- $E(C) = C \cdot {}_n p_x$ el valor esperat del pagament que ha d'efectuar l'assegurador al final de l'any n (venciment del contracte) en funció del capital C .⁶
- $E(C_j) = C_j \cdot {}_{j-1} p_x \cdot q_{x+j-1}$ el valor esperat del pagament que ha d'efectuar l'assegurador, en cas de mort de l'assegurat, al final de l'any j .⁷
- $E(\Pi_j) = \Pi_j \cdot {}_{j-1} p_x$ la prima esperada que ha de satisfer l'assegurat a l'inici de l'any j si l'assegurat és viu quan l'any comença, sempre que $j \leq n$.⁸

Llavors, substituint les tres expressions anteriors en (1.1.2) la nova equació d'equilibri serà, considerant que la provisió ha de ser la diferència entre valors esperats actuals de pagaments i cobraments (des de la perspectiva de l'assegurador):

$$V_0(i) = \sum_{j=1}^n C_j \cdot {}_{j-1} p_x \cdot q_{x+j-1} \cdot e^{-ij} + C \cdot {}_n p_x \cdot e^{-in} - \sum_{j=1}^n \Pi_j \cdot {}_{j-1} p_x \cdot e^{-i(j-1)} = 0 \quad (1.2.1)$$

⁶ Recordem que ${}_n p_x$ és la probabilitat que una persona d'edat x en el moment d'entrada visqui fins a $x + n$ i pugui percebre el capital assegurat.

⁷ Recordem que ${}_{j-1} p_x \cdot q_{x+j-1}$ és la probabilitat que una persona d'edat x visqui fins a $x + j - 1$ i mori l'any següent.

⁸ Recordem que ${}_{j-1} p_x$ és la probabilitat que una persona d'edat x en el moment d'entrada visqui fins a $x + j - 1$ i pugui pagar anticipadament la prima j .

Tant l'expressió (1.1.2) com la (1.2.1) són essencialment estàtiques i no ens donen informació respecte els riscos financers que està assumint l'assegurador.

1.3 Relació general de recurrència de la provisió d'un contracte

És usual emprar el mètode de recurrència de Fouret⁹ per expressar el valor de la provisió d'un any determinat en funció de la de l'any anterior. Les etapes que cal seguir a partir de la provisió matemàtica d'un any, considerant que la prima es percep a l'inici de l'any i els pagaments se satisfan al final són:

- Afegir a la provisió anterior la prima percebuda a l'inici de l'any.
- Capitalitzar la suma anterior fins al final de l'any.
- Deduir del valor capitalitzat el pagament esperat al final d'any.
- Aplicar la provisió resultant només als contractes que continuïn en vigor al final d'aquell any.

Llavors, emprant aquest mètode per al contracte que hem presentat, la provisió del primer any en funció de la provisió inicial (que és zero) seria:

$$V_1(i) = \frac{(V_0(i) + \Pi_1) \cdot e^i - C_1 \cdot q_x}{p_x}, \quad (1.3.1)$$

on q_x és la probabilitat de pagar el capital en cas de mort el primer any per un assegurat d'edat x i p_x és la probabilitat que un assegurat continuï com a tal a finals d'any.

Cal distingir que $V_1(i)$ és la provisió d'un contracte que continua en vigor mentre que $V_1(i) \cdot p_x$ és l'import de la provisió global que gestiona l'assegurador.

Llavors, si ens centrem en l'**enfocament de l'assegurador, l'import de la provisió global esperada** per al segon any seria:

$$V_2(i) \cdot p_x = [V_1(i) \cdot p_x + \Pi_2 \cdot p_x] \cdot e^i - C_2 \cdot p_x \cdot q_{x+1}. \quad (1.3.2)$$

I des del punt de vista de **l'assegurat que continua en vigor:**

⁹ Ho podem veure a Lasheras (1948), pàg. 538.

$$V_2(i) = \frac{[V_1(i) \cdot p_x + \Pi_2 \cdot p_x] \cdot e^i - C_2 \cdot p_x \cdot q_{x+1}}{{}_2p_x}, \quad (1.3.3)$$

o, com que ${}_2p_x = p_x \cdot p_{x+1}$, substituint i simplificant a (1.3.3) resulta:

$$V_2(i) = \frac{[V_1(i) + \Pi_2] \cdot e^i - C_2 \cdot q_{x+1}}{p_{x+1}} \quad (1.3.4)$$

Desenvolupant les anteriors expressions per als anys següents arribaríem a obtenir:

1. Des de la vessant de la provisió global gestionada per l'assegurador,

$$V_{k+1}(i) \cdot {}_{k+1}p_x = [V_k(i) \cdot {}_k p_x + \Pi_{k+1} \cdot {}_k p_x] \cdot e^i - C_{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} \quad (1.3.5)$$

2. i des de **la perspectiva de l'assegurat** que continua,

$$V_{k+1}(i) = \frac{[V_k(i) + \Pi_{k+1}] \cdot e^i - C_{k+1} \cdot q_{x+k}}{p_{x+k}} \quad (1.3.6)$$

Ja que, recordem: ${}_{k+1}p_x = {}_k p_x \cdot p_{x+k}$,

on l'expressió (1.3.6) és una versió de l'equació de Fouret aplicada al tipus considerat d'assegurança.¹⁰

1.4 La provisió global gestionada per l'assegurador

L'expressió (1.3.6) correspon a la provisió d'un contracte que segueixi *viu* al final de l'any $k + 1$ però en aquest treball no analitzem un contracte de forma aïllada sinó que volem obtenir conclusions respecte a la gestió global d'una cartera; per tant, el que és significatiu és l'import de la provisió globalment gestionada (valor esperat) per l'assegurador, representada per l'expressió (1.3.5) i que al final de l'any k seria $V_k(i) \cdot {}_k p_x$.

En endavant denominarem aquest valor global de la provisió: $VT_k(i)$ i es produirà la relació:

$$VT_k(i) = V_k(i) \cdot {}_k p_x. \quad (1.4.1)$$

¹⁰ Aquesta presentació és semblant a la proposada per Vegas i Nieto de Alba (1993), pàg. 15, amb l'única diferència que allà s'ha considerat un capital unitari en cas de mort.

Llavors, si l'assegurador gestiona una cartera d' n contractes de les mateixes característiques la provisió total que estarà invertint en funció de la provisió específica d'un contracte seria:

$$n \cdot V_k(i) \cdot p_x.$$

2. SEGMENTACIÓ DEL CONTRACTE: VESSANT DE RISC I VESSANT D'ESTALVI

A partir de l'equació de recurrència (1.3.6), que era:

$$V_{k+1}(i) = \frac{[V_k(i) + \Pi_{k+1}] \cdot e^i - C_{k+1} \cdot q_{x+k}}{p_{x+k}},$$

obindrem una expressió que ens permetrà segmentar els fluxos del vessant de risc i vessant d'estalvi. Aquests darrers són els que després analitzarem.

Recordem que C_{k+1} és el capital pactat contractualment que ha de satisfer l'assegurador en cas de mort de l'assegurat.

L'anterior expressió (1.3.6) pot ser escrita així:

$$[V_k(i) + \Pi_{k+1}] \cdot e^i = C_{k+1} \cdot q_{x+k} + p_{x+k} \cdot V_{k+1}(i). \quad (2.1)$$

L'expressió (2.1) es troba valorada en $k + 1$, el seu valor en k podem obtenir-lo actualitzant el valor en $k + 1$ durant un any, el qual serà:

$$e^{-i} \cdot [V_k(i) + \Pi_{k+1}] \cdot e^i = e^{-i} \cdot C_{k+1} \cdot q_{x+k} + e^{-i} \cdot p_{x+k} \cdot V_{k+1}(i). \quad (2.2)$$

I com que és per tots conegut que la suma de les probabilitats de dos esdeveniments contraris suma la unitat, és a dir:

$$p_{x+k} = 1 - q_{x+k},$$

l'expressió (2.2) també pot escriure's de la manera següent:

$$e^{-i} \cdot [V_k(i) + \Pi_{k+1}] \cdot e^i = e^{-i} \cdot C_{k+1} \cdot q_{x+k} + e^{-i} \cdot (1 - q_{x+k}) \cdot V_{k+1}(i). \quad (2.3)$$

Simplificant-la i agrupant termes en (2.3) s'obté:

$$V_k(i) + \Pi_{k+1} = e^{-i} \cdot V_{k+1}(i) + e^{-i} \cdot [C_{k+1} - V_{k+1}(i)] \cdot q_{x+k}. \quad (2.4)$$

L'expressió (2.4) pot interpretar-se de la forma següent:

El primer terme, $V_k(i) + \Pi_{k+1}$, representa l'origen dels fons de l'assegurat, d'una part la provisió matemàtica i de l'altra, la prima aportada.

El segon terme, $e^{-i} \cdot V_{k+1}(i) + e^{-i} \cdot [C_{k+1} - V_{k+1}(i)] \cdot q_{x+k}$, representa l'aplicació d'aquests fons, una part haurà de nodrir la provisió del proper any i l'altra s'haurà de destinar al pagament del capital en cas de mort.

Aquesta segona part es troba relacionada amb la probabilitat de mort, que és q_{x+k} i està actualitzat a l'inici d'any.

És a dir, la prima pura (sense recàrrecs) que haurà de ser destinada a aquesta finalitat, valorada a l'inici de l'any serà:

$$e^{-i} \cdot [C_{k+1} - V_{k+1}(i)] \cdot q_{x+k},$$

mentre que el capital sobre el qual s'haurà de satisfer prima serà:

$$C_{k+1} - V_{k+1}(i) .$$

Aquest import es denomina *the net amount at risk* i és **l'aportació del vessant de risc del contracte en cas de sinistre** ja que representa el capital pactat menys el valor de la provisió matemàtica constituïda fins a aquell moment, import que pot ser alliberat ja que després d'haver satisfet el pagament s'anul·larà el contracte d'assegurança.

Per tant, **al marge de quin sigui el capital pactat per l'assegurat en cas de mort l'aportació del vessant d'estalvi del contracte serà sempre la mateixa: exactament l'import de la provisió matemàtica constituïda fins a aquell moment.**

Ens trobem, doncs, en condició d'analitzar la subdivisió de la prima total en els dos vessants, prima de risc i prima d'estalvi. Si partim de l'expressió (2.4) i aïllem la prima total obtenim:

$$\Pi_{k+1} = e^{-i} \cdot V_{k+1}(i) + e^{-i} \cdot [C_{k+1} - V_{k+1}(i)] \cdot q_{x+k} - V_k(i), \quad (2.5)$$

la qual, reordenada, resulta ser:

$$\Pi_{k+1} = [e^{-i} \cdot V_{k+1}(i) - V_k(i)] + e^{-i} \cdot [C_{k+1} - V_{k+1}(i)] \cdot q_{x+k}. \quad (2.6)$$

Llavors podem observar que la prima de Π_{k+1} es pot dividir en dues components, una d'estalvi i una altra, de risc.

Denominant Π_{k+1}^e la part d'estalvi i Π_{k+1}^r la de risc, tals que:

$$\Pi_{k+1} = \Pi_{k+1}^e + \Pi_{k+1}^r,$$

llavors, la prima del vessant d'estalvi seria:

$$\Pi_{k+1}^e = e^{-i} \cdot V_{k+1}(i) - V_k(i) \quad (2.7)$$

i la del vessant de risc:

$$\Pi_{k+1}^r = e^{-i} \cdot [C_{k+1} - V_{k+1}(i)] \cdot q_{x+k} \quad (2.8)$$

Cal recordar el següent:

- Si l'assegurat mor dins de l'any al qual correspon l'anterior prima de risc, l'assegurador s'haurà de satisfer al final de l'any el capital C_{k+1} .
- El vessant de risc només aportarà el capital $C_{k+1} - V_{k+1}(i)$.
- El vessant d'estalvi del contracte aportarà la diferència, és a dir: $V_{k+1}(i)$.

Aquests pagaments només s'hauran de satisfer quan sobrevingui l'esdeveniment assegurat i la probabilitat per a l'any $k + 1$ és q_{x+k} .

D'ara en endavant obviarem haver d'explicitar quin és el capital que l'assegurat ha pactat en cas de mort ja que hem comprovat que des del vessant d'estalvi el pagament sempre és independent d'aquell capital.¹¹

El vessant d'estalvi aportarà, únicament i exclusivament:

$$V_{k+1}(i) \cdot q_{x+k} \quad (2.9)$$

Aquest valor no és altre que la provisió constituïda fins a aquell moment multiplicada per la probabilitat que esdevingui el fet assegurat.

2.1 Relació de recurrència del vessant d'estalvi d'un contracte

La relació de recurrència de la provisió global d'un contracte es representa per l'expressió (1.3.6), que era:

$$V_{k+1}(i) = \frac{[V_k(i) + \Pi_{k+1}] \cdot e^i - C_{k+1} \cdot q_{x+k}}{p_{x+k}},$$

mentre que la relació per al total de provisió gestionada per l'assegurador, d'acord amb (1.3.5), era:

$$V_{k+1}(i) \cdot p_{x+k} = [V_k(i) \cdot p_x + \Pi_{k+1} \cdot p_x] \cdot e^i - C_{k+1} \cdot p_x \cdot q_{x+k},$$

¹¹ Així doncs, només serà significatiu el capital pactat en cas de supervivència, denominat C .

on, en ambdós casos, C_{k+1} representa el capital que cal satisfer en cas de sinistre.

Si ara volem analitzar la relació de recurrència del vessant d'estalvi, l'únic que hem de fer es substituir la prima global per la prima d'estalvi i el pagament global pel pagament que farà el vessant d'estalvi,¹² que recordem serà funció de la provisió constituïda en aquell moment (final d'any): $V_{k+1}(i)$.

Efectuant l'esmentada substitució en l'expressió (1.3.5) obtenim:

$$V_{k+1}(i) \cdot {}_{k+1}p_x = [V_k(i) \cdot {}_k p_x + \Pi_{k+1}^e \cdot {}_k p_x] \cdot e^i - V_{k+1}(i) \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} \quad (2.1.1)$$

Com que recordem que ${}_{k+1}p_x = {}_k p_x \cdot p_{x+k}$,

llavors l'expressió (2.1.1) pot escriure's també:

$$V_{k+1}(i) \cdot {}_k p_x \cdot p_{x+k} = [V_k(i) \cdot {}_k p_x + \Pi_{k+1}^e \cdot {}_k p_x] \cdot e^i - V_{k+1}(i) \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} \quad (2.1.2)$$

Dividint ambdós termes de (2.1.2) per ${}_k p_x$ resulta:

$$V_{k+1}(i) \cdot p_{x+k} = [V_k(i) \cdot + \Pi_{k+1}^e] \cdot e^i - V_{k+1}(i) \cdot q_{x+k} \quad (2.1.3)$$

Reordenant (2.1.3) obtenim:

$$V_{k+1}(i) = \frac{[V_k(i) + \Pi_{k+1}^e] \cdot e^i - V_{k+1}(i) \cdot q_{x+k}}{p_{x+k}} \quad (2.1.4)$$

expressió que ens indica el valor de la provisió del contracte des del vessant de l'assegurat. Reordenant aquesta expressió resulta:

$$V_{k+1}(i) \cdot p_{x+k} + V_{k+1}(i) \cdot q_{x+k} = [V_k(i) + \Pi_{k+1}^e] \cdot e^i \quad (2.1.5)$$

i com que:

$$p_{x+k} + q_{x+k} = 1,$$

simplificant (2.1.5) obtenim, **des del vessant de l'assegurat que continua amb el contracte**, la relació de recurrència de la provisió d'un contracte, únicament de la part d'estalvi, que serà:

$$V_{k+1}(i) = [V_k(i) + \Pi_{k+1}^e] \cdot e^i \quad (2.1.6)$$

¹² La provisió matemàtica correspon íntegra al vessant d'estalvi i la provisió del vessant de risc al final d'any és igual a zero.

2.2 Determinació de la prima anivellada del vessant d'estalvi

En l'assegurança que estem analitzant **establirem la condició, força usual en la pràctica, que la prima del vessant d'estalvi sigui constant durant tota la vigència de l'assegurança**. Per tant, d'ara en endavant la denominem exclusivament Π^e .

Llavors, l'expressió (2.1.6) seria ara:

$$V_{k+1}(i) = [V_k(i) + \Pi^e] \cdot e^i. \quad (2.2.1)$$

Ara el que pretenem és determinar el valor de la prima d'estalvi en funció del capital que cal constituir, del tipus d'interès i del termini del contracte.

També sabem que el valor de la provisió en el moment inicial és igual a zero, és a dir, $V_0(i) = 0$, i que quan venci el contracte s'ha de satisfer el capital pactat C als supervivents.

Per determinar la prima analitzarem mitjançant l'expressió (2.2.1) l'evolució de la provisió al llarg de diferents anys i establirem un procés inductiu.

- **Provisió al final del primer any**

A partir de (2.2.1) i considerant que la provisió a l'inici és zero, la provisió al final del primer any serà:

$$V_1(i) = [0 + \Pi^e] \cdot e^i = \Pi^e \cdot e^i. \quad (2.2.2)$$

- **Provisió al final del segon any**

A partir de (2.2.2), podem cercar el valor de la provisió al final del segon any, que serà:

$$V_2(i) = [V_1(i) + \Pi^e] \cdot e^i \quad (2.2.3)$$

i substituint $V_1(i)$ pel seu valor en (2.2.2), que és $\Pi^e \cdot e^i$, resulta:

$$V_2(i) = \Pi^e \cdot S_{2|i} \cdot e^i \quad (2.2.4)$$

...

- **Provisió al final de l'any n**

Mitjançant un procés inductiu podem expressar la provisió d'un contracte que arriba a n en funció del valor en $n-1$, que serà:

$$V_n(i) = [V_{n-1}(i) + \Pi^e] \cdot e^i \quad (2.2.5)$$

i substituint $V_{n-1}(i)$ pel seu valor, que mitjançant el procés inductiu sabem que serà: $\Pi^e \cdot S_{n-1|i} \cdot e^i$, resulta:

$$V_n(i) = \Pi^e \cdot S_{n|i} \cdot e^i \quad (2.2.6)$$

Com que el valor final de la provisió ha de servir per satisfer el capital C pactat amb l'assegurat a venciment, resulta evident que també:

$$V_n(i) = C \quad .$$

- Per tant, la prima d'estalvi del contracte ha de ser igual a:

$$\Pi^e(C, n, i) = \frac{C}{S_{n|i} \cdot e^i}, \quad (2.2.7)$$

on i és el tipus d'interès de capitalització instantània garantit al contracte d'assegurança. Per tant, la prima del vessant d'estalvi és funció (exclusivament) del capital a constituir, del termini del contracte i del tipus d'interès considerat.

Cal doncs observar que **des del punt de vista de l'assegurat que arriba a venciment l'operació és estrictament financera** al marge del pagament de primes de risc que hagi pogut satisfer si ha contractat capitals addicionals en cas de mort o invalidesa.

2.3 Determinació de la prima única del vessant d'estalvi

En el cas d'un contracte a prima única (que tractarem com un cas particular del de primes periòdiques) l'assegurat satisfà tota la prima, que representarem per Π_U , en el moment de formalitzar el contracte.

Per cercar el seu valor emprarem la relació de recurrència (2.2.1) però considerarem que les primes diferents de la primera són zero. Llavors:

- **Provisió al final del primer any**

A partir de l'expressió (2.2.1) i considerant que la provisió a l'inici és zero cerquem el valor de la provisió al final, que serà:

$$V_1(i) = [0 + \Pi_U] \cdot e^i = \Pi_U \cdot e^i \quad (2.3.1)$$

- **Provisió al final del segon any**

A partir de l'expressió (2.2.1), podem cercar el valor de la provisió des de la perspectiva de l'assegurat, llavors:

$$V_2(i) = [V_1(i) + 0] \cdot e^i \quad (2.3.2)$$

i substituint $V_1(i)$ per $\Pi^e \cdot e^i$, resulta:

$$V_2(i) = \Pi^e \cdot e^{2i} \quad (2.3.3)$$

...

- **Provisió al final de l'any n**

A partir de l'esmentada expressió (2.3.3) i mitjançant un procés inductiu podem expressar la provisió d'un contracte que arriba a n en funció del valor en $n-1$, que serà:

$$V_n(i) = [V_{n-1}(i) + 0] \cdot e^i. \quad (2.3.4)$$

I substituint $V_{n-1}(i)$ pel seu valor que serà $\Pi^e \cdot e^{(n-1)i}$, resulta:

$$V_n(i) = \Pi_u \cdot e^{ni}. \quad (2.3.5)$$

Com que el valor final de la provisió ha de servir per satisfer el capital C pactat amb l'assegurat a venciment, és a dir: $V_n(i) = C$,

- per tant, resulta evident que la prima única del contracte ha de ser igual a:

$$\Pi_u(C, n, i) = \frac{C}{e^{ni}}. \quad (2.3.6)$$

La prima única del vessant d'estalvi és funció del capital a constituir, del termini del contracte i del tipus d'interès considerat.

2.4 Valor total de la provisió del vessant d'estalvi

Acabem de comprovar que la prima del vessant d'estalvi que hem obtingut no depèn de l'edat de l'assegurat; per tant, des de la seva perspectiva l'operació és estrictament financera, però el que ens interessa analitzar és el valor dels recursos que gestiona l'assegurador a cada moment.

Recordem l'expressió (1.4.1) que relaciona la provisió total que gestiona l'assegurador amb la provisió d'un contracte específic, que era:

$$VT_k(i) = V_k(i) \cdot p_x.$$

Comprovarem ara que aquesta relació es manté també pel vessant d'estalvi del contracte. Cercarem, doncs, el valor del total de les provisions any rere any, analitzant la seva evolució des de l'inici del conjunt de contractes:

- **Valor total de la provisió al final del primer any**

Considerant que el valor total de la provisió a l'inici és zero cerquem el valor total de la provisió al final, que serà el valor cobrat (pel vessant d'estalvi) capitalitzat un any menys l'alliberament a final d'any del valor constituït pels assegurats que hagin mort:

$$VT_1(i) = [0 + \Pi^e] \cdot e^i - [0 + \Pi^e] \cdot e^i \cdot q_x. \quad (2.4.1)$$

Reordenant aquesta expressió obtenim:

$$VT_1(i) = [0 + \Pi^e] \cdot e^i \cdot (1 - q_x)$$

i per tant, resulta:

$$VT_1(i) = \Pi^e \cdot e^i \cdot p_x. \quad (2.4.2)$$

- **Valor total de la provisió al final del segon any**

A partir de l'expressió (2.4.2) podem cercar el valor del total de la provisió al final del segon any, però hem de recordar que l'assegurador només percebrà primes pels contractes que segueixin en vigor, si hem considerat que la probabilitat que s'anul·li el primer any era q_x la probabilitat de cobrar la prima de l'any següent serà:

$$1 - q_x = p_x.$$

Per tant, l'assegurador rebrà com a prima: $\Pi^e \cdot p_x$.

Llavors:

$$VT_2(i) = [VT_1(i) + \Pi^e \cdot p_x] \cdot e^i - [VT_1(i) + \Pi^e \cdot p_x] \cdot e^i \cdot q_{x+1}. \quad (2.4.3)$$

Substituint $VT_1(i)$ pel seu valor d'acord amb (2.4.2) obtenim:

$$VT_2(i) = [\Pi^e \cdot e^i \cdot p_x + \Pi^e \cdot p_x] \cdot e^i - [\Pi^e \cdot e^i \cdot p_x + \Pi^e \cdot p_x] \cdot e^i \cdot q_{x+1}.$$

Reordenant l'expressió s'obté:

$$VT_2(i) = [\Pi^e \cdot e^i \cdot p_x + \Pi^e \cdot p_x] \cdot e^i \cdot (1 - q_{x+1}).$$

I com que $p_x \cdot (1 - q_{x+1}) = {}_2p_x$ resulta:

$$VT_2(i) = \Pi^e \cdot S_{2|i} \cdot e^i \cdot {}_2p_x \quad (2.4.4)$$

...

• **Valor total de la provisió al final de l'any n**

Mitjançant un procés inductiu podem expressar el valor total de la provisió que gestiona un assegurador en funció del valor en $n-1$, així:

$$VT_n(i) = [VT_{n-1}(i) + \Pi^e \cdot {}_{n-1}p_x] \cdot e^i - [VT_{n-1}(i) + \Pi^e \cdot {}_{n-1}p_x] \cdot e^i \cdot q_{x+n-1}. \quad (2.4.5)$$

Substituint $VT_{n-1}(i)$ pel seu valor, que serà:

$$VT_{n-1}(i) = \Pi^e \cdot S_{n-1|i} \cdot e^i \cdot {}_{n-1}p_x$$

i a continuació reordenant l'expressió s'obté:

$$VT_n(i) = [\Pi^e \cdot S_{n-1|i} \cdot e^i + \Pi^e] \cdot {}_{n-1}p_x \cdot e^i - [\Pi^e \cdot S_{n-1|i} \cdot e^i + \Pi^e] \cdot {}_{n-1}p_x \cdot e^i \cdot q_{x+n-1}$$

I com que: ${}_{n-1}p_x \cdot (1 - q_{x+n-1}) = {}_n p_x$ llavors resulta:

$$VT_n(i) = \Pi^e \cdot S_{n|i} \cdot e^i \cdot {}_n p_x. \quad (2.4.6)$$

I, com vam veure a (2.2.6) que:

$$V_n(i) = \Pi^e \cdot S_{n|i} \cdot e^i,$$

llavors queda demostrat, com havíem proposat, que:

$$VT_{k+1}(i) = V_{k+1}(i) \cdot p_{x+k} \quad (2.4.7)$$

i que la relació general de recurrència del total de les provisions que gestiona l'assegurador és:

$$VT_{k+1}(i) = [VT_k(i) + \Pi^e \cdot p_k] \cdot e^i - [VT_k(i) + \Pi^e \cdot p_k] \cdot e^i \cdot q_{x+k}. \quad (2.4.8)$$

La relació ens diu que al valor total de la provisió en k afegirem la prima d'estalvi dels contractes que encara estiguin en vigor i capitalitzarem aquest import durant un any; a final d'any alliberarem la provisió constituïda però únicament pels contractes que han sofert sinistre.

Per tant, des de la perspectiva de l'assegurador sí que existeix aleatorietat tant pel que fa al total de les primes percebudes com als capitals pagats.

2.5 Anàlisi de les components principals del contracte

Des de la perspectiva de l'assegurador els fluxos són aleatoris depenent de l'edat de l'assegurat, de la taula de supervivència emprada i del moment del temps en el qual ens trobem. Així doncs:

- Prima que s'ha de percebre en l'any j -èsim:

$$\bar{P}_j = \Pi^e \cdot {}_{j-1}p_x \cdot \quad (2.5.1)$$

- Pagament que caldrà efectuar en l'any j -èsim:

$$\bar{C}_j = \Pi^e \cdot S_{j|i} \cdot e^i \cdot {}_{j-1}p_x \cdot q_{x+j-1} \cdot \quad (2.5.2)$$

- Capital que caldrà pagar al venciment:

$$\bar{C}_n = \Pi^e \cdot S_{n|i} \cdot e^i \cdot {}_n p_x = C \cdot {}_n p_x \cdot \quad (2.5.3)$$

- Provisió¹³ gestionada per l'assegurador, en l'any j :

$$\Pi^e \cdot S_{j|i} \cdot e^i \cdot {}_j p_x \cdot \quad (2.5.4)$$

Totes aquestes expressions poden veure's modificades si es produeixen desviacions en la mortalitat real respecte a la teòrica que hagi estat considerada. Igual conseqüència tindrien els rescats voluntaris de l'assegurat que, en cas que es produeixin considerarem que alliberaran la provisió matemàtica constituïda.

¹³ Retrospectiva.

2.6 Anàlisi de les components en el cas de prima única

Des de la perspectiva de l'assegurador tindrem:

- Pagament que caldrà efectuar en l'any j -èsim:

$$C_{j(U)}^- = \Pi_U \cdot e^{ij} \cdot {}_{j-1}p_x \cdot q_{x+j-1} \cdot \quad (2.6.1)$$

- Capital que s'ha de pagar al venciment:

$$\bar{C}_n^- = \Pi_U \cdot e^{in} \cdot {}_n p_x = C \cdot {}_n p_x \cdot \quad (2.6.2)$$

- Provisió¹⁴ gestionada en l'any j :

$$\Pi_U \cdot e^{ij} \cdot {}_j p_x \quad (2.6.3)$$

2.7 Equilibri prospectiu del conjunt de recursos que gestiona l'assegurador

En l'apartat anterior hem obtingut el valor de les provisions que gestiona l'assegurador, representades per les expressions (2.5.4) i (2.6.3), **de forma retrospectiva en funció del conjunt d'aportacions efectuades per l'assegurador**, però ja hem comentat en el capítol segon que legalment el càlcul s'ha de fer de forma prospectiva encara que fos possible el càlcul retrospectiu si el valor obtingut no fos inferior al que correspongui al càlcul prospectiu.

De fet, **del conjunt d'expressions obtingudes a 2.5 i 2.6, totes, llevat de les provisions, estan prefixades al contracte d'assegurança i és aquesta la que ha de permetre l'equilibri entre el valor dels compromisos de l'assegurador i l'assegurador en modificar-se les condicions inicials de valoració.**

Així, si definim respectivament¹⁵ per $C_k(i)$ i $P_k(i)$ el valor en el moment k del conjunt dels pagaments que ha d'efectuar l'assegurador i de les primes que ha de satisfer l'assegurador, valorats ambdós al tipus d'interès i ; sent $VT_k(i)$ el valor de la provisió en el mateix moment i al mateix tipus, s'ha de donar l'equilibri:

¹⁴ També retrospectiva.

¹⁵ Estem considerant el cas (més general) d'un contracte a primes periòdiques.

$$VT_k(i) + P_k(i) = C_k(i), \quad (2.7.1)$$

on:

$$C_k(i) = \sum_{j=k+1}^n \bar{C}_j \cdot e^{-i(j-k)} + \bar{C}_n \cdot e^{-i(n-k)},$$

$$P_k(i) = \sum_{j=k+1}^n \bar{P}_j \cdot e^{-i(j-k-1)}.$$

D'acord, respectivament amb les expressions (2.5.1), (2.5.2) i (2.5.3) sabem que:

$$\bar{P}_j = \Pi^e \cdot {}_{j-1}p_x$$

$$\bar{C}_j = \Pi^e \cdot S_{j|i} \cdot e^i \cdot {}_{j-1}p_x \cdot q_{x+j-1}$$

$$\bar{C}_n = \Pi^e \cdot S_{n|i} \cdot e^i \cdot {}_n p_x = C \cdot {}_n p_x.$$

I, per tant, d'acord amb 2.7.1 s'hauria de complir:

$$VT_k(i) + \sum_{j=k+1}^n \bar{P}_j \cdot e^{-i(j-k-1)} = \sum_{j=k+1}^n \bar{C}_j \cdot e^{-i(j-k)} + \bar{C}_n \cdot e^{-i(n-k)}. \quad (2.7.2)$$

A partir de l'expressió (2.7.2) el valor de la provisió calculat prospectivament pot obtenir-se per diferència, és a dir:

$$VT_k(i) = \sum_{j=k+1}^n \bar{C}_j \cdot e^{-i(j-k)} + \bar{C}_n \cdot e^{-i(n-k)} - \sum_{j=k+1}^n \bar{P}_j \cdot e^{-i(j-k-1)} \quad (2.7.3)$$

Segons aquesta expressió tant els capitals com les primes ja estan prefixats però el valor de la provisió es pot modificar en funció de la taula de supervivència considerada i del tipus d'interès emprat en la valoració.

D'ara en endavant serà l'expressió anterior (2.7.3) de la provisió calculada de forma prospectiva la que analitzarem¹⁶ tal com obliga a determinar-la la normativa comunitària.

¹⁶ Si no canvien ni el tipus d'interès ni les previsions demogràfiques les provisions matemàtiques calculades retrospectivament i prospectivament són idèntiques com es pot comprovar a qualsevol manual de matemàtica actuarial de vida.

Cal observar que l'expressió prospectiva ens permet valorar la provisió de forma semblant a com es valoren els actius de renda fixa que materialitzen les inversions dels asseguradors. **La provisió podrà ser, doncs, considerada com un actiu financer amb fluxos contingents i dependents, el valor del qual pot veure's modificat pel risc de tipus interès.**

3. INCORPORACIÓ DELS FLUXOS DERIVATS DE LA PARTICIPACIÓ EN GUANYS

L'assignació de la participació en guanys implica incidir en l'estructura de fluxos del contracte, per tant, s'ha d'analitzar el risc que aquest canvi comporta.

Inicialment considerarem, com és usual en la pràctica, que l'excedent financer es reparteix proporcionalment a la provisió matemàtica de cada contracte¹⁷ (equivalent a la inversió efectuada per l'assegurat) i analitzarem la forma com s'implementa l'esmentada participació. Bàsicament hi ha dues classes d'actuacions possibles:

- Aplicar la participació per reduir la futura prima del contracte d'assegurança (implica, doncs, una desinversió per un import igual a la participació en guanys atorgada).
- Aplicar la participació com l'increment de la provisió matemàtica del contracte amb el corresponent reconeixement d'un nou capital garantit que sigui actuarialment equivalent a l'esmentat increment; equival a considerar l'increment com una prima única d'un contracte de les mateixes característiques.

Des del vessant financera és preferible la segona línia d'actuació ja que no exigeix la desinversió i minva el risc de preu dels actius que s'haurien de vendre, alhora implica que no es redueixi el volum total d'actius que gestiona l'assegurador.

Dins de la segona línia d'actuació, que és la que desenvoluparem a continuació, hem de remarcar que és fins i tot usual aplicar la participació en guanys com una prima única encara que el contracte hagi estat pactat a primes periòdiques. En aquest cas pot produir-se la paradoxa que en el futur l'assegurat deixi de pagar les primes periòdiques pactades i, en canvi, tingui dret a tota la participació en guanys acumulada perquè aquesta hagi estat considerada com una prima única.

Per tant, en aquest treball considerarem dues possibilitats diferents:

- El reconeixement de la participació en guanys atorgada com una nova prima única (sistema tradicional).
- El reconeixement de la participació en guanys com un conjunt de primes periòdiques durant el període de vida residual del contracte.

¹⁷ Posteriorment raonarem la necessitat de modificar aquest criteri.

Creiem doncs necessari que el sistema de participació en guanys emprat sigui coherent amb la forma de pagament que l'assegurat ha escollit per aportar les seves primes. Així si l'assegurat ha pactat una prima única proposarem considerar la participació en guanys també com una prima única d'un contracte de les mateixes característiques a un termini igual a la vida residual del contracte.

En canvi, si l'assegurat ha pactat primes periòdiques proposarem considerar la participació en guanys com un conjunt de primes periòdiques que incrementin les que vagi fent en el futur. Així si l'assegurat decideix cancel·lar el contracte i deixa de satisfer noves primes, la part de la participació en guanys encara no aplicada (relacionada amb les primes que encara restin per satisfer) queda en poder de l'assegurador. En posteriors capítols analitzarem els avantatges que això comporta.

3.1 Incorporació de la participació en guanys com a prima única

El valor de la provisió calculada prospectivament en un moment k és:

$$VT_k(i) = C_k(i) - P_k(i)$$

sent:

$$C_k(i) = \sum_{j=k+1}^n \bar{C}_j \cdot e^{-i(j-k)} + \bar{C}_n \cdot e^{-i(n-k)}$$

$$P_k(i) = \sum_{j=k+1}^n \bar{P}_j \cdot e^{-i(j-k-1)} .$$

En un determinat moment k l'assegurat rep un *bonus* de participació en guanys que denominem $VT_k^*(i)$, el qual es bescanvia per uns *drets* futurs en forma de capital addicional a venciment, que representem per $C^*(i)$.

Recordem la relació entre la prima única d'un contracte i el capital pactat a venciment, que era:

$$\Pi_U = \frac{C}{e^{in}} .$$

Llavors, si considerem que el *bonus* equival a una prima única, és a dir:

$$VT_k^*(i) = \Pi_U$$

i que resta un període de temps igual a $n - k$ fins al venciment, llavors la relació entre el *bonus* i el capital que aquest permet acreditar serà:

$$C^*(i) = VT^*_k(i) \cdot e^{i(n-k)}. \quad (3.1.1)$$

Però l'assegurador només satisfarà aquest capital als assegurats que tenien dret a rebre el *bonus* en el moment $x + k$ que arribin a venciment en n , és a dir, el valor estimat del pagament a venciment serà:

$$VT^*_k(i) \cdot e^{i(n-k)} \cdot {}_{n-k}P_{x+k}. \quad (3.1.2)$$

A més a més l'assegurador haurà de prendre en consideració la quantitat que haurà d'alliberar en un moment j , comptat a partir d'aquell moment k , pels contractes que es vagin cancel·lant, que (estimativament) serà:

$$VT^*_k(i) \cdot e^{ij} \cdot {}_{j-1}P_{x+k} \cdot q_{x+k+j-1} \quad (3.1.3)$$

Per tant, l'equilibri entre el valor del *bonus* i els valors actuals dels pagaments que ha d'efectuar per l'assegurador serà:

$$VT^*_k(i) = \sum_{j=1}^{n-k} [VT^*_k(i) \cdot e^{ij} \cdot {}_{j-1}P_{x+k} \cdot q_{x+k+j-1}] \cdot e^{-ij} + [VT^*_k(i) \cdot e^{i(n-k)} \cdot {}_{n-k}P_{x+k}] \cdot e^{-i(n-k)} \quad (3.1.4)$$

Una vegada fixats els nous capitals reconeguts, que formen el segon terme de (3.1.4), ja **no depenen del tipus de interès, però el seu valor actual sí que és funció del tipus emprat en l'actualització.**

Així, si denominem aquests capitals:

$$\bar{C}_j^* = VT^*_k(i) \cdot e^{ij} \cdot {}_{j-1}P_{x+k} \cdot q_{x+k+j-1}, \quad (3.1.5)$$

$$\bar{C}_{n-k}^* = VT^*_k(i) \cdot e^{i(n-k)} \cdot {}_{n-k}P_{x+k}. \quad (3.1.6)$$

Llavors, substituint (3.1.5) i (3.1.6) en (3.1.4) resulta:

$$VT^*_k(i) = \sum_{j=1}^{n-k} \bar{C}_j^* \cdot e^{-ij} + \bar{C}_{n-k}^* \cdot e^{-i(n-k)}. \quad (3.1.7)$$

Aquesta expressió és semblant al valor prospectiu de la provisió si considerem (cas de la prima única) que les primes futures són iguals a zero.

3.2 Incorporació de la participació en guanys com a primes periòdiques

En aquest cas el *bonus* es bescanvia per $n - k$ primes d'import Π^{e^*} , el valor actual de les quals, calculat al tipus garantit ha de ser igual a l'esmentat *bonus*.

D'aquesta forma només la primera prima addicional s'assignaria com participació en guanys al contracte de referència, successivament quan l'assegurat aportés noves primes (que hem considerat que són iguals) s'aniran incorporant la resta de primes addicionals, fruit de l'esmentada participació en guanys.

L'assegurador *paga* l'interès tècnic per aquest ajornament; per tant, per a l'assegurat que segueixi fent aportacions, aquest sistema (com ara demostrarem) no el perjudica. Però si un assegurat cancel·la anticipadament el contracte sí que percebrà un valor inferior en concepte de participació en guanys.

És a dir, la condició que imposem és que:¹⁸

$$VT_k^*(i) = \Pi^{e^*} \cdot a_{n-k|i} \cdot e^i . \quad (3.2.1)$$

Per tant, en funció del *bonus* la prima periòdica addicional reconeguda seria:

$$\Pi^{e^*} = \frac{VT_k^*(i)}{a_{n-k|i} e^i} \quad (3.2.2)$$

Així, cada un dels anys posteriors a k l'assegurador anirà incorporant al contracte d'assegurança aquesta prima addicional fruit del *bonus* de participació en guanys que des d'aquell moment es capitalitzarà com qualsevol altra prima a l'interès garantit.

3.3 Igualtat del capital final fruit de la participació en guanys

Si cada any s'acredita la prima representada per l'expressió (3.2.2) l'assegurat que arribi a venciment rebrà en concepte de capital addicional fruit d'aquesta participació:

¹⁸ Recordem que resten $n - k$ primes.

$$C^*(i) = \frac{VT_k^*(i)}{a_{n-k|i} e^i} \cdot s_{n-k|i} e^i = VT_k^*(i) \cdot \frac{s_{n-k|i}}{a_{n-k|i}}. \quad (3.3.1)$$

Com que sabem que:¹⁹

$$\frac{s_{n|i}}{a_{n|i}} = e^{in},$$

per tant, l'expressió (3.3.1) resulta ser:

$$C^*(i) = VT_k^*(i) \cdot e^{i(n-k)}, \quad (3.3.2)$$

la qual vol dir que és el mateix capital que l'obtingut amb el criteri d'assignació de la participació en guanys com una nova prima única d'acord amb (3.1.1)

Abans, en l'expressió (3.2.2) hem obtingut la prima periòdica que permet acreditar aquest sistema de participació en guanys en funció del valor actual del *bonus*, expressió que era:

$$\Pi^{e*} = \frac{VT_k^*(i)}{a_{n-k|i} \cdot e^i}.$$

Aquesta prima periòdica també es pot obtenir a partir del valor final (capitalitzant numerador i denominador de l'expressió 3.2.2), llavors el seu valor seria:

$$\Pi^{e*} = \frac{VT_k^*(i)}{a_{n-k|i} \cdot e^i} \cdot \frac{e^{i(n-k)}}{e^{i(n-k)}} = \frac{VT_k^*(i) \cdot e^{i(n-k)}}{s_{n-k|i} \cdot e^i}, \quad (3.3.3)$$

Aquesta expressió és anàloga a la prima que ha d'aportar qualsevol assegurat en un contracte a primes periòdiques en funció del capital final pactat (expressió 2.2.7).

Per tant, **considerem que el sistema d'assignar la participació en guanys com un conjunt primes addicionals periòdiques quan l'assegurat ha triat aquest sistema per aportar les primes és del tot coherent amb la filosofia del contracte.**

¹⁹ Es troba demostrat a la majoria de llibres de matemàtica financera, per exemple a Lóbez (1968), pàg. 110.

3.4 Comparació dels fluxos d'acord amb el sistema de participació escollit

L'estructura de fluxos generats aplicant un o altre sistema d'assignació de la participació en guanys és força diferent, per tant, l'exposició al risc de tipus d'interès també serà diferent.

Si s'assigna **la participació en guanys com una nova prima única** el valor del *bonus* es bescanvia contractualment pel conjunt de capitals que l'assegurador espera satisfer en el futur, que vam representar amb l'expressió (3.1.7).

En el cas que la **participació s'hagi instrumentat com un conjunt de primes periòdiques** l'assegurador bescanvia el *bonus* per les esmentades primes d'import, d'acord amb l'expressió 3.2.2:

$$\Pi^{e^*} = \frac{VT_k^*(i)}{a_{n-k}|i} \cdot e^i$$

amb la condició que seu valor actual sigui igual al valor del *bonus*, és a dir:

$$VT_k^*(i) = \sum_{j=0}^{n-k-1} \left(\frac{VT_k^*(i)}{a_{n-k}|i} \cdot e^i \right) \cdot e^{-ij}. \quad (3.5.1)$$

Aquesta igualtat resulta evident ja que:

$$\frac{\sum_{j=0}^{n-k-1} e^{-ij}}{a_{n-k}|i} = 1.$$

Emprant aquest sistema el que fa l'assegurador és separar la primera d'aquestes primes que és percep de forma immediata, és a dir, l'expressió 3.5.1 pot escriure's:

$$VT_k^*(i) = \frac{VT_k^*(i)}{a_{n-k}|i} \cdot e^i + \sum_{j=1}^{n-k-1} \left(\frac{VT_k^*(i)}{a_{n-k}|i} \cdot e^i \right) \cdot e^{-ij}. \quad (3.5.2)$$

Si amb la prima única $VT_k^*(i)$ l'equilibri amb els pagaments esperats era:

$$VT_k^*(i) = \sum_{j=1}^{n-k} \bar{C}_j^*(i) \cdot e^{-ij} + \bar{C}_{n-k}^*(i) \cdot e^{-i(n-k)},$$

ara, amb la primera prima $\frac{VT_k^*(i)}{a_{n-k|i} \cdot e^i}$ l'equilibri seria de forma anàloga:

$$\frac{VT_k^*(i)}{a_{n-k|i} \cdot e^i} = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{\bar{C}_j^*(i)}{a_{n-k|i} \cdot e^i} \cdot e^{-ij} + \frac{\bar{C}_{n-k}^*(i)}{a_{n-k|i} \cdot e^i} \cdot e^{-i(n-k)}. \quad (3.5.3)$$

Per tant, substituint (3.5.3) en (3.5.2.) obtenim l'estructura de fluxos que l'assegurador espera si implementa el sistema de participació en guanys com un conjunt de primes periòdiques addicionals, que seria:

$$VT_k^*(i) = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{\bar{C}_j^*(i)}{a_{n-k|i} \cdot e^i} \cdot e^{-ij} + \frac{\bar{C}_{n-k}^*(i)}{a_{n-k|i} \cdot e^i} \cdot e^{-i(n-k)} + \sum_{j=1}^{n-k-1} \frac{VT_k^*(i)}{a_{n-k|i} \cdot e^i} \cdot e^{-ij}. \quad (3.5.4)$$

Aquesta expressió és força diferent de l'obtinguda a (3.1.7) en el cas de l'assignació de participació com a prima única.

Si observem les expressions (3.1.7) i (3.5.4), fruit de la mateixa participació en guanys però d'un sistema d'aplicació diferent veiem que malgrat que té el mateix valor actual són estructuralment no comparables, per tant, **una vegada acreditada la participació en guanys esdevé un nou dret de l'assegurat; qualsevol canvi futur en el tipus d'interès de valoració incidirà en el seu valor i produirà efectes diferents d'acord amb el sistema escollit per implementar l'esmentada participació.**

Demostrem posteriorment que l'assignació de la participació com a prima única és, des de la vessant del risc de tipus d'interès, més arriscada que l'assignació de la participació com un conjunt de primes periòdiques.

Segona Part

Anàlisi de la solvència de l'assegurança de vida com un projecte d'inversió

Capítol 4

La solvència financera a partir del control de l'excedent anual

Absolute bedrock is to me the net difference between the income and the outgo. The actuary who does not know the shape of this cash flow does not know his own company.

E. Shiu (Asset-Liability Management: From Immunization to Option-Pricing Theory)

La solvència d'una empresa d'assegurances és sempre un tema d'interès però ho és especialment en el cas dels contractes de vida on l'assegurador està administrant durant llargs períodes de temps recursos aliens als quals ha garantit una determinada rendibilitat independentment de quina sigui l'evolució dels actius financers existents al mercat.

En la primera part d'aquest capítol analitzem les diferents accepcions del concepte de solvència i remarquem la importància que tindrà en l'anàlisi posterior la correlació entre el canvi de valor de l'actiu i passiu que gestiona l'assegurador. En la segona part comentem la gran dificultat de valorar fluxos que depenen dels tipus d'interès quan no disposem d'un mercat secundari de referència per a aquests fluxos.

En la tercera part discutim la possibilitat de mantenir la solvència financera cercant la immunització de l'excedent anual i això ens durà a determinar el valor de la Duració dels actius en relació a la Duració de la provisió. I és en la quarta part on veiem com la Duració de la provisió és una mesura de risc útil per valorar l'exposició al risc de tipus d'interès del passiu.

Finalment, en la cinquena part raonem els avantatges i inconvenients de cercar una immunització de l'excedent (*surplus*) i proposem de forma preliminar altres condicions per tal de mantenir la solvència financera.

1. LES DIFERENTS ACCEPCIONS DEL CONCEPTE DE SOLVÈNCIA

Una empresa és solvent en un moment considerat, d'acord amb Kahane *et al.* (1989), si el valor de l'actiu és superior al valor de les seves obligacions o passiu. Si, al contrari el valor de les obligacions supera el de l'actiu, l'assegurador es troba en situació d'insolvència.¹

Quan es parla dels actius cal matisar si estem incloent-hi també els recursos propis de l'assegurador o bé ens limitem als recursos dels assegurats. Si limitem l'anàlisi a aquests darrers estarem considerant un nivell de solvència de tipus estrictament tècnic.

Òbviament si aquest primer nivell es deteriora sempre hi cap la possibilitat que l'assegurador aportï recursos propis per eixugar el dèficit, però des d'una perspectiva de gestió acurada això no és desitjable; per tant, quan analitzem la solvència ens limitarem a l'anàlisi tècnica malgrat que som conscients que la normativa exigeix un determinat percentatge de recursos propis.

Sí que considerarem, però, els excedents financers obtinguts en moments intermedis de la pròpia gestió financera del contractes considerats, part dels quals s'hauran inclòs dins de la participació en guanys i part s'hauran reservat per a futures desviacions; encara que el veritable resultat aconseguit amb una cartera de contractes no es coneix amb certesa fins que aquesta es cancel·la o arriba al venciment.

Les valoracions en moments intermedis són, doncs, només aproximacions més o menys acurades del resultat previsible a posteriori.

1.1 La solvència estàtica i dinàmica

El concepte de solvència, d'acord amb Latorre (1992), presenta dues accepcions diferents segons es tracti de solvència estàtica o solvència dinàmica.

La solvència estàtica analitza la capacitat de l'assegurador de poder satisfer els compromisos generats fins a aquell moment; per atendre'ls disposa de les provisions de riscos en curs, provisions tècniques de vida i provisions per sinistres pendents de liquidació i pagament.

La solvència dinàmica analitza la capacitat de l'assegurador per poder satisfer els compromisos derivats de la seva activitat futura, els mitjans per compensar-los han de ser, doncs, unes garanties addicionals a les abans

¹ Que l'actiu superi el valor de les obligacions és condició necessària a curt termini però en cap cas suficient a llarg termini.

esmentades; per tant, s'han de correspondre amb un patrimoni propi de l'assegurador que no estigui compromès a altres finalitats.

Hi ha, però, dins del concepte de solvència estàtica una vessant aleatòria que no podem menysprear ja que de vegades el valor assignat als compromisos generats es va modificant durant la vida del contracte, per exemple, si modifiquem l'estimació del pagament a efectuar en un sinistre ja declarat, llavors, és discutible si realment aquesta forma d'anàlisi pot definir-se correctament amb el nom de solvència estàtica.

Per tant, per saber amb total seguretat si un assegurador podrà satisfer els compromisos generats fins a un moment determinat de vegades ens hauríem *d'esperar* un període de temps addicional que ens permetés constatar la valoració efectuada.

Si ens centrem en l'anàlisi d'una cartera de vida el període *d'espera* s'hauria de perllongar fins al venciment d'aquesta ja que quan l'assegurador calcula el valor de la provisió en moments intermedis està pressuposant unes estimacions demogràfiques i de rendibilitat que potser no s'acompleixin.

Així, en un moment determinat, encara que estem valorant compromisos passats, en el sentit que estan reflectits com a drets en un contracte ja formalitzat, podem considerar també que hi ha un component dinàmic mentre hi hagi primes pendents de percebre si així ha estat pactat en el contracte.

Per tant, pel que fa a les assegurances de vida hem de considerar el concepte de solvència sempre com a dinàmic ja que l'excedent obtingut en moments intermedis depèn de criteris de valoració que anticipen rendibilitats i *comportaments* futurs.

1.2 Els models estadístics i financers de control de la solvència

La desviació en el nombre de sinistres esperats respecte als previstos o bé un increment en el seu valor monetari és un dels factors que pot incidir negativament en la solvència de l'assegurador. Aquests factors els analitza la teoria individual i col·lectiva del risc que té l'objectiu de modelitzar tant el nombre com l'import dels sinistres esperats mitjançant models estadístics.

En general, com podem comprovar en Grandell (1991), per disminuir la possibilitat d'insolvència es recarrega la prima de risc amb un marge de seguretat que farà (si les estimacions estadístiques són correctes) que aquesta probabilitat sigui menor com més unitats de risc s'hagin assegurat.

Com que aquests models pressuposen unitats de risc homogènies, la qual cosa no sempre es produeix, cal emprar també altres tècniques (com poden ser els contractes de reassurances) per transferir riscos (o part d'ells) a tercers, la qual cosa permet aproximar la realitat quotidiana de contractes no homogenis als models estadístics considerats.

Però, com afirma Latorre (1992, pàg. 27), una altra part de riscos força important prové de les pèrdues (o desviacions) que els asseguradors puguin patir en el valor de les seves inversions. Les causes poden ser diverses i algunes per la seva pròpia naturalesa són difícils d'eliminar llevat que l'assegurador augmenti molt les garanties financeres pròpies. En qualsevol cas les tècniques per reduir o neutralitzar aquestes causes són del tot diferents de les emprades en la teoria del risc.

Hi ha, doncs, una tendència clara a distingir entre models (estricta) estadístics² i models financers, com fa Cummins (1991) en un article que copsa l'estat de la qüestió. Per a aquest autor la diferència principal es troba en el fet que els models estadístics romanen aïllats de l'evolució de les variables de tipus econòmic (i, per tant, poden ser considerats independents de la conjuntura econòmica), mentre que els models financers no poden estudiar-se aïllats d'aquest context.

Per analitzar la solvència financera, malgrat que caldrà incorporar l'aleatorietat dels fluxos, les tècniques a emprar s'inclouen més apropiadament en el camp dels models financers i dins d'aquestes el que ha estat emprat tradicionalment pels actuaris en el ram de vida ha estat el d'actualització dels fluxos de caixa (*discounted cash flow models*).

L'eficiència dels models d'actualització de fluxos depèn de l'adequació de les hipòtesis considerades amb la realitat. Així, la valoració d'un bonic que no inclogui opcions i, per tant, on els fluxos estan clarament especificats (tant en quantia com en termini) s'efectua de forma senzilla si disposen de l'estructura de tipus d'interès corresponent; però la valoració d'altres actius amb fluxos aleatoris (com és el cas d'una assegurança de vida) pot resultar molt més feixuga.

En general, la utilització d'aquest model pels actuaris ha estat bastant rudimentària ja que el valor actual s'ha calculat emprant en l'actualització un únic tipus d'interès prefixat per endavant.

² Hem volgut afegir *estricta* ja que també els models financers quan analitzen fluxos aleatoris emprèn tècniques estadístiques.

1.3 Els models financers i la correlació entre el valor de l'actiu i passiu

Una característica específica del models financers és que aquests tenen en compte que certs factors de risc en materialitzar-se provoquen canvis tant en el valor dels actius com en els passius; és a dir, hi una correlació entre ambdós que no pot ser menyspreada. En concret, aquesta correlació va associada al risc de tipus d'interès quan les materialitzacions de l'assegurador s'han efectuat majoritàriament en actius de renda fixa.

Tal com comenta Shiu (1993), l'equilibri entre el valor de l'actiu i el passiu pot modificar-se si augmenten els pagaments esperats³ (canvi en el passiu) però també si un canvi en els tipus d'interès fa reduir el valor de l'actiu més que la reducció que puguin sofrir el passiu o si aquest s'incrementa més que aquell.

Per tant, **el risc de tipus d'interès té una importància cabdal si ens centrem exclusivament en l'estudi de la solvència financera de l'assegurador;** llavors és insuficient qualsevol anàlisi aïllada de l'evolució del valor de l'actiu o del passiu atès que qualsevol canvi que afecti una de les components esmentades ben segur que afectarà també l'altra.

³ O les seves previsions (via increment de provisions).

2. VALORACIÓ DE FLUXOS QUE DEPENEN DE L'EVOLUCIÓ DELS TIPUS D'INTERÈS

Les assegurances de vida són un cas clar de fluxos dependents de l'evolució dels tipus d'interès, tal com comenten Ang i Sherris (1997) en la introducció d'un article sobre la valoració de fluxos dependents dels tipus d'interès, on fan referència en diverses ocasions a aquests tipus de contractes com a exemples que cal analitzar.

Les aportacions sobre la valoració d'actius amb fluxos dependents de l'estructura de tipus d'interès es fonamenten en els principis de la teoria de valoració d'opcions (*option-pricing theory*) de Black i Scholes (1973), Cox *et al.* (1979); Cox i Rubinstein, (1985); i Heath *et al.* (1990)

La seva valoració exigeix determinar diferents escenaris de tipus d'interès associats amb unes probabilitats concretes i uns determinats fluxos per a cada node de l'escenari, de forma que l'actualització de tots els fluxos als corresponents tipus i corregits per les probabilitats associades ens permeti obtenir el valor de l'actiu considerat.

Aquests models són implementats usualment mitjançant una *binomial lattice*, on sempre les probabilitats escollides i els tipus d'interès considerats han de ser consistents amb l'estructura actual de tipus d'interès dels bons cupó zero del deute de l'Estat. (*risk-neutral probability measure*).

Hi ha diverses formes de construir aquesta *lattice* a partir d'una estructura inicial de tipus d'interès, com fan Ho i Lee (1986) o Pedersen *et al.* (1989); on altre sistema emprat és el de *forward induction*, presentat per Jasmidian (1991) o bé el d'una lognormal *lattice* emprat per Black *et al.* (1990) o Black i Karanski (1991).

En opinió de Shiu (1993), que compartim plenament, és relativament fàcil construir una *arbitrage-free binomial lattice* però el que resulta molt més difícil és projectar adequadament els fluxos per a certs actius i passius per a cada un dels diferents tipus d'interès considerats.

En el cas de les assegurances de vida on hi ha participacions en guanys, noves primes i rescats -factors que incideixen globalment en les provisions- i els actius, resulta quasi impossible projectar de forma versemblant els fluxos durant els diversos anys de vigència del contracte d'assegurança.

En endavant considerarem que pel que fa als actius el mercat secundari serà el que ens oferirà el seu valor en funció dels tipus d'interès vigents en cada moment i de les primes de risc que es demanin per cada actiu i termini; per tant, la valoració de fluxos dependents dels tipus d'interès es limitarà al passiu de l'assegurador.

2.1 Dos paradigmes per analitzar el valor del passiu

Contràriament al que succeeix amb l'actiu d'una empresa d'assegurances, amb el passiu, com comenten Babbel i Merrill (1998), no hi ha un mercat líquid de negociació (les negociacions es donen en situacions esporàdiques de cessió del negoci a un altre assegurador) on els preus estiguin disciplinats per les forces de l'arbitratge; per tant, d'acord amb el criteri de valoració emprat podem obtenir preus diferents per a un mateix passiu.

Això és tan evident que quan en articles acadèmics s'estudia la valoració adequada (*fair value*) de les assegurances de vida en realitat el que s'analitza és la valoració del passiu, no pas la de l'actiu atès que aquest té un mercat secundari de referència.

Per tant, el que resulta realment difícil d'estimar adequadament és aquesta part del negoci que incorpora diferents opcions, com per exemple el dret de l'assegurat a obtenir una determinada rendibilitat, a gaudir d'una participació en guanys, a aportar noves primes en el futur o a rescatar voluntàriament el contracte.

La definició conceptual de passiu que ens ofereix Duran (1997, pàg. 126) és força específica: "The fair value of an (insurance) liability is the amount the liability holder would need to pay an unrelated third part to assume (that is, take on) the liability".

Dins dels estudis que copsen la dificultat de valorar el passiu hi ha una aportació de Reitano (1997) que analitza l'estat de la qüestió i conclou que hi ha dos paradigmes possibles per enfocar l'obtenció d'un valor. Hi ha una metodologia directa i una altra d'indirecta i no necessàriament ambdues ens oferiran el mateix valor.

2.2 Metodologia directa de valoració

La metodologia directa considera el passiu de l'empresa d'assegurances de forma semblant al finançament aconseguit per una empresa mitjançant l'emissió de bons, els quals impliquen com a contrapartida un conjunt de pagaments que s'han d'efectuar a un tercer condicionats a un conjunt de contingències. Segons la metodologia directa el valor dels passius seria el valor actual del conjunt de pagaments contractuals que ha d'efectuar l'assegurador.

La forma en què poden ser valorats, d'acord amb la proposta de Reitano, és emprant el *risk-adjusted present value* (RAPV) on una vegada s'han definit els diferents fluxos possibles s'actualitzen a uns tipus d'interès que reflecteixin l'estructura de tipus dels bons del tresor més els adequats diferencials que

compensin l'inversor del risc que els fluxos reals siguin diferents dels previstos. És evident, però, que els preus així obtinguts no es poden contrastar mai amb la realitat.

2.3 Metodologia indirecta de valoració

Si s'aïlla la cartera d'assegurances de vida, per la metodologia indirecta, el valor del passiu es definiria com la diferència entre el valor actual de l'actiu i el valor actual dels guanys que l'empresa pot distribuir en el futur.

Així, en aquest cas primer es valora l'excedent de la pròpia empresa (el seu valor net) i per comparació respecte al valor dels actius s'obté el valor del passiu.

Les valoracions indirectes, com la que proposa Reitano, reflecteixen millor les veritables transaccions que efectuen els asseguradors ja que normalment si es produeixen no bescanvien passius únicament sinó que és més usual *comprar-los* també amb els actius que materialitzen les inversions fins a aquell moment. A més a més també es tenen en compte aspectes més intangibles com el valor (en el sentit de *know-how*) del producte que es compra o la pròpia cartera de clients i, per tant, les futures vendes que puguin efectuar-se.

Aquesta anàlisi indirecta és sens dubte el prototipus d'una anàlisi dinàmica ja que va recollint tota la informació disponible que pot afectar l'empresa d'assegurances, però té el problema que no ofereix la possibilitat de comparar els preus obtinguts més que de tant en tant i en conseqüència no podem proposar-la com a model dins una gestió financera continuada.

Sí que podem, però, acceptar alguns dels seus criteris pel que fa a una anàlisi dinàmica de la solvència; en concret, el fet d'incloure en la valoració els fluxos futurs que puguin produir-se, no tant d'eventuals clients que es puguin captar sinó d'aquells que ja han formalitzat el seu contracte d'assegurança de vida.

Feta aquesta consideració intentem emprar en aquest treball una metodologia semblant a la del RAPV però considerant els ingressos futurs de la cartera de contractes existents. Llavors una de les dificultats empíriques que trobaríem, com ja ho anticipa Becker (1998), és determinar el diferencial respecte a l'estructura vigent de tipus d'interès adequat per valorar els passius, ja que continuem sense conèixer el seu valor de mercat.

Però com abans hem comentat que quan hi ha canvi en l'estructura de tipus d'interès aquests afecten tant els actius com els passius i aquells sí que podem valorar-los a través del mercat secundari i considerem que **el passiu s'hauria de**

valorar prudentment en funció dels tipus que s'emprin en cada moment per l'actiu.

La interpretació del terme prudent voldria dir que s'hauria de considerar el cas dels actius sense risc (o amb prima de risc mínima) i fins i tot amb una reducció de la rendibilitat exigida per a aquests.

2.4 Objectius cercats amb la valoració del passiu

El nostre objectiu no ha de ser la valoració aïllada del passiu sinó relacionar els efectes que puguin tenir els canvis dels tipus d'interès tant sobre l'actiu com sobre el passiu de forma que es mantingui un equilibri que garanteixi la solvència financera.

Els camins tradicionalment emprats per controlar aquesta situació d'equilibri han estat o bé estratègies de *cash-flow matching* o bé estratègies d'immunització. Respecte a les primeres, també conegudes com a estratègies de dedicació (dels fluxos dels actius per satisfer el conjunt de pagaments esperats) podem considerar que s'inicien amb el treball de Koopmans (1942) i aportacions posteriors els quals han aprofundit en la forma de determinar quina seria la cartera *més barata* d'actius que permetés garantir el conjunt de pagaments compromesos.⁴

La restricció que l'assegurador disposi de tots els actius necessaris per atendre els pagaments fa que només sigui implementable en assegurances a prima única llevat que es vulgui afegir la incertesa del risc de reinversió, per la qual cosa (ja que considerem també contractes a primes periòdiques) no acceptarem la possibilitat d'emprar aquesta estratègia de forma aïllada sinó com a complement d'altres (que després passarem a comentar).

Les estratègies d'immunització no requereixen de la condició que el valor dels actius sigui suficient per satisfer el conjunt de pagaments esperats, per tant, en aquest sentit podríem pensar que s'adaptarien millor al tipus d'assegurança que estem analitzant, tant si és a prima única com a primes periòdiques.

2.5 Peculiaritats de les tècniques d'immunització

El terme *immunització* el va emprar per primera vegada l'actuari Redington (1952). En el seu treball inicial va considerar un únic canvi en el tipus d'interès

⁴ Poden trobar-se algorismes a Hiller i Schaack (1990) i a Kocherlakota *et al.* (1988).

sent aquest igual per a tots els terminis. Amb posterioritat van aparèixer estudis que desenvolupen hipòtesis més versemblants tant pel que fa als canvis que es poden observar com a l'estructura de tipus i a la dependència dels fluxos considerats. Respecte als canvis soferts s'ha passat de considerar una estructura plana amb canvis idèntics a altres tipus d'estructures amb canvis diferents per a cada termini.

En aquest sentit cal remarcar des dels primers articles de Fong i Vasicek (1983, 1984) i Shiu (1988, 1990) fins a les més recents aportacions conceptuals de Duració multivariant de Reitano (1991 a, 1991 b, 1991 c, 1992 a, 1992 b, 1993 i 1996) similar al concepte de *key-rate durations* introduït per Ho (1992 b). En ambdós casos se segmenten els actius per terminis i, per tant, el nou valor de la cartera quan es produeix un canvi en els tipus d'interès (amb diferent incidència en cada termini) és la suma dels canvis en tots els *key-rates* considerats.

Les aportacions de Reitano i Ho són útils si ens proposem immunitzar el valor d'una inversió o bé l'excedent obtingut (mesurat per diferència entre el valor dels actius i dels passius) d'un intermediari financer en un moment determinat. Però, com afirmen els mateixos autors, la certesa d'aconseguir la immunització no existeix en cap cas i, per tant, és més adequat parlar d'una minimització del risc que es produeixin diferències entre el valor de l'actiu i el passiu.

Al marge d'analitzar si és possible o no estimar correctament l'estructura del canvi en els tipus d'interès abans d'aplicar una tècnica com aquesta a una cartera d'assegurances de vida cal considerar primerament les especificitats dels contractes que la formen.

Així, l'assegurador disposa d'uns determinats actius i en contraposició els compromisos es representen pel valor de la provisió matemàtica, per tant, una opció és intentar immunitzar la diferència de valor d'aquestes components, la qual cosa encara que s'aconsegueixi no sabem quina incidència tindrà en l'evolució futura de la cartera a mesura que es vagin percebent noves primes i efectuant noves reinversions.

Una actuació com aquesta cerca l'equilibri a curt termini però potser no és la millor opció a llarg termini; al contrari, una altra opció seria no exigir la immunització immediata de la diferència de valor entre actius i provisió sinó l'equilibri sostingut a llarg termini de manera que augmenti la possibilitat d'arribar a atendre el conjunt de pagaments esperats.

No podem, però, oblidar que normativament l'assegurador ha de comparar any rere any el valor dels actius versus el valor de les provisions, per tant, és raonable que analitzem amb més profunditat les possibilitats que ens ofereixen les tècniques d'immunització.

3. LA SOLVÈNCIA FINANCERA IMMEDIATA CERCANT LA IMMUNITZACIÓ

Al final de cada exercici comptable l'assegurador ha de disposar d'uns actius que com a mínim tinguin un valor de mercat igual al de la provisió matemàtica.

Si la diferència entre ambdós valors (actius menys provisió) és zero es considera que no hi ha cap excedent; si la diferència és positiva l'assegurador disposa d'un marge per a desviacions futures (potser també per a eventuais participacions en guanys) i si la diferència és negativa existeix un dèficit que exigirà una dotació complementària amb recursos propis.

En endavant considerarem que l'assegurador ha materialitzat les seves inversions únicament i exclusivament en actius de renda fixa, hipòtesi que en el cas de l'Estat espanyol és versemblant ja que d'acord amb les dades que anualment publica ICEA⁵ durant el període de 1990 a 2000 la inversió en els esmentats actius ha estat per sobre del 80% del total de les inversions que materialitzen les provisions del ram de vida.

La materialització que fa l'assegurador no és independent del risc d'inversió assumit, en el cas que l'assegurador estigui oferint aquesta garantia invertirà majoritàriament en renda fixa que a priori li permet conèixer la rendibilitat que ha d'obtenir.⁶

Per tant, denominem $A_k(i_A)$ el valor actual en un moment k dels fluxos de renda fixa esperats A_j valorats al tipus d'interès vigent en el mercat en aquest moment, que denominem i_A .

Si en lloc d'un únic tipus d'interès per a tots els actius hi coexisteixen diversos conjuntament llavors i_A serà la solució a l'equació:

$$A_k(i_A) = \sum_{j=1}^m A_{k+j} \cdot e^{-i_A j} \quad , \quad (3.1)$$

⁵ "Las inversiones de las entidades aseguradoras", ICEA (Investigación Cooperativa entre Entidades Aseguradoras), de 1990 a 2000.

Aquesta hipòtesi no necessàriament ha de ser certa en altres contextos; així, al Regne Unit la inversió majoritària és en renda variable i sens dubte això va associat al gran èxit que en aquests país tenen les assegurances tipus *unit-linked*, on l'assegurat assumeix el risc d'inversió.

⁶ Si considerem nul el risc d'insolvència i mantenim la inversió fins a l'amortització.

que iguala el preu dels actius amb el valor actual dels fluxos a un tipus desconegut però que pot ser determinat mitjançant un procés iteratiu.

Considerem també que en aquest moment el valor dels actius i de la provisió matemàtica són coincidents; així, si representem el valor total de provisions que gestiona l'assegurador per $VT_k(i)$ (en funció d'un tipus garantit i) es produeix la igualtat:

$$A_k(i_A) = \sum_{j=1}^m A_{k+j} \cdot e^{-i_A j} = VT_k(i) . \quad (3.2)$$

Però potser en moments posteriors ens trobarem en una situació del tipus $A_{k^+}(i_A) \neq VT_{k^+}(i)$ per diverses raons (sent una d'elles el canvi en el tipus d'interès).

3.1 La solvència de l'assegurador i la immunització de l'excedent

L'assegurador disposa d'una banda d'uns actius de renda fixa que veuen modificat el seu valor de mercat quan canvia el tipus d'interès emprat en la seva valoració i , d'altra banda, està endeutat pel valor de la provisió, que és la diferència entre el valor dels capitals que cal pagar i les primes que s'han de percebre.

Sent la seva expressió, com vam veure a (2.7.1) en el capítol anterior:

$$VT_k(i) = C_k(i) - P_k(i)$$

on vam definir:

$$C_k(i) = \sum_{j=k+1}^n \bar{C}_j \cdot e^{-i(j-k)} + \bar{C}_n \cdot e^{-i(n-k)} ,$$

$$P_k(i) = \sum_{j=k+1}^n \bar{P}_j \cdot e^{-i(j-k-1)} .$$

Definim ara l'excedent (*surplus*) en un moment k com la diferència entre el valor dels actius i el valor de la provisió requerida i , per tant, l'esmentat valor serà igual a zero, és a dir:

$$S_k(i, i_A) = A_k(i_A) - VT_k(i) = 0 \quad (3.1.1)$$

Considerarem que l'excedent es troba immunitzat quan un canvi en els tipus d'interès modifiqui alhora el valor dels actius i de la provisió de forma que el valor de l'esmentat excedent continuï sent positiu o nul.

Històricament es pot constatar que el canvi es produeix en la vessant dels actius (que són els que disposen d'un mercat secundari de negociació) i posteriorment (d'acord amb els criteris normatius establerts) aquest canvi es transmetrà (de forma encara per determinar) al tipus que cal emprar en el càlcul de la provisió (sinònim de passiu).

Llavors la condició d'immunització serà:

$$\frac{\partial S_k(i, i_A)}{\partial i_A} = 0 .$$

L'acompliment d'aquesta condició, en què canvia el tipus d'interès en un moment específic, implicarà el manteniment de la solvència de l'assegurador immediatament després del canvi però, com després comentarem, no implica garantir la solvència en el futur.

3.2 Condicions aproximades per aconseguir la immunització

Aconseguir la immunització absoluta és quasi impossible ja que s'haurien de donar de forma exacta unes relacions prefixades (i conegudes) entre els canvis en els tipus d'interès dels actius i de la provisió.

L'experiència empírica ens demostra que quan es produeix un canvi de tipus d'interès en un actiu determinat que hem decidit prendre com a referència, per exemple la lletra del tresor a un any, no tots els altres actius sofreixen un canvi idèntic.

Però fins i tot si el canvi fos idèntic caldria llavors analitzar la repercussió d'aquest canvi en el valor de la provisió; encara que poguéssim esbrinar quina és aquesta relació, demostrarem que l'objectiu de la immunització immediata dels excedents no es una estratègia desitjable en certs casos ja que ignora aspectes de la solvència dinàmica.

Per demostrar-ho en situarem en el cas en el qual tradicionalment s'han fonamentat altres estudis, com per exemple les aportacions a l'anàlisi de la immunització de les entitats financeres que podem trobar a Bierwag (1991).

Considerarem, doncs, un mateix canvi en el tipus d'interès per a tots els actius i que aquest canvi es transmet de forma íntegra a la provisió, és a dir, que:

$$\frac{\partial i}{\partial i_A} = 1 .$$

En ser i funció d' i_A , la condició per tal que el valor de l'excedent no es modifiqui serà que:

$$d S_k (i, i_A) = \frac{\partial S_k}{\partial i} \frac{\partial i}{\partial i_A} d i_A + \frac{\partial S_k}{\partial i_A} d i_A = 0. \quad (3.2.1)$$

Com que considerem $\frac{\partial i}{\partial i_A} = 1$, llavors la condició d'immunització serà:

$$\frac{\partial S_k}{\partial i_A} = - \frac{\partial S_k}{\partial i} .$$

Efectuant aquestes derivades, expressant l'excedent com la diferència entre el valor de l'actiu i la provisió (sent aquesta la diferència entre el valor dels capitals que cal satisfer i les primes que s'han de percebre) i simplificant l'expressió resultant, obtenim com a condició final d'immunització:⁷

$$\frac{\partial A_k(i_A)}{\partial i_A} = \frac{\partial C_k(i)}{\partial i} - \frac{\partial P_k(i)}{\partial i} . \quad (3.2.3)$$

I si en lloc de produir-se un canvi infinitesimal en el tipus d'interès es produís un canvi no tan petit, llavors la condició aproximada d'immunització seria:

$$\frac{\Delta A_k(i_A)}{\Delta i_A} \cong \frac{\Delta C_k(i)}{\Delta i} - \frac{\Delta P_k(i)}{\Delta i} . \quad (3.2.4)$$

⁷ Aquesta condició és anàloga a l'establerta per Redington (1952), que era:

$$\frac{\partial (V_A - V_L)}{\partial r} = 0 ,$$

sent V_A el valor de l'actiu, V_L el valor de passiu i r el tipus d'interès.

Redington, a més a més, considerava la necessitat d'una segona condició (sobre la que tornarem després) relacionada amb el concepte de convexitat:

$$\frac{\partial^2 (V_A - V_L)}{\partial r^2} > 0$$

3.3 Aproximació de la immunització emprant la Duració

A continuació aproximarem l'expressió (3.2.4) mitjançant les respectives Duracions de Macaulay, que denominarem respectivament pels actius, pagaments esperats i cobraments, de la manera següent: $D(A_k)$, $D(C_k)$ i $D(P_k)$.

Recordem que si fem la capitalització contínua, llavors la forma d'obtenir el valor de la Duració dels actius (i de forma anàloga la resta de Duracions) serà⁸:

$$D(A_k) = - \frac{\partial A_k(i_A)}{\partial i_A} \cdot \frac{1}{A_k(i_A)} \quad (3.3.1)$$

Podem cercar el canvi de valor de l'actiu quan es produeix un petit canvi (no infinitesimal) del tipus d'interès a partir de l'expressió (anàloga a l'anterior):

$$D(A_k) \cong - \frac{\Delta A_k(i_A)}{\Delta i_A} \cdot \frac{1}{A_k(i_A)}$$

D'on podem aïllar el canvi en el valor de l'actiu, que és:

$$\Delta A_k(i_A) \cong - D(A_k) \cdot A_k(i_A) \cdot \Delta i_A$$

Llavors, de forma anàloga, els increments soferts pels diferents termes de l'expressió (3.2.4) poden aproximar-se per:

$$\Delta C_k(i) \cong - D(C_k) \cdot C_k(i) \cdot \Delta i$$

$$\Delta P_k(i) \cong - D(P_k) \cdot P_k(i) \cdot \Delta i$$

Substituint els anteriors desenvolupaments en l'expressió (3.2.4), com que estem considerant el cas particular en què $\Delta i = \Delta i_A$, la condició d'immunització la podem escriure així:

$$D(A_k) \cdot A_k(i_A) = D(C_k) \cdot C_k(i) - D(P_k) \cdot P_k(i) \quad (3.3.2)$$

⁸ Efectuant la derivada de l'expressió (3.3.1) i simplificant-la obtenim com a Duració per als actius:

$$D(A_k) = \frac{\sum_{j=1}^m j \cdot A_{k+j} \cdot e^{-i_A j}}{\sum_{j=1}^m A_{k+j} \cdot e^{-i_A j}}$$

Les Duracions per als pagaments esperats i dels cobraments o primes a percebre seran anàlogues a l'anterior.

Atès que les Duracions de capitals i primes estan determinades per l'estructura dels fluxos de la pròpia cartera no poden ser escollides lliurement, per intentar cercar la immunització de l'excident, l'assegurador *només* pot escollir els actius que materialitzen la inversió de forma que obtingui un determinat valor per a la seva Duració.

Llavors de (3.3.2) podem aïllar quin hauria de ser aquest valor per aconseguir la immunització, sent aquest:

$$D(A_k) = \frac{D(C_k) \cdot C_k(i)}{A_k(i_A)} - \frac{D(P_k) \cdot P_k(i)}{A_k(i_A)} \quad (3.3.3)$$

Aquesta Duració també pot ser expressada multiplicant numerador i denominador pel total de la provisió matemàtica que gestiona l'assegurador. Llavors l'expressió resultant és la següent:

$$D(A_k) = \left[\frac{D(C_k) \cdot C_k(i)}{VT_k(i)} - \frac{D(P_k) \cdot P_k(i)}{VT_k(i)} \right] \cdot \frac{VT_k(i)}{A_k(i_A)} \quad (3.3.4)$$

En el segon terme de l'expressió (3.3.4) **la part dins dels parèntesis no és altra que la Duració de la provisió**⁹.

Per tant, l'expressió (3.3.4) resulta ser funció de la Duració de la provisió¹⁰:

$$D(A_k) = D(VT_k) \cdot \frac{VT_k(i)}{A_k(i_A)} \quad (3.3.5)$$

Com que hem considerat que abans que hi hagi qualsevol canvi en els tipus d'interès es dona la igualtat:

$$A_k(i_A) = VT_k(i),$$

⁹ Ho demostrarem a l'epígraf 4 d'aquest mateix capítol, on denominarem:

$$D(VT_k) = \frac{D(C_k) \cdot C_k(i) - D(P_k) \cdot P_k(i)}{VT_k(i)}$$

¹⁰ La condició obtinguda és anàloga a la de Bierwag (1991), pàg. 188:

$$D_A = D_L \cdot \frac{L}{A},$$

sent A l'actiu, L el passiu, D_A la Duració de l'actiu, i D_L , la del passiu.

llavors **obtenim com a condició per immunitzar el valor de l'excedent que:**

$$D(A_k) = D(VT_k) . \quad (3.3.6)$$

Per tant, per cercar la immunització de l'excedent (considerant un canvi pla en els tipus d'interès) han de ser iguals la Duració dels actius i la Duració de la provisió.

4. LA DURACIÓ COM A MESURA DE RISC EN CANVIAR EL TIPUS D'INTERÈS

Si la Duració dels actius és una mesura de risc per a ponderar el seu canvi de valor quan es modifica el tipus d'interès de valoració podem suposar que aquesta també serà una característica pròpia de la Duració de la provisió.

Primerament justificarem per què hem definit la Duració de la provisió amb l'expressió que figura a la nota peu de pàgina número 8; per fer-ho partirem de la definició genèrica de qualsevol Duració, així:

$$D(VT_k) = -\frac{\partial VT_k(i)}{\partial i} \cdot \frac{1}{VT_k(i)} \quad (4.1)$$

Per determinar-la, primer haurem de calcular:

$$\frac{\partial VT_k(i)}{\partial i} = \frac{\partial \sum_{j=1}^{n-k} \bar{C}_{k+j} \cdot e^{-ij}}{\partial i} - \frac{\partial \sum_{j=1}^{n-k} \bar{P}_{k+j} \cdot e^{-i(j-1)}}{\partial i},$$

derivada que, desenvolupada, serà:

$$\frac{\partial VT_k(i)}{\partial i} = \sum_{j=1}^{n-k} -j \cdot \bar{C}_{k+j} \cdot e^{-ij} - \sum_{j=1}^{n-k} -(j-1) \cdot \bar{P}_{k+j} \cdot e^{-i(j-1)} \quad (4.2)$$

Com que d'acord amb la definició del qualsevol Duració:

$$-D(C_k) \cdot C_k(i) = -\sum_{j=1}^{n-k} j \cdot \bar{C}_{k+j} \cdot e^{-ij}, \quad (4.3)$$

$$-D(P_k) \cdot P_k(i) = -\sum_{j=1}^{n-k} (j-1) \cdot \bar{P}_{k+j} \cdot e^{-ij}, \quad (4.4)$$

llavors substituint les expressions (4.3) i (4.4) a la (4.2) s'obté:

$$\frac{\partial VT_k(i)}{\partial i} = -D(C_k) \cdot C_k(i) + D(P_k) \cdot P_k(i). \quad (4.5)$$

Substituint ara l'expressió (4.5) a l'expressió (4.1) obtenim l'expressió de la Duració de la provisió abans considerada a la nota a peu de pàgina, és a dir:

$$D(VT_k) = \frac{D(C_k) \cdot C_k(i) - D(P_k) \cdot P_k(i)}{VT_k(i)} \quad (4.6)$$

Aquesta expressió ens ha de permetre aproximar el canvi en el valor de la provisió, en funció del canvi sofert pel tipus d'interès, emprant la Duració de cobraments i pagaments com a factors de ponderació de risc.

Llavors quan es produeixi un canvi petit (però no infinitesimal) en el tipus d'interès podem aproximar per a la provisió, com hem fet abans per als actius:

$$\Delta VT_k(i) \cong -D(VT_k) \cdot VT_k(i) \cdot \Delta i. \quad (4.7)$$

Si en l'expressió (4.7) substituïm la Duració de la provisió per l'expressió obtinguda a (4.6) obtenim:

$$\Delta VT_k(i) \cong - \frac{[D(C_k) \cdot C_k(i) - D(P_k) \cdot P_k(i)]}{VT_k(i)} \cdot VT_k(i) \cdot \Delta i.$$

I, finalment, simplificant-la arribem a:

$$\Delta VT_k(i) \cong - [D(C_k) \cdot C_k(i) - D(P_k) \cdot P_k(i)] \cdot \Delta i. \quad (4.8)$$

Per tant, podem afirmar que la Duració de la provisió és una mesura del risc per avaluar el canvi esperat en el valor de la provisió matemàtica, la qual cosa no vol dir que sigui una mesura adequada per avaluar altres aspectes del risc.

4.1 Aproximació absoluta i relativa del canvi de valor de la provisió

L'expressió (4.8) ens permet aproximar el canvi esperat de la provisió en valor absolut. A partir d'aquí podem cercar **el cas particular d'un contracte a prima única** considerant igual a zero les primes futures; llavors, el canvi sofert seria:

$$\Delta VT_{k-única}(i) \cong - D(C_k) \cdot C_k(i) \cdot \Delta i.$$

És evident que sigui quin sigui el canvi en el tipus d'interès:

$$|\Delta VT_k(i)| < |\Delta VT_{k-única}(i)| \quad (4.1.1)$$

ja que el terme $D(P_k) \cdot P_k(i)$ sempre és positiu.

Per tant, **en valor absolut (com a conseqüència d'un canvi en el tipus d'interès) presenta més risc de canvi de valor (en la provisió matemàtica) un contracte a prima única que un contracte de les mateixes característiques però a primes periòdiques.**

L'expressió anterior ens podria fer suposar que un contracte a prima única té més risc que no pas el de primes periòdiques ja que canvia més el valor de la provisió. Demostrarem que en realitat passa exactament el contrari.

Recordem que el que importa no és tant conèixer el canvi de valor absolut de la provisió sinó com incideix aquest canvi (i també el dels actius) en la rendibilitat aconseguida durant l'any, llavors el que ens interessa és cercar una mesura relativa, i no pas absoluta, del canvi sofert.

Per fer-ho dividirem l'expressió (4.7) pel valor de la provisió i obtindrem el canvi relatiu respecte a aquesta (sinònim del valor de la inversió ja efectuada). Aquest canvi relatiu seria:

$$\frac{\Delta VT_k(i)}{VT_k(i)} \cong - \frac{D(VT_k) \cdot VT_k(i)}{VT_k(i)} \cdot \Delta i = - D(VT_k) \cdot \Delta i \quad (4.1.2)$$

Per tant, també **la Duració de la provisió és una mesura del risc de canvi en valor relatiu que pot experimentar el passiu de l'assegurador.**

Analitzem ara aquest valor **per a un contracte a prima única**, en el qual com que no hi ha cap prima pendent, a partir de l'expressió (4.6), obtindrem que:

$$D(VT_{k-única}) = \frac{D(C_k) \cdot C_k(i)}{VT_{k-única}(i)}.$$

I com que en el cas d'una assegurança a prima única la provisió és igual al valor actual dels capitals a satisfer, és a dir: $VT_{k-única}(i) = C_k(i)$, llavors concloem que:

$$D(VT_{k-única}) = D(C_k). \quad (4.1.3)$$

Hem comprovat, doncs, que en el cas d'un contracte a prima única la Duració dels capitals que ha de satisfer l'assegurador és una mesura relativa del risc de canvi de valor de la provisió si es produeix un canvi en el tipus d'interès emprat en la valoració.

Analitzem ara la Duració de la provisió **per a un contracte a primes periòdiques.**

Per definició es dona:

$$VT_k(i) = C_k(i) - P_k(i).$$

Si substituïm en l'expressió (4.6) el valor $C_k(i)$ per $VT_k(i) + P_k(i)$ s'obté ara com a Duració de la provisió:

$$D(VT_k) = \frac{D(C_k) \cdot [VT_k(i) + P_k(i)] - D(P_k) \cdot P_k(i)}{VT_k(i)},$$

expressió que simplificada podem expressar així:

$$D(VT_k) = D(C_k) + [D(C_k) - D(P_k)] \cdot \frac{P_k(i)}{VT_k(i)}. \quad (4.1.4)$$

Com que en les d'assegurances de vida hi ha dues condicions que es donen sempre:

- Les primes es paguen sempre per endavant respecte els capitals a satisfer, llavors: $[D(C_k) - D(P_k)] > 0$.
- Les primes i el valor de la provisió mai no són negatius, llavors el quocient entre el valor actual de les primes d'un moment k en endavant respecte a la provisió en k ha de ser positiu, és a dir:

$$\frac{P_k(i)}{VT_k(i)} > 0.$$

$$\text{Per tant, també sempre: } [D(C_k) - D(P_k)] \cdot \frac{P_k(i)}{VT_k(i)} > 0.$$

$$\text{Llavors seran positius } D(VT_k), D(C_k) \text{ i } [D(C_k) - D(P_k)] \cdot \frac{P_k(i)}{VT_k(i)}.$$

Per tant, els dos sumands del segon terme de (4.1.4) són positius i queda demostrat que en un contracte a primes periòdiques sempre es donarà la desigualtat:

$$D(VT_k) > D(C_k) \quad (4.1.5)$$

I, com que d'acord amb l'expressió (4.1.3) sempre $D(VT_{k-\text{única}}) = D(C_k)$,

llavors també sempre:

$$D(VT_k) > D(VT_{k-\text{única}}). \quad (4.1.6)$$

Per tant, hem demostrat que, per a un mateix canvi en el tipus d'interès, un contracte a primes periòdiques sempre sofrirà un canvi relatiu en el valor de la provisió més gran que un contracte anàleg a prima única.

És a dir, és més arriscat el contracte a primes periòdiques que el seu homòleg a prima única.

4.2 Estimació del risc addicional d'un contracte a primes periòdiques

El risc addicional que representa un contracte a primes periòdiques¹¹ no és constant al llarg de tota la seva vida, és decreixent i té el seu valor màxim a l'inici del contracte quan menys primes periòdiques s'han percebut. Sent les respectives Duracions de les provisions els factors de risc considerats, la seva diferència serà:

$$D(VT_k) - D(VT_{k-única}). \quad (4.2.1)$$

Per obtenir (4.2.1) efectuarem la diferència entre (4.1.4) i (4.1.3) i obtindrem

$$D(VT_k) - D(VT_{k-única}) = [D(C_k) - D(P_k)] \cdot \frac{P_k(i)}{VT_k(i)}, \quad (4.2.2)$$

sent (4.2.2) sempre positiva, com ja hem demostrat. Aquesta expressió (4.2.2) depèn de l'evolució de la diferència entre la Duració dels capitals que cal pagar i la Duració de les primes que s'han de percebre, però també del factor:

$$\frac{P_k(i)}{VT_k(i)} > 0,$$

el qual és el quocient entre el valor actual de les primes pendents de pagament (funció decreixent a mesura que passa el temps) i el valor de la provisió matemàtica (funció creixent), per tant, tindrà el valor màxim al començament de l'assegurança.

¹¹ Respecte el de prima única.

5. FACTORS DE RISC SI SE CERCA LA IMMUNITZACIÓ DE L'EXCEDENT

La condició d'immunització d'acord amb l'expressió (3.3.6) era:

$$D(A_k) = D(VT_k),$$

la qual s'obté a partir de la primera condició d'immunització de Redington.

Un aspecte que hem reservat per al darrer apartat del capítol és respondre per què no hem considerat també la segona condició de Redington relativa a la major convexitat de l'actiu respecte del passiu:

$$\frac{\partial^2 (V_A - V_L)}{\partial r^2} > 0$$

Hi ha una doble causa:

- Perquè no podem garantir que la primera i la segona condició puguin ser compatibles¹² quan s'identifica el passiu amb la provisió matemàtica.
- Perquè una major convexitat pot implicar major risc financer en cas d'un canvi no pla en els tipus d'interès.

5.1 La convexitat en el cas de contractes a primes periòdiques

La segona condició de Redington implica que la dispersió dels actius respecte al seu valor mitjà (representat per la Duració) sigui superior a la dispersió dels passius respecte al seu valor mitjà.

El problema sorgeix perquè hem cercat la primera condició d'immunització identificant el passiu amb la provisió, la qual no es correspon realment amb els pagaments esperats.¹³ Llavors el dubte és si la dispersió del passiu s'ha de calcular respecte el valor mitjà que representa la Duració de la provisió $D(VT_k)$ o la Duració dels pagaments esperats $D(C_k)$.

Recordem que en **un contracte a primes periòdiques**, d'acord amb l'expressió (4.1.5):

¹² En els contractes a primes periòdiques.

¹³ Només ho seria en el cas de cancel·lació anticipada d'un contracte abans del seu venciment.

$$D(VT_k) > D(C_k) .$$

I, si es cerca la immunització, també:

$$D(A_k) = D(VT_k) > D(C_k) . \quad (5.1.1)$$

Llavors, complint la primera condició de Redington (Duració de l'actiu igual a Duració de la provisió) els fluxos d'aquell són més grans que la Duració dels pagaments esperats (horitzó aleatori esperat) i, per tant, serà molt difícil complir la condició segona o de convexitat (respecte els pagaments esperats), perquè si els fluxos han de ser més dispersos hi ha d'haver d'anteriors i de posteriors i no només de posteriors.

5.2 La minimització del risc en una estratègia d'immunització

Hem constatat que cercar la immunització comporta, en el cas dels contractes a primes periòdiques, invertir els actius de forma que tinguin una Duració superior a la dels pagaments esperats; llavors, si els canvis del tipus d'interès no són exactament els previstos és possible que no s'aconsegueixi la immunització. Aquesta situació es coneix com a risc d'identificació del procés estocàstic¹⁴.

No hem de menysprear aquest risc perquè l'experiència històrica ens demostra que en el cas de les assegurances de vida durant molt anys han anat canviant els tipus d'interès emprats en la valoració dels actius i, al contrari, el passiu ha estat valorat a un tipus fix. Podem trobar un cas més flagrant d'un canvi no pla en els tipus d'interès?

Una mesura freqüentment emprada per valorar aquesta exposició de risc (de no identificació del procés estocàstic o d'un canvi no pla) es denomina *M-square*¹⁵ i analitza la dispersió dels fluxos esperats respecte a l'horitzó d'inversió previst. El factor *M-square* està directament relacionat amb la convexitat¹⁶; cal recordar que la convexitat és desitjable si el canvi en l'estructura de tipus és pla, però és un factor de risc si el canvi pren formes insospitades.

¹⁴ També es denomina *risc d'immunització* com es pot veure a Navarro i Nave (2001), pàg. 197.

¹⁵ . Proposada per Fong i Vasicek (1984).

¹⁶ De fet, Schnabel i Laurier (1990) estableixen la relació:

$$M^2 = \text{convexitat} - \text{duració}$$

Amb posterioritat han aparegut altres mesures relacionades també amb el risc de no-identificació del procés estocàstic, com és el cas de l'*M-absolute* proposat per Nawalka i Chambers (1996) o l'*M-vector model*, també de Nawalka i Chambers (1997). En tots els casos la dispersió dels fluxos respecte a l'horitzó considerat és un factor de risc.

Aquesta mesura *M-square* i les seves variants abans comentades havien estat aplicades en inversions en actius de renda fixa (fluxos de tipus determinista) però Li i Panjer (1994)¹⁷ proposen emprar tant la Duració com l'*M-square* com a mesures de risc per a fluxos contingents i estableixen l'analogia entre l'*M-square* i el concepte de variància estadística com a mesura de dispersió dels fluxos respecte al moment estimat en el qual serà necessari poder disposar d'ells.

Però en el cas que ens ocupa és difícil aplicar aquesta mesura ja que l'estratègia d'immunització implica ajustar la Duració dels actius respecte a la Duració de la provisió, no sent aquesta una mitjana dels pagaments esperats sinó una diferència entre el seu valor i el de les primes pendents.

En tots els estudis analitzats hi ha, però, aspectes coincidents respecte a la forma de reduir el risc d'un canvi no esperat (o no pla) en els tipus d'interès. Aquests aspectes són tres:

- Ajustar al màxim la Duració de l'actiu a la Duració del passiu que s'hagi considerat: $D_A = D_L$.
- Obtenir una mesura de la dispersió de l'actiu i el passiu respecte el seus respectius horitzons¹⁸: $M^2 \geq 0$.
- Definir estratègies per cercar el valor: $Min M^2$.

Una estratègia que potencia aconseguir la reducció d'aquest risc és la implementació d'un *cash flow matching* on els venciments dels diferents actius siguin molt propers als diferents pagaments esperats.

¹⁷ Els quals defineixen l'*M-square* respecte el valor de la Duració així:

$$M^2 = \sum_{i=1}^n (t_i - D)^2 \mathbf{v}_i,$$

sent t_i els moments on es creu que estaran disponibles els diferents fluxos i on \mathbf{v}_i és el valor actual del flux *i-èsim* respecte el total del valor actual de la inversió.

¹⁸ En el nostre cas la mesura M^2 es calcularia:

$$M^2 = \sum_{i=1}^n (t_{Ai} - D_A)^2 \mathbf{v}_{Ai} - \sum_{i=1}^n (t_{Li} - D_L)^2 \mathbf{v}_{Li}.$$

5.3 Estratègia immunitzadora de l'excedent versus casament de fluxos

Podem pensar, doncs, en utilitzar una estratègia de *cash-flow-matching* i veure si és compatible amb la immunització. Per implementar-la caldria que els actius que materialitzen les inversions tinguessin venciments coincidents amb les dates previstes dels pagaments esperats i els fluxos generats fossin suficients.

En el cas de contractes a prima única, on l'assegurador ja ha percebut i materialitzat tota la inversió a efectuar, en teoria sembla viable però en el cas dels contractes a primes periòdiques els actius invertits en un moment intermedi són insuficients respecte els pagaments esperats.¹⁹

Llavors el màxim que podem cercar és un casament de fluxos *parcial* on la condició que imposarà l'assegurador serà que encara que els fluxos que alliberin els actius en una data determinada siguin insuficients el seu valor actual respecte al valor actual dels pagaments esperats d'aquella data tingui la mateixa proporció que en qualsevol altra data.

És a dir:

$$\frac{A_j \cdot e^{-i_A j}}{\sum_{j=1}^n A_j \cdot e^{-i_A j}} = \frac{\bar{C}_j \cdot e^{-i j}}{\sum_{j=1}^n \bar{C}_j \cdot e^{-i j}} \quad \text{per a } \forall j \quad (5.3.1)$$

Si l'assegurador adopta aquest criteri com a estratègia d'inversió el que està fent és igualar la Duració dels actius invertits amb la Duració dels pagaments esperats. En efecte, considerant que el flux de l'actiu en el moment j representa una part \mathbf{v}_j del total, és a dir:

$$\mathbf{v}_j = \frac{A_j \cdot e^{-i_A j}}{\sum_{j=1}^n A_j \cdot e^{-i_A j}} .$$

Per calcular la Duració de l'actiu només hem de multiplicar cada un dels coeficients \mathbf{v}_j per l'instant de temps en què estan disponibles i després sumar el valor obtingut per tots els fluxos, és a dir:

$$D(A) = \sum_j \mathbf{v}_j \cdot j .$$

¹⁹ Perquè resta percebre primes pendents.

Com que els coeficients \mathbf{v}_j , d'acord amb (5.3.1), són els mateixos per als capitals a satisfer, sent també iguals els moments del temps en els quals s'han de satisfer, és evident que:

$$D(C) = \sum_j \mathbf{v}_j \cdot j .$$

Per tant, **una estratègia de *cash-flow-matching*** (encara que sigui parcial) **implica:**

$$D(A) = D(C) .$$

Una estratègia com aquesta tampoc no és totalment òptima perquè l'assegurador encara ha d'invertir primes futures a una rendibilitat desconeguda; si en el futur disminueix la rendibilitat que es pot aconseguir de les noves inversions potser hagués estat millor que els actius ja invertits tinguessin la màxima Duració possible per tal que la disminució de tipus hagués fet augmentar el seu valor al mercat secundari. D'aquesta manera l'assegurador disposaria d'un *coixí* de seguretat que compensés la menor rendibilitat de les noves inversions.

Això ho pot aconseguir **una estratègia d'immunització, la qual implicaria:**

$$D(A_k) = D(VT_k) > D(C_k) .$$

En la pràctica un assegurador pot escollir una situació intermèdia, amb una Duració de l'actiu més gran que la Duració dels pagaments esperats però no tan gran perquè sigui igual a la Duració de la provisió. Llavors en trobaríem en una situació del tipus:

$$D(P) < D(C) < D(A) < D(VT_k) . \quad (5.3.2)$$

És impossible saber quina estratègia concreta escollirà cada assegurador, però el que queda demostrat és **que no es pot implementar alhora una estratègia de *cash-flow-matching* i d'immunització²⁰, la qual recordem implica un valor d' M ² no necessàriament mínim.**

²⁰ En el cas dels contractes a prima única una estratègia *cash flow matching* sí que és compatible amb la immunització ja que coincideix el valor de la Duració de la provisió i dels pagaments esperats (en no haver-hi primes pendents).

5.4 Altres condicions necessàries per mantenir la solvència dinàmica

Al marge de cercar o no en un moment concret una estratègia que permeti immunitzar el valor del *surplus* de la cartera d'assegurances o bé aproximar un *cash-flow-matching* veiem que subsisteixen riscos financers, per tant, hi ha unes condicions més generals de solvència que s'haurien d'intentar mantenir en qualsevol cas, minimitzant el risc d'allunyar-se'n.

El procés d'estalvi és força clar: l'assegurador inverteix les primes²¹ de l'assegurat garantint-hi una rendibilitat mínima i, en un moment futur, del qual solament coneixem amb certesa el límit superior n , ha d'afrontar un pagament.

L'import d'aquest pagament serà funció del tipus d'interès que s'hagi garantit, del moment en què s'hagi de fer i de l'evolució i sistema d'assignació de l'eventual participació en guanys en moments anteriors.

Per tant, les condicions per mantenir l'equilibri²² són bàsicament dues:

- Que la inversió de les primes del contracte s'efectuï a un tipus superior al garantit.
- Que l'assegurador no hagi de suportar el risc de preu dels actius venent-los abans del moment de la seva amortització.²³

Si es dona la primera condició cada prima serà invertida en un actiu que tindrà un valor d'amortització superior al que correspondrà a l'assegurat per la prima aportada (ja que aquesta es capitalitza a un tipus inferior).

Respecte a aquestes condicions l'assegurador sempre es troba en una situació d'informació incompleta ja que,

- pel que fa al tipus d'interès coneix la rendibilitat que es pot obtenir de les inversions ja efectuades (actius que actualment materialitzen les provisions) però ignora la rendibilitat que pot aconseguir de les primes futures;
- pel que fa a l'horitzó dels actius la situació és semblant ja que pot decidir el termini d'inversió per a les aportacions ja efectuades però per a les primes futures no pot establir cap estratègia fins que les percebi, ja que no té certesa absoluta que això succeirà.

²¹ Una vegada ha deduït la part corresponent a les despeses i al vessant de risc del contracte.

²² Al marge de les normes de valoració en moments intermedis.

²³ Per neutralitzar aquest risc sí que és possible cercar una immunització (aproximada).

Així, tal com comenta Becker (1998), l'assegurador ha de gestionar dues classes d'actius:

- uns de reals, amb fluxos i rendibilitats coneguts.²⁴
- uns altres de virtuals que estan formats per les primes pendents de percebre, de les quals no coneixem ni la rendibilitat futura ni tan sols si arribaran a ser realment percebudes.

Proposem, doncs, incloure el conjunt d'actius virtuals en l'anàlisi global de la solvència afegint-los al conjunt d'actius reals dels quals disposa l'assegurador, considerant llavors com a compromisos adquirits el valor total dels pagaments previstos pel contracte d'assegurança en lloc de la provisió matemàtica.

²⁴ Els actius són reals en el sentit que ja s'ha efectuat la materialització.