

# Integrals de curvatura i geometria integral a l'espai hiperbòlic.

Gil Solanes Farrés



**Universitat  
Autònoma  
de Barcelona**



# Integrals de curvatura i geometria integral a l'espai hiperbòlic.

Gil Solanes Farrés

Memòria presentada per aspirar  
al grau de Doctor en Ciències  
Matemàtiques.

Departament de Matemàtiques  
de la Universitat Autònoma de  
Barcelona.

Bellaterra, març de 2003



CERTIFICO que aquesta memòria ha estat realitzada per en Gil Solanes Farrés sota la direcció del Dr. Eduardo Gallego Gómez.

Bellaterra, març de 2003

Dr. Eduardo Gallego Gómez



# Índex

<b>1</b>	<b>Integrals de curvatura mitja</b>	<b>17</b>
1.1	L'espai hiperbòlic . . . . .	17
1.1.1	Definició i fets bàsics . . . . .	17
1.1.2	El mètode de la referència mòbil . . . . .	19
1.1.3	Models . . . . .	24
1.2	Integrals de curvatura mitja . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Espais de plans</b>	<b>31</b>
2.1	Espais de plans . . . . .	31
2.1.1	Mètriques i mesures invariants . . . . .	33
2.2	Fórmules cinemàtiques . . . . .	37
2.3	L'esfera de de Sitter . . . . .	41
2.3.1	Espais de plans a l'esfera de de Sitter . . . . .	44
2.3.2	Aplicació de Gauss . . . . .	46
2.4	Mesures de contacte. . . . .	50
2.5	Fórmula de Cauchy-Crofton a l'esfera de de Sitter. . . . .	52
<b>3</b>	<b>Curvatura total</b>	<b>57</b>
3.1	Teorema de Gauss-Bonnet a l'espai euclidià . . . . .	57
3.2	Teorema de Gauss-Bonnet a l'esfera . . . . .	59
3.3	Fórmules de variació. . . . .	65
3.4	Teorema de Gauss-Bonnet a l'espai hiperbòlic . . . . .	71
3.5	Curvatura total absoluta a l'espai hiperbòlic . . . . .	74
3.5.1	Curvatura total absoluta a l'espai euclidià . . . . .	75
3.5.2	Superfícies a l'espai hiperbòlic de dimensió 3. . . . .	77
3.5.3	Immersions tenses a l'espai hiperbòlic. . . . .	80
<b>4</b>	<b>Desigualtats entre les integrals de curvatura mitja</b>	<b>91</b>
4.1	Introducció . . . . .	91
4.2	Desigualtats entre Quermassintegrale . . . . .	93
4.3	Esperança de tall amb varietats lineals . . . . .	97
4.4	Desigualtats entre integrals de curvatura mitja . . . . .	98
4.5	Exemples . . . . .	102

<b>5</b>	<b>Geometria integral d'horosferes i equidistants</b>	<b>107</b>
5.1	Introducció . . . . .	107
5.2	Definicions i mesures invariants . . . . .	108
5.3	Volum d'interseccions amb plans $\lambda$ -geodèsics . . . . .	110
5.4	Integrals de curvatura mitja d'interseccions amb plans $\lambda$ -geodèsics . . .	112
5.5	Mesura de plans $\lambda$ -geodèsics que tallen un domini $\lambda$ -convex. . . . .	117
5.6	Domini $h$ -convexos . . . . .	118
5.7	Esperança del tall amb $\lambda$ -plans . . . . .	121



# Introducció

La suma dels angles interiors d'un triangle hiperbòlic no val  $\pi$  sinó que és sempre menor. La diferència amb aquest valor s'anomena el *defecte* del triangle i coincideix amb la seva àrea. Aquest resultat pertany als inicis de la geometria no-euclidiana però també és conseqüència del conegut teorema de Gauss-Bonnet. Gràcies a aquest teorema sabem que la integral de la curvatura geodèsica d'una corba diferenciable simple i tancada al pla hiperbòlic és igual a l'àrea del domini que delimita més la característica d'Euler d'aquest domini multiplicada per  $2\pi$ . Podríem definir el *defecte* d'una corba al pla hiperbòlic com la diferència de la seva integral de curvatura geodèsica amb la d'una corba del pla euclidià topològicament equivalent. En aquest cas diríem que el defecte d'una corba és l'àrea de la regió que delimita. Aquest defecte ve a mesurar l'esforç suplementari que fa un mariner al timó d'un vaixell quan, navegant per un mar hiperbòlic, fa que la nau doni una volta completa.

Quan passem a dimensió 3, el teorema de Gauss-Bonnet diu que la integral de la curvatura de Gauss d'una superfície tancada és  $2\pi$  vegades la seva característica d'Euler més la seva àrea. Es pot dir que el defecte d'una superfície a l'espai hiperbòlic és la seva àrea. Veiem de forma molt clara que les superfícies de l'espai hiperbòlic han d'aportar més curvatura que a l'espai euclidià per tal de tancar-se.

Quan passem a l'espai hiperbòlic de dimensió arbitrària ens trobem amb un teorema de Gauss-Bonnet més aviat decebedor: si  $n$  és parell i  $V$  denota el volum de  $Q \subset \mathbb{H}^n$ ,

$$M_{n-1}(\partial Q) + c_{n-3}M_{n-3}(\partial Q) + \cdots + c_1M_1(\partial Q) + (-1)^{n/2}V = O_{n-1}\chi(Q)$$

mentre que si  $n$  és senar,

$$M_{n-1}(\partial Q) + c_{n-3}M_{n-3}(\partial Q) + \cdots + c_2M_2(\partial Q) - M_0(\partial Q) = \frac{O_{n-1}}{2}\chi(\partial Q)$$

on  $O_i$  és el volum de l'esfera unitat de dimensió  $i$ , les  $c_i$  són constants depenent de la dimensió i  $M_i(\partial Q)$  és la integral sobre  $\partial Q$  de la  $i$ -èssima funció de curvatura mitja. En particular  $M_{n-1}(\partial Q)$  és la integral de la curvatura de Gauss o *curvatura total* de  $\partial Q$ . Aquest teorema de Gauss-Bonnet es dedueix de la versió més general i intrínseca que va donar Chern per a varietats riemannianes abstractes. Tanmateix és una llàstima que la simplicitat que teníem en les dimensions 2 i 3 s'hagi perdut. Per exemple, ja no és tan clar, encara que  $Q$  sigui convex, si la curvatura total és més gran a l'espai hiperbòlic o a l'euclidià. Tot i així, la geometria integral ens permetrà donar una versió molt més

elegant del teorema de Gauss-Bonnet a l'espai hiperbòlic. En efecte, provarem que

$$M_{n-1}(\partial Q) = O_{n-1}\chi(Q) + c \int_{\mathcal{L}_{n-2}} \chi(L_{n-2} \cap Q) dL_{n-2} \quad (1)$$

on  $\mathcal{L}_{n-2}$  és l'espai de plans totalment geodèsics de  $\mathbb{H}^n$  de codimensió 2 i  $dL_{n-2}$  és la mesura invariant en aquest espai. Així, el defecte d'una hipersuperfície tancada és la mesura amb multiplicitat del conjunt de plans de codimensió 2 que la tallen. La geometria integral no només ens permet escriure una fórmula tan bonica com l'anterior sinó que per demostrar-la ens basarem en mètodes també propis de la geometria integral, així com en alguns resultats de topologia diferencial. Com que a partir d'aquesta fórmula s'obté fàcilment el teorema de Gauss-Bonnet a  $\mathbb{H}^n$ , tindrem una demostració nova d'aquest teorema utilitzant dels mètodes de la geometria integral.

Aquest fet tan remarcable té el seu equivalent en geometria esfèrica on ja va ser descobert per E. Teufel a [Teu80]. En aquest cas, a la fórmula (1) la integral sobre l'espai dels  $(n-2)$ -plans hi apareix restant enlloc de fer-ho sumant. Fem un cop d'ull a la demostració d'aquest cas esfèric i ens farem una idea de les dificultats afegides que amaga el cas hiperbòlic. Per simplificar suposem que  $Q \subset \mathbb{S}^n$  és un domini estrictament convex. Aleshores podem prendre l'aplicació de Gauss  $\gamma$  que a cada punt de  $S = \partial Q$  li fa correspondre el seu vector normal unitari interior. La imatge  $\gamma(S)$  d'aquesta aplicació de Gauss és una hipersuperfície de  $\mathbb{S}^n$  que té per volum la curvatura total de  $S$ . Això és degut al fet que la curvatura de Gauss en un punt mesura la deformació infinitesimal de volum de  $\gamma$ . Per altra banda, la fórmula de Cauchy-Crofton a  $\mathbb{S}^n$  permet calcular aquest volum comptant el nombre de punts de tall de  $\gamma(S)$  amb tots els cercles màxims de  $\mathbb{S}^n$ . Llevat de constants tenim que  $M_{n-1}(S)$  és la integral del nombre de punts d'intersecció  $\#(l \cap \gamma(S))$  sobre tot l'espai dels cercles màxims  $l$  de  $\mathbb{S}^n$ . Considerem el feix d'hiperplans ortogonals a un cercle màxim  $l$ . Tots ells tenen un  $(n-2)$ -pla  $L_{n-2}$  en comú que anomenem *pol* de  $l$ . A més, cada punt de  $l \cap \gamma(S)$  és una tangència d'aquest feix amb  $S$ . Ara bé, segons si el pol  $L_{n-2}$  talla o no a  $S$ , el feix d'hiperplans tindrà cap o dues tangències amb  $S$ . Per tant, la curvatura total de  $S$  és, llevat de constants, la mesura de l'espai d' $(n-2)$ -plans de  $\mathbb{S}^n$  menys la mesura del conjunt d'aquests  $(n-2)$ -plans que tallen el convex  $Q$ .

L'esquema a l'espai hiperbòlic serà similar. Considerem un domini estrictament convex  $Q \subset \mathbb{H}^n$  en el model de l'hiperboloide

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid L(x, x) = -1 \ x_0 > 0\}$$

amb la mètrica de Lorentz  $L(x, y) = -x_0y_0 + x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ . Per cada punt de  $S = \partial Q$  prenem el vector normal unitari interior. Aquest és un vector de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de tipus espai; per tant tenim una aplicació de Gauss  $\gamma$  definida de  $S$  cap a la quàdrica següent, anomenada *esfera de de Sitter*,

$$\Lambda^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid L(x, x) = 1\}.$$

La imatge  $\gamma(S)$  és una hipersuperfície de tipus espai i, tal com passava a  $\mathbb{S}^n$ , la integral de la curvatura de Gauss de  $S$  coincideix amb el volum d'aquesta imatge. El següent

pas seria utilitzar la fórmula de Cauchy-Crofton a  $\Lambda^n$  per determinar el volum de  $\gamma(S)$ . Malhauradament no existeix una tal fórmula. De fet, el conjunt de rectes de  $\Lambda^n$  que tallen qualsevol petit tros d'hipersuperfície té mesura infinita. Aquesta és la dificultat que amagava l'espai hiperbòlic: ens cal fer geometria integral en un espai de Lorentz i això comporta molts contratemps. Que la imatge de Gauss de  $\mathbb{H}^n$  vagi a parar a una varietat de Lorentz no és casual ni degut al fet que haguem pres un model contingut a l'espai de Minkowski. Com veurem, les raons que provoquen aquest fet estan relacionades amb l'existència d'hiperplans ultraparal·lels. Per tant, es tracta d'un fet *intrínsecament* lligat a les propietats geomètriques de l'espai hiperbòlic i no a les de cap model en concret.

Tot i així, en aquest treball serem capaços de superar aquesta dificultat tot provant una fórmula de l'estil de la de Cauchy-Crofton per a hipersuperfícies de  $\Lambda^n$ . Concretament provarem que

$$\int_{\mathcal{L}} (2 - \#(l \cap R)) dl = \frac{O_{n-2}}{n-1} (\text{vol}(R) - O_{n-1})$$

on  $R$  és qualsevol hipersuperfície de tipus espai pròpiament immersa (submergida) a  $\Lambda^n$  i  $\mathcal{L}$  denota el conjunt de les geodèsiques  $l$  de tipus espai. Aplicarem aquesta fórmula a la hipersuperfície  $R = \gamma(S)$ . Si per cada vector d'una geodèsica de tipus espai a  $\Lambda^n$  prenem el subespai ortogonal segons la mètrica de Lorentz, obtenim un feix d'hiperplans a  $\mathbb{H}^n$  que es tallen tots a  $L_{n-2}$ , un pla geodèsic de  $\mathbb{H}^n$  de dimensió  $n-2$ . Ara bé, els punts de tall de  $l$  amb  $\gamma(S)$  corresponen a tangències del feix amb  $S$ . Segons que  $L_{n-2}$  talli  $S$  o no, el feix d'hiperplans tindrà cap o dues d'aquestes tangències. Així, tenim que la mesura dels  $(n-2)$ -plans que tallen  $Q$  és, llevat d'una constant, la curvatura total de la seva vora menys  $O_{n-1}$ .

Val a dir que si bé el paràgraf anterior conté la idea de la demostració, en el cas general ens caldrà anar molt més amb compte ja que la imatge de Gauss d'una hipersuperfície no estrictament convexa pot estar molt lluny de ser pròpiament immersa.

No és d'estranyar que la geometria integral permeti demostrar el teorema de Gauss-Bonnet. De fet, les integrals de curvatura apareixen a moltes de les fórmules de la geometria integral. Tampoc són poques les ocasions en què a través d'aquesta relació la geometria integral permet treure conclusions sobre la curvatura total. Per exemple, el teorema de Fenchel-Fary-Milnor per corbes tancades es redueix pràcticament a aplicar la fórmula de Crofton a la imatge esfèrica del vector tangent unitari de la corba. Un resultat similar és la desigualtat de Chern-Lashof. Recordem que aquesta desigualtat diu que per tota subvarietat compacta  $S$  immersa a  $\mathbb{R}^n$ , la curvatura total absoluta  $\text{CTA}(S)$  està acotada per

$$\text{CTA}(S) \geq \frac{O_{n-1}}{2} \beta(S)$$

on  $\beta(S)$  és la suma dels nombres de Betti de  $S$ . En cas d'igualtat es diu que  $S$  és *tensa* (en anglès *tight*). Les immersions tenses han estat molt estudiades i s'han caracteritzat geomètricament de moltes maneres diferents. Recordant el que dèiem al principi sobre com a l'espai hiperbòlic les hipersuperfícies necessiten molta més curvatura per tal de

tancar-se, es podria pensar que la desigualtat anterior, essent vàlida a  $\mathbb{R}^n$ , té motius de sobra per ser-ho a  $\mathbb{H}^n$ . Tot i així, es va veure a [LS00] que això no és cert. Concretament, allà es construïen superfícies  $S$  a  $\mathbb{H}^3$ , orientables i de gènere  $g$  gran, tals que la curvatura total absoluta és menor que  $2\pi\beta(S) = 2\pi(2 + 2g)$ . Aquí farem el mateix però per qualsevol gènere  $g > 1$ . En no tenir desigualtat de Chern-Lashof, no queda clar quan s'ha de dir que una subvarietat de  $\mathbb{H}^n$  és tensa. Així i tot, seguint les caracteritzacions geomètriques de les immersions tenses a  $\mathbb{R}^n$ , donarem una definició natural d'immersió tensa a  $\mathbb{H}^n$ . La pregunta que sorgeix llavors és: quina diferència hi ha entre la curvatura total absoluta d'una immersió tensa a  $\mathbb{H}^n$  i la del seu equivalent euclidià? Ens estem preguntant pel defecte d'una immersió tensa en quant a curvatura total absoluta. La resposta vindrà donada altre cop en el 'llenguatge' de la geometria integral. Concretament provarem que aquest 'defecte absolut' és

$$\int_S |K| dx - \frac{O_{n-1}}{2} \beta(S) = \frac{O_{n-2}}{n-1} \int_{\mathcal{L}_{n-2}} (\beta(S) - \nu(S, L)) dL$$

on  $\nu(S, L)$  és el nombre de tangències del feix d'hiperplans que contenen  $L_{n-2}$  amb  $S$ . Aquest defecte no és pas sempre positiu; en els exemples de [LS00] serà forçosament negatiu. Tanmateix, provarem que per immersions tenses del tor, el defecte absolut és positiu. És a dir que per tors tenses a  $\mathbb{H}^n$  sí que val la desigualtat de Chern-Lashof.

De la mateixa manera que les hipersuperfícies a l'espai hiperbòlic són més corbades que a l'espai euclidià, també tenen més volum. Recordem, per exemple, una desigualtat clàssica que diu que per un domini  $Q \subset \mathbb{H}^n$  la vora té més volum que l'interior. Més precisament

$$\text{vol}(\partial Q) > (n-1)\text{vol}(Q).$$

Això sobta molt a la nostra intuïció ja que en geometria euclidiana aquests dos volums tenen ordres diferents. Per exemple, sabem que per una homotècia de raó  $\rho$  el volum de  $Q$  es multiplica per  $\rho^n$  i el de  $\partial Q$  es multiplica per  $\rho^{n-1}$ . Això vol dir que  $\text{vol}(Q)$  i  $\text{vol}(\partial Q)$  no són comparables a l'espai euclidià. En canvi, sí que ho són a l'espai hiperbòlic. Això es deu al fet que la curvatura negativa de l'espai dóna molt més 'contingut' a la vora. Si combinem això amb la idea que aquesta vora és molt corbada podem pensar a buscar desigualtats de l'estil  $\text{vol}(Q) < cM_{n-1}(Q)$  o bé  $\text{vol}(\partial Q) < cM_{n-1}(Q)$ . Provarem aquestes i d'altres desigualtats quan  $Q$  sigui convex. Concretament veurem que hi ha constants tals que per tot convex  $Q \subset \mathbb{H}^n$

$$M_i(\partial Q) < c \text{vol}(Q) \quad M_i(\partial Q) < c_{ij} M_j(\partial Q) \quad \text{si } i < j$$

on  $M_i$  denota, recordem-ho, la integral de la  $i$ -èsima funció de curvatura mitja. Altre cop, aquests resultats són totalment impensables en geometria euclidiana ja que les integrals de curvatura mitja  $M_i$  son d'ordre  $n-i-1$ . És a dir que si dilatem  $Q$  amb una homotècia de raó  $\rho$ , la  $i$ -èsima integral de curvatura mitja de la vora passa a ser  $M_i(\partial(\rho Q)) = \rho^{n-i-1} M_i(\partial Q)$ .

A l'hora de demostrar aquestes desigualtats, l'equació (1) tornarà a jugar un paper important. Utilitzant les propietats reproductives dels  $M_i$ , aquesta fórmula es tradueix

en una igualtat de l'estil

$$M_i(\partial Q) = cW_{i-1}(Q) + c'W_{i+1}(Q)$$

on  $W_i(Q)$  se sol anomenar Quermassintegrals de  $Q$  i és, llevat de constants, la mesura dels  $i$ -plans que tallen el convex  $Q$ . Així, començarem buscant desigualtats entre les  $W_i$  de les que es deduiran, a través de la fórmula anterior, desigualtats entre les  $M_i$ . Aquestes primeres desigualtats seran de l'estil  $W_i(Q) < cW_{i+1}(Q)$ . En particular tindrem que  $\text{vol}(Q) < cW_i(Q)$ . Aquesta desigualtat té una interpretació molt sorprenent en termes de probabilitats geomètriques. En efecte, si llancem un  $i$ -pla  $L$  a l'atzar sobre un convex  $Q$  i mesurem el volum de  $L \cap Q$  tindrem una variable aleatòria  $\lambda_i$ . L'esperança matemàtica d'aquesta variable aleatòria és  $E[\lambda_i] = c \cdot \text{vol}(Q)/W_i(Q)$ . Per tant, la desigualtat que mencionàvem equival a dir que l'esperança matemàtica del tall d'un convex amb un  $i$ -pla aleatori està acotada superiorment, independentment de com sigui de gran el convex! És a dir que encara que tinguem una regió enormement extensa, al fer-hi un tall a l'atzar no cal esperar-ne una una secció més gran que una constant coneguda.

A banda d'aquesta interpretació, les desigualtats entre els  $W_i(Q)$  ens permetran provar que per tot convex  $Q \subset \mathbb{H}^n$

$$M_i(\partial Q) < M_j(\partial Q) \quad \text{si } j > i + 1$$

i aquestes desigualtats seran ajustades. En efecte, és fàcil veure que per una bola  $B$  de radi tendint a infinit  $M_i(\partial B)/M_j(\partial B)$  s'aproxima a 1. D'altra banda trobarem constants tals que

$$M_i(\partial Q) < c_i M_{i+1}(\partial Q)$$

encara que no podem garantir que aquestes constants siguin les òptimes.

Tornant a l'esperança del tall d'un pla aleatori amb un domini, també és interessant veure què passa quan es fa el mateix amb altres subvarietats preses a l'atzar. En particular, és natural plantejar el problema amb horosferes i equidistants en lloc de plans geodèsics. Les equidistants i les horosferes són dos tipus d'hipersuperfície molt característics de la geometria hiperbòlica que, en certa manera, hi ocupen el lloc dels hiperplans afins euclidians. En efecte, en geometria euclidiana podem pensar que els hiperplans afins són les esferes de radi infinit. També podem dir que hiperplans i esferes són les hipersuperfícies de curvatura normal constant. En canvi, en geometria hiperbòlica una esfera amb el centre tendint a infinit tendeix a una hipersuperfície anomenada horosfera. Per altra banda, les esferes de  $\mathbb{H}^n$  tenen totes curvatura normal més gran que 1. És clar doncs que entre els hiperplans geodèsics i les esferes hi ha d'haver tota una gamma d'hipersuperfícies de curvatura normal constant entre 0 i 1. Són les equidistants i les horosferes. Les primeres tenen curvatura normal constant menor que 1 i estan formades per punts a una distància donada d'un hiperplà geodèsic fixat. Pel que fa a les horosferes, tenen curvatura normal 1 i ja hem dit que s'obtenen al fer tendir el centre d'una esfera a l'infinit. Així, és natural pensar que horosferes i equidistants tenen una gran analogia amb els hiperplans afins de la geometria euclidiana. Per tant, la geometria integral a l'espai hiperbòlic s'ha d'ocupar d'aquestes hipersuperfícies de la

mateixa manera que la geometria integral euclidiana s'ocupa dels plans afins. Pel cas de les horosferes, aquest estudi va ser iniciat per Santaló a [San67] i [San68] en dimensions 2 i 3 i el van continuar Gallego, Martínez Naveira i Solanes a [GNS] en dimensió arbitrària. El cas de les hipersuperfícies equidistants el tractarem aquí per primer cop i ho farem conjuntament amb l'anterior.

Un fet que crida molt l'atenció és que la mesura d'horoboles (regions convexes limitades per horosferes) que contenen un compacte és finita malgrat ser aquestes horoboles regions no acotades. A més, aquest fet servirà per provar certes desigualtats geomètriques per als conjunts *h-convexos* o convexos respecte horosferes. Finalment veurem que, igual que pels plans geodèsics, l'esperança del volum del tall d'un domini amb una horosfera o una equidistant aleatòria està acotada per sobre per més gran que sigui el domini.

A continuació detallem l'organització d'aquest treball. El capítol 1 conté algunes observacions preliminars sobre l'espai hiperbòlic  $\mathbb{H}^n$  i sobre les integrals de curvatura mitja d'hipersuperfícies. També s'hi fan alguns càlculs amb el mètode de la referència mòbil que serà l'eina bàsica de la resta del text. A més, aquest mètode ens estalviarà haver de fer ús de cap model concret de l'espai hiperbòlic. Només en moments puntuals farem servir el model projectiu i encara de forma sintètica. Val a dir que tot el que farem en aquest treball es pot fer amb la mateixa comoditat treballant en el model de l'hiperboloide. Tanmateix, no hem volgut fer-ho així per tal de veure més clarament les raons geomètriques que fan aparèixer les mètriques semi-riemannianes.

El capítol 2 estudia els espais formats per plans geodèsics de  $\mathbb{H}^n$ . Dediquem especial atenció a la seva estructura semi-riemanniana invariant per l'acció del grup de moviments de  $\mathbb{H}^n$ . Com a cas particular, identifiquem l'esfera de de Sitter  $\Lambda^n$  amb l'espai d'hiperplans orientats de  $\mathbb{H}^n$ . En aquest espai desenvolupem el mètode de la referència mòbil i estudiem la relació de dualitat que manté amb el mateix  $\mathbb{H}^n$ . També generalitzem a  $\Lambda^n$  alguns resultats sobre mesures de contacte coneguts en varietats riemannianes de curvatura constant. Aquests resultats serveixen per acabar el capítol amb una fórmula de Cauchy-Crofton a  $\Lambda^n$ . Aquesta fórmula és un dels resultats principals del treball i la seva demostració inspirarà gran part del contingut del següent capítol.

El capítol 3 tracta sobre la curvatura total d'hipersuperfícies. En una primera part s'hi estudia la integral de la curvatura de Gauss d'hipersuperfícies tancades. Això es fa des del punt de vista de la geometria integral que, com hem dit, presenta avantatges respecte el punt de vista intrínsec. Després de recordar breument els casos euclidià i esfèric que són coneguts, es passa a l'espai hiperbòlic. El resultat serà la fórmula (1) que alhora dóna lloc a una nova demostració d'algunes fórmules de geometria integral així com del teorema de Gauss-Bonnet a l'espai hiperbòlic.

La segona part del capítol s'ocupa de l'estudi de la curvatura total absoluta (en el sentit de Chern i Lashof). Després de recordar breument la teoria clàssica a l'espai euclidià, comencem l'estudi amb les superfícies de  $\mathbb{H}^3$ . El més important d'aquesta secció són els exemples que proven que la desigualtat de Chern-Lashof no és certa en geometria hiperbòlica. A continuació, donem una definició de subvarietat tensa a  $\mathbb{H}^n$  anàloga en

molts aspectes a la definició euclidiana. Finalment, obtenim una fórmula cinemàtica que permet mesurar la diferència entre la curvatura total absoluta d'una subvarietat tensa a  $\mathbb{H}^n$  i la seva anàloga euclidiana. D'aquesta fórmula es dedueix que els tors tensos a  $\mathbb{H}^n$  sí que compleixen la desigualtat de Chern-Lashof.

En el capítol 4 s'obtenen desigualtats relacionant les integrals de curvatura mitja de la vora d'un conjunt convex. El primer pas és provar que la mesura del conjunt de plans que tallen el convex és major com més gran és la dimensió d'aquests plans. Això es fa mitjançant un argument geomètric bastant elemental però força original i efectiu. Aquest resultat s'interpreta en termes de l'esperança del volum d'intersecció d'un pla aleatori que talla a un domini fixat. Després s'obtenen les desigualtats entre integrals de curvatura mitja i finalment es donen exemples mostrant que moltes d'aquestes desigualtats són òptimes.

El darrer capítol generalitza les fórmules clàssiques de la geometria integral a horosferes i hipersuperfícies equidistants. S'hi tracten tots dos casos alhora juntament amb el dels plans geodèsics i les esferes ja que es treballa amb hipersuperfícies totalment umbilicals de qualsevol curvatura normal. A continuació utilitzem els resultats sobre les horosferes per provar certes desigualtats geomètriques per a dominis  $h$ -convexos. Finalment, obtenim resultats sobre l'esperança del volum d'intersecció d'una hipersuperfície d'aquestes, presa a l'atzar d'entre les que tallen un domini fixat.

### Agraïments

Aquesta tesi no hauria estat possible sense l'ajut de moltes persones. En primer lloc, l'Eduard Gallego que l'ha dirigida donant-me en tot moment ajut i orientació, a més d'un suport incondicional. Sempre ha estat disposat a escoltar-me i m'ha animat quan ha estat necessari. Però encara més que tot això, li he d'agrair que m'hagi introduït en un tema tan bonic com és la geometria integral.

També estic en deute amb l'Agustí Reventós pel seu interès i bona disposició. Han estat moltes les estones que hem passat al seu despatx parlant de geometria. Pel que fa al professor Rémi Langevin li he de donar les gràcies per la seva hospitalitat en les meves estades a Dijon. A més, la seva intuïció a l'hora de trobar contraexemples em va treure d'un camí que no duia enlloc. Així mateix, em considero afortunat d'haver pogut col·laborar amb el professor Antonio M. Naveira. Ell és qui va iniciar la feina del darrer capítol i generosament ens va animar a afegir-nos-hi. En els fonaments d'aquesta tesi també hi ha els treballs del professor Eberhard Teufel. Sense aquesta feina feta, jo no hauria arribat gaire enllà. També ell ha estat molt amable i m'ha donat consell moltes vegades.

D'altra banda és evident que aquest treball ha necessitat de l'ambient de recerca que plana sempre en el Departament de Matemàtiques de la UAB. En particular, entre els membres del grup de geometria, que m'han donat suport en tantes coses. Vull esmentar especialment a en Joan Porti, amb qui comparteixo despatx i que també m'ha ajudat sovint.

Sense els companys de carmanyola aquesta tesi potser tampoc hauria estat possible. El seu bon humor m'ha donat ànims en els moments difícils.

Finalment dec un agraïment a la meua família per haver-me recolzat en tot moment. A la Maira, que ha estat sempre al meu costat, li dedico aquesta tesi.



# Capítol 1

## Integrals de curvatura mitja

### 1.1 L'espai hiperbòlic

En aquesta secció introduïm l'espai hiperbòlic i comentem alguns dels aspectes fonamentals de la seva geometria.

#### 1.1.1 Definició i fets bàsics

Existeixen múltiples models de l'espai hiperbòlic. Entre els més coneguts hi ha els de Poincaré (semiespai i bola), el de l'hiperboloide i el projectiu (o de Klein o de Beltrami). El model de l'hiperboloide és el més utilitzat per fer geometria integral (cf. [San76]). Tot i així, en aquest treball usarem de forma exclusiva el model projectiu i encara de forma puntual. En efecte, per tal de donar la visió més geomètrica possible, prendrem un punt de vista abstracte; i.e. evitant tant com puguem de treballar amb cap model en concret. Per poder fer càlculs, doncs, necessitarem fer ús de tècniques de geometria riemanniana com són les coordenades polars geodèsiques, els camps de Jacobi, el mètode de la referència mòbil, etc. A més de tot això, ens seran de gran utilitat les fórmules de la trigonometria hiperbòlica.

**Definició 1.1.1.** *L'espai hiperbòlic de dimensió  $n$ , que denotarem  $\mathbb{H}^n$ , és la (única llevat d'isometria) varietat de Riemann  $n$ -dimensional, completa, simplement connexa i de curvatura seccional  $-1$ .*

Com és sabut, la unicitat llevat d'isometria ve donada pel teorema de classificació de Cartan ([Car51, p.238]). Aquest mateix teorema implica la següent propietat, general per espais de curvatura constant.

**Proposició 1.1.1.** *El grup d'isometries de  $\mathbb{H}^n$  actua transitivament sobre les referències ortonormals. És a dir, donats dos punts  $p, q \in \mathbb{H}^n$  i bases ortonormals de  $T_p\mathbb{H}^n$  i  $T_q\mathbb{H}^n$ , existeix una única isometria que envia  $p$  a  $q$  i la base de  $T_p\mathbb{H}^n$  a la de  $T_q\mathbb{H}^n$ .*

En particular l'espai hiperbòlic és homogeni i isotrop. Denotarem per  $G$  el grup de les isometries de  $\mathbb{H}^n$ .

Una segona consideració a fer sobre  $\mathbb{H}^n$  és que, per ser de curvatura negativa i com a conseqüència del teorema de Hadamard, no hi ha punts conjugats. Per tant, és difeomorf a l'espai euclidià. Concretament, si  $\exp : T_p\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  és l'aplicació exponencial centrada en un punt  $p$  de  $\mathbb{H}^n$ , llavors  $\exp$  és un difeomorfisme global. A més, donat un subespai vectorial  $V$  de dimensió  $r$  de  $T_p\mathbb{H}^n$ , l'aplicació exponencial envia  $V$  a una subvarietat  $r$ -dimensional totalment geodèsica de  $\mathbb{H}^n$ . Aquestes subvarietats les anomenem *r-plans geodèsics*. Amb la mètrica induïda per l'ambient, cada un d'aquests  $r$ -plans  $L_r$  és isomètric a  $\mathbb{H}^r$ . Donats dos  $r$ -plans, és clar que hi ha una isometria de  $\mathbb{H}^n$  que porta l'un a l'altre.

La propietat que marca radicalment la diferència entre les geometries hiperbòlica i euclidiana o esfèrica és que dos hiperplans poden no tallar-se estant en posició genèrica. A l'esfera  $\mathbb{S}^n$ , dos equadors sempre es tallen i, encara que a  $\mathbb{R}^n$  dos hiperplans poden ser disjunts, sempre podem fer que es tallin movent-ne un tan sols una mica. En canvi, dos hiperplans de  $\mathbb{H}^n$  que tinguin una geodèsica perpendicular comuna no es tallen. Aquesta geodèsica dona la distància mínima entre ells i és única. Si movem lleugerament un dels hiperplans, la distància varia contínuament i per tant es mantenen disjunts. Es diu que dos hiperplans amb una perpendicular comuna són *ultraparal·lels*. Existeix un cas límit en el qual dos hiperplans no es tallen però estan a distància 0, és a dir infinitament a prop de tallar-se. En aquest cas no hi ha cap recta perpendicular a tots dos hiperplans i direm que són *paral·lels*.

A través de l'aplicació exponencial podem passar les coordenades polars de  $T_pM$  a  $\mathbb{H}^n$ . Obtenim les anomenades *coordenades polars geodèsiques* en les quals la mètrica de  $\mathbb{H}^n$  s'escriu

$$ds^2 = dr^2 + \sinh^{n-1} r du^2 \quad (1.1)$$

on  $r$  denota la distància a  $p$  i  $du^2$  és la mètrica de l'esfera unitat a  $T_p\mathbb{H}^n$ . Per veure-ho n'hi ha prou amb recordar que el camp de Jacobi nul a  $p$  i ortogonal a la geodèsica radial té norma  $\sinh r$  (cf.[dC92, p.113]). Així, per exemple, una circumferència  $C$  de radi  $R$  a  $\mathbb{H}^2$  té longitud  $2\pi \sinh R$  i delimita un disc d'àrea  $2\pi(\cosh R - 1)$ . Un senzill càlcul mostra que la curvatura geodèsica de  $C$  és constant  $\coth R$ . Fixem-nos que és sempre més gran que 1. Queda clar que una recta no s'aproxima per circumferències. Aquesta és una altra de les propietats característiques de la geometria hiperbòlica. Si fixem un punt de  $C$  i n'allunyem el centre infinitament obtenim una corba amb curvatura geodèsica constant 1; d'aquestes corbes se'n diu *horocicles*.

Encara hi ha una altra classe de corbes a  $\mathbb{H}^2$  amb curvatura geodèsica constant. Prenem  $L$  una recta orientada i per cada punt  $p \in \mathbb{H}^2$  prenem la distància (amb signe)  $r$  de  $p$  a  $L$  i el punt  $x \in L$  que realitza aquesta distància. Amb aquestes coordenades l'element de volum del pla hiperbòlic és

$$ds^2 = dr^2 + \cosh^2 r dx.$$

Això també es comprova utilitzant camps de Jacobi. Les corbes  $r \equiv \text{constant}$  s'anomenen *equidistants*. És un càlcul veure que tenen curvatura geodèsica constant  $\tanh r$  i per tant menor que 1.

Així, la geometria hiperbòlica plana inclou quatre tipus especials de corbes: les geodèsiques, les circumferències, els horocicles i les equidistants. En dimensions superiors tenim quatre classes d'hipersuperfícies de curvatura normal constant  $\lambda$  que anomenem  $\lambda$ -hiperplans: els hiperplans geodèsics per  $\lambda = 0$ , les esferes mètriques per  $\lambda > 1$ , les horosferes per  $\lambda = 1$  i les hipersuperfícies equidistants per  $\lambda < 1$ . Altre cop les horosferes són límit d'esferes i les equidistants estan a distància constant d'algun hiperpla geodèsic. Només considerem valors positius de  $\lambda$  ja que la curvatura normal canvia de signe al canviar el vector normal unitari.

En alguns moments ens interessarem pels conjunts convexos de  $\mathbb{H}^n$ . Naturalment direm que un conjunt  $Q \subset \mathbb{H}^n$  és *convex* si per tot parell de punts de  $Q$  el segment geodèsic que els uneix està contingut a  $Q$ . També es pot definir la convexitat dient que per tot punt de la vora de  $Q$  hi passa algun hiperpla que deixa  $Q$  a un costat. Un domini amb vora diferenciable és *convex* si la curvatura normal d'aquesta vora, respecte el vector normal interior, no és negativa enlloc. Així, per exemple, els  $\lambda$ -hiperplans són vora de regions convexes.

També ens interessarem per nocions més restrictives de convexitat.

**Definició 1.1.2.** Un conjunt  $Q \subset \mathbb{H}^n$  es diu  $\lambda$ -convex si per tot punt de la vora hi passa un  $\lambda$ -hiperpla que deixa  $Q$  al costat de la convexitat.

Si la vora d'un domini és diferenciable, la condició anterior equival a tenir totes les curvatures normals respecte el normal interior més grans que  $\lambda$ . Un  $\lambda$ -hiperpla és clarament vora d'un conjunt  $\lambda$ -convex.

Els conjunts  $\lambda$ -convexos s'han estudiat a [GR99, BGR01, BM02]. Concretament, allà s'hi estudien successions d'aquests convexos que tendeixen a omplir tot l'espai. És fàcil veure que per  $\lambda > 1$ , no hi ha  $\lambda$ -convexos arbitràriament grans. Per això només ens interessem els casos  $\lambda \leq 1$ . En el cas  $\lambda = 1$  els 1-convexos es solen anomenar *h-convexos*.

De cara a fer càlculs, ens seran molt útils les fórmules clàssiques de la trigonometria hiperbòlica. Siguin  $a$ ,  $b$  i  $c$  els tres costats d'un triangle geodèsic de  $\mathbb{H}^n$  i siguin, respectivament,  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  els angles interiors oposats. Es compleixen aleshores les següents igualtats (cf. [Rat94])

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \alpha,$$

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}, \tag{1.2}$$

$$\sinh a \cos \beta = \cosh b \sinh c - \sinh b \cosh c \cos \alpha.$$

### 1.1.2 El mètode de la referència mòbil

Per tal de fer els càlculs necessaris en geometria integral el mètode més útil és el de les referències mòbils. La formulació més elegant d'aquest mètode utilitza el llenguatge dels fibrats principals. Per això, i perquè ens evita l'ús de models, passem a estudiar el fibrat de les referències de  $\mathbb{H}^n$ . Aquest fibrat s'identificarà amb el grup de les isometries.

Considerem  $\mathcal{F}(\mathbb{H}^n)$  el fibrat de les referències ortonormals de  $\mathbb{H}^n$ . Aquestes referències les denotarem per  $g = (g_0; g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{H}^n)$  on  $g_0$  és un punt de  $\mathbb{H}^n$  i  $g_1, \dots, g_n$  és una base ortonormal de  $T_{g_0}\mathbb{H}^n$ . Concretament

$$\pi : \mathcal{F}(\mathbb{H}^n) \rightarrow \mathbb{H}^n$$

és un fibrat principal de grup estructural  $O(n)$ . L'acció d'aquest grup per la dreta és

$$R : \mathcal{F}(\mathbb{H}^n) \times O(n) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{H}^n) \quad (1.3)$$

$$((g_0; g_1, \dots, g_n), u) \longmapsto (g_0; g_1 u_1^1 + \dots + g_n u_1^n, \dots, g_1 u_n^1 + \dots + g_n u_n^n). \quad (1.4)$$

Recordem que els elements  $g \in \mathcal{F}(\mathbb{H}^n)$  es poden pensar com isometries lineals

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\pi(g)}\mathbb{H}^n.$$

D'aquesta manera  $R(g, u) = g \circ u$ . La forma canònica  $\theta$  de  $\mathcal{F}(\mathbb{H}^n)$  pren valors a  $\mathbb{R}^n$  i ve donada per

$$\theta(X) = g^{-1} d\pi(X) \quad X \in T_g \mathcal{F}(\mathbb{H}^n).$$

La component  $i$ -èsima de  $\theta$  és una forma amb valors reals que denotarem  $\omega_0^i$ . Donada una secció (local)  $g : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{H}^n)$ , per tot vector  $v$  tangent a  $\mathbb{H}^n$

$$g^* \omega_0^i(v) = \omega_0^i(dgv) = \langle v, g_i \rangle.$$

Considerem ara l'acció infinitesimal  $\sigma$  que a cada element  $X$  de  $\mathfrak{o}(n)$ , l'àlgebra de Lie de  $O(n)$ , li fa correspondre un camp  $\sigma(X)$  de  $(\mathcal{F}(\mathbb{H}^n))$  definit per

$$\sigma(X)_g := dR_{(g,e)}(0, X) \quad \forall g \in \mathcal{F}(\mathbb{H}^n)$$

És a dir que  $\sigma$  és una aplicació de  $\mathfrak{o}(n)$  cap als camps verticals (tangents a les fibres) de  $\mathcal{F}(\mathbb{H}^n)$ . Els camps així obtinguts s'anomenen *campes fonamentals*. Recordem que  $\mathfrak{o}(n)$  consisteix en les matrius antisimètriques. Considerem la matriu  $X_i^j$  amb zeros a totes les posicions llevat de  $(X_i^j)_i^j = 1$  i  $(X_i^j)_j^i = -1$  (aquí i a la resta del text  $A_i^j$  denota el coeficient de la fila  $i$  i la columna  $j$  a la matriu  $A$ ). Definim el següent camp a  $\mathcal{F}(\mathbb{H}^n)$

$$v_i^j = \sigma(X_i^j).$$

Com que  $\{X_i^j | 1 \leq i < j \leq n\}$  és una base de  $\mathfrak{o}(n)$  els camps  $\{v_i^j | 1 \leq i < j \leq n\}$  són linealment independents a cada punt. Notem que  $v_i^j = -v_j^i$ . Podem interpretar geomètricament  $v_i^j$  com el vector tangent a la corba de referències que tenen fixos tots els vectors menys  $g_i$  i  $g_j$ . Concretament,  $v_i^j$  és el vector tangent a la corba de  $\mathcal{F}(\mathbb{H}^n)$   $g(t) = (g_1, \dots, g_n)$  on

$$g_r(t) \equiv g_r \quad r \neq i, j \quad \begin{aligned} g_i(t) &= \cos tg_i + \sin tg_j \\ g_j(t) &= -\sin tg_i + \cos tg_j. \end{aligned}$$

Una connexió en el fibrat principal  $\pi$  és una forma  $\omega$  amb valors a  $\mathfrak{o}(n)$  tal que  $\omega(\sigma(X)) = X$  i  $\omega(dR_u X) = Ad(u^{-1})\omega(X)$ . Aquesta forma determina una connexió (de Koszul)  $\nabla$  a  $\mathbb{H}^n$ . Si  $g : U \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{H}^n)$  és una secció local de  $\pi$ , llavors

$$\omega_i^j(dgv) = \langle \nabla_v g_j, g_i \rangle$$

on  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  és la mètrica de  $\mathbb{H}^n$ . Notem que els coeficients  $\omega_i^j$ , per  $1 \leq i, j \leq n$ , són formes a  $\mathcal{F}(\mathbb{H}^n)$  amb valors reals i tals que  $\omega_i^j = -\omega_j^i$ . Prenem la forma  $\omega$  que determina la connexió  $\nabla$  de Levi-Civita a  $\mathbb{H}^n$ .

La forma de connexió  $\omega$  determina una distribució  $\mathcal{H}$  complementària a la part *vertical*  $\mathcal{V} = T_g\pi^{-1}(\pi(g))$  que s'anomena la part *horitzontal*; un vector  $X$  és horitzontal, i pertany a  $\mathcal{H}$ , si i només si  $\omega(X) = 0$ . Els vectors horitzontals són tangents al transport paral·lel d'una referència al llarg d'una corba de  $\mathbb{H}^n$ . Per altra banda, a cada vector de  $x \in \mathbb{R}^n$  se li associa un camp  $B(x)$  de  $\mathcal{F}(\mathbb{H}^n)$  anomenat *bàsic* que és l'únic camp horitzontal tal que  $d\pi B(x)_g = g(x) \in T_{\pi(g)}\mathbb{H}^n$ . Definim, per  $i = 1, \dots, n$ , el següent sistema de camps bàsics linealment independents

$$v_0^i = B(e_i).$$

Per conveniència definim  $v_i^0 = v_0^i$ . Geomètricament  $v_0^i$  s'interpreta com el tangent a la corba de referències obtinguda pel transport paral·lel de la base  $\{g_j\}$  al llarg de la geodèsica que surt del punt  $g_0$  amb vector tangent  $g_i$ .

Si restringim els índexos a  $0 \leq i < j \leq n$  llavors  $\{v_i^j\}$  és una base de  $T_g\mathcal{F}(\mathbb{H}^n)$  a cada  $g$ . A més,  $\omega_i^j$  és la base dual de  $v_i^j$ .

Les equacions d'estructura del fibrat principal  $\pi$  són

$$d\theta = -\omega \wedge \theta$$

$$d\omega = -[\omega, \omega] + \Omega$$

Que s'han d'entendre així: per tot  $X, Y \in T_g\mathcal{F}(\mathbb{H}^n)$

$$d\theta(X, Y) = -\omega(X) \cdot \theta(Y) + \omega(Y) \cdot \theta(X)$$

$$d\omega(X, Y) = -\omega(X) \cdot \omega(Y) + \omega(Y) \cdot \omega(X) + \Omega(X, Y)$$

on  $\cdot$  representa el producte ordinari de matrius i els elements de  $\mathbb{R}^n$  són vectors columna. En el nostre cas, com que la curvatura seccional és constant igual a  $-1$ , tenim ([KN96a, p. 204])  $\Omega = -\theta \wedge \theta$ ; és a dir

$$\Omega(X, Y) = \theta(Y) \cdot \theta(X)^t - \theta(X) \cdot \theta(Y)^t$$

El fet que  $\mathbb{H}^n$  sigui de curvatura constant permet dotar  $\mathcal{F}(\mathbb{H}^n)$  d'estructura de grup de Lie. Això es fa mitjançant la proposició 1.1.1. Fixem un punt  $e_0 \in \mathbb{H}^n$  i una base ortonormal  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $T_{e_0}\mathbb{H}^n$ ; és a dir fixem un element  $e = (e_0; e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{H}^n)$ . A cada referència  $g \in \mathcal{F}(\mathbb{H}^n)$  li podem associar la única isometria que porta  $e$  a  $g$ . Així, el fibrat  $\mathcal{F}(\mathbb{H}^n)$  s'identifica amb  $G$ , el grup de les isometries de  $\mathbb{H}^n$ .

Podem pensar en l'operació producte de  $G$  com en una acció per l'esquerra de  $G$  sobre el fibrat de les referències. Entenent els elements de  $\mathcal{F}(\mathbb{H}^n)$  com isometries  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\pi(h)}\mathbb{H}^n$

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{F}(\mathbb{H}^n) &\longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{H}^n) \\ (g, h) &\longmapsto dg \circ h \end{aligned}$$

amb  $dg \circ h : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{g(h_0)}\mathbb{H}^n$ . Tant  $\omega$  com  $\theta$  són invariants per aquesta acció a l'esquerra ja que la mètrica de  $\mathbb{H}^n$  és invariant per l'acció de  $G$ . Per tant, els camps fonamentals i els bàsics són invariants per l'esquerra. En altres paraules, si  $\mathfrak{g}$  denota l'àlgebra de Lie de  $G$ ,

$$\sigma : \mathfrak{o}(n) \rightarrow \mathfrak{g} \quad \text{i} \quad B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$$

són morfismes injectius (o inclusions) d'àlgebres de Lie. Aquestes dues inclusions ens permeten pensar que  $\omega$  i  $\theta$  son formes de  $G$  amb valors a  $\mathfrak{g}$  (l'una pren valors a la part vertical i l'altra a la horitzontal). Definim una nova forma

$$\bar{\omega} = B \circ \theta + \sigma \circ \omega$$

que pren valors a  $\mathfrak{g}$ . Aquesta forma és invariant per l'esquerra i en el neutre és la identitat. Per tant,  $\bar{\omega}$  és la forma de Maurer-Cartan de  $G$ . L'equació d'estructura dels grups de Lie diu

$$d\bar{\omega} + [\bar{\omega}, \bar{\omega}] = 0$$

que, juntament amb les equacions d'estructura de  $\theta$  i  $\omega$ , ens permet calcular el producte de Lie de  $\mathfrak{g}$ . Si  $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} [X, Y] &= [\bar{\omega}(X), \bar{\omega}(Y)]_e = -d\bar{\omega}(X, Y) = -\sigma(d\omega(X, Y)) - B(d\theta(X, Y)) = \\ &= \sigma([\omega(X), \omega(Y)]) + \sigma(\theta(X) \cdot \theta(Y)^t - \theta(Y) \cdot \theta(X)^t) + \\ &\quad + B(\omega(X) \cdot \theta(Y) - \omega(Y) \cdot \theta(X)). \end{aligned}$$

És a dir, pels camps fonamentals i bàsics, si  $X, Y \in \mathfrak{o}(n)$  i  $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} [\sigma(X), \sigma(Y)] &= \sigma[X, Y], & [\sigma(X), B(y)] &= B(X \cdot y) \\ [B(x), B(y)] &= \sigma(xy^t - yx^t). \end{aligned} \tag{1.5}$$

En particular, coneixem el claudàtor per als camps  $v_i^j$  amb  $0 \leq i \neq j \leq n$ .

**Lema 1.1.2.** *El producte de  $\mathfrak{g}$  ve donat per*

$$\begin{aligned} [v_i^j, v_j^s] &= v_i^s \quad \text{si } i \neq j \neq s \\ [v_i^j, v_r^s] &= 0 \quad \text{si } i < j < r < s. \end{aligned}$$

*Demostració.* És una comprovació coneixent el claudàtor de  $\mathfrak{o}(n)$  i utilitzant (1.5) a més de  $v_i^j = -\epsilon(i)\epsilon(j)v_j^i$ .  $\square$

Amb això podem conèixer la forma de Killing  $K_{\mathfrak{g}}$  de  $\mathfrak{g}$ . Recordem que aquesta es defineix com  $K_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \text{tr}(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y)$  i és bi-invariant. Una primera observació és que, com a fet general d'espais simètrics, els subespais horitzontal i vertical de  $\mathfrak{g}$  són ortogonals per  $K_{\mathfrak{g}}$  (cf. [Hel01]). La restricció al subespai vertical és, llevat d'una constant, la forma de Killing de  $\mathfrak{o}(n)$  donada per  $K_{\mathfrak{o}(n)}(X, Y) = (n-2)\text{tr}XY$  si  $X, Y \in \mathfrak{o}(n)$  (cf. [KN96b, p.266]).

$$\begin{aligned} K_{\mathfrak{g}}(\sigma(X), \sigma(Y)) &= \text{tr}(\text{ad}_{\sigma(X)}\text{ad}_{\sigma(Y)}|_{\mathfrak{v}}) + \text{tr}(\text{ad}_{\sigma(X)}\text{ad}_{\sigma(Y)}|_{\mathfrak{h}}) \\ &= K_{\mathfrak{o}(n)}(X, Y) + \text{tr}(B(x) \mapsto B(XYx)) = \\ &= (n-2)\text{tr}(XY) + \text{tr}(XY) = (n-1)\text{tr}(XY) \\ &= \frac{n-1}{n-2}K_{\mathfrak{o}(n)}(X, Y). \end{aligned}$$

Queda per determinar la restricció a la part horitzontal. Una propietat general de la forma de Killing és  $K(X, [Y, Z]) = K(Y, [Z, X])$  (cf.[Hel01]). Per tant, si  $Y \in \mathfrak{o}(n)$  i  $x, z \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} K_{\mathfrak{g}}(B(x), B(Yz)) &= K_{\mathfrak{g}}(B(x), [\sigma(Y), B(z)]) = K_{\mathfrak{g}}(\sigma(Y), [B(z), B(x)]) = \\ &= K_{\mathfrak{g}}(\sigma(Y), \sigma(zx^t - xz^t)) = (n-1)\text{tr}(Y(zx^t - xz^t)) = 2(n-1)(Yz)^t x. \end{aligned}$$

Com que tot vector de  $\mathbb{R}^n$  és de la forma  $Yz$ , hem vist que la restricció de  $K_{\mathfrak{g}}$  a la part horitzontal és, llevat d'una constant, la mètrica de  $\mathbb{H}^n$ . Com que els subespais vertical i horitzontal són ortogonals, queda determinada la forma de Killing de  $\mathfrak{g}$

$$K_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \frac{n-1}{n-2}K_{\mathfrak{o}(n)}(\omega(X), \omega(Y)) + 2(n-1)\langle d\pi(X), d\pi(Y) \rangle \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

on  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  és la mètrica de  $\mathbb{H}^n$ . És a dir,

$$K_{\mathfrak{g}} = 2(n-1) \sum_{i=1}^n \omega_0^i \otimes \omega_0^i - 2(n-1) \sum_{1 \leq i < j \leq n} \omega_i^j \otimes \omega_j^i.$$

En particular  $K_{\mathfrak{g}}$  és una mètrica semi-riemanniana en  $G$ , bi-invariant, no-degenerada i de signatura  $n$ . Més endavant veurem que  $G$  no admet cap mètrica bi-invariant definida positiva (ni negativa).

Amb tot, és convenient prendre la següent mètrica a  $G$

$$\langle X, Y \rangle := -\frac{1}{2(n-1)}K_{\mathfrak{g}}(X, Y) \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (1.6)$$

D'aquesta manera, la base  $\{v_i^j\}_{i < j}$  de  $\mathfrak{g}$  és ortonormal respecte la mètrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . En efecte, si  $\epsilon(i) = 1$  per  $i \neq 0$  i  $\epsilon(0) = -1$ ,

$$\langle v_i^j, v_r^s \rangle = \epsilon(i)\delta_{ir}\delta_{js} \quad i < j \quad i < r < s.$$

### 1.1.3 Models

#### Model de l'hiperboloide.

El model de l'hiperboloide, si bé no ens serà estrictament necessari en cap moment, pot resultar útil a l'hora de tenir una visió més concreta i tangible de l'espai hiperbòlic.

Situem-nos a l'espai de Minkowski de dimensió  $n + 1$ . És a dir, considerem a  $\mathbb{R}^{n+1}$  la següent mètrica de Lorentz

$$L(x, y) = -x_0y_0 + x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

Un vector  $v \in \mathbb{R}^{n+1}$  es diu de *tipus temps* o *temporal* si  $L(v, v) < 0$ . Quan  $L(v, v) > 0$  es diu que és *tipus espai* o *espacial*. Un vector  $v$  tal que  $L(v, v) = 0$  s'anomena de *tipus llum* o *nul*. El conjunt de vectors nuls és el *con de llum*. Similarment, un subespai vectorial de  $\mathbb{R}^{n+1}$  serà de *tipus temps* si conté vectors d'aquest tipus, és de *tipus espai* si només conté vectors espacials i és de *tipus llum* si conté vectors nuls i espacials. En aquest darrer cas el subespai és tangent al con de llum. Mantindrem aquesta nomenclatura sempre que treballem amb alguna mètrica de Lorentz.

El *model de l'hiperboloide* de l'espai hiperbòlic  $\mathbb{H}^n$  està format pels vectors de norma  $-1$  que tenen la primera component positiva

$$\mathbb{H}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid L(v, v) = -1 \text{ i } v_0 > 0\}.$$

Els vectors tangents a  $\mathbb{H}^n$  en un punt  $p$  són ortogonals respecte a  $L$  al vector  $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ ; i.e.  $T_p\mathbb{H}^n = (p)^\perp$ . Això implica que la restricció de  $L$  a l'espai tangent de  $\mathbb{H}^n$  en tot punt és definida positiva. Així dotem  $\mathbb{H}^n$  d'estructura de varietat de Riemann. Es comprova que aquesta varietat té curvatura constant  $-1$  i per tant és un model de l'espai hiperbòlic.

La connexió  $\nabla$  de  $\mathbb{H}^n$  ve donada per la connexió  $\bar{\nabla}$  usual de  $\mathbb{R}^{n+1}$  a través de

$$(\bar{\nabla}_X Y)_p = (\nabla_X Y)_p - L(p, (\bar{\nabla}_X Y)_p) \cdot p \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n) \quad p \in \mathbb{H}^n. \quad (1.7)$$

És a dir,  $\nabla$  és la projecció ortogonal respecte a  $L$  de  $\bar{\nabla}$  a  $\mathbb{H}^n$ . En conseqüència, les geodèsiques de l'espai hiperbòlic són la intersecció d'un pla lineal de  $\mathbb{R}^{n+1}$  amb  $\mathbb{H}^n$ . En general, la intersecció d'un subespai vectorial de  $\mathbb{R}^{n+1}$  amb  $\mathbb{H}^n$  és una varietat totalment geodèsica.

El model de l'hiperboloide ens proporciona una representació de  $G$ , grup d'isometries de  $\mathbb{H}^n$ , com a subgrup del grup lineal. En efecte, el grup d'isometries de  $\mathbb{H}^n$  és

$$G = \{g \in Gl(n+1) \mid g^t J g = J, g_0^0 > 0\}$$

$$\text{on } J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Amb aquesta representació, la identificació de  $G$  amb  $\mathcal{F}(\mathbb{H}^n)$  és molt senzilla. En efecte, fixem a  $\mathbb{H}^n$  la referència donada per la base canònica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Per cada matriu



de  $G$ , les columnes representen la imatge d'aquesta referència. Per tant, cada matriu de  $G$  s'identifica amb la referència de  $\mathcal{F}(\mathbb{H}^n)$  formada per les seves columnes.

Si una corba  $g(t) \subset G$  passa per  $e$  a  $t = 0$ , llavors

$$\dot{g}^t(0)J + J\dot{g}(0) = 0.$$

Deduïm que l'àlgebra de Lie de  $G$  està formada per les matrius antisimètriques multiplicades per  $J$

$$\mathfrak{g} = \{V \in M_{n+1}(\mathbb{R}) \mid VJ + JV^t = 0\}.$$

Amb aquesta representació, és fàcil comprovar que per tot parell de vectors  $u, v \in \mathfrak{g}$ , la mètrica de (1.6) és

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(-L(u^0, v^0) + L(u^1, v^1) + \dots + L(u^n, v^n))$$

on  $u^i$  i  $v^i$  denoten la columna  $i$ -èssima de  $u$  i  $v$ .

### El model projectiu.

El model projectiu és la projectivització del de l'hiperboloide. En aquest model, les geodèsiques apareixen com rectes i això el fa molt útil a l'hora de tractar qüestions sintètiques; no així a l'hora de fer càlculs.

Projectivitzem  $\mathbb{R}^{n+1}$ . La mètrica de Lorentz  $L$  dona lloc a una quàdriga no degenerada  $C$ . Per tant, els punts de  $\mathbb{H}^n$  són punts  $x$  tals que  $C(x, x) < 0$ . De la cònica  $\{C(x, x) = 0\}$  se'n diu *esfera de l'infinit* i els seus punts s'anomenen *ideals*. Les varietats totalment geodèsiques de  $\mathbb{H}^n$  són ara la intersecció de varietats projectives. Les isometries venen donades per projectivitats que preserven la cònica. Notem que aquestes projectivitats preserven automàticament l'interior ja que, per exemple, l'exterior d'una cònica és topològicament no orientable. Evidentment, aquest model també és una varietat de Riemann però no ens farà cap falta conèixer-ne l'expressió explícita de la mètrica (que tanmateix es pot trobar a [LS00]).

Com que projectivament totes les quàdriques no-degenerades són equivalents, el model projectiu de l'espai hiperbòlic és l'interior de qualsevol cònica no-degenerada a  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ . Normalment prendrem una carta afí en la qual la cònica aparegui com una esfera centrada a l'origen.

## 1.2 Integrals de curvatura mitja

Aquí definim el principal objecte d'estudi d'aquest treball. Ens interessen les integrals de curvatura mitja d'hipersuperfícies de  $\mathbb{H}^n$ . Tot i així, també treballarem amb hipersuperfícies d'altres espais. Per això donem les definicions en varietats de Riemann qualssevol.

Sigui  $N$  una varietat riemanniana de dimensió  $n$ . Llevat que diguem el contrari suposarem sempre que tots els objectes són infinitament diferenciables. Suposem  $S \subset N$

una hipersuperfície. En tot punt  $p \in S$ , donat un vector unitari  $n \perp T_p S$  la segona forma fonamental  $\mathbb{I}$  de  $S$  és

$$\mathbb{I}(X, Y) = \langle \nabla_X Y, n \rangle \quad X, Y \in T_p S.$$

on  $\nabla$  denota la connexió de  $N$ . Es tracta d'una forma bilineal simètrica de  $T_p S$ . Per tant, diagonalitza en una base ortonormal de vectors propis. Els valors propis corresponents  $k_1, \dots, k_n$  s'anomenen *curvatures principals* de  $S$  en  $p$ . Definim la *i-èsima funció de curvatura mitja* de  $S$  com

$$\sigma_i = \frac{f_i(k_1, \dots, k_{n-1})}{\binom{n-1}{i}}$$

on  $f_r$  és l' $i$ -èsim polinomi simètric elemental. També queden definides per

$$\det(\mathbb{I} + tId) = \sum_{j=0}^r \binom{n-1}{j} \sigma_j t^j.$$

Una propietat molt utilitzada en geometria integral és la següent.

**Proposició 1.2.1.** [LS82, p. 559],[Teu86] *Per cada subespai lineal  $l$  de dimensió  $i$  de  $T_x S$ , denotem  $\mathbb{I}|_l$  la restricció de  $\mathbb{I}$  a  $l$ . Llavors,*

$$\int_{G(i, T_x N)} \det(\mathbb{I}|_L) dL = \text{vol}(G(i, n-1)) \sigma_i$$

Sovint ens referirem al determinant de la restricció  $\mathbb{I}|_L$  com a *curvatura normal* en la direcció  $L$ . Així, la curvatura mitja és el promig de les curvatures normals. Aquesta nomenclatura queda justificada pel següent teorema que és una generalització del clàssic teorema de Meusnier.

**Teorema 1.2.2.** [LS82, p. 561] *Si  $L$  és un pla afí de dimensió  $(r+1)$  que talla una hipersuperfície  $S \subset \mathbb{R}^n$  en  $x$ , llavors la curvatura normal de  $S$  en  $x$  en la direcció  $l = T_x S \cap L$  és*

$$K(l) = \det(\mathbb{I}|_l) = \cos^r \theta \cdot K(L \cap S)$$

on  $\theta$  és l'angle format en  $x$  pels normals unitaris escollits a  $S$  i a  $l \subset L$ , i  $K(L \cap S)$  és la curvatura de Gauss a  $x$  de  $L \cap S$  com a hipersuperfície de  $L \cong \mathbb{R}^r$ .

Per tant la curvatura normal és la curvatura de la intersecció amb un pla afí ortogonal.

El teorema anterior val per hipersuperfícies  $S$  de qualsevol varietat de Riemann  $N$  si es substitueix  $L$  per  $\exp_x L$  per algun subespai  $L \subset T_x N$ . En efecte, podem copiar localment  $S$  a una hipersuperfície de  $T_x N$  a través de  $\exp_x$ . És un càlcul veure que  $\exp_x$  no canvia la segona forma fonamental de  $S$  en  $x$ . Com que  $T_x N$  és euclidià estarem en les condicions del teorema anterior.

Aquest teorema ens permet provar que el model projectiu és fidel quant al signe de les curvatures normals.

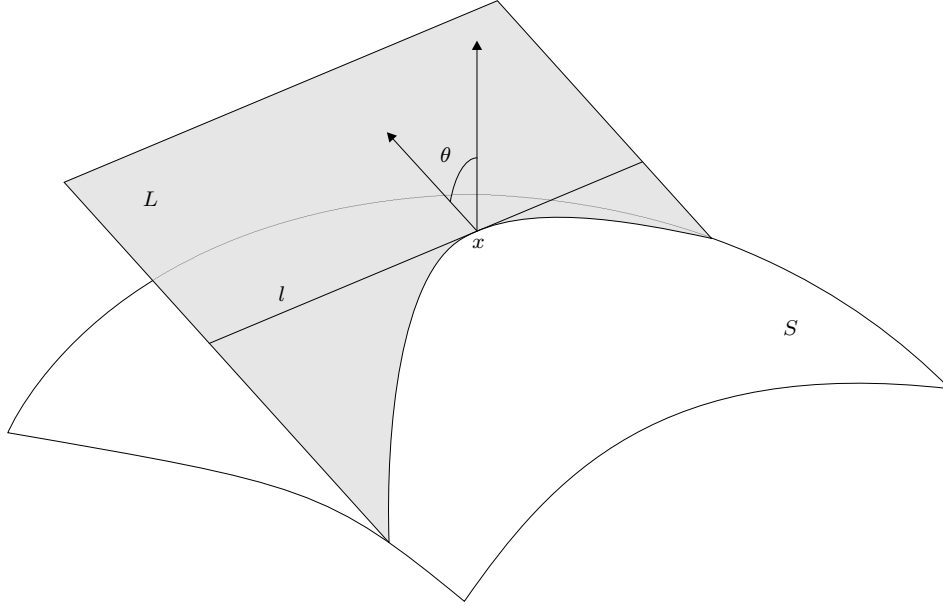


Figura 1.1: Teorema de Meusnier

**Proposició 1.2.3.** *Sigui  $S \subset \mathbb{H}^n$  una hipersuperfície orientada en el model projectiu. Siguin  $n$  i  $n'$  els vectors normals unitaris a  $T_p S$  en un punt  $p$  de  $S$  segons les mètriques euclidiana i hiperbòlica respectivament i determinats per la orientació. Llavors, per tota direcció en  $T_p S$ , la curvatura normal de  $S$  té el mateix signe respecte a totes dues mètriques i respecte d'aquests normals.*

*Demostració.* Comencem amb la mètrica euclidiana. Tallem amb un pla  $L$  que contingui  $p$  i  $n$ . La corba d'intersecció  $L \cap S$  té per curvatura la curvatura normal de  $S$ . Respecte la mètrica hiperbòlica,  $L$  continua essent totalment geodèsic. El teorema de Meusnier ens diu que la curvatura normal (hiperbòlica) de  $S$  és múltiple positiu de la curvatura de  $L \cap S$  ja que  $\langle n, n' \rangle > 0$ .  $\square$

Passem a definir les integrals de curvatura mitja que són l'objecte d'estudi d'aquest treball.

**Definició 1.2.1.** Siguin  $N$  una varietat de Riemann i  $S \subset N$  una hipersuperfície compacta, potser amb vora, orientada per un camp normal unitari. La  $i$ -èsima integral de curvatura mitja de  $S$  és

$$M_i(S) = \int_S \sigma_i(p) dp$$

on  $dp$  és l'element de volum de  $S$ . Notem que  $M_0(S)$  és el volum de  $S$  i  $M_{n-1}(S)$  és la integral de la curvatura de Gauss (o *curvatura total*, o també *curvatura integra*) de  $S$ .

A tall d'exemple, les integrals de curvatura mitja a  $\mathbb{S}^n$ ,  $\mathbb{R}^n$  i  $\mathbb{H}^n$  d'una esfera  $S(R)$  de radi  $R$  són

$$M_i(S(R)) = O_{n-1} \cos^i R \sin^{n-i-1} R \quad \text{a } \mathbb{S}^n \quad (1.8)$$

$$M_i(S(R)) = O_{n-1} R^{n-i-1} \quad \text{a } \mathbb{R}^n \quad (1.9)$$

$$M_i(S(R)) = O_{n-1} \cosh^i R \sinh^{n-i-1} R \quad \text{a } \mathbb{H}^n \quad (1.10)$$

En espais de curvatura constant, les integrals de curvatura mitja apareixen, per exemple, a la fórmula de Steiner dels paral·lels. Sigui  $S$  una hipersuperfície d'un espai de curvatura constant  $k$ , compacta, de classe  $C^2$  i orientada per un normal unitari  $n$ . Considerem l'aplicació que envia  $x \in S$  al punt  $\gamma(\epsilon)$  on  $\gamma(t)$  és la geodèsica que surt de  $x$  amb tangent  $n$ . Per  $\epsilon$  suficientment petit, la imatge de  $S$  per aquesta aplicació és una hipersuperfície  $S_\epsilon$  de  $\mathbb{H}^n$  anomenada *paral·lela* a distància  $\epsilon$ . La fórmula de Steiner (cf.[Gra90]) expressa, per a  $\epsilon$  suficientment petit, el volum de  $S_\epsilon$  com un polinomi homogeni en  $\cos(\sqrt{k}\epsilon)$  i  $\sin(\sqrt{k}\epsilon)/\sqrt{k}\epsilon$  que té per coeficients les integrals de curvatura mitja de  $S$

$$\text{vol}(S_\epsilon) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} M_i(S) \cos^{n-i-1}(\sqrt{k}\epsilon) \frac{\sin^i(\sqrt{k}\epsilon)}{(\sqrt{k}\epsilon)^i}. \quad (1.11)$$

Per  $k < 0$  s'ha d'entendre  $\cos(\sqrt{k}\epsilon) = \cosh(\sqrt{-k}\epsilon)$  i  $\sin(\sqrt{k}\epsilon)/\sqrt{k}\epsilon = \sinh(\sqrt{-k}\epsilon)$ . Per  $k = 0$  cal prendre  $\sin(\sqrt{k}\epsilon)/\sqrt{k}\epsilon = \epsilon$ .

Una generalització d'aquesta fórmula és la que expressa  $M_i(S_\epsilon)$  en funció dels  $M_j(S)$ . Aquesta fórmula va ser descoberta per Santaló a [San50]. La prova que s'hi donava pel cas hiperbòlic no era del tot correcta ja que utilitzava el concepte de circumferència osculadora. En geometria hiperbòlica només existeix la circumferència osculadora d'una corba allà on aquesta té curvatura més gran que 1. Tot i així, de seguida en donem una altra prova que és del tot elemental.

**Proposició 1.2.4.** *Si  $S_\epsilon$  és la hipersuperfície paral·lela a  $S \subset \mathbb{H}^n$  llavors*

$$\binom{n-1}{i} M_i(S_\epsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} M_k(S) \phi_{ik}(\epsilon) \quad (1.12)$$

on

$$\phi_{ik}(\epsilon) = \sum_{h=\max(0, i+k-n+1)}^{\min(i, k)} \binom{n-k-1}{i-h} \binom{k}{h} \sinh^{i+k-2h} \epsilon \cosh^{n-1-i-k+2h} \epsilon.$$

*Demostració.* Per  $t > 0$  petits tenim

$$\begin{aligned} \text{vol}(S_{\epsilon+t}) &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} M_i(S) \cosh^{n-i-1}(\epsilon+t) \sinh^i(\epsilon+t) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} M_i(S_\epsilon) \cosh^{n-i-1}(t) \sinh^i(t). \end{aligned}$$

Acabem substituint

$$\cosh(\epsilon + t) = \cosh \epsilon \cosh t + \sinh \epsilon \sinh t \quad \sinh(\epsilon + t) = \cosh \epsilon \sinh t + \sinh \epsilon \cosh t$$

i igualant els coeficients dels dos polinomis homogenis en  $\cosh \epsilon$  i  $\sinh \epsilon$  resultants.  $\square$

*Observació.* Si tenim una varietat diferenciable  $S$  abstracta i una immersió  $i : S \rightarrow N$ , definim a  $S$  la imatge recíproca de la mètrica de  $N$ . Fet això, no hi ha cap problema a identificar localment els entorns  $p \in U \subset S$  amb la seva imatge  $i(U) \subset N$ . Per tant, tot el que hem fet per hipersuperfícies podem considerar-ho fet per immersions de codimensió 1.

Les integrals de curvatura mitja estan relacionades directament amb les anomenades Quermassintegrale dels conjunts convexos a l'espai euclidià. Per un domini convex  $Q \subset \mathbb{R}^n$ , les *Quermassintegrale* es defineixen, llevat d'un factor constant, com el promig dels volums de les projeccions ortogonals  $\pi_L$  del convex sobre els subespais lineals  $L \in G(n-r, n)$ ,

$$W_r(Q) = \frac{(n-r) \cdot O_{n-1}}{n \cdot O_{n-r-1} \text{vol}(G(n-r, n))} \int_{G(n-r, n)} \text{vol}(\pi_L(Q)) dL. \quad (1.13)$$

on  $dL$  és una mesura a  $G(n-r, n)$  invariant per rotacions i  $O_i$  denota el volum de l'esfera  $\mathbb{S}^i$ . També es sol convenir que  $W_0(Q) = \text{vol}(Q)$  i  $W_n(Q) = O_{n-1} \chi(Q)/n$ . Quan la vora de  $Q$  és diferenciable, existeix una relació directa que entre les Quermassintegrale i les integrals de curvatura mitja. Aquesta relació és l'anomenada *fórmula de Cauchy*

$$M_r(\partial Q) = nW_{r+1}(Q). \quad (1.14)$$

Però aquest punt de vista no té sentit a l'espai hiperbòlic (ni tampoc a  $\mathbb{S}^n$ ). Caldria començar triant un origen  $p \in \mathbb{H}^n$  i projectar sobre les varietats totalment geodèsiques que passen per  $p$ . Però el resultat depèn del  $p$  triat i, per tant, ni tan sols és invariant per isometries. Al capítol següent donarem una definició invariant de les Quermassintegrale d'un convex a  $\mathbb{H}^n$  que té relació amb les integrals de curvatura mitja. A més, aquesta definició tindrà sentit per a dominis no necessàriament convexos (però amb vora diferenciable). Però abans ens caldrà estudiar els espais formats per plans geodèsics de  $\mathbb{H}^n$ .



## Capítol 2

# Espais de plans

### 2.1 Espais de plans

En aquesta secció estudiarem els espais de plans totalment geodèsics de  $\mathbb{H}^n$ . Es tracta d'espais homogenis del grup d'isometries. Aquests espais no admeten cap estructura riemanniana que sigui invariant per l'acció de  $G$ . Tot i així, sí que es poden dotar d'una mètrica semi-riemanniana invariant. El fet que aquestes mètriques siguin indefinides marca radicalment la diferència amb les geometries euclidiana i esfèrica. Avancem, per exemple, que un feix d'hiperplans ultraparal·lels serà una corba amb vector tangent de tipus temps. D'altra banda, el fet de tenir mètriques no definides dificulta l'obtenció de certs resultats sobre la curvatura total i la curvatura total absoluta que es tracten al capítol 3.

Ja hem dit que per  $r$ -pla ens referim a una subvarietat completa i totalment geodèsica de dimensió  $r$ .

**Definició 2.1.1.** Anomenem *espai dels  $r$ -plans de  $\mathbb{H}^n$*  al conjunt de subvarietats de dimensió  $r$  completes i totalment geodèsiques de  $\mathbb{H}^n$ . Denotem aquest espai per  $\mathcal{L}_r$ .

Fixem un  $r$ -pla geodèsic de l'espai hiperbòlic; per exemple  $L_r^0 = \exp_{e_0} \langle e_1, \dots, e_r \rangle$ . Si  $H_r \subset G$  és el subgrup dels moviments que deixen  $L_r^0$  invariant, identifiquem  $\mathcal{L}_r$  amb l'espai homogeni  $G/H_r$  a través de la següent aplicació bijectiva

$$\begin{aligned} G/H_r &\longrightarrow \mathcal{L}_r \\ g \cdot H_r &\longmapsto gL_r^0 = \exp_{g_0} \langle g_1, \dots, g_r \rangle. \end{aligned}$$

Tenim doncs, una projecció  $\pi_r : G \longrightarrow \mathcal{L}_r$ . L'espai tangent a la fibra d'un  $r$ -pla  $L_r$  és

$$\mathfrak{h}_r = \langle v_i^j \mid 0 \leq i < j \leq r \text{ o } r < i < j \leq n \rangle.$$

Per altra banda, l'espai tangent a  $\mathcal{L}_r$  en  $L_r$  s'identifica a través de  $d\pi_r$  amb

$$\mathfrak{m}_r = (\mathfrak{h}_r)^\perp = \langle v_i^j \mid 0 \leq i \leq r < j \leq n \rangle.$$

En particular observem que  $\mathcal{L}_r$  té dimensió  $(r+1)(n-r)$ .

Les rectes del pla hiperbòlic formen una banda de Möbius. En efecte, es poden parametritzar de la següent manera: prenem una geodèsica  $\gamma$  unitària que surti de l'origen  $e_0$  formant un angle  $\theta$  amb la direcció  $e_1$ ; per cada  $\rho \in \mathbb{R}$  prenem la recta orthogonal a  $\gamma$  en  $\gamma(\rho)$ . D'aquesta manera tota recta de  $\mathbb{H}^2$  queda determinada per les coordenades  $(\rho, \theta)$  amb  $0 \leq \theta \leq \pi$  i  $\rho \in \mathbb{R}$ . Però és clar que la recta  $(\rho, 0)$  s'identifica amb la  $(-\rho, \pi)$ .

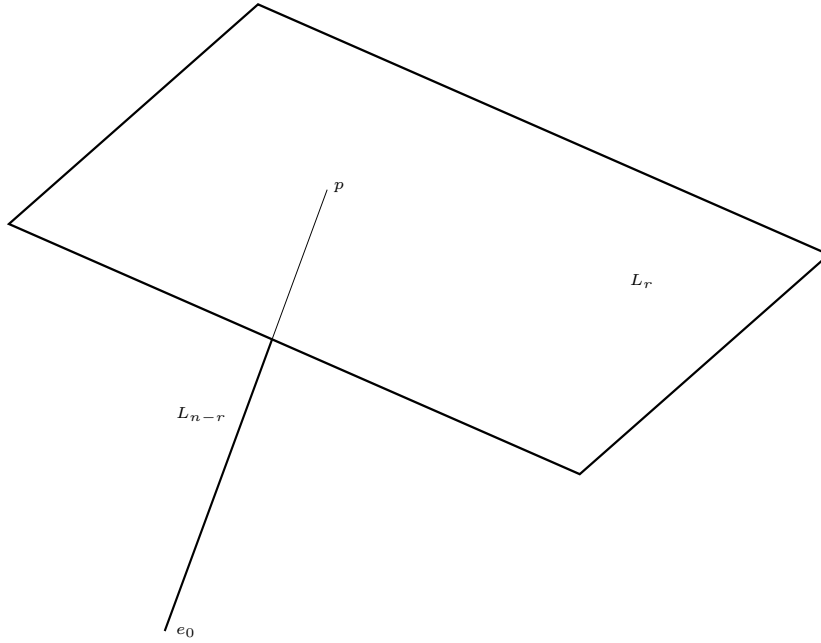


Figura 2.1: L'espai de plans s'identifica amb el fibrat tautològic

Això mateix es pot fer per identificar topològicament  $\mathcal{L}_r$ . Notem que donat un  $r$ -pla  $L_r$ , existeix un únic  $(n - r)$ -pla orthogonal a  $L_r$  passant per l'origen  $e_0 \in \mathbb{H}^n$ . Aquest  $(n - r)$ -pla talla  $L_r$  en el punt a distància mínima de  $e_0$ . Així doncs, cada element de  $\mathcal{L}_r$  ve donat per un parell  $(L_{n-r}, p)$  on  $L_{n-r}$  és un  $(n - r)$ -pla per l'origen i  $p$  un punt de  $L_{n-r}$  (figura 2.1). En altres paraules,  $\mathcal{L}_r$  s'identifica amb el fibrat tautològic de la grassmanniana  $G(n - r, n)$  de subespais de dimensió  $n - r$  de  $T_{e_0}\mathbb{H}^n$ . A més, aquesta identificació és un difeomorfisme.

*Observació.* Tot el que hem dit fins aquí dels plans de  $\mathbb{H}^n$  val igualment pels plans afins de  $\mathbb{R}^n$ . Pel que fa a  $\mathbb{S}^n$ , els seus espais de plans són les varietats grassmannianes usuals. Concretament, una varietat totalment geodèsica de dimensió  $r$  a  $\mathbb{S}^n$  ( $r$ -pla geodèsica) és la intersecció de l'esfera amb un subespai vectorial de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de dimensió  $r + 1$ . Quan no hi hagi confusió possible denotarem indistintament per  $G(r + 1, n + 1)$  o  $\mathcal{L}_r$  l'espai dels  $r$ -plans de  $\mathbb{S}^n$ . Aquests són espais homogenis de  $O(n + 1)$ .



### 2.1.1 Mètriques i mesures invariants

#### Mètriques invariants

Sempre que un grup actua sobre una varietat, s'intenta dotar-la d'objectes invariants per aquesta acció. Per exemple és natural buscar mètriques invariants que alhora donen lloc a mesures. En el nostre cas, voldríem dotar  $\mathcal{L}_r$  d'una mètrica riemanniana que fos invariant per l'acció de  $G$ . És fàcil veure que això no és possible.

**Proposició 2.1.1.** *L'espai de plans  $\mathcal{L}_r$  no admet una mètrica riemanniana invariant per l'acció de  $G$ .*

*Demostració.* Considerem dos  $r$ -plans paral·lels. Prenem un 2-pla tal que tots dos  $r$ -plans el tallin ortogonalment. Obtenim un parell de rectes paral·leles dins  $\mathbb{H}^2$ . Si prenem el model projectiu de  $\mathbb{H}^2$ , podem trobar una isometria que porti aquest parell de rectes a qualsevol altre parell de rectes paral·leles (figura 2.2). En efecte, les projectivitats que preserven una cònica actuen transitivament sobre les ternes de punts d'aquesta. Aquestes isometries estenen trivialment a isometries de  $\mathbb{H}^n$ . Per tant, en un feix d' $r$ -plans paral·lels, podem portar qualsevol parell d' $r$ -plans a qualsevol altre. Aquest feix és una corba a  $\mathcal{L}_r$  i una mètrica riemanniana defineix una longitud d'arc en aquesta corba. Però si la mètrica és invariant per isometries, dos arcs qualssevol d'aquesta corba tindran la mateixa longitud; una contradicció.  $\square$

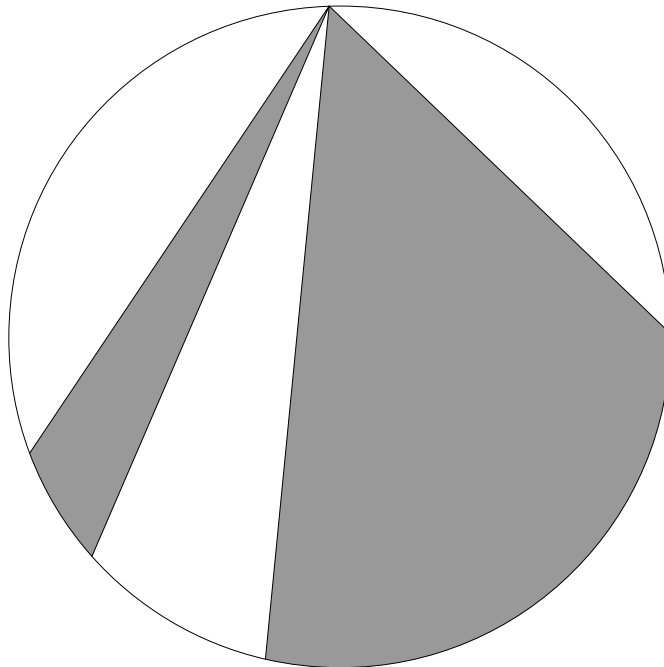


Figura 2.2: Dos parells 'equivalents' de rectes paral·leles

Tot i això, si a la mètrica de  $\mathcal{L}_r$  no hagués de ser definida positiva, enlloc d'una contradicció conclouríem simplement que el vector tangent a la corba és de tipus llum. A continuació trobem mètriques semi-riemannianes a  $\mathcal{L}_r$ , espai de plans de  $\mathbb{H}^n$ , invariants per l'acció de  $G$ . Això és immediat utilitzant la mètrica bi-invariant de  $G$ .

**Proposició 2.1.2.** *A  $\mathcal{L}_r$  hi ha una mètrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$  que fa de la projecció canònica  $\pi_r : G \longrightarrow \mathcal{L}_r$  una submersió semi-riemanniana. Aquesta mètrica és invariant i la seva imatge recíproca per  $\pi$  és*

$$\pi_r^* \langle \cdot, \cdot \rangle_r = \sum_{1 \leq i \leq r < j \leq n} \omega_i^j \otimes \omega_i^j - \sum_{j=r+1}^n \omega_0^j \otimes \omega_0^j \quad (2.1)$$

*Demostració.* La mètrica (2.1) és la restricció de la mètrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $G$  al subespai  $\mathfrak{m}_r$  (cf. (1.6)). Projectem-la a  $\mathcal{L}_r$  a través de  $\pi$ . Obtenim una mètrica a  $\mathcal{L}_r$  ben definida ja que (2.1) és invariant a la dreta i per tant, constant a cada fibra. Per la invariància a l'esquerra de la mètrica de  $G$ , aquesta mètrica de  $\mathcal{L}_r$  és invariant per l'acció de  $G$ .  $\square$

*Observació.* En canvi, l'espai de  $r$ -plans de  $\mathbb{S}^n$ , la grassmaniana  $G(r+1, n+1)$ , sí que admet una mètrica riemanniana invariant per l'acció de  $O(n)$ . Aquesta mètrica es descriu geomètricament dient que les geodèsiques són feixos de  $r$ -plans continguts en un  $(r+1)$ -pla que basculen al voltant d'un  $(r-1)$ -pla amb velocitat 1.

Pel que fa a l'espai dels  $r$ -plans de  $\mathbb{R}^n$ , veurem més avall que ni tan sols admet cap mètrica semi-riemanniana invariant (no degenerada). Essencialment, això es deu al fet que el grup d'isometries de l'espai eulidià té la forma de Killing degenerada.

A continuació provem que, llevat de factors escalars,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$  és la única mètrica semi-riemanniana de  $\mathcal{L}_r$  invariant per l'acció de  $G$ . A més, en tindrem una comprensió més geomètrica.

Recordem que tenim fixada una referència  $e_1, \dots, e_n$  ortonormal en un punt  $e_0$  i que hem triat l' $r$ -pla  $L_r^0 = \exp_{e_0}(\langle e_1, \dots, e_r \rangle)$ . Hem identificat el tangent en  $L_r^0$  de l'espai dels  $r$ -plans amb el subespai  $\mathfrak{m}_r$  de  $\mathfrak{g}$ . Però podem descomposar  $T_{L_r^0} \mathcal{L}_r \equiv \mathfrak{m}_r$  en la part vertical  $V$  i la part horitzontal (tangent a la base)  $H$  del fibrat tautològic sobre  $G(n-r, n)$

$$\mathfrak{m}_r = V \oplus H = \langle v_0^j \rangle \oplus \langle v_i^j \rangle \quad 1 \leq i \leq r < j \leq n$$

La part vertical correspon a moure  $L_r$  mantenint-lo ortogonal al mateix  $(n-r)$ -pla,  $L_{n-r} = \exp_{e_0}(e_{r+1}, \dots, e_n)$ . Pel que fa a la part horitzontal, correspon a fer bascular  $L_r$  al voltant de  $e_0$ . En altres paraules, la part vertical  $V = \langle v_0^j \rangle$  és el tangent a  $L_{n-r} \equiv \mathbb{H}^{n-r}$ . La part horitzontal  $H = \langle v_i^j \rangle$  és el tangent a la grassmaniana d' $r$ -plans per  $e_0$  que denotem  $\mathcal{L}_{r[0]} (\equiv G(r, T_{e_0} \mathbb{H}^n))$ . A través d'aquesta identificació, les mètriques de  $L_{n-r}$  i  $\mathcal{L}_{r[0]}$  indueixen mètriques als subespais  $V$  i  $H$  que denotarem  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_{n-r}}$  i  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}_{r[0]}}$  respectivament.

Donada una mètrica invariant de  $\mathcal{L}_r$  és clar que la seva restricció a  $T_{L_r^0} \mathcal{L}_r$  serà invariant per l'acció del grup d'isotropia de  $L_r^0$ . A més, per conèixer la mètrica invariant a tot  $\mathcal{L}_r$  n'hi ha prou amb conèixer aquesta restricció.

**Proposició 2.1.3.** *Llevat de multiplicació per escalars, l'espai tangent  $T_{L_r}\mathcal{L}_r$  admet una única mètrica semi-riemanniana invariant per l'acció del grup d'isotropia de  $L_r$  que és*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_r = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}_{r[0]}} - \langle \cdot, \cdot \rangle_{L_{n-r}}. \quad (2.2)$$

*Demostració.* Suposem que tenim una mètrica invariant per l'acció del grup d'isotropia. Com que  $G(n-r, n)$  admet una única mètrica (llevat d'escalars) invariant per rotacions, la restricció a  $H$  ha de ser múltiple de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}_{r[0]}}$ . Com que  $L_r$  només admet una mètrica invariant pel seu grup d'isotropia, la restricció a  $V$  ha de ser  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_r}$  o un múltiple.

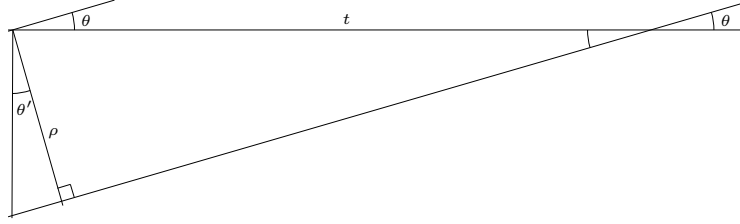


Figura 2.3: Corbes  $x$  i  $h \circ x$

A continuació provem que  $v_0^j$  i  $v_i^j$  han de ser ortogonals i de signatura contrària per  $1 \leq i \leq r < j$ . Sigui  $\gamma$  la geodèsica unitària de  $L_r$  que surt de  $e_0$  amb tangent  $e_i$ . Prenem un punt  $p = \gamma(t)$  i el transport paral·lel  $g_1, \dots, g_n$  de la referència canònica al llarg de  $\gamma$  fins a  $p$ . Sigui  $h$  el moviment donat per aquesta referència. El vector  $v_i^j$  correspon al tangent a la corba  $x(\theta) \subset \mathcal{L}_r$  obtinguda al bascular  $L_r$  amb velocitat angular 1 al voltant de  $p$  i de  $\langle e_i, e_j \rangle^\perp$ , complement ortogonal de l'espai generat per  $e_i$  i  $e_j$ . La corba  $h(x(\theta))$  mou  $L_r$  al voltant de  $p$  mantenint-lo ortogonal a  $\langle g_i, g_j \rangle$ . Si  $\rho$  és la distància de  $h(x(\theta))$  a  $e_0$  i  $\theta'$  és l'angle de  $h(x(\theta))$  amb  $\gamma$  (figura 2.3), utilitzant les fórmules de la trigonometria hiperbòlica (1.2) trobem

$$\sinh \rho = \sinh t \sin \theta \quad \text{i} \quad \cosh \rho \sin \theta' = \cosh t \sin \theta$$

on  $t$  és, recordem-ho, la distància de  $e_0$  a  $p$ . Per tant,  $dhv_i^j = \cosh t v_i^j + \sinh t v_0^j$ . Per tal que la mètrica sigui invariant, cal que per tot  $t$

$$\langle v_i^j, v_i^j \rangle = \langle dhv_i^j, dhv_i^j \rangle = \cosh^2 t \langle v_i^j, v_i^j \rangle + 2 \cosh t \sinh t \langle v_0^j, v_i^j \rangle + \sinh^2 t \langle v_0^j, v_0^j \rangle.$$

És a dir

$$\langle v_i^j, v_i^j \rangle = -\langle v_0^j, v_0^j \rangle \quad \text{i} \quad \langle v_0^j, v_i^j \rangle = 0.$$

□

*Observació.* Els mateixos raonaments a  $\mathbb{R}^n$  ens portarien a l'equació

$$\langle v_i^j, v_i^j \rangle = \langle v_i^j, v_i^j \rangle + 2t \langle v_0^j, v_i^j \rangle + t^2 \langle v_0^j, v_0^j \rangle \quad \forall t$$

per tant  $v_0^j$  és un vector de mòdul nul i la única forma bilineal invariant a l'espai dels  $r$ -plans de  $\mathbb{R}^n$  és degenerada.

Una bona introducció a la geometria de les varietats semi-riemmannianes, que a més citarem sovint, és el llibre [O’N83]. Per exemple, hi trobem fórmules que ens permeten calcular les curvatures seccionals de  $\mathcal{L}_r$  amb la mètrica semi-riemmanniana anterior.

**Proposició 2.1.4.** *Siguin  $G$  un grup de Lie amb una mètrica bi-invariant i  $G/H$  un espai homogeni amb una mètrica tal que  $\pi : G \rightarrow G/H$  és una projecció semi-riemmanniana. Llavors, per tot parell  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , la curvatura seccional del pla definit per les seves projeccions és*

$$K(d\pi X, d\pi Y) = \frac{\frac{1}{4}\langle [X, Y]_m, [X, Y]_m \rangle + \langle [X, Y]_h, [X, Y]_h \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}$$

on  $Z_m$  i  $Z_h$  denoten la part normal i tangent a  $H$  de  $Z \in \mathfrak{g}$ .

*Demostració.* Conseqüència directa de les proposicions 11.9 i 11.26 de [O’N83].  $\square$

Aplicant aquesta fórmula i el lema 1.1.2 obtenim les curvatures seccionals de  $\mathcal{L}_r$ ,

$$\begin{aligned} K(d\pi v_i^j, d\pi v_i^{j'}) &= \langle v_j^{j'}, v_j^{j'} \rangle = 1 \quad \text{si } 0 \leq i \leq r < j < j' \\ K(d\pi v_i^j, d\pi v_{i'}^j) &= \langle v_i^{i'}, v_i^{i'} \rangle = 1 \quad \text{si } 0 \leq i < i' \leq r < j \\ K(d\pi v_i^j, d\pi v_{i'}^{j'}) &= 0 \quad \text{si } 0 \leq i, i' \leq r < j, j' \quad i \neq i' \quad j \neq j'. \end{aligned}$$

Ens interessa sobretot el cas de codimensió 1.

**Corol·lari 2.1.5.** *L’espai d’hiperplans de  $\mathbb{H}^n$  té curvatura seccional constant 1.*

### Mesures invariants

Localment, una mètrica semi-riemmanniana dóna lloc a un element de volum; és a dir, a una forma d’ordre màxim que val  $\pm 1$  sobre les bases ortonormals (cf. [O’N83, p. 195]). En el cas que la varietat sigui orientable podem fer que aquesta forma de volum sigui global. Si és no-orientable, només el valor absolut d’aquest element de volum està definit globalment. Recordem que el valor absolut d’una forma de volum s’anomena *densitat* i dóna lloc a una mesura. A partir d’aquí, i si no es diu el contrari, quan parlem de mesures ens referirem a densitats. A més, les igualtats entre formes diferencials que apareguin s’han d’entendre llevat de signe. Això és degut al fet que només ens interessarem per les densitats definides per aquestes formes.

L’element de volum del grup d’isometries  $G$ , que s’anomena *mesura cinemàtica* de l’espai hiperbòlic, ens permet mesurar moviments de  $\mathbb{H}^n$ . Això equival a mesurar conjunts de posicions d’objectes geomètrics. La mesura cinemàtica és bi-invariant i ve donada per

$$dK = \bigwedge_{0 \leq i < j \leq n} \omega_i^j.$$

Pel que fa a les varietats  $\mathcal{L}_r$ , la mesura invariant  $dL_r$  (cf. [San76]) ve donada per

$$\pi_r^* dL_r = \bigwedge \omega_0^h \bigwedge \omega_i^j \quad 1 \leq i \leq r < j, h \leq n. \quad (2.3)$$

A partir d'aquí, com és habitual, farem l'abús de notació  $dL_r = \pi_r^* dL_r$ . Igualment identificarem  $\langle \cdot, \cdot \rangle_r = \pi_r^* \langle \cdot, \cdot \rangle_r$ .

Interpretant  $\mathcal{L}_r$  en termes del fibrat tautològic podem escriure  $dL_r$  d'una altra manera.

**Proposició 2.1.6** ([San76]). *La mesura bi-invariant de  $\mathcal{L}_r$  és*

$$dL_r = \cosh^r \rho dx_{n-r} \wedge dL_{(n-r)[0]} \quad (2.4)$$

on  $dx_{n-r}$  és l'element de volum dins l' $(n-r)$ -pla ortogonal per l'origen i  $dL_{(n-r)[0]}$  és l'element de volum de la grassmanniana dels  $(n-r)$ -plans per l'origen.

*Observació.* Tant a  $\mathbb{S}^n$  com a  $\mathbb{R}^n$  hi ha mesures de moviments i de plans anàlogues (cf. [San76]).

Descriuim una propietat d'aquestes mesures que utilitzarem més endavant. Considerem primer l'espai de banderes format per parells de plans  $L_r \subset L_{r+s}$ . Aquest és un espai homogeni de  $G$  i alhora és un doble fibrat sobre  $\mathcal{L}_r$  i  $\mathcal{L}_{r+s}$ . La fibra d'un  $(r+s)$ -pla són tots els  $r$ -plans que conté i s'identifica amb l'espai de  $r$ -plans de  $\mathbb{H}^{r+s}$ . La mesura  $dL_r$  determina una mesura en aquesta fibra que denotem  $dL_{[r+s]r}$ . D'altra banda, la fibra d'un  $r$ -pla  $L_r$  són tots els  $(r+s)$ -plans que el contenen i és difeomorfa a  $G(s, n-r)$ . Denotem  $dL_{(r+s)[r]}$  la mesura natural en aquesta fibra. Es dedueix de (2.3) que

$$dL_{(r+s)[r]} dL_r = dL_{[r+s]r} dL_{r+s}. \quad (2.5)$$

Aquesta igualtat és igualment certa en l'espai de banderes anàleg de  $\mathbb{R}^n$  i de  $\mathbb{S}^n$ .

## 2.2 Fórmules cinemàtiques

Clàssicament, la geometria integral es preocupa de mesurar determinats conjunts de posicions d'objectes geomètrics. Això es fa respecte les mesures invariants que acabem de descriure. El resultat és un conjunt força extens de fórmules anomenades *cinemàtiques*. A continuació en presentem un recull, vàlid en espais de curvatura constant.

La fórmula de Cauchy-Crofton és la més antiga i coneguda de les fórmules de la geometria integral. Permet calcular el volum d'una hipersuperfície integrant el nombre de talls d'aquesta amb una recta que es mou.

**Proposició 2.2.1.** [San76] *Sigui  $S$  una hipersuperfície de  $\mathbb{S}^n$ ,  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{H}^n$ .*

$$\int_{\mathcal{L}_1} \#(L_1 \cap S) dL_1 = \frac{O_n}{O_1} M_0(S). \quad (2.6)$$

Recordem que  $O_i$  és el volum de l'esfera  $\mathbb{S}^i$ . Val la pena esmentar el següent fet referent a aquests volums que utilitzarem sovint

$$\frac{O_n}{O_1} = \frac{O_{n-2}}{n-1}. \quad (2.7)$$

Donem la demostració de la fórmula de Cauchy-Crofton per tenir un exemple de l'ús de les referències mòbils.

*Demostració.* Considerem el següent fibrat sobre  $S$

$$E(S) = \{(p, L_1) \mid p \in L_1 \cap S\}.$$

A través de la projecció  $E(S) \rightarrow \mathcal{L}_1$  elevem la mesura  $dL_1$  a  $E(S)$ . Així, per la fórmula de l'àrea (cf. [Fed69, 3.2.3])

$$\int_{\mathcal{L}_1} \#(L_1 \cap S) dL_1 = \int_{E(S)} dL_1.$$

Considerem les referències adaptades

$$G(S) = \{g \in G \mid g_0 \in S \quad g_2, \dots, g_{n-1} \in T_{g_0}S\}.$$

Hi ha una projecció  $G(S) \rightarrow E(S)$  consistent a enviar  $g$  a  $(g_0, L)$  on  $L$  és la geodèsica que passa per  $g_0$  amb tangent  $g_1$ . Per tota referència  $g \in G(S)$  en prenem una altra  $\bar{g} \in G(S)$  de forma que

$$\bar{g}_0 = g_0, \quad \bar{g}_2 = g_2, \dots, \bar{g}_{n-1} = g_{n-1}, \quad \bar{g}_1 \in T_{g_0}S$$

Prenem les formes  $\omega_i^j$  i  $\bar{\omega}_i^j$  corresponents a  $g$  i  $\bar{g}$  respectivament. Ara,

$$g_n = \langle \bar{g}_1, g_n \rangle \bar{g}_1 + \langle \bar{g}_n, g_n \rangle \bar{g}_n$$

i com que  $v_0^n$  és horitzontal respecte  $\pi$ , per tot  $v \in T_g G(S)$

$$\omega_0^n(v) = -\langle v_0^n, v \rangle = -\langle d\pi v_0^n, d\pi v \rangle = -\langle g_n, d\pi v \rangle = \langle \bar{g}_1, g_n \rangle \bar{\omega}_0^1(v) + \langle \bar{g}_n, g_n \rangle \bar{\omega}_0^n(v)$$

i tenim  $\omega_0^n = \langle \bar{g}_1, g_n \rangle \bar{\omega}_0^1 + \langle \bar{g}_n, g_n \rangle \bar{\omega}_0^n$ . Però sobre  $G(S)$  la forma  $\bar{\omega}_0^n$  és nul·la

$$\forall v \in T_g G(S) \quad \bar{\omega}_0^n(v) = -\langle v, v_0^n \rangle = -\langle d\pi v, d\pi v_0^n \rangle = 0$$

ja que  $g_n = d\pi v_0^n$  és ortogonal a  $S$ . Per tant

$$dL_1 = \bigwedge_{i=2}^n \omega_0^i \wedge \bigwedge_{i=2}^n \omega_1^i = \langle \bar{g}_1, g_n \rangle \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bar{\omega}_0^i \wedge \bigwedge_{i=2}^n \omega_1^i = \sin \alpha dx du$$

on  $\alpha$  és l'angle que forma  $L_1$  amb  $S$ ,  $dx$  és l'element de volum de  $S$  en el punt de tall i  $du$  mesura la direcció de  $T_x L_1$ . Integrant  $\sin \alpha du$  sobre tot  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$  obtenim la constant  $O_n/O_1$ .  $\square$

Pensant  $\#$  com el volum 0-dimensional, la fórmula de Cauchy-Crofton es generalitza de la manera següent.

**Teorema 2.2.2.** [San76, p. 245] *Si  $S$  és una subvarietat compacta de dimensió  $m$  immersa a  $\mathbb{S}^n$ ,  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{H}^n$ , llavors la integral del volum  $\text{vol}_{r+m-n}(L_r \cap S)$  dels talls amb  $r$ -plans val*

$$\int_{\mathcal{L}_r} \text{vol}_{r+m-n}(L_r \cap S) dL_r = \frac{O_n \cdots O_{n-r} O_{r+m-n}}{O_r \cdots O_0 O_m} \text{vol}_m(S). \quad (2.8)$$

Si substituïm els  $r$ -plans per subvarietats qualssevol i prenem la mesura  $dK$  enlloc de  $dL_r$  obtenim l'anomenada fórmula de Poincaré.

**Teorema 2.2.3.** [San76, p. 259] *Siguin  $R$  i  $S$  dues subvarietats compactes de  $\mathbb{S}^n$ ,  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{H}^n$  de dimensions  $r$  i  $m$  respectivament, llavors*

$$\int_G \text{vol}_{r+m-n}(gR \cap S) dK = \frac{O_n \cdots O_1 O_{r+m-n}}{O_r O_m} \text{vol}_r(R) \text{vol}_m(S).$$

També és remarcable l'anomenada  *propietat reproductiva*  de les integrals de curvatura mitja.

**Proposició 2.2.4.** [San76, p. 248] *Si  $S$  és una hipersuperfície de  $\mathbb{H}^n$ ,  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{S}^n$  orientada per un normal unitari  $n$*

$$\int_{\mathcal{L}_r} M_i^{(r)}(S \cap L_r) dL_r = \frac{O_{n-2} \cdots O_{n-r} O_{n-i}}{O_{r-2} \cdots O_0 O_{r-i}} M_i(\partial Q) \quad i < r$$

on  $M_i^{(r)}$  denota la  $i$ -èsima integral de curvatura mitja considerada dins un  $r$ -pla respecte el normal unitari  $n'$  que compleix  $\langle n, n' \rangle > 0$ .

A l'espai euclidià, per un domini  $Q \subset \mathbb{R}^n$  de vora  $C^2$ , hi ha una altra generalització de la fórmula de Cauchy-Crofton (cf. [San76, p. 248]).

$$M_{r-1}(\partial Q) = \frac{(n-r) \cdot O_{r-1} \cdots O_0}{O_{n-2} \cdots O_{n-r-1}} \int_{\mathcal{L}_r} \chi(L_r \cap Q) dL_r \quad (2.9)$$

on  $\mathcal{L}_r$  denota l'espai d' $r$ -plans afins de  $\mathbb{R}^n$  i  $dL_r$  és la mesura invariant en aquest espai. Quan  $Q$  és convex, (2.9) es pot pensar com una reformulació de l'equació de Cauchy (1.14). Veiem doncs, que les Quermassintegrals d'un convex coincideixen, llevat de constants, amb la mesura de plans que el tallen. Per tant, és natural generalitzar les Quermassintegrals a dominis  $Q \subset \mathbb{R}^n$  no necessàriament convexos de la següent manera (i de fet així es fa a [Had57, p. 240])

$$W_r(Q) = \frac{(n-r) \cdot O_{r-1} \cdots O_0}{n \cdot O_{n-2} \cdots O_{n-r-1}} \int_{\mathcal{L}_r} \chi(L_r \cap Q) dL_r.$$

Quan  $\partial Q$  sigui diferenciable es mantindrà vàlida l'equació de Cauchy (2.2.5).

Aquesta manera de definir Quermassintegrals té sentit per a dominis de  $\mathbb{H}^n$  i  $\mathbb{S}^n$  (recordem la discussió del final de la secció 1.2). A més, dóna lloc a invariants mètrics. Per tant, adoptem la següent

**Definició 2.2.1.** Sigui  $Q$  un domini de  $\mathbb{H}^n$  (o  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{S}^n$ ). Per  $r = 1, \dots, n-1$  definim

$$W_r(Q) = \frac{(n-r) \cdot O_{r-1} \cdots O_0}{n \cdot O_{n-2} \cdots O_{n-r-1}} \int_{\mathcal{L}_r} \chi(L_r \cap Q) dL_r.$$

A més, definim

$$W_0(Q) = V(Q) \quad \text{i} \quad W_n(Q) = \frac{O_{n-1}}{n} \chi(Q)$$

Encara que no tan senzilla (ni de lluny), hi ha una generalització de l'equació de Cauchy (1.14) a espais de curvatura constant arbitrària.

**Proposició 2.2.5.** [San76] *Si  $Q$  és un domini a la varietat  $n$ -dimensional, simplement connexa de curvatura seccional constant  $k$  amb vora  $\partial Q$  compacta de classe  $C^2$ , aleshores per  $r = 2l < n$*

$$W_r(Q) = \frac{2(n-r)}{nO_r O_{n-r-1}} \left[ k^l O_{n-1} \text{vol}(Q) + \sum_{i=1}^l \binom{r-1}{2i-1} \frac{O_r O_{r-1} O_{n-2i+1}}{O_{2i-1} O_{r-2i} O_{r-2i+1}} k^{l-i} M_{2i-1}(\partial Q) \right] \quad (2.10)$$

*i per  $r = 2l + 1 < n$*

$$W_r(Q) = \frac{2(n-r)}{nO_{n-r-1}} \sum_{i=0}^l \binom{r-1}{2i} \frac{O_{r-1} O_{n-2i}}{O_{2i} O_{r-2i-1} O_{r-2i}} k^{l-i} M_{2i}(\partial Q). \quad (2.11)$$

Al capítol 3 donarem una demostració nova d'aquest fet que, a més, dóna lloc a unes fórmules equivalents però molt més simples.

Per acabar aquest recull, presentem la fórmula cinemàtica fonamental de Blaschke en espais de curvatura constant  $k$ . Aquesta és anàloga a l'anterior canviant els plans per dominis compactes.

**Teorema 2.2.6.** [San76] *Siguin  $Q_0$  i  $Q_1$  dos dominis compactes a l'espai de curvatura constant  $k$ . Suposem que les vores són de classe  $C_2$ . Llavors per  $n$  parell*

$$\begin{aligned} \int_G \chi(Q_0 \cap gQ_1) dK &= -2(-1)^{n/2} \frac{O_{n-1} \cdots O_1}{O_n} V(Q_0) V(Q_1) + \\ &+ O_{n-1} \cdots O_1 (V(Q_1) \chi(Q_0) + V(Q_0) \chi(Q_1)) + \\ &+ O_{n-2} \cdots O_1 \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h(\partial Q_0) M_{n-2-h}(\partial Q_1) + \\ &+ O_{n-2} \cdots O_1 \sum_{i=0}^{n/2-2} k^{(n/2-i-1)} \binom{n-1}{2i+1} \frac{n-2i-2}{O_{n-2i-3}} \frac{2}{O_{n-2i-2}} \\ &\cdot \left[ \sum_{h=n-2i-2}^{n-2} \frac{\binom{2i+1}{n-h-1} O_{2n-h-2i-2}}{(h+1) O_{n-h}} \frac{O_h}{O_{2i+h-n+2}} M_{n-2-h}(\partial Q_0) M_{h+2i+2-n}(\partial Q_1) \right], \end{aligned}$$



*i per n senar*

$$\begin{aligned}
 \int_G \chi(Q_0 \cap gQ_1) dK &= O_{n-1} \cdots O_1 (V(Q_1)\chi(Q_0) + V(Q_0)\chi(Q_1)) + \\
 &+ O_{n-2} \cdots O_1 \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h(\partial Q_0) M_{n-2-h}(\partial Q_1) + \\
 &+ O_{n-2} \cdots O_1 \sum_{i=0}^{(n-3)/2} k^{(n-2i-1)/2} \binom{n-1}{2i} \frac{n-2i-1}{O_{n-2i-1}} \frac{2}{O_{n-2i-2}}. \\
 &\cdot \left[ \sum_{h=n-2i-1}^{n-2} \frac{\binom{2i}{n-h-1} O_{2n-h-2i-1}}{(h+1)O_{n-h}} \frac{O_h}{O_{2i+h-n+1}} M_{n-2-h}(\partial Q_0) M_{h+2i+1-n}(\partial Q_1) \right].
 \end{aligned}$$

Aquesta fórmula té un aspecte força complicat però cal dir que és extremadament general. Encara que està establerta per dominis, també serveix per parells de subvarietats compactes. N'hi ha prou amb prendre els tubs sòlids de cada una d'elles, aplicar la fórmula i fer tendir a 0 el radi de cada tub.

## 2.3 L'esfera de de Sitter

Un cas molt particular entre els espais de plans de l'espai hiperbòlic és el de l'espai hiperplans. En aquesta secció l'estudiem en detall.

Recordem el corollari 2.1.5 segons el qual  $\mathcal{L}_{n-1}$  té curvatura seccional constant 1. Per a varietats de Lorentz també tenim un teorema de classificació de Cartan.

**Teorema 2.3.1.** [O'N83, 8.23 8.26] *Donat  $k \in \mathbb{R}$ , existeix una varietat de Lorentz, única llevat d'isometria, simplement connexa i de curvatura seccional constant  $k$ .*

L'espai  $\mathcal{L}_{n-1}$  no és simplement connex, per això prendrem l'espai d'hiperplans orientats que és un doble recobriment de  $\mathcal{L}_{n-1}$ , difeomorf a un cilindre i, per tant, simplement connex si  $n > 2$ .

**Definició 2.3.1.** Anomenem *esfera de de Sitter* de dimensió  $n$  a l'espai dels hiperplans orientats de  $\mathbb{H}^n$ . La denotem per  $\Lambda^n$ .

Així, per  $n > 2$ , l'esfera de de Sitter és la única varietat de Lorentz simplement connexa de curvatura seccional constant 1. En canvi, la superfície de Lorentz simplement connexa de curvatura constant 1 és el recobriment universal de  $\Lambda^2$ .

*Observació.* A l'espai de Minkowski, a més de tenir-hi el model de l'hiperboloide de  $\mathbb{H}^n$  també hi tenim un model molt bo de  $\Lambda^n$ , l'esfera de de Sitter. En efecte, un hiperplà orientat de l'hiperboloide ve donat per un subespai vectorial de  $\mathbb{R}^{n+1}$  orientat, de dimensió  $n$  i que conté vectors de tipus temps. Un subespai així queda totalment determinat pel

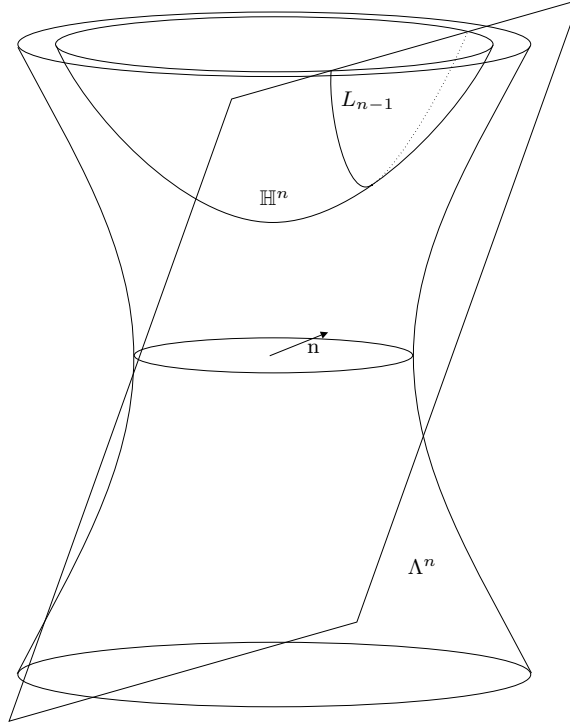


Figura 2.4: L'espai hiperbòlic i l'esfera de de Sitter a l'espai de Minkowski.

vector normal unitari compatible amb la orientació que serà de tipus espai. Així, en aquest model,

$$\Lambda^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid L(v, v) = 1\}.$$

A més, l'estructura de varietat semi-riemanniana és la induïda per l'espai de Minkowski. Encara que nosaltres seguirem amb el punt de vista abstracte, aquesta pot ser una bona manera de visualitzar l'esfera de de Sitter. Quant al model projectiu, podem dir que per polaritat  $\mathcal{L}_{n-1}$  s'identifica amb l'exterior de la cònica de l'infinit.

A continuació veurem que el fibrat de referències ortonormals de  $\Lambda^n$  s'identifica amb el de  $\mathbb{H}^n$ . Això posarà de manifest la relació de dualitat entre  $\mathbb{H}^n$  i  $\Lambda^n$ . Per comoditat denotarem  $(h_0, \dots, h_{n-1}; h_n)$  les referències ortonormals de  $\Lambda^n$  on  $h_n \in \Lambda^n$  és el punt i  $h_0, \dots, h_{n-1}$  és una base ortonormal en  $h_n$ . Sigui doncs,

$$\mathcal{F}(\Lambda^n) = \{(h_0, \dots, h_{n-1}; h_n) \mid h_n \in \Lambda^n \quad h_0, \dots, h_{n-1} \in T_{h_n} \Lambda^n \quad \langle h_i, h_j \rangle = \epsilon(i)\delta_{ij}\}.$$

on  $\epsilon(0) = -1$  i  $\epsilon(i) = 1$  per  $1 \leq i \leq n-1$ . Així,  $\tilde{\pi} : \mathcal{F}(\Lambda^n) \rightarrow \Lambda^n$  és un fibrat principal de grup estructural  $O(n-1, 1)$ . Podem interpretar les referències  $h$  com isometries lineals de l'espai de Minkowski  $\mathbb{R}^n$  a  $T_{\tilde{\pi}(h)} \Lambda^n$ . Sigui  $\tilde{\theta} = h^{-1}d\tilde{\pi}$  la forma dual del fibrat  $\tilde{\pi}$ . Considerem la component  $i$ -èsima de  $\theta$

$$\tilde{\omega}_i^n = \tilde{\theta}_i \quad i = 0, \dots, n-1$$

on estem pensant les coordenades de  $\mathbb{R}^n$  numerades del 0 al  $n-1$ . Denotem  $\tilde{\sigma}$  l'acció infinitesimal del fibrat. Prenem la col·lecció de matrius  $\{Y_i^j\} \subset \mathfrak{o}(n-1, n)$  amb zeros a totes les posicions excepte  $(Y_i^j)_i^j = 1$  i  $(Y_i^j)_j^i = -\epsilon(i)\epsilon(j)$

$$Y_0^i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad Y_i^j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Construïm els següents camps vectorials per  $0 \leq i, j \leq n-1$  i  $i \neq j$ :

$$\tilde{v}_i^j = \tilde{\sigma}(Y_i^j).$$

Sigui  $\tilde{\omega}$  la forma de connexió amb valors a  $\mathfrak{o}(n-1, 1)$  corresponent a  $\tilde{\nabla}$ , connexió de Levi-Civita de  $\Lambda^n$ . Numerem del 0 al  $n-1$  les files i les columnes d'aquestes matrius i denotem per  $\tilde{\omega}_i^j$  la posició  $i, j$  de  $\tilde{\omega}$ . Tenim

$$\tilde{\omega}_i^j + \epsilon(i)\epsilon(j)\tilde{\omega}_j^i = 0. \quad (2.12)$$

A cada  $x \in \mathbb{R}^n$  se li associa el camp bàsic  $\tilde{B}(x)$ , horitzontal i definit per  $d\tilde{\pi}_h \tilde{B}(x) = h(x)$ . Construïm, per la base canònica  $e_0, \dots, e_{n-1}$  de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\tilde{v}_i^n = -\tilde{v}_n^i = \tilde{B}(e_i).$$

Per altra banda, com que  $\Lambda^n$  és de curvatura constant, fixada una referència el seu grup d'isometries  $\tilde{G}$  s'identifica amb  $\mathcal{F}(\Lambda^n)$  (cf.[O'N83, 8.17]). Si  $e$  és la referència fixada a  $\mathbb{H}^n$ , triem la següent referència a  $\Lambda^n$

$$(h_0, \dots, h_{n-1}; h_n) = ((d\pi_{n-1}v_0^n)_e, \dots, (d\pi_{n-2}v_{n-1}^n)_e; \pi_{n-1}(e))$$

Igual que a  $\mathbb{H}^n$ , les equacions d'estructura del fibrat principal ens determinen el claudàtor de Lie.

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \tilde{\sigma}([\tilde{\omega}(X), \tilde{\omega}(Y)]) + \tilde{\sigma}(\tilde{\theta}(X) \cdot \tilde{\theta}(Y)^t - \tilde{\theta}(Y) \cdot \tilde{\theta}(X)^t) + \\ &\quad + \tilde{B}(\tilde{\omega}(X) \cdot \tilde{\theta}(Y) - \tilde{\omega}(Y) \cdot \tilde{\theta}(X)) \end{aligned}$$

En particular

$$\begin{aligned} [\tilde{v}_i^j, \tilde{v}_j^s] &= \tilde{v}_i^s \quad \text{si } i \neq s \neq j \\ [\tilde{v}_i^j, \tilde{v}_r^s] &= 0 \quad \text{si } i < j < r < s. \end{aligned}$$

Però recordem que  $G$  actua transitivament i efectivament sobre  $\Lambda^n$  per isometries. Per tant, tenim una aplicació

$$\begin{aligned} \Phi : G &\longrightarrow \tilde{G} = \mathcal{F}(\Lambda^n) \\ g &\longmapsto (dgh_0, \dots, dgh_{n-1}; g(h_n)) \end{aligned}$$

que és morfisme injectiu de grups de Lie. Com que les dimensions de  $G$  i  $\tilde{G}$  coincideixen, podem pensar que tenen la mateixa component connexa del neutre. Però es veu fàcilment que tots dos grups tenen dues components connexes. Per tant  $\Phi$  és un isomorfisme de grups de Lie. En particular,

$$\Phi^* K_{\tilde{\mathfrak{g}}} = K_{\mathfrak{g}} \quad (2.13)$$

essent  $K_{\tilde{\mathfrak{g}}}$ , la forma de Killing de  $\tilde{G}$ .

Ens interessa calcular la imatge recíproca  $\Phi^* \tilde{\omega}_i^j$ . Comencem observant que per  $i = 0, \dots, n-1$  i  $v$  tangent a  $G$ ,

$$\begin{aligned} \Phi^* \tilde{\omega}_i^n(v) &= \tilde{\omega}_i^n(d\Phi v) = (h^{-1})_i d\tilde{\pi} d\Phi v = (h^{-1})_i d\pi_{n-1} v = \\ &= \epsilon(i) \langle d\pi_{n-1} v, h_i \rangle = \epsilon(i) \langle d\pi_{n-1} v, d\pi_{n-1} v_i^n \rangle = \epsilon(i) \langle v, v_i^n \rangle = \omega_i^n(v) \end{aligned} \quad (2.14)$$

ja que la mètrica de  $\Lambda^n$  eleva a la de  $\langle \tilde{v}_0^n, \dots, \tilde{v}_{n-1}^n \rangle$ . Com que  $\Lambda^n$  és espai simètric, la part vertical i la horitzontal són ortogonals respecte  $K_{\tilde{\mathfrak{g}}}$ . Amb (2.13) veiem que  $d\Phi v_i^n$  és ortogonal a les fibres de  $\tilde{\pi}$  i per tant ha de ser horitzontal. Així, és combinació lineal de  $\tilde{v}_0^n, \dots, \tilde{v}_{n-1}^n$  i per (2.14), tenim  $d\Phi(v_i^n) = \tilde{v}_i^n$ . Per a la resta de  $v_i^j$ , podem argumentar

$$d\Phi(v_i^j) = -\epsilon(i)\epsilon(j)d\Phi([v_i^n, v_j^n]) = -\epsilon(i)\epsilon(j)[d\Phi v_i^n, d\Phi v_j^n] = -\epsilon(i)\epsilon(j)[\tilde{v}_i^n, \tilde{v}_j^n] = \tilde{v}_i^j.$$

Així, doncs

$$d\Phi(v_i^j) = \tilde{v}_i^j \quad \Rightarrow \quad \Phi^*(\tilde{\omega}_i^j) = \omega_i^j \quad 0 \leq i, j \leq n.$$

Per alleugerir la notació, a partir d'ara identifiquem totalment  $G$  i  $\tilde{G}$ . En particular, escriurem sempre  $\omega_i^j$  i  $v_i^j$  enlloc de  $\tilde{\omega}_i^j$  i  $\tilde{v}_i^j$ .

Geomètricament interpretem  $h_0 = d\tilde{\pi}v_0^n$  com l'element infinitesimal del transport paral·lel d'un hiperplà al llarg de la geodèsica ortogonal en el punt  $g_0$ . Pel que fa a  $h_i = d\tilde{\pi}v_i^n$  per  $i > 0$ , el pensem com l'element de rotació al voltant de  $L_{n-2} = \exp_{g_0}(\langle g_1, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_{n-1} \rangle)$ . Així, les direccions de tipus temps de  $T_{L_{n-1}}\Lambda^n$  s'identifiquen amb els mateixos punts de  $L_{n-1}$  i les de tipus espai s'identifiquen amb els  $(n-2)$ -plans que conté.

### 2.3.1 Espais de plans a l'esfera de de Sitter

Donat un  $(n-r-1)$ -pla no orientat,  $L_{n-r-1} \in \mathcal{L}_{n-r-1}$ , considerem la subvarietat de  $\Lambda^n$  formada pels hiperplans orientats que el contenen

$$L_r^s = \{L_{n-1} \in \Lambda^n | L_{n-r-1} \subset L_{n-1}\}$$

És clar que  $L_r^s$  és difeomorf a l'esfera  $\mathbb{S}^r$ . Considerem les isometries que deixen invariants  $L_{n-r-1}$  i tots els hiperplans que el contenen. Aquestes isometries actuen a  $\Lambda^n$  i algunes tenen  $L_r^s$  com a lloc de punts fixos. Deduïm que  $L_r^s$  és una varietat totalment geodèsica de  $\Lambda^n$ . A més, l'espai tangent a  $L_r^s$  és de tipus espai. A una subvarietat d'aquest tipus l'anomenem *r-pla de tipus espai* de  $\Lambda^n$ . En particular, les corbes  $L_1^s$ , que són feixos d'hiperplans que contenen un  $L_{n-2}$ , són geodèsiques anomenades de *tipus espai*.

Per un  $r$ -pla  $L_r$  de  $\mathbb{H}^n$  considerem els hiperplans que el tallen ortogonalment

$$L_r^t = \{L_{n-1} \in \Lambda^n \mid L_{n-1} \perp L_r\}.$$

És clar que  $L_r^t$  és difeomorf a  $\Lambda^r$ . Altre cop tenim una subvarietat totalment geodèsica de  $\Lambda^n$ . Per a  $r = 1$  es tracta d'un feix d'hiperplans ortogonals a una geodèsica. Aquest feix constitueix ell mateix una geodèsica a l'esfera de de Sitter i, en tenir vectors tangents de tipus temps, l'anomenem *geodèsica de tipus temps* de  $\Lambda^n$ . Notem que hi ha una manera canònica d'orientar les geodèsiques de tipus temps de  $\Lambda^n$ . En efecte, si  $L_1^t$  és el feix d'hiperplans ortogonals una geodèsica  $L_1$  de  $\mathbb{H}^n$ , orientem  $L_1$  de forma que els seus vectors tangents siguin els normals definits per la orientació dels hiperplans, i això ja dóna una orientació de  $L_1^t$ . Com que per  $r > 1$ , els plans  $L_r^t$  també contenen geodèsiques de tipus temps, diem que  $L_r^t$  és un  *$r$ -pla de tipus temps* de  $\Lambda^n$ .

**Definició 2.3.2.** Denotem  $\mathcal{L}_r^s$  i  $\mathcal{L}_r^t$  els espais de  $r$ -plans de tipus espai i temps de  $\Lambda^n$  respectivament.

L'espai dels  $r$ -plans de tipus espai s'identifica amb  $\mathcal{L}_{n-r-1}$  i per tant és una varietat diferenciable amb una mètrica semi-riemanniana i una mesura  $dL_r^s$  que són invariants per l'acció de  $G$

$$dL_r^s = \bigwedge \omega_0^h \bigwedge \omega_i^j \quad 1 \leq i \leq n-r-1 < j, h \leq n.$$

En canvi, l'espai  $\mathcal{L}_r^t$  s'identifica amb  $\mathcal{L}_r$  i la seva mesura és  $dL_r^t = dL_r$ .

Fem un petit càlcul que mostrarà la dificultat de fer geometria integral a  $\Lambda^n$ . Inten-tem repetir la demostració de la fórmula de Cauchy-Crofton (proposició 2.2.1). Suposem  $S \subset \Lambda^n$  una hipersuperfície de tipus espai. Considerem els espais

$$E(S) = \{(p, L) \in S \times \mathcal{L}_1^s \mid p \in L \cap S\}$$

$$G(S) = \{h \in \mathcal{F}(\Lambda^n) \mid h_n \in S \quad h_1, \dots, h_{n-2} \in T_{h_n} S\}$$

i la projecció  $G(S) \rightarrow E(S)$  definida per  $h \mapsto (h_n, L)$  on  $L$  és la geodèsica de tipus espai que surt de  $h_n$  amb tangent  $h_{n-1}$ . Per tota referència  $h \in G(S)$  prenem una altra referència  $\bar{h} \in G(S)$  tal que

$$\bar{h}_1 = h_1, \dots, \bar{h}_{n-2} = h_{n-2}, \quad \bar{h}_n = h_n, \quad \bar{h}_{n-1} \in T_{h_n} S$$

Prenem les formes  $\omega_i^j$  i  $\bar{\omega}_i^j$  corresponents a  $h$  i  $\bar{h}$ . Llavors,

$$h_0 = \langle \bar{h}_{n-1}, h_0 \rangle \bar{h}_{n-1} - \langle \bar{h}_0, h_0 \rangle \bar{h}_0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0^n = \langle \bar{h}_{n-1}, h_0 \rangle \bar{\omega}_{n-1}^n - \langle \bar{h}_0, h_0 \rangle \bar{\omega}_0^n$$

Però és clar que  $\bar{\omega}_0^n = 0$  sobre  $G(S)$ . Per tant,

$$dL_1^s = \bigwedge_{i=0}^{n-2} \omega_i^n \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-2} \omega_i^{n-1} = \langle \bar{h}_{n-1}, h_0 \rangle \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bar{\omega}_i^n \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-2} \omega_i^{n-1} = \sinh \rho dx du$$

on  $dx$  és l'element de volum de  $S$  en el punt de tall  $x$ ,  $du$  és la mesura de les direccions unitàries de tipus espai en  $x$  i  $\sinh \rho$  és el producte de Lorentz entre el tangent a  $L_1$  i el normal a  $S$ . Però la integral de  $\sinh \rho du$  sobre totes les direccions de tipus espai és divergent. Per tant, seguint l'esquema de la demostració de 2.2.1 ens quedem a l'últim pas. No hem demostrat la fórmula de Cauchy-Crofton a  $\Lambda^n$  però en lloc seu hem provat la següent proposició.

**Proposició 2.3.2.** *La mesura de rectes de tipus espai que tallen qualsevol hipersuperfície de tipus espai de  $\Lambda^n$  és infinita.*

Es veu anàlogament que el mateix passa per les rectes de tipus temps i també per les hipersuperfícies de tipus temps.

Notem que el problema rau en el fet que l'espai de rectes de tipus espai que passen per un punt de  $\Lambda^n$  és no compacte (i de 'mesura' infinita). Aquí queda clara la importància del fet que  $\Lambda^n$  sigui varietat de Lorentz i no de Riemann. De fet, amb qualsevol varietat semi-riemanniana (i no riemanniana) podem esperar trobar-nos amb el mateix problema que dificulta molt l'obtenció de fórmules cinemàtiques.

D'altra banda, recordant que les rectes de  $\Lambda^n$  corresponen a  $(n-2)$ -plans de  $\mathbb{H}^n$ , la proposició anterior era d'esperar. Una família d'hiperplans a  $\mathbb{H}^n$ , per 'petita' que sigui, conté un conjunt de  $(n-2)$ -plans de mesura infinita.

Acabem amb una observació important. Suposem  $p \in L \in \Lambda^n$  i considerem l'hiperplà  $L_{n-1}^s \subset \Lambda^n$  format pels hiperplans que, com  $L$ , contenen  $p$ .

**Proposició 2.3.3.** *Els espais tangents  $T_p L$  i  $T_L L_{n-1}^s$  s'identifiquen canònicament a través d'una isometria  $\Psi$ .*

*Demostració.* Definim  $\Psi$  primer sobre el tangent unitari de  $L$  a  $p$  de la següent manera. Si  $v \in T_p L$  té norma 1 llavors

$$\Psi(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(\cos tv + \sin tn)$$

on  $n$  és el vector normal unitari a  $L$  en  $p$  determinat per la orientació de  $L$ . Estenem  $\Psi$  a  $\Psi : T_p L \rightarrow T_L L_{n-1}^s$  per linealitat. Per veure que  $\Psi$  és isometria n'hi ha prou amb prendre una referència  $g \in G$  tal que  $g_0 = p$  i  $g_n = n$ . Llavors per  $i = 1, \dots, n-1$  comprovem que  $\Psi(g_i) = d\tilde{\pi}_g(v_i^n)$ .  $\square$

### 2.3.2 Aplicació de Gauss

L'esfera de de Sitter és l'espai d'arribada natural de l'aplicació de Gauss d'una hipersuperfície a  $\mathbb{H}^n$ . Aquesta aplicació ja s'estudiava a [Teu82].

**Definició 2.3.3.** Sigui  $S \subset \mathbb{H}^n$  una hipersuperfície orientada. Es defineix l'*aplicació de Gauss* de  $S$  com

$$\begin{aligned} \gamma : S &\longrightarrow \Lambda^n \\ p &\longmapsto \exp_p(T_p S) \end{aligned}$$

Quan  $S$  és no orientada podem definir naturalment una aplicació de Gauss cap a  $\mathcal{L}_{n-1}$  o bé una aplicació del fibrat normal unitari  $N(S)$  cap a  $\Lambda^n$ .

La següent proposició permet, igual com a  $\mathbb{R}^n$ , pensar la diferencial de l'aplicació de Gauss com un endomorfisme de  $T_p S$ .

**Proposició 2.3.4.** [Teu82] *Si  $S \subset \mathbb{H}^n$  és una hipersuperfície a l'espai hiperbòlic i  $\gamma : S \rightarrow \Lambda^n$  és l'aplicació de Gauss corresponent, llavors  $d\gamma(T_p S)$  s'identifica isomètricament a través de  $\Psi^{-1}$  amb un subespai de  $T_p S$ .*

Per tant, quan  $d\gamma$  sigui de rang màxim,  $\gamma(S)$  serà localment una hipersuperfície de tipus espai a  $\Lambda^n$ .

*Demostració.* Sigui  $g : U \rightarrow G$  una referència mòbil definida en un entorn de  $p$  dins  $S$  de forma que  $g_n \perp T_{g_0} S$ . D'aquesta manera,  $\gamma = \tilde{\pi} \circ g$  i per  $i = 1, \dots, n-1$ ,

$$\langle d\gamma g_i, d\tilde{\pi} v_0^n \rangle = \langle d\tilde{\pi} dg(g_i), d\tilde{\pi} v_0^n \rangle = \langle dg(g_i), v_0^n \rangle = \langle d\pi dg(g_i), d\pi(v_0^n) \rangle = -\langle g_i, g_n \rangle = 0$$

ja que  $v_0^n$  és horitzontal respecte  $\tilde{\pi}$  i  $\pi$ . Per tant, si  $L$  és l'hiperplà tangent a  $S$  en  $p$  i  $L_{n-1}^s$  és l'hiperplà de  $\Lambda^n$  format pels hiperplans que contenen  $p$  tenim  $d\gamma(T_p S) \subset (d\tilde{\pi} v_0^n)^\perp = T_L L_{n-1}^s$  que s'identifica amb  $T_p L = T_p S$  a través de  $\Psi^{-1}$  tal com diu la proposició 2.3.3.  $\square$

Com en el cas euclidià, tenim una fórmula de Weingarten.

**Proposició 2.3.5.** *Si  $\mathbb{I}$  denota la segona forma fonamental de  $S$  corresponent a un normal unitari  $n$ , llavors per tot parell de vectors tangents  $X, Y$*

$$\langle d\gamma X, \Psi Y \rangle = -\mathbb{I}(X, Y).$$

*Demostració.* Prenem una secció  $g : U \rightarrow G$  com la d'abans.

$$\begin{aligned} \langle d\gamma(g_i), \Psi g_j \rangle &= \langle d\gamma(g_i), d\tilde{\pi} v_j^n \rangle = \langle dg(g_i), v_j^n \rangle = \omega_j^n(dg(g_i)) = \\ &= -\omega_n^j(dg(g_i)) = \langle -\nabla_{g_i} g_j, g_n \rangle = -\mathbb{I}(g_i, g_j). \end{aligned}$$

$\square$

Per tant, la curvatura de Gauss de  $S$  és, llevat de signe, el jacobí (deformació infinitesimal de volum) de  $\gamma$  (cf.[Teu82])

$$K = \det \mathbb{I} = \pm \det d\gamma = \pm \text{jac} \gamma. \quad (2.15)$$

El teorema de Sard-Federer [Fed69, 3.4.3] garanteix que el conjunt de valors crítics de  $\gamma$  té mesura de Hausdorff  $(n-1)$ -dimensional nul·la. Per tant, la imatge de Gauss de  $S$  és hipersuperfície quasi a tot arreu. Si  $d\tilde{x}$  és l'element de volum de  $\gamma(S)$  en els punts regulars, acabem de veure que

$$M_{n-1}(S) = \int_S K dx = \int_{\gamma(S)} \text{sgn} K d\tilde{x}. \quad (2.16)$$

*Observació.* Aquest punt de vista permet definir  $M_{n-1}$  per a la vora d'un convex de  $\mathbb{H}^n$  encara que no sigui regular. Per un convex  $Q$  arbitrari, un hiperplà és de suport quan talla la seva adherència  $\overline{Q}$  però deixa  $Q$  a un costat. Definim la curvatura total  $M_{n-1}(\partial Q)$  com el volum  $(n-1)$ -dimensional del subconjunt de  $\Lambda^n$  format pels hiperplans orientats de suport de  $Q$ . Per (2.16) si  $\partial Q$  és diferenciable totes dues definicions coincideixen. A més,  $M_{n-1}$  és un funcional continu en l'espai dels dominis convexos respecte la topologia de Hausdorff. En efecte, un domini convex qualsevol  $Q$  es pot aproximar (respecte aquesta topologia) per una successió  $Q_r$  de convexos amb vora diferenciable. Es va veure a [LS00] que  $M_{n-1}(\partial Q_r)$  tendeixen a  $M_{n-1}(\partial Q)$ , tal com l'acabem de definir.

Les integrals de curvatura mitja en espais de curvatura constant s'han definit i estudiat per conjunts d'*abast positiu* (*positive reach*); una classe molt més general que la dels convexos (cf. [Koh91]).

A diferència del cas euclidià, però similarment al cas de l'esfera, es pot definir una aplicació de Gauss que funciona en sentit invers. No podem donar cap referència on s'estudii aquesta aplicació si bé deu pertànyer al *folklore*.

**Definició 2.3.4.** Donada  $S \subset \Lambda^n$  una hipersuperfície de tipus espai a l'esfera de de Sitter, l'aplicació de Gauss de  $S$  es defineix com

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} : S &\longrightarrow \mathcal{L}_{n-1}^s \equiv \mathbb{H}^n \\ p &\longmapsto \exp_p(T_p S) \end{aligned}$$

on  $\exp_p$  és l'aplicació exponencial de  $\Lambda^n$  en  $p$ .

La proposició 2.3.4 té el següent anàleg a  $\Lambda^n$ .

**Proposició 2.3.6.** Si  $\tilde{\gamma}$  és l'aplicació de Gauss associada a una hipersuperfície  $S \subset \Lambda^n$ , llavors

$$\Psi d\tilde{\gamma}(T_p S) \subset T_p S.$$

*Demostració.* Sigui  $g : U \rightarrow G$  una secció definida en un entorn de  $p$  dins  $S$  tal que la referència mòbil  $h = \Phi(g) \in \mathcal{F}(\Lambda^n)$  compleixi  $h_0 \perp T_{h_n} S$ . Així,  $\tilde{\gamma} = \pi \circ g$  i per  $i = 1, \dots, n-1$

$$\langle d\tilde{\gamma}(h_i), g_n \rangle = \langle d\pi dg(h_i), d\pi v_0^n \rangle = \langle dg(h_i), v_0^n \rangle = \langle d\tilde{\pi} dg(h_i), d\tilde{\pi} v_0^n \rangle = -\langle h_i, h_n \rangle = 0.$$

Per tant,  $d\tilde{\gamma} \subset (g_n)^\perp$  que s'identifica amb  $T_p S = h_0^\perp$  a través de  $\Psi$  □

Donada una hipersuperfície de tipus espai a  $\Lambda^n$ , prenem el normal unitari  $n$  de tipus temps d'acord amb la orientació temporal de  $\Lambda^n$ . Si  $\tilde{\nabla}$  és la connexió de  $\Lambda^n$ , la forma fonamental de  $S$  es defineix com

$$\tilde{I}(X, Y) = \langle \tilde{\nabla}_X Y, n \rangle.$$

Altres cop tenim una fórmula de Weingarten



**Proposició 2.3.7.** *La segona forma fonamental  $\tilde{I}$  d'una hipersuperfície  $S$  de tipus espai a  $\Lambda^n$  complex, per tot parell de vectors tangents  $X, Y$ ,*

$$\langle d\tilde{\gamma}X, \Psi^{-1}Y \rangle = -\tilde{I}(X, Y).$$

*Demostració.* Prenem una secció  $g : U \rightarrow G$  com a la prova anterior i considerem  $h = \Phi \circ g$ .

$$\langle d\tilde{\gamma}h_i, \Psi^{-1}h_j \rangle = \langle d\pi dg(h_i), g_j \rangle = -\langle dg(h_i), v_0^j \rangle = \omega_0^j(dg(h_i)) = -\langle \tilde{\nabla}_{h_i} h_j, h_0 \rangle.$$

□

I tornem a tenir que la curvatura de Gauss mesura la deformació infinitesimal de volum per la transformació  $\tilde{\gamma}$

$$\tilde{K} = \det \tilde{I} = \pm \det d\tilde{\gamma}.$$

Finalment trobem el següent resultat que completa la idea de dualitat entre hipersuperfícies de  $\mathbb{H}^n$  i  $\Lambda^n$ . Tampoc podem donar-ne referència si bé és probable que ja fos conegut. En qualsevol cas es demostra trivialment i més endavant jugarà un paper important.

**Proposició 2.3.8.** *Si la hipersuperfície  $S \subset \mathbb{H}^n$  és tal que  $\gamma$  és immersió, aleshores les segones formes fonamentals de  $S$  i de  $\gamma(S)$  són inverses una de l'altra. Més precisament, si  $I$  i  $\tilde{I}$  són les segones formes fonamentals de  $S$  i  $\gamma(S)$  respectivament, aleshores les seves matrius respectives  $A$  i  $\tilde{A}$ , associades a les bases ortonormals  $g_1, \dots, g_{n-1}$  i  $\Psi g_1, \dots, \Psi g_{n-1}$ , són inverses una de l'altra*

$$A \cdot \tilde{A} = \text{id}.$$

Notem que  $\gamma$  és immersió si i només si la curvatura de Gauss  $K$  de  $S$  no s'anul·la enlloc.

*Demostració.* Denotem  $\tilde{\gamma}$  l'aplicació de Gauss associada a  $\gamma(S) \subset \Lambda^n$ . Notem que  $\tilde{A}$  és també la matriu associada a  $\Psi^* \tilde{I}$  en la base  $g_1, \dots, g_{n-1}$ . A més, per les fórmules de Weingarten anteriors  $-\Psi^{-1}d\gamma$  i  $-\Psi d\tilde{\gamma}$  són les endomorfismes associats a  $I$  i  $\tilde{I}$ . Així, per  $X, Y \in T_p S$  tenim

$$\begin{aligned} X^t \cdot A \tilde{A} \cdot Y &= (X^t A) \cdot \tilde{A} \cdot Y = \Psi^* \tilde{I}(AX, Y) = \Psi^* \tilde{I}(-\Psi^{-1}d\gamma X, Y) = \\ &= \tilde{I}(-d\gamma X, \Psi Y) = \langle d\tilde{\gamma}d\gamma X, Y \rangle = \langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

ja que  $\tilde{\gamma} \circ \gamma = \text{id}$ . □

**Corol·lari 2.3.9.** *Si  $\sigma_r(x)$  i  $\tilde{\sigma}_r(\gamma(x))$  són les funcions simètriques de curvatura de  $S \subset \mathbb{H}^n$  i  $\gamma(S) \subset \Lambda^n$ , en els punts  $x$  i  $\gamma(x)$  respectivament,*

$$\sigma_r(x) = \sigma_{n-1}(x) \tilde{\sigma}_{n-r}(\gamma(x)).$$

*Demostració.* Escollim una base que diagonalitzi  $\mathbb{I}$  i automàticament  $\tilde{\mathbb{I}}$  diagonalitza amb coeficients inversos. Per tant,

$$\binom{n-1}{n-r} \tilde{\sigma}_{n-r} = f_{n-r}(1/k_1, \dots, 1/k_{n-1}) = \frac{f_r(k_1, \dots, k_{n-1})}{k_1 \cdots k_{n-1}} = \frac{\sigma_r}{\sigma_{n-1}} \binom{n-1}{r}$$

essent  $f_i$  el polinomi simètric elemental de grau  $i$ . □

## 2.4 Mesures de contacte.

A continuació presentem uns resultats obtinguts a [Teu86] sobre la mesura de plans tangents a una subvarietat de  $\mathbb{H}^n$  (o  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{S}^n$ ). Aquests resultats generalitzen (2.15) a plans de codimensió arbitrària. Seguidament donarem resultats anàlegs a  $\Lambda^n$ .

**Definició 2.4.1.** Si  $S \subset \mathbb{H}^n$  (o  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{S}^n$ ) és una hipersuperfície diferenciable, anomenem  $r$ -plans de *contacte* de  $S$  als que són tangents a  $S$  en algun punt. Denotem  $\mathcal{L}_r(S)$  el subconjunt de  $\mathcal{L}_r$  format per aquests  $r$ -plans.

Parametritzem  $\mathcal{L}_r(S)$  a través d'una aplicació de Gauss generalitzada. Considerem en primer lloc la varietat de dimensió  $(r+1)(n-r)-1$

$$G_r(S) = \{(p, V_r) \mid p \in S \quad V_r \in G(r, T_p S)\}$$

on  $G(r, T_p S)$  denota la grassmanniana dels subespais vectorials de dimensió  $r$  de  $T_p S$ . Definim l'aplicació de Gauss d'ordre  $r$

$$\begin{aligned} \gamma_r : G_r(S) &\longrightarrow \mathcal{L}_r \\ (p, V_r) &\longmapsto \exp_p(V_r). \end{aligned}$$

És clar que la imatge  $\gamma_r(G_r(S))$  és  $\mathcal{L}_r(S)$ , que és hipersuperfície de  $\mathcal{L}_r$  fora del conjunt de valors crítics. Pel teorema de Sard-Federer [Fed69, 3.4.3], aquest conjunt de valors crítics té mesura de Hausdorff de dimensió  $(r+1)(n-r)-1$  nul·la. Així,  $\mathcal{L}_r(S)$  és regular quasi a tot arreu. Allà on ho sigui, prenem l'element de volum de  $\mathcal{L}_r(S)$  definit per la contracció de  $dL_r$  amb un vector normal unitari  $n$ .

A  $G_r(S)$  prenem l'element de volum  $dG_r dp$ , producte exterior de l'element de volum de  $S$  amb l'element de volum natural de  $G(r, T_p S)$  a cada  $p$ .

**Teorema 2.4.1.** [Teu86] *La imatge recíproca de la contracció  $\iota_n dL_r$  a través de  $\gamma_r$  en el punt  $(p, V_r) \in G_r(S)$  és, llevat de signe*

$$\gamma_r^*(\iota_n dL_r) = |K_p(V_r)| dG_r dp$$

on  $K_p(V_r)$  és la curvatura normal de  $S$  en la direcció del subespai  $V_r \subset T_p S$ .

**Corol·lari 2.4.2.** [Teu86] *La mesura (amb signe) dels  $r$ -plans de contacte de  $S$  val*

$$\int_{\mathcal{L}_r(S)} \operatorname{sgn}(K_p(L_r)) dL_r = \operatorname{vol} G(r, n-1) \cdot M_r(S)$$

i per a qualsevol funció  $f$  definida a  $S$

$$\int_{\mathcal{L}_r(S)} f \cdot \operatorname{sgn}(K_p(L_r)) dL_r = \operatorname{vol} G(r, n-1) \int_S f(x) \sigma_r(x) dx$$

Per a l'esfera de de Sitter els resultats anteriors es generalitzen fàcilment com fem a continuació. Es tracta de resultats nous i amb interès propi però sobretot els presentem perquè seran útils més endavant.

Sigui  $S \subset \Lambda^n$  una hipersuperfície de tipus espai. Considerem el fibrat de les grassmanianes de  $S$

$$G_r(S) = \{(x, V_r) \mid V_r \in G(r, T_x S)\}$$

i l'aplicació

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_r : G_r(S) &\longrightarrow \mathcal{L}_r^s \\ (p, V_r) &\longmapsto \exp_p(V_r). \end{aligned} \quad (2.17)$$

La imatge de  $\tilde{\gamma}_r$  són els  $r$ -plans tangents a  $S$ ; denotem-la per  $\mathcal{L}_r^s(S)$ .

**Proposició 2.4.3.** *Si  $S$  és hipersuperfície de tipus espai, la imatge inversa per  $\tilde{\gamma}_r$  de la forma de volum a  $\mathcal{L}_r^s(S)$  en un punt regular  $(p, V_r) \in G_r(S)$  és*

$$\tilde{\gamma}_r^*(\iota_n dL_r^s) = |K_p(V_r)| dp dG(r, T_p S)$$

on  $n$  és un camp normal unitari a  $\mathcal{L}_r^s(S)$  i  $K_p(V_r)$  és la curvatura normal de  $S$  en la direcció  $V_r$ .

*Demostració.* Prenem una referència ortonormal (secció)  $h : U \rightarrow \mathcal{F}(\Lambda^n)$  en un obert  $U$  de  $\mathcal{L}_r^s(S)$  de forma que a cada  $\tilde{\gamma}_r(p, V_r)$

$$h_n = p \in S \quad \langle h_{n-r}, \dots, h_{n-1} \rangle = V_r \quad \langle h_1, \dots, h_{n-1} \rangle = T_p S.$$

Llavors

$$dL_r^s = \bigwedge \omega_0^h \wedge \bigwedge \omega_i^j \quad 0 < i \leq n-r-1 < h, j \leq n$$

És clar que  $n$ , el camp normal unitari a  $\mathcal{L}_r^s(S)$  és  $v_0^n$ . Per tant,

$$\iota_n dL_r^s = \bigwedge \omega_0^h \wedge \bigwedge \omega_i^j \quad 0 < i \leq n-r-1 < j \leq n \quad n-r \leq h \leq n-1$$

Com a conseqüència de la proposició 2.3.7, per tot  $v \in T_p S$ ,

$$\omega_0^i(dhv) = -\langle \Psi d\pi dh(v), h_i \rangle = \tilde{H}(v, h_i) = \tilde{H}\left(\sum_j \omega_j^n(dhv) h_j, h_i\right) = \sum_j \tilde{H}(h_i, h_j) \omega_j^n(dhv)$$

i per tant,

$$\omega_0^{n-r} \wedge \dots \wedge \omega_0^{n-1} = K(V) \omega_{n-r}^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n + \sum_{i=1}^{n-r-1} \omega_i^n \wedge \eta_i$$

per certs  $\eta_i$ . Finalment,

$$\iota_n dL_r^s = K(V) \bigwedge \omega_h^n \bigwedge \omega_i^j \quad 0 < i \leq n-r-1 < j \leq n-1 \quad 1 \leq h \leq n-1$$

□

**Corol·lari 2.4.4.** *El volum amb signe de  $\mathcal{L}_r^s(S)$  és*

$$\int_{\mathcal{L}_r^s(S)} \text{sgn}K(L_r) \iota_n dL_r^s = \text{vol}(G(r, n-1)) \int_S \sigma_r(x) dx$$

*i més en general, per una funció  $f$  a  $S$ ,*

$$\int_{\mathcal{L}_r^s(S)} f \cdot \text{sgn}K(L_r) \iota_n dL_r^s = \text{vol}(G(r, n-1)) \int_S f \sigma_r(x) dx. \quad (2.18)$$

*Demostració.* Integrar el resultat anterior i utilitzar la proposició (1.2.1) que és vàlida per ambients semi-riemannians. En efecte, es tracta d'una propietat general (algebraica) de les formes simètriques bilineals.  $\square$

## 2.5 Fórmula de Cauchy-Crofton a l'esfera de de Sitter.

Aquí provem una fórmula per a la integral del nombre de punts d'intersecció de les rectes de tipus espai amb una hipersuperfície de tipus espai a  $\Lambda^n$ . La fórmula relaciona directament aquesta integral amb el volum  $(n-1)$ -dimensional de la hipersuperfície. Aquests motius són suficients per a anomenar-la fórmula de Cauchy-Crofton a l'esfera de de Sitter. Tot i això, cal advertir que a primera vista la fórmula no és exactament anàloga a les fórmules de Cauchy-Crofton existents en espais de curvatura constant i en varietats riemannianes homogènies. Ja hem dit que en aquests ambients, aquestes són del tipus

$$\int_{\mathcal{L}} \#(L \cap S) dL = c \cdot \text{vol}(S) \quad (2.19)$$

on  $dL$  és una mesura en  $\mathcal{L}$ , l'espai de geodèsiques,  $S$  és una hipersuperfície i  $c$  és una constant. A l'esfera de de Sitter no existeix una tal fórmula ja que tot petit tros d'hipersuperfície és tallat per un conjunt de geodèsiques de mesura infinita, com hem vist a la proposició 2.3.2. En general, aquest mateix problema impedeix que hi hagi fórmules del tipus (2.19) en varietats semi-riemannianes.

Una manera de resoldre aquesta dificultat és la que apareix a [Teu82]. Es tracta de contar només les interseccions amb un angle inferior a un valor fixat. Això restringeix la integració a l'interior d'un compacte de  $L_1^s$ . Fent-ho així, es veu que la integral és finita i múltiple del volum de la hipersuperfície.

Aquí proposem un plantejament alternatiu que donarà una equació de tipus diferent però que té en compte totes les interseccions. El preu que paguem és que ens hem de restringir a hipersuperfícies de tipus espai  $S$  compactes, sense vora i pròpiament immerses (*embedded*) a  $\Lambda^n$ . Concretament provarem que

$$\int_{\mathcal{L}_s} (2 - \#(L_s \cap S)) dL_s = \frac{O_{n-2}}{n-1} (\text{vol}(S) - O_{n-1})$$

on denotem l'espai de rectes de tipus espai per  $\mathcal{L}_s$  enlloc de  $\mathcal{L}_1^s$ . Igualment  $L_s$  és una d'aquestes rectes i  $dL_s$  és la mesura invariant  $dL_1^s$ . Mantindrem aquesta notació més

simple durant la resta del text. Veurem que fora d'un compacte a  $\mathcal{L}_s$ , totes les rectes tallen  $S$  en 2 punts. Si per exemple  $S$  és la imatge de Gauss d'un convex de  $\mathbb{H}^n$ , quasi per tota recta la intersecció té dos punts o cap. En aquest cas estarem mesurant el conjunt de rectes que no tallen  $S$ .

La hipòtesi que  $S$  sigui tancada i de tipus espai és essencial per tal de garantir que l'integrand s'anulli fora d'un conjunt de mesura finita. El mateix motiu ens impedeix considerar subvarietats de codimensió més gran com per exemple corbes.

La demostració consisteix a estudiar les propietats variacionals dels dos membres de la igualtat.

**Proposició 2.5.1.** *Siguin  $S$  una hipersuperfície tancada i  $\varphi : S \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Lambda^n$ , una aplicació diferenciable tal que  $\varphi_t = \varphi(\cdot, t)$  és immersió pròpia (embedding) de tipus espai per cada  $t$ . Suposem a més, que  $\langle \partial\varphi/\partial t, n \rangle < 0$  per algun vector normal unitari  $n$ . Si  $S_t = \varphi_t(S)$  llavors*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\mathcal{L}_s} (\#(L_s \cap S_0) - \#(L_s \cap S_t)) dL_s = \frac{O_{n-2}}{n-1} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{vol}(S_t).$$

*Observació.* La hipòtesi sobre  $\partial\varphi/\partial t$  garanteix que els  $S_t$  són disjunts. Això simplifica la prova però més endavant quedarà clar (*a posteriori*) que aquesta hipòtesi no era necessària.

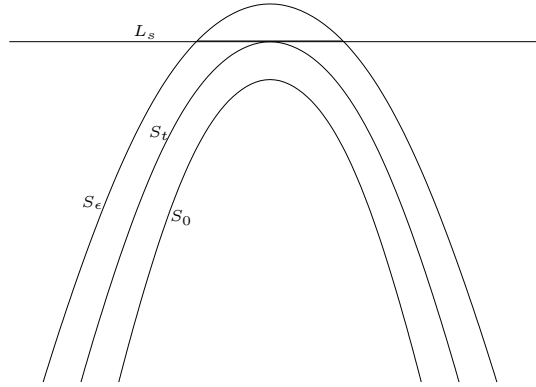


Figura 2.5: Tangència de tipus  $\mu^-$

*Demostració.* Per cada recta  $L_s$  denotem per  $C(L_s)$  el conjunt de punts on  $L_s$  és tangent a alguna hipersuperfície de la foliació  $\{S_t\}_{|t|<\epsilon}$ . Posem  $C(L_s) = C^+(L_s) \cup C^-(L_s)$  de forma que  $C^+(L_s)$  contingui els punts de tangència on  $L_s$  queda localment al costat oposat del normal  $n$  respecte  $S_t$  i  $C^-(L_s)$  contingui la resta de punts. Denotem  $\mu^+ = \#C^+$ ,  $\mu^- = \#C^-$  i definim  $\mu(L_s) = \mu^+(L_s) - \mu^-(L_s)$ . Ara si  $\epsilon$  és prou petit, per cada interval de  $L_s \cap (\cup_t S_t)$  amb extrems a  $S_0$  (que no talla  $S_\epsilon$ ), tenim una tangència de  $C^+$  i viceversa (cf. figura 2.5). Per cada segment amb extrems a  $S_\epsilon$  que no talla  $S_0$  tenim

una tangència de  $C^-$ . Així,

$$\int_{\mathcal{L}_s} (\#(L_s \cap S_0) - \#(L_s \cap S_t)) dL_s = \int_{\mathcal{L}_s} 2\mu dL_s$$

Ara considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} \gamma : G_1(S) \times (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow \mathcal{L}_s \\ ((p, l), t) &\longmapsto \exp_{\varphi_t(p)} l. \end{aligned}$$

Notem que  $\gamma_t = \gamma(\cdot, t) : G_1(S) \rightarrow \mathcal{L}_s$  coincideix amb l'aplicació definida a (2.17) i per tant les hipersuperfícies  $\mathcal{L}_s(S_t) = \gamma_t(G_1(S)) \subset \mathcal{L}_s$  estan formades per les rectes tangents a  $S_t$ . Per la fórmula de l'àrea,

$$2 \int_{\mathcal{L}_s} \mu dL_s = -2 \int_0^\epsilon \int_{G_1(S)} \operatorname{sgn} K(L_s) \gamma^* dL_s.$$

Ara bé,

$$\gamma^* dL_s = \iota_{\partial t} \gamma^*(dL_s) dt = \gamma_t^*(\iota_{d\gamma \partial t} dL_s) dt.$$

Pel teorema fonamental del càlcul i gràcies a (2.18)

$$\begin{aligned} 2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \int_{G_1(S)} \operatorname{sgn} K(L_s) \gamma_t^*(\iota_{d\gamma \partial t} dL_s) dt &= 2 \int_{G_1(S)} \operatorname{sgn} K(L_s) \gamma_0^*(\iota_{d\gamma \partial t} dL_s) = \\ &= -2 \int_{G_1(S)} \operatorname{sgn} K(L_s) \langle d\gamma \partial t, N \rangle \gamma_0^*(\iota_N dL_s) = -2 \frac{O_{n-2}}{2} \int_{S_0} \langle d\gamma \partial t, N \rangle \sigma_1(x) dx \end{aligned}$$

on  $N$  és el camp unitari normal a  $\mathcal{L}_s(S_0)$  de forma que  $\iota_N dL_s$  és l'element de volum induït per l'ambient. El signe menys que apareix es deu al fet que, com veurem,  $\langle d\gamma \partial t, N \rangle$  és negatiu i treballarem amb densitats que són positives.

Per altra banda, la fórmula de primera variació del volum diu (cf. [Spi79])

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \operatorname{vol}(S_t) = \int_{S_0} \langle \partial \varphi / \partial t, n \rangle (n-1) \sigma_1(x) dx$$

on  $\sigma_1$  denota la curvatura mitja de  $S_0$ . Notem que hi ha un canvi de signe respecte la fórmula de variació clàssica ja que  $\langle n, n \rangle < 0$ .

Prenem una referència mòbil  $g : G_1(S) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G$  tal que  $\varphi = \tilde{\pi} \circ g$  i  $\gamma = \pi_{n-2} \circ g$ . Llavors,

$$\langle d\gamma \partial t, N \rangle = \langle d\pi_{n-2} \frac{\partial g}{\partial t}, d\pi_{n-2} v_0^n \rangle = \left\langle \frac{\partial g}{\partial t}, v_0^n \right\rangle = \left\langle d\tilde{\pi} \frac{dg}{dt}, d\tilde{\pi} v_0^n \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, n \right\rangle$$

que és precisament el que ens calia veure.  $\square$

**Corol·lari 2.5.2.** *Siguin  $R$  i  $S$  dues hipersuperfícies pròpiament immerses a  $\Lambda^n$  i de tipus espai. Llavors*

$$\int_{\mathcal{L}_s} (\#(L_s \cap S) - \#(L_s \cap R)) dL_s = \frac{O_{n-2}}{n-1} (\operatorname{vol}(R) - \operatorname{vol}(S))$$

*Demostració.* Prenem  $B \subset \mathbb{H}^n$  una bola prou gran per tal que tot hiperplà  $L \in R$  talli  $B$ . Prenem  $S' \subset \Lambda^n$  la hipersuperfície formada pels hiperplans tangents a  $\partial B$  orientats pel normal exterior. Considerem els feixos d'hiperplans ortogonals als diàmetres de  $B$ . Formen una foliació de  $\Lambda^n$  per geodèsiques de tipus temps. Com que  $R$  és de tipus espai, és transversa a aquesta foliació. Per tant, podem deformar homòtopament  $S'$  a  $R$  seguint els fulls d'aquesta foliació. Aplicant la proposició anterior i integrant obtenim el resultat per  $R$  i  $S'$ .

Per  $R$  i  $S$  arbitraris prenem una bola  $B$  prou gran per tots dos i la hipersuperfície  $S'$  corresponent. Apliquem el resultat a  $R$  i  $S'$  i a  $S$  i  $S'$ . Finalment, fem la diferència.  $\square$

**Corol·lari 2.5.3.** *[Fórmula de Crofton a l'esfera de de Sitter] Sigui  $S$  una hipersuperfície pròpiament immersa a  $\Lambda^n$  i de tipus espai. Llavors*

$$\int_{\mathcal{L}_s} (2 - \#(L_s \cap S)) dL_s = \frac{O_{n-2}}{n-1} (\text{vol}(S) - O_{n-1})$$

*Demostració.* Escollim un punt  $p \in \mathbb{H}^n$  qualsevol i apliquem el corol·lari anterior amb  $R = \{L \in \Lambda^n | p \in L\}$ . Hem acabat si notem que quasi tota recta de tipus espai talla  $R$  en dos punts.  $\square$





## Capítol 3

# Curvatura total

### 3.1 Teorema de Gauss-Bonnet a l'espai euclidià

En aquest capítol estudiarem la integral de la curvatura de Gauss d'una hipersuperfície tancada a l'espai hiperbòlic. Concretament donarem una demostració del teorema de Gauss-Bonnet per aquestes hipersuperfícies utilitzant els mètodes de la geometria integral. Abans, serà convenient tractar els casos euclidià i esfèric. En aquesta secció recordem breument el teorema de Gauss-Bonnet per a hipersuperfícies de l'espai euclidià. Quan aquest espai té dimensió senar, tenim la versió més coneguda d'aquest teorema que és deguda a Hopf.

**Teorema 3.1.1.** [Hop25] Si  $i : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  és una immersió de classe  $C^2$  d'una hipersuperfície tancada (compacta i sense vora) a  $\mathbb{R}^n$  amb  $n$  senar, llavors la integral de la curvatura de Gauss de  $S$  és

$$\int_S K dx = \frac{O_{n-1}}{2} \chi(S)$$

on  $dx$  és la mesura en  $S$  induïda per  $i$ .

És una conseqüència gairebé directa del teorema dels índexos de Poincaré-Hopf. Donem la demostració ja que presenta similituds amb el que seguirà.

*Demostració.* Com que  $S$  pot no ser orientable ens convé prendre el seu fibrat normal unitari  $N(S) = \{(p, n) \in S \times \mathbb{S}^{n-1} \mid n \perp di(T_p S)\}$ . Tenim una aplicació de Gauss  $\gamma : N(S) \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  entre varietats orientades definida per  $\gamma(p, n) = n$ . La curvatura de  $S$  és, per definició,  $K = -\det d\gamma$ . Notem que, en ser la dimensió de  $S$  parell,  $K$  pren el mateix valor a  $n$  i a  $-n$ . Per la fórmula del canvi

$$\int_S K dx = \frac{1}{2} \int_{N(S)} K dx = -\deg(\gamma) \frac{O_{n-1}}{2}.$$

La demostració es redueix al càlcul de  $\deg(\gamma)$ , el grau de l'aplicació de Gauss. Siguin  $y, -y \in \mathbb{S}^{n-1}$  valors regulars de  $\gamma$ . Considerem a  $N(S)$  el camp  $X = y - \langle y, \gamma \rangle \gamma$ , projecció

ortogonal de  $y$  al tangent de  $i(S)$ . Els zeros de  $X$  són els punts de  $\gamma^{-1}(\{y, -y\})$  i són no-degenerats. Si  $X$  s'anul·la a  $(p, n)$ , llavors  $n = \pm y$  i

$$(dX)_{(p,n)} = -(\text{grad}\langle y, \gamma \rangle)_{(p,n)}^t \cdot n - \langle y, n \rangle (d\gamma)_{(p,n)} = -\langle y, n \rangle (d\gamma)_{(p,n)} \quad (3.1)$$

ja que  $\langle y, \gamma \rangle$  és màxim o mínim a  $(p, n)$ . En particular  $dX(T_p S) \subset di(T_p S)$ . Per ser no degenerat, l'índex  $\iota$  de  $X$  en  $(p, n)$  és  $\pm 1$ , segons el signe del determinant de (l'endomorfisme)  $dX$  (cf.[Mil97]). Però aquest és  $-\det d\gamma$  i pel teorema de Poincaré-Hopf,

$$\chi(N(S)) = \sum_{(p,n) \in \gamma^{-1}(\pm y)} \iota(p, n) = -2 \sum_{x \in \gamma^{-1}(y)} \text{sgn}(\det d\gamma)_x = -2 \text{deg} \gamma.$$

Acabem la demostració notant que  $\chi(N(S)) = 2\chi(S)$ . □

El teorema anterior demana que la dimensió de l'ambient sigui senar però existeix una versió per a dimensions arbitràries. En aquest cas cal suposar que la hipersuperfície és pròpiament immersa (*embedded*) o equivalentment, que és vora d'algun domini. Aquest teorema és igualment degut a Hopf tot i que això és menys conegut.

**Teorema 3.1.2.** [Hop27, p.248, Satz VI] *Si  $S = \partial Q$  és hipersuperfície compacta de classe  $C^2$  a  $\mathbb{R}^n$ , llavors la integral de la curvatura de Gauss de  $S$  respecte al normal interior és*

$$\int_S K dx = O_{n-1} \chi(Q). \quad (3.2)$$

Recordem que si  $n$  és senar i  $S = \partial Q$  llavors  $\chi(S) = 2\chi(Q)$ . La condició de ser vora és necessària. En general, per hipersuperfícies immerses de dimensió senar no és cert que la topologia determini la integral de curvatura. Per exemple, la integral de curvatura d'una corba plana tancada pot prendre molts valors diferents si no li demanem que sigui simple.

A continuació donarem la demostració de (3.2) que apareix a [Got96]. Aquesta és altre cop molt simple però utilitza la següent generalització del teorema de Poincaré-Hopf deguda a M. Morse.

**Teorema 3.1.3.** [Mor29] *Sigui  $X$  un camp diferenciable en una varietat  $N$  amb vora  $M = \partial N$ . Suposem que  $X$  no té zeros a  $M$  i que coincideix amb el normal interior només en punts aïllats de  $M$ . Llavors la suma  $\text{Ind} X$  dels índexos dels punts singulars de  $X$  és*

$$\text{Ind} X = \chi(N) - \text{Ind}_- \partial X$$

on  $\text{Ind}_- \partial X$  és la suma dels índexos de la projecció de  $X$  a  $M$  en les singularitats on  $X$  és (normal) interior.

*Demostració (del teorema 3.1.2).* Com abans, només ens cal calcular el grau de l'aplicació de Gauss. Aquest cop però, triem l'aplicació de Gauss  $\gamma : S \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  que associa el normal interior. Prenem  $y \in \mathbb{S}^{n-1}$  un valor regular de  $\gamma$ . Ara apliquem el teorema

anterior al camp constant  $X \equiv y$  definit sobre el domini  $Q$ . Clarament els punts de  $\partial Q$  on  $X$  és normal interior són les antiimatges de  $y$ . L'equació (3.1) prova que els índexos de la projecció de  $X$  en aquests punts coincideixen amb el signe de  $-\det d\gamma$ . Per tant, com que  $X$  no és nul enlloc,

$$\chi(Q) = \text{Ind}_- \partial X = -\text{deg} \gamma.$$

□

El fet que per  $S$  de dimensió parell n'hi hagués prou amb tenir immersió, va fer sospitar a Hopf de l'existència d'un teorema de Gauss-Bonnet *intrínsec* per a varietats abstractes de dimensió parell. Uns anys més tard, Allendoerfer i Fenchel van provar una versió per a varietats de dimensió parell immerses en espais euclidians. Finalment Chern va provar el teorema de Gauss-Bonnet per a varietats abstractes de dimensió parell a [Che44] generalitzant-lo al cap de poc per a varietats amb vora [Che45]. Així, el teorema 3.1.1 és conseqüència d'aquest teorema intrínsec mentre que el teorema 3.1.2 s'obté aplicant la versió per a varietats amb vora al domini interior  $Q$ .

Tot i això, és bo tenir presents les demostracions elementals que acabem de donar. A part de raons 'estètiques', cal tenir en compte que aquests mètodes extrínsecs deriven en certes qüestions amb interès propi, com l'estudi de la curvatura total absoluta, que no admeten reformulacions intrínseques.

En la secció següent presentem una demostració extrínseca del teorema de Gauss-Bonnet per a hipersuperfícies de  $\mathbb{S}^n$ , deguda a Teufel (cf. [Teu80]) i basada en mètodes de geometria integral. Després de veure aquesta prova, quedarà clar perquè aquest mètode no es podia aplicar a l'espai hiperbòlic. Tot i així, amb les mateixes idees que han donat lloc a la fórmula de Crofton a l'esfera de de Sitter, podrem completar els arguments utilitzats al cas esfèric per obtenir la fórmula de Gauss-Bonnet a l'espai hiperbòlic fent ús únicament de la geometria integral. El primer pas serà trobar unes fórmules de variació per a les Quermassintegrale  $W_i$  que tenen interès en si mateixes.

Altre cop, cal dir que el teorema de Gauss-Bonnet a  $\mathbb{S}^n$  i  $\mathbb{H}^n$  s'obté fàcilment de la versió intrínseca (amb vora si cal). Tot i així, en aquestes geometries més encara que en l'euclidiana, a l'obtenir-lo de manera extrínseca, apareixen amb tota claredat certs aspectes remarcables que treballant intrínsecament queden amagats.

Finalment, aquest tipus d'idees donarà lloc a una fórmula per a la curvatura total absoluta de certa classe d'immersions a l'espai hiperbòlic anomenades *tenses*. Aquest resultat és totalment nou i permetrà provar que la desigualtat de Chern-Lashof també és vàlida per immersions tenses de tors a l'espai hiperbòlic.

## 3.2 Teorema de Gauss-Bonnet a l'esfera

A continuació, seguint [Teu80] relacionem la curvatura total d'una hipersuperfície pròpiament immersa a  $\mathbb{S}^n$  amb la integral de la característica d'Euler de les interseccions del seu interior amb  $(n - 2)$ -plans geodèsics. Només en el cas on  $n$  és senar podrem generalitzar el resultat a immersions, tal com passa amb el teorema de Gauss-Bonnet per hipersuperfícies de  $\mathbb{R}^n$ .

Donat  $L_{n-2}$  un  $(n-2)$ -pla geodèsic de  $\mathbb{S}^n$  orientat, considerem el feix de ‘mitjos’ hiperplans que el tenen com a vora. Parametritzant aquest feix per un valor angular tindrem una funció

$$h_L : \mathbb{S}^n \setminus L_{n-2} \longrightarrow S^1.$$

**Proposició 3.2.1.** [Teu80] *Sigui  $i : S \rightarrow \mathbb{S}^n$  una hipersuperfície immersa orientada per un vector normal unitari  $n$ . La integral de curvatura ve donada per*

$$M_{n-1}(S) = \frac{n-1}{O_{n-2}} \int_{\mathcal{L}_{n-2}^+} \mu(L_{n-2}, S) dL_{n-2}$$

on  $\mathcal{L}_{n-2}^+$  és l’espai d’ $(n-2)$ -plans orientats i  $\mu(L_{n-2}, S)$  és la suma dels índexos de Morse d’aquells punts crítics de  $h_L \circ i$  en els que  $\text{grad}h_L$  coincideix amb  $n$ .

*Demostració.* En primer lloc, si  $\gamma : S \rightarrow \mathbb{S}^n$  és l’aplicació de Gauss ( $\gamma(x) = n_x$ ), la curvatura total de  $S$  és el volum (amb signe) de la ‘hipersuperfície dual’  $\gamma(S)$  (cf. [Teu82])

$$M_{n-1}(S) = \int_{\gamma(S)} \text{sgn}(K(x)) dx.$$

Notem que  $\gamma(S)$  és diferenciable fora d’un conjunt de mesura nul·la. Ara, per la fórmula de Cauchy-Crofton (2.6),

$$\int_{\gamma(S)} \text{sgn}(K(x)) dx = \frac{n-1}{O_{n-2}} \int_{\mathcal{L}_1} \sum_{x \in l \cap \gamma(S)} \text{sgn}(K(x)) dl$$

on  $\mathcal{L}_1$  és l’espai des cercles màxims  $l$  de  $\mathbb{S}^n$ . Per cada cercle  $l$  determinat per un pla  $P$  considerem l’ $(n-2)$ -pla polar  $L_{n-2} = P^\perp \cap \mathbb{S}^n$ . Així, les interseccions de  $l$  amb  $\gamma(S)$  corresponen a punts de  $S$  on  $\text{grad}h_L$  coincideix amb  $n$  per alguna del les dues orientacions possibles del pla  $L_{n-2}$ . Així,

$$M_{n-1}(S) = \frac{n-1}{O_{n-2}} \int_{\mathcal{L}_{n-2}^+} \sum \text{sgn}(K(x)) dL_{n-2}.$$

on el sumatori es fa sobre els punts  $x$  on  $n$  coincideix amb el gradient de  $h_L \circ i$ . Un càlcul semblant a (3.1) mostra que el signe de  $K$  en aquests punts és l’índex de Morse de  $h_L \circ i$ .  $\square$

Suposem  $S \subset \mathbb{S}^n$  hipersuperfície tancada pròpiament immersa. Aleshores,  $S$  és la vora d’algun domini  $Q$ . Orientem  $S$  amb el normal interior  $n$ . Per tot  $(n-2)$ -pla genèric (i.e. fora d’un conjunt de mesura nul·la), la suma dels índexos de tangència  $\mu$  està determinada per la topologia de la intersecció del  $(n-2)$ -pla amb  $Q$ .

**Proposició 3.2.2.** [Teu80] *Si  $L_{n-2}$  és un  $(n-2)$ -pla geodèsic orientat en posició genèrica respecte  $S = \partial Q \subset \mathbb{S}^n$  (o  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{H}^n$ ) llavors la suma dels índexos d’aquells punts crítics de  $h_L|_S$  en els que  $\text{grad}h_L$  és interior és*

$$\mu(L_{n-2}, S) = \chi(Q) - \chi(Q \cap L_{n-2}).$$

Donem una demostració més curta que la de [Teu80] utilitzant la fórmula de Morse del teorema 3.1.3.

*Demostració.* La condició de genericitat ens permet suposar que  $h_L|_S$  és de Morse i també que  $L_{n-2}$  és transvers a  $S$ . Prenem un entorn tubular  $L_{n-2}^\epsilon$  de  $L_{n-2}$  que no contingui cap punt crític de  $h_L|_S$  i de forma que  $L_{n-2}^\epsilon \cap Q$  sigui retracte de deformació de  $L_{n-2} \cap Q$ . Considerem el camp  $X$  gradient de  $h_L$  definit a  $\mathbb{S}^n \setminus L_{n-2}^\epsilon$ . El gradient de la restricció de  $h_L$  a  $S$  és justament la projecció ortogonal de  $X$  a  $T_p S$ ; denotem-la  $\partial X$ . Als punts singulars, l'índex del camp gradient d'una funció coincideix amb l'índex de Morse d'aquesta. Per tant,  $\mu(L_{n-2}, S)$  és la suma dels índexos de  $\partial X$  en aquells punts singulars on  $X$  és (normal) interior. Apliquem el teorema 3.1.3 prenent com a varietat  $N = Q \setminus L_{n-2}^\epsilon$  (o una petita modificació  $C^\infty$  d'aquesta). Com que  $X$  no és nul enlloc, tenim

$$\mu(L_{n-2}, S) = \text{Ind}_{\partial X} = \chi(N) = \chi(Q \setminus L_{n-2}^\epsilon).$$

Per l'additivitat de la característica d'Euler, acabem la demostració amb

$$\chi(Q \setminus L_{n-2}^\epsilon) = \chi(Q) - \chi(L_{n-2}^\epsilon \cap Q) = \chi(Q) - \chi(L_{n-2} \cap Q)$$

ja que  $L_{n-2}$  és retracte de deformació de  $L_{n-2}^\epsilon$ . □

En particular hem vist que  $\mu(L_{n-2}, S)$  no depèn de l'orientació de  $L_{n-2}$ . Així, a 3.2.1 no ens cal orientar els  $(n-2)$ -plans i tenim

$$M_{n-1}(S) = \frac{2(n-1)}{O_{n-2}} \int_{\mathcal{L}_{n-2}} (\chi(Q) - \chi(L_{n-2} \cap Q)) dL_{n-2}.$$

Com que  $\mathcal{L}_{n-2} = G(n-1, n+1)$  i

$$\text{vol}(G(r, n)) = \frac{O_{n-1} \cdots O_{n-r}}{O_{r-1} \cdots O_0},$$

de la definició dels  $W_i(Q)$  obtenim el següent resultat.

**Corol·lari 3.2.3.** [Teu80] *Si  $S = \partial Q \subset \mathbb{S}^n$  és diferenciable llavors*

$$M_{n-1}(S) = O_{n-1} \chi(Q) - \frac{n(n-1)}{2} W_{n-2}(Q)$$

Aquesta relació es pot fer baixar a codimensions més grans. És a dir, les integrals de curvatura mitja també s'expressen en funció de només dues Quermassintegrale. Aquest fet, que no es menciona a [Teu80], és força sorprenent i mostra que la relació entre integrals de curvatura mitja i Quermassintegrale és molt més directa del que podien fer pensar les equacions (2.10) i (2.11).

**Corol·lari 3.2.4.** *Si  $S = \partial Q$  és diferenciable,*

$$M_r(S) = n \left( W_{r+1}(Q) - \frac{r}{n-r+1} W_{r-1}(Q) \right).$$

*Demostració.* Per gairebé tot  $r$ -pla geodèsic  $L_r$ , la intersecció  $Q \cap L_r$  té vora diferenciable. Apliquem el teorema anterior i tenim

$$M_{r-1}(S \cap L_r) = O_{r-1} \chi(L_r \cap Q) - \frac{r(r-1)}{2} W_{r-2}(Q \cap L_r).$$

Si integrem respecte  $L_r$  tenim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}_r} M_{r-1}(S \cap L_r) dL_r &= O_{r-1} \int_{\mathcal{L}_r} \chi(L_r \cap Q) dL_r - \frac{r(r-1)}{2} \int_{\mathcal{L}_r} W_{r-2}(Q \cap L_r) dL_r = \\ &= O_{r-1} \int_{\mathcal{L}_r} \chi(L_r \cap Q) dL_r - \frac{(r-1) \cdot O_0}{O_{r-2}} \int_{\mathcal{L}_r} \int_{\mathcal{L}_{[r](r-2)}} \chi(L_{r-2} \cap Q) dL_{[r](r-2)} dL_r \end{aligned} \quad (3.3)$$

on  $\mathcal{L}_{[r](r-2)}$  és l'espai de  $(r-2)$ -plans continguts a  $L_r$  i  $dL_{[r](r-2)}$  és la mesura corresponent. Però la igualtat (2.5) dona

$$dL_{[r](r-2)} dL_r = dL_{r[r-2]} dL_{r-2}$$

on  $dL_{r[r-2]}$  és la mesura natural a l'espai dels  $r$ -plans que contenen  $L_{r-2}$ . Per tant,

$$\int_{\mathcal{L}_r} \int_{\mathcal{L}_{[r](r-2)}} \chi(L_{r-2} \cap Q) dL_{[r](r-2)} dL_r = \frac{O_{n-r+1} O_{n-r}}{O_1 O_0} \int_{\mathcal{L}_{r-2}} \chi(L_{r-2} \cap Q) dL_{r-2}.$$

D'altra banda, per la propietat reproductiva de les integrals de curvatura mitja (cf. proposició 2.2.4),

$$\int_{\mathcal{L}_r} M_{r-1}(S \cap L_r) dL_r = \frac{O_{n-2} \cdots O_{n-r} O_{n-r+1}}{O_{r-2} \cdots O_0 O_1} M_{r-1}(S).$$

Substituint les dues darreres equacions a 3.3 obtenim la fórmula buscada.  $\square$

Aquestes fórmules donen lloc a una nova demostració de les equacions (2.10) i (2.11) per curvatura  $k = 1$  (i per tot  $k > 0$ ). Val la pena de dir que hem trobat una via totalment diferent (i prou bonica) d'obtenir aquest resultat. A més, la demostració de [San76] utilitzava de forma essencial el teorema de Gauss-Bonnet, cosa que nosaltres no hem fet.

*Demostració (de la proposició 2.2.5 a  $\mathbb{S}^n$ ).* Utilitzar la recurrència

$$W_{r+1}(Q) = \frac{1}{n} M_r(\partial Q) + \frac{r}{n-r+1} W_{r-1}(Q)$$

i s'acaba gràcies a

$$W_1(Q) = \frac{1}{n} M_0(\partial Q) \quad W_0(Q) = V \quad W_n(Q) = \frac{O_{n-1}}{n} \chi(Q).$$

$\square$

Però fixem-nos que per  $r = n$  les igualtats (2.10) i (2.11) són la fórmula de Gauss-Bonnet per varietats pròpiament immerses a  $\mathbb{S}^n$ ! Repetim que clàssicament s'utilitzava el teorema de Gauss-Bonnet per obtenir les fórmules (2.10) i (2.11). Aquí, al contrari, hem provat les mateixes fórmules independentment i en particular la de Gauss-Bonnet. També es pot deduir el teorema de Gauss-Bonnet directament per inducció a partir del corollari 3.2.3 tal i com es fa a [Teu80].

**Teorema 3.2.5 (Teorema de Gauss-Bonnet a  $\mathbb{S}^n$ ).** *Sigui  $Q \subset \mathbb{S}^n$  un domini amb vora  $\partial Q$  compacta i de classe  $C^2$ . Si  $n$  és parell i  $V$  denota el volum de  $Q$ ,*

$$c_{n-1}M_{n-1}(\partial Q) + c_{n-3}M_{n-3}(\partial Q) + \cdots + c_1M_1(\partial Q) + V = 1/2O_n\chi(Q).$$

*Si  $n$  és senar,*

$$c_{n-1}M_{n-1}(\partial Q) + c_{n-3}M_{n-3}(\partial Q) + \cdots + c_2M_2(\partial Q) + M_0(\partial Q) = 1/2O_n\chi(Q).$$

*Les constants  $c_h$  són*

$$c_h = \binom{n-1}{h} \frac{O_n}{O_h O_{n-1-h}}.$$

### Immersiones no pròpies

Suposem aquí que  $i : S \rightarrow \mathbb{S}^n$  és una immersió no necessàriament pròpia d'una hipersuperfície; i.e. potser amb autointerseccions. Per donar resultats anàlegs als anteriors caldrà restringir la paritat d'algunes dimensions. Així mateix, ens fa falta una definició.

**Definició 3.2.1.** Sigui  $i : S \rightarrow \mathbb{S}^n$  (o  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{H}^n$ ) una hipersuperfície immersa. Quan  $r$  sigui senar definim

$$W_r(S) = \frac{1}{2} \frac{(n-r)O_{r-1} \cdots O_0}{n \cdot O_{n-2} \cdots O_{n-r-1}} \int_{\mathcal{L}_r} \chi(i^{-1}L_r) dL_r.$$

Notem que si  $S = \partial Q$  llavors  $W_r(S) = W_r(Q)$  ja que  $\chi(L_r \cap S) = 2\chi(L_r \cap Q)$ .

Suposem a partir d'aquí que  $n$  és senar. La proposició 3.2.1 és vàlida per immersiones en general però hem d'aclarir la qüestió de l'orientació. Prenent el fibrat normal unitari  $N(S) = \{(p, n) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \mid n \perp di(T_p S)\}$ , tenim una immersió  $i : N(S) \rightarrow \mathbb{S}^n$  i un normal ben definit a cada punt de  $N(S)$ . Com que la dimensió de  $S$  és parell, la curvatura no depèn del normal escollit. Pel mateix motiu, l'índex dels punts crítics de les funcions  $h_L \circ i$  no depèn de l'orientació dels  $(n-2)$ -plans  $L_{n-2}$ . Per tant,

$$\begin{aligned} \int_S K dp &= \frac{1}{2} \int_{N(S)} K dp = \\ &= \frac{n-1}{2O_{n-2}} \int_{\mathcal{L}_{n-2}^+} \mu(L_{n-2}, S) dL_{n-2} = \frac{n-1}{O_{n-2}} \int_{\mathcal{L}_{n-2}} \mu(L_{n-2}, S) dL_{n-2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

entenent que, quan  $L_{n-2}$  és no orientat,  $\mu(L_{n-2}, S)$  denota la suma dels índexos de tots els punts crítics de  $h_L \circ i$ . Pel que fa a la proposició 3.2.2, aquesta fa referència al domini interior que només existeix si la immersió és pròpia. Per això, ens cal substituir aquesta proposició per la següent.

**Proposició 3.2.6.** *Siguin  $i : S \rightarrow \mathbb{S}^n$  (o  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{H}^n$ ) una hipersuperfície immersa a  $L_{n-2}$  un  $(n-2)$ -pla (no orientat) en posició genèrica respecte  $i(S)$ . La suma dels índexos de la restricció de  $h_L \circ i$  és*

$$\mu(S, L_{n-2}) = \chi(S) - \chi(i^{-1}L_{n-2}) \quad (3.5)$$

Aquí no cal que  $n$  sigui senar. Si  $n$  és parell, com que  $\chi(S) = \chi(i^{-1}L_{n-2}) = 0$ , obtenim que la suma total dels índexos de  $h_L \circ i$  és sempre 0.

*Demostració.* Considerem el camp  $X$  gradient de  $h_L \circ i$  definit a  $S$ . Com que  $L_{n-2}$  està en posició genèrica, podem escollir un entorn tubular  $L_{n-2}^\epsilon$  que no contingui cap zero de  $diX$ . Sigui  $N = S \setminus i^{-1}L_{n-2}$ . Notem que  $X$  no és ortogonal a  $\partial N$  enlloc. Per la fórmula de Morse, la suma dels índexos de  $X$  a  $N$  val

$$\mu(S, L_{n-2}) = \chi(N) = \chi(S \setminus i^{-1}L_{n-2}^\epsilon) = \chi(S) - \chi(i^{-1}L_{n-2}^\epsilon) = \chi(S) - \chi(i^{-1}L_{n-2})$$

ja que, per  $\epsilon$  prou petit,  $i^{-1}L_{n-2}^\epsilon$  és retracte de deformació de  $i^{-1}L_{n-2}$ .  $\square$

Substituint (3.5) a (3.4) tenim, per  $n$  senar,

$$\begin{aligned} M_{n-1}(S) &= \frac{n-1}{O_{n-2}} \left( \frac{O_n O_{n-1}}{O_1 O_0} \chi(S) - \int_{\mathcal{L}_{n-2}} \chi(S \cap L_{n-2}) dL_{n-2} \right) = \\ &= nW_n(S) - \frac{n(n-1)}{2} W_{n-2}(S). \end{aligned}$$

Igual que per les immersions pròpies, podem utilitzar les propietats de reproductibilitat i obtenir que

$$M_r(S) = n \left( W_{r+1}(S) - \frac{r}{n-r+1} W_{r-1}(S) \right).$$

Per tant, deduïm que la fórmula (2.11) també val per hipersuperfícies immerses ja que els plans que hi intervenen són de dimensió senar. En particular, també hem provat el teorema de Gauss-Bonnet per hipersuperfícies immerses en esferes de dimensió senar.

Arribats a aquest punt, la intenció més natural és la de repetir el mateix procés amb l'espai hiperbòlic com a ambient. El primer pas seria relacionar la curvatura total amb el volum de la imatge per l'aplicació de Gauss. Ja hem vist al capítol 2 que això funciona tan bé a l'espai hiperbòlic com a l'eucldià o l'esfèric. La única peculiaritat és que en el cas hiperbòlic, l'aplicació de Gauss té arribada a l'esfera de de Sitter. El següent pas és utilitzar la fórmula de Cauchy-Crofton per calcular aquest volum. És clar que és aquí on sorgeixen les dificultats. Ja hem dit que la fórmula de Cauchy-Crofton usual no és vàlida a l'esfera de de Sitter. A [Teu82] es donava una versió alternativa d'aquesta fórmula que donava una manera de calcular la curvatura total d'immersions a l'espai hiperbòlic. Malgrat tot, aquest mètode no donava lloc al teorema de Gauss-Bonnet.

Per això, el fet d'haver trobat una nova fórmula de Cauchy-Crofton per hipersuperfícies de tipus espai a l'esfera de de Sitter ens ha de donar esperances. No podem



utilitzar directament el teorema 2.5.3 ja que la imatge de Gauss no és una immersió (pot degenerar en alguns punts). Tot i així, en les dues seccions següents utilitzem les idees de la secció 2.5 per completar l'estudi de la curvatura total a l'espai hiperbòlic.

### 3.3 Fórmules de variació.

Fem un petit parèntesi per trobar algunes fórmules de primera variació. Aquestes seran una peça clau per a continuar l'estudi de la curvatura total però, a més, tenen interès per elles mateixes. Concretament estudiem la variació de les Quermassintegrals  $W_r(Q)$  quan es fa una perturbació del domini  $Q$ . Si un pla  $L_r$  talla  $\partial Q$  transversalment, en fer una perturbació infinitesimal de  $Q$ , la intersecció  $Q \cap L_r$  no canviarà de topologia. Així doncs, ja es preveu que la variació de  $W_r(Q)$  estarà relacionada amb la mesura d' $r$ -plans tangents i per tant seran necessaris els resultats de la secció 2.4.

Ens interessa el cas hiperbòlic però tot el que fem en aquesta secció funciona igual a  $\mathbb{R}^n$  i  $\mathbb{S}^n$ . Per tant, treballarem amb totes tres geometries alhora sense necessitat de fer cap comentari addicional.

Comencem amb la situació següent. Sigui  $\varphi : Q \times I \rightarrow \mathbb{H}^n$  (o  $\mathbb{R}^n$ , o  $\mathbb{S}^n$ ) una aplicació diferenciable tal que per cada  $t \in I = (-\epsilon, \epsilon)$ , la restricció  $\varphi_t = \varphi(\cdot, t)$  és injectiva. Denotem  $Q_t = \varphi_t(Q)$  i diem que formen una *deformació* de  $Q_0$ . És clar que  $\varphi_t$  és una immersió pròpia de  $S = \partial Q$  i que la imatge  $S_t = \varphi_t(S) = \partial Q_t$ .

**Proposició 3.3.1.** *Si  $Q_t$  és una deformació d'un domini  $Q_0$ , per un  $r$ -pla  $L_r$  genèric i  $0 < t_0 < \epsilon$*

$$\chi(L_r \cap Q_{t_0}) - \chi(L_r \cap Q_0) = - \sum \operatorname{sgn} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \mathbf{n} \right\rangle \operatorname{sgn} K(L_r)$$

on el sumatori es fa sobre els punts  $\varphi_t(x)$  on  $L_r$  és tangent a  $S_t$  per un  $t \in (0, t_0)$  i  $K(L_r)$  és la curvatura normal de  $S_t$  en la direcció de  $T_{\varphi(x,t)} L_r$  i respecte al normal interior  $\mathbf{n}$ .

*Demostració.* Considerem  $Q \times I \rightarrow \mathbb{H}^n \times I$  definida per  $(p, t) \mapsto (\varphi(p, t), t)$ . Per hipòtesi, la seva imatge és un domini  $M$  de  $\mathbb{H}^n \times I$ . Reduïm de moment  $I$  a  $(0, t_0)$ . Llavors  $\partial M \subset (\mathbb{H}^n \times I)$  és diferenciable. Per un  $L_r$  genèric podem suposar  $L_r \times I$  transvers a aquesta hipersuperfície. Així doncs,  $N = M \cap (L_r \times I)$  és un domini de  $L_r \times I$  amb vora diferenciable (cf. figura 3.1). Considerem el camp unitari vertical  $\partial t$  i la seva projecció ortogonal sobre  $\partial N$

$$X = \partial t - \langle \partial t, \mathbf{n}' \rangle \mathbf{n}'$$

on  $\mathbf{n}'$  és el normal unitari interior a  $\partial N$ . Situem-nos en un punt singular  $y = \varphi_t(p) \in \partial N$  de  $X$ . A continuació calculem l'índex  $\iota$  de  $X$  en  $y$ . Sigui  $dX : T_y \partial N \rightarrow T_y \partial N$  l'aplicació que envia  $Z \mapsto \nabla_Z X$  on  $\nabla$  és la connexió de Levi-Civita de  $L_r \times I$ . De forma similar a (3.1) tenim,

$$dX(Z) = \nabla_Z X = \nabla_Z \partial t - \nabla_Z \langle \partial t, \mathbf{n}' \rangle \mathbf{n}' = Z(\langle \partial t, \mathbf{n}' \rangle) \mathbf{n}' - \langle \partial t, \mathbf{n}' \rangle \nabla_Z \mathbf{n}' = -\langle \partial t, \mathbf{n}' \rangle \nabla_Z \mathbf{n}' \quad (3.6)$$

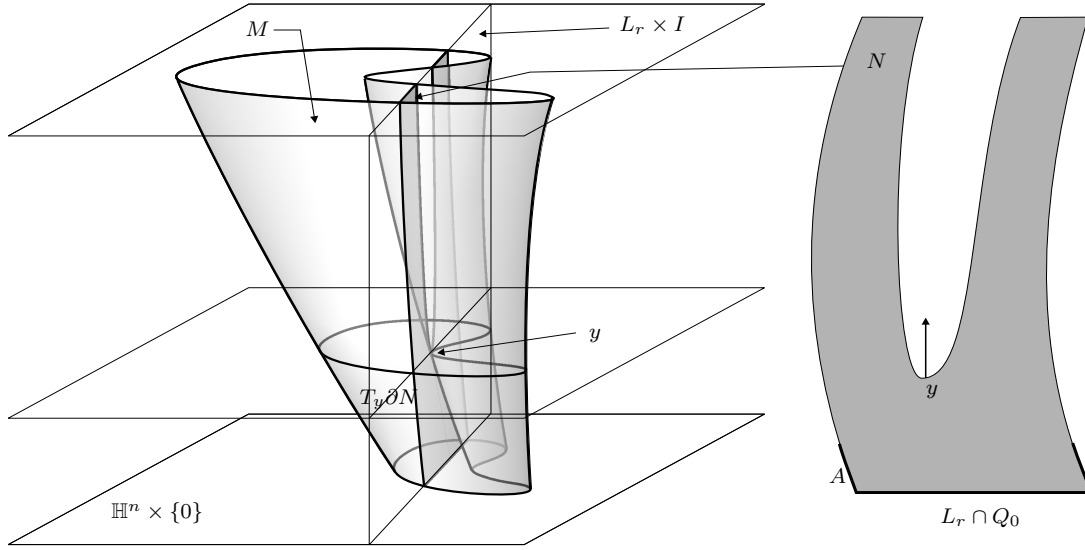


Figura 3.1: Deformació d'un domini

i per hipòtesi  $\partial t = \pm n'$ . Per tant, el determinant de  $dX$  és, llevat de signe, la curvatura de Gauss  $K'$  de  $\partial N$  en  $y$  com a hipersuperfície de  $L_r \times I$  i respecte de  $n'$

$$\det dX = \langle \partial t, n' \rangle^r K'.$$

Com que  $n'$  és interior a  $M$ , pel teorema 1.2.2 (de Meusnier),  $K'$  és un múltiple positiu de la curvatura normal de  $\partial M$  en la direcció  $T_y \partial N$  respecte al normal interior de  $\partial M$ . Per la mateixa raó, aquesta curvatura normal és múltiple positiu de la curvatura normal  $K(L_r)$  de  $S_t \equiv (\mathbb{H}^n \times \{t\}) \cap \partial M$  respecte  $n$  en la direcció  $T_p L_r$ . En particular,  $y$  és punt singular degenerat si i només si  $S_t$  té curvatura normal 0 a  $x$  en la direcció de  $L_r$ . Quasi per tot  $L_r$ , les singularitats seran no-degenerades, i per tant aïllades. Per veure-ho només cal aplicar el teorema de Sard-Federer (cf. [Fed69]) a l'aplicació  $G_r(S) \times I \rightarrow \mathcal{L}_r$  definida per  $((p, V), t) \mapsto \exp_{\varphi(p,t)} V$ . Els seus valors crítics són els  $r$ -plans tangents a algun  $S_t$  de forma que  $K(L_r) = 0$ . Per tant, el conjunt d'aquests  $r$ -plans, que són precisament els que donen lloc a singularitats de  $X$  degenerades, té mesura nul·la.

Així doncs, quasi per tot  $L_r$  podem suposar que tots els punts singulars  $y$  de  $X$  són no degenerats. Per tant (cf. [Mil97]), tenen índex  $\pm 1$  segons el signe del determinant de  $dX$ , o bé

$$\iota(y) = \text{sgn} \det dX_y = \langle \partial t, n' \rangle^r \text{sgn} K(L_r) \quad (3.7)$$

on  $K(L_r)$  és la curvatura normal de  $S_t$  en la direcció  $T_y L_r$ .

Ara volem relacionar la suma d'índexos dels punts singulars de  $X$  amb  $\chi(L_r \cap Q_{t_0}) - \chi(L_r \cap Q_0)$ . Comencem estenent  $I$  a  $[0, t_0]$  i modificant lleugerament  $N$  per tal que la nova  $\partial N$  en  $\mathbb{H}^n \times I$  sigui diferenciable. Aquesta modificació la podem fer de forma que no afecti la regió  $N \cap (L_r \times [\delta, t_0 - \delta])$  per un petit  $\delta$ . A més, podem suposar que la nova  $\partial N$  és ortogonal a  $\partial t$  en un conjunt aïllat de punts. Considerem l'obert

$A = \partial N \cap (L_r \times [0, \delta))$  de  $\partial N$ . El camp  $X$ , projecció ortogonal de  $\partial t$  sobre  $\partial N$ , és exterior a  $\partial A$ . Pel teorema de Poincaré-Hopf (amb vora),  $\chi(A)$  és la suma dels índexos dels punts singulars de  $X$  continguts a  $A$ . Aplicant el teorema 3.1.3, obtenim

$$\chi(N) = \sum_{C^+} \iota = \sum_{C^+ \cap A} \iota + \sum_{C^+ \setminus A} \iota = \chi(A) + \sum_{C^+ \setminus A} \iota$$

on  $C^+$  és el conjunt dels punts singulars de la projecció de  $\partial t$  allà on aquest és interior i  $\iota$  és l'índex d'aquests punts singulars. És a dir que,

$$\chi(L_r \cap Q_0) = \chi(N) - \sum_{C^+ \cap (\delta, t_0 - \delta)} \iota.$$

Anàlogament, es veu que

$$\chi(L_r \cap Q_{t_0}) = \chi(N) - \sum_{C^- \cap (\delta, t_0 - \delta)} \iota'$$

on  $C^-$  és el conjunt dels punts singulars de  $-X$  on  $\partial t$  és interior i  $\iota'$  és el seu índex. Com que  $\iota' = (-1)^r \iota$ ,

$$\chi(L_r \cap Q_{t_0}) - \chi(L_r \cap Q_0) = - \sum_{C^-} \iota' + \sum_{C^+} \iota = \sum_C \langle \partial t, \mathbf{n}' \rangle^{r+1} \iota$$

on  $C = C^+ \cup C^-$  i  $\mathbf{n}'$  és el normal interior a  $\partial N$ . Acabem la demostració substituint (3.7) a l'equació anterior i observant que  $\partial t$  és interior a  $M$  si i només si  $\partial \varphi / \partial t$  és exterior a  $Q_t$ .  $\square$

Amb aquest resultat podem demostrar la fórmula de variació per a les Quermassintegrals d'un domini amb vora diferenciable a  $\mathbb{H}^n$  (o  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{S}^n$ ).

**Teorema 3.3.2.** *Per una deformació de dominis  $Q_t$ ,*

$$\begin{aligned} \frac{n \cdot O_{n-2} \cdots O_{n-r-1}}{(n-r) \cdot O_{r-1} \cdots O_0} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} W_r(Q_t) &= \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{\mathcal{L}_r} \chi(L_r \cap Q_t) dL_r = -\text{vol}(G(r, n-1)) \int_{S_0} \phi(x) \sigma_r(x) dx \end{aligned}$$

on  $\phi(x) = \langle \partial \varphi / \partial t, \mathbf{n} \rangle$  i  $\mathbf{n}$  és el camp normal unitari interior.

*Demostració.* Per la proposició anterior, quasi per tot  $L_r$  tenim

$$\chi(L_r \cap Q_t) - \chi(L_r \cap Q_0) = - \sum \text{sgn} \phi \text{sgn} K(L_r)$$

on sumem sobre les tangències de  $L_r$  amb les hipersuperfícies  $S_t$  i  $K(L_r)$  és la curvatura normal de  $S_t$  en la direcció  $L_r$  i respecte  $\mathbf{n}$ . Integrant respecte  $L_r$ ,

$$\int_{\mathcal{L}_r} (\chi(L_r \cap Q_t) - \chi(L_r \cap Q_0)) dL_r = - \int_{\mathcal{L}_r} \sum \text{sgn} \phi \text{sgn} K(L_r) dL_r.$$

Considerem

$$\begin{aligned} \gamma : G_r(S) \times (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow \mathcal{L}_r \\ ((x, V_r), t) &\longmapsto \exp_{\varphi_t(x)} V_r. \end{aligned}$$

i les hipersuperfícies  $\mathcal{L}_r(S_t) = \gamma(G_r(S), t) \subset \mathcal{L}_r$ . Per la fórmula de l'àrea,

$$\int_{\mathcal{L}_r} \sum \operatorname{sgn} \phi \operatorname{sgn} K(L_r) dL_r = \int_0^t \int_{G_r(S)} \operatorname{sgn} \phi \operatorname{sgn} K(L_r) \gamma_t^* \iota_{d\gamma \partial t} dL_r dt$$

on  $\gamma_t = \gamma(\cdot, t)$ . Pel teorema fonamental del càlcul

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_0^t \int_{G_r(S)} \operatorname{sgn} \phi \operatorname{sgn} K(L_r) \gamma_t^* \iota_{d\gamma \partial t} dL_r dt &= \int_{G_r(S)} \operatorname{sgn} \phi \operatorname{sgn} K(L_r) \gamma_0^* \iota_{d\gamma \partial t} dL_r = \\ &= \int_{G_r(S)} \operatorname{sgn} \phi \operatorname{sgn} K(L_r) |\langle d\gamma \partial t, N \rangle| \gamma_0^* \iota_N dL_r \end{aligned}$$

on  $N$  és el camp unitari normal a  $\mathcal{L}_r(S_0)$ . En efecte,

$$\iota_{d\gamma \partial t} dL_r = |\langle d\gamma \partial t, N \rangle| \iota_N dL_r$$

ja que treballem amb densitats. Notem que  $\iota_N dL_r$  és l'element de volum a  $\mathcal{L}_r(S_t)$  induït per l'ambient.

Ara prenem una 'referència mòbil'  $g : (-\epsilon, \epsilon) \times G_r(S) \rightarrow G$  tal que  $\varphi = \pi \circ g$ ,  $\gamma = \pi_r \circ g$  i  $g_n$  coincideixi amb  $n$ . Llavors

$$\langle d\gamma \partial t, N \rangle = \langle d\pi_r \frac{\partial g}{\partial t}, d\pi_r v_0^n \rangle = \left\langle \frac{\partial g}{\partial t}, v_0^n \right\rangle = -\langle d\pi \frac{\partial g}{\partial t}, d\pi v_0^n \rangle = -\langle \partial \varphi / \partial t, n \rangle = -\phi. \quad (3.8)$$

Així,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_{\mathcal{L}_r} \chi(L_r \cap Q_t) dL_r = - \int_{G_r(S)} \phi \operatorname{sgn} K(L_r) \gamma_0^* \iota_N dL_r$$

Finalment, pel corollari 2.4.2

$$- \int_{G_r(S)} \phi \operatorname{sgn} K(L_r) \gamma_0^* \iota_N dL_r = -\operatorname{vol}(G(r, n-1)) \int_{S_0} \phi \sigma_r(x) dx.$$

□

Com a la secció anterior, podem estendre aquests resultats a immersions no pròpies si restringim la paritat d'algunes dimensions. Així doncs, suposem  $i : S \times I \rightarrow \mathbb{H}^n$  una aplicació diferenciable tal que per cada  $t \in I = (-\epsilon, \epsilon)$ , la restricció  $i_t = i(\cdot, t)$  és una immersió (no necessàriament pròpia) de la hipersuperfície tancada  $S$ . Direm que tenim una *deformació* de la immersió  $i_0$ . En aquesta situació tenim fórmules de variació per a les Quermassintegrale  $W_r(S)$  amb  $r$  senar (cf. definició 3.2.1). Abans ens farà falta la proposició següent.

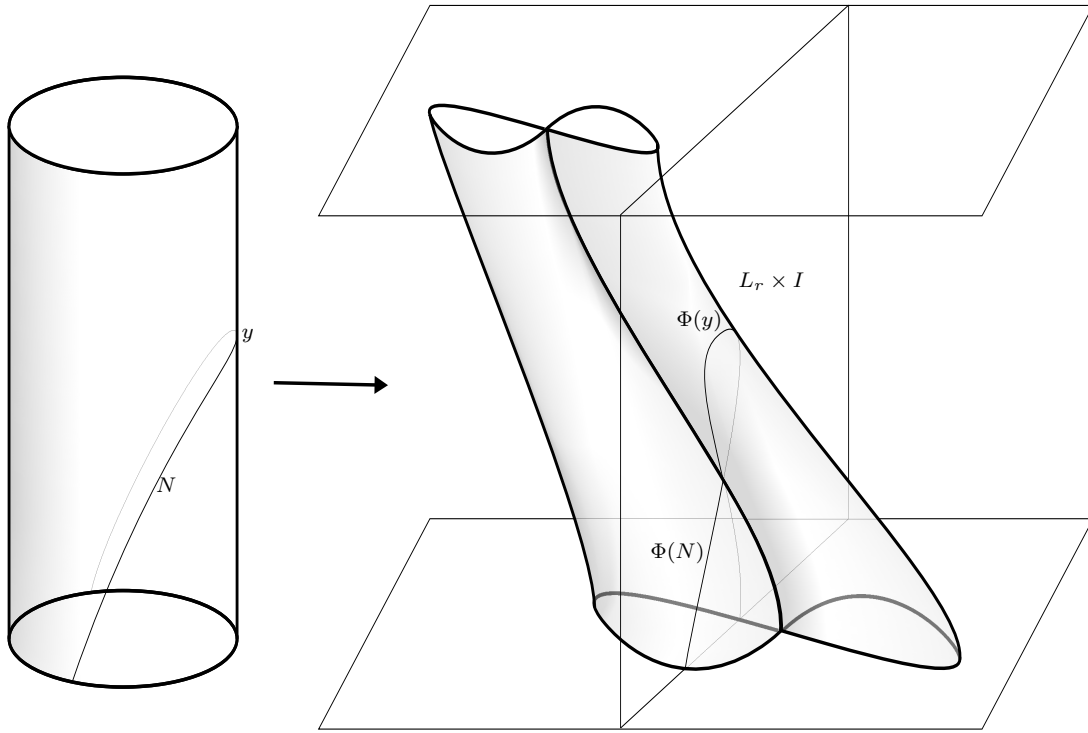


Figura 3.2: Deformació d'una immersió

**Proposició 3.3.3.** *Per una deformació d'immersions  $i_t$ , si  $r$  és senar i  $L_r$  és un  $r$ -pla genèric,*

$$\chi(i_{t_0}^{-1}L_r) - \chi(i_0^{-1}L_r) = -2 \sum \operatorname{sgn}K(L_r)$$

*on el sumatori és sobre els punts  $i_t(p)$  on  $L_r$  és tangent a  $S_t$  per algun  $t \in (0, t_0)$  i  $K(L_r)$  és la curvatura normal de  $S_t$  en la direcció de  $T_{i_t(p)}L_r$  respecte al normal unitari  $n$  que compleix  $\langle \partial i / \partial t, n \rangle > 0$ .*

*Demostració.* Reduïm  $I$  a  $[0, t_0]$ . Sigui  $\Phi : S \times I \rightarrow \mathbb{H}^n \times I$  definida per  $\Phi(x, t) = (i_t(x), t)$ . La imatge de  $\Phi$  és una hipersuperfície immersa a  $\mathbb{H}^n \times I$ . Per la hipòtesi de genericitat podem suposar que  $L_r \times I$  és transvers a aquesta imatge. Llavors,  $N = \Phi^{-1}(L_r \times I)$  és una hipersuperfície de  $S \times I$ . Considerem el camp  $X$  gradient de la funció  $t$  restringida a  $N$ . Sigui  $y = (p, t) \in N$  un punt singular de  $X$ . Com que  $\Phi$  és injectiva en un entorn  $U$  de  $y$ , podem identificar  $U$  amb  $\Phi(U) \subset \mathbb{H}^n \times I$ . A més,  $d\Phi X$  és la projecció ortogonal de  $\partial t$  a  $\Phi(U)$ . L'equació (3.6) mostra que per tot  $Y \in T_y N$

$$dX(Y) = -\nabla_Y n'$$

on  $n'$  és el vector normal unitari que concideix amb  $\partial t$  en  $y$ . Per tant, el determinant de  $dX$  en  $y$  és la curvatura de Gauss  $K'$  de  $\Phi(U)$  com a hipersuperfície de  $L_r \times I$  respecte el normal unitari  $n'$ . Sigui  $n''$  el normal unitari a  $\Phi(S \times I)$  que compleix  $\langle \partial i / \partial t, n'' \rangle > 0$ .

Com que  $\Phi(N) = \Phi(S \times I) \cap (L_r \times I)$ , el teorema 1.2.2 (de Meusnier) diu que  $K'$  és un múltiple negatiu de la curvatura normal de  $\Phi(S \times I)$  respecte  $n''$  en la direcció  $T_{(\Phi(y))}(L_r \times \{t\}) = T_{(\Phi(y))}\Phi(N)$ . El mateix teorema dóna que aquesta curvatura normal és múltiple positiu de la curvatura normal de  $i_t(S)$  com a hipersuperfície de  $\mathbb{H}^n \times \{t\}$  respecte el vector normal de l'enunciat i en la direcció  $T_p L_r$ . Així,

$$\det dX = -K(L_r)$$

i per tant, utilitzant el teorema de Sard-Federer, podem suposar que quasi per tot  $L_r$  la curvatura normal  $K(L_r) \neq 0$  en els punts de tangència i que les singularitats de  $X$  són no-degenerades i aïllades. En aquest cas hem vist que l'índex de la singularitat de  $X$  és

$$\iota = -\operatorname{sgn}K(L_r).$$

Aplicant el teorema 3.1.3 a  $X$  i a  $-X$ , tenim

$$\begin{aligned} \sum_C \iota &= \chi(N) - \sum_{D_0} v \\ -\sum_C \iota &= \chi(N) - \sum_{D_{t_0}} v \end{aligned}$$

on  $C$  és el conjunt de punts singulars del camp  $X$  i  $\iota$  és l'índex d'aquestes singularitats. Hem utilitzat que la dimensió de  $N$  és senar per deduir que l'índex de  $-X$  és l'oposat de l'índex de  $X$ . Igualment,  $D_t$  és el conjunt de punts singulars de la projecció de  $X$  a  $i_t^{-1}(L_r) \times \{t\}$  i  $v$  és l'índex de cada punt. Encara que aquestes singularitats no són aïllades ho podem solucionar allargant  $I$  a  $[-\delta, t_0 + \delta]$  (per  $\delta > 0$  petit) i prolongant el camp  $X$  a  $S \times I$  de la forma més convenient.

Restant i utilitzant el teorema de Poincaré-Hopf obtenim

$$-2 \sum_C \operatorname{sgn}K(L_r) = 2 \sum_C \iota = \sum_{D_t} v - \sum_{D_0} v = \chi(i_t^{-1}L_r) - \chi(i_0^{-1}L_r)$$

com volíem provar. □

A partir d'aquesta proposició, una demostració del tot anàloga a la del teorema 3.3.2 dona el següent

**Teorema 3.3.4.** *Per una deformació  $i_t$  d'immersions de  $S$ , si  $r$  és senar,*

$$\begin{aligned} \frac{n \cdot O_{n-2} \cdots O_{n-r-1}}{(n-r)O_{r-1} \cdots O_0} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} W_r(S_t) &= \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{\mathcal{L}_r} \chi(i_t^{-1}L_r) dL_r = -\operatorname{vol}(G(r, n-1)) \int_{S_0} \langle \partial i / \partial t, n \rangle \sigma_r(x) dx \end{aligned}$$

on  $n$  és qualsevol normal unitari i  $\sigma_r$  és la curvatura mitja respecte aquest normal.

Quan les immersions sigui pròpies, aquest teorema coincideix amb el 3.3.2.

### 3.4 Teorema de Gauss-Bonnet a l'espai hiperbòlic

En aquesta secció relacionem la curvatura total d'una hipersuperfície tancada de l'espai hiperbòlic amb la seva Quermassintegrals d'ordre  $(n - 2)$ . A grans trets les idees de fons són les del cas esfèric tot i que tècnicament és força diferent. El resultat és una fórmula anàloga a (3.2.3) que equival al teorema de Gauss-Bonnet tot i ser molt més simple.

**Lema 3.4.1.** *Suposem una deformació dels dos tipus tractats. Això és,*

- i) sigui  $Q$  una varietat de dimensió  $n$  amb vora  $S$  i suposem  $\varphi : Q \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{H}^n$ , una aplicació diferenciable tal que  $\varphi_t = \varphi(\cdot, t)$  és injectiu per cada  $t$ , o bé*
- ii) sigui  $S$  una varietat de dimensió parell  $n - 1$  i suposem  $\varphi : S \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{H}^n$ , una aplicació diferenciable tal que  $\varphi_t = \varphi(\cdot, t)$  és una immersió per cada  $t$ .*

*En tots dos casos suposem que la curvatura de Gauss  $K_t(x)$  de  $S_t$  en  $\varphi_t(x)$  no canvia de signe al variar  $t$ . Aleshores, per al cas i) tenim*

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{\mathcal{L}_{n-2}} \chi(Q_t \cap L_{n-2}) dL_{n-2} = \frac{O_{n-2}}{2(n-1)} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{S_t} K_t(x) dx, \quad (3.9)$$

*i per al ii)*

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{\mathcal{L}_{n-2}} \chi(\varphi_t^{-1} L_{n-2}) dL_{n-2} = \frac{O_{n-2}}{n-1} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{S_t} K_t(x) dx. \quad (3.10)$$

*Observació.* Les integrals dels membres de l'esquerra són finites ja que fora d'un compacte l'integrand és 0. D'altra banda, veurem *a posteriori* que l'assumpció que  $K_t$  no canvia de signe és supèrflua.

*Demostració.* Fem només el cas i) ja que el ii) és idèntic. Pel teorema 3.3.2, denotant  $S = \partial Q$ ,

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{\mathcal{L}_{n-2}} \chi(Q_t \cap L_{n-2}) dL_{n-2} = -\frac{O_{n-2}}{2} \int_{S_0} \langle \partial\varphi/\partial t, n \rangle \sigma_{n-2}(x) dx. \quad (3.11)$$

Per altra banda, sigui

$$\begin{aligned} \gamma : S \times (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow \Lambda^n \\ (x, t) &\longmapsto \exp_{\varphi_t(x)}(T_x S). \end{aligned}$$

i sigui  $U = \{x \in S \mid K_t(x) \geq 0\}$ . Prenem una successió  $(U_r)$  de compactes a  $U$  amb vora diferenciable tals que  $K_t(x) > 0$  per tot  $x \in U_r$  i tot  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  i tals que  $\sup\{K_t(x) \mid x \in \partial U_r, t \in (-\epsilon, \epsilon)\}$  tendeixi a 0 quan  $r \rightarrow \infty$ . Per la regla de Leibniz i el teorema de la convergència dominada,

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_U K_t dx = \int_U \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (K_t dx) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{U_r} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} K_t dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{U_r} K_t dx$$

Però per (2.15), si  $d\tilde{x}$  denota l'element de volum de  $\gamma_t(S)$ ,

$$K_t dx = \gamma^* d\tilde{x} \quad (3.12)$$

i per tant

$$\int_{U_r} K_t dx = \int_{\gamma(t, U_r)} d\tilde{x}.$$

Com que  $\gamma_t = \gamma(t, \cdot) : U_r \rightarrow \Lambda^n$  és immersió a cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  podem aplicar la fórmula de variació del volum (cf. [Spi79, p. 418])

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_{U_r} K_t dx = (n-1) \int_{\gamma_0(U_r)} \langle d\gamma \partial t, N \rangle \tilde{\sigma}_1 d\tilde{x} + \int_{\partial U_r} \gamma^* \iota_X d\tilde{x}$$

on  $X$  és la part tangent del vector variació  $d\gamma \partial t$ . Com que  $\sup_{\partial U_r} K_t$  tendeix a 0 quan  $r$  creix tenim que  $\gamma^* d\tilde{x}$  també va a 0 sobre aquesta vora i queda

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_U K_t dx = (n-1) \int_{\gamma_0(U_0)} \langle d\gamma \partial t, N \rangle \tilde{\sigma}_1 d\tilde{x} = (n-1) \int_{U_0} \langle d\gamma \partial t, N \rangle \sigma_{n-2} dx \quad (3.13)$$

ja que  $\sigma_{n-2} = K \tilde{\sigma}_1$  pel corollari 2.3.9. Per la part de curvatura negativa s'obté el mateix raonant igual. Per l'equació (3.8) tenim que  $\langle d\gamma \partial t, N \rangle = -\langle \partial \varphi / \partial t, n \rangle$  i comparant (3.11) i (3.13) veiem que això és el que ens calia veure.  $\square$

Ara, la idea és deformar qualsevol hipersuperfície fins a gairebé col·lapsar-la en un punt i integrar les equacions (3.9) i (3.10) respecte  $t$  durant aquesta deformació.

**Teorema 3.4.2.** *Sigui  $S$  una hipersuperfície a  $\mathbb{H}^n$  que sigui vora d'un domini  $Q$ . Aleshores,*

$$\int_{\mathcal{L}_{n-2}} \chi(L_{n-2} \cap Q) dL_{n-2} = \frac{O_{n-2}}{2(n-1)} (M_{n-1}(S) - O_{n-1}\chi(Q)).$$

*Si  $i : S \rightarrow \mathbb{H}^n$  és hipersuperfície immersa amb  $n$  senar,*

$$\int_{\mathcal{L}_{n-2}} \frac{\chi(i^{-1}L_{n-2})}{2} dL_{n-2} = \frac{O_{n-2}}{2(n-1)} \left( M_{n-1}(S) - \frac{O_{n-1}\chi(S)}{2} \right).$$

*Demostració.* Fem només el primer cas. Suposem  $S$  en el model projectiu (de Klein) de  $\mathbb{H}^n$ . A través d'homotècies deformem homòtopament  $S$  fins a obtenir  $S' = \partial Q'$  continguda en una bola de radi arbitràriament petit. Com que les homotècies no canvien el signe de la curvatura euclidiana de  $S$ , per la proposició 1.2.3 tampoc canvien la curvatura hiperbòlica. Així, podem aplicar la proposició anterior, i tenim

$$\int_{\mathcal{L}_{n-2}} (\chi(L_{n-2} \cap Q) - \chi(L_{n-2} \cap Q')) dL_{n-2} = \frac{O_{n-2}}{2(n-1)} (M_{n-1}(S) - M_{n-1}(S')).$$

Com que la mètrica d'una bola petita és gairebé euclidiana i la curvatura depèn contínuament de la mètrica,  $M_{n-1}(S')$  és tan propera a  $O_{n-1}\chi(Q)$  com vulguem (cf. teorema 3.1.2). D'altra banda,  $\chi(L_{n-2} \cap Q) = 0$  sempre que  $L_{n-2}$  no talli la bola que hem pres arbitràriament petita.  $\square$



I així obtenim les següents fórmules anàlogues a la del corollari 3.2.3 i que permetran demostrar (2.10), (2.11) i en particular el teorema de Gauss-Bonnet a  $\mathbb{H}^n$ .

**Corollari 3.4.3.** *Si  $Q \subset \mathbb{H}^n$  és un domini amb vora diferenciable, llavors*

$$M_{n-1}(\partial Q) = n \left( W_n(Q) + \frac{n-1}{2} W_{n-2}(Q) \right).$$

*Si  $S$  es hipersuperfície immersa i  $n$  és senar llavors*

$$M_{n-1}(S) = n \left( W_n(S) + \frac{n-1}{2} W_{n-2}(S) \right).$$

*Demostració.* Multiplicar les equacions de la proposició anterior per les constants que apareixen a les definicions 2.2.1 i 3.2.1 de les Quermassintegrale.  $\square$

Podem fer baixar aquestes fórmules a codimensions més grans utilitzant la reproductibilitat.

**Corollari 3.4.4.** *Si  $Q \subset \mathbb{H}^n$  és un domini amb vora  $S$  diferenciable*

$$M_r(S) = n \left( W_{r+1}(Q) + \frac{r}{n-r+1} W_{r-1}(Q) \right). \quad (3.14)$$

*Si  $S$  és una hipersuperfície immersa i  $r$  és senar*

$$M_r(S) = n \left( W_{r+1}(S) + \frac{r}{n-r+1} W_{r-1}(S) \right).$$

*Demostració.* Idèntica a la del cas esfèric (cf. corollari 3.2.4).  $\square$

A partir d'aquí, tenim una nova demostració de les fórmules (2.10) i (2.11) per curvatura  $k = -1$  (i  $k < 0$ ).

*Demostració (de la proposició 2.2.5 a  $\mathbb{H}^n$ ).* Utilitzar la recurrència

$$W_{r+1}(Q) = \frac{1}{n} M_r(\partial Q) - \frac{r}{n-r+1} W_{r-1}(Q)$$

i s'acaba gràcies a

$$W_1(Q) = \frac{1}{n} M_0(\partial Q) \quad W_0(Q) = V \quad W_n(Q) = \frac{O_{n-1}}{n} \chi(Q)$$

$\square$

*Observació.* Les mateixes fórmules valen per immersions si  $r$  és senar.

Com a pas particular, si  $r = n$  obtenim la fórmula de Gauss-Bonnet.

**Teorema 3.4.5 (Teorema de Gauss-Bonnet a  $\mathbb{H}^n$ ).** *Sigui  $Q \subset \mathbb{H}^n$  un domini amb vora  $S = \partial Q$  compacta i de classe  $C^2$ . Si  $n$  és parell i  $V$  denota el volum de  $Q$ ,*

$$c_{n-1}M_{n-1}(S) + c_{n-3}M_{n-3}(S) + \cdots + c_1M_1(S) + (-1)^{n/2}V = 1/2O_n\chi(Q).$$

*Si  $n$  és senar, encara que  $S$  sigui immersa,*

$$c_{n-1}M_{n-1}(S) + c_{n-3}M_{n-3}(S) + \cdots + c_2M_2(S) - M_0(S) = O_n\chi(S)$$

on les constants  $c_h$  són

$$c_h = \binom{n-1}{h} \frac{(-1)^{(n-h-1)/2} O_n}{O_h O_{n-1-h}}.$$

Acabem aquesta secció amb un petit comentari sobre conjunts convexos. Recordem que hem definit la curvatura total d'un convex arbitrari com la mesura del conjunt dels seus plans de suport. Ja hem dit que amb aquesta definició, la curvatura total és un funcional continu a l'espai de dominis convexos respecte la mètrica de Hausdorff. No cal dir que les Quermassintegrals  $W_r$  tenen sentit i són contínues en aquest espai. Per tant, la següent proposició és immediata aproximant qualsevol convex per una successió de convexos amb vora diferenciable.

**Proposició 3.4.6.** *Si  $Q \subset \mathbb{H}^n$  és un conjunt convex compacte,*

$$M_{n-1}(\partial Q) = O_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} W_{n-2}(Q).$$

Pel que fa a les altres integrals de curvatura mitja, donat un convex arbitrari  $Q \subset \mathbb{H}^n$  podem prendre (3.14) com a definició de  $M_i(\partial Q)$ . D'aquesta manera, tots els  $M_i$  són funcionals continus respecte la mètrica de Hausdorff. A més, tenim immediatament el següent resultat que potser no era conegut.

**Corol·lari 3.4.7.** *Les integrals de curvatura mitja  $M_i(\cdot)$  són funcionals creixents (respecte a la inclusió) en l'espai dels convexos.*

### 3.5 Curvatura total absoluta a l'espai hiperbòlic

Aquesta secció es dedica a l'estudi de la curvatura total absoluta d'immersions a l'espai hiperbòlic. Es comença pel cas de superfícies immerses a  $\mathbb{H}^3$ . Es donen algunes desigualtats i es mostra amb exemples que la desigualtat de Chern-Lashof no és vàlida a  $\mathbb{H}^3$  per sumes connexes de 2 o més tors. A continuació es passa a dimensió arbitrària on, explotant les idees de la secció anterior, obtenim una fórmula per a calcular la curvatura total absoluta d'una immersió *tensa* a  $\mathbb{H}^n$ . Però abans de tot això és convenient començar amb un breu resum del tema a l'espai euclidià.

### 3.5.1 Curvatura total absoluta a l'espai euclidià

Recordem la definició de curvatura total absoluta a  $\mathbb{R}^n$  així com la desigualtat de Chern-Lashof. Si  $i : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  és una subvarietat de dimensió  $r$  immersa a  $\mathbb{R}^n$ , la curvatura total absoluta de  $S$  es defineix com la integral sobre el fibrat normal unitari de  $i(S)$  del valor absolut de la curvatura de Lipschitz-Killing  $K(x, n)$

$$\text{CTA}(S) := \frac{1}{2} \int_{N(S)} |K(x, n)| dndx.$$

Així, si per exemple  $S$  és una hipersuperfície,  $\text{CTA}(S)$  és la integral del valor absolut de la curvatura de  $S$ . La desigualtat de Chern-Lashof (cf. [CL57]) diu que per tota subvarietat compacta  $S$  immersa a  $\mathbb{R}^n$  es té

$$\text{CTA}(S) \geq \frac{O_{n-1}}{2} \beta(S, F) \tag{3.15}$$

on  $\beta(S, F) = \sum \beta_i(S, F) = \sum \dim H_i(S, F)$  és la suma dels números de Betti de  $S$  respecte un cos  $F$  qualsevol. La demostració consta de dos passos. En primer lloc s'expressa  $\text{CTA}(S)$  com la integral del nombre  $\nu$  de punts crítics de la projecció ortogonal de  $S$  sobre les direccions de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$

$$\text{CTA}(S) = \int_{\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}} \nu(S, u) du.$$

El segon pas és aplicar les desigualtats de Morse per establir que, quasi per tot  $u \in \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ ,

$$\nu(S, u) \geq \sum_{i=0}^n \dim H_i(S, F). \tag{3.16}$$

L'estudi del cas de la igualtat a 3.15 va donar lloc al concepte d'*immersió tensa* (en anglès *tight*).

**Definició 3.5.1.** Una immersió  $i : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  d'una varietat compacta a  $\mathbb{R}^n$  es diu tensa si per algun cos  $F$

$$\text{CTA}(S) = \frac{O_{n-1}}{2} \beta(S, F).$$

Es veu fàcilment (cf. [Kui97], p.35) que una immersió és tensa si i només si es té igualtat a (3.16) sempre que la projecció ortogonal sobre  $u$  sigui una funció de Morse (punts crítics no degenerats i amb valors diferents). Una altra caracterització menys evident i que es sol prendre com a definició és la següent.

**Proposició 3.5.1.** *Sigui  $i : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  una subvarietat immersa. Per cada vector  $v \in \mathbb{R}^n$  considerem el semiespai  $H_v = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, v \rangle \leq 1\}$  i la inclusió  $j_v : i^{-1}(H_v) \rightarrow S$ . La immersió  $i$  de  $S$  és tensa si i només si existeix un cos  $F$  pel qual els morfismes d'homologia  $(j_v)_* : \check{H}_*(i^{-1}(H_v), F) \rightarrow \check{H}_*(S, F)$  induïts per  $j_v$  són injectius per tot  $v$ .*

La demostració es pot trobar a [Kui97, p.35].

*Observació.* En aquesta proposició,  $\check{H}_*$  es refereix a la homologia de Čech. Per CW-complexos, aquesta coincideix amb  $H_*$ , la homologia singular. Si  $X$  és un subconjunt compacte d'una varietat o CW-complex llavors  $\check{H}_*(X)$  és el limit invers de  $H_*(Y_n)$  on  $Y_i \supset Y_{i+1} \supset \dots \supset X$  és una successió d'oberts convergint a  $X$ . Aquest és l'únic fet que ens caldrà conèixer sobre la homologia de Čech.

Si  $i : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  és una superfície immersa a l'espai euclidià, la curvatura total absoluta  $\text{CTA}(S)$  és la integral en  $S$  del valor absolut de la curvatura de Gauss. En aquest cas, és fàcil de demostrar que

$$\text{CTA}(S) = \int_S |K| dx \geq 2\pi(4 - \chi(S)). \quad (3.17)$$

La idea de la prova és la següent. Prendre  $\bar{S}$  la vora de l'embolcall convex de  $S$  i veure que  $\bar{S} \setminus S$  té curvatura total absoluta 0. Aplicant el teorema Gauss-Bonnet,

$$\int_S |K| = 2 \int_S K^+ - \int_S K \geq 2 \int_{\bar{S}} K - 2\pi\chi(S) = 8\pi - 2\pi\chi(S). \quad (3.18)$$

Però tot seguit veurem que (3.17) és un cas particular de la desigualtat de Chern-Lashof (3.15).

Recordem breument quins són els grups d'homologia d'una superfície compacta de la forma  $S = S^2 \# g\mathbb{T}^2$  en el cas orientable i de la forma  $S' = S^2 \# g\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  en el cas no orientable.

$$\begin{aligned} H_0(S, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z} & H_1(S, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}^{2g} & H_2(S, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z} \\ H_0(S', \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z} & H_1(S', \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{g-1} & H_2(S', \mathbb{Z}) &= 0. \end{aligned}$$

mentre que amb coeficients a  $\mathbb{Z}_2$  són

$$\begin{aligned} H_0(S, \mathbb{Z}_2) &= \mathbb{Z}_2 & H_1(S, \mathbb{Z}_2) &= \mathbb{Z}_2^{2g} & H_2(S, \mathbb{Z}_2) &= \mathbb{Z}_2. \\ H_0(S', \mathbb{Z}_2) &= \mathbb{Z}_2 & H_1(S', \mathbb{Z}_2) &= \mathbb{Z}_2^g & H_2(S', \mathbb{Z}_2) &= \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

Veiem que  $\chi(S) = 2 - 2g$ ,  $\chi(S') = 2 - g$ ,  $\beta(S, \mathbb{Z}_2) = 2 + 2g$  i  $\beta(S', \mathbb{Z}_2) = 2 + g$ . Observem que tant si  $S$  és orientable com si no  $4 - \chi(S) = \beta(S, \mathbb{Z}_2)$ . També notem que  $\beta(S, \mathbb{R}) = \beta(S, \mathbb{Z}) \leq \beta(S, \mathbb{Z}_2)$ . Per tant la desigualtat (3.17) no és més que la desigualtat de Chern-Lashof pel cos  $\mathbb{Z}_2$ . Així, una superfície a  $\mathbb{R}^3$  és tensa quan es dona la igualtat a (3.17).

De (3.18) es dedueix que les superfícies immerses de manera tensa estan caracteritzades pel fet que tot punt de curvatura positiva de  $S$  està contingut a la vora de l'embolcall convex de  $S$ .

Una altra caracterització de les superfícies tenses a  $\mathbb{R}^3$  és l'anomenada  *propietat dels dos trossos*  de Banchoff: una superfície  $S$  immersa a  $\mathbb{R}^3$  és tensa si i només si tot pla afí  $L$  la divideix en dues o menys parts; i.e.  $i^{-1}(\mathbb{R}^3 \setminus L)$  té dues components connexes com a molt (cf. [Kui97]).

### 3.5.2 Superfícies a l'espai hiperbòlic de dimensió 3.

Passem a estudiar la curvatura total absoluta de superfícies a l'espai hiperbòlic. Sigui  $i : S \rightarrow \mathbb{H}^3$  una immersió d'una superfície tancada (orientable o no). La curvatura total absoluta és la integral a  $i(S)$  del valor absolut de  $K$ , la curvatura de Gauss

$$\text{CTA}(S) := \int_S |K| dx.$$

**Proposició 3.5.2.** *Si  $A$  és l'àrea de  $i(S)$  i  $\bar{A}$  és la de l'envolvent convexa llavors*

$$\text{CTA}(S) \geq 2\pi(4 - \chi(S)) + 2\bar{A} - A \quad (3.19)$$

*i també*

$$\text{CTA}(S) \geq 4\pi + \bar{A}.$$

El segon apartat ja es demostrava a [LS00].

*Demostració.* Denotem  $K^+ = \max\{K, 0\}$  i  $K^- = \max\{-K, 0\}$ .

$$\begin{aligned} \int_S |K| dx &= \int_S K^+ dx + \int_S K^- dx = \\ &= 2 \int_S K^+ dx - \int_S K dx. \end{aligned}$$

Pel teorema de Gauss-Bonnet a  $\mathbb{H}^3$ ,

$$\int_S K dx = 2\pi\chi(S) + A. \quad (3.20)$$

Per altra banda, si  $U$  és l'interior de  $S \cap \bar{S}$  en  $\bar{S}$ , és clar que els plans de suport en punts de  $\bar{S} \setminus U$  tenen almenys dos punts de contacte amb  $S$ . Per tant, tenen un segment en comú amb  $\bar{S}$ . Pel teorema de Sard-Federer (cf. [Fed69, 3.4.3]), això implica que els plans de suport en punts de  $\bar{S} \setminus U$  tenen mesura nul·la en  $\gamma(\bar{S}) \subset \Lambda^n$ , conjunt de plans de suport. Per tant, els plans de suport en  $U$  tenen mesura total i per la proposició 3.4.6

$$4\pi + \bar{A} = \text{CTA}(\bar{S}) = \text{CTA}(U) = \int_U K.$$

Finalment,

$$\int_S K^+ \geq \int_U K = 4\pi + \bar{A}. \quad (3.21)$$

D'on es dedueix immediatament la segona part de l'enunciat. La primera part resulta de combinar (3.20) i (3.21).  $\square$

De la mateixa demostració es dedueix que a (3.19) val el signe d'igualtat si i només si **tots** els punts de  $S$  amb curvatura positiva pertanyen a la vora de l'embolcall convex. Ja hem dit que aquesta propietat caracteritza les anomenades superfícies tenses de  $\mathbb{R}^3$ . Si bé no està clar què vol dir ser tens a  $\mathbb{H}^3$ , pel que hem dit, una definició raonable seria dir que una superfície immersa a  $\mathbb{H}^3$  és *tensa* si es té igualtat a (3.19), o equivalentment si té tots els punts de curvatura positiva a la vora de l'embolcall convex. Cecil i Ryan van definir a [CR79] la propietat de ser tens a  $\mathbb{H}^n$  d'una manera més restrictiva que aquesta; però tractarem aquest tema més endavant.

És realment necessari el terme  $2\bar{A} - A$  a (3.19)? Aquesta és la pregunta que sorgeix naturalment. En alguns treballs s'expressava la creença que la desigualtat de Chern-Lashof havia de ser vàlida a  $\mathbb{H}^n$  sense canvis (cf. [Teu88, WS66]). Aquesta esperança es va refutar a [LS00] on es construeixen exemples de superfícies a  $\mathbb{H}^3$  amb curvatura total absoluta inferior a la cota de Chern-Lashof. Més concretament, per aquests exemples es compleix la igualtat a (3.19) i el terme  $2\bar{A} - A$  hi pren un valor negatiu. A continuació construïm uns exemples de l'estil d'aquells però amb un gènere molt més baix.

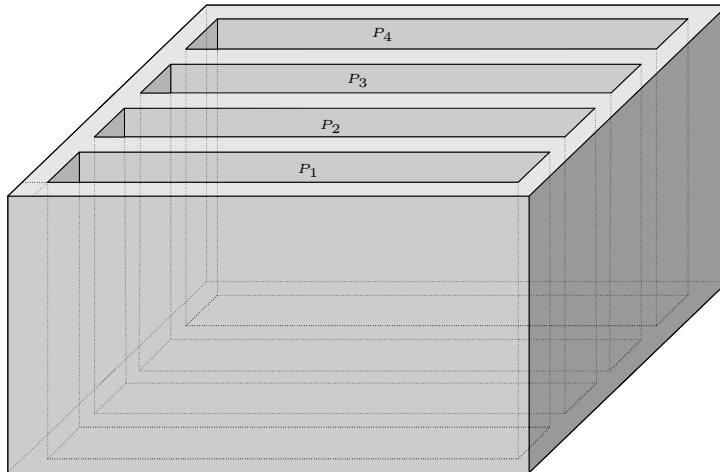


Figura 3.3: Superfície polièdrica de gènere 4

**Teorema 3.5.3.** *Per tot  $g > 1$  existeix superfície  $S$  a  $\mathbb{H}^3$  orientable de gènere  $g$  i amb curvatura total absoluta menor que  $2\pi(2 + 2g)$ .*

*Demostració.* La construirem quasi explícitament en el model projectiu. Considerem l'ortoeidre

$$P(a, b, c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c\}$$

per certs  $0 < a, b, c$  tals que  $a^2 + b^2 + c^2 < 1$  (i.e.  $P(a, b, c) \subset B(0, 1)$ ). Prenem ara un  $\epsilon > 0$  molt petit i dibuixem  $g$  rectangles a les cares superior i inferior de  $P(a, b, c)$  a distància  $\epsilon$  l'un de l'altre, tal com es veu a la figura 3.3. Aquests rectangles determinen

$g$  ortoedres sòlids  $P_1, \dots, P_g$  continguts a  $P(a, b, c)$ . Considerem ara el domini  $P = P(a, b, c) - \cup_i P_i$  de vora polièdrica. Aquesta vora és una superfície topològica orientable de gènere  $g$  però no diferenciable. Com que els seus vèrtexs són de tipus convex o bé sella, podem aplicar el procediment de [KP85] per obtenir una superfície  $S$  infinitament diferenciable que coincideixi amb  $\partial P$  fora d'un petit entorn de les arestes i que sigui tensa (en el sentit euclidià). Així, tots els punts de  $S$  de curvatura positiva pertanyen a  $\bar{S}$ , la vora de l'embolcall convex de  $P$ . Per tant, la curvatura total absoluta de  $S$  és

$$\text{CTA}(S) = 2\pi(2 + 2g) + 2\bar{A} - A$$

on  $\bar{A}$  i  $A$  són les àrees respectives de  $\bar{S}$  i  $S$ . Acabarem veient que, triant adequadament  $a, b$  i  $c$  podem fer que  $2\bar{A} - A$  sigui negatiu. En efecte, fem  $a$  tendir a 0. Llavors, les àrees dels costats de  $\partial P$  paral·lels a  $x = 0$  tendeixen totes a un mateix valor  $B > 0$ . La resta de costats de  $P$  tenen una àrea arbitràriament petita. Així doncs, com que  $S$  és arbitràriament propera a  $\partial P$ ,

$$\bar{A} \sim 2B \quad A \sim (2g + 2)B$$

i per  $g > 1$  tenim  $2\bar{A} - A < 0$  si  $a$  és prou petit. □

A partir d'aquests exemples sorgeixen algunes qüestions. La més general és la de trobar l'ímfim de la curvatura total absoluta de totes les immersions a  $\mathbb{H}^3$  d'una superfície donada. Aquest valor existeix i en el cas orientable està comprès entre  $4\pi$  i  $2\pi(2 + 2g)$ . Sembla prou raonable esperar que aquesta cota sigui creixent en  $g$  però això no és clar. En relació al tema, val la pena dir que per immersions incloses en una bola de radi  $\rho$ , es té la següent desigualtat (cf.[Teu88])

$$\text{CTA}(S) \geq \frac{O_{n-1}}{2} \frac{\beta(S)}{\cosh^{n-1} \rho}.$$

Una altra qüestió és saber si existeixen exemples com els d'abans amb gènere 1. La resposta és que no. Al final d'aquest capítol provarem que un tor pel qual es doni la igualtat a (3.19) té curvatura total absoluta més gran que  $8\pi$ . Això fa pensar que aquesta acotació pot valdre per qualsevol tor.

*Conjectura.* Per tota immersió d'un tor a  $\mathbb{H}^3$ , la curvatura total absoluta és més gran que  $8\pi$ .

Acabem aquesta discussió del cas de dimensió 3 amb una proposició sobre la integral del valor absolut de la curvatura **intrínseca**. Per curvatura intrínseca ens referim a la curvatura corresponent a la mètrica induïda per l'ambient. L'equació de Gauss diu que la curvatura intrínseca  $K_i$  i la curvatura extrínseca  $K$  estan lligades per la relació  $K = K_i + 1$ .

**Proposició 3.5.4.** [LS00] *Sigui  $i : S \rightarrow \mathbb{H}^3$  una superfície immersa a  $\mathbb{H}^3$ . Llavors*

$$\int_S |K_i| \geq 2\pi(4 - \chi(S))$$

on  $K_i$  és la curvatura intrínseca de  $M$ . La igualtat només es dona per esferes topològiques amb  $K_i$  mai negatiu. És a dir, per superfícies convexes amb curvatura de Gauss més gran o igual que 1.

*Demostració.* Sigui  $\bar{S}$  la vora de l'embolcall convex de  $S$ . Prenem  $K_i^+ = \max\{K_i, 0\}$  i  $K_i^- = -\min\{K_i, 0\}$ . Pels mateixos arguments de la demostració de la proposició 3.5.2,

$$\int_S K_i^+ \geq \int_{S \cap \bar{S}} K_i^+ \geq \int_{S \cap \bar{S}} K_i = \int_{S \cap \bar{S}} K - 1 = 4\pi + A(\bar{S}) - A(S \cap \bar{S}) \geq 4\pi. \quad (3.22)$$

Per altra banda,

$$\int_S K_i = \int_S K_i^+ - \int_S K_i^- = 2\pi\chi(S). \quad (3.23)$$

Comparant (3.22) i (3.23) obtenim el que buscavem.  $\square$

### 3.5.3 Immersions tenses a l'espai hiperbòlic.

Utilitzant les idees que ens han permès obtenir la fórmula de Cauchy-Crofton a l'esfera de de Sitter, i que també ens han donat el teorema de Gauss-Bonnet a l'espai hiperbòlic, provarem una fórmula de geometria integral per a la curvatura total absoluta d'immersions tenses a  $\mathbb{H}^n$ .

Aquí tornaran a jugar un paper important les funcions definides pels feixos d'hiperplans al voltant d'un  $(n-2)$ -pla. Concretament, donat  $L_{n-2}$  definim  $h_L : \mathbb{H}^n \setminus L_{n-2} \rightarrow \mathbb{RP}^1 = \mathbb{S}^1$  associant, a cada punt  $p \notin L_{n-2}$ , l'únic hiperpla que passa per  $p$  i conté  $L_{n-2}$ . Identifiquem naturalment el feix d'hiperplans al voltant de  $L_{n-2}$  amb  $\mathbb{RP}^1$ . No ens preocupem d'orientacions ja que només ens interessarà el nombre de punts crítics de les funcions  $h_L$  (restringides a subvarietats).

Suposem  $i : S \rightarrow \mathbb{H}^n$  una immersió. Sempre que  $L_{n-2}$  sigui disjunt de l'embolcall convex de  $i(S)$ , la funció  $i \circ h$  tindrà la imatge continguda en un interval de  $\mathbb{S}^1$ . Per tant podem pensar que és una funció amb valors a  $\mathbb{R}$ . Quan aquesta funció sigui de Morse, el número de punts crítics serà més gran que  $\beta(S, F)$ . Amb aquesta motivació, adoptem la següent definició d'immersió tensa a  $\mathbb{H}^n$ .

**Definició 3.5.2.** Sigui  $i : S \rightarrow \mathbb{H}^n$  una immersió a l'espai hiperbòlic. Diem que  $S$  és *tensa* si existeix un cos  $F$  tal que per tot  $(n-2)$ -pla  $L_{n-2}$  que no talla l'embolcall convex de  $i(S)$  i tal que la funció  $h_L \circ i$  és de Morse, el nombre de punts crítics és igual a  $\beta(S, F)$ .

Exsiteixen altres definicions, més semblants a l'euclidiana, que són equivalents a aquesta.

**Proposició 3.5.5.** *Les següents condicions són equivalents*

- i) *La immersió  $i : S \rightarrow \mathbb{H}^n$  és tensa*
- ii) *per tota recta  $L$  si la projecció ortogonal  $\pi_L \circ i : S \rightarrow L$  és de Morse, el número de punts crítics és igual a la suma dels números de Betti  $\beta(S, F)$  per algun cos  $F$ ,*



iii) per tot semiespai tancat  $H$  limitat per un hiperpla geodèsic, la inclusió  $j : i^{-1}(H) \longrightarrow S$  indueix un monomorfisme a nivell d'homologies  $j_* : \check{H}_*(i^{-1}(H), F) \rightarrow \check{H}_*(S, F)$ ,

iv) la inclusió és tensa en el sentit euclidià quan prenem el model projectiu de  $\mathbb{H}^n$ .

*Demostració.* Notem abans que res que la condició iv) hauria de ser invariant per les isometries del model projectiu. Ho és ja que la propietat euclidiana de ser tens és invariant per projectivitats que no enviïn punts de la subvarietat a l'infinit. Aquest mateix fet permet veure que ii) és equivalent a iv). N'hi ha prou amb fer passar  $L$  per l'origen del model i les projeccions ortogonals sobre  $L$  es veuran com euclidianament ortogonals. Per veure que iv) implica i) enviïm a l'infinit un hiperpla qualsevol disjunt amb  $i(S)$  que contingui  $L_{n-2}$ . Llavors la funció  $h_L$  es converteix en una projecció ortogonal sobre una direcció  $u \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  i, com que  $S$  és euclidianament tensa, tindrà  $\beta(S, F)$  punts crítics. Notem de passada que per gairebé tot  $L_{n-2}$  contingut en un hiperpla  $L_{n-1}$  disjunt de  $i(S)$ , la funció  $h_L \circ i$  és de Morse. En efecte, pel teorema de Sard quasi per tot  $u \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  la projecció ortogonal és de Morse.

Per veure que i) implica iii) continuem pensant en el model projectiu i prenem  $H$  un semiespai limitat per un hiperpla. Prenem un hiperpla  $L_{n-1}$  ortogonal a  $\partial H$  que no talli  $i(S)$ . Pel darrer comentari del paràgraf anterior, és clar que hi ha una successió de semiespais  $H_i$  tals que  $\partial H_i$  és transvers a  $i(S)$ ,  $i^{-1}(H_i) \supset i^{-1}(H_{i+1})$  amb  $H = \bigcap H_i$ , i tals que per  $L = \partial H_i \cap L_{n-1}$  la funció  $h_L \circ i$  és de Morse. Sabem per hipòtesi que  $h_L \circ i$  té  $\beta(S)$  punts crítics. Els arguments estàndards de teoria de Morse (cf. [Kui97], p.35) proven que  $i^{-1}(H_i) = (h_L \circ i)^{-1}((-\infty, 0]) \subset S$  indueix un monomorfisme d'homologies. Tenim

$$i^{-1}H \subset \dots \subset i^{-1}(H_2) \subset i^{-1}(H_1) \subset S$$

i a cada etapa tenim un morfisme injectiu a nivell d'homologies. Com que  $H_*(S)$  és de dimensió finita, per força la successió a nivell d'homologies estabilitza i tenim que  $i^{-1}(H) \subset S$  indueix un morfisme injectiu d'homologia.

Finalment és clar que iii) implica iv) si tenim en compte la proposició 3.5.1 i el fet que els hiperplans geodèsics al model projectiu són hiperplans afins.  $\square$

La definició 3.5.2 és menys restrictiva que la que donaven Cecil i Ryan a [CR79] per immersions tenses a  $\mathbb{H}^n$ . En efecte, la seva condició és com segueix. Donat un hiperpla orientat  $L_{n-1}$ , considerem la funció  $d_L$  distància (amb signe) a  $L_{n-1}$ . Donada una immersió  $i : S \rightarrow \mathbb{H}^n$  i un valor  $a \in \mathbb{R}$  considerem el tancat  $S_a = (d_L \circ i)^{-1}((-\infty, a])$  de  $S$ . La immersió  $i$  és tensa en el sentit de Cecil i Ryan si per tot  $L_{n-2}$  i tot  $a \in \mathbb{R}$ , la inclusió  $j : S_a \rightarrow S$  indueix un monomorfisme a les homologies  $j_* : \check{H}_*(S_a, F) \rightarrow \check{H}_*(S, F)$ . Notem doncs, que nosaltres demanem el mateix però només pel valor  $a = 0$ .

Per comprovar que la definició 3.5.2 és realment menys restrictiva que la de [CR79] n'hi ha prou amb observar que la vora d'un conjunt convex sempre és tensa segons la definició que hem pres aquí però no segons la de Cecil i Ryan.

Es podria adoptar la següent definició que no utilitzarem. Una immersió és  $\lambda$ -geodèsicament tensa si és tensa respecte hipersuperfícies equidistants de curvatura normal menor o igual que  $\lambda$  (cf. secció 1.1.1). Més precisament,  $i$  és  $\lambda$ -geodèsicament tensa si

$j_* : H(S_a, F) \rightarrow H(S, F)$  és monomorfisme per tot  $a$  tal que  $|\tanh a| \leq \lambda$ . D'aquesta manera, les immersions de 3.5.2 serien 0-tenses i les de [CR79] serien 1-tenses. A més, una esfera topològica seria  $\lambda$ -tensa si i només si fos  $\lambda$ -convexa (cf. definició 1.1.2).

La definició 3.5.2 és la menys restrictiva dins les que generalitzen la definició euclidiana d'immersió tensa. En qualsevol cas, en els enunciat que venen, la condició de ser tens apareix sempre com a hipòtesi. Per tant, aquests resultats també serien vàlids si prenguéssim una definició de tens més restrictiva, com és la de [CR79].

Abans d'entrar en detalls avancem el resultat principal. Donada una immersió  $i : S \rightarrow \mathbb{H}^n$  d'una varietat  $S$  compacta de dimensió  $r$ , la seva curvatura total absoluta és

$$\text{CTA}(S) = \frac{1}{2} \int_{N(S)} |K(x, \mathbf{n})| d\mathbf{n} dx.$$

Provarem que si  $i$  és tensa (respecte algun cos  $F$ ), llavors

$$\int_{\mathcal{L}_{n-2}} (\beta(S, F) - \nu(L_{n-2}, i(S))) dL_{n-2} = \frac{O_{n-2}}{n-1} (\text{CTA}(S) - \frac{O_{n-1}}{2} \beta(S, F))$$

on  $\nu(L_{n-2}, i(S))$  és el número de punts crítics de la funció  $h_L \circ i$  (o bé el nombre de tangències amb  $i(S)$  del feix de plans que contenen  $L_{n-2}$ ). Notem que la definició d'immersió tensa garanteix justament que l'integrand és zero per tot  $(n-2)$ -pla que no talli l'embolcall convex de  $i(S)$ .

Comencem amb el següent lema que tracta d'immersions tenses euclidianes però que, en virtut de l'apartat *iv*) de la proposició 3.5.5 i de la proposició 1.2.3, també s'aplica a immersions dins  $\mathbb{H}^n$ .

**Lema 3.5.6.** *Sigui  $i : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  una immersió tensa d'una hipersuperfície. Considerem un  $(n-2)$ -pla genèric  $L$  i el feix  $L(t) = L + tv$  per tot  $t \in \mathbb{R}$  i algun vector unitari  $v$  ortogonal a  $L$ . Si  $\nu(L, i(S))$  és el número de punts crítics de  $h_L \circ i$ , llavors quasi per tot  $t_0 \in \mathbb{R}$*

$$\nu(L(t_0), i(S)) - \nu(L, i(S)) = -2 \sum_{\substack{L(t) \subset diT_x S \\ 0 \leq t \leq t_0}} \text{sgn} K_x \text{sgn} K_x(L)$$

on  $K_x$  denota la curvatura de  $S$  respecte al normal  $\mathbf{n}$  que fa  $\langle v, \mathbf{n} \rangle > 0$  i  $K_x(L)$  és la curvatura normal en la direcció de  $L$  també respecte  $\mathbf{n}$ .

*Demostració.* Prenem el 2-pla vectorial  $h$  ortogonal a  $L$  i considerem la projecció ortogonal  $\pi_h$  sobre  $h$ . Considerem el conjunt  $\Gamma_h \subset S$  de punts crítics de l'aplicació  $p_h = \pi_h \circ i : S \rightarrow h$  (figura 3.4). Per  $h$  genèric,  $\Gamma_h$  és una corba diferenciable (cf. [Lan97, LS82]). Així és clar que la imatge  $\gamma_h = p_h(\Gamma_h)$  és una corba diferenciable fora d'un conjunt finit de punts. En particular, quasi per tota direcció  $u \in \mathbb{P}(h)$ , projectivització de  $h$ , la projecció ortogonal de  $S$  en  $u$  és de Morse. Per altra banda, és clar que els hiperplans tangents a  $S$  que contenen un  $L + tv$  són tangents en punts de

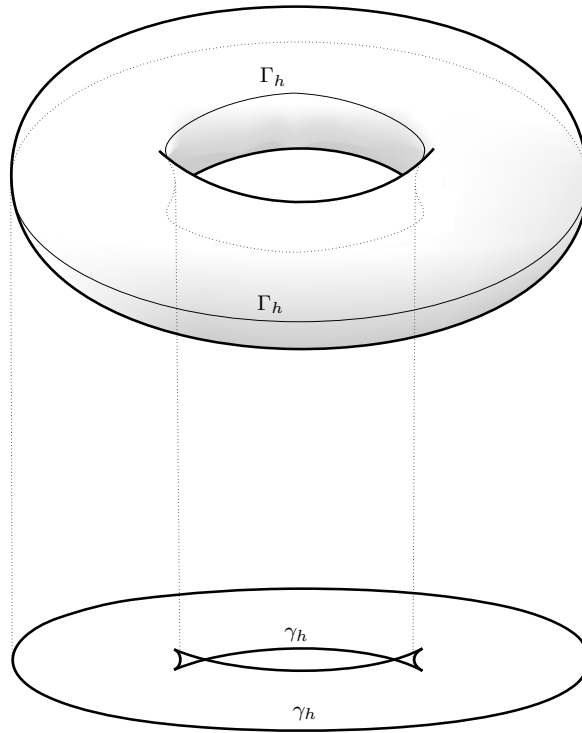


Figura 3.4: Corbes polars

$\Gamma_h$ . Per tant, aquests hiperplans corresponen, al tallar amb  $h$ , a rectes tangents a  $\gamma_h$  que passen per  $p + tv$  on  $p = L \cap h$ . A més, per  $h$  genèric les singularitats de  $\gamma_h$  són cúspides. En efecte, com que el pla tangent a  $S$  en els punts de  $\Gamma_h$  varia de forma contínua, si a  $p \in \gamma_h$  hi hagués més d'una recta tangent voldria dir que hi ha un interval de  $\Gamma_h$  projectant-se sobre  $p$ . És clar que podem evitar que això passi si prenem  $h$  genèric.

Sigui  $y(s)$  una parametrització de  $\gamma_h$  per l'arc. Haurem de tenir en compte que  $y'$  canvia bruscament el seu signe en els punts singulars. Mirem el punt d'intersecció de la recta tangent a  $y(s)$  amb la recta  $p + \langle v \rangle$ ; això és  $z(s) = (y(s) + \langle y'(s) \rangle) \cap (p + \langle v \rangle)$  (figura 3.5) que és contínua mentre  $y'$  i  $v$  no siguin paral·lels. Per certs  $f(s)$  i  $g(s)$ , podem escriure

$$y(s) + g(s)y'(s) = p + f(s)v \tag{3.24}$$

Derivant en un punt regular  $y(s)$ , obtenim

$$(1 + g'(s))y'(s) + g(s)k(s)n(s) = f'(s)v$$

on  $n$  és el vector normal donat per la orientació i  $k$  és la curvatura de  $\gamma_h$ . Multiplicant per  $n$ ,

$$g(s)k(s) = f'(s)\langle v, n(s) \rangle \tag{3.25}$$

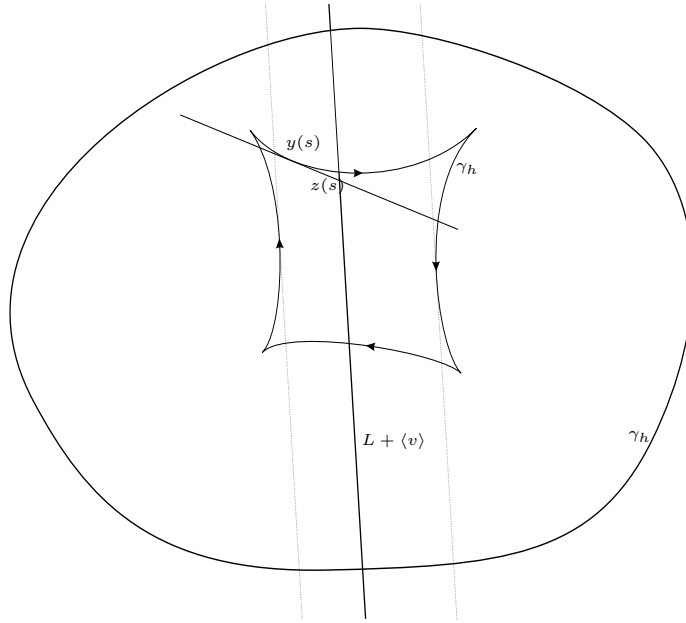


Figura 3.5: Corbes  $y(s)$  i  $z(s)$

A continuació provem que si la immersió de  $S$  és tensa llavors  $k$  té signe constant sobre cada corba tancada de  $\gamma_h$ . La curvatura  $k$  de  $\gamma_h$  pot canviar de signe en un punt d'inflexió, o bé en una singularitat o bé al passar per un interval de curvatura 0. Ens reduïm al primer cas ja que els altres dos es resolen de manera gairebé idèntica. Sigui, doncs,  $y(s_0)$  un punt d'inflexió on  $k$  canvia de signe. La figura 3.6 mostra una corba contenint punts d'inflexió i tal que per tot punt prou allunyat el nombre de rectes tangents que hi concorren és constant. Per descartar aquesta possibilitat, modifiquem lleugerament la immersió  $i$ . En primer lloc modifiquem la corba  $\gamma_h$  a l'entorn de  $y(s_0)$  de la manera següent (figura 3.6). Localment podem pensar  $\gamma_h$  com una funció  $a(x)$  amb  $a'(0) = a''(0) = 0$  i  $a(x) > 0$  per  $x > 0$  petits. Prenem un pendent  $\lambda > 0$  també petit i considerem la recta  $b(x) = \lambda x$ . Finalment considerem la funció

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x+\epsilon} - \frac{1}{x-\epsilon}} & -\epsilon < x < \epsilon \\ 0 & |x| \geq \epsilon \end{cases}$$

que és  $C^\infty$  i té un gràfic en forma de campana. Ara construïm

$$c(x) = (1 - \rho(x))a(x) + \rho(x)b(x).$$

Es veu fàcilment que per  $\lambda$  prou petit,  $c$  té un sol punt d'inflexió a l'origen amb derivada igual a  $\lambda$ . Si reemplaçem el gràfic de  $a(x)$  pel de  $c(x)$  a  $\gamma_h$  obtenim una nova corba diferenciable. Construïm un difeomorfisme  $\Phi : h \rightarrow h$  que sigui la identitat fora d'un entorn de  $y(s_0)$  i que modifiqui  $\gamma_h$  tal com hem explicat. Estenem trivialment  $\Phi$  al

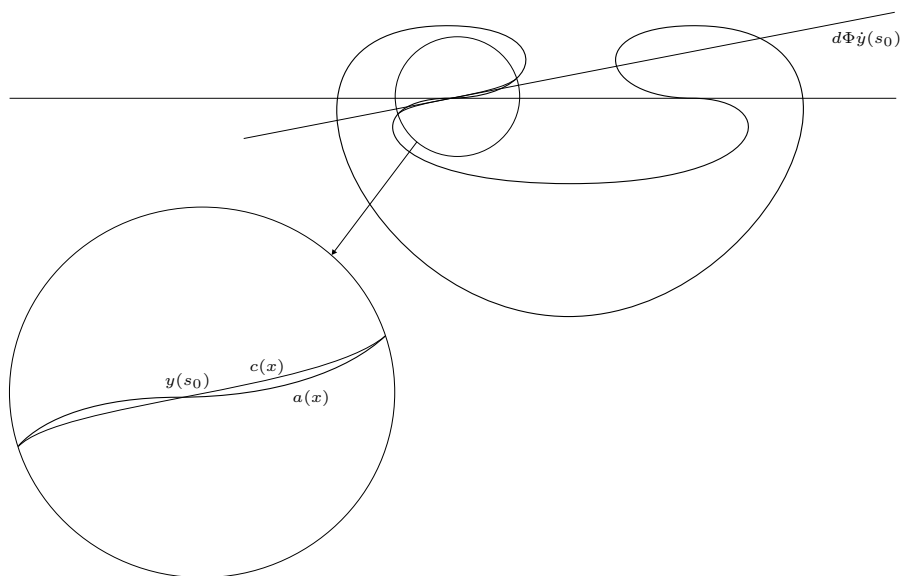


Figura 3.6: El cas a descartar

difeomorfisme  $\Psi = \Phi \times \text{id}$  de  $\mathbb{R}^n$ . La composició  $i' = \Psi \circ i : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  és una nova immersió de  $S$  que ja no té perquè ser tensa. La nova corba polar  $\gamma_h$  de  $S$  és la imatge per  $\Phi$  de l'antiga  $\gamma_h$ . Considerem l'interval  $I \subset \mathbb{P}(h)$  d'extremes  $y'(s_0)$  i  $d\Phi(y'(s_0))$ . Per tota direcció  $u \in I$ , la projecció ortogonal  $p_u$  de  $\gamma_h$  (i per tant la de  $i'(S)$ ) en  $u^\perp$  té menys de  $\beta(S, F)$  punts crítics. Per tal com hem triat  $h$ , per quasi totes aquestes direccions  $u$ , la funció  $p_u \circ i$  és de Morse. Com que al voltant dels punts crítics de  $p_u \circ i'$  no hem modificat  $i$ , deduïm que quasi per tot  $u$  de  $I$ , la funció  $p_u \circ i'$  és de Morse. Però això contradiu el fet que té menys de  $\beta(S, F)$  punts crítics!

Un cop hem vist que la curvatura  $k$  de  $\gamma_h$  no canvia de signe (encara que es pot anul·lar) sobre cada corba tancada, reprenem l' $(n-2)$ -pla  $L$  i el vector  $v$  del començament. Geomètricament és clar que quan  $\langle n, v \rangle$  canvia de signe,  $g$  també canvia de signe (passant per l'infinit). Per l'equació (3.25), si  $f'$  canvia de signe en un punt regular  $y(s_0)$  llavors  $g(s)$  també canvia de signe a  $s = s_0$ . Per altra banda, al travessar una singularitat,  $g(s)$  i  $n(s)$  canvien bruscament de signe i per l'equació (3.25) veiem que  $f'$  no canvia de signe en aquests punts.

Deduïm que  $f'$  canvia de signe en  $s$  només quan  $g$  s'anul·la. Per tant,  $f(s)$  és monòtona als intervals on  $g(s) \neq 0$ . Això és, mentre  $y(s)$  no creua la recta  $l = p + \langle v \rangle$ . De l'equació (3.24) deduïm que als punts de tall (tals que  $y(s_0) = z(s_0)$ ) es té  $g'(s_0) = -1$ . Derivant (3.24) altre cop, en un punt de tall  $s_0$  tenim

$$g''y' - kn = f''v \implies -k\langle v, n \rangle = f''.$$

Per tant, localment les corbes  $y(s)$  i  $z(s)$  estan en semiplans oposats respecte la recta tangent a  $y(s_0)$ .

Hem vist que el nombre d'antiimatges per  $z$  dels punts de  $l$  és constant sobre els intervals definits pels punts de tall amb  $\gamma_h$ . Si  $y(s)$  és un d'aquests punts, per  $\epsilon$  prou petit

$$\#z^{-1}(z(s) + \epsilon v) - \#z^{-1}(z(s) - \epsilon v) = -2\text{sgn}\langle v, n \rangle \text{sgn}k$$

on  $k$  és la curvatura de  $y$ .

Per acabar apliquem el teorema d'Ocagne (cf. [LS82]) que ens diu que la curvatura de  $S$  és el producte de la curvatura de  $\gamma_h$  per la curvatura normal de  $S$  en la direcció  $(h)^\perp$ . En particular,

$$\text{sgn}k = \text{sgn}K\text{sgn}K(h)^\perp.$$

□

Després d'aquesta demostració tan envitricollada el que segueix és mecànic.

**Proposició 3.5.7.** *Sigui  $i : S \rightarrow \mathbb{H}^n$  una immersió tensa d'una hipersuperfície en el model projectiu de  $\mathbb{H}^n$ . Considerem la família d'immersions  $i_t = h(1/t) \circ i$  on  $h(\lambda)$  és la homotècia euclidiana respecte l'origen de raó  $\lambda$  i  $t > 1$ . Llavors per  $t' > t > 1$*

$$\lim_{t' \rightarrow t} \frac{1}{t' - t} \int_{\mathcal{L}_{n-2}} (\nu(L_{n-2}, i_{t'}(S)) - \nu(L_{n-2}, i_t(S))) dL_{n-2} = -\frac{O_{n-2}}{n-1} \frac{d}{dt} \text{CTA}(i_t(S)).$$

*Demostració.* Fixem un  $L_{n-2}$  genèric. Reescalant es veu que la situació és equivalent a tenir  $i(S)$  fixa i moure  $L_{n-2}$  com en el lema 3.5.6. Així, per qualsevol normal  $n$  a  $i(S_t)$

$$\nu(L_{n-2}, i_{t'}(S)) - \nu(L_{n-2}, i_t(S)) = -2 \sum_{\substack{L_{n-2} \subset di_s T_x S \\ t \leq s \leq t'}} \text{sgn}\phi \text{sgn}K_s \text{sgn}K_s(L_{n-2}).$$

on  $\phi = \langle \partial i / \partial t, n \rangle$ . A partir d'aquí, resseguint la demostració del teorema 3.3.2 es veu que

$$\lim_{t' \rightarrow t} \frac{1}{t' - t} \int_{\mathcal{L}_{n-2}} (\nu(L_{n-2}, i_{t'}(S)) - \nu(L_{n-2}, i_t(S))) dL_{n-2} = O_{n-2} \int_{S_t} \phi \sigma_{n-2} \text{sgn}K dx$$

on  $\sigma_{n-2}$  és la curvatura mitja d'ordre  $n-2$  de  $S_t$ . D'altra banda, prenem  $U^+ = \{x \in S \mid K_x(S_t) > 0\}$  i  $U^- = \{x \in S \mid K_x(S_t) < 0\}$ . Si  $\gamma_t : S \rightarrow \mathcal{L}_{n-1}$  és l'aplicació de Gauss de  $i_t(S)$ , a la demostració del lema 3.4.1 hem vist que

$$\frac{d}{dt} \int_{U^+} K_t(x) dx = -(n-1) \int_{\gamma_t(U^+)} \phi \tilde{\sigma}_1 d\tilde{x}, \quad \frac{d}{dt} \int_{U^-} K_t(x) dx = -(n-1) \int_{\gamma_t(U^-)} \phi \tilde{\sigma}_1 d\tilde{x}$$

essent  $\tilde{\sigma}_1$  la curvatura mitja i  $d\tilde{x}$  l'element de volum de  $\gamma_t(S)$ . Restant obtenim

$$\frac{d}{dt} \int_S K_t dx = -(n-1) \int_{\gamma_t(S)} \phi \tilde{\sigma}_1 \text{sgn}K d\tilde{x}$$

i pel corollari 2.3.9 hem acabat.

□

**Teorema 3.5.8.** *Si  $i : S \rightarrow \mathbb{H}^n$  és una immersió tensa de codimensió arbitrària d'una varietat  $S$  compacta i sense vora, llavors la curvatura total absoluta ve donada per l'expressió*

$$\text{CTA}(i(S)) = \frac{O_{n-1}}{2}\beta(S) + \frac{n-1}{O_{n-2}} \int_{\mathcal{L}_{n-2}} (\beta(S) - \nu(L_{n-2}, i(S))) dL_{n-2} \quad (3.26)$$

on  $\beta$  és la suma dels números de Betti.

*Demostració.* Comencem pel cas en què  $S$  és hipersuperfície. Suposem que la immersió és al model projectiu. Considerant, per  $1 \leq t < \infty$  la família  $i_t$  d'immersions de la proposició anterior. La imatge  $i_t(S)$  estarà inclosa en una bola de radi  $1/t$ ; és a dir, arbitràriament petit. Integrant la fórmula de la proposició anterior tenim, per tot  $t > 1$ ,

$$\text{CTA}(i(S)) - \text{CTA}(i_t(S)) = \frac{n-1}{O_{n-2}} \int_{\mathcal{L}_{n-2}} (\nu(L_{n-2}, i_t(S)) - \nu(L_{n-2}, i(S))) dL_{n-2}$$

Com que la geometria de les boles petites de  $\mathbb{H}^n$  és cada cop més semblant a l'eulidiana i  $i_t$  és tensa en tot moment, és clar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{CTA}(i_t(S)) = \frac{O_{n-1}}{2}\beta(S).$$

Per altra banda, per tot  $L_{n-2}$  que no talli la bola de radi  $1/t$ , tenim  $\nu(L_{n-2}, i_t(S)) = \beta(S)$ .

Suposem ara que  $i : S \subset \mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$  és una immersió de codimensió més gran que 1 en el model projectiu. La idea és prendre el tub de  $S$ . Ara bé, per un radi prou petit aquest tub és una hipersuperfície tensa si i només si la suma dels nombres de Betti del fibrat normal unitari de  $S$  és el doble que la de  $S$  (cf. [BK97]). Un altre resultat de [BK97] diu això passa quan  $S$  està continguda en un hiperplà. Així, prenem una inclusió lineal  $j : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  entre models projectius i considerem el tub euclidià  $T_\epsilon$  de radi  $\epsilon$  al voltant de  $(j \circ i)(S)$ . Apliquem el cas anterior a  $T_\epsilon$  i fem tendir  $\epsilon$  a 0. Ara, un càlcul mostra que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{CTA}(T_\epsilon) = 2\text{CTA}((j \circ i)(S)) = \frac{2O_n}{O_{n-1}}\text{CTA}(i(S)).$$

Per altra banda, l'integrand de (3.26) és nul pels  $(n-1)$ -plans de  $\mathbb{H}^{n+1}$  que no tallen  $j(\mathbb{H}^n)$  ja que tampoc tallen l'embolcall convex de  $j \circ i(S)$ . La resta dels  $(n-1)$ -plans queden determinats per un  $(n-2)$ -pla de  $j(\mathbb{H}^n)$  i un vector. Així, com que quasi per tot  $(n-2)$ -pla  $L$  existeix un  $\epsilon$  tal que  $\nu(T_r, L) \equiv 2\nu(i(S), L \cap j(\mathbb{H}^n))$  per tot  $r < \epsilon$ , tenim

$$\begin{aligned} \frac{2O_n}{O_{n-1}}\text{CTA}(i(S)) &= \frac{O_n}{2}\beta(T_r(j \circ i(S))) - \\ &\quad - \frac{n}{O_{n-1}} \cdot \frac{O_1}{n} \int_{\mathcal{L}_{[n](n-2)}} (\beta(T_r(j \circ i(S))) - 2\nu(i(S), L \cap j(\mathbb{H}^n))) dL_{n-2} \end{aligned}$$

i acabem perquè ja hem dit que en aquest cas la suma de nombres de Betti del fibrat normal unitari és el doble de la de  $S$ .  $\square$

Apliquem els resultats anteriors al cas de dimensió 3. Obtindrem altre cop que una superfície tensa a  $\mathbb{H}^3$  compleix la igualtat de (3.17). Sigui  $i : S \rightarrow \mathbb{H}^3$  una superfície immersa a  $\mathbb{H}^3$  de forma tensa. Tenim

$$\int_{\mathcal{L}} (4 - \chi(S) - \nu(i, L)) dL = \pi(\text{CTA}(S) - 2\pi(4 - \chi(S))).$$

La integració es pot restringir a les rectes que tallen l'embolcall convex de  $i(S)$ . Per cada recta  $L$  considerem el camp  $X(p) = d(p, L) \cdot \nabla h_L(p)$ , tangent a la rotació al voltant de  $L_{n-2}$ , que és diferenciable a tot  $\mathbb{H}^n$ . Sigui  $Y$  la projecció ortogonal de  $X$  sobre el tangent de  $i(S)$ . La fórmula de Poincaré diu que  $\chi(S) = i_+ - i_-$  on  $i_+$  és el número de singularitats de  $Y$  d'índex positiu i  $i_-$  el de les d'índex negatiu. En aquest cas,  $i_+$  és el número de punts de  $L \cap i(S)$  més el número de plans que contenen  $L$  i són tangents a  $i(S)$  en punts de curvatura positiva. Però si  $i$  és tensa tots els punts de curvatura positiva pertanyen a  $\bar{S}$ , la vora de l'embolcall convex. Per tant, si  $L$  talla  $\bar{S}$  tenim  $i_+ = \#(L \cap i(S))$  i  $i_- = \nu(i, L) = \#(L \cap i(S)) - \chi(S)$ . Així

$$\int_{\{L \cap \bar{S} \neq \emptyset\}} (4 - \#(L \cap i(S))) dL = \pi(\text{CTA}(S) - 2\pi(4 - \chi(S))).$$

I aplicant la fórmula de Cauchy-Crofton retrobem

$$\text{CTA}(S) = 2\pi(4 - \chi(S)) + 2\bar{A} - A$$

on  $A$  i  $\bar{A}$  són les àrees de  $i(S)$  i la vora de  $\bar{S}$ , respectivament.

Altre cop en dimensió arbitrària, combinant el teorema 3.5.8 i les idees del lema 3.5.6 obtenim la següent proposició que per  $n = 3$  és un cas particular de la conjectura de la pàgina 79.

**Teorema 3.5.9.** *La curvatura total absoluta d'una immersió tensa del tor  $T^2$  a  $\mathbb{H}^n$  és estrictament més gran que  $8\pi$ .*

*Demostració.* Sigui  $i : T^2 \rightarrow \mathbb{H}^n$  una immersió tensa del tor  $T^2$ . Considerem  $L$  un  $(n-2)$ -pla genèric. Veurem que  $\nu(i, L) \leq 4$ . Prenem  $h$  un 2-pla ortogonal a  $L$ . Considerem la corba  $\gamma_h$  formada pels valors crítics de la projecció ortogonal de  $T^2$  sobre  $h$ . Pel fet de ser  $i$  tensa sabem que per quasi tota direcció  $u \in \mathbb{P}(h) \equiv \mathbb{RP}^1$  hi ha 4 rectes en  $h$ , de direcció  $u$  i tangents a  $\gamma_h$ .

D'altra banda,  $\gamma_h$  està formada per dues components connexes  $C_1$  i  $C_2$ , la més exterior de les quals ( $C_1$ ) és convexa ja que correspon als punts crítics que pertanyen a l'embolcall convex de  $i(T^2)$ .

Hem de veure que del punt  $p = L \cap h$  no surten més de 4 rectes tangents a  $\gamma_h$ . Quasi per tot  $p$  que sigui exterior a  $C_1$  hi ha exactament 4 rectes tangents passant per  $p$ . Suposem que  $p$  és interior a  $C_1$  i no a  $C_2$ . Podem moure  $p$  al llarg d'una semirecta que només talla  $\gamma_h$  en un punt, que serà de  $C_1$ . Al creuar aquest punt, com que la corba  $C_2$  és convexa, pel lema 3.5.6 tenim que  $p$  guanya 2 rectes tangents. Així, pels punts continguts entre  $C_1$  i  $C_2$  hi passen 2 rectes tangents. Finalment suposem que  $p$  també és



interior a  $C_2$ . En aquest cas,  $C_2$  dóna exactament una volta entorn de  $p$ . En efecte, si el nombre de voltes fos més gran, per cada direcció tindriem més de dues rectes tangents a  $C_1$  amb la direcció donada. Per tant, podem unir  $p$  amb un punt  $p'$  com el del cas anterior a través d'una poligonal que talli  $C_2$  en un sol punt. Al creuar  $C_2$ , el punt  $p$  pot guanyar o perdre 2 rectes tangents. Com que per  $p'$  hi passen 2 rectes tangents, per  $p$  n'hi poden passar 4 o cap. En qualsevol cas hem vist que el nombre màxim de rectes tangents a  $\gamma_h$  concurrents en un punt és 4. Finalment, la desigualtat és estricta ja que sempre hi haurà algun  $L$  genèric pel qual  $\nu$  valgui 2.  $\square$



## Capítol 4

# Desigualtats entre les integrals de curvatura mitja

### 4.1 Introducció

A l'espai euclidià, són conegudes les desigualtats de Minkowski. Aquestes s'apliquen a conjunts convexos i involucen les seves Quermassintegrals i per tant les integrals de curvatura mitja. Concretament estableixen, per un convex  $Q \subset \mathbb{H}^n$ ,

$$M_i(\partial K)^j \geq cM_j(\partial K)^i \quad i > j$$

per certes constants  $c$ . Per exemple, a  $\mathbb{R}^3$  són

$$M_0^2 \geq 36\pi V^2, \quad M_1^3 \geq 48\pi^2 V, \quad M_1^2 \geq 4\pi M_0 \quad \text{i} \quad M_0^2 \geq 3VM_1.$$

Fixem-nos en els exponents. Es comprèn que hi apareguin si diem que  $M_i$  és una magnitud d'ordre  $n - i - 1$ . És a dir, si  $tQ$  és l'homotètic a  $Q$  de raó  $t$ , llavors  $M_i(t\partial Q) = t^{n-i-1}M_i(Q)$ . Això fa que no tingui sentit comparar  $M_i$  amb  $M_j$  si no s'eleva a la potència adequada. Més clar encara, per una bola de radi  $R$ , el quocient  $M_i/M_j = R^{i-j}$  (cf. (1.10)) pot prendre qualsevol valor positiu. Per tant, no pot ser certa cap desigualtat de l'estil  $M_i > cM_j$ .

Potser val la pena aquí de recordar la següent observació de Santaló (cf. [San70]). Per tota successió de convexos  $Q_r$  tendint a omplir  $\mathbb{R}^n$  es compleix

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M_i(\partial Q_r)}{M_j(\partial Q_r)} = 0 \quad i < j. \quad (4.1)$$

A l'espai hiperbòlic, en canvi, no tenim aquest concepte d'ordre de magnitud. En primer lloc no existeixen les homotècies. En segon lloc, a l'exemple de les boles tenim  $M_i/M_j = \tanh^{j-i} R$  que per  $j < i$  és estrictament més gran que 1. Per tant, no sembla tan descabellada la idea de comparar  $M_i$  i  $M_j$  sense elevar-los a cap potència. També caldrà considerar el problema de comparar les Quermassintegrals  $W_i$  d'un convex a  $\mathbb{H}^n$

ja que aquestes també generalitzen les integrals de curvatura mitja dels convexos de  $\mathbb{R}^n$ . Per exemple, és ben conegut que per tot domini  $Q \subset \mathbb{H}^n$

$$\text{vol}(Q)(n-1) < \text{vol}(\partial Q). \quad (4.2)$$

De fet, un resultat de Yau (cf. [Yau75]) diu que la desigualtat anterior val en tota varietat simplement connexa amb curvatura seccional  $K \leq -1$ .

En aquest capítol provem desigualtats del tipus

$$M_i(\partial Q) > cM_j(\partial Q) \quad i > j$$

on  $Q \subset \mathbb{H}^n$  és un convex qualsevol. Utilitzem la geometria integral de forma essencial, especialment la fórmula (3.14). L'esquema que seguirem comença per trobar desigualtats entre les Quermassintegrals. Això es fa mitjançant un argument geomètric elemental però força original i efectiu. A partir d'aquí, gràcies a la simplicitat de l'expressió (3.14), obtenim desigualtats entre les integrals de curvatura mitja.

Notem que si a una bola de  $\mathbb{H}^n$  li fem créixer el radi  $R$  fins a infinit llavors el quocient  $\text{vol}(B(R))/\text{vol}(\partial B(R))$  s'aproxima efectivament a la cota  $n-1$  donada per (4.2). De fet, Santaló i Yañez van provar a [SY72] que això passava amb qualsevol successió de dominis  $h$ -convexos creixent fins a omplir  $\mathbb{H}^2$ . Allà (i més tard a [San80]) es conjecturava que això podia ser cert per qualsevol successió de dominis (geodèsicament) convexos. Més tard, Gallego i Reventós (cf. [GR85]) van provar que això no era cert construint successions de polígons regulars que tendien a omplir  $\mathbb{H}^2$  i per les quals el quocient entre l'àrea i el perímetre tendia a qualsevol valor entre 1 i infinit. Al final d'aquest capítol construirem exemples que generalitzen aquest fet a dimensions superiors.

Pel que fa a les successions d' $h$ -convexos, Borisenko i Miquel van generalitzar el resultat de Santaló i Yañez provant que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(Q_r)}{\text{vol}(\partial Q_r)} = \frac{1}{n-1} \quad \text{i} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M_i(\partial Q_r)}{M_j(\partial Q_r)} = 1$$

per tota successió  $(Q_r)$  de dominis  $h$ -convexos creixent fins a omplir l'espai hiperbòlic. Aquest comportament tan controlat dels dominis  $h$ -convexos respecte els convexos generals va motivar l'estudi de les mateixes qüestions per successions  $(Q_r)$  de dominis  $\lambda$ -convexos per  $0 \leq \lambda \leq 1$  tendint a omplir  $\mathbb{H}^n$ . Concretament es va provar a [BV97] que

$$\frac{1}{n-1} \leq \lim \frac{\text{vol}(Q_n)}{\text{vol}(\partial Q_n)} \leq \frac{\lambda}{n-1} \quad (4.3)$$

Per dimensió 2, a [GR99] es donen exemples de successions que assoleixen tots els valors límit permesos per les desigualtats anteriors. Al final d'aquest capítol construïm successions que mostren el mateix en dimensió arbitrària.

En connexió amb aquests problemes, també s'ha estudiat el valor límit del quocient entre el diàmetre i el perímetre de successions de convexos tendint a omplir  $\mathbb{H}^2$  (cf. [GS01]). Concretament s'ha trobat que aquest límit està condicionat pel límit del quocient entre l'àrea i el perímetre així com per l'assumpció de  $\lambda$ -convexitat.

Per completitud, esmentem que darrerament han aparegut diverses generalitzacions d'aquests resultats en varietats de curvatura negativa acotada. En una d'aquestes varietats es diu que un domini  $Q$  és  $\lambda$ -convex si la seva vora té curvatura normal més gran que  $\lambda > 0$  en tot punt i per tota direcció. En una varietat simplement connexa amb curvatura seccional acotada per  $-k_1^2 \leq K \leq k_2^2$ , es va provar a [BGR01] que per tota successió  $Q_r$  de  $\lambda$ -convexos tendint a omplir la varietat, es té

$$\frac{\lambda}{k_2^2(n-1)} \leq \lim_r \frac{\text{vol}(Q_r)}{\text{vol}(\partial Q_r)} \leq \frac{1}{k_1^2(n-1)} \quad (4.4)$$

o també ([BM02])

$$\frac{\lambda^{i-j}}{k_2^2} \leq \frac{M_i(\partial Q)}{M_j(\partial Q)} \leq \frac{\lambda^{j-i}}{k_1^2}. \quad (4.5)$$

Malauradament els nostres mètodes, tan lligats a la geometria integral, difícilment poden ser útils en varietats no homogènies com són aquestes.

## 4.2 Desigualtats entre Quermassintegrals

En aquesta secció provarem que per tot convex  $Q$  de  $\mathbb{H}^n$ ,

$$W_r(Q) < c_{n,r,j} W_{r+j}(Q)$$

per certes constants  $c_{n,r,j}$  dependent de les dimensions.

Comencem provant desigualtats similars per convexos de  $\mathbb{S}^n$  que ens seran útils més endavant. Recordem que l'espai dels  $r$ -plans geodèsics de  $\mathbb{S}^n$  no és altre que la grassmanniana  $G(r+1, n+1)$  dels  $(r+1)$ -plans vectorials de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Proposició 4.2.1.** *Sigui  $Q$  un convex de  $\mathbb{S}^n$ . Aleshores, per  $s = 1, \dots, n-1$  i  $r = 0, \dots, n-s-1$*

$$\int_{G(r+1, n+1)} \chi(L_r \cap Q) \, dL_r \leq \frac{O_{r+s} \cdots O_{r+1}}{O_{n-r-1} \cdots O_{n-r-s}} \int_{G(r+s+1, n+1)} \chi(L_{r+s} \cap Q) \, dL_r$$

*i la igualtat només es dona quan  $Q$  és un hemisferi de  $\mathbb{S}^n$ .*

*Demostració.* Denotem  $G(r+1, r+s+1, n+1)$  l'espai de banderes format pels parells  $L_r \subset L_{r+s}$  de plans geodèsics de  $\mathbb{S}^n$ . Recordem (cf.(2.5)) que en aquest espai

$$dL_{(r+s)[r]} dL_r = dL_{[r+s]r} dL_{r+s}$$

on  $dL_{[r+s]r}$  és la mesura a la grassmanniana dels  $r$ -plans continguts a  $L_{r+s}$  i  $dL_{(r+s)[r]}$  és la mesura a la grassmanniana dels  $(r+s)$ -plans que contenen  $L_r$ .

Observem que, per tota bandera de  $G(r, r + s, n + 1)$ , si el pla de dimensió  $r$  (asta) talla  $Q$ , també ho fa el de dimensió  $r + s$  (drap). Per tant

$$\begin{aligned} \text{vol}(G(r + 1, r + s + 1)) \int_{G(r+s+1, n+1)} \chi(L_{r+s} \cap Q) dL_{r+s} &= \\ &= \int_{G(r+1, r+s+1, n+1)} \chi(L_{r+s} \cap Q) dL_{[r+s]r} dL_{r+s} \geq \\ &\geq \int_{G(r+1, r+s+1, n+1)} \chi(L_r \cap Q) dL_{(r+s)[r]} dL_r = \\ &= \text{vol}(G(s, n + 1 - r)) \int_{G(r+1, n+1)} \chi(L_r \cap Q) dL_r. \end{aligned}$$

Recordem, per acabar, que

$$\text{vol}(G(r, n)) = \frac{O_{n-1} \cdots O_{n-r}}{O_{r-1} \cdots O_0}.$$

□

Recordant la definició 2.2.1 obtenim el següent corol·lari.

**Corol·lari 4.2.2.** *Si  $Q \subset \mathbb{S}^n$  és convex llavors*

$$W_r(Q) \leq \frac{(n-r) O_{r+s} O_{n-r-s-1}}{(n-r-s) O_{n-r-1} O_r} W_{r+s}(Q).$$

*amb igualtat només pels hemisferis.*

*Observació.* Aquest resultat només és vàlid per convexos. Per dominis en general hi ha contraexemples. Sense anar més lluny, per  $\mathbb{S}^2$  menys un petit entorn del pol nord  $W_1 \sim 0$  i  $W_0 \sim 4\pi$ .

Utilitzant aquests resultats, es proven els anàlegs a l'espai hiperbòlic.

**Proposició 4.2.3.** *Sigui  $Q$  un convex de  $\mathbb{H}^n$  contingut en una bola de radi  $R$ . Aleshores, per  $s = 1, \dots, n-1$  i  $r = 0, \dots, n-s-1$*

$$\int_{\mathcal{L}_r} \chi(L_r \cap Q) dL_r < \tanh^s(R) \frac{O_{r+s-1} \cdots O_r}{O_{n-r-2} \cdots O_{n-r-s-1}} \int_{\mathcal{L}_{r+s}} \chi(L_{r+s} \cap Q) dL_{r+s}.$$

*Demostració.* Escollim un origen  $O \in Q$ . Denotarem per  $P_r$  els subespais vectorials de  $\mathbb{R}^n$  de dimensió  $r$ . Utilitzant l'expressió (2.4) de la mesura d' $r$ -plans,

$$\int_{\mathcal{L}_r} \chi(L_r \cap Q) dL_r = \int_{G(n-r, n)} \int_{P_{n-r}} \chi(L_r \cap Q) \cosh^r \rho dx dP_{n-r}$$

on  $dx$  és l'element de volum de cada  $P_{n-r}$  i  $L_r$  és l' $r$ -pla ortogonal a  $P_{n-r}$  en el punt  $x$ . Pel que fa a  $dP_{n-r}$ , és una mesura invariant a  $G(n-r, n)$ ; la mateixa que dona lloc a la

mesura dels  $(n - r - 1)$ -plans a  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Expressem  $dx$  en coordenades polars. És a dir, determinem  $x$  per la seva distància a  $O$  i per la recta que els uneix.

$$\int_{\mathcal{L}_r} \chi(L_r \cap Q) dL_r = \int_{G(n-r,n)} \int_{\mathbb{R}P^{n-r-1}} \int_{\mathbb{R}} \chi(L_r \cap Q) \cosh^r \rho |\sinh^{n-r-1} \rho| d\rho dP_{[n-r]1} dP_{n-r}$$

on  $dP_{[n-r]1}$  és l'element de volum de  $\mathbb{R}P^{n-r-1}$ . La fórmula (2.5) diu, referint-se a les mesures equivalents en espais de plans de  $\mathbb{S}^n$ , que  $dP_{[n-r]1} dP_{n-r} = dP_{(n-r)[1]} dP_1$  on  $dP_{(n-r)[1]}$  és la mesura dels  $P_{n-r}$  que contenen  $P_1$ . Per tant,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}_r} \chi(L_r \cap Q) dL_r &= \int_{\mathbb{R}P^{n-1}} \int_{G(n-r-1,(P_1)^\perp)} \int_{\mathbb{R}} \chi(L_r \cap Q) \cosh^r \rho |\sinh^{n-r-1} \rho| d\rho dP_{(n-r)[1]} dP_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}P^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{G(r,(P_1)^\perp)} \chi(L_r \cap Q) dP_r \right) \cosh^r \rho |\sinh^{n-r-1} \rho| d\rho dP_1. \end{aligned}$$

Ara, donats  $P_1$  i  $\rho$  (i.e. donat  $x$ ), projectivitzem (des de  $x$ ) l'hiperpla  $L_{n-1}$  ortogonal a  $P_1$  en  $x$ . La integral entre parèntesis és la mesura del conjunt de  $(r - 1)$ -plans geodèsics que tallen un convex de  $\mathbb{S}^{n-2}$ . Aplicant la proposició 4.2.1 acotem aquesta mesura en funció de la mesura de  $(r + s - 1)$ -plans que tallen aquest convex de  $\mathbb{S}^{n-2}$ . Obtenim

$$\int_{G(r,(P_1)^\perp)} \chi(L_r \cap Q) dP_r \leq \frac{O_{r+s-1} \cdots O_r}{O_{n-r-2} \cdots O_{n-r-s-1}} \int_{G(r+s,(P_1)^\perp)} \chi(L_{r+s} \cap Q) dP_{r+s}.$$

I hem acabat ja que  $-R \leq \rho \leq R$  i per tant

$$\cosh^r \rho |\sinh^{n-r-1} \rho| \leq \tanh^s R \cosh^{r+s} \rho |\sinh^{n-r-s-1} \rho|.$$

□

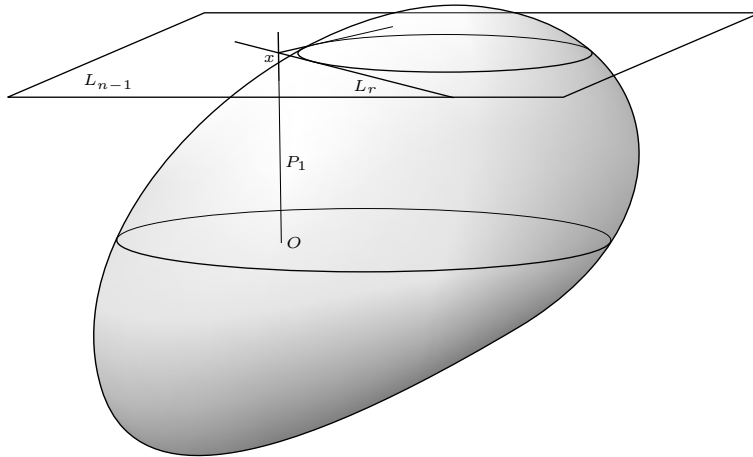


Figura 4.1:  $r$ -plans que tallen  $Q$

**Corol·lari 4.2.4.** *Si  $Q \subset B(R) \subset \mathbb{H}^n$  és convex, llavors*

$$W_r(Q) < \tanh^s R \frac{n-r}{n-r-s} W_{r+s}(Q).$$

En particular, com que  $\tanh R < 1$  tenim que sempre

$$W_r(Q) < \frac{n-r}{n-r-s} W_{r+s}(Q) \quad (4.6)$$

i aquesta desigualtat és més ajustada com més gran sigui  $Q$ .

Però en el cas  $r = 0$ , ho podem fer una mica millor.

**Proposició 4.2.5.** *Sigui  $Q \subset \mathbb{H}^n$  un convex contingut en  $B(R)$ , una bola de radi  $R$ . Llavors*

$$\frac{W_0(Q)}{W_r(Q)} \leq \frac{W_0(B(R))}{W_r(B(R))} \quad (4.7)$$

amb igualtat només quan  $Q = B(R)$ .

*Demostració.* Prenent com a origen el centre de la bola, calculem el volum de  $Q$  en coordenades polars

$$W_0(Q) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{l(u)} \sinh^{n-1} \rho d\rho du$$

on  $l(u)$  és la distància a l'origen del punt de tall de  $\partial Q$  amb el raig geodèsic  $\gamma(u)$  que surt amb tangent  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Com que, evidentment tots els hiperplans ortogonals a  $\gamma(u) \cap Q$  tallen  $Q$ , tenim

$$W_r(Q) \geq \frac{(n-r) \cdot O_{r-1} \cdots O_0}{n \cdot O_{n-2} \cdots O_{n-r-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{l(u)} \cosh^r \rho \sinh^{n-r-1} \rho d\rho du$$

Per altra banda, es veu fàcilment que la funció

$$f(R) = \frac{W_r(B(R))}{W_0(B(R))} = \frac{(n-r) \cdot O_{r-1} \cdots O_0}{n \cdot O_{n-2} \cdots O_{n-r-1}} \frac{\int_0^R \cosh^r \rho \sinh^{n-r-1} \rho d\rho}{\int_0^R \sinh^{n-1} \rho d\rho}$$

és creixent. Així, com que  $l(u) \leq R$ , tenim  $f(l(u)) \leq f(R)$  i per tant

$$\begin{aligned} W_r(Q) &\geq \frac{(n-r) \cdot O_{r-1} \cdots O_0}{n \cdot O_{n-2} \cdots O_{n-r-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{l(u)} \cosh^r \rho \sinh^{n-r-1} \rho d\rho = \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(l(u)) \int_0^{l(u)} \sinh^{n-1} \rho d\rho du \geq \\ &\geq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(R) \int_0^{l(u)} \sinh^{n-1} \rho d\rho du = \frac{W_r(B(R))}{W_0(B(R))} W_0(Q). \end{aligned}$$

□



Observem que les desigualtats que hem obtingut van en l'únic sentit possible. En efecte, no pot ser certa una desigualtat de l'estil  $W_{r+s}(Q) \leq cW_r(Q)$ . Per veure-ho prenem  $Q$  un convex contingut en un  $(n - r - s)$ -pla geodèsic. Com que  $Q$  és una subvarietat de dimensió  $n - r - s$ , per la fórmula de Cauchy-Crofton a  $\mathbb{H}^n$  (2.6), tenim que la mesura d' $(r + s)$ -plans que tallen  $Q$  és múltiple del seu volum  $(n - r - s)$ -dimensional. En canvi, els  $r$ -plans que tallen  $Q$  formen un conjunt de mesura nul·la. Així  $W_r(Q) = 0$  mentre que  $W_{r+s}(Q) > 0$ .

### 4.3 Esperança de tall amb varietats lineals

Considerem el següent problema de probabilitats geomètriques: prenem  $L_r$  un  $r$ -pla geodèsic de  $\mathbb{H}^n$  a l'atzar (segons la mesura invariant  $dL_r$ ) d'entre els que tallen un convex  $Q \subset \mathbb{H}^n$  donat. Considerem la variable aleatòria consistent a mesurar el volum  $r$ -dimensional de la intersecció de  $L_r$  amb  $Q$ . Ens preguntem quina és l'esperança matemàtica d'aquesta variable aleatòria

$$E[\text{vol}(L_r \cap Q)] = \frac{\int_{\mathcal{L}_r} \text{vol}(L_r \cap Q) dL_r}{\int_{\mathcal{L}_r} \chi(L_r \cap Q) dL_r}.$$

La fórmula de Santaló (2.8) dóna

$$\int_{\mathcal{L}_r} \text{vol}(L_r \cap Q) dL_r = \frac{O_{n-1} \cdots O_{n-r}}{O_{r-1} \cdots O_1} \cdot \text{vol}(Q).$$

Per tant

$$E[\text{vol}(L_r \cap Q)] = \frac{(n-r) \cdot O_{n-1} O_0 \text{vol}(Q)}{n \cdot O_{n-r-1} W_r(Q)}. \quad (4.8)$$

Podem comparar aquestes esperances per a diferents dimensions  $r$  si utilitzem (4.7). Llevat de constants, l'esperança és menor com més gran és la dimensió  $r$ .

**Proposició 4.3.1.** *Per un domini convex  $Q \subset \mathbb{H}^n$  contingut en una bola de radi  $R$*

$$\frac{E[\text{vol}(Q \cap L_{r+s})]}{E[Q \cap L_r]} \leq \frac{E[\text{vol}(B(R) \cap L_{r+s})]}{E[\text{vol}(B(R) \cap L_r)]} < \frac{O_{n-r-1}}{O_{n-r-s-1}}$$

*Demostració.* Immediat utilitzant (4.8) i (4.7) □

En particular tenim

**Corol·lari 4.3.2.** *L'esperança del volum de la secció d'un  $r$ -pla aleatori amb un domini  $Q$  de  $\mathbb{H}^n$  està acotada per*

$$E[\text{vol}(L_r \cap Q)] < \frac{O_{n-1}}{O_{n-r-1}}.$$

*Demostració.* Prenem l'embolcall convex de  $Q$  i hi apliquem la proposició anterior amb  $r = 0$ . □

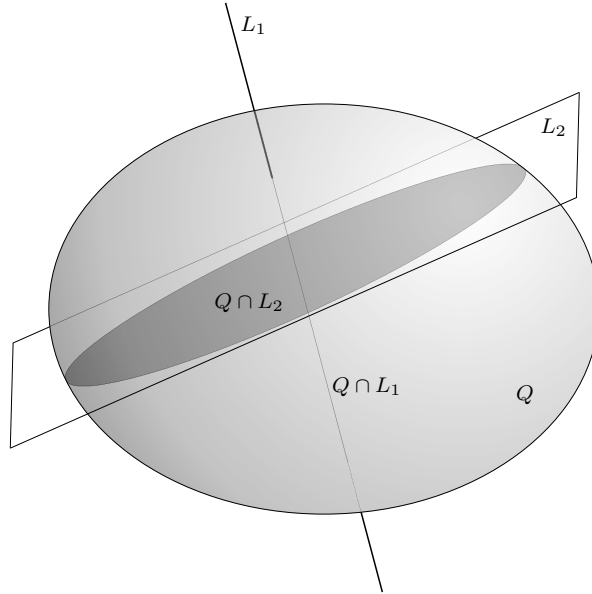


Figura 4.2: Volum de tall amb un pla i una recta

A  $\mathbb{H}^2$  ja es coneixia que l'esperança del tall amb una recta a l'atzar és menor que  $\pi$  (cf. [San80]). En la resta de casos aquesta acotació és aparentment nova. A tall d'exemple diem que l'esperança de la longitud d'una corda aleatòria a  $\mathbb{H}^3$  és menor que  $\pi$  o que l'esperança de l'àrea de la secció amb un pla és menor que  $2\pi$ .

Aquests resultats topen fortament amb la intuïció euclidiana. És clar que a  $\mathbb{R}^n$  aquestes esperances es fan arbitràriament grans si prenem un convex prou gran. Això es dedueix de (4.1). Una justificació barroera del que passa a  $\mathbb{H}^n$  és la següent. En varietats de curvatura negativa els dominis tenen una vora més gran que en curvatura 0. Això fa que la majoria de plans que tallen un convex ho fan passant molt a prop de la vora, i per tant tallen molt poc tros de l'interior.

#### 4.4 Desigualtats entre integrals de curvatura mitja

Ja estem en condicions de trobar desigualtats que relacionin les integrals de curvatura mitja de la vora d'un convex a  $\mathbb{H}^n$ . Com veurem, la peça clau és la igualtat (3.14) que, d'aquesta manera, a més de bonica resultarà ser útil.

**Proposició 4.4.1.** *Si  $Q \subset \mathbb{H}^n$  és convex llavors, per  $r > 1$*

$$\frac{M_r(\partial Q)}{\text{vol}(\partial Q)} > 1.$$

*I aquesta cota no es pot millorar. Per  $r = 1$ ,*

$$\frac{M_1(\partial Q)}{\text{vol}(\partial Q)} > \frac{n-2}{n-1}.$$

És a dir que per  $r > 1$  el promig de la curvatura mitja  $\sigma_r$  de la vora de tot convex és més gran que 1 i el promig de  $\sigma_1$  també està acotat per sota. Això torna a reflectir la idea que a l'espai hiperbòlic les hipersuperfícies han d'aportar molta més curvatura que a l'euclidià.

*Demostració.* Gràcies a l'equació (3.14), que lliga les integrals de curvatura mitja amb les Quermassintegrals, i a la desigualtat (4.6), fem

$$\frac{M_r(\partial Q)}{M_0(\partial Q)} = \frac{W_{r+1}(Q) + \frac{r}{n-r+1}W_{r-1}(Q)}{W_1(Q)} > \frac{n-r-1}{n-1} + \frac{r}{n-r+1} \frac{n-r+1}{n-1} = 1.$$

Aquesta desigualtat no es pot millorar ja que per successions de boles amb radi tendint a infinit  $M_r/M_0 \rightarrow 1$  (cf. 1.10).

Per  $r = 1$ , utilitzem (3.14) i (4.2)

$$\frac{M_1(\partial Q)}{M_0(\partial Q)} = \frac{W_2(Q) + \frac{1}{n}W_0(Q)}{W_1(Q)} > \frac{W_2(Q)}{W_1(Q)} > \frac{n-2}{n-1}.$$

□

*Observació.* Encara que no és clar que la cota per  $M_1/M_0$  sigui òptima, cal remarcar que no es podia esperar trobar 1 com a cota inferior. En efecte, prenem un hiperpla  $L_{n-1}$  i  $Q \subset L_{n-1}$  una bola de radi  $R$  dins  $L_{n-1}$ . Considerem  $Q$  com un convex degenerat dins  $\mathbb{H}^n$ ,

$$M_1(\partial Q) = n \left( W_2(Q) + \frac{1}{n}W_0(Q) \right) = \frac{O_1}{2(n-1)} \text{vol}(\partial B^{n-1}(R))$$

$$M_0(\partial Q) = \text{vol}(\partial Q) = 2 \text{vol}(B^{n-1}(R))$$

per tant  $M_1/M_0$  tendeix a  $\frac{\pi(n-2)}{2(n-1)}$  quan  $R$  creix. Així, per  $n = 3$  tenim convexos tals que  $M_1/M_0$  s'apropa tant com vulguem a  $\pi/4$  que és menor que 1.

També podem comparar les curvatures mitges amb el volum de l'interior.

**Corol·lari 4.4.2.** *Tenim la següent desigualtat per convexos a  $\mathbb{H}^n$*

$$\frac{M_i(\partial Q)}{V(Q)} > n - 1$$

que no es pot millorar.

El cas  $i = 0$  és la coneguda desigualtat (4.2).

*Demostració.* Si  $i > 1$ , aplicant la proposició 4.4.1 i (4.2)

$$\frac{M_i}{V} = \frac{M_i}{M_0} \cdot \frac{M_0}{V} > 1 \cdot (n - 1).$$

Per  $i = 1$

$$\frac{M_1}{V} = \frac{n(W_2 + \frac{1}{n}W_0)}{W_0} > n \frac{n-2}{n} + 1 = n - 1.$$

□

De forma similar, podem trobar acotacions per a qualsevol quocient d'integrals de curvatura mitja.

**Proposició 4.4.3.** *Si  $Q \subset \mathbb{H}^n$  és convex llavors, per  $i \geq 0$  i  $j \geq 2$  tal que  $i + j \leq n - 1$ ,*

$$\frac{M_{i+j}(\partial Q)}{M_i(\partial Q)} > 1$$

*i la cota no es pot millorar. Per  $j = 1$ ,*

$$\frac{M_{i+1}(\partial Q)}{M_i(\partial Q)} > \frac{n - i - 2}{n - i - 1}.$$

*Demostració.* Tornem a aplicar l'equació (3.14) i la desigualtat (4.6)

$$\begin{aligned} \frac{M_{i+j}(\partial Q)}{M_i(\partial Q)} &= \frac{W_{i+j+1}(Q) + \frac{i+j}{n-i-j+1}W_{i+j-1}(Q)}{W_{i+1}(Q) + \frac{i}{n-i+1}W_{i-1}(Q)} > \\ &= \frac{\frac{n-i-j-1}{n-i-j+1}W_{i+j-1}(Q) + \frac{i+j}{n-i-j+1}W_{i+j-1}(Q)}{W_{i+1}(Q) + \frac{i}{n-i+1}\frac{n-i+1}{n-i-1}W_{i+1}(Q)} = \\ &= \frac{n-i-1}{n-i-j+1} \frac{W_{i+j-1}(Q)}{W_{i+1}(Q)} > \frac{n-i-1}{n-i-j+1} \frac{n-i-j+1}{n-i-1} = 1. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Aquesta cota no es pot millorar ja que, per una successió de boles amb radi tendint a  $\infty$  el quocient  $M_i/M_{i+j}$  tendeix a 1.

Per  $j = 1$ ,

$$\frac{M_{i+1}(\partial Q)}{M_i(\partial Q)} = \frac{W_{i+2}(Q) + \frac{i+1}{n-i}W_i(Q)}{W_{i+1}(Q) + \frac{i}{n-i+1}W_{i-1}(Q)}.$$

I hem acabat ja que

$$\frac{W_{i+2}(Q)}{W_{i+1}(Q)} > \frac{n-i-2}{n-i-1} \quad \frac{\frac{i+1}{n-i}W_i(Q)}{\frac{i}{n-i+1}W_{i-1}(Q)} > \frac{i+1}{i} > 1 > \frac{n-i-2}{n-i-1}.$$

□

*Observació.* Pel quocient  $M_{n-1}/M_{n-2}$  la cota és 0. A la secció 4.5 trobarem convexas pels quals efectivament, aquest quocient pren valors arbitràriament petits.

En resum, hem trobat cotes inferiors per a tots els quocients de la forma  $M_{i+j}/M_i$ . Llevat del cas  $M_{n-1}/M_{n-2}$ , aquestes cotes són totes estrictament positives i són òptimes quan  $j > 1$ .

Una qüestió natural que es planteja és la de trobar cotes superiors. Però és immediat veure que aquests quocients no estan acotats per sobre. En efecte, si  $Q$  és una bola de radi  $R$ , ja hem dit que

$$\frac{M_{i+j}(\partial Q)}{M_i(\partial Q)} = \frac{\cosh^j R}{\sinh^j R}$$

que es fa arbitràriament gran si  $R$  és prou petit.

També es pot argumentar dient que a l'espai euclidià hi ha exemples de convexos arbitràriament petits i amb  $M_{i+j}/M_i$  arbitràriament gran. Com que en entorns *petits* d'un punt les mètriques de  $\mathbb{H}^n$  i de  $\mathbb{R}^n$  són molt *semblants*, hi haurà convexos de l'espai hiperbòlic amb  $M_{i+j}/M_i$  arbitràriament gran.

Tot i així, si ens restringim a convexos *grans* en algun sentit, és possible trobar algunes cotes superiors de  $M_{i+j}/M_i$ .

Considerem el cas de dimensió 2. Donat un convex  $Q \subset \mathbb{H}^2$ ,  $M_1(\partial Q)$  és la integral de curvatura geodèsica de la vora. Utilitzant la fórmula de Gauss-Bonnet, tenim que

$$M_1(\partial Q) = 2\pi + \text{vol}(Q).$$

Així, doncs

$$\frac{M_1(\partial Q)}{M_0(\partial Q)} = \frac{2\pi + \text{vol}(Q)}{\text{vol}(\partial Q)}.$$

Ja hem dit que l'àrea d'un convex és sempre menor que la longitud de la seva vora. Per tant,  $M_1(\partial Q)/M_0(\partial Q)$  no pot ser gaire més gran que 1 si el convex és prou gran. Concretament, si  $(Q_r)$  és una successió de convexos que tendeix a omplir el pla hiperbòlic,

$$\lim \frac{M_1(\partial Q_r)}{M_0(\partial Q_r)} \leq 1.$$

**Definició 4.4.1.** Diem que una successió de convexos  $(Q_r)$  de  $\mathbb{H}^n$  tendeix a omplir l'espai hiperbòlic quan  $\cup_r Q_r = \mathbb{H}^n$ .

Per aquestes successions tenim les següents acotacions superiors.

**Proposició 4.4.4.** *Segui  $(Q_r)$  una successió de convexos que tendeix a omplir  $\mathbb{H}^n$ . Llavors*

$$\begin{aligned} i) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{n-1}(\partial Q_r)}{M_{n-2}(\partial Q_r)} \leq n - 1 \\ ii) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{n-1}(\partial Q_r)}{M_{n-3}(\partial Q_r)} \leq \frac{n - 1}{2} \end{aligned}$$

*Demostració.* Sabem que

$$\frac{M_{n-1}(\partial Q_r)}{M_{n-2}(\partial Q_r)} = \frac{W_n(Q_r) + \frac{n-1}{2}W_{n-2}(Q_r)}{W_{n-1}(Q_r) + \frac{n-2}{3}W_{n-3}(Q_r)}$$

Però  $W_n(Q_r)$  no depèn de  $r$  sinó que val sempre  $O_{n-1}/n$ . En canvi, tant  $W_{n-1}(Q_r)$  com  $W_{n-2}(Q_r)$  i  $W_{n-3}(Q_r)$  tendeixen a infinit quan  $Q_r$  tendeix a omplir  $\mathbb{H}^n$ . Per tant

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{n-1}(\partial Q_r)}{M_{n-2}(\partial Q_r)} &= \frac{n-1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_{n-2}(Q_r)}{W_{n-1}(Q_r) + \frac{n-2}{3}W_{n-3}(Q_r)} \leq \\ &\leq \frac{n-1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_{n-2}(Q_r)}{W_{n-1}(Q_r)} \end{aligned}$$

Tenint en compte que  $W_{n-2}/W_{n-1} < 2$  queda provat *i*). Anàlogament, es prova *ii*).

$$\frac{M_{n-1}(\partial Q_r)}{M_{n-3}(\partial Q_r)} \sim \frac{n-1}{2} \frac{W_{n-2}(Q_r)}{W_{n-2}(Q_r) + \frac{n-3}{4}W_{n-4}(Q_r)} \leq \frac{n-1}{2}.$$

□

La segona desigualtat no es pot millorar com mostrem a la secció següent donant exemples de successions de convexos que realitzen la cota. Les mateixes successions mostraran que la resta de quocients  $M_{i+j}/M_i$  no estan acotats superiorment encara que el convex sigui gran.

En relació a (4.5) tenim una millora quan els convexos són a l'espai hiperbòlic (i no en una varietat de curvatura negativa acotada). Recordem que a la definició 1.1.2 s'introduïa el concepte de  $\lambda$ -convexitat. Una cosa a tenir en compte, i que es veu fàcilment, és que per  $\lambda > 1$  tot conjunt  $\lambda$ -convex està contingut en una bola de radi  $\operatorname{arctanh}\lambda$ . Per això, aquí només ens interessem pels valors  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

**Proposició 4.4.5.** *Si  $Q_r$  és una successió de  $\lambda$ -convexos tendint a omplir  $\mathbb{H}^n$ , llavors*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M_1(\partial Q_r)}{\operatorname{vol}(\partial Q_r)} > \frac{\lambda + n - 2}{n - 1}.$$

*Demostració.* Utilitzant (4.6) i (4.3),

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M_1(\partial Q_r)}{\operatorname{vol}(\partial Q_r)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{W_2(Q_r)}{W_1(Q_r)} + \frac{\operatorname{vol}(Q_r)}{\operatorname{vol}\partial Q_r} > \frac{n-2}{n-1} + \frac{\lambda}{n-1}.$$

□

## 4.5 Exemples

En aquesta secció construïm una família d'exemples que mostren un comportament extremal en molts sentits. Serviran per provar que moltes de les desigualtats que hem vist en aquest capítol no es poden millorar.

Considerem una bola geodèsica de radi  $r > 0$  centrada a un punt  $O \in \mathbb{H}^n$ . Siguin  $P_1$  i  $P_2$  els extrems d'un segment de longitud  $2R$  que té el punt mig a  $O$ . Suposem  $R > r$  i prenem l'embolcall convex de la bola  $B_O(r)$  i els punts  $P_1, P_2$ . Denotem  $Q(r, R)$  el convex obtingut així (cf. figura 4.3). La unió de tots els segments que van de  $P_1$  o  $P_2$  fins a un punt de tangència amb  $\partial B_O(r)$  defineix dos cons truncats,  $C_1$  i  $C_2$ . El conjunt d'aquests punts de tangència consisteix en dues esferes  $(n-2)$ -dimensionals del mateix radi  $a$  contingudes en  $(n-1)$ -plans ortogonals al segment  $P_1P_2$ . Si  $B$  denota la regió de  $\partial B_O(r)$  delimitada per aquestes dues esferes, la vora de  $Q(r, R)$  es pot separar en tres parts, això és  $C_1, B$  i  $C_2$ .

Com que  $\partial Q(r, R)$  no és diferenciable a tot arreu, calculem les integrals de curvatura mitja  $M_i(\partial Q(r, R))$  aproximant  $Q(r, R)$  per convexos de vora diferenciable. Fent-ho així, es veu fàcilment que per  $i < n-1$  els vèrtexs no aporten curvatura mitja i tenim

$$M_i(\partial Q(r, R)) = \int_{\partial Q(r, R)} \sigma_i(x) dx.$$

Pel cas  $i = n - 1$ , podem calcular  $M_{n-1}(\partial Q(r, R))$  mesurant directament el conjunt d'hiperplans de suport de  $Q(r, R)$ . Com els hiperplans de suport en cada un dels vèrtexs tenen mesura menor que  $O_{n-1}/2$ , tenim

$$M_{n-1}(\partial Q(r, R)) < \int_{\partial Q(r, R)} \sigma_{n-1}(x) dx + O_{n-1}.$$

Per cada  $r \in \mathbb{N}$  prenem  $R = e^{2r}$  i considerem la successió de convexos  $Q_r = Q(r, e^{2r})$  que tendeix a omplir tot  $\mathbb{H}^n$ .

**Proposició 4.5.1.** *Els quocients de les integrals de curvatura de la successió que acabem de definir tenen els següents valors asimptòtics*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M_{n-2}(\partial Q(r))}{M_i(\partial Q(r))} = \infty \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M_i(\partial Q(r))}{M_j(\partial Q(r))} = 1$$

per  $i, j$  diferents de  $n - 2$ .

*Demostració.* Pel con  $C_1$ , siguin  $c$  i  $\alpha$ , respectivament, la longitud de la generatriu i l'angle que aquesta forma amb l'eix de rotació  $P_1P_2$ . En un punt  $x \in C_1$ , sigui  $\mu$  la distància al vèrtex  $P_1$ . Si  $x'$  és la projecció ortogonal de  $x$  sobre el segment  $P_1P_2$ , podem determinar  $x$  per les seves coordenades polars  $\rho, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}$  centrades a  $x'$  dins l'hiperpla ortogonal a  $P_1P_2$ . Les fórmules (1.2) de la trigonometria hiperbòlica ens donen la relació,

$$\sinh \rho = \sin \alpha \sinh \mu.$$

Ara,  $C_1$  és parametritzat per les coordenades  $(\mu, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$  i l'element de volum és

$$dx = (\sin \alpha \sinh \mu)^{n-2} d\mu d\theta.$$

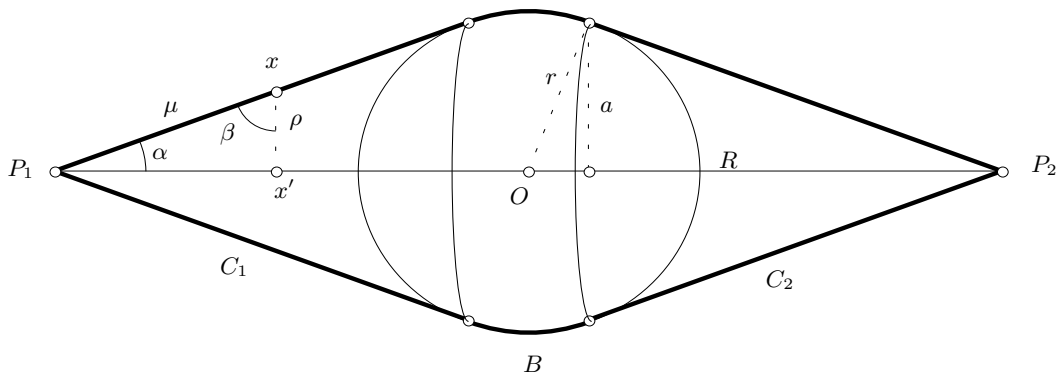


Figura 4.3: El convex  $Q(r, R)$

Clarament, en tot punt  $x \in C_1$ , la direcció de la generatriu és principal i té curvatura normal 0. Pel teorema de Meusnier, per tota direcció ortogonal a aquesta direcció, la curvatura normal és  $\sin \beta \coth \rho$  on  $\beta$  denota l'angle interior entre  $x'x$  i la generatriu del con. Altre cop per trigonometria hiperbòlica obtenim,  $\cos \alpha = \cosh \rho \sin \beta$ . Per tant, la integral de curvatura  $i$ -èsima de  $C_1$  és

$$\begin{aligned} M_i(C) &= \int_{S^{n-2}} \int_0^c \binom{n-2}{i} \binom{n-1}{i}^{-1} (\sin \beta \coth \rho)^i (\sin \alpha \sinh \mu)^{n-2} d\mu d\theta = \\ &= \frac{n-i-1}{n-1} O_{n-2} \cos^i \alpha \sin^{n-i-2} \alpha \int_0^c \sinh^{n-i-2} \mu d\mu. \end{aligned}$$

Notem que, quan  $c$  creix cap a infinit, per  $m \geq 1$

$$\int_0^c \sinh^m s ds \sim \frac{\cosh^m c}{m}.$$

Ara, prenem  $R(r) = e^{2r}$ . Com que  $R$ ,  $r$  i  $c$  són, respectivament, els catets i la hipotenusa d'un triangle rectangle,

$$\cosh c = \cosh e^{2r} / \cosh r \sim e^{e^{2r}-r}$$

$$\alpha \sim \sin \alpha = \sinh r / \sinh e^{2r} \sim e^{r-e^{2r}}.$$

Per tant, per  $i \neq n-2$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} M_i C_1 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n-i-1}{n-1} O_{n-2} e^{(n-i-2)(e^{2r}-r)} \frac{e^{(n-i-2)(r-e^{2r})}}{(n-i-2)} = \\ &= \frac{n-i-1}{(n-1)(n-i-2)} O_{n-2}. \end{aligned}$$

Així, quan  $r$  tendeix a infinit,

$$M_i(\partial Q) \sim M_i(\partial B(r)).$$

I com que la proporció de  $B(r)$  sobre la bola sencera tendeix a 1,

$$M_i(\partial Q) \sim M_i(\partial B_O(r)).$$

Amb això hem trobat el segon límit de l'enunciat.

Finalment,  $M_{n-2}(\partial Q)/M_i(\partial Q)$  tendeix a infinit ja que.

$$M_{n-2}(\partial Q) > M_{n-2}(C_1) = \frac{O_{n-2}}{n-1} \cos \alpha \cdot c \sim \frac{O_{n-2}}{n-1} e^{2r}.$$

□

Fixat un  $\epsilon > 0$ , prenem els convexos  $Q_r^\epsilon = \{x \in \mathbb{H}^n \mid d(c, Q) \leq \epsilon\}$  paral·lels a distància  $\epsilon$  dels  $Q_r$ .



**Proposició 4.5.2.** Per  $i, j = 0, \dots, n-1$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M_i(\partial Q_r^\epsilon)}{M_j(\partial Q_r^\epsilon)} = \frac{i \coth^{i-2} \epsilon + (n-i-1) \coth^i \epsilon}{j \coth^{j-2} \epsilon + (n-j-1) \coth^j \epsilon}$$

*Demostració.* Utilitzem la fórmula de Steiner per a les integrals de curvatura mitja (1.12)

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M_i(\partial Q_r^\epsilon)}{M_j(\partial Q_r^\epsilon)} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\binom{n-1}{i}^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} M_k(\partial Q_r) \phi_{ik}(\epsilon)}{\binom{n-1}{j}^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} M_k(\partial Q_r) \phi_{jk}(\epsilon)} = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\binom{n-1}{j} M_{n-2}(\partial Q_r) \phi_{i,n-2}(\epsilon)}{\binom{n-1}{i} M_{n-2}(\partial Q_r) \phi_{j,n-2}(\epsilon)} = \frac{\binom{n-1}{j} \phi_{i,n-2}(\epsilon)}{\binom{n-1}{i} \phi_{j,n-2}(\epsilon)} \end{aligned}$$

on

$$\phi_{i,n-2}(\epsilon) = \binom{n-2}{i-1} \sinh^{n-i} \epsilon \cosh^{i-1} \epsilon + \binom{n-2}{i} \sinh^{n-i-2} \epsilon \cosh^{i+1} \epsilon$$

□

L'interès d'aquests exemples rau en el fet que mostren que els quocients  $M_{i+j}/M_i$  només es poden acotar superiorment en els casos que recull la proposició 4.4.4. També mostren que la desigualtat *ii)* d'aquesta proposició no es pot millorar. A més, veiem que l'únic quocient  $M_{i+j}/M_i$  del qual no hem trobat cap cota inferior no nul·la ( $i = n-2$  i  $i+j = n-1$ ), pot prendre, efectivament, valors arbitràriament petits. Més concretament,

**Corol·lari 4.5.3.** Per tot  $1 \leq L \leq \infty$ , existeix una successió de convexos  $(Q_r)$  expandint-se per tot  $\mathbb{H}^n$  tal que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M_i(\partial Q_r)}{M_j(\partial Q_r)} = L$$

llevat dels casos  $i = n-1$  i  $j = n-2, n-3$ . Per tot  $0 \leq \delta \leq 1$  existeix una successió de convexos  $(Q_r)$  expandint-se per tot  $\mathbb{H}^n$  tal que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M_{n-1}(\partial Q_r)}{M_{n-2}(\partial Q_r)} = \delta.$$

Per tot  $1 \leq \alpha \leq \frac{n-1}{2}$  existeix una successió de convexos  $(Q_r)$  expandint-se per tot  $\mathbb{H}^n$  tal que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M_{n-1}(\partial Q_r)}{M_{n-3}(\partial Q_r)} = \alpha.$$

*Demostració.* N'hi ha prou amb estudiar els rangs de les funcions

$$f_{ij}(\epsilon) = \frac{i \coth^{i-2} \epsilon + (n-i-1) \coth^i \epsilon}{j \coth^{j-2} \epsilon + (n-j-1) \coth^j \epsilon}.$$

En efecte,

$$\begin{aligned} f_{n-1, n-2}((0, \infty)) &= (0, 1) \\ f_{n-1, n-3}((0, \infty)) &= (1, \frac{n-1}{2}) \\ f_{ij}((0, \infty)) &= (1, \infty) \end{aligned}$$

per la resta de valors de  $i$  i  $j$ . Així doncs, pels valors no extrems de  $L$ ,  $\delta$  i  $\alpha$ , hi ha un  $\epsilon > 0$  tal que  $Q_r^\epsilon$  és la successió de convexos buscada. Per  $L = \infty$ ,  $\delta = 0$  o  $\alpha = (n-1)/2$  prenem la successió  $\epsilon_m = 1/m$  i una successió  $r_m$  tal que, pels  $i$  i  $j$  corresponents,

$$\left| \frac{M_i(\partial Q_{r_m}^{\epsilon_m})}{M_j(\partial Q_{r_m}^{\epsilon_m})} - f_{ij}(\epsilon_m) \right| < \frac{1}{m}.$$

Finalment, els quocients tendeixen a 1 per exemple si  $Q_r$  és la bola de radi  $r$ . □

Així, de totes acotacions que hem provat, les úniques que poden no ser òptimes són les de la segona part de la proposició 4.4.3 i la de la primera part de la proposició 4.4.4. De tots aquests, el cas més interessant és el de l'acotació

$$\frac{M_1(\partial Q)}{\text{vol}(\partial Q)} \geq \frac{n-2}{n-1}.$$

Recordem que només hem trobat exemples apropant-se a  $\frac{\pi(n-2)}{2(n-1)}$  i a 1.

Finalment, les successions  $Q_r^\epsilon$  també proven que les desigualtats (4.3) per al límit del quocient  $\text{vol}(Q)/\text{vol}(\partial Q)$  en successions de  $\lambda$ -convexos són òptimes. En efecte, fixat  $0 \leq \lambda < 1$ , prenem  $\epsilon > 0$  tal que  $\tanh \epsilon = \lambda$ . Llavors,  $Q_r^\epsilon$  té vora amb curvatura normal major que  $\lambda$  a tot arreu i hem vist que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(Q_r^\epsilon)}{\text{vol}(\partial Q_r^\epsilon)} = \frac{\lambda}{n-1}.$$

Amb això es generalitzen a dimensió arbitrària els resultats de [GR85] i [GR99].

## Capítol 5

# Geometria integral d'horosferes i equidistants

### 5.1 Introducció

Fins aquí hem estat parlant de les fórmules cinemàtiques que involucren plans (i sobretot hiperplans) totalment geodèsics. També sabem que existeixen fórmules cinemàtiques anàlogues on es substitueixen aquests plans per subvarietats compactes. Així, tenim fórmules cinemàtiques per hiperplans i també per esferes. Això pot resultar prou satisfactori en geometria euclidiana ja que aquestes són les hipersuperfícies interessants de l'espai euclidià. Però ja hem dit que en geometria hiperbòlica existeix una mena de buit entre els hiperplans geodèsics i les esferes. Recordem que mentre els hiperplans tenen curvatura normal 0, la curvatura normal de les esferes a  $\mathbb{H}^n$  és més gran que 1. Aquest buit és omplert per dues classes d'hipersuperfície que són les horosferes i les equidistants. Recordem que hiperplans geodèsics, esferes, horosferes i equidistants són els quatre tipus d'hipersuperfícies umbilicals de l'espai hiperbòlic. Ja hem dit que les horosferes s'obtenen en allunyar infinitament el centre d'una esfera d'un punt fixat d'aquesta i tenen curvatura normal constant 1. Per la seva banda, les equidistants són el lloc geomètric dels punts a una distància fixa d'un hiperplà i tenen curvatura normal constant menor que 1. Tant les horosferes com les equidistants són hipersuperfícies no compactes, per tant no se'ls poden aplicar les fórmules cinemàtiques de Poincaré ni de Blaschke.

És natural doncs, buscar fórmules cinemàtiques per a horosferes i equidistants de  $\mathbb{H}^n$ . El mateix Santaló va començar a fer-ho per les horosferes a  $\mathbb{H}^2$  i  $\mathbb{H}^3$  (cf. [San67, San68]). Recentment, Gallego, Martínez Naveira i l'autor (cf. [GNS]), han estès els resultats a horosferes de dimensió arbitrària. Les idees bàsiques, ja presents en els treballs de Santaló, són aproximar les horosferes per boles de radi cada cop més gran i utilitzar el fet que la geometria intrínseca de les horosferes és euclidiana. Finalment el teorema de Gauss-Bonnet en espais euclidians permet obtenir la mesura d'horosferes que tallen un conjunt  $h$ -convex o convex respecte horosferes. En aquest capítol continuem aquest estudi donant fórmules cinemàtiques que serveixen també per hipersuperfícies equidis-

tants. Concretament, trobarem fórmules cinemàtiques per hipersuperfícies totalment umbilicals de  $\mathbb{H}^n$  de curvatura normal  $\lambda$  arbitrària. Així, per  $\lambda = 0$  recuperarem les fórmules per hiperplans geodèsics, per  $\lambda > 1$  tindrem el cas de les esferes que es dedueix de les fórmules cinemàtiques de Poincaré i Blaschke, i per  $\lambda = 1$  recuperarem els resultats de [GNS]. Finalment, el cas nou és el de  $0 < \lambda < 1$ , on les fórmules involucren hipersuperfícies equidistants.

A continuació, utilitzarem les fórmules per horosferes per deduir certes propietats dels dominis horocíclicament convexos. També ens ocuparem de l'esperança del volum del tall d'un domini amb una equidistant o una horosfera aleatòria. Veurem que igual que pels hiperplans geodèsics, aquesta esperança està acotada superiorment.

## 5.2 Definicions i mesures invariants

Recordem que un punt d'una hipersuperfície es diu *umbilical* quan la curvatura normal és la mateixa en totes les direccions d'aquest punt. Una hipersuperfície tal que tots els seus punts siguin umbilicals s'anomena *totalment umbilical*. En ambients de curvatura constant, les hipersuperfícies totalment umbilicals tenen la mateixa curvatura normal a tots els punts (cf. per exemple [dC92]). D'altra banda, aquestes hipersuperfícies són la vora d'una regió convexa. Prenent el vector normal unitari que és interior a aquesta regió, la curvatura normal serà sempre positiva.

**Definició 5.2.1.** Per  $\lambda \geq 0$ , una hipersuperfície completa totalment umbilical amb curvatura normal  $\lambda$  s'anomena  $\lambda$ -hiperpla de  $\mathbb{H}^n$ . Denotem  $\mathcal{L}_{n-1}^\lambda$  el conjunt de tots els  $\lambda$ -hiperplans de  $\mathbb{H}^n$ .

Aquesta definició inclou, per  $\lambda = 1$ , horosferes, i per  $\lambda = 0$ , hiperplans geodèsics. El cas  $\lambda > 1$  conté les esferes de radi  $\operatorname{arctanh}(1/\lambda)$ . Per  $\lambda < 1$ , el tub a distància  $\operatorname{arctanh}\lambda$  al voltant d'un hiperpla geodèsic té dues components connexes cadascuna de les quals és un  $\lambda$ -hiperpla. Amb aquesta descripció queda clar que  $\mathcal{L}_{n-1}^\lambda$  és espai homogeni del grup d'isometries  $G$  per cada  $\lambda$ .

Un fet important que es pot veure amb l'equació de Gauss, és que amb la mètrica induïda per  $\mathbb{H}^n$ , un  $\lambda$ -hiperplà és una varietat de Riemann completa, simplement connexa i de curvatura seccional constant  $\lambda^2 - 1$ . En particular les horosferes són espais euclidians i les equidistants de curvatura normal  $\lambda$  són espais hiperbòlics de curvatura seccional  $\lambda^2 - 1$ .

*Observació.* No és difícil veure que en el model de l'hiperboloide, els  $\lambda$ -hiperplans són interseccions de  $\mathbb{H}^n$  amb hiperplans afins del tipus

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid L(x, y) = -\lambda\}$$

on  $L(y, y) = 1$ .

Ara introduïm un anàleg dels  $\lambda$ -hiperplans per codimensions més grans. Com que un  $r$ -pla geodèsic  $L_r \subset \mathbb{H}^n$  és isomètric a  $\mathbb{H}^r$ , té sentit parlar dels  $\lambda$ -hiperplans de  $L_r$ .

**Definició 5.2.2.** Un  $\lambda$ -hiperpla d'algun  $(r+1)$ -pla geodèsic a  $\mathbb{H}^n$  s'anomena  $r$ -pla  $\lambda$ -geodèsic. Definim  $\mathcal{L}_r^\lambda$  com el conjunt de tots aquests  $r$ -plans  $\lambda$ -geodèsics.

Tot  $r$ -pla  $\lambda$ -geodèsic està contingut en un únic  $(r+1)$ -pla geodèsic. D'altra banda, es pot veure que també està contingut en un sol  $\lambda$ -hiperplà.

El grup d'isometries  $G$  actua transitivament sobre  $\mathcal{L}_r^\lambda$ . En efecte, sabem que actua transitivament sobre els  $(r+1)$ -plans geodèsics. El subgrup d'isotropia d'un d'aquests plans és com el grup d'isometries de  $\mathbb{H}^{r+1}$  per tant actua transitivament sobre els  $\lambda$ -hiperplans que conté. Així doncs, prenem l' $(r+1)$ -pla geodèsic  $L_{r+1}$  que passa per  $e_0$  i és tangent a  $\langle e_1, \dots, e_{r+1} \rangle$ . Fixem  $L_r^\lambda$  l' $r$ -pla  $\lambda$ -geodèsic per  $e_0$ , contingut a  $L_{r+1}$  i tal que  $e_{r+1}$  és el normal en  $e_0$  que apunta a la convexitat de  $L_r^\lambda$ . Sigui  $H_r^\lambda$  el subgrup de les isometries que el deixen invariant. Ara,  $\mathcal{L}_r^\lambda$  s'identifica amb l'espai homogeni  $G/H_r^\lambda$ . Això defineix una projecció  $\pi_r^\lambda : G \rightarrow \mathcal{L}_r^\lambda$ .

**Proposició 5.2.1.** Per  $0 \leq \lambda \neq 1$  l'espai  $\mathcal{L}_r^\lambda$  admet una mètrica semi-riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle_r^\lambda$  invariant per isometries. Aquesta mètrica és tal que

$$(\pi_r^\lambda)^* \langle \cdot, \cdot \rangle_r^\lambda = \sum_{i=1}^r \frac{(\omega_i^{r+1} - \lambda \omega_0^i) \otimes (\omega_i^{r+1} - \lambda \omega_0^i)}{1 - \lambda^2} + \sum_{1 \leq i \leq (r+1) < j \leq n} \omega_i^j \otimes \omega_i^j - \sum_{j=r+1}^n \omega_0^j \otimes \omega_0^j. \quad (5.1)$$

Per tot  $\lambda \geq 0$  l'espai  $\mathcal{L}_r^\lambda$  admet una mesura  $dL_r^\lambda$  invariant per isometries que ve definida per

$$(\pi_r^\lambda)^* dL_r^\lambda = \bigwedge_{h=1}^r (\omega_h^{r+1} - \lambda \omega_0^h) \wedge \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq (r+1) < j \leq n} \omega_i^j \right) \wedge \bigwedge_{k=r+1}^n \omega_0^k \quad (5.2)$$

*Demostració.* Busquem la part vertical de  $\pi_r^\lambda$ . Sigui  $g$  una referència tal que  $\pi(g) = L_r^\lambda$ . És clar que si  $\bar{g}$  és una altra referència amb

$$\bar{g}_0 = g_0 \quad \langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_r \rangle = \langle g_1, \dots, g_r \rangle \quad \langle \bar{g}_{r+2}, \dots, \bar{g}_n \rangle = \langle g_{r+2}, \dots, g_n \rangle$$

llavors  $\pi_r^\lambda(\bar{g}) = \pi_r^\lambda(g)$ . Per tant,  $v_i^j \in \ker d\pi_r^\lambda$  si  $1 \leq i, j \leq r$  o  $r+2 \leq i, j \leq n$ . Prenem  $x(t)$  la geodèsica de  $L_r^\lambda$  que surt de  $g_0$  amb direcció  $g_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ). Elevem  $x(t)$  a una corba  $g(t) \subset G$  tal que  $\pi_r^\lambda(g(t)) \equiv L_r^\lambda$ . Com que totes les curvatures normals de  $L_r^\lambda$  són  $\lambda$ ,

$$\nabla_{g_i} g_{r+1} = \lambda g_i.$$

Per tant  $0 = d\pi_r^\lambda(\dot{g}(0)) = d\pi_r^\lambda(v_0^i + \lambda v_i^{r+1})$  i tenim

$$T_g gH = \ker d\pi_r^\lambda = \langle v_0^i + \lambda v_i^{r+1} \mid i = 1, \dots, r \rangle \oplus \langle v_i^j \mid 1 \leq i < j \leq r \text{ o } r+2 \leq i < j \leq n \rangle$$

i l'ortogonal respecte la mètrica a  $G$  és

$$(T_g gH)^\perp = (\ker d\pi_r^\lambda)^\perp = \langle v_i^{r+1} + \lambda v_0^i \mid i = 1, \dots, r \rangle \oplus \langle v_0^h \mid h = r+1, \dots, n \rangle \oplus \langle v_i^j \mid 1 \leq i \leq r+1 < j \leq n \rangle$$

Així, dotem  $\mathcal{L}_r^\lambda$  de la mètrica (1.6) de  $G$  restringida a  $(\ker d\pi_r^\lambda)^\perp$ . L'expressió (5.1) és aquesta restricció ja que s'anul·la sobre  $\ker d\pi_r^\lambda$  i coincideix amb la mètrica de  $G$  sobre la base de  $(\ker d\pi_r^\lambda)^\perp$ . Aquesta mètrica és constant sobre les fibres i és invariant perquè la mètrica de  $G$  és bi-invariant. D'altra banda, la forma (5.2) defineix una mesura invariant a l'espai de  $\lambda$ -plans de dimensió  $r$  ja que és tancada i producte exterior d'1-formes nul·les a  $gH$  (cf. [San76, p.166]).  $\square$

*Observació.* Notem que de l'expressió (5.2) es dedueix que

$$dL_r^\lambda = dL_{[r+1]r}^\lambda \wedge dL_{r+1} \quad (5.3)$$

on  $dL_{r+1}$  és la mesura de  $\mathcal{L}_{r+1}$  i  $dL_{[r+1]r}^\lambda$  denota la mesura de  $r$ -plans  $\lambda$ -geodèsics continguts al  $(r+1)$ -pla geodèsic  $L_{r+1}$ .

En coordenades polars, la mesura de  $\lambda$ -hiperplans és

$$dL_{n-1}^\lambda = (\cosh \rho - \lambda \sinh \rho)^{n-1} d\rho dS^{n-1} \quad (5.4)$$

on  $\rho$  és la distància de l'origen a  $L_{n-1}^\lambda$ , presa amb signe negatiu quan l'origen és fora de la regió convexa delimitada per  $L_{n-1}^\lambda$ .

### 5.3 Volum d'interseccions amb plans $\lambda$ -geodèsics

En aquesta secció es generalitza a plans  $\lambda$ -geodèsics la fórmula (2.8) pel volum promig d'intersecció amb plans geodèsics. Comencem pel cas de codimensió 1.

**Proposició 5.3.1.** *Sigui  $S$  una subvarietat compacta de dimensió  $q$  a  $\mathbb{H}^n$ , de classe  $C^1$  a trossos, possiblement amb vora. Llavors*

$$\int_{\mathcal{L}_{n-1}^\lambda} \text{vol}_{q-1}(L_{n-1}^\lambda \cap S) dL_{n-1}^\lambda = \frac{O_n O_{q-1}}{O_q} \cdot \text{vol}_q(S).$$

*Demostració.* Considerem la varietat

$$E(S) = \{(L_{n-1}^\lambda, p) \in \mathcal{L}_{n-1}^\lambda \times S \mid p \in L_{n-1}^\lambda \cap S\}.$$

Quasi per tot  $(L_{n-1}^\lambda, p)$ , i.e fora d'un subconjunt de mesura nul·la de  $E(S)$ , la intersecció  $L_{n-1}^\lambda \cap S$  és una subvarietat de classe  $C^1$  en un entorn de  $p$ . Denotem  $dx_{q-1}$  l'element de volum d'aquesta subvarietat. Ara,

$$\int_{\mathcal{L}_{n-1}^\lambda} \text{vol}_{q-1}(L_{n-1}^\lambda \cap S) dL_{n-1}^\lambda = \int_{E(S)} dx_{q-1} \wedge dL_{n-1}^\lambda$$

on  $dL_{n-1}^\lambda$  denota l'element de volum de  $\mathcal{L}_{n-1}^\lambda$  i també el seu pull-back a  $E(S)$ . Considerem ara,

$$G(S) = \{g \in G \mid g_0 \in S \cap L_{n-1}^\lambda \quad g_1, \dots, g_{q-1} \in T_{g_0}(S) \quad g_{q+1}, \dots, g_{n-1} \perp T_{g_0} S\}$$

i la projecció  $\pi : G(S) \longrightarrow E(S)$  que envia la referència  $g$  a  $(\pi_{n-1}^\lambda(g), g_0)$ . Així,

$$\pi^*(dx_{q-1} \wedge dL_{n-1}^\lambda) = \bigwedge_{h=1}^{q-1} \omega_0^h \wedge \omega_0^n \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} (\omega_i^n - \lambda \omega_0^i) = \bigwedge_{h=1}^{q-1} \omega_0^h \wedge \omega_0^n \wedge \bigwedge_{i=1}^{q-1} \omega_i^n \wedge \bigwedge_{i=q}^{n-1} (\omega_i^n - \lambda \omega_0^i)$$

Donat  $g \in G(S)$ , prenem  $\bar{g} \in G(S)$  tal que

$$\bar{g}_0 = g_0 \quad \dots \quad \bar{g}_{q-1} = g_{q-1} \quad \text{i} \quad \bar{g}_q \in T_{g_0}S$$

Però per tot  $v \in T_g G(S)$ ,

$$\omega_0^i(v) = \langle v, v_0^i \rangle = \langle d\pi_0 v, g_i \rangle = 0 \quad q < i < n$$

$$\bar{\omega}_0^i(v) = \langle v, v_0^i \rangle = \langle d\pi_0, g_i \rangle = 0 \quad q < i.$$

Llavors,

$$\omega_0^n = \sum_{i=q}^n \langle \bar{g}_i, g_n \rangle \bar{\omega}_0^i = \langle \bar{g}_q, g_n \rangle \bar{\omega}_0^q$$

$$\omega_0^q = \sum_{i=q}^n \langle \bar{g}_i, g_q \rangle \bar{\omega}_0^i = \langle \bar{g}_q, g_q \rangle \bar{\omega}_0^q$$

Com que treballem amb mesures no ens cal vigilar els canvis de signe i podem escriure

$$\pi^*(dx_{q-1} \wedge dL_{n-1}^\lambda) = \langle \bar{g}_q, g_n \rangle \bigwedge_{h=1}^{q-1} \omega_0^h \wedge \bar{\omega}_0^q \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} \omega_i^n = |\sin \theta| dx_q \wedge du \quad (5.5)$$

on  $du$  és l'element de volum a  $\mathbb{S}^{n-1}$  corresponent al vector normal a  $L_{n-1}^\lambda$  en  $x$ ,  $dx_q$  correspon a l'element de volum de  $S$  i  $\theta$  és l'angle entre  $S$  i  $L_{n-1}^\lambda$  en  $x$ . Integrant els dos membres de (5.5) obtenim

$$\int_{E(S)} dx_{q-1} \wedge dL_{n-1}^\lambda = \int_{G(S)} \pi^*(dx_{q-1} \wedge dL_{n-1}^\lambda) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\sin \theta| du \cdot \int_S dx_q.$$

Finalment es calcula que

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\sin \theta| dS^{n-1} = \frac{O_n O_{q-1}}{O_q}.$$

□

Considerem el cas de plans  $\lambda$ -geodèsics de codimensió més gran.

**Proposició 5.3.2.** *Sigui  $S$  una subvarietat compacta de dimensió  $q$  a  $\mathbb{H}^n$ , de classe  $C^1$  a trossos, potser amb vora. Llavors si  $r + q \geq n$*

$$\int_{\mathcal{L}_r^\lambda} \text{vol}_{r+q-n}(L_r^\lambda \cap S) dL_r^\lambda = \frac{O_n \cdots O_{n-r-1} O_{r+q-n}}{O_r \cdots O_0 O_q} \cdot \text{vol}_q(S).$$

*Demostració.* Usant (5.3) i la proposició anterior,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}_r^\lambda} \text{vol}_{r+q-n}(L_r^\lambda \cap S^q) dL_r^\lambda &= \int_{\mathcal{L}_{r+1}} \int_{\mathcal{L}_{[r+1]r}^\lambda} \text{vol}_{r+q-n}(L_r^\lambda \cap S^q) dL_{[r+1]r}^\lambda dL_{r+1} = \\ &= \frac{O_{r+1}O_{r+q-n}}{O_{r+1+q-n}} \int_{\mathcal{L}_{r+1}} \text{vol}_{r+1+q-n}(S \cap L_{r+1}) dL_{r+1}. \end{aligned}$$

La formula per la integral dels volums d'intersecció amb plans geodèsics (2.8) dóna

$$\int_{\mathcal{L}_{r+1}} \text{vol}_{r+1+q-n}(S \cap L_{r+1}) dL_{r+1} = \frac{O_n \cdots O_{n-r-1} O_{r+1+q-n}}{O_{r+1} \cdots O_1 O_0 O_q} \text{vol}_q(S)$$

□

Notem que per  $\lambda = 0$ , aquestes fórmules coincideixen amb (2.8) llevat d'un factor  $O_{n-r-1}$ . Això és coherent amb el fet que, fins i tot per  $\lambda = 0$ , l'espai  $\mathcal{L}_r^\lambda$  és un fibrat de base  $\mathcal{L}_r$  i fibra  $S^{n-r-1}$ . En efecte, per cada  $r$ -pla geodèsic  $L_r$  considerem el tub a distància  $\epsilon = \text{arctanh}\lambda$ . Obtenim una hipersuperfície de 'revolució' formada per  $r$ -plans  $\lambda$ -geodèsics. Ara, els vectors normals unitaris a  $L_r$  en un punt fixat estan en correspondència amb els  $r$ -plans  $\lambda$ -geodèsics que formen el tub.

Per  $r + q = n$ , tenim la següent fórmula de Cauchy-Crofton

$$\int_{\mathcal{L}_r^\lambda} \#(L_r^\lambda \cap S^q) dL_r^\lambda = \frac{O_n \cdots O_{n-r+1} O_{n-r-1}}{O_r \cdots O_1} \cdot \text{vol}_q(S)$$

En particular, la integral del nombre de punts d'intersecció de  $\lambda$ -hiperplans amb una curva és  $4/(O_{n-1} \cdots O_2)$  vegades la seva longitud. Quan  $\lambda = 1$ , això coincideix amb un resultat de Santaló pels casos  $n = 2, 3$  i de Gallego, Martínez Naveira i l'autor per  $n$  general (cf.[San67, San68, GNS]).

## 5.4 Integrals de curvatura mitja d'interseccions amb plans $\lambda$ -geodèsics

Ens proposem generalitzar la proposició 2.2.4 canviant els plans geodèsics per plans  $\lambda$ -geodèsics. En efecte, donada una hipersuperfície  $S \subset \mathbb{H}^n$ , la intersecció  $S \cap L_r^\lambda$  és, quasi per tot  $L_r^\lambda$ , una hipersuperfície de  $L_r^\lambda$ . Té sentit considerar el valor de la integral de curvatura mitja  $M_i(S \cap L_r^\lambda)$  d'aquesta hipersuperfície. A continuació calculem la integral d'aquest valor quan  $L_r^\lambda$  es mou sobre totes les posicions que tallen  $S$ .

Sigui  $L = L_{n-1}^\lambda$  un  $\lambda$ -hiperpla que talli  $S$ . Si  $T_p S$  i  $T_p L_{n-1}^\lambda$  són transversals en  $p \in L_{n-1}^\lambda$ , llavors  $C = L \cap S$  és, almenys localment, una subvarietat de codimensió 2. Les segones formes fonamentals d'aquestes subvarietats són formes bilineals simètriques donades per



$$\begin{aligned} h_L : (T_x L) \times (T_x L) &\longrightarrow (T_x L)^\perp & \nabla_X Y &= \nabla_X^L Y + h_L(X, Y) \\ h_S : (T_x S) \times (T_x S) &\longrightarrow (T_x S)^\perp & \nabla_X Y &= \nabla_X^S Y + h_S(X, Y) \\ h_C : (T_x C) \times (T_x C) &\longrightarrow (T_x C)^\perp & \nabla_X Y &= \nabla_X^C Y + h_C(X, Y). \end{aligned}$$

on  $\nabla^M$  denota la connexió de la subvarietat  $M$ . També podem considerar la segona forma fonamental  $h_C^L$  (o  $h_C^S$ ) de  $C$  com a subvarietat de  $L$  (o de  $S$ ). Clarament,

$$h_C(X, Y) = h_C^L(X, Y) + h_L(X, Y) = h_C^S(X, Y) + h_S(X, Y) \quad (5.6)$$

Orientem  $S$  i  $L_{n-1}^\lambda$  respectivament pels normals unitaris  $N_S$  i  $N_L$ . Per  $X, Y \in T_x C$  es té

$$h_S(X, Y) = \mathbb{I}_S(X, Y) \cdot N_S \quad h_L(X, Y) = \mathbb{I}_L(X, Y) \cdot N_L$$

on  $\mathbb{I}_S$  i  $\mathbb{I}_L$  són formes bilineals de  $T_x S$  i  $T_x L$ , respectivament, amb valors reals. D'altra banda, per alguna forma bilineal  $\mathbb{I}_C^L$  de  $T_x C$  amb valors reals

$$h_C^L(X, Y) = \mathbb{I}_C^L(X, Y) N_C$$

on hem pres  $N_C \in T_x L$  normal a  $C$ , unitari i de forma que  $\langle N_C, N_S \rangle > 0$ . La següent proposició és una generalització del teorema de Meusnier.

**Proposició 5.4.1.** *Amb les notacions anteriors*

$$\mathbb{I}_S = \cos \theta \mathbb{I}_L + \sin \theta \mathbb{I}_C^L$$

on  $\theta$  és l'angle entre  $N_L$  i  $N_S$ .

*Demostració.* Utilitzant (5.6),

$$\mathbb{I}_S(X, Y) = \langle h_S(X, Y), N_S \rangle = \langle h_C(X, Y), N_S \rangle = \mathbb{I}_C^L(X, Y) \langle N_C, N_S \rangle + \mathbb{I}_L(X, Y) \langle N_L, N_S \rangle$$

□

Com que  $L = L_{n-1}^\lambda$  és totalment umbilical amb curvatura normal  $\lambda$ , clarament  $\mathbb{I}_L = \lambda \text{id}$  i podem expressar  $\mathbb{I}_C^L$  només en termes de la restricció de  $\mathbb{I}_S$  a  $T_x C$

$$\mathbb{I}_C^L = \frac{\mathbb{I}_S}{\sin \theta} - \frac{\lambda \text{id}}{\tan \theta}. \quad (5.7)$$

Per evitar confusions establim la següent notació. Donada una forma bilineal simètrica (amb valors reals)  $\mu$  de rang  $r$ , denotem

$$\sigma_j(\mu) = \frac{f_j(k_{i_1} \dots k_{i_j})}{\binom{r}{j}}$$

on  $k_1 \dots k_r$  són els valors propis de  $\mu$  i  $f_j$  és el polinomi simètric elemental d'ordre  $j$ .

Recordem que

$$\det(\mu + tId) = \sum_{j=0}^r f_j(k_1, \dots, k_r) t^{r-j}.$$

Amb aquesta notació, la  $j$ -èssima curvatura mitja  $\sigma_j^S(x)$  de la hipersuperfície  $S$  en un punt és  $\sigma_j(\mathbb{I}_S)$ .

**Proposició 5.4.2.** *Les curvatures mitjes  $\sigma_k(\mathbb{I}_C^L)$  de  $C$  com a hipersuperfície de  $L$  estan donades per*

$$\sigma_k(\mathbb{I}_C^L) = \sum_{l=0}^k \frac{\binom{n-l-2}{n-k-2} \binom{n-2}{l}}{\binom{n-2}{k}} (-1)^{k-l} \frac{\cos^{k-l} \theta}{\sin^k \theta} \lambda^{k-l} \sigma_l(\mathbb{I}_P^S)$$

on  $\mathbb{I}_P^S$  és la restricció de  $\mathbb{I}_S$  a  $P = T_x C$ .

*Demostració.*

$$\mathbb{I}_C^L + tId = \frac{\mathbb{I}_P^S}{\sin \theta} + (t - \frac{\lambda}{\tan \theta}) Id = \frac{1}{\sin \theta} (\mathbb{I}_P^S + (t \sin \theta - \lambda \cos \theta) Id)$$

Prenent determinants

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} \sigma_{n-j-2}(\mathbb{I}_C^L) t^j &= \det(\mathbb{I}_C + tId) = \frac{1}{\sin^{n-2} \theta} \det(\mathbb{I}_P^S + (t \sin \theta - \lambda \cos \theta) Id) = \\ &= \frac{1}{\sin^{n-2} \theta} \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} \sigma_{n-i-2}(\mathbb{I}_P^S) (t \sin \theta - \lambda \cos \theta)^i = \\ &= \frac{1}{\sin^{n-2} \theta} \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} \sigma_{n-i-2}(\mathbb{I}_P^S) \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \lambda^{i-j} \cos^{i-j} \theta \sin^j \theta t^j = \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{\sin^{n-j-2} \theta} \left( \sum_{i=j}^{n-2} \binom{i}{j} \binom{n-2}{i} (-1)^{i-j} \lambda^{i-j} \cos^{i-j} \theta \sigma_{n-i-2}(\mathbb{I}_P^S) \right) t^j \end{aligned}$$

□

El següent lema és una generalització de (1.2.1).

**Lema 5.4.3.** *Sigui  $S$  una hipersuperfície d'alguna varietat de Riemann  $n$ -dimensional i sigui  $\mathbb{I}$  la segona forma fonamental de  $S$  en un punt  $x$ . Per tot subespai vectorial  $P$  de  $T_x S$  de dimensió  $i$ , denotem  $\mathbb{I}|_P$  la restricció de  $\mathbb{I}$  a  $P$ . Llavors, per  $j \leq i < n-1$*

$$\sigma_j(\mathbb{I}) = \frac{1}{\text{vol}(G(i, n-1))} \int_{G(i, T_x S)} \sigma_j(\mathbb{I}|_P) dP.$$

Clarament  $\sigma_j(\mathbb{I}|_P)$  és una generalització del concepte de curvatura normal. D'altra banda, si una altra hipersuperfície  $L$  interseca  $S$  ortogonalment en  $x$  de forma que  $T_x L \cap T_x S = P$ , per la proposició 5.4.1,  $\mathbb{I}|_P$  és la segona forma fonamental de  $S \cap L$  en  $x$  com a hipersuperfície de  $R$ . Per tant,  $\sigma_r(\mathbb{I}|_P)$  és la  $r$ -èssima curvatura mitja de  $S \cap L$ .

*Demostració.* El cas  $j = i$  és la coneguda proposició (1.2.1). Per  $j < i$  ens podem reduir al cas anterior com segueix

$$\begin{aligned} \int_{G(i, T_x S)} \sigma_j(\mathbb{I}|_P) dP &= \int_{G(i, T_x S)} \left( \text{vol}(G(j, i))^{-1} \int_{G(j, P)} \sigma_j(\mathbb{I}|_l) dl \right) dP = \\ &= \text{vol}(G(j, i))^{-1} \int_{G(j, T_x S)} \int_{G(i-j, l^\perp)} \sigma_j(\mathbb{I}|_l) dP dl = \\ &= \text{vol}(G(j, i))^{-1} \text{vol}(G(i-j, n-j-1)) \int_{G(j, T_x S)} \sigma_j(\mathbb{I}|_l) dl = \\ &= \text{vol}(G(j, i))^{-1} \text{vol}(G(i-j, n-j-1)) \text{vol}(G(j, n-1)) \sigma_j(\mathbb{I}) \end{aligned}$$

□

Donada una hipersuperfície  $S \subset \mathbb{H}^n$ , per quasi tot  $\lambda$ -hiperpla  $L_{n-1}^\lambda$ , la intersecció  $L_{n-1}^\lambda \cap S$  és una hipersuperfície diferenciable de  $L_{n-1}^\lambda$ . En aquests casos, té sentit considerar  $M_i(L_{n-1}^\lambda \cap S)$ , les integrals de curvatura mitja de  $L_{n-1}^\lambda \cap S$  com a hipersuperfície de  $L_{n-1}^\lambda$ .

**Proposició 5.4.4.** *Si  $S$  és una hipersuperfície de  $\mathbb{H}^n$  llavors la integral sobre tots els hiperplans  $\lambda$ -geodèsics de  $M_i(L_{n-1}^\lambda \cap S)$  és un polinomi en  $\lambda^2$  amb coeficients múltiples de les integrals de curvatura mitja  $M_j(S)$ . Més concretament,*

$$\int_{\mathcal{L}_{n-1}^\lambda} M_j(L_{n-1}^\lambda \cap S) dL_{n-1}^\lambda = \sum_{l=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} c_{l,j}^n \lambda^{2l} M_{j-2l}(S).$$

on

$$c_{l,j}^n = \frac{\binom{n-j+2l-2}{n-j-2} \binom{n-2}{j-2l}}{\binom{n-2}{j}} \frac{O_{n-2} O_{n-j+2l} O_0}{O_{n-j-1} O_{2l}}.$$

Per  $\lambda = 0$  recuperem la fórmula (2.2.4) però, altre cop, amb un factor  $O_{n-r-1}$  de més.

*Demostració.* Denotem  $C = L_{n-1}^\lambda \cap S$ . Utilitzant l'expressió (5.5)

$$\int_{\mathcal{L}_{n-1}^\lambda} \int_C \sigma_j^C dx dL_{n-1}^\lambda = \int_S \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sin \theta \sigma_j^C dudx.$$

Per la proposició 5.4.2, si  $\mathbb{I}_P^S$  és la restricció de  $\mathbb{I}_S$  a  $P = T_x C$ ,

$$\begin{aligned} & \binom{n-2}{j} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sin \theta \sigma_j^C du = \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\sin \theta}{\sin^j \theta} \sum_{i=0}^j \binom{n-i-2}{n-j-2} \binom{n-2}{i} (-1)^{j-i} \cos^{j-i} \theta \lambda^{j-i} \sigma_i(\mathbb{I}_P^S) du \end{aligned}$$

que, prenent coordenades polars a  $\mathbb{S}^{n-1}$ , és igual a

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^j \binom{n-i-2}{n-j-2} \binom{n-2}{i} (-1)^{j-i} \int_{\mathbb{S}^{n-2}} \int_0^\pi \frac{1}{\sin^{j-1} \theta} \cos^{j-i} \theta \lambda^{j-i} \sigma_i(\mathbb{I}_P^S) \sin^{n-2} \theta d\theta dP = \\ &= \sum_{i=0}^j \binom{n-i-2}{n-j-2} \binom{n-2}{i} (-1)^{j-i} \lambda^{j-i} \int_0^\pi \sin^{n-j-1} \theta \cos^{j-i} \theta d\theta \int_{\mathbb{S}^{n-2}} \sigma_i(\mathbb{I}_P^S) dP. \end{aligned}$$

Utilitzant el lema 5.4.3 obtenim la fórmula buscada. Les constants es calculen fàcilment.  $\square$

**Corol·lari 5.4.5.** Per  $j \leq r-1$

$$\int_{\mathcal{L}_r^\lambda} M_j(L_r^\lambda \cap S) dL_r^\lambda = \sum_{l=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} c_{l,j,r}^n \lambda^{2l} M_{j-2l}(S)$$

on

$$c_{l,j,r}^n = \frac{\binom{r-j+2l-1}{r-j-1} \binom{r-1}{j-2l}}{\binom{r-1}{j}} \frac{O_{n-2} \cdots O_{n-r-1} O_{n-j+2l}}{O_{r-2} \cdots O_1 O_{r-j} O_{2l}}.$$

*Observació.* Per  $j=0$  recuperem el cas  $q=n-1$  de la proposició 5.3.2.

*Demostració.* L'expressió (5.3) per  $dL_r^\lambda$  dona

$$\int_{\mathcal{L}_r^\lambda} M_j(L_r^\lambda \cap S) dL_r^\lambda = \int_{\mathcal{L}_{r+1}} \int_{\mathcal{L}_{[r+1]r}^\lambda} M_j(L_r^\lambda \cap S) dL_{[r+1]r}^\lambda dL_{r+1}$$

que, per la darrera proposició, és igual a

$$\int_{\mathcal{L}_{r+1}} \left( \sum_{l=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} c_{l,j}^{r+1} \lambda^{2l} M_{j-2l}(S \cap L_{r+1}) \right) dL_{r+1}.$$

Finalment, la fórmula de reproductibilitat de les integrals de curvatura mitja per talls amb plans geodèsics de la proposició (2.2.4) dona

$$\sum_{l=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} c_{l,j}^{r+1} \lambda^{2l} \int_{\mathcal{L}_{r+1}} M_{j-2l}(S \cap L_{r+1}) dL_{r+1} = \sum_{l=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} c_{l,j}^{r+1} \lambda^{2l} \frac{O_{n-2} \cdots O_{n-r-1} O_{n-j+2l}}{O_{r-1} \cdots O_0 O_{r-j+2l+1}} M_{j-2l}(S).$$

$\square$

Aquestes fórmules no tenen un aspecte simple ni elegant precisament. Tot i així, és interessant fixar-se que tots els coeficients són positius. Això vol dir que si una superfície té totes les integrals de curvatura mitja positiva, com és el cas de les vores de conjunts convexos, llavors totes les integrals que hem considerat són positives. Això no era clar *a priori* ja que, per exemple, el tall d'un hiperplà  $\lambda$ -geodèsic  $L_{n-1}^\lambda$  amb un convex pot no ser convex dins  $L_{n-1}^\lambda \equiv \mathbb{H}^{n-1}$ .

## 5.5 Mesura de plans $\lambda$ -geodèsics que tallen un domini $\lambda$ -convex.

A continuació generalitzem les fórmules (2.10) i (2.11) substituint els plans geodèsics per plans  $\lambda$ -geodèsics. És a dir, expressarem la integral de la característica d'Euler de la intersecció de plans  $\lambda$ -geodèsics amb un domini de  $\mathbb{H}^n$  en termes de les integrals de curvatura mitja de la seva vora i en termes del seu volum.

**Teorema 5.5.1.** *Sigui  $Q \subset \mathbb{H}^n$  un domini compacte amb vora diferenciable. Per  $r$  parell*

$$\int_{\mathcal{L}_r^\lambda} \chi(Q \cap L_r^\lambda) dL_r^\lambda = (\lambda^2 - 1)^{r/2} \frac{O_{n-1} \cdots O_{n-r-1}}{O_r \cdots O_1} \cdot V(Q) + \sum_{j=1}^{r/2} \left( \sum_{i=j}^{r/2} \binom{r-1}{2i-1} \frac{2}{O_{2i-1} O_{r-2i}} c_{i-j, 2i-1, r}^n (\lambda^2 - 1)^{\frac{r-2i}{2}} \lambda^{2i-2j} \right) M_{2j-1}(\partial Q),$$

*i per  $r$  senar*

$$\int_{\mathcal{L}_r^\lambda} \chi(Q \cap L_r^\lambda) dL_r^\lambda = \sum_{j=0}^{(r-1)/2} \left( \sum_{i=j}^{(r-1)/2} \binom{r-1}{2i} \frac{2}{O_{2i} O_{r-2i-1}} c_{i-j, 2i, r}^n (\lambda^2 - 1)^{\frac{r-2i-1}{2}} \lambda^{2i-2j} \right) M_{2j}(\partial Q).$$

*Demostració.* Sabem que cada  $L_r^\lambda$  és una varietat simplement connexa de curvatura seccional constant  $\lambda^2 - 1$ . Ara, per tot  $L_r^\lambda$  que talli  $Q$ , el teorema de Gauss-Bonnet en espais de curvatura constant  $\lambda^2 - 1$  diu que, per  $r$  parell,

$$\frac{O_r}{2} \chi(Q \cap L_r^\lambda) = (\lambda^2 - 1)^{r/2} V(Q \cap L_r^\lambda) + \sum_{i=1}^{r/2} \binom{r-1}{2i-1} \frac{O_r}{O_{2i-1} O_{r-2i}} (\lambda^2 - 1)^{(r-2i)/2} M_{2i-1}(\partial Q \cap L_r^\lambda);$$

*i per  $r$  senar,*

$$\frac{O_r}{2} \chi(Q \cap L_r^\lambda) = \sum_{i=0}^{(r-1)/2} \binom{r-1}{2i} \frac{O_r}{O_{2i} O_{r-2i-1}} (\lambda^2 - 1)^{(r-2i-1)/2} M_{2i}(\partial Q \cap L_r^\lambda).$$

Integrant respecte  $L_r^\lambda$ , en el cas parell

$$\begin{aligned} \frac{O_r}{2} \int_{\mathcal{L}_r^\lambda} \chi(Q \cap L_r^\lambda) dL_r^\lambda &= (\lambda^2 - 1)^{r/2} \int_{\mathcal{L}_r^\lambda} V(Q \cap L_r^\lambda) dL_r^\lambda + \\ &+ \sum_{i=1}^{r/2} \binom{r-1}{2i-1} \frac{O_r}{O_{2i-1} O_{r-2i}} (\lambda^2 - 1)^{(r-2i)/2} \int_{\mathcal{L}_r^\lambda} M_{2i-1}(\partial Q \cap L_r^\lambda) dL_r^\lambda \end{aligned}$$

i pel corollari 5.4.5 i la proposició 5.3.2,

$$\begin{aligned} \frac{O_r}{2} \int_{\mathcal{L}_r^\lambda} \chi(Q \cap L_r^\lambda) dL_r^\lambda &= (\lambda^2 - 1)^{r/2} \frac{O_{n-1} \cdots O_{n-r-1}}{O_{r-1} \cdots O_0} \cdot V(Q) + \\ &+ \sum_{i=1}^{r/2} \binom{r-1}{2i-1} \frac{O_r}{O_{2i-1} O_{r-2i}} (\lambda^2 - 1)^{(r-2i)/2} \left( \sum_{l=0}^{i-1} c_{l,2i-1,r}^n \lambda^{2l} M_{2i-2l-1}(\partial Q) \right) \end{aligned}$$

i reordenant els sumatoris obtenim la formula buscada. En el cas senar procedim anàlogament.  $\square$

Per  $\lambda = 1$  i  $r = n - 1$  obtenim la integral de la característica d'Euler de les interseccions amb horosferes (com a [San67],[San68] i [GNS]).

*Observació.* Aquests resultats són especialment interessants en el cas de dominis  $\lambda$ -convexos (cf. definició 1.1.2). És fàcil veure que si un domini  $Q$  és  $\lambda$ -convex, llavors  $L_r^\lambda \cap Q$  és contràctil per tot  $L_r^\lambda$ . Per tant, les fórmules anteriors donen la mesura de  $r$ -plans  $\lambda$ -geodèsics que tallen  $Q$ . Per exemple, la mesura de plans  $\lambda$ -geodèsics a  $\mathbb{H}^3$  que tallen un  $\lambda$ -convex és

$$\int_{L_2^\lambda \cap Q \neq \emptyset} dL_2^\lambda = 2M_1(\partial Q) - (1 - \lambda^2)V(Q).$$

Per simplificar podem enunciar el següent corollari.

**Corollari 5.5.2.** *La mesura del conjunt dels  $r$ -plans  $\lambda$ -geodèsics que tallen un domini  $\lambda$ -convex  $Q \subset \mathbb{H}^n$  és combinació lineal de les integrals de curvatura mitja de  $\partial Q$  i, quan  $r$  és senar, del volum de  $Q$ .*

## 5.6 Dominis $h$ -convexos

Per comoditat denotem per  $\mathcal{H}$  l'espai de les horosferes que fins ara denotàvem  $\mathcal{L}_{n-1}^1$ . A partir d'aquí, parlarem d'*horoboles* per referir-nos a la regió convexa delimitada per una horosfera. En general denotarem per  $H$  les horoboles de forma que una horosfera serà  $\partial H$ . En aquesta secció ens proposem mesurar el conjunt d'horoboles que contenen un domini  $h$ -convex. Això ens donarà com a resultat algunes desigualtats interessants per a dominis d'aquest tipus.

Comencem observant que de l'expressió (5.4) es dedueix que la mesura total d'horoboles que contenen un punt  $p$  és finita. En efecte, aquesta mesura és

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty e^{-\rho} d\rho du = O_{n-1}$$

Ens proposem determinar la mesura de les horoboles que contenen totalment un domini  $h$ -convex  $Q$ . Notem que aquesta mesura és la diferència entre la mesura de les horoboles que tallen  $Q$  i la mesura de les horoesferes que tallen  $Q$ .

Recordem que la fórmula cinemàtica fonamental (2.2.6) a  $\mathbb{H}^n$ , donats dos dominis  $Q_0$  i  $Q_1$ , estableix per  $n$  parell

$$\begin{aligned} \int_G \chi(Q_0 \cap gQ_1) dK &= -2(-1)^{n/2} \frac{O_{n-1} \cdots O_1}{O_n} V(Q_0)V(Q_1) + \\ &+ O_{n-1} \cdots O_1 (V(Q_1)\chi(Q_0) + V(Q_0)\chi(Q_1)) + \\ &+ O_{n-2} \cdots O_1 \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h(\partial Q_0) M_{n-2-h}(\partial Q_1) + \\ &+ O_{n-2} \cdots O_1 \sum_{i=0}^{n/2-2} (-1)^{(n/2-i-1)} \binom{n-1}{2i+1} \frac{n-2i-2}{O_{n-2i-3}} \frac{2}{O_{n-2i-2}} \\ &\cdot \left[ \sum_{h=n-2i-2}^{n-2} \frac{\binom{2i+1}{n-h-1} O_{2n-h-2i-2}}{(h+1)O_{n-h}} \frac{O_h}{O_{2i+h-n+2}} M_{n-2-h}(\partial Q_0) M_{h+2i+2-n}(\partial Q_1) \right]. \end{aligned}$$

i per  $n$  senar

$$\begin{aligned} \int_G \chi(Q_0 \cap gQ_1) dK &= O_{n-1} \cdots O_1 (V(Q_1)\chi(Q_0) + V(Q_0)\chi(Q_1)) + \\ &+ O_{n-2} \cdots O_1 \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h(\partial Q_0) M_{n-2-h}(\partial Q_1) + \\ &+ O_{n-2} \cdots O_1 \sum_{i=0}^{(n-3)/2} (-1)^{(n-2i-1)/2} \binom{n-1}{2i} \frac{n-2i-1}{O_{n-2i-1}} \frac{2}{O_{n-2i-2}} \\ &\cdot \left[ \sum_{h=n-2i-1}^{n-2} \frac{\binom{2i}{n-h-1} O_{2n-h-2i-1}}{(h+1)O_{n-h}} \frac{O_h}{O_{2i+h-n+1}} M_{n-2-h}(\partial Q_0) M_{h+2i+1-n}(\partial Q_1) \right]. \end{aligned}$$

Anàlogament a com es feia a [GNS], prenem  $Q_1$  una esfera de radi  $R$  i normalitzem fent  $dS_r = dK / (O_{n-2} \cdots O_0 \text{vol}(S_r))$ . D'aquesta manera  $dS_r = dL_{n-1}^\lambda$  on  $\lambda = \coth r$ . És clar que  $\lim_r dS_r = dH$ . Així, la integral de  $\chi(Q_0 \cap H)$  per totes les horoboles  $H$  que

tallen  $Q_0$  s'obté dividint les expressions anteriors per  $(O_{n-2} \cdots O_0)\text{vol}(S_r)$  i fent  $r$  tendir a infinit. Tenint en compte que  $\lim_r M_i(S_r)/\text{vol}(S_r) = 1$  obtenim, per  $n$  parell

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{H}} \chi(Q_0 \cap H) dH &= -2(-1)^{n/2} \frac{O_{n-1}}{(n-1)O_n} V(Q_0) + O_{n-1} \left( \frac{1}{n-1} \chi(Q_0) \right) + \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h(\partial Q_0) + \sum_{i=0}^{n/2-2} (-1)^{(n/2-i-1)} \binom{n-1}{2i+1} \frac{n-2i-2}{O_{n-2i-3}} \frac{2}{O_{n-2i-2}} \cdot \\ &\cdot \left[ \sum_{h=n-2i-2}^{n-2} \frac{\binom{2i+1}{n-h-1} O_{2n-h-2i-2}}{(h+1)O_{n-h}} \frac{O_h}{O_{2i+h-n+2}} M_{n-2-h}(\partial Q_0) \right], \end{aligned}$$

i per  $n$  senar

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{H}} \chi(Q_0 \cap H) dH &= O_{n-1} \left( \frac{1}{n-1} \chi(Q_0) \right) + \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h(\partial Q_0) + \sum_{i=0}^{(n-3)/2} (-1)^{(n-2i-1)/2} \binom{n-1}{2i} \frac{n-2i-1}{O_{n-2i-1}} \frac{2}{O_{n-2i-2}} \cdot \\ &\cdot \left[ \sum_{h=n-2i-1}^{n-2} \frac{\binom{2i}{n-h-1} O_{2n-h-2i-1}}{(h+1)O_{n-h}} \frac{O_h}{O_{2i+h-n+1}} M_{n-2-h}(\partial Q_0) \right]. \end{aligned}$$

Per altra banda, la integral de la característica de la intersecció de  $Q_0$  amb les horosferes  $\partial H$  és

$$\int_{\mathcal{H}} \chi(Q_0 \cap \partial H) dH = 2 \sum_{h=0}^{[(n-2)/2]} \binom{n-2}{2h} \frac{1}{2h+1} M_{n-2h-2}(\partial Q_0).$$

Si suposem que  $Q_0$  és  $h$ -convex, totes les interseccions són contràctils i les característiques d'Euler són totes 1. Així, restant obtenim la mesura d'horoboles que contenen  $Q_0$ . Com que les fórmules són molt complicades donem els resultats en dimensions  $n = 2, 3, 4, 5$  i  $6$ .

$$m = F - L + 2\pi \quad n = 2$$

$$m = M_0 - M_1 + 2\pi \quad n = 3$$

$$m = -\frac{1}{3}M_0 + \frac{3}{2}M_1 - M_2 - \frac{1}{2}V + \frac{2}{3}\pi^2 \quad n = 4$$

$$m = -M_1 + 2M_2 - M_3 + \frac{2}{3}\pi^2 \quad n = 5$$

$$m = -\frac{1}{5}M_0 + \frac{5}{8}M_1 - 2M_2 + \frac{5}{2}M_3 - M_4 + \frac{1}{5}\pi^3 + \frac{3}{8}V \quad n = 6$$



Totes aquestes quantitats  $m$  són positives suposant  $h$ -convexitat. Aquesta acotació és *òptima*: per una successió d'esferes que omplen una horobola tendeixen a 0. De fet, és clar que per tota successió d' $h$ -convexos amb diàmetre tendint a infinit, aquestes mesures  $m$  han d'anar cap a 0. Una cosa important és que  $m$  és decreixent en l'espai d' $h$ -convexos. Així, el valor de  $m$  sempre és inferior al seu terme independent. Una conseqüència més forta és que si  $B_R$  és una bola que conté  $Q$  i  $B_r$  n'és una de continguda a  $Q$ ,

$$m(B_R) \leq m(Q) \leq m(B_r).$$

Els casos  $n = 2$  i  $3$  són realment interessants

$$0 \leq L - F \leq 2\pi \quad 0 \leq M_1 - M_0 \leq 2\pi.$$

Es va veure a [BM99] que per tota successió d' $h$ -convexos que tendeix a omplir  $\mathbb{H}^n$ , els quocients  $M_i/M_0$  tendeixen a 1, de fet això també és cert en varietats de curvatura negativa acotada (cf. [BM02]). A  $\mathbb{H}^2$  i  $\mathbb{H}^3$  hem vist quelcom més fort que això. Si  $(Q_r)$  és una successió de dominis  $h$ -convexos tendint a omplir  $\mathbb{H}^2$ , llavors

$$M_1(\partial Q) - M_0(\partial Q_r) = F(Q_r) + 2\pi - L(\partial Q_r) = m(Q_r) \leq m(B_r) \longrightarrow 0 \quad r \rightarrow \infty$$

on  $B_r$  és el cercle més gran contingut a  $Q_r$ . Que és més fort que  $M_1/M_0 \rightarrow 1$ . Pel que fa a  $\mathbb{H}^3$ ,

$$M_0(\partial Q_r) - M_1(\partial Q_r) + 2\pi = m(Q_r) \leq m(B_r) \longrightarrow 0 \quad r \rightarrow \infty$$

on  $B_r$  és la bola més gran continguda a  $Q_r$ . Altre cop això implica  $M_1/M_0 \rightarrow 1$ .

*Observació.* Crida força l'atenció el fet que, per  $h$ -convexos a  $\mathbb{H}^2$ ,  $L - F$  és decreixent. Ens preguntem si és cert en general que  $M_0 - (n - 1)V$  és decreixent en l'espai dels dominis  $h$ -convexos de  $\mathbb{H}^n$ .

## 5.7 Esperança del tall amb $\lambda$ -plans

Aquí provarem resultats anàlegs als de la secció 4.3. És a dir, donarem cotes superiors per a l'esperança del volum del tall d'un  $\lambda$ -convex amb un  $\lambda$ -hiperplà aleatori.

Donat un domini  $\lambda$ -convex  $Q \subset \mathbb{H}^n$ . Considerem la variable aleatòria consistent a prendre, a l'atzar, un  $\lambda$ -hiperplà  $L_{n-1}^\lambda$  que talli  $Q$  i mesurar el volum d'aquest tall. Per les proposicions 5.3.1 i 5.5.1 aquesta esperança és

$$E[\text{vol}(Q \cap L_{n-1}^\lambda)] = \frac{\int_{\mathcal{L}_{n-1}^\lambda} \text{vol}(Q \cap L_{n-1}^\lambda) dL_{n-1}^\lambda}{\int_{\mathcal{L}_{n-1}^\lambda} \chi(Q \cap L_{n-1}^\lambda) dL_{n-1}^\lambda} = \frac{O_{n-1}V(Q)}{\sum_i c_i M_i(\partial Q) + cV}$$

on el denominador del darrer terme és una de les expressions de la proposició 5.5.1. Igual que en el cas geodèsic, per molt gran que sigui el convex, aquesta esperança serà sempre inferior a una cota.

**Proposició 5.7.1.** *Sigui  $Q \subset B(R) \subset \mathbb{H}^n$  un domini contingut en una bola de radi  $R$ . L'esperança del volum del tall de  $Q$  amb un  $\lambda$ -hiperpla aleatori està acotada per*

$$E[\text{vol}(Q \cap L_{n-1}^\lambda)] \leq E[\text{vol}(B(R) \cap L_{n-1}^\lambda)] < \frac{O_{n-1}}{(1+\lambda)^{n-1} + (1-\lambda)^{n-1}}$$

*Demostració.* Podem suposar que  $Q$  és  $\lambda$ -convex ja que si no ho és, l'esperança de tall serà més petita que l'esperança de l'embolcall  $\lambda$ -convex, el més petit conjunt  $\lambda$ -convex que el conté. Prenem un origen  $O$  interior a  $Q$ . Per cada vector  $u$  unitari a  $T_O\mathbb{H}^n$  prenem la geodèsica  $\gamma(\rho) = \exp_O(\rho u)$  i a cada  $\rho$  li fem correspondre el  $\lambda$ -hiperpla  $L_{n-1}^\lambda$  ortogonal a  $\gamma$  en  $\gamma(\rho)$  i amb la convexitat cap al cantó de  $-\gamma'(\rho)$ . Per l'expressió (5.4) de la mesura de  $\lambda$ -hiperplans tenim

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}_{n-1}^\lambda} \chi(Q \cap L_{n-1}^\lambda) dL_{n-1}^\lambda &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{h_1(u)}^{h_2(u)} (\cosh \rho - \lambda \sinh \rho)^{n-1} d\rho du \geq \\ &\geq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{l_1(u)}^{l_2(u)} (\cosh \rho - \lambda \sinh \rho)^{n-1} d\rho du \end{aligned}$$

on  $[h_1(u), h_2(u)]$  és l'interval de valors de  $\rho$  dels  $\lambda$ -hiperplans que tallen  $Q$  i  $[l_1(u), l_2(u)] = \gamma^{-1}(Q \cap \gamma)$  és l'interval de paràmetres on  $\gamma$  és interior a  $Q$ . Com que  $l_1(-u) = -l_2(u)$  la darrera integral és

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{l_2(u)} (\cosh \rho - \lambda \sinh \rho)^{n-1} + (\cosh \rho + \lambda \sinh \rho)^{n-1} d\rho du.$$

Per altra banda, el volum de  $Q$  expressat en coordenades polars és

$$V(Q) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{l_2(u)} \sinh^{n-1} \rho d\rho du.$$

Ara bé, estudiant la funció

$$f(R) = E[\text{vol}(B(R) \cap L_{n-1}^\lambda)] = \frac{O_{n-1} \int_0^R \sinh^{n-1} \rho d\rho}{\int_0^R (\cosh \rho - \lambda \sinh \rho)^{n-1} + (\cosh \rho + \lambda \sinh \rho)^{n-1} d\rho}$$

es pot veure que és creixent i acotada per  $O_{n-1}((1+\lambda)^{n-1} + (1-\lambda)^{n-1})^{-1}$ . Per tant, com que  $l_2(u) \leq R$  per tot  $u$ ,

$$\begin{aligned} \frac{V(Q)}{E[L_r^\lambda \cap Q]} &= \int_{\mathcal{L}_{n-1}^\lambda} \chi(Q \cap L_{n-1}^\lambda) dL_{n-1}^\lambda \geq \\ &\geq O_{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{l_2(u)} (\cosh \rho - \lambda \sinh \rho)^{n-1} + (\cosh \rho + \lambda \sinh \rho)^{n-1} d\rho du = \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{f(l_2(u))} \int_0^{l_2(u)} \sinh^{n-1} \rho d\rho du \geq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{f(R)} \int_0^{l_2(u)} \sinh^{n-1} \rho d\rho du = \\ &= \frac{V(B(R))}{E[L_r^\lambda \cap B(R)]}. \end{aligned}$$

□

# Bibliografia

- [BGR01] A. A. Borisenko, E. Gallego, and A. Reventós. Relation between area and volume for  $\lambda$ -convex sets in Hadamard manifolds. *Differential Geom. Appl.*, 14(3):267–280, 2001.
- [BK97] P. Breuer and W. Kühnel. The tightness of tubes. *Forum Math.*, 9(6):707–720, 1997.
- [BM99] A. A. Borisenko and V. Miquel. Total curvatures of convex hypersurfaces in hyperbolic space. *Illinois J. Math.*, 43(1):61–78, 1999.
- [BM02] A. A. Borisenko and V. Miquel. Comparison theorems on convex hypersurfaces in Hadamard manifolds. *Ann. Global Anal. Geom.*, 21(2):191–202, 2002.
- [BV97] A. A. Borisenko and D. I. Vlasenko. Convex surfaces in Lobachevskii space. *Mat. Fiz. Anal. Geom.*, 4(3):278–285, 1997.
- [Car51] E. Cartan. *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Gauthier-Villars, Paris, 1951. 2d ed.
- [Che44] S-S. Chern. A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 45:747–752, 1944.
- [Che45] S-S. Chern. On the curvatura integra in a Riemannian manifold. *Ann. of Math. (2)*, 46:674–684, 1945.
- [CL57] S-S Chern and R.K. Lashof. On the total curvature of immersed manifolds. *Amer. J. Math.*, 79:306–318, 1957.
- [CR79] T.E. Cecil and P.J. Ryan. Tight and taut immersions into hyperbolic space. *J. London Math. Soc. (2)*, 19(3):561–572, 1979.
- [dC92] M. P. do Carmo. *Riemannian geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.
- [Fed69] H. Federer. *Geometric measure theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

- [GNS] E. Gallego, A. M. Naveira, and G. Solanes. Horospheres and convex bodies in  $n$ -dimensional hyperbolic space. *Geometria Dedicata*.
- [Got96] D.H. Gottlieb. All the way with Gauss-Bonnet and the sociology of mathematics. *Amer. Math. Monthly*, 103(6):457–469, 1996.
- [GR85] E. Gallego and A. Reventós. Asymptotic behavior of convex sets in the hyperbolic plane. *J. Differential Geom.*, 21(1):63–72, 1985.
- [GR99] E. Gallego and A. Reventós. Asymptotic behaviour of  $\lambda$ -convex sets in the hyperbolic plane. *Geom. Dedicata*, 76(3):275–289, 1999.
- [Gra90] A. Gray. *Tubes*. Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1990.
- [GS01] E. Gallego and G. Solanes. Perimeter, diameter and area of convex sets in the hyperbolic plane. *J. London Math. Soc. (2)*, 64(1):161–178, 2001.
- [Had57] H. Hadwiger. *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer-Verlag, Berlin, 1957.
- [Hel01] S. Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, volume 34 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Corrected reprint of the 1978 original.
- [Hop25] H. Hopf. Über die curvatura integra geschlossener hyperflächen. *Math. Annalen*, 95:340–376, 1925.
- [Hop27] H. Hopf. Vektorfelder in  $n$ -dimensionalen mannigfaltigkeiten. *Math. Annalen*, 96:225–250, 1927.
- [KN96a] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. I*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [KN96b] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. II*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1996. Reprint of the 1969 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [Koh91] P. Kohlmann. Curvature measures and Steiner formulae in space forms. *Geom. Dedicata*, 40(2):191–211, 1991.
- [KP85] W. Kühnel and U. Pinkall. Tight smoothing of some polyhedral surfaces. In *Global differential geometry and global analysis 1984 (Berlin, 1984)*, volume 1156 of *Lecture Notes in Math.*, pages 227–239. Springer, Berlin, 1985.
- [Kui97] N.H. Kuiper. Geometry in curvature theory. In *Tight and taut submanifolds (Berkeley, CA, 1994)*, volume 32 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 1–50. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

- 
- [Lan97] R. Langevin. *Introduction to integral geometry*. 21<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática. [21st Brazilian Mathematics Colloquium]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1997.
- [LS82] R. Langevin and T. Shifrin. Polar varieties and integral geometry. *Amer. J. Math.*, 104(3):553–605, 1982.
- [LS00] R. Langevin and G. Solanes. On bounds for total absolute curvature of surfaces in hyperbolic 3-space. *Prep.Lab.Top.Univ.Bourgogne*, (234), 2000.
- [Mil97] J.W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Based on notes by David W. Weaver, Revised reprint of the 1965 original.
- [Mor29] M. Morse. Singular points of vector fields under general boundary conditions. *Amer. J. Math.*, 51:165–178, 1929.
- [O’N83] B. O’Neill. *Semi-Riemannian geometry*, volume 103 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1983. With applications to relativity.
- [Rat94] J. G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [San50] L. A. Santaló. On parallel hypersurfaces in the elliptic and hyperbolic  $n$ -dimensional space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1:325–330, 1950.
- [San67] L. A. Santaló. Horocycles and convex sets in hyperbolic plane. *Arch. Math. (Basel)*, 18:529–533, 1967.
- [San68] L. A. Santaló. Horospheres and convex bodies in hyperbolic space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 19:390–395, 1968.
- [San70] L. A. Santaló. Probabilidades sobre cuerpos convexos y cilindros. *Rev. Unin Mat. Argentina*, 25:95–104, 1970.
- [San76] L. A. Santaló. *Integral geometry and geometric probability*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976. With a foreword by Mark Kac, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Vol. 1.
- [San80] L. A. Santaló. Notes on the integral geometry in the hyperbolic plane. *Portugal. Math.*, 39(1-4):239–249 (1985), 1980. Special issue in honor of António Monteiro.
- [Spi79] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*. Vol. IV. Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.
- [SY72] L. A. Santaló and I. Yañez. Averages for polygons formed by random lines in Euclidean and hyperbolic planes. *J. Appl. Probability*, 9:140–157, 1972.

- [Teu80] E. Teufel. Anwendungen der differentialtopologischen Berechnung der totalen Krümmung und totalen Absolutkrümmung in der sphärischen Differentialgeometrie. *Manuscripta Math.*, 32(3-4):239–262, 1980.
- [Teu86] E. Teufel. Integral geometry and projection formulas in spaces of constant curvature. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 56:221–232, 1986.
- [Teu88] E. Teufel. On the total absolute curvature of immersions into hyperbolic spaces. In *Topics in differential geometry, Vol. I, II (Debrecen, 1984)*, volume 46 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 1201–1209. North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [Teu82] E. Teufel. Differential topology and the computation of total absolute curvature. *Math. Ann.*, 258(4):471–480, 1981/82.
- [WS66] T. J. Willmore and B. A. Saleemi. The total absolute curvature of immersed manifolds. *J. London Math. Soc.*, 41:153–160, 1966.
- [Yau75] S. T. Yau. Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 8(4):487–507, 1975.