Estudi de l'estabilitat lineal de l'equació d'Einstein en els models de Robertson-Walker

Lluís Bruna

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Estudi de l'estabilitat lineal de l'equació d'Einstein en els models de Robertson-Walker

Lluís Bruna

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Certifico que la present memòria ha estat realitzada per Lluís Bruna i Floris i constitueix la seva Tesi per aspirar al grau de Doctor en Matemàtiques per la Universitat Autònoma de Barcelona

Bellaterra, setembre de 2004

Director: Joan Girbau

Índex

Introducció

Sovint, el conjunt d'equacions diferencials que descriu el comportament d'un sistema físic és tan complicat que es desconeix l'expressió general de les seves solucions. Si s'arriba a trobar una solució particular, és usual que per estudiar localment aquest sistema es resolgui l'equació linealitzada, tot suposant que la informació que en puguem extreure també sigui vàlida per a l'equació original. Però no sempre és així i, en conseqüència, té sentit plantejar-se quines condicions cal demanar per poder-ne estar del tot segurs. Quan les solucions de l'equació linealitzada realment serveixen per aproximar les solucions exactes, es diu que l'equació original és linealment estable, o estable per linealització. La definició clàssica que tradueix aquesta idea és la següent: *Sigui $f : X \to Y$ una aplicació diferenciable entre dos espais de Banach. L'equació $f(x) = y_0$, amb $y_0 \in Y$ fix, és linealment estable en el punt x_0 si per a tota solució h de l'equació linealitzada $D_{x_0}f(h) = 0$ existeix una corba $\lambda \to x(\lambda))$ de solucions de $f(x) = y_0$ que és tangent a h en x_0.* Suposar que $x_0 + h$ és una bona aproximació d'una solució de $f(x) = y_0$ és fals; l'únic que es pot assegurar és que, en primer ordre, $x_0 + h$ és solució de $f(x) = y_0$, ja que $f(x_0 + h) = f(x_0) + D_{x_0}f(h) + O(\|h^2\|) = y_0 + O(\|h^2\|)$. Pensem, per exemple, en una funció potencial del tipus $V(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$. A l'origen de coordenades el potencial és nul. Les solucions de $V(x_1, x_2) = 0$ són les bisectrius $x_2 = x_1$ i $x_2 = -x_1$. En canvi, basant-nos en l'equació linealitzada $D_{(0,0)}V(h_1, h_2) = 0$, que ara és simplement la identitat $0 = 0$, hauríem arribat a la conclusió errònia que en un entorn de $(0, 0)$ el potencial és nul en totes les direccions.

L'exemple anterior pot semblar un xic trivial, bàsicament perquè hem considerat una equació algebraica. Des d'aquest punt de vista, l'equació d'Einstein esdevindrà un exemple de gran riquesa perquè, una vegada escrita en coordenades, és una equació en derivades parcials de segon ordre, quasi-lineal. No és d'estranyar, doncs, que en la majoria de situacions sigui impossible obtenir la solució exacta de l'equació d'Einstein, tret d'aquells problemes amb un alt grau de simetria. Segons el mateix S. Hawking [28], durant força temps la investigació es va centrar únicament a trobar solucions en algun sistema de coordenades en concret, resultats que segurament mancarien de sentit físic. No fou fins els anys 60 que es va donar més importància a l'estudi de propietats generals de les equacions que no pas a la seva resolució exacta. En la dècada dels 70 es van publicar molts articles [34] sobre l'estabilitat lineal de l'equació d'Einstein en el buit $G(g) = 0$. Històricament, el motiu d'aquest interès era saber si tenia algun sentit linealitzar aquesta equació al voltant de la mètrica η de Minkowski de la Relativitat Especial, solució de $G(\eta) = 0$. La qüestió no era simplement teòrica: en considerar només els termes de primer ordre, s'obté l'equació d'ones que permet postular l'existència de les ones gravitatòries. Y. Choquet-Bruhat, S. Deser, A. Fischer i J.E. Marsden [11, 12] van demostrar que, efectivament, $G(g) = 0$ és estable per linealització en $g = \eta$, és a dir, que per estudiar les mètriques g properes a η, amb la condició $G(g) = 0$, es pot utilitzar l'equació linealitzada.

Posteriorment, A. Fischer i J.E. Marsden [21, 23] van estudiar en quines condicions l'equació d'Einstein és linealment estable en un espai-temps arbitrari i, més tard V. Moncrief i J. Arms [35, 36, 1] van relacionar l'estabilitat lineal amb l'absència de simetries de l'espai-temps.

Al contrari que del cas del buit, pocs articles s'han escrit sobre l'estabilitat lineal de l'equació d'Einstein amb matèria perquè, d'entrada, sempre hi ha hagut dificultats per aplicar la definició anterior [3]. La nova definició d'estabilitat lineal ha estat inspirada en els articles [18, 19] d'Einstein sobre cosmologia de l'any 1917. En aquests escrits Einstein també parteix de $G(\eta) = 0$, però es pregunta per aquelles mètriques g pròximes a la mètrica de Minkowski que compleixen $G(g) = \chi T$ per a un T petit, que podem entendre com una pertorbació de $T = 0$. Aleshores, per simplificar el problema, considera l'equació linealitzada $D_\eta G(h) = \chi T$, ja que en primer ordre $\eta + h$ és solució de $G(g) = \chi T$. Escollint una determinada representació, Einstein obté l'equació d'ones no homogènia, i dóna les solucions de l'equació linealitzada en funció dels potencials retardats. En aquest cas concret, els arguments de tots els autors citats anteriorment també serveixen per demostrar que l'equació linealitzada serveix per aproximar $G(g) = \chi T$, per a T petit, al voltant de $g = \eta$. En general, però, això no és cert.

El raonament anterior es pot estendre a una situació més general com ara la següent. Interpretem l'univers com un sistema físic amb una mètrica de Lorentz g i un tensor d'impulsió-energia T, ambdós relacionats per l'equació d'Einstein $G(g) = \chi T$. Imaginem que, per exemple, el naixement d'una nova estrella es tradueix en una petita pertorbació δT de T. Com a conseqüència, s'originarà una altra pertorbació δg de g, relacionada amb l'anterior per $G(g+\delta g) = \chi(T+\delta T)$. Aleshores la pregunta és si, per estudiar la propagació d'aquesta pertorbació arreu de l'univers, és correcte considerar que la mètrica $g + h$, amb h solució de l'equació linealitzada $D_g G(h) = \chi \delta T$, és una bona aproximació de la mètrica pertorbada. La diferència respecte al cas de l'equació d'Einstein en el buit és clara: si abans ens interessàvem per les solucions de $f(x) = y_0$ properes a una solució particular x_0, per al mateix y_0, ara ens preocupem per les solucions de $f(x) = y$ properes a una solució particular x_0 de $f(x_0) = y_0$, per a aquells y pròxims a y_0.

Aquesta nova problemàtica requereix també d'una nova definició d'estabilitat lineal. En el capítol 3 s'explica tot el procés fins arribar a la definició precisa, original d'aquesta tesi:

Definició: *Sigui $f : U \longrightarrow Y$ una aplicació contínuament diferenciable entre un obert U d'un espai de Banach X i un altre espai de Banach Y. Sigui $x_0 \in U$ i $y_0 = f(x_0)$. Per a qualsevol $q \in Y$ definim*

$$\begin{aligned} H_q &= \{x \in U \textit{ solució de } f(x) = y_0 + q\} \\ L_q &= \{x \in U \,:\, x = x_0 + h,\ h \textit{ solució de } D_{x_0} f(h) = q\}. \end{aligned}$$

Sigui F un subespai vectorial tancat de Y. Direm que l'equació $f(x) = y_0 + q$ és estable per linealització en el punt inicial x_0 segons la direcció del subespai F si

· *Existeix un entorn V de l'origen a F, un entorn W de l'origen a $L = \ker D_{x_0} f$, un entorn U' de x_0, $U' \subset U$, i unes aplicacions φ i ψ contínuament diferenciables*

$$\varphi : \ V \times W \longrightarrow U' \qquad\qquad \psi : \ V \times W \longrightarrow U'$$

tals que per a tot $q \in V$ les aplicacions

$$\begin{array}{rccc} \varphi_q : & W & \longrightarrow & H_q \cap U' \\ & z & \longrightarrow & \varphi(q,z) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rccc} \psi_q : & W & \longrightarrow & L_q \cap U' \\ & z & \longrightarrow & \psi(q,z) \end{array}$$

són bijeccions contínues, d'inversa contínua, amb $\varphi_0(0) = x_0$ i $\psi_0(0) = x_0$ (és a dir, $H_q \cap U'$ és una varietat diferenciable parametritzada per φ_q i $L_q \cap U'$ és una varietat lineal parametritzada per ψ_q).

· *Per a cada $q \in V$ i cada $z \in W$ l'error $E_q(z) = \varphi_q(z) - \psi_q(z)$ en considerar $\psi_q(z) \in L_q \cap U''$ en lloc de $\varphi_q(z) \in H_q \cap U'$ està controlat per*

$$\lim_{(z,q)\to(0,0)} \frac{E_q(z)}{\sqrt{\|z\|^2 + \|q\|^2}} = 0 \ .$$

Quan F sigui tot Y direm simplement que $f(x) = y_0 + q$ és estable per linealització en un punt $x_0 \in U$.

El següent teorema (que, essencialment, és una adaptació del teorema de la funció inversa en aquest context) dóna unes condicions suficients per a l'estabilitat lineal en el sentit de la definició anterior:

Teorema: *Siguin X i Y dos espais de Banach, x_0 un element de X i*

$$f : \ U \longrightarrow Y$$

una aplicació contínuament diferenciable entre un cert entorn U de x_0 i Y. Suposem que aquest $x_0 \in X$ compleix l'equació $f(x) = y_0$, $y_0 \in Y$. Indiquem per L el nucli de $D_{x_0} f$ i suposem que L té un suplementari topològic S a X, $X = L \oplus S$, de manera que tot element de X es pot representar per un parell (z, u) amb $z \in L$ i $u \in S$. Aleshores, si l'aplicació lineal tangent

$$D_{x_0} f : \ X \longrightarrow Y$$

és exhaustiva, l'equació $f(x) = y_0 + q$ és linealment estable en x_0.

Potser el tret més important de la nova definició és que la idea de tangència passa a ocupar un segon pla. Allò important, en definitiva, el que es pretén en linealitzar una equació és que l'error comès sigui petit o, si més no, estigui acotat. El requisit de tangència ho assegura, però l'error pot ser petit sense necessitat d'imposar aquesta restricció a les solucions d'una equació i a les de la seva linealitzada. Naturalment, en el capítol 3 es comprova que quan $F = \{0\}$ s'obté la definició clàssica d'estabilitat en el buit.

L'equació d'Einstein és de naturalesa hiperbòlica i, en conseqüència, se li associa un problema de Cauchy que mostra el seu caràcter determinista. Una particularitat d'aquest problema és que les dades que es donen inicialment no poden ser qualssevol, sinó que han de complir unes equacions de lligam. Si el problema de Cauchy està ben posat (el que essencialment vol dir que les solucions depenen contínuament de les dades de Cauchy) l'estabilitat per linealització de les equacions de lligam implica la de l'equació d'Einstein. Per aquest motiu suposarem que, tant per al tensor inicial T com per a les petites deformacions $T + \delta T$, el problema de Cauchy està ben posat. Trobar, per a cada situació, les coordenades (o la *gauge*) adequades en les quals l'equació d'Einstein primerament, esdevingui un sistema d'equacions hiperbòliques sobre el que es pugui aplicar la teoria a $\mathbb{R}^n$ coneguda fins ara [15, 20, 25], i en segon lloc, demostrar que el problema de Cauchy està ben posat [16, 30] són qüestions obertes que encara donen lloc a un considerable nombre d'articles d'investigació [14, 22]. El capítol 1 està íntegrament dedicat a aquests aspectes del problema de Cauchy de l'equació d'Einstein a l'interior els quals són necessaris per als capítols posteriors. El material que hi apareix és una generalització en presència de matèria dels resultats obtinguts per A.Lichnerowicz [33] i Y.Choquet-Bruhat [13, 14], però el teorema següent, malgrat que es pugui trobar d'una manera més o menys implícita en la literatura, és inèdit d'aquest treball:

Teorema: *Sigui V una varietat diferenciable de dimensió 4 i M una hipersuperfície de V. Sigui T una classe de tensors d'impulsió-energia a V, que depenen de m camps de la matèria $\Omega^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$ i d'una mètrica de Lorentz $\bar{g}$ de V. Suposem que en qualsevol sistema de coordenades adaptades a M,*

1. *T és d'ordre zero en $\bar{g}$ i en Ω_n, és a dir, no conté cap derivada de $\bar{g}$ ni de $\Omega^{(i)}$.*
2. *fixada $\bar{g}$, l'equació $div_{\bar{g}}(T) = 0$ es pot escriure com un sistema hiperbòlic de primer ordre en $\{\Omega^{(i)}\}$, quasi-lineal i simètric.*
3. *la hipersuperfície M no és característica de $div_{\bar{g}}(T) = 0$.*

Suposem que es donen a M les dades de Cauchy següents:

· *un camp vectorial N, camp de V amb suport a M, transvers a M, això és, per a cada $x \in M$ es té $T_x(V) = T_x(M) \oplus < N_x >$.*

· *una mètrica de Riemann g i un camp tensorial covariant d'ordre 2 i simètric k.*

· *m camps tensorials $\omega^{(i)}$, camps de V amb suport a M, $i = 1, \ldots, m$.*

que compleixen les equacions de lligam $\mathcal{H}(g, k) = \chi F(g, \omega^{(i)})$ i $\gamma(g, k) = \chi X(g, \omega^{(i)})$ sobre M. Aleshores, en un entorn de M a V, existeixen una mètrica de Lorentz $\bar{g}$ i uns camps tensorials $\Omega^{(1)}, \ldots, \Omega^{(m)}$ tals que

· *substituint a la classe de tensors T les variables pels valors concrets de $\bar{g}$ i $\Omega^{(i)}$ es té $G_{\bar{g}} = \chi T$ i $div_{\bar{g}}(T) = 0$*

- *en tot punt $x \in M$ el camp vectorial N és unitari, $\bar{g}(N_x, N_x) = -1$, i N_x és perpendicular a $T_x(M)$ respecte a $\bar{g}_x$.*
- *la restricció de $\bar{g}$ a M és g i els valors dels camps $\Omega^{(i)}$ a M són $\omega^{(i)}$.*
- *per a tot $x \in M$ es té $N_x(\bar{g}) = k_x$.*

A més, si $\tilde{g}$ i $\Omega'^{(i)}$ són respectivament una mètrica de Lorentz i m camps tensorials en un entorn de M a V que compleixen les 4 condicions anteriors, existeix un difeomorfisme d'un entorn de M a V en un altre entorn de M a V que deixa fixes les dades de Cauchy i que porta $\bar{g}$ en $\tilde{g}$ i $\Omega^{(i)}$ en $\Omega'^{(i)}$ (unicitat llevat difeomorfismes que preserven les dades de Cauchy).

Les condicions que el teorema anterior imposa al tensor d'impulsió-energia T no són tan exigents com pugui semblar perquè els medis holònoms (i en particular els fluids perfectes) les compleixen:

Proposició: *Considerem l'equació $\operatorname{div}(ru \otimes u + \theta) = 0$ en un espai-temps $(V, \tilde{g})$, on r és un escalar positiu anomenat pseudodensitat, u és un camp unitari i θ és un tensor simètric d'ordre 2. Suposem que la divergència de θ és igual al gradient d'una certa funció K, i que r i K són funcions d'un mateix paràmetre ζ. Sigui M una hipersuperfície espacial per $\tilde{g}$. Aleshores, si*

1. *la funció $r(\zeta)$ és positiva en tot el seu domini.*
2. *les funcions $r(\zeta)$ i $K(\zeta)$ són de classe C^1, K' és sempre positiva i $\dfrac{r'}{K'} > 2$,*

l'equació $\operatorname{div}(ru \otimes u + \theta) = 0$ es pot escriure, en unes coordenades adaptades a M, com un sistema simètric i hiperbòlic de primer ordre per al qual la hipersuperfície M no és característica.

L'objectiu d'aquesta tesi és l'estudi de l'estabilitat lineal de l'equació d'Einstein quan el tensor d'impulsió-energia inicial és el corresponent a un model de Robertson-Walker (cap. 2). En aquests models se suposa que tota la matèria que forma l'univers (les estrelles, les galàxies, els cúmuls de galàxies...) es comporta com un fluid perfecte de densitat ρ i pressió p amb un camp de velocitats u geodèsic i unitari, descrit per un tensor del tipus $T = (\rho + p)u \otimes u + pg$. L'espai-temps, homogeni i isòtrop, està modelat per una varietat producte $V = M \times I$, on I és un interval de $\mathbb{R}$ i M és una varietat de Riemann de dimensió 3, completa i simplement connexa, de curvatura constant K. Llavors necessàriament M ha de ser l'espai euclidià $\mathbb{R}^3$ $(K = 0)$, l'espai hiperbòlic $\mathbb{H}_3$ $(K = -1)$ o l'esfera $\mathbb{S}^3$ $(K = 1)$. En el capítol 4 es demostra que els models de curvatura nul·la o negativa (anomenats universos oberts) són linealment estables, i en el capítol 5, que el model esfèric (també dit tancat) és inestable. Les demostracions del capítol 4 es basen en l'exhaustivitat de certs operadors el·líptics definits en uns espais de Banach adequats, els espais de Sobolev. Concretament, en el cas euclidià, les eines necessàries són els espais de Sobolev ponderats, definits sobre $\mathbb{R}^3$, i els teoremes d'isomorfismes de M. Cantor [9, 10]. En el cas hiperbòlic, els resultats es basen en els teoremes d'isomorfisme entre els espais de Sobolev ordinaris sobre l'espai hiperbòlic obtinguts recentment per J. Bruna i J. Girbau [8].

Els resultats anteriors poden fer pensar que l'estabilitat del model de Robertson-Walker està relacionada amb la compacitat de la varietat de Riemann M, perquè en els universos oberts M és no compacta i el model esdevé estable, i en el model esfèric M és compacta i el model és inestable. Per refutar aquesta conjectura, l'últim capítol (cap. 6) estudia dos casos més en què M no és simplement connexa. Un resultat general afirma que tota varietat de Riemann M, de dimensió n, completa i de curvatura constant, és sempre un quocient X/Γ, on X pot ser $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ o $\mathbb{H}^n$ i Γ és un subgrup discret del grup de les isometries de X que actua de manera lliure i pròpiament discontínua. Els resultats són:

varietat	*curvatura*	*compacitat*	*estabilitat*
$\mathbb{R}^3$	0	no	sí
$\mathbb{H}^3$	-1	no	sí
$\mathbb{S}^3$	1	sí	no
$\mathbb{R}^3/\Gamma$	0	sí	no
$\mathbb{H}^3/\Gamma$	-1	sí	sí

Els casos $M = \mathbb{R}^3$ i $M = \mathbb{S}^3$ han estat publicats en dos articles del *Journal of Mathematical Physics, 40 (1999).* La resta apareixerà en un tercer article.

Després d'aquesta introducció el lector trobarà uns preliminars, l'objectiu dels quals no és cap altre que recordar alguns conceptes que apareixeran durant l'exposició. S'inicien amb la nomenclatura pròpia de la Relativitat General (l'espai-temps, vectors temporals ...), després s'estudien algunes propietats del tensor de curvatura, es defineixen els operadors Δ i Δ_R i, finalment, a partir del concepte de derivada dèbil, s'introdueixen els espais de Sobolev.

Nomenclatura

V	espai-temps
M	varietat de Riemann de dimensió 3
T_p, C_p	espai tangent, con de T_p
g, $\tilde{g}$, $\hat{g}$, $\bar{g}$	segons el context la lletra g pot indicar una mètrica de Lorentz o bé una mètrica de Riemann. Quan sigui necessari, la primera es distingirà de la segona amb un signe al damunt de la lletra g.
$(\,,\,)$ i $\langle\,,\,\rangle$	producte escalar local i global
∇ i ∇^*	derivada covariant i el seu adjunt mètric
Δ_R i Δ	laplaciana *grollera* i laplaciana de *de Rham*
Γ	símbol de Christoffel
R, $\mathcal{R}$ i R	tensor de curvatura, tensor de Ricci i curvatura escalar
G	en el text principal és el tensor d'Einstein, a l'apèndix A és un cert operador.
$\mathcal{D}_q$	espai dels q-tensors de classe C^∞ i amb suport compacte
W^p_{qs}	espai de Sobolev dels q-tensors, d'ordre de regularitat s, amb normes a L^p
L^p_{qs}	conjunt de tots aquells q-tensors de L^p amb les seves derivades generalitzades d'ordre $\leq s$ també de L^p
H^s_q	és W^2_{qs}
$\mathcal{F}$	espai de funcions
$\mathcal{X}$	espai de camps vectorials (identificats amb les 1-formes per la mètrica)
$\mathcal{S}$	espai dels tensors covariants i simètrics d'orde 2

Preliminars

0.1 Conceptes generals i notació

Una *varietat de Lorentz* és una varietat diferenciable de dimensió 4 en la qual està definida una mètrica g no degenerada d'índex 1. Això significa que en cada punt $p \in V$ existeix una base de l'espai tangent $T_p(V)$ on g adopta la forma $g = \mathrm{diag}[1, 1, 1, -1]$. Una mètrica amb aquestes propietats es coneix com a *mètrica de Lorentz*. Per exemple, $\mathbb{R}^4$ amb la mètrica de Minkowski $\eta = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (dt)^2$ és una varietat de Lorentz.

Una mètrica de Lorentz no és euclídea perquè permet l'existència d'objectes de longitud nul·la o negativa. Un vector $v \in T_p(V)$ s'anomena *temporal* si $g_p(v, v) < 0$, *espacial* si $g_p(v, v) > 0$ i *nul* si $g_p(v, v) = 0$. Anomenem C_p el con de $T_p(V)$ format pels vectors temporals de $T_p(V)$; C_p té dos components connexos. La varietat (V, g) és *orientable respecte al temps* si per a cada $p \in V$ es pot escollir un component connex C_p^+ de C_p de manera que es compleixi la següent condició de coherència: cada punt $p \in V$ té un entorn U_p sobre el qual existeix un camp vectorial X amb $X_q \in C_q^+$ per a tot $q \in U_p$. Un vector $v \in C_p^+$ es diu que *apunta cap el futur.* Orientar V respecte al temps significa fer efectiva l'elecció d'un C_p^+ per a cada $p \in V$. Un *espai-temps* és una varietat de Lorentz (V, g) amb una orientació respecte al temps. Es pot demostrar que en una varietat de Lorentz orientable respecte al temps sempre existeix un camp vectorial que en tot punt de la varietat és temporal [26].

Sempre que en un espai-temps s'utilitzin coordenades els índexs grecs variaran de 0 a 3 i els llatins de 1 a 3. Genèricament les quatre coordenades de qualsevol carta U de V s'escriuran x^α. Sovint s'emprarà ∂_α per indicar $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$. S'usarà el criteri de sumació dels índexs repetits: $a^i b_i = \sum_{i=1} a^i b_i$. Si ∇ és un operador de diferenciació covariant (també es parla de *connexió*), escriurem ∇_{∂_α} en lloc de $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}}$. En una carta local, $\nabla_{\partial_\alpha} \partial_\beta = \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \partial_\mu$, on $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ s'anomenen *símbols de Christoffel.* Una connexió ∇ és diu que és compatible amb g si $\nabla_X g = 0$. Es pot veure que si imposem que el claudàtor $[X, Y] = XY - YX$ sigui igual a $\nabla_X Y - \nabla_Y X$ (com succeeix en la derivada usual de $\mathbb{R}^n$), llavors existeix una única connexió compatible amb g donada per la *fórmula de Riemann*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) - g(Z, [Y, X]). \end{aligned} \tag{0.1}$$

En una base coordenada, $[\partial_\alpha, \partial_\beta] = 0$, els símbols de Christoffel vénen donats d'acord amb l'expressió (0.1) per

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\alpha, \beta; \nu] = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \{\partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}\},$$

on $g^{\alpha\beta}$ indica la matriu inversa de g (en particular $\delta^\alpha_\beta = g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = g^\alpha_\beta$).

Tot tensor T p-covariant i q-contravariant (abreujadament, un (p,q)-tensor) d'una varietat n-dimensional s'escriurà en coordenades

$$T = T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}\, dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p} \otimes \partial_{j_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{j_q}\ ,$$

on tots el índexs van de 1 a n. Mitjançant la mètrica g, però, el podem considerar com un tensor $(p+q)$-covariant, ja que

$$T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} = g^{j_1 i_{p+1}} \cdots g^{j_q i_{p+q}} T_{i_1\ldots i_p i_{p+1}\ldots i_{p+q}}$$

Per exemple, cada camp X pot ser interpretat com aquella forma ω tal que $\omega(Y) = g(X,Y)$, i escriure indistintament $X = X^\alpha \partial_\alpha$ o bé $X = X_\alpha dx^\alpha$, en el ben entès que els components covariants i contravariants estan relacionats mitjançant $X_\alpha = g_{\alpha\beta}X^\beta$ i $X^\alpha = g^{\alpha\beta}X_\beta$.

La diferencial covariant ∇T d'un tensor p-covariant T és un $p+1$-tensor definit per

$$\begin{aligned}\nabla T(X_0, X_1, \ldots, X_p) = \nabla_{X_0} T(X_1, \ldots, X_p) = X_0(T(X_1, \ldots, X_p))\\ -T(\nabla_{X_0} X_1, \ldots, X_p) - \cdots - T(X_1, \ldots, \nabla_{X_0} X_p)\end{aligned}$$

En components, si $T = T_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p}$,

$$\nabla T = \nabla_k T_{i_1\ldots i_p} dx^k \otimes dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p},$$

on

$$\nabla_k T_{i_1\ldots i_p} = \partial_k T_{i_1\ldots i_p} - \Gamma^{j_1}_{k i_1} T_{j_1, i_2\ldots i_p} - \cdots - \Gamma^{j_p}_{k i_p} T_{i_1,\ldots i_{p-1} j_p}.$$

Els $\nabla_k T_{i_1\ldots i_p}$ poden ser interpretats com els components de $\nabla_{\partial_k} T$ perquè $\nabla_k T_{i_1\ldots i_p} = \nabla T(\partial_k, \partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_p}) = \nabla_{\partial_k} T(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_p})$. L'aplicació k vegades de la derivada covariant s'escriurà $\nabla^{(k)}$ per diferenciar-la de $\nabla^k = g^{ki}\nabla_i$.

Sense necessitat d'estar definida una mètrica sobre una varietat podem construir en un punt p la *derivada de Lie* $L_X Y$ d'un camp vectorial Y en la direcció d'un altre camp X d'una forma molt semblant a la derivada natural de $\mathbb{R}^n$. Si $\{\varphi_t\}$ representa el grup uniparamètric associat a X i φ_{t*} l'aplicació lineal tangent, $\varphi_{t*}(Y_{\varphi_{-t}(p)})$ és un vector de $T_p(M)$; llavors té sentit la diferència $Y_p - \varphi_{t*}(Y_{\varphi_{-t}(p)})$ i es defineix

$$(L_X Y)_p = \lim_{t\to 0} \frac{Y_p - \varphi_{t*}(Y_{\varphi_{-t}(p)})}{t}$$

Es pot demostrar que $L_X Y = [X,Y]$. La derivada de Lie s'estén sobre els tensors de la manera habitual:

$$\begin{aligned}L_X T(Y,Z) &= X(T(Y,Z)) - T(L_X Y, Z) - T(Y, L_X Z)\\ &= X(T(Y,Z)) - T([X,Y],Z) - T(Y,[X,Z])\end{aligned}$$

Si ∇ és la connexió compatible amb g, $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ i l'expressió anterior es pot escriure

$$L_X T(Y,Z) = \nabla_X T(Y,Z) + T(\nabla_Y X, Z) + T(Y, \nabla_Z X).$$

Per exemple, recordant que $\nabla_X g = 0$,

$$\begin{aligned}(L_X g)_{ij} &= L_X g(\partial_i, \partial_j) = g(\nabla_{\partial_i} X, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_j} X) \\ &= g(\nabla_i X^k \partial_k, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_j X^k \partial_k) \\ &= \nabla_i X^k g_{kj} + \nabla_j X^k g_{ki} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i \ .\end{aligned}$$

Un camp vectorial X d'una varietat diferenciable (V, g) és una *isometria infinitessimal* o un *camp de Killing* si el grup uniparamètric de transformacions que li correspon φ_t està format per isometries , és a dir, si $\varphi_t^*(g) = g$. Llavors $L_X g = 0$ i el camp X compleix l'equació $\nabla_i X_j + \nabla_j X_i = 0$. Contraent els dos índexs i, j arribem a la conclusió que si X és un camp de Killing, $\nabla^i X_i = 0$. Un altre resultat és que si un camp de la base canònica ∂_i és de Killing llavors tots els coeficients g_{jk} de la mètrica no depenen de la coordenada x^i. Això és una conseqüència de la definició de la derivada de Lie ja que $L_X g(Y, Z) = 0$ implica $Xg(Y, Z) = g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z])$, i $[\partial_i, \partial_j] = 0$. El recíproc també és cert perquè, en ser $[\partial_i, Y] = \partial_i Y^k \partial_k$,

$$\begin{aligned}&\partial_i g(Y, Z) - g([\partial_i, Y], Z) - g(Y, [\partial_i, Z]) \\ &\qquad = \partial_i (Y^j g_{jk} Z^k) - \partial_i Y^j g_{jk} Z^k - Y^j g_{jk} \partial_i Z^k = (\partial_i g_{jk}) Y^j Z^k\end{aligned}$$

i llavors $L_{\partial_i} g(Y, Z) = (\partial_i g_{jk}) Y^j Z^k$.

0.2 El tensor de curvatura

Si X, Y i Z són camps tangents de V el $(3, 1)$-tensor de curvatura R es defineix mitjançant,

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

És evident que $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$. En una carta local (U, x^α), per conveni, $R(\partial_\alpha, \partial_\beta)\partial_\mu = R^\nu_{\mu\alpha\beta} \partial_\nu$. En components

$$R^\nu_{\mu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\nu_{\beta\mu} - \partial_\beta \Gamma^\nu_{\alpha\mu} + \Gamma^\lambda_{\beta\mu} \Gamma^\nu_{\alpha\lambda} - \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} \Gamma^\nu_{\beta\lambda}$$

El tensor de curvatura presenta les següents simetries:

1. $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z) = g(R(Y, X)W, Z)$.
2. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (*1a. identitat de Bianchi*)
3. $(\nabla_X R)(Y, Z, V) + (\nabla_Y R)(Z, X, V) + (\nabla_Z R)(X, Y, V) = 0$ (*2a. identitat de Bianchi*)

El *tensor de Ricci* $\mathcal{R}$ es defineix com la contracció $(1, 1)$ de R, $\mathcal{R} = C^1_1(R)$, i la *curvatura escalar* R com la traça de $\mathcal{R}$, $\mathrm{R} = \mathrm{tr}(\mathcal{R})$. En una carta local,

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} g(R(\partial_\mu, \partial_\beta)\partial_\alpha, \partial_\nu) = R^\mu_{\alpha\mu\beta} \qquad ; \qquad \mathrm{R} = g^{\alpha\beta} \mathcal{R}_{\alpha\beta} = \mathcal{R}^\alpha_\alpha.$$

De la primera identitat de Bianchi es dedueix que el tensor de Ricci és simètric i de la segona identitat, que $\mathrm{div}(\mathcal{R}) = \frac{1}{2}d\mathrm{R}$, on div indica l'operador divergència $\mathrm{div}(\mathcal{R})_i = \nabla^j \mathcal{R}_{ji}$ i d la diferencial exterior.

El *tensor d'Einstein* de la mètrica g és

$$G = \mathcal{R} - \frac{1}{2}\mathrm{R}g$$

Aquest tensor és simètric per ser-ho $\mathcal{R}$ i g, i té divergència nul·la perquè $\nabla^\beta \mathcal{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\partial_\alpha \mathrm{R}$ i $\nabla^\beta\{\frac{1}{2}\mathrm{R}g_{\alpha\beta}\} = \frac{1}{2}\partial_\alpha \mathrm{R}$. A vegades, per recalcar que els tensors $\mathcal{R}$ i G depenen de la mètrica, s'escriurà $\mathcal{R}(g)$, $G(g)$ o bé $\mathcal{R}_g$, G_g.

0.3 Els operadors Δ i Δ_R

La mètrica g d'una varietat de Riemann M defineix en cada punt $x \in M$ el producte escalar $(T,S)(x) = T^{i_1 \dots i_p}(x) S_{i_1 \dots i_p}(x)$ de dos tensors T i S. Aquesta expressió no depèn de la carta local escollida; té sentit, doncs, definir la funció $|T|(x) = ((T,T)(x))^{1/2}$. Llavors el producte escalar global de dos tensors T i S és $\langle T, S\rangle = \int_M (T,S)d\mu$, quan aquesta integral sigui finita. Aquí $d\mu$ és la mesura de Lebesgue associada a g, que en cada carta local està relacionada amb la mesura dx de $\mathbb{R}^n$ mitjançant $d\mu = \sqrt{|\det(g)|}dx$. Definim $|T| = \sqrt{(T,T)}$ i $\|T\| = \sqrt{\langle T,T\rangle}$.

L'adjunt mètric ∇^* de ∇ es defineix per la relació $\langle \nabla T, S\rangle = \langle T, \nabla^* S\rangle$ per a tot p-tensor T i tot $(p+1)$-tensor S quan la integral de cada membre tingui sentit, com és el cas si T i S són C^∞ i de suport compacte. L'operador ∇^*, doncs, transforma $p+1$-tensors en p-tensors. En coordenades,

$$(\nabla T, S) = \nabla^j T^{i_1 \dots i_p} S_{j i_1 \dots i_p} = \nabla^j (T^{i_1 \dots i_p} S_{j i_1 \dots i_p}) - T^{i_1 \dots i_p} \nabla^j S_{j i_1 \dots i_p} \ .$$

Si T i S són de suport compacte, el terme $\int_M \nabla^j (T^{i_1 \dots i_p} S_{j i_1 \dots i_p})$ és nul perquè és la integral d'una divergència, de forma que

$$\langle \nabla T, S\rangle = \int_M (\nabla T, S) d\mu = -\int_M T^{i_1 \dots i_p} \nabla^j S_{j i_1 \dots i_p} d\mu \ ,$$

que si ha de ser igual a $\int_M (T, \nabla^* S)d\mu$ implica que l'operador ∇^* actua sobre els $(p+1)$-tensors mitjançant

$$\nabla^* S_{i_1 \dots i_p} = -\nabla^j S_{j i_1 \dots i_p} \ .$$

A partir de ∇^* es defineix el *laplacià groller* $\Delta_R = \nabla^* \nabla$ que transforma p-tensors en p-tensors segons la llei

$$(\Delta_R T)_{i_1, \dots, i_p} = -\nabla^j \nabla_j T_{i_1, \dots, i_p}.$$

De la definició es dedueix que Δ_R és autoadjunt i definit positiu. L'adjectiu "groller" és per diferenciar Δ_R de la laplaciana Δ de *de Rham*,

$$\Delta T_{i_1, \dots, i_p} = -\nabla^j \nabla_j T_{i_1, \dots, i_p} + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k (\nabla_{i_k} \nabla^j - \nabla^j \nabla_{i_k}) T_{j, i_1, \dots, \hat{i_k}, \dots, i_p} \tag{0.2}$$

on $\hat{i_k}$ indica absència de l'índex i_k.

Si α és una p-forma (tensors antisimètrics d'ordre p) la derivada exterior $d\alpha$ es defineix com l'antisimetrització de $\nabla\alpha$. Llavors, si α i β són p-formes, es compleix que $\langle\nabla\alpha,\beta\rangle = \langle d\alpha,\beta\rangle$ i per tant els adjunts mètrics són iguals: $\nabla^* = \delta$. Quan Δ actua sobre p-formes es demostra que $\Delta = d\delta + \delta d$.

Els operadors Δ i Δ_R coincideixen quan actuen sobre funcions:

$$\Delta f = -\nabla^i\nabla_i f = \Delta_R f \ .$$

Sobre 1-formes o camps,

$$\Delta\omega_i = -\nabla^j\nabla_j\omega_i - (\nabla_i\nabla^j - \nabla^j\nabla_i)\omega_j \ .$$

El primer terme és $\Delta_R\omega_i$. El segon es relaciona amb el tensor de Ricci amb l'anomenada *identitat de Ricci*

$$(\nabla_Y\nabla_Z - \nabla_Z\nabla_Y - \nabla_{[Y,Z]})T(X_1,\ldots,X_p) = -\sum_{j=1}^{p} T(X_1,\ldots,R(Y,Z)X_j,\ldots,X_p) \ , \tag{0.3}$$

que sobre 1-formes es llegeix

$$(\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)\omega_k = -R^l_{kij}\omega_l \, .$$

De les propietats de R, $R^{lj}_{ji} = -\mathcal{R}^l_i$, per la qual cosa

$$(\nabla_i\nabla^j - \nabla^j\nabla_i)\omega_j = \mathcal{R}^j_i\omega_j \, ,$$

i obtenim

$$\Delta\omega_i = -\nabla^j\nabla_j\omega_i - \mathcal{R}^j_i\omega_j = \Delta_R\omega_i - \mathcal{R}^j_i\omega_j \ .$$

En el capítol 4 apareix l'operador $F(X) = \nabla^* L_X g$ que es pot relacionar amb el laplacià groller Δ_R. En una carta local

$$\begin{aligned} F(X)_j = (\nabla^* L_X g)_j &= -\nabla^i(L_X g)_{ij} = -\nabla^i\nabla_i X_j - \nabla^i\nabla_j X_i \\ &= -\nabla^i\nabla_i X_j - (\nabla^i\nabla_j X_i - \nabla^j\nabla_i X_i) - \nabla^j\nabla_i X_i \end{aligned}$$

El primer terme torna a ser $\Delta_R X$, el que està entre parèntesis és $\mathcal{R}^i_j X_i$ i l'últim $d\delta X$ (o $\nabla\nabla^*$), de forma que

$$F = \Delta_R - \mathcal{R} + d\delta \ . \tag{0.4}$$

0.4 Els espais de Sobolev

Els espais de Sobolev seran el marc adequat on establir que l'operador F i pertorbacions d'ordre zero de Δ_R siguin isomorfismes topològics.

Direm que un q-tensor T és de $L^p(M)$ si en qualsevol carta local els eus coeficients són funcions mesurables respecte a la mesura $d\mu$ i la funció $|T|$ és de L^p, és a dir, $\int_M |T|^p d\mu < +\infty$.

Definició 1. *Sigui $\mathcal{D}_q(M)$ l'espai dels q-tensors C^∞ amb suport compacte a M i s un enter no negatiu. Definim l'espai de Sobolev $W^p_{q,s}(M)$ com la completació de $\mathcal{D}_q(M)$ per la norma*

$$\|T\|_{p,s} = \sum_{k=0}^{s} \left\| (\nabla^{(k)} T) \right\|_p ,$$

on $\| \, \|_p$ és la norma habitual de L^p, $\|T\|_p = \left(\int_M |T|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

Una altra forma de caracteritzar aquests espais requereix prèviament el concepte de *derivada covariant generalitzada o dèbil*: un q-tensor T de $L^p(M)$ té una derivada generalitzada $\nabla^{(k)}T$ d'ordre k a $L^p(M)$ si per a tot tensor covariant S d'ordre $q+k$ de classe C^∞ i amb suport compacte es compleix

$$|\langle T, \nabla^{*(k)} S\rangle| \leq \text{const } \|S\|_{p'} \qquad \text{amb} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 ,$$

essent p' l'exponent conjugat de p. Llavors l'aplicació $S \to \langle T, \nabla^{*(k)} S\rangle$ és contínua i existeix, per tant, un únic element $F \in L^p(M)$ tal que $\langle T, \nabla^{*(k)} S\rangle = \langle F, S\rangle$. Aquest F és, per definició, $\nabla^{(k)}T$:

$$\langle T, \nabla^{*(k)} S\rangle = \langle \nabla^{(k)} T, S\rangle .$$

L'espai $L^p_{q,s}(M)$ es defineix com el conjunt de totes aquells q-tensors de $L^p(M)$ amb les seves derivades dèbils, fins a ordre s, també de $L^p(M)$:

$$L^p_{q,s}(M) = \{T \in L^p(M) : \, \nabla^{(k)} T \in L^p(M) \; \forall k \leq s\}$$

Si dotem aquest conjunt amb la norma $\|T\|_{p,s}$ introduïda anteriorment, $L^p_{q,s}(M)$ és un espai de Banach. Aleshores $W^p_{q,s}$ també es pot definir com la clausura de $\mathcal{D}_q(M)$ dins de $L^p_{q,s}(M)$.

Només $\| \, \|_{2,s}$ compleix la llei del paral·lelogram, és a dir, només els $L^2_{q,s}(M)$ són espais de Hilbert amb el producte escalar

$$\langle T, S\rangle_s = \sum_{|k|\leq s} \langle \nabla^{(k)} T, \nabla^{(k)} S\rangle .$$

Per això és usual en la literatura suprimir el superíndex $p = 2$, i anomenar $H^s_q(M)$ a $W^2_{q,s}(M)$. La norma associada a aquest producte escalar, $\|T\|_s = \sqrt{\sum_{|k|\leq s} \|\nabla^{(k)} T\|_2^2}$, és equivalent a $\|T\|_{2,s} = \sum_{|k|\leq s} \|\nabla^{(k)} T\|_2$, és a dir, existeixen constants positives C_1 i C_2 tal que $\| \, \|_{2,s} \leq C_1 \| \, \|_s$ i $\| \, \|_s \leq C_2 \| \, \|_{2,s}$.

A $\mathbb{R}^n$, l'espai $\mathcal{D}_q$ és dens a $L^p_{q,s}$, és a dir, $W^p_{q,s}(\mathbb{R}^n) = L^p_{q,s}(\mathbb{R}^n)$, però en general aquest resultat no és cert. En l'article [2] es demostra que si M és completa, $\mathcal{D}_0(M)$ és dens a $L^p_{0,1}(M)$, $1 \leq p < +\infty$, i que si, a més a més, (M, g) té un radi d'injectivitat positiu i totes les derivades fins a ordre $k-2$ del tensor de curvatura R estan acotades, llavors el resultat anterior també és cert per a $s \geq 2$ (vegeu, també [29]). Una demostració explícita que $L^2_{q,s}(M) = H^s_q(M)$ per a q-formes quan M és completa i té curvatura $K = -1$ es troba a [8].

En el context dels espais de Sobolev les lletres $\mathcal{F}$, $\mathcal{X}$ i $\mathcal{S}$ indicaran respectivament espais de funcions, 1-formes (camps vectorials) i tensors covariants i simètrics d'ordre 2.

Quan la varietat $(\mathbb{R}^n, e)$, e la mètrica euclídea, tots els espais de Sobolev són equivalents als espais dels tensors d'ordre zero (les funcions) perquè la norma de tot p-tensor s'expressa en termes de la norma de les seves funcions components:

$$|T|^2 = \sum T^2_{i_1 \dots i_p}$$

En aquest context és costum l'ús dels multi-índexs. Tot vector $I = (i_1 \dots, i_n) \in \mathbb{R}^n$, amb els components enters no negatius es diu que és un n-índex d'ordre $|I| = i_1 + \cdots + i_n$. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, per conveni $x^I = (x_1)^{i_1} \cdots (x_n)^{i_n}$; per als coeficients, $a^I = a^{i_1 \dots, i_n}$ i $a_I = a_{i_1 \dots, i_n}$. Una derivada d'ordre k s'escriu

$$D^I = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{i_j} = \frac{\partial^{|I|}}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}},$$

essent I un n-índex d'orde k. Cada $i_j = 0, 1, \dots, k$ indica el nombre de vegades que es deriva respecte a la variable x_j. En canvi, en la notació $\partial_{i_1 \dots i_k}$ tots els índexs corren de 1 a n i $i_j = k$ indica que es deriva respecte a la variable x_k. Per exemple, la derivada $\frac{\partial^k f}{\partial x_1^k}$ correspon a l'n-índex $(k, 0, \overset{n-1}{\dots}, 0)$ i al k-parell $(1, \overset{k}{\dots}, 1)$.

La definició estricta de derivada dèbil d'una funció definida sobre $\mathbb{R}^n$, $\langle \nabla^k f, S \rangle = \langle f, \nabla^{*(k)} S \rangle$ és

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla^k f, S) dx = (-1)^k \int_{\mathbb{R}^n} f \sum \frac{\partial^k S_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} dx$$

ja que si S és un tensor d'ordre k llavors $\nabla^{*(k)} S = (-1)^k \sum_{i_1 \dots i_k} \partial_{i_1 \dots i_k} S_{i_1 \dots i_k}$. La definició més habitual, però, és aquella que defineix aquest concepte per a un n-índex I d'ordre k donat: direm que h és la I-èssima derivada dèbil de f si per a tota funció ϕ de classe C^∞ amb suport compacte es compleix que

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \phi dx = (-1)^{|I|} \int_{\mathbb{R}^n} f D^I \phi dx$$

per a un cert n-índex I d'ordre k.

Els espais de Sobolev d'aplicacions es defineixen de la mateixa forma. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és una aplicació d'un obert de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, llavors $f \in \mathcal{F}^p_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ si cada funció component $f^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és de $\mathcal{F}^p_s(\mathbb{R}^n)$.

Les demostracions dels teoremes d'existència i unicitat per a equacions amb derivades parcials usen el mètode de l'estimació de l'energia, que només té sentit si l'espai de funcions al que han de pertànyer les solucions està dotat d'un producte escalar, és a dir, és un espai de Hilbert. Tots aquests teoremes són locals, així que de fet els espais implicats són els $\mathcal{F}_s(U)$, amb U un obert de $\mathbb{R}^n$. Pot succeir que $f \in \mathcal{F}_s(U)$ no sigui derivable en el sentit clàssic però en canvi existeixi la seva derivada dèbil (per exemple, si f és una funció contínua amb "punxes"). En aquest cas f no podria representar un "objecte" físic o geomètric com ara la velocitat d'un mòbil o la mètrica d'una varietat. Per això és important el següent resultat, conegut amb el nom de *lema de Sobolev*:

Lema 2 (Sobolev). *Sigui U un obert de $\mathbb{R}^n$. Aleshores, si $s > k + n/2$, l'espai $\mathcal{F}_s(U)$ està inclòs en l'espai $C^k(U)$ de les funcions amb derivades contínues fins a ordre k. Per a $p \geq 2$, $\mathcal{F}_s^p(U) \subset C^k$ si $s > k + n/p$.*

CAPÍTOL 1

El problema de Cauchy per a l'equació d'Einstein a l'interior

La Relativitat General és una teoria clàssica de la gravitació, en la qual l'espai físic s'entén com un continu, que matemàticament ve modelat per una varietat de Lorentz orientada respecte al temps. L'equació d'Einstein que relaciona els camps gravitatoris amb la matèria que els crea és

$$G_g = \chi T \ ,$$

on G_g és el tensor d'Einstein de la mètrica g de l'espai-temps, T és el *tensor d'impulsió-energia* que descriu la matèria i χ és una constant universal. Aquesta equació juga el mateix paper que l'equació de Poisson $\Delta V = \rho$ en la gravitació newtoniana. Per aquest motiu els components $g_{\alpha\beta}$ de g se'ls coneix com a *potencials gravitatoris*. L'equació $G = \chi T$ és equivalent a

$$\mathcal{R} = \chi \left\{ T - \frac{1}{2}\ \mathrm{tr}(T) g \right\} .$$

En efecte: com que $G = \mathcal{R} - \frac{1}{2}\mathrm{R}g$, $\mathrm{tr}(G) = -\mathrm{R}$ perquè $\mathrm{tr}(\mathcal{R}) = \mathrm{R}$ i $\mathrm{tr}(g) = 4$. Prenent traces a $G = \chi T$ s'obté $\mathrm{R} = -\chi\ \mathrm{tr}(T)$. Substituint R en $\mathcal{R} - \frac{1}{2}\mathrm{R}g = \chi T$ s'arriba al resultat desitjat. En cas de no haver matèria, l'equació $G_g = 0$ s'escriu $\mathcal{R}_g = 0$. Per exemple, la mètrica de Minkowski de la Relativitat especial, $\eta = \mathrm{diag}[1, 1, 1, -1]$, compleix $\mathcal{R}_\eta = 0$. Ens referirem a l'equació $G_g = \chi T$ indistintament com *equació d'Einstein amb matèria* o *equació d'Einstein a l'interior* o simplement *equació d'Einstein*, mentre que per a l'equació $\mathcal{R}_g = 0$ s'empraran les expressions *equació d'Einstein en el buit* o bé *equació d'Einstein a l'exterior*. Òbviament el tensor d'impulsió-energia haurà de ser simètric i tenir divergència nul·la, perquè ha de ser proporcional a G. Aquest tensor dependrà de la mètrica g i del que anomenarem *camps de la matèria* com ara la densitat si T representa un fluid o el tensor electromagnètic si T representa una interacció d'aquesta mena. Les equacions que han de complir aquests camps tensorials s'anomenen *equacions de la matèria*.

L'equació d'Einstein, com tota equació tensorial, és invariant sota l'acció de qualsevol difeomorfisme $\phi : V \to V$. És a dir, si g compleix $G = \chi T$ aleshores la solució de $\phi^*(G) = \chi\phi^*(T)$ és $\phi^*(g)$, que és una mètrica isomètrica amb g i per tant geomètricament indistingible. La peculiaritat de l'equació d'Einstein és que les 10 equacions en derivades parcials de segon ordre $G_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$ no són totes independents, sinó que estan lligades per les 4 relacions $\nabla^\beta(G_{\alpha\beta} - \chi T_{\alpha\beta}) = 0$, una per a cada valor de α. De fet, doncs, els 10 components $g_{\alpha\beta}$ només han de complir 6 equacions independents, donant lloc a $10 - 6 = 4$ graus de llibertat. Això comportarà que puguem imposar 4 condicions al difeomorfisme ϕ. Com es veurà més endavant, en les anomenades *coordenades harmòniques generalitzades* les 4 expressions $g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ són iguals a un cert camp vectorial de la varietat. Per tant, fins que no fixem un determinat difeomorfisme (també s'utilitza la paraula *gauge*), no tindrà sentit parlar de *la* solució única de l'equació d'Einstein. En un llenguatge més abstracte, podríem dir que la incògnita g representa no una mètrica en concret, sinó una classe d'equivalència de mètriques segons la relació $g_1 \sim g_2$ sii g_1 i g_2 són isomètriques. El que fem en escollir un determinat difeomorfisme és fixar un representant de cada classe d'equivalència.

Per altra banda, l'equació d'Einstein ha de reflectir que la velocitat de propagació del camp gravitatori ha de ser finita. Aquesta condició implica necessàriament que l'equació d'Einstein reduïda (una vegada s'ha fet efectiu l'elecció d'un difeomorfisme) ha de ser hiperbòlica. Aquest procés s'anomena *reducció hiperbòlica.* Tindrà sentit plantejar-se aleshores el problema de Cauchy associat a l'equació reduïda d'Einstein, que inicialment podem enunciar com el problema de trobar una solució d'aquesta equació de forma que sobre una hipersuperfície de la varietat prengui uns certs valors o dades de Cauchy. El problema de Cauchy associat a una equació hiperbòlica es diu que és *well-posed* (que traduirem per *ben posat*) si

1. la solució existeix i és única.
2. la solució depèn contínuament de les dades inicials (estabilitat de Cauchy de la solució).
3. la solució té un domini de dependència finit.

Per a un sistema d'equacions diferencials que ha de descriure una realitat física sembla molt assenyat imposar aquestes tres condicions a tota solució del sistema. La primera exigeix que les equacions que el formen no siguin incompatibles i en nombre suficient per assegurar la unicitat. La segona posa de manifest que una petita pertorbació en les dades inicials comporti també una petita variació en les solucions. És a dir, que un petit error en la mesura de les dades inicials no esdevingui un daltabaix per a les solucions. Evidentment caldrà concretar en quins espais topològics considerem aquesta continuïtat, amb la condició que siguin del mateix tipus per a les dades que per a les solucions (aquests espais resultaran ser uns determinats espais de Sobolev). L'última condició significa que la solució només depèn de les dades de Cauchy restringides a un subconjunt compacte de M (velocitat de propagació finita).

1.1 Equacions i sistemes hiperbòlics

Sigui V una varietat de dimensió $n+1$, $U \subset V$ un obert de V i $f : U \to \mathbb{R}$ una funció de tipus C^k. Una equació diferencial en derivades parcials en f d'ordre k és quasi-lineal si en una carta local $(U; x^0, x^1, \ldots, x^n)$ es pot escriure com una expressió lineal en les derivades d'ordre màxim:

$$\sum_{|I|=k} a^I(x, D_J f)_{|J|\leq k-1} D_I f + F(x, D_J f)_{|J|\leq k-1} = 0 \ . \tag{1.1}$$

Aquí I són $n+1$-índexs d'ordre k i $F(x, D_J f)_{|J|\leq k-1}$ agrupa tots aquells termes que depenen de les derivades de f d'ordre menor que k. Si els coeficients a^I només depenen del punt de la varietat, l'equació s'anomena lineal.

L'acció d'un canvi de coordenades $y^\alpha = y^\alpha(x^\beta)$ es tradueix en un canvi de la base coordenada donat per $\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial y^\beta}$, en forma compacta $e = \bar{e}C$, on e i $\bar{e}$ són matrius fila i C és la matriu jacobiana del canvi de base, en components $C^\beta_\alpha = \partial_\alpha y^\beta$. Aleshores si en la nova representació escrivim $f(x) = \tilde{f}(y)$ tindrem que les derivades de primer ordre es transformen segons $\partial_\alpha f = C^\beta_\alpha \partial_\beta \tilde{f}$, que les derivades segones de f i de $\tilde{f}$, llevat termes d'ordre menor, es relacionen per $\partial_{\alpha\beta} f = C^\mu_\alpha C^\nu_\beta \partial_{\mu\nu}\tilde{f} + \cdots$, i que en general, emprant ara la notació amb multiíndexs (ap. 0.4), $D_I f = C^J_I D_J \tilde{f} + \cdots$. Així, la part principal $\sum a^I D_I f$ es transforma d'acord amb $\sum a^I D_I f = \sum a^I C^J_I D_J \tilde{f} = \sum b^J D_J \tilde{f}$, on $b^J = \sum C^J_I a^I$, i si una equació es quasi-lineal en una carta local, ho és en totes. Per això té sentit definir, pera cada 1-forma ξ de l'espai cotangent, la *forma característica* associada a la solució f

$$Q_{(x,f)}(\xi) = \sum_{|I|=k} a^I(x, D_J f)_{|J|\leq k-1}\xi_I$$

que és un polinomi homogeni en ξ de grau k. En efecte, $Q(\xi)$ no depèn de la base escollida perquè si $\xi = \xi_i dx^i = \tilde{\xi}_j dy^j$, i ja que els components de ξ es transformen sota un canvi de base $e = \bar{e}C$ segons $\xi_i = C^j_i \tilde{\xi}_j$, tindrem que

$$Q_{(x,f)}(\xi) = a^I \xi_I = a^I C^J_I \tilde{\xi}_J = b^J \tilde{\xi}_J = Q_{(y,\tilde{f})}(\xi)\ .$$

La forma característica Q sorgeix de manera natural en plantejar-se el problema de Cauchy associat a l'equació (1.1). En ser una equació diferencial d'ordre k, les dades de Cauchy sobre una hipersuperfície M donada per $\Phi(x^0, x^1, \ldots, x^n) = 0$ seran els valors a M de f i de les seves derivades fins a ordre $k-1$ en una direcció n transversal a M. A partir d'aquestes dades de Cauchy, es podran calcular a M per simple derivació tangencial i operacions algebraiques totes les altres derivades d'ordre $k-1$ de f així com totes les derivades d'ordre k, llevat de $\frac{\partial^k f}{\partial n^k}$. Com que l'equació (1.1) s'ha de complir en tota la varietat V i en particular a M, és possible que la derivada $\frac{\partial^k f}{\partial n^k}$ pugui ser aïllada de (1.1) i calculada a M. Per poder establir quines condicions ha de complir M perquè així sigui, és necessari escollir un sistema de coordenades adaptat a M en el qual privilegiem una direcció transversal a M. Considerem doncs la 1-forma $\xi = d\Phi$, en components $\xi_\alpha = d\Phi(\partial_\alpha) = \partial_\alpha \Phi$, que és normal a M perquè en tot punt p de M, si $X_p \in T_p(M)$, $(d\Phi)_p(X_p) = X_p(\Phi) = X_p(0) = 0$. En un entorn de M dins de V, considerem un sistema de coordenades $\{y^\alpha\}$ en el qual $\{dy^0 = \xi, dy^1, \ldots, dy^n\}$ sigui una base de $T^*_p(V)$. En aquestes coordenades, l'equació de M és $y^0 = 0$, en cada punt $p \in M$ els camps $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}$, des de $i = 0$ fins a n, formen una base de l'espai tangent $T_p(M)$, i la derivació exterior a M és $\frac{\partial}{\partial y^0}$. Si I és un $n+1$-índex d'ordre $|I| = k$,

$$D_I f = \frac{\partial^k f}{\partial x_0^{i_0}\cdots\partial x_n^{i_n}} = \frac{\partial^k \tilde{f}}{\partial y_0^k}\left(\frac{\partial y_0}{\partial x_0}\right)^{i_0}\cdots\left(\frac{\partial y_0}{\partial x_n}\right)^{i_n} + \cdots = \frac{\partial^k \tilde{f}}{\partial y_0^k}\xi_I + \cdots\ ,$$

de manera que separant el terme en $\frac{\partial^k \tilde{f}}{\partial y_0^k}$ de (1.1) obtenim que a M,

$$\sum_{|I|=k} a^I(y, D_J \tilde{f})_{|J|\leq k-1} \frac{\partial^k \tilde{f}}{\partial y_0^k} \xi_I + \cdots + F = Q(\xi) \frac{\partial^k \tilde{f}}{\partial y_0^k} + \cdots + F = 0 \ .$$

Per tant, si la 1-forma $\xi = d\Phi$ normal a la hipersuperfície M que en unes certes coordenades ve donada per $\Phi(x^0, x^1, \ldots, x^n) = 0$ és una solució de $Q_{(x,f)}(\quad) = 0$, la derivada $\frac{\partial^k f}{\partial x_0^k}$ no es pot calcular a M i l'equació diferencial (1.1) restringida a M es converteix en una equació de lligam que han de complir les dades de Cauchy perquè siguin admissibles. En cas contrari, si $Q_{(x,f)}(\xi) \neq 0$, l'equació (1.1) es compleix a M per a unes dades de Cauchy arbitràries. Una hipersuperfície M, d'equació $\Phi(x^0, x^1, \ldots, x^n) = 0$, s'anomena *característica* de l'equació (1.1) per a la solució f si, en tot punt x de M, la 1-forma $\xi = d\Phi$ compleix $Q_{(x,f)}(\xi) = 0$. El subíndex f emfasitza que en general la forma característica depèn de les dades de Cauchy inicials. Només si l'equació és lineal la condició $Q(\xi) = 0$ depèn exclusivament de M.

La teoria de les equacions lineals

$$\sum_{|I|\leq k} a^I(x) D_I f = 0 \tag{1.2}$$

és la més estudiada i, malgrat que seran les equacions quasi-lineals aquelles que ens interesaran, és convenient fer-hi un cop d'ull per tal d'introduir la notació més habitual.

Quan l'única solució de $Q(\xi) = 0$ és $\xi = 0$ l'equació lineal (1.2) es diu *el·líptica*, i quan té k solucions s'anomena *hiperbòlica*. Si les k solucions són diferents, rep el nom de *estrictament hiperbòlica*. Les equacions el·líptiques, doncs, no tenen superfícies característiques. Per exemple, l'equació

$$\frac{\partial^4 f}{\partial (x^0)^4} + 4 \sum_{i,j} \frac{\partial^4 f}{\partial (x^i)^2 \partial (x^j)^2} = 5 \sum_i \frac{\partial^4 f}{\partial (x^i)^2 \partial (x^0)^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial (x^0)^2} \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2}$$

és estrictament hiperbòlica perquè $Q(\xi) = \xi_0^4 - 5\xi_0^2 \sum \xi_i^2 + 4(\sum \xi_i^2)^2 = 0$ té quatre solucions $\xi_{1,2} = (\pm 2(\sum \xi_i^2)^{1/2}, \xi_1, \xi_3, \xi_3)$ i $\xi_{3,4} = (\pm(\sum \xi_i^2)^{1/2}, \xi_1, \xi_3, \xi_3)$

Quan l'equació diferencial és d'ordre 2 la forma característica Q és una forma quadràtica:

$$Q_{(x,f)}(\xi) = \sum_{|I|=2} a^I(x) \xi_I = a^{\alpha\beta}(x) \xi_\alpha \xi_\beta.$$

Com $f \in C^2$, i emprant el conveni dels índexs repetits,

$$2a^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} f = a^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} f + a^{\beta\alpha} \partial_{\beta\alpha} f = (a^{\alpha\beta} + a^{\beta\alpha}) \partial_{\alpha\beta} f$$

de forma que si definim $b^{\alpha\beta} = 1/2(a^{\alpha\beta} + a^{\beta\alpha})$ tenim que $a^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta} f = b^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta} f$, amb $b^{\alpha\beta} = b^{\beta\alpha}$. Per tant podem suposar sense cap restricció que la matriu $A = (a_{\alpha\beta})$ és simètrica i en conseqüència diagonalitzable. En el cas de dues variables, si l'única solució de $Q(\xi_1, \xi_2) = 0$ és $\xi_1 = \xi_2 = 0$, l'equació $Q(\xi^1, \xi^2) = 1$ defineix una el·lipsi del pla, i si en té dues i diferents, una hipèrbola, d'aquí el perquè de la nomenclatura. Tornant al cas general de n variables , quan A tingui índex 1 i signatura $n-1$ en tot punt de M (i per tant, per continuïtat, en un entorn V_M de M), l'equació serà hiperbòlica perquè en la base canònica A és $(-1, 1, \overset{n)}{\ldots}, 1)$ i l'equació $Q(\xi) = 0$ s'escriu $-\xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = 0$, que té dues solucions $\xi = (\pm(\sum \xi_i^2)^{1/2}, \xi_1, \cdots, \xi_n)$. La forma canònica $(-1, 1, \overset{n)}{\ldots}, 1)$ i la invariança de Q sota canvis de base permet interpretar tota matriu A d'índex 1 i signatura $n-1$ com la matriu d'una mètrica de Lorentz i fer-la servir per pujar i baixar índexs. Aleshores l'equació $Q = 0$, escrita en la forma $a^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta = 0$ representa en cada punt p de V_M un con C_p^* de vèrtex p a l'espai cotangent, i escrita $a_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = 0$, un con C_p a l'espai tangent.

Els vectors de $T_p(V)$ interiors (exteriors) al con C_p s'anomenen temporals (espacials). En la signatura anterior, v és temporal (espacial) si $Q = a_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta < 0$, ($a_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta > 0$). Els vectors del con $a_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta = 0$, de longitud nul·la respecte a la "mètrica" $a_{\alpha\beta}$, s'anomenen nuls. Els mateixos conceptes es defineixen a l'espai dual. Una hipersuperfície de la varietat és espacial si en tots els seus punts la forma normal ξ és temporal, que és equivalent a imposar que la restricció de la mètrica a la hipersuperfície és definida positiva. La hipersuperfície $x^0 = 0$ és espacial perquè $\xi = (1, 0, \cdots, 0)$ i $Q(\xi) < 0$. Observi's que aquesta darrera condició indica, si A té índex 1 i signatura $n-1$, que $Q(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$, interpretada com una equació en ξ_0, té dues solucions reals i diferents per a ξ_i arbitraris. Com Q és invariant sota canvis de coordenades, podem definir, si cal amb una reassignació de coordenades, que $x^0 = 0$ *és espacial si l'equació* $Q(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ *en* ξ_0 *té dues solucions reals i diferents per a* ξ_i *arbitraris.*

Considerem ara el sistema de m equacions, quasi-lineal d'ordre k,

$$\sum_\alpha \sum_{|I|=k} (A_\alpha^\beta)^I (x, D_J f)_{|J| \leq k-1} D_I f^\alpha + B^\beta (x, D_J f)_{|J| \leq k-1} = 0 \tag{1.3}$$

on $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^m$, cada A^I són matrius quadrades d'ordre m, i $D_I f$ i B són matrius columna de m elements. El sistema s'anomena simètric si totes les matrius A^I ho són. Podem pensar que l'operador diferencial $\sum_{|I|=k}(A_\alpha^\beta)^I D_I f^\alpha$ actua sobre les seccions d'un determinat fibrat vectorial de la varietat V, i que localment f representa un camp vectorial donat per $f(x^0, \ldots, x^n) = (f^0(x^\alpha), \ldots, f^m(x^\alpha))$. En general, f pot representar un camp tensorial de l'ordre que es vulgui. Per exemple, l'equació d'Einstein està definida sobre les seccions del fibrat dels tensors 2-covariants i simètrics, i per tant cada $D_I f$ és una matriu quadrada de components $D_I f^{\alpha\beta}$ i cada A^I seria una "matriu" de components $(A_{\alpha\beta}^{\mu\nu})^I$. Si escrivíssim en forma de columna i degudament reindexats tots els components significatius d'un tensor simètric d'ordre 2, aleshores f en una varietat de dimensió n seria una columna d'ordre $n(n+1)/2$ i cada A^I una matriu quadrada del mateix ordre.

De forma anàloga a les equacions diferencials, el problema de Cauchy associat al sistema (1.3) porta a la qüestió prèvia de si la derivada d'ordre k en una direcció transversal n a la hipersuperfície M es pot aïllar i calcular del sistema d'equacions a partir de les dades de Cauchy. Substituint $D_I f^\alpha$ per $\xi_I \frac{\partial^k f^\alpha}{\partial n^k}$ en (1.3) obtenim

$$\sum_{|I|=k} (A^\beta_\alpha)^I \xi_I \frac{\partial^k f^\alpha}{\partial n^k} + \cdots = 0 \tag{1.4}$$

on els punts suspensius indiquen termes que a M poden ser calculats a partir de les dades de Cauchy. Quan la matriu $A = \sum_{|I|=k} A^I \xi_I$ no sigui invertible el terme $\frac{\partial^k f^\alpha}{\partial n^k}$ no es podrà aïllar de (1.4) i la hipersuperfície M, amb 1-forma normal ξ, passarà a ser característica per a la solució f. Com que la matriu A és singular si $\det(A) = 0$, la forma característica es defineix mitjançant $Q(\xi) = \det(\sum_{|I|=k} A^I \xi_I)$, que és un polinomi homogeni en ξ d'ordre km. Igual que abans, M és una característica del sistema (1.3) per a la solució f si $Q_{x,f}(\xi) = 0$ en tot punt de M.

Si E_x indica l'espai vectorial (la fibra) de les formes normals en cada punt x de la hipersuperfície M, podem considerar per a cada f l'aplicació lineal o *símbol principal* $\sigma_L(x,\xi) : E_x \to E_x$ associada a la matriu $A = \sum_{|I|=k} A^I \xi_I$ i la seva adjunta $\sigma^*_L(x,\xi)$, de matriu associada A^t. La condició $\det(A) = \det(A^t) = 0$ indica que el nucli de $\sigma^*_L(x,\xi)$ no es redueix al nucli trivial sinó que $r = \dim(\ker \sigma^*_L) \geq 1$, per la qual cosa existiran vectors propis de A^t de valor propi zero en nombre igual a la dimensió de $\ker(\sigma^*_L)$. Sigui u un d'aquests vectors, i U la columna de components de u en una certa base. En multiplicar l'equació matricial $A\frac{\partial^k f}{\partial n^k} + \cdots = 0$ per U^t per l'esquerre, el terme $U^t A \frac{\partial^k f}{\partial n^k}$ s'anul·la perquè

$$U^t A \frac{\partial^k f}{\partial n^k} = \left(U^t A \frac{\partial^k f}{\partial n^k} \right)^t = \left(\frac{\partial^k f}{\partial n^k} \right)^t A^t U = 0.$$

Com a conseqüència, en r combinacions de les equacions del sistema no apareixerà el terme $\frac{\partial^k f}{\partial n^k}$, és a dir, que aquestes r combinacions constituiran les equacions de lligam que han de satisfer les dades de Cauchy perquè siguin admissibles.

La noció d'hiperbolicitat per a un sistema d'equacions diferencials lineals pot donar-se en termes geomètrics, sense necessitat d'utilitzar coordenades. Per definició, un sistema de m equacions i d'ordre k és hiperbòlic en un punt p de la varietat V si existeix algun vector u de $T^*_p(V)$ de forma que tot pla 2-dimensional de $T^*_p(V)$ que té u com a un dels seus vectors directors, talla al con normal $Q_p(\xi) = 0$ en km corbes. Algebraicament, si $\{u, v\}$ generen el subespai director d'un d'aquests plans, la condició anterior equival a imposar que $Q_p(\lambda u + \mu v) = 0$ ha de tenir km solucions $\lambda = \lambda(\mu)$. De fet, per homogeneïtat, $Q_p(\lambda u + \mu v) = 0$ és equivalent a $Q_p(\lambda u + v) = 0$ que, si ha de tenir km solucions λ, indica que tota recta de direcció u ha de tallar a $Q_p = 0$ en km punts. En unes coordenades adaptades a la referència en la qual $u = (1, 0, \overset{n)}{\ldots}, 0)$ i $v = (0, v_1, \ldots, v_n)$, la condició d'hiperbolicitat implica que l'equació $Q(\lambda, v_1, \ldots, v_n) = 0$ en λ ha de tenir km solucions. Si convenim com abans que la hipersuperfície $x_0 = 0$ és espacial si l'equació $Q(\xi_0, \xi_1 \ldots, \xi_n) = 0$ té

km solucions ξ_0 per a ξ_i arbitraris, podem caracteritzar els sistemes hiperbòlics com aquells que admeten l'existència d'hipersuperfícies espacials. En el cas particular d'equacions de segon ordre, en què $k = 2$ i $m = 1$, retrobem un resultat anterior.

Tal i com han estat definits, els conceptes d'hiperbolicitat o superfície espacial no tenen gaire sentit per a les equacions o sistemes quasi-lineals, perquè depenen de la solució f. No obstant, en el cas particular dels sistemes quasi-lineals i simètrics de primer ordre, es dóna la següent caracterització:

Definició 3. *El sistema de m equacions*

$$A^\alpha(x, f)\partial_\alpha f + B(x, f) = 0 \ ,$$

amb les matrius A^α, $\alpha = 0, 1, \dots, n$ simètriques i d'ordre m, és hiperbòlic si existeix una combinació $\sum \xi_\alpha A^\alpha$ que és definida positiva. Llavors la corresponent hipersuperfície de forma normal $\xi = (\xi_\alpha)$ s'anomena espacial.

Aquesta definició és coherent amb la donada per al cas lineal: suposem que aquesta combinació $\sum \xi_\alpha A^\alpha$ s'obté amb $\xi_0 = 1$, $\xi_1 = \cdots = \xi_n = 0$, i que per tant A^0 és definida positiva. Sigui $u = (1, 0, \overset{n)}{\ldots}, 0)$ i v de la forma $v = (0, v_1, \dots, v_n)$. Llavors $Q(\lambda u + v) = \det(\lambda A^0 + \sum v_i A^i) = 0$ és l'equació que determina els valors propis λ de la matriu simètrica $\sum v_i A^i$ respecte a la matriu A^0, simètrica i definida positiva, problema que té m solucions reals (comptant les multiplicitats).

La definició anterior continua depenent de la solució f, però tot plegat s'ha d'entendre com una forma d'etiquetar aquestes equacions ja que, degut a que molts problemes físics són descrits per sistemes d'aquesta mena, existeix una teoria general a $\mathbb{R}^n$ segons la qual el seu problema de Cauchy té les mateixes propietats que el de l'equació hiperbòlica més coneguda, l'equació d'ones. El següent teorema es pot trobar en els articles [14],[20],[22],[30].

Teorema 4. *Considerem el problema de Cauchy associat al sistema quasi-lineal de primer ordre.*

$$\sum_{\alpha=0}^{n} A^\alpha(x^\beta, f)\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + B(x^\beta, f) = 0$$

on $f : [0, T] \times U \to \mathbb{R}^m$ amb U un obert de $\mathbb{R}^n$, A^α són matrius d'ordre $m \times m$ i B és una columna d'ordre m. Suposem que:

- *les matrius A^α són simètriques i A^0 és definida positiva*
- $s > \frac{n}{2} + 1$

Indiquem les coordenades de U per x^i, $i = 1, \dots n$ i distingim la coordenada x^0 de la resta posant $x^0 = t$. Representem per $\phi(x^i)$ les dades de Cauchy per a $t = 0$. Aleshores existeix $T' < T$ de forma que si $\phi \in \mathcal{F}_s(U, \mathbb{R}^m)$,

- *l'equació $A^\alpha(x^\beta, f)\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + B(x^\beta, f) = 0$ té una única solució f definida en $[0, T'] \times U$, amb $f(0) = \phi$*

- *les solucions i les dades de Cauchy pertanyen als mateixos espais de Sobolev, és a dir, $f_t \in \mathcal{F}_s(U, \mathbb{R}^m)$ per a tot $t \in [0, T']$.*
- *les solucions depenen contínuament de les dades de Cauchy: l'aplicació $\phi \to f_t$, $t \in [0, T']$, és contínua en la norma $\mathcal{F}_s(U, \mathbb{R}^m)$.*

En la literatura existeixen altres definicions d'hiperbolicitat, per exemple, en el sentit de Leray [31].

Una propietat ben coneguda de l'equació d'ones és que la solució en un punt proper a la superfície inicial M només depèn de les dades de Cauchy en un subconjunt compacte K de M. S'introdueix aleshores el concepte de *con de llum* i de *domini de dependència* de K com aquell conjunt de punts de l'espai-temps en els quals el valor de la solució depèn exclusivament de les dades de Cauchy restringides a K. La demostració de la unicitat del teorema anterior prova que les solucions de tot sistema quasi-lineal simètric i hiperbòlic també comparteixen aquesta propietat. L'estratègia és la mateixa que la del cas lineal (veure, per exemple, el llibre [17]) però degudament retocada [24]. Considerem doncs el sistema

$$A^\alpha(t, x^i, f)\partial_\alpha f + B(t, x^i, f) = 0 \ ,$$

amb les matrius A^α simètriques i suposem que A^0 és definida positiva respecte a dues solucions f_1 i f_2, o el que és el mateix, la hipersuperfície M_0 d'equació $t = 0$ és espacial per a f_1 i f_2. Definim una *regió lenticular* com aquell domini tancat limitat per dues superfícies espacials de la varietat. Imaginem que M_1 és una altra hipersuperfície espacial (respecte a f_1 i f_2) que forma amb M_0 una regió lenticular D de $\mathbb{R}^{n+1}$. Volem demostrar que si $f_1 = f_2$ a M_0 aleshores $f_1 = f_2$ en tota la regió lenticular D.

Segons el teorema del valor mig, si A^α i B són C^1 existeixen objectes T^α i C continus en els seus arguments tals que

$$\begin{aligned} A^\alpha(t, x^i, f_1) - A^\alpha(t, x^i, f_2) &= T^\alpha(t, x^i, f_1, f_2)(f_1 - f_2) \\ B(t, x^i, f_1) - B(t, x^i, f_2) &= C(t, x^i, f_1, f_2)(f_1 - f_2) \end{aligned}$$

(concretament, cada T^α és un tensor 1-contravariant i 2-covariant, mentre que C és un matriu $m \times m$). Llavors si f_1 i f_2 compleixen el sistema també es verifica

$$A^\alpha(t, x^i, f_1)\partial_\alpha(f_1 - f_2) + [T^\alpha(t, x^i, f_1, f_2)\partial_\alpha f_2 + C(t, x^i, f_1, f_2)](f_1 - f_2) = 0 \ .$$

Anomenant $-E$ a la matriu entre claudàtors, arribem a la conclusió que la diferència $f_1 - f_2$ entre dues solucions del mateix sistema ha de complir

$$A^\alpha(t, x^i, f_1)\partial_\alpha(f_1 - f_2) = E(t, x^i, f_1, f_2)(f_1 - f_2) \ ,$$

on E és una matriu contínua en (x^i, t). Considerem el producte escalar $(e^{-kt}A^\alpha(f_1 - f_2), f_1 - f_2)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ amb $k > 0$ i calculem

$$\begin{aligned} &\partial_\alpha(e^{-kt}A^\alpha(f_1 - f_2), f_1 - f_2) \\ &\quad = -ke^{-kt}(\delta^0_\alpha A^\alpha(f_1 - f_2), f_1 - f_2) + e^{-kt}(\partial_\alpha A^\alpha(f_1 - f_2), f_1 - f_2) \\ &\qquad + e^{-kt}(A^\alpha\partial_\alpha(f_1 - f_2), f_1 - f_2) + e^{-kt}(A^\alpha(f_1 - f_2), \partial_\alpha(f_1 - f_2)) \ . \end{aligned}$$

En ser A^α simètriques, els dos últims sumands són iguals, i utilitzant que $A^\alpha\partial_\alpha(f_1-f_2)=E(f_1-f_2)$, arribem a

$$\partial_\alpha(e^{-kt}A^\alpha(f_1-f_2),f_1-f_2)=e^{-kt}\left([-kA^0+\partial_\alpha A^\alpha+2E](f_1-f_2),(f_1-f_2)\right)\ .$$

Aplicant el teorema de la divergència a la regió lenticular D la frontera de la qual està constituïda per les hipersuperfícies espacials M_0 (donada per $t=0$) i M_1 obtenim

$$\int_{M_1}e^{-kt}(A^\alpha(f_1-f_2),f_1-f_2)\xi_\alpha ds-\int_{M_0}(A^\alpha(f_1-f_2),f_1-f_2)\xi_\alpha ds$$
$$=\int_D e^{-kt}(F(f_1-f_2),f_1-f_2)dv$$

on $F=-kA^0+\partial_\alpha A^\alpha+2E$. La segona integral és zero perquè $f_1=f_2$ a M_0. Suposem que f_1 i f_2 són diferents a D i arribarem a una contradicció, tenint present que la igualtat s'ha de complir per a qualsevol valor del paràmetre $k>0$. En efecte: per una banda la primera integral és positiva perquè la hipersuperfície M_1 és espacial per a les solucions f_1 i f_2 i per tant també per a la diferència f_1-f_2. Però en canvi la integral del segon membre pot fer-se negativa per a un valor de k suficientment gran, ja que en ser la matriu A^0 definida positiva la matriu P serà definida negativa. L'única forma d'evitar la contradicció és que $f_1=f_2$ en tota la regió lenticular D.

L'argumentació anterior mostra que el valor de la solució $f(t,x^i)$ d'un sistema hiperbòlic en un punt de la varietat proper a M_0 només depèn de les dades de Cauchy en un subconjunt compacte K de M_0 perquè qualsevol punt d'un entorn de M_0 a V està contingut en una regió lenticular. Es parla de la *propietat de localització hiperbòlica* com aquella que garanteix que el comportament de les solucions només depèn d'un coneixement local de les dades de Cauchy. Com que donats dos punts qualssevol d'una regió lenticular sempre existeix una corba de vector tangent temporal que hi passa, podem dir que $u(t,x^i)$ només depèn de les dades de Cauchy restringides a aquell conjunt compacte de M els punts del qual poden ser units amb el punt (t,x^i) de la varietat mitjançant corbes temporals. El vector tangent a tota corba temporal compleix que el seu mòdul (la velocitat) està acotat per una constant positiva. D'aquí que la propietat anterior de localització és equivalent a l'existència d'una velocitat finita de propagació. Aleshores el domini de dependència d'una regió K es pot redefinir com aquell conjunt de punts de la varietat que poden ser units, mitjançant corbes no espacials, amb punts de K.

Teoremes d'existència en un entorn de M en $M\times\mathbb{R}$ en els casos M compacta i M asimptòticament euclídea poden trobar-se a [16].

1.2 Les característiques de l'equació d'Einstein

Considerem l'equació d'Einstein $G_g=\chi T$, per a un cert tensor d'impulsió-energia T que representa la distribució de matèria a l'espai-temps V. Aquest tensor T dependrà de la mètrica g i d'un o més camps (en general, tensors) $\Omega^{(i)}$, $i=1,2\cdots$, que per la seva banda han de complir el que hem anomenat equacions de la matèria, en les que també apareix g. A l'hora de plantejar el problema de Cauchy, doncs, cal estudiar conjuntament l'equació d'Einstein, que escriurem en la forma $\mathcal{R}_g = \chi\{T - \frac{1}{2}\ \mathrm{tr}(T)g\}$, amb les equacions de la matèria. Suposarem que aquests dos subsistemes estan desacoblats, en el sentit que la part principal de g rau en el primer (concretament, en el tensor de Ricci) i la part principal de $\Omega^{(i)}$ en el segon. Ja que l'equació d'Einstein és d'ordre 2, una condició necessària perquè s'esdevingui el primer és en que en les equacions de la matèria apareguin com a molt derivades d'ordre 1 en g. Les condicions perquè no hi hagi un acoblament en $\Omega^{(i)}$ dependran de cada classe de tensors d'impulsió-energia. La hipòtesi de desacoblament permetrà estudiar independentment l'existència d'hipersuperfícies característiques per als potencials gravitatoris $g_{\alpha\beta}$ i per als camps de la matèria $\Omega^{(i)}$.

Suposem, per simplificar, que les equacions de la matèria són d'ordre 1 en $\Omega^{(i)}$. Llavors, un primer redactat per al problema de Cauchy és el següent: donats amb suport a M una mètrica de Lorentz g^0, un tensor p^0 simètric 2-covariant i una col·lecció de camps tensorials $\omega^{(i)}$, es tracta de trobar una solució $(g, \Omega^{(i)})$ del sistema que resulta de l'acoblament de l'equació d'Einstein amb les equacions de la matèria, de forma que els valors a M de g i $\Omega^{(i)}$ siguin iguals respectivament a g^0 i a $\omega^{(i)}$, i que una derivada transversal a M de g, $\frac{\partial g}{\partial n}$ sigui igual a p^0. A partir d'aquestes dades de Cauchy, es podran calcular a M per simple derivació tangencial i operacions algebraiques totes les altres derivades primeres de g així com totes les derivades segones, llevat de $\frac{\partial^2 g}{\partial n^2}$, i pel que fa a $\Omega^{(i)}$, totes les derivades primeres tret de $\frac{\partial \Omega^{(i)}}{\partial n}$. Si M no és característica les derivades $\frac{\partial^2 g}{\partial n^2}$ i $\frac{\partial \Omega^{(i)}}{\partial n}$ podran ser aïllades de les equacions que formen el sistema i calculades a M. Però si M és característica el mateix sistema proporcionarà sobre M unes equacions de lligam que hauran de satisfer les dades de Cauchy. Saber quines són les (hipersuperfícies) característiques de l'equació d'Einstein és doncs necessari per després poder estudiar l'existència i unicitat de les solucions al problema de Cauchy.

L'expressió en coordenades del tensor de Ricci és

$$[\mathcal{R}(g)]_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(\partial_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} + \partial_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} - \partial_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - \partial_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}) + F_{\alpha\beta}(g, \partial g),$$

on la notació $(g, \partial g)$ indica dependència respecte la mètrica i les primeres derivades. Aquesta expressió és lineal en les segones derivades, que són les d'ordre màxim, és a dir, l'equació d'Einstein és un sistema quasi-lineal de segon ordre en g. En el llenguatge dels 4-índexs $I = (i_0, i_1, i_2, i_3)$ l'equació d'Einstein s'escriu

$$\sum_{|I|\leq 2} A^I(g, \partial g) D_I g + F(g, \partial g) = 0\ , \tag{1.5}$$

on ara $F(g, \partial g)$ recull tots els termes d'ordre inferior a 2 que apareixen en $G = \chi T$. Aquí cada A^I i $D^I g$ són matrius de components $(A^I)^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$ i $(D^I g)_{\mu\nu}$ respectivament. En aquest cas,

$$[\mathcal{R}(g)]_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\{g^{\lambda\nu}\delta^\mu_\alpha\delta^\gamma_\beta + g^{\lambda\mu}\delta^\nu_\beta\delta^\gamma_\alpha - g^{\mu\nu}\delta^\lambda_\alpha\delta^\gamma_\beta - g^{\lambda\gamma}\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta\}\partial_{\lambda\gamma} g_{\mu\nu} + F_{\alpha\beta}(g, \partial g),$$

i l'expressió que resta entre claus, amb el factor 1/2 són els components $(A^{\gamma\lambda})^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$ de la matriu $(A^{\gamma\lambda})$:

$$(A^{\gamma\lambda})^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\{g^{\lambda\nu}\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\gamma}_{\beta} + g^{\lambda\mu}\delta^{\nu}_{\beta}\delta^{\gamma}_{\alpha} - g^{\mu\nu}\delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\gamma}_{\beta} - g^{\lambda\gamma}\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}\}\ .$$

D'acord amb el que s'ha exposat a la secció anterior, l'existència de condicions de lligam per a les dades de Cauchy depèn de si el nucli de l'adjunt del símbol principal no es redueix al nucli trivial.

La matriu A de l'aplicació lineal $\sigma_L(x,\xi) : \mathcal{S}(V_M)_x \to \mathcal{S}(V_M)_x$ entre els tensors simètrics d'ordre 2 és

$$\begin{aligned} A^{\mu\nu}_{\alpha\beta} &= (\sum_{|I|=2} A^I \xi_I)^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \sum_{|I|=2} (A^I)^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\xi_I = (A^{\gamma\lambda})^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\xi_\gamma\xi_\lambda \\ &= \frac{1}{2}\{\xi^\nu\xi_\beta\delta^\mu_\alpha + \xi^\mu\xi_\alpha\delta^\nu_\beta - \xi_\alpha\xi_\beta g^{\mu\nu} - \xi^\lambda\xi_\lambda\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta\} \end{aligned} \tag{1.6}$$

i l'acció de σ sobre un tensor s s'escriu en components

$$A^{\mu\nu}_{\alpha\beta}s_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\{\xi^\nu\xi_\beta s_{\alpha\nu} + \xi^\nu\xi_\alpha s_{\beta\nu} - \xi_\alpha\xi_\beta s^\mu_\mu - \xi^\nu\xi_\nu s_{\alpha\beta}\}.$$

En aquest punt és important adonar-se de com arribar a l'expressió de $\sigma_L(x,\xi)(s)$ d'una forma més senzilla. Si comparem l'expressió anterior amb la del tensor de Ricci

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_{\mu\beta}g_{\alpha\nu} + \partial_{\mu\alpha}g_{\beta\nu} - \partial_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - \partial_{\mu\nu}g_{\alpha\beta})$$

observarem que els diferents termes de $\sigma_L(x,\xi)(s)$ s'obtenen dels termes del tipus $g^{\mu\nu}\partial_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}$ substituint l'operador $\partial_{\mu\beta}$ pel producte $\xi_\mu\xi_\beta$, el potencial $g_{\alpha\nu}$ per $s_{\alpha\nu}$ i després pujant o baixant índexs amb $g^{\mu\nu}$.

El nucli de σ_L ve definit, doncs, per

$$\ker(\sigma_L) = \{s_{\alpha\beta} \in T_2(V_M)_x \ : \ \xi^\nu\xi_\beta s_{\alpha\nu} + \xi^\nu\xi_\alpha s_{\beta\nu} - \xi_\alpha\xi_\beta s^\mu_\mu - \xi^\nu\xi_\nu s_{\alpha\beta} = 0\}. \tag{1.7}$$

Abans d'estudiar aquest sistema homogeni, provarem que $\ker(\sigma_L)$ no és el nucli trivial sinó que els tensors del tipus $s = X \otimes \xi + \xi \otimes X$, amb X un camp qualsevol, pertanyen a $\ker(\sigma_L)$. L'argument és el següent: si ϕ és un difeomorfisme de la varietat en ella mateixa, es compleix la identitat $\phi^*\mathcal{R}_g = \mathcal{R}_{\phi^*g}$ perquè g i ϕ^*g són isomètriques i $\mathcal{R}$ només depèn de g. En particular, si ϕ_t és el grup uniparamètric corresponent a un camp vectorial X, derivant respecte t l'expressió $\phi^*\mathcal{R}_g = \mathcal{R}_{\phi^*g}$ obtenim

$$L_X(\mathcal{R}_g) = D\mathcal{R}_{L_X g}$$

on L_X indica la derivada de Lie i $(D\mathcal{R})$ l'aplicació diferencial de $g \to \mathcal{R}_g$. En ser una identitat, els termes del mateix ordre d'ambdós membres han de ser iguals. Com que $(L_X g)_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha X_\beta + \nabla_\beta X_\alpha$, en el segon membre apareixeran termes de tercer ordre en X, mentre que en el primer com a molt són d'ordre 1. Per tant, $\xi_\alpha X_\beta + \xi_\beta X_\alpha$ és del nucli del símbol principal de $(D\mathcal{R})$ i també de $\mathcal{R}$ perquè l'expressió en coordenades de $\mathcal{R}$ és quasi-lineal. El càlcul explicit ho verifica: l'expressió

$$\xi^\nu \xi_\beta(\xi_\alpha X_\nu + \xi_\nu X_\alpha) + \xi^\nu \xi_\alpha(\xi_\beta X_\nu + \xi_\nu X_\beta) - 2\xi_\alpha \xi_\beta \xi^\nu X_\nu - \xi^\nu \xi_\nu(\xi_\alpha X_\beta + \xi_\beta X_\alpha)$$

és idènticament nul·la. El raonament anterior, però, no assegura que els tensors $s = X \otimes \xi + \xi \otimes X$ siguin els únics elements de $\ker(\sigma_L)$. De fet, si el coeficient $\xi^\nu \xi_\nu$ de (1.7) (que és l'únic amb sentit geomètric, ja que és igual a $g(\xi, \xi)$) s'anul·la, també aquells tensors que compleixen $2s_{\alpha\nu}\xi^\nu = \operatorname{tr}(s)\xi_\alpha$ són del nucli, com es pot comprovar fàcilment. Arribem a la conclusió, doncs, que tota hipersuperfície és característica i que caldrà discernir entre els casos $\xi^\nu \xi_\nu = 0$ i $\xi^\nu \xi_\nu \neq 0$. Aquelles hipersuperficies que en tot punt la seva 1-forma normal compleix $\xi^\mu \xi_\mu = 0$ s'anomenen *nul·les*. Una hipersuperfície nul·la és doncs tangent en cada punt als cons C_x^* definits a l'espai cotangent $T_x^*(M)$ per $g_x(\xi, \xi) = 0$.

La matriu del sistema $\sum_{\mu,\nu} A^{\mu\nu}_{\alpha\beta} s_{\mu\nu} = 0$ de 10 equacions en els 10 components significatius $s_{00}, s_{01}, s_{02}, s_{03}, s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{22}, s_{23}, s_{33}$ no és simètrica en $\{\mu, \nu\}$. Però

$$\sum_{\mu,\nu} A^{\mu\nu}_{\alpha\beta} s_{\mu\nu} = \sum_{\mu} A^{\mu\mu}_{\alpha\beta} s_{\mu\mu} + \sum_{\mu\neq\nu} (A^{\mu\nu}_{\alpha\beta} + A^{\nu\mu}_{\alpha\beta}) s_{\mu\nu} = \sum_{\mu\leq\nu} \mathcal{A}^{\mu\nu}_{\alpha\beta} s_{\mu\nu}$$

amb les identificacions $\mathcal{A}^{\mu\mu}_{\alpha\beta} = A^{\mu\mu}_{\alpha\beta}$ i $\mathcal{A}^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = A^{\mu\nu}_{\alpha\beta} + A^{\nu\mu}_{\alpha\beta}$. Per simplificar els càlculs suposarem que g és la mètrica de Minkowski $\eta = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum dx^i \otimes dx^i$. Llavors, d'acord amb la fórmula (1.6), els elements de la matriu $\mathcal{A}$ vénen donats per

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}^{\alpha\alpha}_{\alpha\alpha} = -\sum_{\lambda\neq\alpha} \xi^\lambda \xi_\lambda \\
&\mathcal{A}^{\alpha\alpha}_{\alpha\beta} = 0 && \mathcal{A}^{\alpha\beta}_{\alpha\alpha} = 2\xi^\beta \xi_\alpha && \mathcal{A}^{\alpha\mu}_{\alpha\nu} = \xi^\mu \xi_\nu \\
&\mathcal{A}^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} = -\sum_{\lambda\neq\alpha,\beta} \xi^\lambda \xi_\lambda \\
&\mathcal{A}^{\alpha\alpha}_{\mu\nu} = -g^{\alpha\alpha} \xi_\mu \xi_\nu && \mathcal{A}^{\alpha\beta}_{\mu\mu} = 0 && \mathcal{A}^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = 0 \ ,
\end{aligned}$$

on $\xi^0 = -\xi_0$ i $\xi^i = \xi_i$. La matriu reduïda

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & -\frac{2\xi_0}{\xi_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\frac{\xi_0}{\xi_3})^2 \\
0 & 1 & 0 & -\frac{\xi_1}{\xi_3} & 0 & 0 & -\frac{\xi_0}{\xi_3} & 0 & 0 & \frac{\xi_0 \xi_1}{\xi_3^2} \\
0 & 0 & 1 & -\frac{\xi_2}{\xi_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\xi_0}{\xi_3} & \frac{\xi_0 \xi_2}{\xi_3^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-2\xi_1}{\xi_3} & 0 & 0 & (\frac{\xi_1}{\xi_3})^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum \xi^\lambda \xi_\lambda & -\frac{\xi_2}{\xi_3} \sum \xi^\lambda \xi_\lambda & 0 & -\frac{\xi_1}{\xi_3} \sum \xi^\lambda \xi_\lambda & \frac{\xi_1 \xi_2}{\xi_3^2} \sum \xi^\lambda \xi_\lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum \xi^\lambda \xi_\lambda & \frac{-2\xi_2}{\xi_3} \sum \xi^\lambda \xi_\lambda & \frac{\xi_2^2}{\xi_3^2} \sum \xi^\lambda \xi_\lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

posa de manifest que si $\sum \xi^\lambda \xi_\lambda = 0$ la dimensió del nucli és 6, i que si $\sum \xi^\lambda \xi_\lambda \neq 0$ és 4. En aquest últim cas, prenent com a paràmetres $s_{\alpha\alpha} = 2\xi_\alpha X_\alpha$, obtenim $s_{\alpha\beta} = \xi_\alpha X_\beta + \xi_\beta X_\alpha$ si $\alpha \neq \beta$, en forma tensorial $s = \xi \otimes X + X \otimes \xi$. En general, en una n-varietat, si $\xi^\mu \xi_\mu = 0$ la dimensió del nucli és $\frac{n(n-1)}{2}$, i en cas contrari és n [24].

Per saber quines són les combinacions de les 10 equacions $G = \chi T$ que, en nombre igual a la dimensió del nucli, esdevindran equacions de lligam sobre les dades de Cauchy, és necessari, segons la teoria anterior, conèixer el nucli de σ_L^*. Evidentment, si σ fos autoadjunta, $\ker(\sigma_L^*) = \ker(\sigma_L)$. Però la matriu

$$A_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\{\xi_\nu \xi_\beta \delta_{\mu\alpha} + \xi_\mu \xi_\alpha \delta_{\nu\beta} - \xi^\lambda \xi_\lambda \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \xi_\alpha \xi_\beta g_{\mu\nu}\}$$

no és simètrica en permutar $\{\alpha\beta\}$ per $\{\mu\nu\}$ degut al terme $\xi_\alpha \xi_\beta g_{\mu\nu}$. En lloc de calcular explícitament la matriu de σ_L^*, considerem la matriu B del símbol principal σ_L' de l'equació $G = \chi T$. Com que $G_g = \mathcal{R} - \frac{1}{2}Rg$

$$B^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = A^{\mu\nu}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} A^{\mu\nu}_{\lambda\rho} g_{\alpha\beta} \ ,$$

i si $s \in \ker(\sigma_L)$ també $s \in \ker(\sigma_L')$. L'avantatge és que σ_L' és autoadjunta: el factor $g^{\lambda\rho} A^{\mu\nu}_{\lambda\rho}$ és igual a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\{\xi^\nu \xi_\lambda \delta^\mu_\rho + \xi^\mu \xi_\lambda \delta^\nu_\rho - \xi^\alpha \xi_\alpha \delta^\mu_\lambda \delta^\nu_\rho - \xi_\lambda \xi_\rho g^{\mu\nu}\} = \\ &= \frac{1}{2}\{\xi^\nu \xi^\mu + \xi^\mu \xi^\nu - \xi^\alpha \xi_\alpha g^{\mu\nu} - \xi^\lambda \xi_\lambda g^{\mu\nu}\} = \xi^\mu \xi^\nu - \xi^\lambda \xi_\lambda g^{\mu\nu},\end{aligned}$$

de forma que

$$B^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\{\xi^\nu \xi_\beta \delta^\mu_\alpha + \xi^\mu \xi_\alpha \delta^\nu_\beta - \xi^\lambda \xi_\lambda \delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \xi_\alpha \xi_\beta g^{\mu\nu} + \xi^\lambda \xi_\lambda g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} - \xi^\mu \xi^\nu g_{\alpha\beta}\}.$$

Dels dos termes nous, $\xi^\lambda \xi_\lambda g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}$ ja és simètric, mentre que $-\xi_\mu \xi_\nu g_{\alpha\beta}$ és el simètric de $-\xi_\alpha \xi_\beta g_{\mu\nu}$. Per tant, els tensors $X \otimes \xi + \xi \otimes X$ també són del nucli de σ_L^*, la qual cosa vol dir que el símbol principal de $(X^\alpha \xi^\beta + X^\beta \xi^\alpha)(G - \chi T)_{\alpha\beta}$ s'anul·la. Però en ser $(X^\alpha \xi^\beta + X^\beta \xi^\alpha)(G - \chi T)_{\alpha\beta} = 2X^\alpha \xi^\beta (G - \chi T)_{\alpha\beta}$, tindrem que $X^\alpha \xi^\beta (G - \chi T)_{\alpha\beta} = 0$ per a qualsevol X, és a dir $\xi^\beta (G - \chi T)_{\alpha\beta} = 0$, que són les 4 equacions de lligam per a una hipersuperfície M no nul·la. Aquestes equacions, escrites en la forma $\xi_\beta (G - \chi T)^\beta_\alpha = 0$, es poden interpretar com la contracció interior de la 1-forma $\xi = d\Phi$ normal a la hipersuperfície $\Phi = 0$ amb el tensor $G - \chi T$ 1-covariant i 1-contravariant. Les equacions de lligam en un sistema adaptat a M són doncs

$$i(\xi)(G - \chi T)|_M = 0.$$

Pel que fa al camp gravitatori, aquestes equacions relacionen els valors a M de la mètrica i el d'una derivada en la direcció transversal.

1.3 Les equacions de lligam

A partir d'ara suposarem que la hipersuperfície inicial M de V és espacial, és a dir, que $g(\xi,\xi)<0$ en tot punt de M. Quan sigui necessari l'ús de coordenades es farà servir un sistema de referència adaptat a M en el que, si g té signatura $(-,+,+,+)$ i la superfície inicial ha de ser espacial, M vindrà donada localment per una equació del tipus $x^0=$ constant, per exemple, $x^0=0$. És costum indicar la coordenada x^0 per t i substituir el subíndex "0" també per t en els operadors diferencials. Quan indiqui components d'un tensor, però, es mantindrà l'índex "0". En aquestes coordenades la 1-forma normal és $\xi=dt$, els seus components són $\xi_\alpha=\partial_\alpha x^0=\delta^0_\alpha$ i la condició $g(\xi,\xi)<0$ és $\xi_\alpha g^{\alpha\beta}\xi_\beta=\delta^0_\alpha g^{\alpha\beta}\delta^0_\beta=g^{00}<0$. Així mateix, els components de la 1-forma $i(dt)(G-\chi T)$ són

$$i(dt)(G-\chi T)(\partial_\alpha)=(G-\chi T)(dt,\partial_\alpha)=(G-\chi T)^0_\alpha$$

i les quatre equacions de lligam s'escriuen

$$G^0_\alpha|_M=\chi T^0_\alpha|_M.$$

El càlcul en una carta local $(U;x^\alpha)$ mostra que, efectivament, la part principal de G^0_α no depèn de $\partial_{00}g_{\alpha\beta}=\partial_{tt}g_{\alpha\beta}$. Els termes amb derivades segones de la mètrica en l'expressió del tensor de Ricci són,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\alpha\beta}=R^\mu_{\alpha\mu\beta}&=\partial_\mu\Gamma^\mu_{\alpha\beta}-\partial_\alpha\Gamma^\mu_{\beta\mu}+\Gamma^\nu_{\alpha\beta}\Gamma^\mu_{\mu\nu}-\Gamma^\nu_{\alpha\mu}\Gamma^\mu_{\beta\nu}\cong\partial_\mu\Gamma^\mu_{\alpha\beta}-\partial_\alpha\Gamma^\mu_{\beta\mu}\\&\cong g^{\mu\nu}\{\partial_\mu[\alpha,\beta;\nu]-\partial_\alpha[\beta,\mu;\nu]\}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}+\partial_{\mu\alpha}g_{\beta\nu}-\partial_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}-\partial_{\mu\nu}g_{\alpha\beta})\end{aligned}$$

on el signe $\simeq$ indica igualtat llevat termes que depenen de la mètrica i de les seves derivades. Especificant els termes en $\partial_{tt}g_{\alpha\beta}$ obtenim

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{ij}&\cong-\frac{1}{2}g^{00}\partial_{tt}g_{ij}\\\mathcal{R}_{i0}&\cong\frac{1}{2}g^{0\nu}\partial_{tt}g_{\nu i}-\frac{1}{2}g^{00}\partial_{tt}g_{i0}=\frac{1}{2}g^{0j}\partial_{tt}g_{ji}\\\mathcal{R}_{00}&\cong g^{0\nu}\partial_{tt}g_{\nu 0}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_{tt}g_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{00}\partial_{tt}g_{00}\\&=g^{0\nu}\partial_{tt}g_{0\nu}-\frac{1}{2}\{g^{ij}\partial_{tt}g_{ij}+2g^{i0}\partial_{tt}g_{i0}+g^{00}\partial_{tt}g_{00}\}-\frac{1}{2}g^{00}\partial_{tt}g_{00}=-\frac{1}{2}g^{ij}\partial_{tt}g_{ij}\end{aligned}$$

Finalment,

$$\begin{aligned}G^0_i&=\mathcal{R}^0_i-\frac{1}{2}\mathrm{R}g^0_i=\mathcal{R}^0_i=g^{0j}\mathcal{R}_{ij}+g^{00}\mathcal{R}_{i0}\cong-\frac{1}{2}g^{0j}g^{00}\partial_{tt}g_{ij}+\frac{1}{2}g^{0j}g^{00}\partial_{tt}g_{ij}=0\\G^0_0&=\mathcal{R}^0_0-\frac{1}{2}\mathrm{R}g^0_0=g^{0\alpha}\mathcal{R}_{\alpha 0}-\frac{1}{2}\{g^{ij}\mathcal{R}_{ij}+g^{00}\mathcal{R}_{00}+2g^{i0}\mathcal{R}_{i0}\}\\&=\frac{1}{2}\{g^{00}\mathcal{R}_{00}-g^{ij}\mathcal{R}_{ij}\}\cong-\frac{1}{2}g^{00}g^{ij}\partial_{tt}g_{ij}+\frac{1}{2}g^{00}g^{ij}\partial_{tt}g_{ij}=0.\end{aligned}$$

El càlcul precedent mostra que les derivades segones $\partial_{tt} g_{0\alpha}$ no formen part del símbol principal del tensor de Ricci (i per tant de l'equació d'Einstein).

Cal recordar que l'expressió

$$i(dt)(G - \chi T)|_M = 0$$

per a les equacions de lligam ha estat obtinguda en un sistema de coordenades adaptat a M en el qual la lletra t indica una direcció transversal qualsevol i M ve donada per $t = 0$. La 1-forma normal a M és dt perquè si v és un camp tangent a M tenim que $dt(v) = v(t) = 0$, ja que $t = 0$ a M. La 1-forma normal dt, doncs, no és un concepte mètric. Si en cada punt p de M les 1-formes $\{dx^1, dx^2, dx^3\}$ formen una base de l'espai dual $T_p^*(M)$, el conjunt $\{dt, dx^1, dx^2, dx^3\}$ és una base de $T_p^*(V)$ i el dual $\{\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\}$ una base de $T_p(V)$. Aquí el camp $\frac{\partial}{\partial t}$ és transvers a M però en general no és normal a M: és el camp n associat a dt per g el que és perpendicular a M perquè $g(n, v) = dt(v) = 0$ per a tot $v \in T_p(M)$. En la base $\{dt, dx^1, dx^2, dx^3\}$, la mètrica g a M és

$$g(x, 0) = g_{00} dt \otimes dt + g_{0i}(dt \otimes dx^i + dx^i \otimes dt) + g_{ij} dx^i \otimes dx^j \ ,$$

amb una descomposició anàloga per als camps tensorials $\Omega^{(i)}$. Les dades de Cauchy inicials són els valors a M de $g_{\alpha\beta}$, $\partial_t g_{\alpha\beta}$, $\Omega^{(i)}$ i les derivades transversals de $\Omega^{(i)}$ fins a l'ordre adequat. Però ja que tenim la llibertat per fer difeomorfismes, la pregunta és com es poden escriure les equacions de lligam en forma intrínseca (independentment de les coordenades) i quines dades de Cauchy hi intervenen. En principi sembla lògic pensar que si estem buscant una expressió de $i(dt)(G - \chi T)|_M = 0$ que sigui vàlida per a tota direcció transversal t, aquestes equacions hauran de dependre d'objectes intrínsecs a M. En aquest sentit, seran els potencials g_{ij} que defineixen la mètrica de Riemann de M els que tindran un paper significatiu. Per distingir entre les dues mètriques, la lletra "g" indicarà una mètrica de Riemann, mentre que quan porti un signe al damunt (com ara $\tilde{g}$, $\bar{g}$ ó $\hat{g}$) simbolitzarà una mètrica de Lorentz. Aquest criteri s'aplicarà, quan sigui necessari, a la connexió ∇, als símbols de Christoffel Γ, al tensor de Ricci $\mathcal{R}$ i a la curvatura escalar R, però en cap cas al tensor d'Einstein G ni al tensor d'impulsió-energia T.

Un altre objecte de M, la segona forma fonamental, s'endevina que apareixerà d'una manera o una altra perquè es defineix mitjançant la mètrica $\tilde{g}$ de la varietat on està inserida M. Concretament, si N és el vector normal a M per $\tilde{g}$ i unitari en el sentit $\tilde{g}(N, N) = -1$, la segona forma quadràtica fonamental S d'una hipersuperfície M de V és aquella aplicació bilineal que assigna a cada parell X, Y de camps tangents a M l'escalar $S(X, Y) = -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, N)$. En termes de S, doncs, $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y)N$. També tenim que $S(X, Y) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X N, Y)$, ja que $\tilde{g}(N, Y) = 0$ implica $\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X N, Y) = -\tilde{g}(N, \tilde{\nabla}_X Y)$. La forma S és simètrica perquè

$$S(Y, X) = -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y X, N) = -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y + [Y, X], N) = -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, N) = S(X, Y)$$

Es defineix l'endomorfisme $P : T_p(M) \to T_p(M)$ associat a S per la mètrica $\tilde{g}$ de la següent forma: $P(X)$ és l'únic vector de $T_p(M)$ que compleix $\tilde{g}(P(X), Y) = S(X, Y)$ per a tot $Y \in T_p(M)$. Com que S és simètrica, P és autoadjunt:

$$\tilde{g}(P(X), Y) = S(X, Y) = S(Y, X) = \tilde{g}(P(Y), X) = \tilde{g}(X, P(Y))$$

De la definició de P i comparant amb $\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X N, Y) = S(X, Y)$, es dedueix que $P(X) = \tilde{\nabla}_X N$ ($\tilde{\nabla}_X N$ és de $T_p(M)$ perquè $\tilde{g}(N, N) = -1$ implica $\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X N, N) = 0$). És costum escriure $k = 2S$.

Per simplificar el càlcul de $i(dt)(G - \chi T)(\partial_\alpha) = (G - \chi T)^0_\alpha$, treballarem en la base $\{N, \partial_i\}$ i la seva dual $\{dn, \omega^i\}$ en què $\tilde{g}_{ij} = g_{ij}$, $\tilde{g}_{0i} = 0$ i $\tilde{g}_{00} = -1$ (i el mateix per als índexs contravariants). Si $(f, -U)$ representen els components de N en les direccions normal i tangencial, essent U i f respectivament un camp tangent a M i una funció de M, el canvi entre les bases $\{\partial_t, \partial_i\}$ i $\{N, \partial_i\}$ ve donat per $\partial_t = fN - U$, i entre les bases duals $\{dt, dx^i\}$ i $\{dn, \omega^i\}$ per

$$\partial_t = fN - U \qquad dx^i = \omega^i + \frac{U^i}{f} dn \qquad dt = \frac{1}{f} dn \ .$$

Els components del tensor d'Einstein G en la base $\{N, \partial_i\}$ són (tenint en compte que $\tilde{g}^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta$),

$$\begin{aligned} G^0_0 &= \tilde{\mathcal{R}}^0_0 - \frac{1}{2}\tilde{\mathrm{R}}\tilde{g}^0_0 = \tilde{g}^{0\alpha}\tilde{\mathcal{R}}_{\alpha 0} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{\mathcal{R}}_{\alpha\beta} = -\tilde{\mathcal{R}}_{00} - \frac{1}{2}(g^{ij}\tilde{\mathcal{R}}_{ij} - \tilde{\mathcal{R}}_{00}) \\ &= -\frac{1}{2}(g^{ij}\tilde{\mathcal{R}}_{ij} + \tilde{\mathcal{R}}_{00}) \end{aligned}$$

$$G^0_i = \tilde{\mathcal{R}}^0_i - \frac{1}{2}\tilde{\mathrm{R}}\tilde{g}^0_i = \tilde{\mathcal{R}}^0_i = \tilde{g}^{0\alpha}\tilde{\mathcal{R}}_{\alpha i} = -\tilde{\mathcal{R}}_{0i} \ .$$

Com que els components del tensor de Ricci $\tilde{\mathcal{R}}$ de $\tilde{g}$ són

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\alpha\beta} = \tilde{R}^\lambda_{\alpha\lambda\beta} = \tilde{g}^{\lambda\mu}\tilde{g}(\tilde{R}(\partial_\lambda, \partial_\beta)\partial_\alpha, \partial_\mu) \ . \tag{1.8}$$

serà necessari calcular els productes escalars,

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)Z, W) \qquad \tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)Z, N) \qquad \tilde{g}(\tilde{R}(N, X)N, Y).$$

on X, Y, Z són camps tangents a M. Substituint $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y)N$ en la definició del tensor de curvatura $\tilde{R}(X, Y)Z = \tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z$ obtenim

$$\begin{gathered} \tilde{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + S(Y, Z)\tilde{\nabla}_X N \\ -S(X, Z)\tilde{\nabla}_Y N + \{(\nabla_X S)(Y, Z) - (\nabla_Y S)(X, Z)\}N. \end{gathered}$$

on R és el tensor de curvatura de (M, g). Els components tangencial i normal de la identitat anterior reben el nom d'equació de Gauss i equació de Codazzi:

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,W) = \tilde{g}(R(X,Y)Z,W) + S(Y,Z)S(X,W) - S(X,Z)S(Y,W) \quad (1.9)$$
$$\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,N) = -(\nabla_X S)(Y,Z) + (\nabla_Y S)(X,Z). \quad (1.10)$$

El terme $\tilde{R}(N,X)N$ és igual a

$$\tilde{R}(N,X)N = \tilde{\nabla}_N\tilde{\nabla}_X N - \tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_N N - \tilde{\nabla}_{[N,X]}N$$

El primer terme $\tilde{\nabla}_N\tilde{\nabla}_X N$ és $\tilde{\nabla}_N P(X)$. Com que $\{N, \partial_i\}$ no és una base coordenada, el claudàtor $[N,X]$ és diferent de zero,

$$[N,X] = \left[\frac{1}{f}(\frac{\partial}{\partial t} + U), X\right] = \frac{1}{f}\left[\frac{\partial}{\partial t} + U, X\right] + \frac{X(f)}{f^2}(\frac{\partial}{\partial t} + U) = \frac{1}{f}[U,X] + \frac{X(f)}{f}N \ ,$$

i l'últim terme és $\tilde{\nabla}_{[N,X]}N = \frac{X(f)}{f}\tilde{\nabla}_N N + \frac{1}{f}\tilde{\nabla}_{[U,X]}N$. Per calcular la derivada covariant $\tilde{\nabla}_N N$, considerem el seu producte escalar amb els elements de la base. Com que $\tilde{g}(N,N) = -1$, els camps $\tilde{\nabla}_X N$ i $\tilde{\nabla}_N N$ són de $T_p(M)$. Ja que $\tilde{g}(N,X) = 0$, tenim que

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_N N, X) = -\tilde{g}(N, \tilde{\nabla}_N X) = -\tilde{g}(N, \tilde{\nabla}_X N + [N,X]) = \tilde{g}(N, [X,N]) = \frac{X(f)}{f} \ .$$

Recordant que $X(f) = df(X)$, per comparació deduïm que

$$\tilde{\nabla}_N N = \frac{1}{f}\sharp df,$$

on $\sharp df$ és el camp vectorial tangent a M corresponent a la 1-forma df a través de la mètrica g. Per tant,

$$\tilde{R}(N,X)N = \tilde{\nabla}_N P(X) - \tilde{\nabla}_X(\frac{\sharp df}{f}) - \tilde{\nabla}_{\frac{X(f)}{f}N}N - \tilde{\nabla}_{\frac{1}{f}[U,X]}N \ .$$

Multiplicant escalarment aquesta igualtat per un camp Y tangent a M i operant s'obté

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(N,X)N,Y) = {} & N(S(X,Y)) - S(X,P(Y)) - \frac{1}{f}S(X,[U,Y]) \\ & - \frac{1}{f}(\nabla^2 f)(X,Y) - \frac{1}{f}S([U,X],Y) \ , \end{aligned}$$

on $\nabla^2 f$ és la 2-forma $(\nabla^2 f)(X,Y) = \nabla_X(\nabla(f))(Y) = \nabla_X df(Y)$. Tenint present l'expressió de la derivada de Lie d'un 2-tensor covariant és

$$(L_U S)(X,Y) = U(S(X,Y)) - S([U,X],Y) - S(X,[U,Y]) \ ,$$

i substituint al segon membre el camp N per $(1/f)\partial/\partial t+(1/f)U$, tindrem finalment:

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(N,X)N,Y) = \frac{1}{f}\frac{\partial S(X,Y)}{\partial t} + \frac{1}{f}(L_U S)(X,Y)- \\ - S(X,P(Y)) - \frac{1}{f}(\nabla^2 f)(X,Y)\ .\end{aligned} \tag{1.11}$$

Introduïm la següent notació: $S{\cdot}S$ indica el producte escalar de S per ell mateix induït per la mètrica g de M, o sigui, $g^{ir}g^{js}S_{ij}S_{rs}$; Δf el laplacià de f segons la mètrica g, $-g^{ij}\nabla_i\nabla_j f$; i $S\times S$ la 2-forma definida per $(S\times S)(X,Y)=S(X,P(Y))$, en components, $(S\times S)_{ij}=g^{rs}S_{ri}S_{sj}$. Llavors, de l'expressió en coordenades del tensor de Ricci (1.8) i de (1.9), (1.10) i (1.11) (tenint present que en la base $\{N,\partial_i\}$ la matriu inversa de $\tilde{g}$ compleix $\tilde{g}^{ij}=g^{ij}$, $\tilde{g}^{00}=-1$ i $\tilde{g}^{0i}=0$), s'obtenen les fórmules següents:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{R}}(X,Y) &= \frac{1}{f}\frac{\partial S(X,Y)}{\partial t} + \frac{1}{f}(L_U S)(X,Y) - 2(S\times S)(X,Y) \\ &- \frac{1}{f}(\nabla^2 f)(X,Y) + \mathcal{R}(X,Y) + \ \mathrm{tr}(S)S(X,Y) \\ \tilde{\mathcal{R}}(N,X) &= g^{ij}(\nabla_{\partial/\partial x^i}S)(X,\frac{\partial}{\partial x^j}) - X\ \mathrm{tr}(S) \\ \tilde{\mathcal{R}}(N,N) &= -\frac{1}{f}g^{ij}\frac{\partial S_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{f}\mathrm{tr}\,(L_U S) + S{\cdot}S - \frac{1}{f}\Delta f\ .\end{aligned} \tag{1.12}$$

Així,

$$G_i^0 = -\tilde{\mathcal{R}}_{0i} = -\tilde{\mathcal{R}}(N,\partial_i) = -g^{ij}(\nabla_{\partial/\partial x^i}S)(\partial_i,\partial_j) - \partial_i\ \mathrm{tr}(S).$$

En el component $G_0^0 = -\frac{1}{2}(g^{ij}\tilde{\mathcal{R}}_{ij} + \tilde{\mathcal{R}}_{00})$ el producte $g^{ij}\tilde{\mathcal{R}}_{ij}$ aporta termes com ara $g^{ij}(L_U S)_{ij}$ que és igual a $\mathrm{tr}(L_U S)$, $g^{ij}(S\times S)_{ij} = g^{ij}g^{rs}S_{ri}S_{sj}$ igual a $S{\cdot}S$, $g^{ij}(\nabla^2 f)_{ij} = -\Delta f$ i $g^{ij}\mathcal{R}_{ij} = \mathrm{R}$, que és la curvatura escalar de g. El resultat és

$$G_0^0 = G(dn,N) = \frac{1}{2}(S\cdot S - \mathrm{R} - \ \mathrm{tr}^2(S))$$

Cap dels components G_α^0 depèn ni de f ni de U, i en ells apareixen la mètrica g, la segona forma fonamental k i la curvatura escalar R de g, tots ells objectes de M. Introduint $k=2S$ i l'operador δ de Hodge de g que actua sobre un tensor d'ordre 2 segons $(\delta A)_i = -\nabla^j A_{ij}$, i indicant la funció G_0^0 per $\mathcal{H}(g,k)$ i la 1-forma G_i^0 per $\gamma(g,k)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(g,k) &= \frac{1}{8}(k\cdot k - 4\mathrm{R} - \ \mathrm{tr}^2(k)) \\ \gamma(g,k) &= \frac{1}{2}\delta(k - g\ \mathrm{tr}(k))\ .\end{aligned}$$

Convenint que $T_0^0|_M = F$ i $T_i^0|_M = X_i$ les equacions de lligam quan la direcció transversal és normal s'escriuen,

$$\begin{cases}\mathcal{H}(g,k) = \chi F \\ \gamma(g,k) = \chi X.\end{cases} \tag{1.13}$$

En una direcció transversal qualsevol les equacions de lligam $(G-\chi T)(dt, \partial_\alpha)$ s'obtindran de $(G-\chi T)(dn, \partial_\alpha)$ tenint en compte el canvi de base

$$dx^i = \omega^i + \frac{U^i}{f} dn \qquad dt = \frac{1}{f} dn \ .$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}
(G-\chi T)(dt, \partial_i) &= \frac{1}{f}(G-\chi T)(dn, \partial_i) \\
(G-\chi T)(dt, \partial_t) &= (G-\chi T)(dn, N) - \frac{U^j}{f}(G-\chi T)(dn, \partial_j) \ .
\end{aligned}$$

La condició necessària i suficient perquè les equacions de lligam es compleixin per a qualsevol direcció transversal t, és a dir, per a tot (f, U), és que es verifiquin en una direcció normal a M, això és, que $\mathcal{H}(g,k) = \chi F$ i $\gamma(g,k) = \chi X$. Les dades de Cauchy (g,k) son les variables naturals o canòniques, també anomenades dades de Cauchy essencials.

La segona forma fonamental k ha d'estar relacionada amb alguna derivada transversal, ja que $k(X,Y)$ és el component normal de $\tilde{\nabla}_X Y$:

$$\begin{aligned}
N(\tilde{g}(X,Y)) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_N X, Y) + \tilde{g}(X, \tilde{\nabla}_N Y) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X N + [N,X], Y) + \tilde{g}(X, \tilde{\nabla}_Y N + [N,Y]) \\
&= \tilde{g}(P(X), Y) + \frac{1}{f}\tilde{g}([U,X], Y) + \tilde{g}(X, P(Y)) + \frac{1}{f}\tilde{g}(X, [U,Y]) \\
&= 2S(X,Y) + \frac{1}{f}U(\tilde{g}(X,Y)) - \frac{1}{f}(L_U \tilde{g})(X,Y) \ .
\end{aligned}$$

Substituint N per $(1/f)\partial/\partial t + (1/f)U$ i $\tilde{g}$ per g, s'obté que, a M,

$$\frac{\partial g}{\partial t} = fk - L_U g \ . \tag{1.14}$$

Lògicament, la derivada exterior $\partial_t g$ depèn de la direcció transversal (f, U). La funció $F = T(dn, N)|_M$ i el camp $X_i = T(dn, \partial_i)|_M$ dependran dels potencials gravitatoris i dels valors a M dels camps de la matèria $\Omega^{(i)}$ i de les seves derivades en la direcció normal, dependència que representem simbòlicament per $\omega^{(i)}$. Una vegada resoltes les equacions de lligam $\mathcal{H}(g,k) = \chi F(g, \omega^{(i)})$ i $\gamma(g,k) = \chi X(g, \omega^{(i)})$ i fixada una direcció transversal (f, U), les derivades $\partial_t g_{ij}$ s'obtenen a partir de la fórmula anterior i els potencials $\tilde{g}_{0\alpha}$ de

$$\tilde{g}_{00} = \tilde{g}(\partial_t, \partial_t) = (-f^2 + g(U,U)) \qquad \tilde{g}_{0i} = \tilde{g}(\partial_t, \partial_i) = -g(U, \partial_i).$$

Són aquestes dades de Cauchy no naturals les que fan aparèixer la dependència respecte f i U. En la direcció normal $(f = 1, U = 0)$, $\tilde{g}_{00} = -1$, $\tilde{g}_{0i} = 0$ i $\partial_t g = k$. Les altres derivades de primer ordre $\partial_t g_{0\alpha}$ resten indeterminades.

1.4 Les equacions de la matèria

Imaginem que hem d'estudiar un sistema en què la interacció del camp gravitatori $\tilde{g}$ amb d'altres camps no gravitatoris, el que en general anomenem camps de la materia $\Omega^{(i)}$, es basa en un model teòric i ve descrita per unes certes equacions. Si suposem que l'energia es troba en forma de camp electric i magnètic, el model és la teoria de l'Electromagnetisme i les equacions són les de Maxwell. Seguint amb el mateix exemple, per acoblar les equacions de Maxwell amb l'equació d'Einstein serà necessari deduir un tensor T simètric que sigui conservatiu, $\operatorname{div}(T) = 0$. És ben sabut que en Relativitat els camps electric E i magnètic B són certs components d'una 2-forma A i que les equacions de Maxwell són

$$\nabla_\alpha A^{\alpha\beta} = 0 \quad ; \quad \nabla_\alpha A_{\beta\gamma} + \nabla_\gamma A_{\alpha\beta} + \nabla_\beta A_{\gamma\alpha} = 0 \ .$$

Llavors, es pot demostrar [27] que el tensor d'impulsió-energia és

$$T_{\alpha\beta} = A_\alpha{}^\gamma A_{\beta\gamma} - \frac{1}{4}\tilde{g}_{\alpha\beta} A_{\gamma\lambda} A^{\gamma\lambda} \ .$$

Efectivament,

$$\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = A_{\beta\gamma} \nabla^\alpha A_\alpha{}^\gamma + A_\alpha{}^\gamma \nabla^\alpha A_{\beta\gamma} - \frac{1}{4}\nabla_\beta (A_{\gamma\lambda} A^{\gamma\lambda}) \ .$$

El primer terme és zero per la primera equació de Maxwell, així que

$$\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = A^{\alpha\gamma} \nabla_\alpha A_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} A^{\gamma\lambda} \nabla_\beta A_{\gamma\lambda} \ .$$

I el segon membre és nul, perquè fent ús de segona 1a equació de Maxwell,

$$\begin{aligned} A^{\alpha\gamma}\nabla_\alpha A_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2}(A^{\alpha\gamma}\nabla_\alpha A_{\beta\gamma} + A^{\gamma\alpha}\nabla_\gamma A_{\beta\alpha}) = \frac{1}{2}A^{\alpha\gamma}(\nabla_\alpha A_{\beta\gamma} + \nabla_\gamma A_{\alpha\beta}) \\ &= -\frac{1}{2}A^{\alpha\gamma}\nabla_\beta A_{\gamma\alpha} = \frac{1}{2}A^{\alpha\gamma}\nabla_\beta A_{\alpha\gamma} \end{aligned}$$

Quan el sistema físic és tot l'univers es parla de models cosmològics. En aquests models el tensor d'energia T no es dedueix de les equacions de la matèria, sinó que el procés és justament el contrari: cada model ve caracteritzat per una classe de tensors d'impulsió-energia, i les equacions de la matèria vénen donades per $\operatorname{div}(T) = 0$, que en aquest context reben el nom de *equacions d'Euler*. Per exemple, en el capítol 2 s'estudien els models de Robertson-Walker, en els que el tensor T és de la classe fluid perfecte, $T = (\rho + p)u \otimes u + p\tilde{g}$, on ρ i p són respectivament la densitat i la pressió del fluid (relacionades per una equació d'estat) i u és el camp geodèssic i unitari de velocitats de les partícules que l'integren. Cada classe de tensors d'impulsió-energia es representarà per l'expressió $T(\tilde{g}, \Omega^{(i)})$.

A l'hora de plantejar el problema de Cauchy associat a l'equació d'Einstein, per a un certa classe de tensors d'impulsió-energia, sempre suposarem que,

· les equacions de la matèria no introdueixen més graus de llibertat, és a dir, que el nombre d'equacions és igual al nombre de camps de la matèria.

· les dades de Cauchy no han de complir unes equacions de lligam suplementàries, això és, la hipersuperfície inicial M no és característica de les equacions de la matèria.

1.5 Reducció hiperbòlica

Per trobar el difeomorfisme o la *gauge* en el qual l'equació d'Einstein adopta una expressió hiperbòlica, estudiarem primer en quins casos la part principal en $\tilde{g}$ de l'equació d'Einstein se simplifica considerablement, i relacionarem aquests canvis amb un difeomorfisme adequat. El resultat serà que la part principal del tensor de Ricci (i per tant de l'equació d'Einstein) queda reduïda a

$$-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta} \ .$$

Una equació del tipus $-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta} = A(x, \tilde{g}, \partial\tilde{g})$ és hiperbòlica si $\tilde{g}$ és una mètrica de Lorentz, perquè $\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta}$ és l'equació d'ones per a cada component $\tilde{g}_{\alpha\beta}$. Ara el símbol principal σ_L fa correspondre a cada $a_{\alpha\beta} \in T_2(V_M)_x$ l'element $\xi^\nu\xi_\nu a_{\alpha\beta}$, i el nucli de σ_L és diferent de $\{0\}$ únicament si $\xi^\nu\xi_\nu = 0$, el que indica que les úniques característiques són les superfícies nul·les. Quan l'equació d'Einstein adopta la forma de l'equació d'ones es posa de manifest que tots aquells conceptes definits a l'apartat 1.1 associats a la "mètrica" de components $a_{\alpha\beta}$ (direccions temporals, superfícies espacials ...), coincideixen amb els respectius conceptes de la relativitat general, perquè ara els coeficients $a_{\alpha\beta}$ són exactament els potencials gravitatoris $\tilde{g}_{\alpha\beta}$.

Recordem que la part principal del tensor de Ricci és

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} \cong \partial_\mu\tilde{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\tilde{\Gamma}^\mu_{\beta\mu} \cong \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}(\partial_{\mu\beta}\tilde{g}_{\alpha\nu} + \partial_{\mu\alpha}\tilde{g}_{\beta\nu} - \partial_{\alpha\beta}\tilde{g}_{\mu\nu} - \partial_{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta}).$$

Definim $\tilde{\Gamma}^\alpha$ com la contracció dels símbols de Christoffel amb la mètrica: $\tilde{\Gamma}^\alpha = \tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}$. Intentem relacionar algun dels termes anteriors de la part principal de $\mathcal{R}$ amb els termes de segon ordre en $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ de l'expressió $\tilde{g}_{\alpha\mu}\partial_\beta\tilde{\Gamma}^\mu$:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\alpha\mu}\partial_\beta\tilde{\Gamma}^\mu &= \tilde{g}_{\alpha\mu}\partial_\beta\{\tilde{g}^{\lambda\nu}\tilde{\Gamma}^\mu_{\lambda\nu}\} \cong \frac{1}{2}\tilde{g}_{\alpha\mu}\tilde{g}^{\lambda\nu}\tilde{g}^{\mu\gamma}\partial_\beta[\lambda,\nu;\gamma] = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\beta[\mu,\nu;\alpha] \\ &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\{\partial_{\beta\mu}\tilde{g}_{\nu\alpha} + \partial_{\beta\nu}\tilde{g}_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha\beta}\tilde{g}_{\mu\nu}\} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\{2\partial_{\beta\nu}\tilde{g}_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha\beta}\tilde{g}_{\mu\nu}\} \ .\end{aligned}$$

Aleshores, en segon ordre, la combinació $\tilde{g}_{\alpha\mu}\partial_\beta\tilde{\Gamma}^\mu + \tilde{g}_{\beta\nu}\partial_\alpha\tilde{\Gamma}^\mu$ s'escriu,

$$\tilde{g}_{\alpha\mu}\partial_\beta\tilde{\Gamma}^\mu + \tilde{g}_{\beta\nu}\partial_\alpha\tilde{\Gamma}^\mu \cong \tilde{g}^{\mu\nu}(\partial_{\alpha\mu}\tilde{g}_{\beta\nu} + \partial_{\beta\mu}\tilde{g}_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha\beta}\tilde{g}_{\mu\nu})$$

Per tant,

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\{\tilde{g}_{\alpha\mu}\partial_\beta\tilde{\Gamma}^\mu + \tilde{g}_{\beta\mu}\partial_\alpha\tilde{\Gamma}^\mu\} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}(\tilde{g}, \partial\tilde{g}) \tag{1.15}$$

Si $\tilde{\Gamma}^\alpha = 0$, la part principal es veu reduïda únicament al terme $-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta}$. De fet, això també seria cert si els símbols $\tilde{\Gamma}^\alpha$ no depenguessin de cap derivada de la mètrica, perquè llavors l'expressió

$$\frac{1}{2}\{\tilde{g}_{\alpha\mu}\partial_\beta\tilde{\Gamma}^\mu + \tilde{g}_{\beta\mu}\partial_\alpha\tilde{\Gamma}^\mu\}$$

no entraria a formar part del símbol principal. Per tal de trobar unes coordenades adients i una mètrica convenient $\tilde{g}$ que en aquestes coordenades compleixi la condició que els símbols $\tilde{\Gamma}^\alpha$ no depenguin de les derivades de la mètrica, introduïm unes certes funcions Y^α, que ja definirem més endavant. En termes de la diferència $H^\alpha = \tilde{\Gamma}^\alpha - Y^\alpha$, l'expressió (1.15) resta

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\{\tilde{g}_{\alpha\mu}\partial_\beta Y^\mu + \tilde{g}_{\beta\mu}\partial_\alpha Y^\mu\} + F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\{\tilde{g}_{\alpha\mu}\partial_\beta H^\mu + \tilde{g}_{\beta\mu}\partial_\alpha H^\mu\}$$

Per tal d'abreujar les notacions, definim

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\{\tilde{g}_{\alpha\mu}\partial_\beta Y^\mu + \tilde{g}_{\beta\mu}\partial_\alpha Y^\mu\} + F_{\alpha\beta}\\ L_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\{\tilde{g}_{\alpha\mu}\partial_\beta H^\mu + \tilde{g}_{\beta\mu}\partial_\alpha H^\mu\}\ .\end{aligned}$$

Llavors el tensors de Ricci i d'Einstein s'escriuen

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \mathcal{S} + L\\ G &= \mathcal{R} - \frac{1}{2}\mathrm{R}\tilde{g} = \mathcal{S} + L - \frac{1}{2}[\mathrm{tr}(\mathcal{S}) + \mathrm{tr}(L)]\tilde{g}\ ,\end{aligned}$$

de forma que si anomenem $\mathcal{E}$ a $\mathcal{S} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathcal{S})\tilde{g}$, tindrem que

$$G = \mathcal{E} + L - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(L)\tilde{g}.$$

En el següent paràgraf veurem que existeix un difeomorfisme Φ tal que $\mathcal{S} = \Phi^*(\mathcal{R})$ i $\mathcal{E} = \Phi^*(\mathcal{G})$, així que $\mathcal{S}$ i $\mathcal{E}$, que han estat definits localment, són en realitat tensors. En aquesta notació, trobar unes certes coordenades en les quals els símbols de Christoffel no formin part de la part principal de $\mathcal{R}(\tilde{g})$ és equivalent a definir les funcions Y^α, encara arbitràries, amb la condició que depenguin de $\tilde{g}$ però no de les seves derivades, i de manera que $H = \Gamma - Y$ s'anul·li. Per aconseguir-ho és necessari introduir el concepte d'aplicació harmònica.

Les aplicacions harmòniques. Sigui V una varietat diferenciable de dimensió 4 i $\tilde{g}$ i $\hat{g}$ dues mètriques de Lorentz. Aquí cal entendre $\hat{g}$ com una mètrica donada però fixa, que rep el nom de *mètrica de referència.* Considerem una aplicació diferenciable $\Phi : (V, \tilde{g}) \longrightarrow (V, \hat{g})$. Com que $(D\Phi)_p : T_p(V) \longrightarrow T_{\Phi(p)}(V)$, podem considerar $D\Phi_p$ com un element de $T_p^*(V) \otimes T_{\Phi(p)}(V)$, que en coordenades, si en unes cartes locals Φ ve donada per $y^\beta = \Phi^\beta(x^\alpha)$, s'escriu $D\Phi = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}(x)dx^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial y^\beta}$. Per tant, $D\Phi$ és una secció del fibrat $T^*(V) \otimes \Phi T(V)$ sobre V. Dotem aquest fibrat d'una connexió ∇' que actua sobre un element $t \otimes s \in T_p^*(V) \otimes T_{\Phi(p)}(V)$ de manera que, si $v \in T_p(V)$,

$$\nabla'_v(t \otimes s) = (\tilde{\nabla}_v t) \otimes s + t \otimes \Phi^*(\hat{\nabla}_v s)$$

on $\Phi^*(\hat{\nabla}_v s) = \hat{\nabla}_{D\Phi(v)} s$.

En analogia amb les funcions, es diu que Φ és una aplicació harmònica si $\delta D\Phi = 0$. En coordenades $\tilde{g}^{\mu\beta}\nabla_\mu (D\Phi)^\alpha_\beta = 0$. En el càlcul de

$$\nabla'_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} D\Phi = \nabla'_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \left(\frac{\partial \Phi^\beta}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right)$$

apareixerà el terme $\hat{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \frac{\partial}{\partial y^\beta}$, que és igual a

$$\hat{\nabla}_{\frac{\partial \Phi^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu}} \frac{\partial}{\partial y^\beta} = \frac{\partial \Phi^\nu}{\partial x^\mu} \hat{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^\nu}} \frac{\partial}{\partial y^\beta}$$

de forma que

$$\nabla'_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} D\Phi = \left(\frac{\partial^2 \Phi^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} - \frac{\partial \Phi^\beta}{\partial x^\nu} \tilde{\Gamma}^\nu_{\mu\alpha} + \frac{\partial \Phi^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \Phi^\nu}{\partial x^\mu} \hat{\Gamma}^\beta_{\nu\lambda} \right) dx^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial y^\beta}.$$

La condició d'harmonicitat, escrita en coordenades, és doncs,

$$\tilde{g}^{\alpha\mu} \left(\frac{\partial^2 \Phi^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} - \frac{\partial \Phi^\beta}{\partial x^\nu} \tilde{\Gamma}^\nu_{\mu\alpha} + \frac{\partial \Phi^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \Phi^\nu}{\partial x^\mu} \hat{\Gamma}^\beta_{\nu\lambda} \right) = 0. \tag{1.16}$$

Si l'aplicació identitat, $I : (V, \tilde{g}) \longrightarrow (V, \hat{g})$ és harmònica, la condició (1.16) aplicada a la identitat és $\tilde{g}^{\alpha\mu}(\hat{\Gamma}^\beta_{\alpha\mu} - \tilde{\Gamma}^\beta_{\alpha\mu}) = 0$, o sigui, $\tilde{g}^{\alpha\mu}\hat{\Gamma}^\beta_{\alpha\mu} - \tilde{\Gamma}^\beta = 0$. Anomenant Y^β a $\tilde{g}^{\alpha\mu}\hat{\Gamma}^\beta_{\alpha\mu}$, la condició anterior s'escriu $\tilde{\Gamma}^\beta = Y^\beta$, on Y^β només depèn de $\tilde{g}$, però no de les derivades de $\tilde{g}$, com havíem desitjat. Per tant, fixada una mètrica de referència $\hat{g}$, per a qualsevol mètrica de Lorentz $\tilde{g}$ anomenarem Y^β a $\tilde{g}^{\alpha\mu}\hat{\Gamma}^\beta_{\alpha\mu}$. Quan la identitat $I : (V, \tilde{g}) \longrightarrow (V, \hat{g})$ sigui harmònica, $H = \Gamma - Y$ s'anul·larà i es tindrà $L = 0$, $\mathcal{R} = \mathcal{S}$ i $G = \mathcal{E}$. Es diu aleshores que $\tilde{g}$ és harmònica respecte a la mètrica de referència $\hat{g}$.

Observem que si ara tenim una aplicació harmònica qualsevol $\Phi : (V, \tilde{g}) \longrightarrow (V, \hat{g})$, i definim la mètrica *pull-forward* de $\tilde{g}$, $\bar{g} = (\Phi^{-1})^*\tilde{g}$, llavors la identitat $I : (V, \bar{g}) \longrightarrow (V, \hat{g})$ és harmònica ja que

$$\bar{\Gamma}^\alpha = \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial x^\beta} \tilde{\Gamma}^\beta - \tilde{g}^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \Phi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \ ,$$

$$\tilde{g}^{\alpha\mu} \frac{\partial \Phi^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \Phi^\nu}{\partial x^\mu} = \bar{g}^{\lambda\nu}$$

i l'equació (1.16) s'escriu

$$(-\bar{\Gamma}^\beta + \bar{g}^{\lambda\nu}\hat{\Gamma}^\beta_{\lambda\nu}) = 0,$$

que és la condició d'harmonicitat de l'aplicació identitat. Llavors $\mathcal{S} = \Phi^*(\mathcal{R})$ i $\mathcal{E} = \Phi^*(\mathcal{G})$. Resumint, l'harmonicitat de $\Phi : (V, \tilde{g}) \longrightarrow (V, \hat{g})$ és equivalent a la de $I : (V, \bar{g}) \longrightarrow (V, \hat{g})$, amb $\bar{g} = (\Phi^{-1})^*\tilde{g}$.

1.6 El problema de Cauchy per a l'equació reduïda d'Einstein

L'equació d'Einstein està definida en una varietat de Lorentz i a l'hora de resoldre el problema de Cauchy ens trobem amb la dificultat que només en el cas $\mathbb{R}^n$ hi ha una teoria d'existència i unicitat per a les solucions de les equacions en derivades parcials, i que per tant els resultats que es puguin obtenir a partir dels teoremes existents no podran ser en principi de caire global, sinó únicament referents a una carta local de la varietat. Les equacions que han estat més estudiades a $\mathbb{R}^n$ són aquelles que es poden classificar o bé com a el·líptiques, o bé com a hiperbòliques o bé com a parabòliques. En l'apartat anterior s'ha vist que l'equació d'Einstein pot ser reduïda a una de tipus hiperbòlic, i ara el que cal és aplicar el teorema 4 per tal de, a partir d'un problema de Cauchy "abstracte" per a equacions hiperbòliques que està ben resolt, arribar a solucionar el problema de Cauchy "geomètric" per a l'equació d'Einstein.

La proposició que ve a continuació fa referència a la hipersuperfície $M = \mathbb{R}^3$ de $\mathbb{R}^4$. Com és habitual, les equacions que hi apareixen estan escrites en un sistema de coordenades (t, x^1, x^2, x^3) de $\mathbb{R}^4$ en el qual M ve determinada per l'equació $t = 0$ i (x^1, x^2, x^3) són les coordenades de M. En aquestes coordenades, si $\tilde{g}_{ij}|_M$ representen els components d'una mètrica de Riemann g de M, una mètrica de Lorentz $\tilde{g}$ de $\mathbb{R}^4$ ve caracteritzada per la condició $\tilde{g}_{00} < 0$.

La següent proposició és una conseqüència del fet que un conjunt d'equacions hiperbòliques de $\mathbb{R}^4$ degudament acoblades formen un sistema que també és hiperbòlic, i que per tant el seu problema de Cauchy està ben posat. Recordem que una classe determinada de tensors d'impulsió-energia és un tensor T simètric d'ordre 2 del qual coneixem la seva dependència funcional respecte a la mètrica $\tilde{g}$ i als camps tensorials $\Omega^{(i)}$ de la matèria. Ens restringirem al cas en que les equacions de la matèria vénen donades per $\operatorname{div}_{\tilde{g}}(T) = 0$. Si U és un obert de $\mathbb{R}^3$, definim $U_\epsilon = (-\epsilon, +\epsilon) \times U$.

Proposició 5. *Considerem el sistema format per les equacions* $-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}(\tilde{g}, \partial\tilde{g}) = 0$ *i* $div_{\tilde{g}}(T) = 0$*, on* $\tilde{g}$ *representa una mètrica de Lorentz de* $\mathbb{R}^4$ *i* T *una classe de tensors d'impulsió-energia. Suposem que,*

1. *la hipersuperfície* $\mathbb{R}^3$ *donada per* $t = 0$ *no és una característica del sistema.*

2. T *és d'ordre zero en* $\tilde{g}$ *i en* $\Omega^{(i)}$*, és a dir, no conté cap derivada de* $\tilde{g}$ *ni de* $\Omega^{(i)}$*.*

3. *fixada* $\tilde{g}$*, l'equació* $div_{\tilde{g}}(T) = 0$ *es pot escriure com un sistema hiperbòlic de primer ordre en* $\Omega^{(i)}$*, quasi-lineal i simètric.*

Sigui U *un domini obert i acotat de* $\mathbb{R}^3$*, suport de les següents dades de Cauchy:*

- *una mètrica* $\tilde{g}^0 \in \mathcal{F}_s(U)$*.*

- *un tensor 2-covariant i simètric* $\tilde{k}^0 \in \mathcal{F}_{s-1}(U)$*.*

· *un conjunt de camps* $\omega^{(i)} \in \mathcal{F}_s(U)$, $i = 1, \ldots, m$

Aleshores, si $s > 4$, *el problema de Cauchy associat està ben posat, és a dir, existeix un* $\varepsilon > 0$, *una única mètrica de Lorentz* $\tilde{g} \in \mathcal{F}_s(U_\varepsilon)$ *i uns únics* $\Omega^{(i)} \in \mathcal{F}_s(U_\varepsilon)$ $i = 1, \ldots, m$ *que compleixen el sistema*

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}(\tilde{g}, \partial\tilde{g}) = 0 \\ div_{\tilde{g}}T = 0 \end{aligned}\right\}$$

amb

$$\tilde{g}(0) = \tilde{g}^0 \qquad \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t}(0) = \tilde{k}^0 \qquad \Omega^{(i)}(0) = \omega^{(i)} \ ,$$

i on $(\tilde{g}, \Omega)$ *depenen contínuament de les dades inicials* $(\tilde{g}^0, \tilde{k}^0, \omega)$ *en la norma* $\mathcal{F}_s$.

Demostració. Es basa en el el teorema 4 per a sistemes de primer ordre. Per la hipòtesi 1 el component $\tilde{g}^{00}$ és diferent de zero. Aleshores, per la hipòtesi 3 sobre T i segons la definició 3, el subsistema $\operatorname{div}_{\tilde{g}}T = 0$ es pot escriure com un sistema hiperbòlic i simètric del tipus

$$B^0\partial_t h + B^i\partial_i h = B$$

amb B^0 és simètrica i definida positiva, les matrius B^i són simètriques. Aquí h depèn únicament dels $\Omega^{(i)}$ perquè $\tilde{\nabla}\tilde{g} = 0$.

Anem a veure que l'equació l'equació $-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} = 0$ també pot ser reduïda a un sistema del mateix tipus. Aleshores, segons la hipòtesi 2 sobre T, les parts principals de cada subsistema estaran desacoblades, i el sistema

$$\begin{pmatrix} A^0 & 0 \\ 0 & B^0 \end{pmatrix} \partial_t \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} + \sum_i \begin{pmatrix} A^i & 0 \\ 0 & B^i \end{pmatrix} \partial_i \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

també serà hiperbòlic i simètric de primer ordre, amb la matriu $\left(\begin{smallmatrix} A^0 & 0 \\ 0 & B^0 \end{smallmatrix}\right)$ definida positiva. Podrem doncs aplicar el teorema 4 d'existència i unicitat a cada subsistema per separat.

El problema de Cauchy de l'equació $-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} = 0$ es pot plantejar en termes d'un sistema de primer ordre $A^0\partial_t f + A^i\partial_i f = A(f)$ si definim convenientment les dades de Cauchy. Siguin

$$A^0 = \begin{pmatrix} I_{10} & 0_{10} & 0_{10} & 0_{10} & 0_{10} \\ 0_{10} & \tilde{g}^{11}I_{10} & \tilde{g}^{12}I_{10} & \tilde{g}^{13}I_{10} & 0_{10} \\ 0_{10} & \tilde{g}^{21}I_{10} & \tilde{g}^{22}I_{10} & \tilde{g}^{23}I_{10} & 0_{10} \\ 0_{10} & \tilde{g}^{31}I_{10} & \tilde{g}^{32}I_{10} & \tilde{g}^{33}I_{10} & 0_{10} \\ 0_{10} & 0_{10} & 0_{10} & 0_{10} & -\tilde{g}^{00}I_{10} \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{\alpha\beta} \\ \tilde{r}_{\alpha\beta j} \\ \tilde{s}_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

$$A^i = \begin{pmatrix} 0_{10} & 0_{10} & 0_{10} & 0_{10} & 0_{10} \\ 0_{10} & 0_{10} & 0_{10} & 0_{10} & -\tilde{g}^{1i}I_{10} \\ 0_{10} & 0_{10} & 0_{10} & 0_{10} & -\tilde{g}^{2i}I_{10} \\ 0_{10} & 0_{10} & 0_{10} & 0_{10} & -\tilde{g}^{3i}I_{10} \\ 0_{10} & -\tilde{g}^{i1}I_{10} & -\tilde{g}^{i2}I_{10} & -\tilde{g}^{i3}I_{10} & -2\tilde{g}^{0i}I_{10} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \tilde{s}_{\alpha\beta} \\ 0_{30} \\ -2F_{\alpha\beta} \end{pmatrix} ,$$

on I_n, 0_n indiquen les matrius identitat i nul·la d'ordre n i F és d'ordre 0 en les variables. El sistema $A^0\partial_t f + A^i\partial_i f = A(f)$ és hiperbòlic en el sentit de la def. 3: primer, les matrius A^0 i A^j són simètriques. Segon, A^0 és definida positiva, $(v, A^0 v) > 0$ si $v \neq 0$: en efecte, observem que els seus elements vénen donats per

$$a^{10i+k,10j+l} = \begin{cases} \delta^{kl} & i = j = 0 \\ \tilde{g}^{ij}\delta^{kl} & i, j = 1, 2, 3 \\ -\tilde{g}^{00}\delta^{kl} & i = j = 4 \end{cases} \qquad k, l = 1, \dots, 10.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} (v, A^0 v) = v_\alpha a^{\alpha\beta} v_\beta &= \sum_{k,l=1}^{10} v_k \delta^{kl} v_l + \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,l=1}^{10} v_{10i+k}\tilde{g}^{ij}\delta^{kl} v_{10j+l} - \sum_{k,l=1}^{10} v_k \tilde{g}^{00}\delta^{kl} v_l \\ &= \sum_{k=1}^{10} v_k^2 + \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k=1}^{10} v_{10i+k}\tilde{g}^{ij} v_{10j+k} - \tilde{g}^{00}\sum_{k=1}^{10} v_k^2 \end{aligned}$$

és positiva perquè en ser $\tilde{g}$ una mètrica de Lorentz, en qualsevol punt es descompon com $\tilde{g} = \tilde{g}^{00} dt \otimes dt + \tilde{g}_{ij} dx^i \otimes dx^j$, on $\tilde{g}^{00} < 0$ i $\tilde{g}_{ij}$ són els components d'una mètrica de Riemann.

Considerem el problema de Cauchy per al sistema $A^0\partial_t f + A^i\partial_i f = A(f)$ amb les següents dades de Cauchy:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(0) = \tilde{g}^0_{\alpha\beta} \qquad \tilde{s}_{\alpha\beta}(0) = \tilde{k}^0_{\alpha\beta} \qquad \tilde{r}_{\alpha\beta i}(0) = \frac{\partial \tilde{g}^0_{\alpha\beta}}{\partial x^i} ,$$

El desenvolupament de $A^0\partial_t f + A^i\partial_i f = A(f)$ dóna lloc a

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial t} &= \tilde{s}_{\alpha\beta} \\ \tilde{g}^{ji}\frac{\partial \tilde{r}_{\alpha\beta i}}{\partial t} - \tilde{g}^{ji}\frac{\partial \tilde{s}_{\alpha\beta}}{\partial x^i} &= 0 \\ -\tilde{g}^{00}\frac{\partial \tilde{s}_{\alpha\beta}}{\partial t} - \tilde{g}^{ij}\frac{\partial \tilde{r}_{\alpha\beta j}}{\partial x^i} - 2\tilde{g}^{0i}\frac{\partial \tilde{s}_{\alpha\beta}}{\partial x^i} &= -2F_{\alpha\beta} \end{aligned}\right\} .$$

Si escollim el mínim valor de regularitat, $s = 4$, d'acord amb les hipòtesis del teorema les dades de Cauchy $\phi = (\tilde{g}^0, \tilde{k}^0, \partial_i \tilde{g}^0)$ són de $\mathcal{F}_3(U)$. El teorema 4 ens assegura aleshores que existeix una única solució $f \in \mathcal{F}_3(U_{\varepsilon_1})$ amb $f(0) = \phi$, que depèn contínuament de les dades de Cauchy. Com que pel lema de Sobolev $\mathcal{F}_s \subset C^k$ si $s > n/2 + k$, la solució $f = (\tilde{g}, \tilde{r}, \tilde{s})$ és de classe C^1. Però pel primer conjunt de 10 equacions $\frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial t}$ també és de C^1, és a dir, les derivades $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}$ i $\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^i \partial t}$ existeixen i són contínues, la qual cosa implica que les derivades creuades $\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^i \partial t}$ i $\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial t \partial x^i}$ són iguals.

De la segona equació deduïm (perquè $\tilde{g}^{ij}$ té inversa) que $\frac{\partial \tilde{r}_{\alpha\beta i}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{s}_{\alpha\beta}}{\partial x^i}$. Però com $\frac{\partial \tilde{s}_{\alpha\beta}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial x^i})$, arribem a la conclusió que $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial x^i} - \tilde{r}_{\alpha\beta i}) = 0$. En ser $\frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial x^i} = \tilde{r}_{\alpha\beta i}$ per a $t = 0$, la igualtat es complirà $\forall\ t \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$. Substituint a la tercera equació, obtenim $-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}(\tilde{g}, \partial\tilde{g}) = 0$. Finalment, com que $(\tilde{r}_{\alpha\beta i}, \tilde{s}_{\alpha\beta}) = (\frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial x^i}, \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial t})$ és de $\mathcal{F}_3$, la mètrica $\tilde{g}$ és de $\mathcal{F}_4$.

De la mateixa forma, aplicant el mateix teorema a $B^0\partial_t h + B^i \partial_i h = B$, s'arriba a la conclusió que existeixen uns únics $\Omega^{(i)} \in \mathcal{F}^s(U_{\varepsilon_2}, \mathbb{R}^4)$, $s > 3/2 + 1 = 2.5$, amb $\Omega^{(i)}(0) = \omega^{(i)}$. Prenent $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ i $s \geq 4$ arribem al resultat desitjat. □

La proposició 5 fa pensar que el problema de Cauchy per a l'equació reduïda d'Einstein amb les mateixes hipòtesis sobre el tensor T també estarà ben posat. Tot i que aquest serà el resultat final, a hores d'ara no és tan evident, perquè encara que $\mathcal{E} = \chi T$ és del tipus $-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}(\tilde{g}, \partial\tilde{g}, \Omega) = 0$, l'equació $\mathcal{E} = \chi T$ representa l'equació reduïda d'Einstein només si $\tilde{g}$ és una mètrica harmònica respecte una mètrica de referència $\hat{g}$. És a dir, sigui quina sigui la formulació del teorema de Cauchy per a l'equació $\mathcal{E} = \chi T$, la mètrica solució ha ser harmònica (H ha de ser zero) en un entorn V_M de M a V perquè aleshores el tensor $\mathcal{E}$ és el tensor d'Einstein G escrit en coordenades harmòniques. És obvi que en el plantejament del problema de Cauchy no podem pas imposar que $H = 0$ a V_M sinó en tot cas que $H = 0$ a M. És necessari un resultat que asseguri que si $\tilde{g}$ és solució del problema de Cauchy plantejat en la proposició 5 i $H = 0$ a M, aleshores $H = 0$ "fora" de M.

Lema 6. *Si $\tilde{g}$ és una mètrica de Lorentz solució de $\mathcal{E} = \chi T$ aleshores H^α compleix un sistema hiperbòlic, lineal i homogeni.*

Demostració. Com que $\operatorname{div}(G) = 0$ (perquè G és el tensor d'Einstein) i $\operatorname{div}(\mathcal{E}) = 0$ (perquè, per hipòtesi, $\mathcal{E} = \chi T$ i $\operatorname{div}(T) = 0$), deduïm de $G = \mathcal{E} + L - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(L)\tilde{g}$ que $\operatorname{div}\{L - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(L)\tilde{g}\} = 0$. Com $L^{\alpha\beta} = \tilde{g}^{\alpha\mu}\tilde{g}^{\beta\nu}L_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\{\tilde{g}^{\alpha\mu}\partial_\mu H^\beta + \tilde{g}^{\beta\nu}\partial_\nu H^\alpha\}$ i $\operatorname{tr}(L) = \partial_\alpha H^\alpha$,

$$\nabla_\alpha\{L^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(L)\tilde{g}^{\alpha\beta}\} = \frac{1}{2}\{\tilde{g}^{\alpha\mu}\partial_{\alpha\mu}H^\beta + \tilde{g}^{\beta\nu}\partial_{\alpha\nu}H^\alpha - \tilde{g}^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\mu}H^\mu + B_\nu^{\beta\alpha}\partial_\alpha H^\nu\}\ ,$$

on els $B_\nu^{\beta\alpha}$ són com a molt d'ordre 1 en $\tilde{g}_{\alpha\beta}$. En ser $\tilde{g}^{\beta\nu}\partial_{\alpha\nu}H^\alpha = \tilde{g}^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\mu}H^\mu$, l'equació $\operatorname{div}\{L - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(L)\tilde{g}\} = 0$ passa a ser

$$\tilde{g}^{\alpha\mu}\partial_{\alpha\mu}H^\beta + B_\nu^{\beta\alpha}\partial_\alpha H^\nu = 0,$$

que és un sistema lineal i homogeni de segon ordre en H^α, hiperbòlic per ser $\tilde{g}$ una mètrica de Lorentz. $\square$

Lema 7. *Sigui $\tilde{g}$ una mètrica de Lorentz solució del problema de Cauchy associat a l'equació $\mathcal{E}_{\tilde{g}} = \chi T$, en el que les dades de Cauchy en una superfície espacial M compleixen les equacions de lligam $G^0_\alpha = \chi T^0_\alpha$. Llavors, si $H^\alpha = 0$ en una carta local U de M també $\partial_t H^\alpha|_U = 0$.*

Demostració. Per definició $G^0_\alpha = \mathcal{E}^0_\alpha + L^0_\alpha - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(L)\tilde{g}^0_\alpha$. Per hipòtesi $G^0_\alpha = \mathcal{E}^0_\alpha$ a M, perquè en unes coordenades adaptades a M les equacions de lligam $i(n)(G-\chi T)|_M = 0$ s'escriuen $G^0_\alpha = \chi T^0_\alpha$, i $\mathcal{E}_{\tilde{g}} = \chi T$. Per tant, $L^0_\alpha - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(L)\tilde{g}^0_\alpha = 0$ també a M. Com que $L_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\{\tilde{g}_{\alpha\mu}\partial_\beta H^\mu + \tilde{g}_{\beta\mu}\partial_\alpha H^\mu\}$,

$$L^0_\alpha = \tilde{g}^{0\beta}L_{\alpha\beta} = \tilde{g}^{0\beta}\frac{1}{2}\{\tilde{g}_{\alpha\mu}\partial_\beta H^\mu + \tilde{g}_{\beta\mu}\partial_\alpha H^\mu\} = \frac{1}{2}\{\tilde{g}^{0\beta}\tilde{g}_{\alpha\mu}\partial_\beta H^\mu + \partial_\alpha H^0\}$$
$$\mathrm{tr}(L) = \tilde{g}^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta} = \tilde{g}^{\alpha\beta}\frac{1}{2}\{\tilde{g}_{\alpha\mu}\partial_\beta H^\mu + \tilde{g}_{\beta\mu}\partial_\alpha H^\mu\} = \frac{1}{2}\{\partial_\beta H^\beta + \partial_\mu H^\mu\} = \partial_\beta H^\beta.$$

Aquí s'ha fet ús de $\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\beta\mu} = \tilde{g}^\alpha_\mu = \delta^\alpha_\mu$. Per ser $H^\alpha = 0$ a M, totes les derivades $\partial_i H^\alpha$ seran nul·les i per tant $L^0_\alpha = \frac{1}{2}\{\tilde{g}^{00}\tilde{g}_{\alpha\mu}\partial_t H^\mu + \partial_\alpha H^0\}$ i $\mathrm{tr}(L) = \partial_t H^0$. La condició que $L^0_\alpha - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(L)\tilde{g}^0_\alpha = 0$ a M es tradueix en

$$\tilde{g}^{00}\tilde{g}_{\alpha\mu}\partial_t H^\mu + \{\partial_\alpha H^0 - \delta^0_\alpha\partial_t H^0\} = 0$$

L'expressió entre claus és nul·la (per a $\alpha = i$ els dos termes són zero, i per $\alpha = 0$ són idèntics) i com per hipòtesi $\tilde{g}^{00} \neq 0$ (M és una hipersuperfície espacial), obtenim el sistema $\tilde{g}_{\alpha\mu}\partial_t H^\mu = 0$ a M, que implica $\partial_t H^\mu = 0\ \forall\mu$, ja que $\det(\tilde{g}) \neq 0$. $\square$

Com a conseqüència, tenim que si $\tilde{g}$ és una solució de $\mathcal{E}_{\tilde{g}} = \chi T$ i les dades de Cauchy satisfan, a més a més de les equacions de lligam, la condició $H^\alpha(0, x^i) = 0$, llavors $\partial_t H^\alpha(0, x^i)|_U = 0$ i $H^\alpha(t, x^i)$ compleix un sistema d'equacions hiperbòlic, lineal i homogeni l'única solució del qual, per a les condicions inicials anteriors, és la idènticament nul·la. És a dir, existeix un $\varepsilon > 0$ tal que $H = 0$ en $U_\epsilon = U \times (-\varepsilon, +\varepsilon)$ la qual cosa implica que $\tilde{g}$ és una mètrica harmònica respecte $\hat{g}$ en U_ϵ i que $\mathcal{E}_{\tilde{g}} = \chi T$ és l'equació d'Einstein en coordenades harmòniques.

La condició $H = 0$ no suposa noves restriccions a les dades de Cauchy ja fixades sinó que determina els valors de $\partial_t\tilde{g}_{0\alpha}$ a M que encara eren arbitraris. Per arribar a uns resultats concrets, prendrem com a mètrica de referència $\hat{g} = -dt^2 + \gamma$, amb γ qualsevol mètrica de Riemann d'una varietat 3-dimensional. Recordem que $\Phi : (V, \tilde{g}) \longrightarrow (V, \hat{g})$ és harmònica si $H^\mu = \bar{g}^{\alpha\beta}(\bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} - \hat{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}) = 0$, on $\bar{g} = (\Phi^{-1})^*\tilde{g}$ és la mètrica *pull-forward* de $\tilde{g}$. El següent lema servirà per demostrar l'anul·lació d'alguns dels $\bar{\Gamma}$:

Lema 8. *Si en una base coordenada $\{t, x^1, x^2, x^3\}$ es compleix que $g(\partial_t, \partial_t) = -1$ i $g(\partial_t, \partial_i) = 0$ aleshores $\nabla_{\partial_t}\partial_t = 0$ i ∂_t és un camp geodèsic.*

Demostració. De $\tilde{g}(\partial_t, \partial_t) = -1$ es dedueix que $\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\partial_t}\partial_t, \partial_t) = 0$ i $\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_t, \partial_t) = 0$. De $\tilde{g}(\partial_t, \partial_i) = 0$, que $\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\partial_t}\partial_t, \partial_i) = -\tilde{g}(\partial_t, \tilde{\nabla}_{\partial_t}\partial_i)$. Per altra banda, com que $\tilde{\nabla}_{\partial_t}\partial_i - \tilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_t = [\partial_t, \partial_i] = 0$, tenim que $\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\partial_t}\partial_t, \partial_i) = -\tilde{g}(\partial_t, \tilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_t)$, que és nul com acabem de veure. Aleshores $\tilde{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0$ per ser nul el seu producte escalar amb tots els elements d'una base. $\square$

Immediatament obtenim de $\hat{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = \hat{\Gamma}^\alpha_{00}\partial_\alpha$ que els quatre símbols de Christoffel $\hat{\Gamma}^\alpha_{00}|_M$ són nuls. També necessitarem

$$\hat{\Gamma}^0_{ij}|_M = \frac{1}{2}\hat{g}^{00}[i,j;0] = -\frac{1}{2}\{\partial_i \hat{g}_{j0} + \partial_j \hat{g}_{i0} - \partial_t \gamma_{ij}\} = 0$$

perquè $\hat{g}_{i0} = 0$ i γ és una mètrica de M, independent de t.

En ser $\bar{g}_{ij} = g_{ij}$ sobre M tindrem que per definició de segona forma fonamental, $\bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_j = \nabla_{\partial_i}\partial_j + S_{ij}\partial_t$ (on recordem que ∇ és la connexió de g). En components

$$\bar{\Gamma}^\alpha_{ij}\partial_\alpha = \Gamma^k_{ij}\partial_k + S_{ij}\partial_t,$$

d'on es dedueix que

$$\bar{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} \quad ; \quad \bar{\Gamma}^0_{ij} = S_{ij} = \frac{1}{2}k_{ij}.$$

De $\bar{\nabla}_{\partial_t}\partial_j = \bar{\nabla}_{\partial_j}\partial_t = S^i_j\partial_i$ s'obté

$$\bar{\Gamma}^k_{0j} = S^k_j \quad ; \quad \bar{\Gamma}^0_{0j} = 0.$$

El símbols $\Gamma^\alpha_{00}|_M$ són iguals a

$$\begin{aligned} \Gamma^k_{00} &= \frac{1}{2}g^{kl}[0,0;l] = g^{kl}\partial_t g_{0l} \\ \Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2}g^{0l}[0,0;l] = -\frac{1}{2}\partial_t g_{00} \end{aligned}$$

Les tres primeres relacions d'harmonicitat són $\bar{g}^{\alpha\beta}(\bar{\Gamma}^k_{\alpha\beta} - \hat{\Gamma}^k_{\alpha\beta}) = 0$, és a dir, $g^{ij}(\bar{\Gamma}^k_{ij} - \hat{\Gamma}^k_{ij}) - (\bar{\Gamma}^k_{00} - \hat{\Gamma}^k_{00}) = 0$. Substituint,

$$g^{kl}\partial_t \bar{g}_{0l} = g^{ij}(\Gamma^k_{ij} - \hat{\Gamma}^k_{ij}).$$

Desenvolupant els símbols Γ de g obtenim

$$\partial_t \bar{g}_{0i}|_M = g^{jk}(\partial_k g_{ij} - \frac{1}{2}\partial_i g_{jk}) - g_{ij}\hat{\Gamma}^j_{kl}g^{kl}.$$

L'altra relació d'harmonicitat és $g^{ij}(\bar{\Gamma}^0_{ij} - \hat{\Gamma}^0_{ij}) - (\bar{\Gamma}^0_{00} - \hat{\Gamma}^0_{00}) = 0$, que porta immediatament a

$$\partial_t \bar{g}_{00}|_M = -g^{ij}k_{ij}.$$

1.7 El problema de Cauchy per a l'equació d'Einstein

L'equació d'Einstein $G = \chi T$ és intrínseca, a diferència de l'equació reduïda $\mathcal{E} = \chi T$, que és l'equació d'Einstein en coordenades harmòniques. L'enunciat del teorema de Cauchy de l'equació d'Einstein, doncs, ha de tenir un caire purament geomètric i en ell no es pot fer referència a cap sistema de coordenades en particular.

Per poder aplicar els resultats de la secció anterior, primer treballarem en un sistema de coordenades harmòniques i després demostrarem que tota solució de l'equació d'Einstein reduïda $\mathcal{E} = \chi T$ és difeomorfa a una solució de $G = \chi T$. L'existència d'un sistema de referència adaptat a la hipersuperfíce sobre la que es definiran les dades de Cauchy no és evident quan ens trobem en una varietat abstracte de dimensió 4. Per això és necessari precisar prèviament el concepte de hipersuperfície:

Definició 9. *Una hipersuperfície d'una varietat diferenciable V de dimensió 4 és un subconjunt M de V que es pot dotar d'estructura de varietat diferenciable de dimensió 3 de tal manera que*

1. *la inclusió canònica $i : M \to V$ és diferenciable.*
2. *en cada punt $x \in M$ l'aplicació diferencial $(di)_x : T_x(M) \to T_x(V)$ és injectiva.*
3. *la topologia de M com a varietat diferenciable coincideix amb la topologia induïda per la topologia de V.*

Proposició 10. *Sigui V una varietat diferenciable de dimensió n. Sigui M una hipersuperfície de V en el sentit de la definició anterior. Sigui N un camp vectorial (diferenciable) de V amb suport a M, transvers a M. Aleshores existeix un difeomorfisme d'un entorn U de M a V sobre un entorn U' de $M \times \{0\}$ a $M \times \mathbb{R}$.*

S'ha de dir que no tota subvarietat M de V admet un camp transvers. Aquest és el cas quan M no és orientable dins d'una varietat V orientable.

Demostració. Provarem en primer lloc que el camp N admet una extensió, és a dir, que existeix un entorn W de M a V i un camp vectorial diferenciable $\tilde{N}$ sobre W tals que per a tot $p \in M$ es té $\tilde{N}_p = N_p$. Efectivament, per a cada $p \in M$ sigui $(U_p; x^1, \ldots, x^n)$ una carta local de V, on U_p és un entorn de p a V i de forma que $U_p \bigcap M$ sigui una hipersuperfície de U_p d'equació $x^n = 0$. Sigui $W = \bigcup_{p \in M} U_p$. Considerem el recobriment $\{U_p\}_{p \in M}$ de W. Sigui $\{U_i\}_{i \in I}$ un refinament localment finit de $\{U_p\}_{p \in M}$ i $\{\nu_i\}_{i \in I}$ una partició de la unitat subordinada al recobriment anterior. Sobre cada U_i (que és domini d'una carta local), escollim una extensió $\tilde{N}_i$ de N. Definim sobre W el camp $\tilde{N} = \sum_{i \in I} \nu_i \tilde{N}_i$. Aquest camp diferenciable (i ben definit) compleix que $\tilde{N}_x = N_x$ en cada punt $x \in M$.

Pels teoremes d'existència i unicitat de solucions de sistemes d'equacions diferencials ordinàries, per a cada $x \in M$ existeix un interval $(-\epsilon_x, \epsilon_x)$ i una corba diferenciable

$$\gamma_x : (-\epsilon_x, \epsilon_x) \to W$$

tals que $\gamma_x(0) = x$ i que $t \to \gamma_x(t)$ és una corba integral de $\tilde{N}$. Considerem en la varietat producte $M \times \mathbb{R}$ l'obert U' format per les parelles (x, t) amb $x \in M$ i $t \in (-\epsilon_x, \epsilon_x)$. Òbviament U' és un obert de $M \times \{0\}$ a $M \times \mathbb{R}$. L'aplicació

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{\varphi} & W \\ (x,t) & \longrightarrow & \gamma_x(t) \end{array}$$

dóna un difeomorfisme entre U' i un entorn U de M a $W \subset V$.

Aquesta proposició es pot obtenir com un cas particular del teorema de l'entorn tubular (*Tubular Neighborhood Theorem*). $\square$

Sobre M estarà definida una mètrica de Riemann g i un tensor 2-covariant i simètric k, així com uns camps $\omega^{(i)}$ de V amb suport a M, però no tangents a M. A l'apartat 1.3 s'ha constatat que són les equacions de lligam obtingudes quan la direcció transversal és normal a M, $\mathcal{H}(g, k) = \chi F(g, \omega^{(i)})$ i $\gamma(g, k) = \chi X(g, \omega^{(i)})$, les que tenen un sentit geomètric, ja que no depenen de les coordenades. És natural doncs que en l'enunciat del problema de Cauchy privilegiem, entre totes les direccions transversals, aquella que és normal.

Teorema 11. *Sigui V una varietat diferenciable de dimensió 4 i M una hipersuperfície de V. Sigui $T(\bar{g}, \Omega^{(i)})$ una classe de tensors d'impulsió-energia a V, que depenen de m camps de la matèria $\Omega^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$ i d'una mètrica de Lorentz $\bar{g}$ de V. Suposem que en qualsevol sistema de coordenades adaptades a M,*

1. *T és d'ordre zero en $\bar{g}$ i en $\Omega^{(i)}$, és a dir, no conté cap derivada de $\bar{g}$ ni de $\Omega^{(i)}$.*
2. *fixada $\bar{g}$, l'equació $div_{\bar{g}}(T) = 0$ es pot escriure com un sistema hiperbòlic de primer ordre en $\{\Omega_i\}$, quasi-lineal i simètric.*
3. *la hipersuperfície M no és característica de $div_{\bar{g}}(T) = 0$.*

Suposem donades a M les següents dades de Cauchy:

- *un camp vectorial N, camp de V amb suport a M, transvers a M, això és, per a cada $x \in M$ es té $T_x(V) = T_x(M) \oplus < N_x >$.*
- *una mètrica de Riemann g i un camp tensorial covariant d'ordre 2 i simètric k.*
- *m camps tensorials $\omega^{(i)}$, camps de V amb suport a M, $i = 1, \ldots, m$.*

que compleixen les equacions de lligam $\mathcal{H}(g, k) = \chi F(g, \omega^{(i)})$ i $\gamma(g, k) = \chi X(g, \omega^{(i)})$ sobre M. Aleshores, en un entorn de M a V, existeixen una mètrica de Lorentz $\bar{g}$ i uns camps tensorials $\Omega^{(1)}, \ldots, \Omega^{(m)}$ tals que

- *substituint a la classe de tensors T les variables pels valors concrets de $\bar{g}$ i $\Omega^{(i)}$ es té $G_{\bar{g}} = \chi T$ i $div_{\bar{g}}(T) = 0$*

· *en tot punt $x \in M$ el camp vectorial N és unitari, $\bar{g}(N_x, N_x) = -1$, i N_x és perpendicular a $T_x(M)$ respecte a $\bar{g}_x$.*

· *la restricció de $\bar{g}$ a M és g i els valors dels camps $\Omega^{(i)}$ a M són $\omega^{(i)}$.*

· *per a tot $x \in M$ es té $N_x(\bar{g}) = k_x$.*

A més, si $\tilde{g}$ i $\Omega'^{(i)}$ són respectivament una mètrica de Lorentz i m camps tensorials sobre un entorn de M a V que compleixen les 4 condicions anteriors, existeix un difeomorfisme d'un entorn de M a V en un altre entorn de M a V que deixa fixes les dades de Cauchy i que porta $\bar{g}$ en $\tilde{g}$ i $\Omega^{(i)}$ en $\Omega'^{(i)}$ (unicitat llevat difeomorfismes que preserven les dades de Cauchy).

Demostració. Segons la proposició 10 existeix un difeomorfisme φ entre un entorn de M a V i un entorn de $M \times \{0\}$ a $M \times \mathbb{R}$, de manera que per a tot $x \in M$ es compleix que $\varphi(x) = (x, 0)$ i de forma que, si $x \in M$, $(D\varphi)(N_x)$ coincideix amb ∂_t per a $t = 0$, on t indica la coordenada natural de $\mathbb{R}$. Aquest difeomorfisme permet construir sobre un entorn de M a V una mètrica de Lorentz $\hat{g}$ de la forma $-dt^2 + \gamma$, essent γ una mètrica de Riemann qualsevol sobre M.

La condició que M no sigui característica de $\operatorname{div}_{\bar{g}}(T) = 0$ assegura que les dades de Cauchy no han de complir cap equació de lligam suplementària. I com que $\bar{g}|_M = g$ implica que M ha de ser una hipersuperfície espacial de $(V, \bar{g})$, les úniques equacions de lligam que han de satisfer les dades de Cauchy són $i(dt)(G - \chi T)|_M = 0$.

Sota les condicions imposades al tensor d'impulsió-energia T, l'equació $\mathcal{E}_{\bar{g}} = \chi T$ és del tipus $-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}(\tilde{g}, \partial\tilde{g}, \Omega) = 0$. Com M és espacial, no és una característica. Segons la proposició 5 existeix una única mètrica $\bar{g}$ i uns únics camps $\Omega^{(i)}$, solucions de $\mathcal{E}_{\bar{g}} = \chi T$ i de $\operatorname{div}_{\bar{g}}(T) = 0$, que prenen a M uns certs valors inicials fixats de vell antuvi. En un sistema de coordenades $\{x^i, t\}$ adaptat al difeomorfisme φ anterior en què la hipersuperfície inicial ve donada per $t = 0$, escollim que

· $\bar{g}_{ij} = g_{ij}$, $\bar{g}_{0i} = 0$, $\bar{g}_{00} = -1$,

· $\Omega^{(i)} = \omega^{(i)}$,

· $\partial_t \bar{g}_{ij} = k_{ij}$,

complint les equacions de lligam $\mathcal{H}(g, k) = \chi F(g, \omega^{(i)})$ i $\gamma(g, k) = \chi X(g, \omega^{(i)})$. Així, el camp ∂_t és normal i unitari i el tensor simètric k es pot interpretar com la segona forma fonamental de M a V. Fixem els valors de les altres derivades normals $\partial_t \bar{g}_{0\alpha}$ escollint $\hat{g} = -dt^2 + \gamma$ com a mètrica de referència i imposant que a M la mètrica $\bar{g}$ sigui harmònica respecte a $\hat{g}$, és a dir, que $H = 0$ sobre M. Segons els lemes 6 i 7, $H = 0$ en l'obert $U_\varepsilon = (-\varepsilon, +\varepsilon) \times U$ de $M \times \mathbb{R}$. Això prova l'harmonicitat de $\bar{g}$ respecte a la mètrica de referència $\hat{g}$ en un entorn de M a V. Per tant, l'equació $\mathcal{E}_{\bar{g}} = \chi T$ és l'equació d'Einstein escrita en coordenades harmòniques.

Pel que fa a la unicitat llevat difeomorfismes, considerem aquella aplicació Φ entre uns entorns $(U_\varepsilon, \bar{g})$ i $(U'_\varepsilon, \hat{g})$ per a la qual l'equació $\bar{\Gamma}^\alpha = \bar{g}^{\mu\nu}\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}$ expressa la condició de $\hat{g}$-harmonicitat de $\bar{g}$. En termes de $\tilde{g} = \Phi^*\bar{g}$ aquesta condició s'escriu

$$\tilde{g}^{\alpha\mu}\left(\frac{\partial^2\Phi^\beta}{\partial x^\alpha\partial x^\mu} - \frac{\partial\Phi^\beta}{\partial x^\nu}\tilde{\Gamma}^\nu_{\ \mu\alpha} + \frac{\partial\Phi^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\Phi^\nu}{\partial x^\mu}\hat{\Gamma}^\beta_{\ \nu\lambda}\right) = 0\ ,$$

que és una equació hiperbòlica i quasi-lineal de segon ordre en Φ i per tant ben posada. Les condicions inicials sobre Φ determinaran les dades de Cauchy per a $\tilde{g}$. Escollim que

1. Φ sigui la identitat sobre M.

2. el camp normal a M per $\bar{g}$ continuï essent perpendicular a M per $\tilde{g}$.

La primera condició implica que si X és un camp tangent a M, $(\Phi_*)|_M(X) = X$. La segona s'escriu, en unes coordenades adaptades a M en que ∂_t és normal, $(\Phi_*)|_M(\partial_t) = \partial_t$. Són equivalents, doncs, a $\Phi|_M = I$ i a $(\Phi_*)|_M = I$. Aquestes dues condicions asseguren que Φ és un difeomorfisme d'un entorn de M dins la varietat en ell mateix.

Com que Φ és la identitat a M, la transformada de g és ella mateixa. La segona condició imposada a l'aplicació Φ garanteix que la segona forma quadràtica de M tampoc canviarà, perquè k únicament depèn de g i de N. Per tant, l'aplicació Φ conserva tant les dades de Cauchy com les equacions de lligam.

El càlcul explícit ho confirma. Per a qualsevol tensor A,

$$\tilde{A}(u,v) = \phi^*\bar{A}(u,v) = \bar{A}(\phi_*u, \phi_*v) = \bar{A}(u,v)$$

on u i v tant poden ser vectors tangents a M com el vector normal ∂_t. En coordenades, els valors de $\bar{A} = (\phi^{-1})^*\tilde{A}$ sobre M s'obtenen de la llei de transformació

$$\tilde{A}_{\alpha\beta} = \frac{\partial\phi^\mu}{\partial x^\alpha}\bar{A}_{\mu\nu}\frac{\partial\phi^\nu}{\partial x^\beta}.$$

Derivant respecte a la direcció normal t,

$$\partial_t\tilde{A}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\phi^\mu\partial_t\bar{A}_{\mu\nu}\partial_\beta\phi^\nu + \partial_{t\alpha}\phi^\mu\bar{A}_{\mu\nu}\partial_\beta\phi^\nu + \partial_\alpha\phi^\mu\bar{A}_{\mu\nu}\partial_{t\beta}\phi^\nu$$

Com que $\partial_\alpha\phi^\beta|_M = \delta^\beta_\alpha$, tenim que $\partial_{i\alpha}\phi^\beta|_M = 0$, i obtenim $\partial_t\bar{g}_{ij} = \partial_t\tilde{g}_{ij}$.

Quant a les equacions de lligam, i ja que el vector normal a $\Phi(M) = M$ continua essent el mateix,

$$i(dt)(\tilde{G} - \chi\tilde{T})(\quad) = (\tilde{G} - \chi\tilde{T})(\quad, \partial_t) = (\bar{G} - \chi\bar{T})(\quad, \partial_t) = i(dt)(\bar{G} - \chi\bar{T})(\quad)\ .$$

La imatge per Φ^* de $\mathcal{E}$ és G i $\Phi^*(T) = T$ perquè per hipòtesi T és d'ordre zero en la mètrica. L'acció de Φ^* sobre $\mathcal{E}_{\bar{g}} = \chi T$ dóna lloc doncs a l'equació $G_{\tilde{g}} = \chi T$, on $\tilde{g} = \Phi^*\bar{g}$, amb les mateixes dades de Cauchy i les mateixes equacions de lligam $\mathcal{H}(g,k) = \chi F$ i $\delta(g,k) = \chi X$. Per tant, la mètrica $\tilde{g}$ és solució del problema de Cauchy per a l'equació d'Einstein $G_{\tilde{g}} = \chi T$ en U_ϵ. □

El procés fins el redactat d'aquest últim teorema ha anat posant de manifest la peculiaritat dels potencials $\tilde{g}_{0\alpha}$. Ni són del símbol principal (perquè no apareixen en el tensor de Ricci, ap.1.3), ni la parella $(\tilde{g}_{0\alpha}, \partial_t \tilde{g}_{0\alpha})$ forma part de les dades de Cauchy que intervenen en les equacions de lligam. L'arbitrarietat en els $\tilde{g}_{0\alpha}$ l'hem trencada en "mirar-nos" la hipersuperfície inicial des d'un punt de vista en el qual la direcció transversal t és normal, per així poder identificar k amb $\partial_t g$. L'arbitrarietat en els $\partial_t \tilde{g}_{0\alpha}$ implica que, fixades unes coordenades, totes aquelles mètriques solucions de l'equació d'Einstein que només difereixen en els valors inicials de $\partial_t \tilde{g}_{0\alpha}$ han de ser considerades indistingibles. Però totes elles són difeomorfes a la mètrica solució d'un sistema hiperbòlic ben posat amb les mateixes dades de Cauchy $(\tilde{g}_{\alpha\beta}, \partial_t \tilde{g}_{ij})$ i les mateixes equacions de lligam. El difeomorfisme el dóna una aplicació harmònica que fixa els $\partial_t \tilde{g}_{0\alpha}$ i redueix l'equació d'Einstein a una equació del tipus $\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta}$, on ara sí, tots els potencials gravitatoris apareixen en la part principal.

En la introducció del capítol 1 hem fet servir la condició $\mathrm{div}(G-\chi T)=0$, d'una forma intuïtiva, per afirmar que l'equació d'Einstein té 4 graus de llibertat. Les 4 equacions $\mathrm{div}(G-\chi T)=0$ no apareixen en el redactat del problema de Cauchy, perquè si tenim una solució de $G=\chi T$ evidentment també ho és de $\mathrm{div}(G-\chi T)=0$. Des d'aquest punt de vista, podem entendre $\mathrm{div}(G-\chi T)=0$ com una "sobrecondició". Però cal recordar que ha estat $\mathrm{div}(G-\chi T)=0$ el que ha permès estendre a l'exterior de M l'anul·lació de H (lema 6).

1.8 Un exemple: les equacions d'un medi holònom depenent d'un paràmetre

Les condicions imposades sobre el tensor d'impulsió-energia T en el teorema 11 anterior poden semblar molt restrictives. A continuació veurem en què es concreten en els medis holònoms i comprovarem que en un cas particular, els fluids perfectes, aquestes condicions es compleixen sempre que s'imposin restriccions "naturals" al tensor T.

Un medi holònom [32] ve descrit per un tensor d'impulsió-energia del tipus

$$T = r u \otimes u + \theta$$

on u és el camp unitari de velocitats, $\tilde{g}(u,u)=-1$, r és un escalar positiu (la pseudodensitat) i θ és un tensor simètric d'ordre 2, amb la propietat que la seva divergència és igual al gradient d'una certa funció f, això és, $\nabla_\alpha \theta^{\alpha\beta} = \tilde{g}^{\alpha\beta}\partial_\alpha f$. Suposarem que tant la pseudodensitat r com la funció f depenen d'un mateix paràmetre ζ, $r=r(\zeta)$ i $f=f(\zeta)$. Segons la secció anterior, cal comprovar que la hipersuperfície M, que en unes coordenades adaptades al difeomorfisme Ψ té per equació $t=0$, no és característica del sistema $\mathrm{div}(T)=0$. D'entrada disposem de 5 equacions, $\mathrm{div}(T)=0$ i $\tilde{g}(u,u)=-1$, i 5 incògnites, u^α i ζ. Però deduirem unes altres cinc equacions a partir de les inicials.

Desenvolupant l'equació $\operatorname{div}(T)=0$ obtenim

$$0=\nabla_\alpha T^{\alpha\beta}=\nabla_\alpha\{ru^\alpha u^\beta\}+\tilde{g}^{\alpha\beta}\partial_\alpha f=u(r)u^\beta+r\operatorname{div}(u)u^\beta+r(\nabla_u u)^\beta+\tilde{g}^{\alpha\beta}\partial_\alpha f. \tag{1.17}$$

Com que $u^\alpha u_\alpha=-1$, multiplicant per $-u_\beta$,

$$u(r)+r\operatorname{div}(u)-r\tilde{g}(u,\nabla_u u)-u(f)=0$$

El tercer sumand s'anul·la perquè $\tilde{g}(u,\nabla_u u)=1/2\nabla_u(\tilde{g}(u,u))=0$. Així, arribem a l'equació

$$u(r-f)+r\operatorname{div}(u)=0. \tag{1.18}$$

Les altres 4 equacions les obtindrem aïllant $u(r)$ de (1.18) i substituint en (1.17):

$$u(f)u^\beta+r(\nabla_u u)^\beta+\tilde{g}^{\alpha\beta}\partial_\alpha f=0. \tag{1.19}$$

La part principal del sistema format per (1.18)) i (1.19) s'obté canviant $\nabla_\alpha u^\beta$ per $\partial_\alpha u^\beta$. Anomenant B^0 i B^β els termes d'ordre menor i fent ús de $\partial_\alpha r=r'(\zeta)\partial_\alpha\zeta$ i $\partial_\alpha f=f'(\zeta)\partial_\alpha f$, el sistema anterior és

$$\left.\begin{aligned}(r'(\zeta)-f'(\zeta))u^\alpha\partial_\alpha\zeta+r\delta^\alpha_\beta\partial_\alpha u^\beta &= B^0\\ \\ (\tilde{g}^{\lambda\alpha}+u^\lambda u^\alpha)f'(\zeta)\partial_\alpha\zeta+ru^\alpha\delta^\lambda_\beta\partial_\alpha u^\beta &= B^\lambda\end{aligned}\right\}.$$

Les deltes δ de Kronecker són necessàries per poder escriure aquest sistema matricialment:

$$\begin{pmatrix}(r'(\zeta)-f'(\zeta))u^\alpha & r\delta^\alpha_\beta\\ \\ f'(\zeta)(\tilde{g}^{\lambda\alpha}+u^\lambda u^\alpha) & ru^\alpha\delta^\lambda_\beta\end{pmatrix}\partial_\alpha\begin{pmatrix}\zeta\\ \\ u^\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^0\\ \\ B^\lambda\end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

Amb les identificacions evidents, $A^\alpha\partial_\alpha\Psi=B$.

Proposició 12. *Considerem l'equació div $(ru\otimes u+\theta)=0$ en un espai-temps $(V,\tilde{g})$. Suposem que la divergència de θ és igual al gradient d'una certa funció f, i que r i f són funcions d'un mateix paràmetre ζ. Sigui M una hipersuperfície espacial per $\tilde{g}$. Aleshores, si*

1. *la funció $r(\zeta)$ és positiva en tot el seu domini.*

2. *les funcions $r(\zeta)$ i $f(\zeta)$ són de classe C^1, f' és sempre positiva i $\dfrac{r'}{f'}>2$,*

l'equació div $(ru\otimes u+\theta)=0$ es pot escriure, en unes coordenades adaptades a M, com un sistema simètric i hiperbòlic de primer ordre per al qual la hipersuperfície M no és característica.

Demostració. Considerem aquelles coordenades en les quals M ve donada per $t = 0$. M serà característica si el determinant de la matriu $A^\alpha \xi_\alpha$ s'anul·la. Però com la 1-forma normal de M és $\xi_\alpha = \delta^0_\alpha$, tenim que $A^\alpha \xi_\alpha = A^\alpha \delta^0_\alpha = A^0$. Utilitzant les propietats dels determinants,

$$\det(A^0) = \det \begin{pmatrix} (r' - f')u^0 & r\delta^0_\beta \\ \\ f'(\tilde{g}^{\lambda 0} + u^\lambda u^0) & ru^0\delta^\lambda_\beta \end{pmatrix} = r^4 \det \begin{pmatrix} (r' - f')u^0 & \delta^0_\beta \\ \\ f'(\tilde{g}^{\lambda 0} + u^\lambda u^0) & u^0\delta^\lambda_\beta \end{pmatrix}$$

$$= r^4 \det \begin{pmatrix} (r' - f')u^0 & 1 \\ \\ f'(\tilde{g}^{00} + (u^0)^2) & u^0 \end{pmatrix} \det(u^0 \delta^i_j)$$

$$= r^4 (u^0)^3 [(r' - f')(u^0)^2 - f'(\tilde{g}^{00} + (u^0)^2)]$$

$$= r^4 (u^0)^3 [(u^0)^2 (r' - 2f') - \tilde{g}^{00} f']$$

La condició $\det(A^0) = 0$ implica que o bé $r = 0$, o bé $u^0 = 0$ o bé

$$[(u^0)^2 (r' - 2f') - \tilde{g}^{00} f'] = 0.$$

La primera és impossible perquè, per hipòtesi, r és un escalar positiu. La segona tampoc és possible perquè u és un vector temporal. De l'última, aïllant $\tilde{g}^{00}$, obtenim que

$$\tilde{g}^{00} = (u^0)^2 \left(\frac{r'}{f'} - 2 \right).$$

Com $\tilde{g}^{00}$ és negatiu, $r'/f' < 2$. Però per hipòtesi, $r'/f' > 2$. En definitiva, M no és característica.

Només resta trobar alguna representació en la que el sistema d'equacions (1.20) sigui simètric i hiperbòlic, d'acord amb la definició 3. En lloc de treballar amb un sistema 5×5, considerarem com a variables el paràmetre ζ i els tres primers components del vector velocitat, (ζ, u^1, u^2, u^3), estant u^0 relacionat amb els u^i mitjançant la relació $\tilde{g}(u, u) = u^\alpha \tilde{g}_{\alpha\beta} u^\beta = -1$ (recordem que aquesta equació ha sigut utilitzada per obtenir la segona de les equacions de (1.20) i per tant es pot recuperar a partir d'elles). Tenim que

$$\nabla_\alpha u^\alpha \simeq \partial_\alpha u^\alpha = \partial_i u^i + \partial_t u^0.$$

Per relacionar $\partial_t u^0$ amb u^i només cal tenir present que $u_\alpha u^\alpha = -1$ implica $u_\alpha \partial_\beta u^\alpha \simeq 0$ d'on

$$u_0 \partial_\beta u^0 \simeq -u_i \partial_\beta u^i. \tag{1.21}$$

En particular, $\partial_t u^0 \simeq -v_i \partial_t u^i$, on s'ha definit $v_i \equiv u_i / u_0$. Aleshores $\partial_\alpha u^\alpha \simeq \partial_i u^i - v_i \partial_t u^i$, que es pot escriure $(\delta^\alpha_i - v_i \delta^\alpha_0)\partial_\alpha u^i$. Substituint a l'equació (1.18), que en components és

$$(r'(\zeta) - f'(\zeta)) u^\alpha \partial_\alpha \zeta + r \nabla_\alpha u^\alpha = 0,$$

i dividint per r s'obté

$$\frac{(r'(\zeta) - f'(\zeta))}{r}\, u^\alpha \partial_\alpha \zeta + (\delta_i^\alpha - v_i \delta_0^\alpha)\partial_\alpha u^i = A^0. \tag{1.22}$$

L'equació (1.19) escrita de forma intrínseca és

$$\nabla f + u(f)u + r\nabla_u u = 0. \tag{1.23}$$

Perquè aquesta equació formi un sistema simètric amb (1.22) és necessari que aparegui la combinació $(\delta_i^\alpha - v_i\delta_0^\alpha)\partial_\alpha\zeta = \partial_i\zeta - v_i\partial_t\zeta$. Per tant, haurem manipular les tres equacions per a $i = 1, 2, 3$ de (1.23) escrites en forma contravariant:

$$r\nabla_u u_i + \partial_i f + u(f)u_i = 0.$$

Hi reconeixem el terme $\partial_i f = f'\partial_i\zeta$, però $u(f)u_i = u_i(u^0\partial_t f + u^i\partial_i f)$ aporta termes no desitjats. En lloc de desenvolupar el factor $u(f)$, fem ús del component $\alpha = 0$ del sistema (1.23):

$$r\nabla_u u_0 + \nabla_t f + u(f)u_0 = 0.$$

Així,

$$u_i u(f) = -\frac{u_i}{u_0}\{r\nabla_u u_0 + \partial_t f\} = -v_i\{r\nabla_u u_0 + f'\partial_t\zeta\},$$

i obtenim el terme $-v_i f'\partial_t\zeta$ que ens faltava. Només resta per comprovar si el coeficient de la part principal de $\partial_\alpha u^i$ és simètric. Les parts principals de $\nabla_u u_i = u^\alpha\nabla_\alpha u_i$ i de $\nabla_u u_0$ són, tenint present (1.21),

$$\begin{aligned} u^\alpha\partial_\alpha u_i = u^\alpha\partial_\alpha(\tilde g_{i\beta}u^\beta) &\simeq u^\alpha\tilde g_{ij}\partial_\alpha u^j + u^\alpha\tilde g_{i0}\partial_\alpha u^0 = \tilde g_{ij}u^\alpha\partial_\alpha u^j - v_j\tilde g_{i0}u^\alpha\partial_\alpha u^j \\ u^\alpha\partial_\alpha u_0 = u^\alpha\partial_\alpha(\tilde g_{0\beta}u^\beta) &\simeq u^\alpha\tilde g_{0j}\partial_\alpha u^j + u^\alpha\tilde g_{00}\partial_\alpha u^0 = \tilde g_{0j}u^\alpha\partial_\alpha u^j - v_j\tilde g_{00}u^\alpha\partial_\alpha u^j\ . \end{aligned}$$

Finalment, la part principal de les tres equacions $r\nabla_u u_i + \nabla_i f + u(f)u_i = 0$ és

$$\begin{aligned} r\nabla_u u_i + \nabla_i f + u(f)u_i &\simeq f'\partial_i\zeta - v_i f'\partial_t\zeta + r\{\tilde g_{00}v_iv_j - \tilde g_{0j}v_i - \tilde g_{0i}v_j + \tilde g_{ij}\}u^\alpha\partial_\alpha u^j \\ &= (\delta_i^\alpha - v_i\delta_0^\alpha)f'\partial_\alpha\zeta + r\{\tilde g_{00}v_iv_j - \tilde g_{0j}v_i - \tilde g_{0i}v_j + \tilde g_{ij}\}u^\alpha\partial_\alpha u^j\ . \end{aligned}$$

En resum, les equacions $\operatorname{div}(ru\otimes u + \theta) = 0$ són equivalents al sistema

$$\left\{\begin{array}{lcccc} \dfrac{(r'-f')u^\alpha}{r}\partial_\alpha\zeta & + & (\delta_i^\alpha - v_i\delta_0^\alpha)\partial_\alpha u^i & = & B_0(\tilde g, \partial\tilde g) \\ (\delta_i^\alpha - v_i\delta_0^\alpha)\partial_\alpha\zeta & + & \dfrac{r}{f'}\{\tilde g_{00}v_iv_j - \tilde g_{0j}v_i - \tilde g_{0i}v_j + \tilde g_{ij}\}u^\alpha\partial_\alpha u^j & = & B_i(\tilde g, \partial\tilde g) \end{array}\right.$$

que és del tipus $A^\alpha\partial_\alpha\psi = B$, on $\psi = (\zeta, u^1, u^2, u^3)$ i les matrius simètriques A^α són

$$\begin{pmatrix} \dfrac{(r'-f')u^\alpha}{r} & (\delta_i^\alpha - v_i\delta_0^\alpha) \\ (\delta_i^\alpha - v_i\delta_0^\alpha) & \dfrac{r}{f'}u^\alpha\{\tilde g_{00}v_iv_j - \tilde g_{0j}v_i - \tilde g_{0i}v_j + \tilde g_{ij}\} \end{pmatrix}$$

Per poder classificar aquest sistema de primer ordre com a hiperbòlic, només resta per veure que la hipersuperficíe $t = 0$ és espacial per a l'equació d'Euler, és a dir, sota quines condicions la matriu

$$A^\alpha \xi_\alpha = A^\alpha \delta^0_\alpha = A^0 = \begin{pmatrix} \dfrac{r' - f'}{r} u^0 & -v_i \\ -v_i & \dfrac{r}{f'} u^0 \{\tilde{g}_{00} v_i v_j - \tilde{g}_{0j} v_i - \tilde{g}_{0i} v_j + \tilde{g}_{ij}\} \end{pmatrix}$$

és definida positiva:

$$(A^0\Phi, \Phi) = \frac{r' - f'}{r} u^0 (\Phi^0)^2 - 2 v_i \Phi^i \Phi^0 + \frac{r}{f'} u^0 (\tilde{g}_{00} v_i v_j + \tilde{g}_{ij} - \tilde{g}_{0i} v_j - \tilde{g}_{0j} v_i) \Phi^i \Phi^j$$
$$= \frac{r' - f'}{r} u^0 (\Phi^0)^2 - 2(v_i \Phi^i)\Phi^0 + \frac{r}{f'} u^0 \{\tilde{g}_{00} (v_i \Phi^i)^2 + \tilde{g}_{ij} \Phi^i \Phi^j - 2\tilde{g}_{0i} \Phi^i (v_j \Phi^j)\} > 0$$

si $\Phi \neq 0$. En qualsevol punt de la varietat V la mètrica de Lorentz $\tilde{g}$ admet la descomposició

$$\tilde{g} = -dt^2 + g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

essent g una mètrica de Riemann. Aleshores, $u_0 = \tilde{g}_{0\alpha} u^\alpha = -u^0$, $u_i = \tilde{g}_{i\alpha} u^\alpha = g_{ij} u^j$ i la condició $\tilde{g}(u, u) = -1$ per al camp u de velocitats del fluid s'escriu $-u_0^2 + g^{ij} u_i u_j = -1$. Dividint per u_0^2 s'obté

$$v_i g^{ij} v_j = g(v, v) = 1 - \frac{1}{u_0^2}.$$

Com que $g(v, v)$ ha de ser positiu, $u_0^2 > 1$. Escollim $u^0 > 1$ (si $u^0 < -1$, la forma quadràtica resulta ser definida negativa). Emprant la descomposició anterior de $\tilde{g}$,

$$(A^0\Phi, \Phi) = \frac{r' - f'}{r} u^0 (\Phi^0)^2 - 2g(v, \Phi)\Phi^0 + \frac{r}{f'} u^0 (-g^2(v, \Phi) + \|\Phi\|^2)$$

on $\|\cdot\|$ indica la norma per g. Si Φ és un vector tangent a M, que en una carta local s'escriu $\Phi = (0, \Phi^1, \Phi^2, \Phi^3)$,

$$(A^0\Phi, \Phi) = \frac{r}{f'} u^0 (\|\Phi\|^2 - g^2(v, \Phi))$$

Com que $g(v, v) = 1 - \frac{1}{u_0^2} < 1$ si $u^0 > 1$, per la desigualtat de Schwarz $g^2(v, \Phi) < \|\Phi\|^2$. Per tant, com que per les hipòtesis del teorema $r/f' > 0$, $(A^0\Phi, \Phi) > 0$.

Considerem ara el vector $\Phi' = \lambda e_0 + \Phi$, amb $e_0 = (1, 0, 0, 0)$ i Φ com abans. Llavors,

$$(A^0\Phi', \Phi') = \frac{r' - f'}{r} u^0 \lambda^2 - 2g(v, \Phi)\lambda + \frac{r}{f'} u^0 (\|\Phi\|^2 - g^2(v, \Phi))$$

Si el discriminant d'aquest polinomi de 2n grau en λ és negatiu, $(A^0\Phi', \Phi') > 0, \forall \Phi'$. Fent ús de $g^2(v,\Phi) < (1-\frac{1}{u_0^2})\|\Phi\|^2$ i sabent que $r'/f' > 2$, arribem a

$$\begin{aligned}
\Delta = 4g^2(v,\Phi) - 4\left(\frac{r'}{f'}-1\right)u_0^2(\|\Phi\|^2 - g^2(v,\Phi)) \\
= 4\left(g^2(v,\Phi)\left(1+\left(\frac{r'}{f'}-1\right)u_0^2\right) - \left(\frac{r'}{f'}-1\right)u_0^2\|\Phi\|^2\right) \\
< 4\left(\left(1-\frac{1}{u_0^2}\right)\left(1+\left(\frac{r'}{f'}-1\right)u_0^2\right) - \left(\frac{r'}{f'}-1\right)u_0^2\right)\|\Phi\|^2 \\
= -4\left(\frac{1}{u_0^2}+\left(\frac{r'}{f'}-2\right)\right)\|\Phi\|^2 < 0.
\end{aligned}$$

□

Els fluids perfectes vénen caracteritzats per un tensor d'impulsió-energia del tipus

$$T = (\rho+p)u\otimes u + p\tilde{g} \ ,$$

on p i ρ indiquen la pressió i la densitat en tot punt del fluid, relacionades per una equació d'estat $p = p(\rho)$. La derivada $p'(\rho)$ representa el quadrat de la velocitat de propagació de les ones hidrodinàmiques. En el sistema d'unitats emprat aquí la velocitat de la llum és $c = 1$, per la qual cosa sempre $p'(\rho) < 1$. Les equacions de la matèria $\mathrm{div}(T) = 0$ d'un fluid perfecte es coneixen amb el nom de *equacions d'Euler*. La divergència de pg és $\nabla_\alpha p\tilde{g}^{\alpha\beta} = \tilde{g}^{\alpha\beta}\partial_\alpha p$. Un fluid perfecte és per tant un medi holònom parametritzat per la densitat ρ, amb $r(\rho) = \rho + p(\rho)$ i $f(\rho) = p(\rho)$. Les dues hipòtesis del teorema anterior imposen que $\rho + p(\rho)$ sigui positiva en el domini de definició de ρ i que $\frac{1+p'}{p'} = \frac{1}{p'} + 1 > 2$, és a dir, que $p'(\rho) < 1$. Les condicions que garanteixen que les equacions d'Euler es puguin escriure com un sistema hiperbòlic són, doncs,

1. existeix una constant $\rho_0 > 0$ tal que $\rho \geq \rho_0 > 0$.
2. la funció $p(\rho)$ mai és negativa a l'interval $[\rho_0, +\infty]$.
3. la funció $p(\rho)$ ha de ser de classe C^1 i $0 < p'(\rho) < 1$.

Evidentment, es pot arribar a les mateixes condicions sense fer referència als medis holònoms ([7],[24],[37]).

CAPÍTOL 2

Els models cosmològics de Robertson-Walker

Un model cosmològic és una representació de l'univers a gran escala que, com tota teoria científica, ha d'arribar a formular unes lleis físiques que donin una explicació de les propietats observables de l'univers i, si és possible, poder predir-ne d'altres de desconegudes. A escala cosmològica, una estrella o fins i tot una galàxia té en relació al conjunt una grandària tan petita que es pot considerar com una partícula d'un fluid. L'univers s'interpreta com un continu de galàxies que flueixen, i on el moviment de cada galàxia ve representat per una geodèsica de la varietat espai-temps de vector tangent temporal que apunta cap el futur. Pot demostrar-se que, sota hipòtesis molt generals [26], el tensor d'impulsió-energia associat a aquest fluid de densitat ρ adopta la forma $T = \rho u \otimes u + \mathcal{P}$, on u és el camp geodèsic de velocitats de les partícules que el formen i $\mathcal{P}$ és un tensor simètric que depèn de la mètrica $\tilde{g}$ de l'espai-temps i que descriu les interaccions internes del fluid. Els models més senzills són, primer, els de Friedmann, en què $\mathcal{P} = 0$ i $T = \rho u \otimes u$. Es diu aleshores que el fluid està constituït per *pols.* I segon, els de Robertson-Walker, en els quals la matèria que forma l'univers es comporta com un fluid perfecte amb $\mathcal{P} = pu \otimes u + p\tilde{g}$ i el tensor d'impulsió-energia corresponent igual a

$$T = (\rho + p)u \otimes u + p\tilde{g} \ .$$

Les funcions densitat d'energia ρ i pressió p estan relacionades per una equació d'estat. En aquests models es considera que l'univers és isòtrop, tal i com afirma la llei de Hubble, que postula que les galàxies s'allunyen unes de les altres a una velocitat directament proporcional a la distància que les separa, independentment de la posició que ocupen unes de les altres (la isotropia implica homogeneïtat, però un univers pot ser homogeni sense ser isòtrop). Es pot demostrar [26] que aleshores la mètrica de l'espai-temps, en una carta local (x^i, t), adopta la forma

$$\tilde{g} = -dt^2 + \zeta^2(t)g \quad t \in I.$$

on g és una mètrica de Riemann de curvatura seccional K constant. La funció $\zeta(t)$ està relacionada amb la distància entre les galàxies: si $\zeta(t)$ augmenta amb el temps l'univers s'estarà expandint, en cas contrari s'estarà contraent. Com ζ només depèn del temps aquesta expansió o contracció de l'univers és isòtropa. Es compleix que $\zeta(t) \to 0$ quan t tendeix a un cert t_0 (principi de l'univers). En els casos $K = 0, -1$ no hi ha final de l'univers (es parla d'universos *oberts*) i $\dot{\zeta}(t) > 0$ (l'univers s'expandeix). En canvi, quan $K = 1$ l'univers és finit (universos *tancats*) i existeix un temps t_1 entre l'inici i el final de manera que si $t < t_1$ aleshores $\dot{\zeta}(t) > 0$ i si $t > t_1$, $\dot{\zeta}(t) < 0$ (l'univers primer s'expandeix i després es contrau). Multiplicant la funció $\zeta(t)$ per una constant adequada, sempre es podrà aconseguir que K prengui un dels valors

$0, 1$ ó -1. De les hipòtesis fetes es dedueix també que la densitat ρ i la pressió p només depenen del temps t.

La forma $\tilde{g} = -dt^2 + \zeta^2(t)g$ de la mètrica suggereix prendre com a espai-temps una varietat producte del tipus $V = S \times I$, essent (S, g) una varietat de Riemann, completa i simplement connexa, de curvatura seccional K constant, i I un interval de $\mathbb{R}$. Assignem a ∂_t, que és un vector temporal i unitari, aquella orientació que apunta cap el futur. Obtenim així una foliació d'hipersuperfícies espacials $M_t = S \times \{t\}$, t fix, on $\tilde{g}|_{M_t} = g_t = \zeta^2(t)g$ (fig.1). La coordenada t representa el temps comú a totes les galàxies i per a t fix, $M_t = S \times \{t\}$ és l'espai comú a tots els observadors. En ser la curvatura K constant, aquest espai comú és homogeni i isòtrop. El camp u de velocitats és ∂_t perquè el fet que $\tilde{g}_{00} = -1$ i $\tilde{g}_{0i} = 0$ en tota la varietat indica que ∂_t és un camp geodèsic, ortogonal a cada hipersuperfície (lema 8). Podem imaginar l'espai-temps com una família de "llesques" (*slices*), una per a cada valor de t, i on cada geodèsica φ_t representa el moviment d'una galàxia.

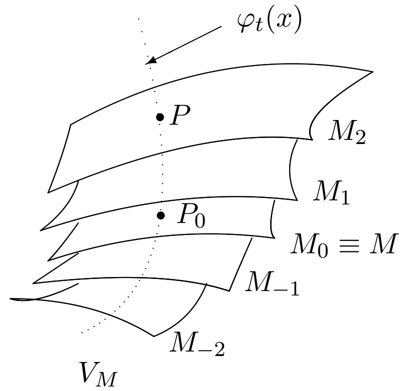

Figura 1: l'espai-temps vist com un continu d'hipersuperfícies espacials.

Aquest esquema permet percebre l'espai-temps com un objecte tridimensional que evoluciona amb el temps. Tot i ser molt visual, la primera qüestió que hom es pot plantejar és si tota varietat de Lorentz admet una foliació de superfícies espacials. En segon lloc, si $\tilde{g}$ ha de ser del tipus $-dt^2 + g_t$, és clar que el problema de Cauchy de l'equació d'Einstein haurà de ser formulat en termes de la família $\{g_t\}$ de mètriques riemannianes. Les equacions de lligam sobre la hipersuperfície inicial seran les mateixes, $\gamma(g_0, k_0) = \chi X_0$ i $\mathcal{H}(g_0, k_0) = \chi F_0$. Però per completar el plantejament manca saber quines són les equacions que ha de complir el parell (g_t, k_t) (les equacions d'evolució). I encara una última qüestió: en la formulació 4-dimensional del problema de Cauchy les equacions que lliguen les dades inicials no només es compleixen sobre la hipersuperfície inicial sinó en tot l'entorn on demostra l'existència de la solució $\tilde{g}$ de $G = \chi T$, perquè les equacions de lligam són $G^0_\alpha = \chi T^0_\alpha$. Però en la formulació 3-dimensional caldrà algun resultat que asseguri que si les equacions de lligam es compleixen inicialment aleshores es verifiquen automàticament en qualsevol M_t.

2.1 La descomposició $3+1$.

Formalment l'equació d'Einstein $\tilde{\mathcal{R}} = \chi\{T - \frac{1}{2}\ \mathrm{tr}(T)\tilde{g}\}$ és equivalent als dos subsistemes

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{R}}_{ij} = \chi\{T_{ij} - \dfrac{1}{2}\ \mathrm{tr}_{\tilde{g}}(T)\tilde{g}_{ij}\} \\ G^0_\alpha = \chi T^0_\alpha \end{cases} \tag{2.1}$$

perquè en ambdós casos tenim el mateix nombre d'equacions, relacionades per $\tilde{\mathcal{R}}_{00} = \frac{2}{\tilde{g}^{00}}(G^0_0 + \tilde{g}^{ij}\tilde{\mathcal{R}}_{ij})$ i $\tilde{\mathcal{R}}_{0i} = \frac{1}{\tilde{g}^{00}}(G^0_i + \tilde{g}^{0j}\tilde{\mathcal{R}}_{ij})$.

Una primera propietat del sistema (2.1), ja verificada anteriorment, és que en la part principal de $\tilde{\mathcal{R}}_{ij}$ únicament apareixen les derivades segones $\partial_{tt}\tilde{g}_{ij}$ mentre que $G^0_\alpha = \chi T^0_\alpha$ no conté cap derivada d'ordre 2 en t de $\tilde{g}$. Una segona propietat, anomenada *involutiva* i que està demostrada en l'apèndix B, és la següent: si $(\tilde{g}, \Omega^{(i)})$ és una solució del problema d'integració en t de l'equació $\tilde{\mathcal{R}}_{ij} = \chi\{T_{ij} - 1/2\ \mathrm{tr}_{\tilde{g}}(T)\tilde{g}_{ij}\}$ amb unes dades inicials que compleixen en $t=0$ les equacions $G^0_\alpha = \chi T^0_\alpha$, aleshores $G^0_\alpha = \chi T^0_\alpha$ es compleix per a tot t. Si els sis components $\tilde{g}_{ij}(x, t_0)$ representen per a cada t_0 la mètrica de Riemann $g_{t_0}(x)$ d'una hipersuperfície espacial M_{t_0} d'equació $t = t_0$, el problema de Cauchy associat al sistema (2.1) resta dividit en dues parts ben diferenciades:

- la primera, consistent en trobar unes dades de Cauchy (g, k, ω) que compleixin les equacions de lligam $\mathcal{H}(g,k) = \chi F(g,\omega)$ i $\gamma(g,k) = \chi X(g,\omega)$ a M_0.
- la segona, la integració de les equacions d'evolució $\tilde{\mathcal{R}}_{ij} = \chi\{T_{ij} - \frac{1}{2}\ \mathrm{tr}_{\tilde{g}}(T)\tilde{g}_{ij}\}$ per a les dades de Cauchy anteriors.

En relació a sota quines condicions existeix una foliació d'hipersuperfícies espacials, existeix el següent resultat:

Proposició 13. *Sigui $\mathcal{T}$ un camp vectorial orientat respecte al temps i sigui $\{\varphi_t\}$ el grup uniparamètric local de $\mathcal{T}$. Aleshores, donada una hipersuperfície espacial M de V que és compacta, existeix un $\varepsilon > 0$ tal que $\varphi_t(x)$ està definit per a tot $x \in M$ i per a tot $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ i l'aplicació*

$$\begin{aligned} \Psi : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow V \\ (x, t) &\longrightarrow \varphi_t(x) \end{aligned}$$

és un difeomorfisme de la varietat producte $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ sobre un obert V_M de M a V.

Aquest difeomorfisme proporciona una família d'*embeddings* $\Lambda_t : M \to \varphi_t(M)$ amb la particularitat que per a cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, la subvarietat $M_t = \varphi_t(M)$ de V_M és una hipersuperfície espacial de V. Obtenim així una foliació $\{M_t\}$ d'hipersuperfíces espacials en un entorn de M (fig.1 anterior). Cada sistema de coordenades locals (x^1, x^2, x^3) de M dóna lloc, mitjançant Ψ, a un sistema de coordenades (t, x^1, x^2, x^3) adaptades a M, en el qual la coordenada t d'un punt qualsevol P de V_M ve donada per la hipersuperfície a la qual pertany. Les coordenades espacials $x = (x^i)$ seran les d'aquell punt P_0 de M que és de la mateixa corba integral que P. Evidentment, en aquestes coordenades tots els punts de M estan caracteritzats per l'equació $t = 0$. Els objectes definits a $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ s'identifiquen per Ψ amb els corresponents a V_M. Per exemple, M amb $\Psi(M \times \{0\}) = \varphi_0(M)$ i el camp ∂_t amb $\mathcal{T} = \varphi_*(\partial_t)$. Tot camp vectorial X de M genera una família X_t de camps tangents a les hipersuperfícies M_t mitjançant $(X_t)_x = X_{\varphi_t(x)} = (\varphi_t)_* X_x$. En concret a cada M_t tindrem la descomposició $\partial_t|_{M_t} = f_t N_t + U_t$ i si $g_t = \tilde{g}|_{M_t}$,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(x,t) = (-f_t^2(x) + g_t((U_t)_x, (U_t)_x))dt \otimes dt \\ + g_t((U_t)_x, \partial_i)(dt \otimes dx^i + dx^i \otimes dt) \\ + (g_t)_{ij} dx^i \otimes dx^j. \qquad (2.2)\end{aligned}$$

La funció f_t i el camp U_t de V_M s'anomenen *lapse function* i *shift vector*. Com que el parell (f, U) són coneguts a partir de la descomposició $\partial_t|_{M_t} = f_t N_t + U_t$, la mètrica de Lorentz $\tilde{g}$ solució de l'equació d'Einstein quedarà determinada una vegada coneguda la mètrica de Riemann $g_t(x) = g(t, x)$ solució del sistema (2.1). No hi ha cap equació que governi l'evolució de la funció f i del camp U, els quals per altra banda tampoc formen part de les dades de Cauchy. Poden per tant prendre valors arbitraris, donant lloc a quatre graus de llibertat.

La recerca d'uns (f, U), en principi arbitraris, o d'una relació entre ells, perquè les equacions d'evolució estiguin ben posades ha originat gran nombre d'articles i és encara un camp d'investigació en relació a la resolució numèrica de l'equació d'Einstein (refs.[25],[15],[16]). La dificultat rau en que, per mantenir l'esquema $3+1$ i només haver d'estudiar les equacions d'evolució anteriors, cal demostrar, com en el cas de les equacions de lligam, que si aquesta condició es compleix per a $t = 0$ automàticament es verifica a l'exterior de M. Per exemple, en les anomenades *coordenades de Gauss* succeeix justament el contrari: el lema de Gauss assegura que la condició $f = 1$ i $U = 0$ es compleix en un entorn de M si es verifica a M, però en canvi les equacions d'evolució, quan $f = 1$ i $U = 0$, no està demostrat que estiguin ben posades.

Les equacions d'evolució per a k s'obtenen de $\tilde{\mathcal{R}}_{ij} = \chi\{T_{ij} - 1/2 \ \mathrm{tr}_{\tilde{g}}(T)\tilde{g}_{ij}\}$, emprant l'expressió (1.12) per a $\tilde{\mathcal{R}}(X, Y)$ obtinguda en el capítol anterior, i definint $(Y_t)_{ij} = T_{ij}|_{M_t}$ i $\varrho_t = \ \mathrm{tr}_{\tilde{g}}(T)|_{M_t}$,

$$\frac{\partial k_t}{\partial t} = -L_{U_t} k_t + f_t(k_t \times k_t) + 2\nabla_t^2 f_t - 2 f_t \mathcal{R}_{g_t} - \frac{1}{2} f_t(\ \mathrm{tr}\, k_t) k_t + \chi f_t(2Y_t - \varrho_t g_t), \quad (2.3)$$

L'evolució de g ve donada per l'equació (1.14) escrita sobre qualsevol M_t:

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = f_t k_t - L_{U_t} g_t \ .$$

L'equació d'Einstein, que és una equació diferencial de segon ordre en $\tilde{g}$, ha quedat substituïda per un sistema diferencial de primer ordre que descriu la variació del parell (g_t, k_t) d'una hipersuperfície M_t a una altra.

2.2 Les equacions d'evolució d'un model de Robertson-Walker

Des del punt de vista del formalisme $3+1$ de l'apartat anterior, ara $f_t = 1$ i $U_t = 0$ en tota la varietat. En cada hipersuperfície M_t la relació entre la segona forma fonamental k_t i la mètrica $g_t = \zeta^2(t)g$ és

$$k_t = \frac{1}{f_t}(\partial_t g_t + L_{U_t} g_t) = \partial_t g_t = 2\zeta(t)\dot{\zeta}(t)g = 2\frac{\dot{\zeta}(t)}{\zeta(t)}g_t = 2Cg_t, \tag{2.4}$$

on $C = \frac{\dot{\zeta}(t)}{\zeta(t)}$.

En les equacions de lligam o en les d'evolució apareix el tensor de Ricci i la curvatura escalar de g_t. Però en una varietat de curvatura seccional constant K, el tensor de curvatura es pot escriure

$$R(X,Y)Z = K\{g(Z,Y)X - g(Z,X)Y\}$$

que dóna lloc a

$$R^r_{kij} = K(\delta^r_i g_{kj} - \delta^r_j g_{ki})\ .$$

De la relació anterior s'obté $\mathcal{R}_{kj} = R^r_{krj} = 2Kg_{kj}$. Tornant a contraure, $\mathrm{R} = g^{ij}\mathcal{R}_{ij} = 6K$. Per a una hipersuperfície M_t qualsevol, les connexions ∇_t de $g_t = \zeta^2(t)g$ i ∇ de g són iguals perquè en ser $\zeta^2(t)$ una constant, $g_t((\nabla_t)_X Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z)$ segons la fórmula de Riemann (0.1). Per tant, també el tensor de curvatura i el tensor de Ricci de g_t i g són iguals. La curvatura escalar de g_t és, però,

$$\mathrm{R}(g_t) = g_t^{ij}\mathcal{R}_{ij} = \frac{g^{ij}}{\zeta^2(t)}\mathcal{R}_{ij} = \frac{\mathrm{R}}{\zeta^2(t)} = \frac{6K}{\zeta(t)^2}.$$

Totes les transformacions necessàries per obtenir les equacions de lligam i l'equació d'evolució de g són

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{R}(g_t) = \dfrac{2Kg_t}{\zeta^2(t)} & \mathrm{R}(g_t) = \dfrac{6K}{\zeta^2(t)} & k_t = \dfrac{\partial g_t}{\partial t} = 2Cg_t \\
k_t \times_{g_t} k_t = 4C^2 g_t & k_t \cdot_{g_t} k_t = 12C^2 & \mathrm{tr}_{g_t} k_t = 6C \\
\dfrac{\partial k_t}{\partial t} = 2(C^2 + \dfrac{\ddot{\zeta}}{\zeta})g_t & F_t = T^0_0|_{M_t} = -\rho_t & X^i_t = T^i_0 = 0 \\
(Y_t)_{ij} = T_{ij}|_{M_t} = pg_t & \varrho_t = \ \mathrm{tr}_{\tilde{g}}(T)|_{M_t} = 3p_t - \rho_t &
\end{array} \tag{2.5}$$

Substituint aquestes expressions en les dues equacions de lligam (1.13) obtenim que $\gamma(g,k) = \chi X$ dóna la identitat $0 = 0$ mentre que $\mathcal{H}(g,k) = \chi F$ relaciona, a l'instant $t = 0$ (i per tant, en tot instant), les funcions ζ i ρ:

$$\left(\frac{\dot{\zeta}}{\zeta}\right)^2 + \frac{K}{\zeta^2} = \frac{\chi\rho}{3}. \tag{2.6}$$

La mètrica g_t evoluciona amb el temps d'acord amb l'equació (2.3) amb $f = 1$ i $U = 0$

$$\frac{\partial k_t}{\partial t} = (k_t \times k_t) - 2\mathcal{R}_{g_t} - \frac{1}{2}(\,\mathrm{tr}\, k_t)k_t + \chi\{2Y_t - \varrho_t g_t\},$$

que, tenint en compte (2.4) i les expressions anteriors, s'escriu

$$\frac{2\ddot{\zeta}}{\zeta} + 4\left(\frac{\dot{\zeta}}{\zeta}\right)^2 + 4\frac{K}{\zeta^2} = \chi(\rho - p)$$

Insertant l'equació (2.6) obtenim

$$-6\frac{\ddot{\zeta}}{\zeta} = \chi(3p + \rho) \tag{2.7}$$

L'evolució amb el temps dels camps de la matèria (la densitat ρ i el camp de velocitats u) s'obté de l'equació $\mathrm{div}(T)^\beta = \tilde{\nabla}_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$. De fet, en ser u geodèsic, l'equació d'evolució de u ha de ser $\nabla_u u = 0$. Efectivament, si T és del tipus $(\rho + p)u \otimes u + p\tilde{g}$, amb u unitari

$$\mathrm{div}(T) = \mathrm{div}\{(\rho + p)u\}u + (\rho + p)\tilde{\nabla}_u u + \tilde{\nabla} p\ , \tag{2.8}$$

on $\tilde{\nabla} p$ indica el gradient de p. De $\tilde{g}(u, u) = -1$ es dedueix $\tilde{g}(\tilde{\nabla}_u u, u) = 0$, així que

$$\tilde{g}(\,\mathrm{div}(T), u) = -\,\mathrm{div}\{(\rho + p)u\} + u(p)$$

Però $\tilde{g}(\mathrm{div}(T), u) = 0$ perquè $\mathrm{div}(T) = 0$ i obtenim $\mathrm{div}\{(\rho+p)u\} = u(p)$. Substituint a (2.8), l'equació $\mathrm{div}(T) = 0$ es converteix en

$$u(p)u + (\rho + p)\tilde{\nabla}_u u + \tilde{\nabla} p = 0,$$

és a dir,

$$\tilde{\nabla}_u u = -\frac{1}{\rho + p}\left(\tilde{\nabla} p + u(p)u\right).$$

Si $u = \partial_t$ i la densitat i la pressió són funcions només de t, en la base $\{\partial_i, \partial_t\}$ el segon membre és

$$(\tilde{\nabla}^0 p)\partial_t + \partial_t p \partial_t = (\tilde{g}^{00}\partial_t p + \partial_t p)\partial_t = (-\partial_t p + \partial_t p)\partial_t = 0$$

i $\tilde{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0$ en qualsevol base. En els models de Friedmann $(p = 0, \rho \neq 0)$, obtenim

$$\rho\tilde{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0$$

i sempre es compleix $\tilde{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0$, encara que ρ no depengui únicament de la coordenada t.

L'equació d'evolució de ρ s'obté de $\mathrm{div}(T) = 0$ expressada en coordenades. Primer cal relacionar els símbols de Christoffel de la mètrica $\tilde{g}$ amb g ó k. Per definició de la segona forma fonamental, $\tilde{\nabla}_i \partial_j = \nabla_i \partial_j + S_{ij}\partial_t$, és a dir,

$$\tilde{\Gamma}^\alpha_{ij}\partial_\alpha = \Gamma^k_{ij}\partial_k + S_{ij}\partial_t,$$

d'on es dedueix que

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} \quad ; \quad \tilde{\Gamma}^0_{ij} = S_{ij} = \frac{1}{2}k_{ij}.$$

De $\tilde{\nabla}_{\partial_t}\partial_j = \tilde{\nabla}_{\partial_j}\partial_t = S^i_j\partial_i$ s'obté

$$\tilde{\Gamma}^k_{0j} = S^k_j \quad ; \quad \tilde{\Gamma}^0_{0j} = 0.$$

Per últim de $\tilde{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0$,

$$\tilde{\Gamma}^\alpha_{00} = 0.$$

La condició $\tilde{\nabla}_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ s'escriu

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} + \tilde{\Gamma}^\beta_{\alpha\gamma}T^{\alpha\gamma} + \tilde{\Gamma}^\alpha_{\alpha\gamma}T^{\gamma\beta} = 0.$$

Els sumands $\tilde{\Gamma}^\beta_{\alpha\gamma}T^{\alpha\gamma}$ donen lloc a

$$\tilde{\Gamma}^\beta_{0\gamma}T^{0\gamma} + \tilde{\Gamma}^\beta_{i\gamma}T^{i\gamma} = \tilde{\Gamma}^\beta_{00}T^{00} + 2\tilde{\Gamma}^\beta_{0i}T^{0i} + \tilde{\Gamma}^\beta_{ij}T^{ij}.$$

Els sumands $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\alpha\gamma}T^{\gamma\beta}$ porten a

$$\tilde{\Gamma}^0_{0\gamma}T^{\gamma\beta} + \tilde{\Gamma}^i_{i\gamma}T^{\gamma\beta} = \tilde{\Gamma}^0_{0\gamma}T^{\gamma\beta} + \tilde{\Gamma}^i_{ij}T^{j\beta} + \tilde{\Gamma}^i_{i0}T^{0\beta}.$$

Tenint en compte les tres relacions

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} \quad ; \quad \tilde{\Gamma}^0_{0j} = 0 \quad ; \quad \tilde{\Gamma}^\alpha_{00} = 0 \ ,$$

deduïdes abans, l'equació $\tilde{\nabla}_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ s'expressa

$$0 = \partial_t T^{0\beta} + \partial_i T^{i\beta} + 2\tilde{\Gamma}^\beta_{0i}T^{0i} + \tilde{\Gamma}^\beta_{ij}T^{ij} + \tilde{\Gamma}^i_{ij}T^{j\beta} + \tilde{\Gamma}^i_{i0}T^{0\beta} \ . \tag{2.9}$$

Fent ús de les altres dues relacions

$$\tilde{\Gamma}^0_{ij} = \frac{1}{2}k_{ij} \quad ; \quad \tilde{\Gamma}^i_{0j} = \frac{1}{2}k^i_j \ .$$

La condició (2.9) per a $\beta = 0$ és, sabent que $T^{00} = T_{00} = -F$, que $T^{i0} = -T^i_0 = -X^i$ i que $T^{ij} = Y^{ij}$ (perquè $\tilde{g}_{ij} = g_{ij}$, $\tilde{g}_{i0} = 0$ i $\tilde{g}_{00} = -1$),

$$0 = -\partial_t F - \partial_i X^i + \frac{1}{2}k_{ij}Y^{ij} - \Gamma^i_{ij}X^j - \frac{1}{2}k^i_i F \ ,$$

és a dir,

$$\partial_t F = -\mathrm{div}_g X - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_g k)F + \frac{1}{2}k \cdot Y \ ,$$

Substituint les expressions necessàries de (2.5) arribem a

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{\zeta}}{\zeta} = 0.$$

que juntament amb (2.7) forma un sistema de dues equacions diferencials acoblades que determina l'evolució d'un univers Robertson-Walker.

CAPÍTOL 3

Generalització del concepte d'estabilitat lineal

L'estabilitat per linealització de l'equació d'Einstein en el buit $G(\tilde{g}) = 0$ ha estat àmpliament estudiada en la literatura, com ho demostra la gran quantitat d'articles existents (refs. [6], [11], [12], [14], [21], [22], [23]). A continuació descrivim el marc general d'aquest problema.

Sigui $f : X \to Y$ una aplicació diferenciable entre dos espais de Banach i $y_0 \in Y$. Suposem que es coneix una solució particular $x = x_0$ de l'equació $f(x) = y_0$, i que s'està interessat a trobar solucions de $f(x) = y_0$ pròximes a x_0. En el cas de l'equació d'Einstein en el buit s'ha de pensar que f és l'aplicació $\tilde{g} \to G(\tilde{g})$. Com que trobar solucions d'aquesta equació pot resultar força complicat (pensem per exemple en les EDPs no lineals), és costum resoldre l'equació linealitzada en el punt x_0

$$D_{x_0} f(h) = 0 \ ,$$

amb el supòsit que per a h prou petit, $x_0 + h$ serà pròxima a una solució exacta de la vertadera equació $f(x) = y_0$. Però estrictament l'únic que es pot assegurar és que $x_0 + h$ és una solució de $f(x) = y_0$ en primer ordre en h ja que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + D_{x_0} f(h) + O(\|h^2\|) = y_0 + O(\|h^2\|) \ .$$

Només si la direcció h és tangent en x_0 a una corba de solucions exactes de l'equació $f(x) = y_0$ té sentit afirmar que $x_0 + h$ serveix per aproximar una solució de $f(x) = y_0$.

Un exemple pot ser il·lustratiu. Considerem l'aplicació $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donada per $f(x^1, x^2, x^3) = ((x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2, , x^1 + x^2 + x^3)$ i l'equació $f(x) = 0$, de la qual coneixem la solució particular $x_0 = (0, 0, 0)$. Les corbes de solucions exactes venen donades per la intersecció del con $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$ i el pla $x^1 + x^2 + x^3 = 0$, és a dir, per les bisectrius d'equacions $\{x = 0, z = -y\}$ i $\{y = 0, z = -x\}$. En canvi, com que la matriu de l'aplicació diferencial en el punt $(0, 0, 0)$ és $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, segons l'equació linealitzada $D_{(0,0,0)} f(h) = (0, 0)$ qualsevol vector del pla $x^1 + x^2 + x^3 = 0$ donaria una bona direcció a partir del punt $(0, 0, 0)$, resultat evidentment fals.

Definició 14 (clàssica). *Una equació $f(x) = y_0$ és linealment estable (o estable per linealització) en $x = x_0$ si per a tota solució h de l'equació linealitzada $D_{x_0} f(h) = 0$ existeix una corba $\lambda \to x(\lambda)$ de solucions de l'equació original que és tangent a h en x_0.*

El següent teorema dóna una condició suficient per a l'estabilitat lineal d'una equació en el sentit de la definició 14 :

Teorema 15. *Sigui $f : X \to Y$ una aplicació diferenciable entre dos espais de Banach i $y_0 \in Y$. Sigui $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = y_0$. Aleshores si l'aplicació lineal* *tangent $D_{x_0}f$ és exhaustiva i el nucli de $D_{x_0}f$ té un suplementari topològic l'equació $f(x) = y_0$ és linealment estable en $x = x_0$.*

Demostració. Pel teorema de la funció inversa, si es compleixen les dues hipòtesis del teorema, el conjunt $f^{-1}(y_0)$ és una varietat diferenciable en un entorn de x_0, amb espai tangent el nucli de $D_{x_0}f$. Aleshores, que $h \in T_{x_0}X$ compleixi $D_{x_0}f(h) = 0$ vol dir que $h \in T_{x_0}(f^{-1}(y_0))$ i per definició d'espai tangent, existeix una corba $x(\lambda) \in f^{-1}(y_0)$ tangent a h. □

3.1 Una nova definició i un teorema associat

Fins ara hem parlat de l'equació d'Einstein en el buit. Però quan considerem la resolució de l'equació d'Einstein amb matèria, $G(\tilde{g}) = T$, on T és un cert tensor (no nul) d'impulsió-energia, la situació canvia una mica. Donat un tensor d'impulsió-energia T_0 per al qual coneixem una solució $\tilde{g}_0$ de l'equació d'Einstein (o sigui $G(\tilde{g_0}) = T_0$), estem interessats en les solucions $\tilde{g}$ pròximes a $\tilde{g}_0$, de l'equació $G(\tilde{g}) = T$ per a tots els T pròxims a T_0. En el cas anterior T sempre era nul (sempre el mateix). Ara, en canvi, donat qualsevol T pròxim a T_0 volem resoldre $G(\tilde{g}) = T$.

Per justificar aquest punt de vista, diguem que el mateix A.Einstein fa servir aquest procediment en els seus articles [18], [19] sobre cosmologia. En aquests escrits Einstein resol aproximadament l'equació $G(\tilde{g}) = \chi T$, per a un T petit, amb l'argument que, si la mètrica η de Minkowski compleix $G(\eta) = 0$, la mètrica $\tilde{g}$ solució de $G(\tilde{g}) = \chi T$ haurà de ser de la forma $\tilde{g} = \eta + \tilde{h}$, amb $\tilde{h}$ petit. Aleshores considera l'equació $D_\eta G(h) = \chi T$, per al mateix T. En la *gauge* $\mathrm{div}_\eta \psi = 0$, on $\psi = \tilde{h} - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_\eta \tilde{h})\eta$, aquesta darrera equació pot escriure's,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} \ .$$

La condició $\mathrm{div}_\eta \psi = 0$ no és físicament relevant perquè sempre es pot trobar una *gauge* en la qual es compleixi. És ben conegut que les solucions d'aquesta equació que s'anul·len a l'infinit vénen donades en termes dels potencials retardats per

$$\psi(x,t) = \frac{\chi}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{T(y, t \pm |x-y|)}{|x-y|}\, dy \ .$$

La situació general abstracta pot ser formulada en els següents termes: siguin X i Y dos espais de Banach i $f : X \to Y$ una aplicació diferenciable en un entorn U d'un punt $x_0 \in X$. Sigui $y_0 = f(x_0)$. Per a qualsevol $y \in Y$ donat, pròxim a $y_0 \in Y$, que escrivim en la forma $y = y_0 + q$, ara amb q proper a zero, volem trobar solucions pròximes a x_0 de l'equació $f(x) = y_0 + q$. Si, degut a la dificultat d'aquesta equació, optem per resoldre l'equació linealitzada $D_{x_0}f(h) = q$, tindrem que el fet que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + D_{x_0}f(h) + O(\|h^2\|) = y_0 + q + O(\|h^2\|) \ ,$$

no garanteix que $x_0 + h$, amb h petit, sigui propera a una solució exacta de $f(x) = y_0 + q$. Si aquest és el cas, direm que l'equació $f(x) = y$ és linealment estable en el punt $x_0 \in X$. Naturalment, caldrà precisar aquesta definició amb tot detall. Però observi's que, una vegada formalitzada, no coincidirà amb la definició 14 (clàssica) perquè allà l'equació que es considerava era $f(x) = y_0$, amb y_0 fix, mentre que aquí l'equació és $f(x) = y$ per a qualsevol y pròxim a y_0. La nova definició d'estabilitat per linealització en un punt, adaptada a la nova situació és la següent:

Definició 16. *Sigui $f : U \longrightarrow Y$ una aplicació contínuament diferenciable entre un obert U d'un espai de Banach X i un altre espai de Banach Y. Sigui $x_0 \in U$ i $y_0 = f(x_0)$. Per a qualsevol $q \in Y$ definim*

$$\begin{aligned} H_q &= \{x \in U \text{ solució de } f(x) = y_0 + q\} \\ L_q &= \{x \in U \,:\, x = x_0 + h,\ h \text{ solució de } D_{x_0} f(h) = q\}. \end{aligned}$$

Sigui F un subespai vectorial tancat de Y. Direm que l'equació $f(x) = y_0 + q$ és estable per linealització en el punt inicial x_0 segons la direcció del subespai F si

- *Existeix un entorn V de l'origen a F, un entorn W de l'origen a $L = \ker D_{x_0} f$, un entorn U' de x_0, $U' \subset U$, i unes aplicacions φ i ψ contínuament diferenciables*

$$\begin{array}{ccccccc} & F \times L & & U & \quad & F \times L & & U \\ & \bigcup & & \bigcup & & \bigcup & & \bigcup \\ \varphi : & V \times W & \longrightarrow & U' & & \psi : V \times W & \longrightarrow & U' \end{array}$$

  tals que per a tot $q \in V$ les aplicacions

$$\begin{aligned} \varphi_q : W &\longrightarrow H_q \cap U' & \qquad \psi_q : W &\longrightarrow L_q \cap U' \\ z &\longrightarrow \varphi(q, z) & z &\longrightarrow \psi(q, z) \end{aligned}$$

  són bijeccions contínues, d'inversa contínua, amb $\varphi_0(0) = x_0$ i $\psi_0(0) = x_0$ (és a dir, $H_q \cap U'$ és una varietat diferenciable parametritzada per φ_q i $L_q \cap U'$ és una varietat lineal parametritzada per ψ_q).

- *Per a cada $q \in V$ i cada $z \in W$ l'error $E_q(z) = \varphi_q(z) - \psi_q(z)$ en considerar $\psi_q(z) \in L_q \cap U'$ en lloc de $\varphi_q(z) \in H_q \cap U'$ està controlat per*

$$\lim_{(z,q) \to (0,0)} \frac{E_q(z)}{\sqrt{\|z\|^2 + \|q\|^2}} = 0 \ . \tag{3.1}$$

Quan F sigui tot Y direm simplement que $f(x) = y_0 + q$ és estable per linealització en un punt $x_0 \in U$.

De manera intuïtiva aquesta definició consisteix simplement a demanar que per a cada $q \in F$ (pròxim a zero) es puguin parametritzar el conjunt H_q de solucions de l'equació $f(x) = y_0 + q$ i el conjunt L_q de solucions de la linealitzada $D_{x_0} f(h) = q$ per un mateix espai vectorial de paràmetres L, de forma que la diferència entre la solució de l'equació linealitzada i la vertadera solució, totes dues corresponents a un mateix paràmetre z, compleixi la condició (3.1). S'ha escollit que L sigui el nucli de $D_{x_0}f$ perquè és l'espai que serveix habitualment per parametritzar l'equació linealitzada (fig.2)

Tot element $x = \psi_q(z)$ de L_q compleix l'equació $f(x) = y_0 + q$ en primer ordre perquè

$$f(x) = f(x_0) + D_{x_0}f(x - x_0) + \cdots = y_0 + D_{x_0}f(h) + \cdots = y_0 + q + \cdots .$$

És la garantia de que l'error $E_q(z)$ tendeix a zero més de pressa que $\sqrt{\|q\|^2 + \|z\|^2}$ el que permet afirmar que, per al mateix z, $\psi_q(z) \in L_q$ és una bona aproximació de $\varphi_q(z) \in H_q$, solució exacta de $f(x) - f(x_0) = q$.

Evidentment quan el subespai F de Y és $F = \{0\}$ la definició 16 ha de coincidir amb la definició d'estabilitat lineal en el buit, en la qual s'exigeix que tota solució de $D_{x_0}f(x) = 0$ sigui tangent a una corba $c(\lambda)$ de solucions de $f(x) = y_0$. La condició (3.1) implica l'equivalència d'ambdues definicions. En efecte, sigui h una solució de l'equació linealitzada, $D_{x_0}f(h) = 0$ (h serà un vector director de L_0, que és una varietat lineal). Sigui $r(\lambda) = \psi_0(\lambda h) = x_0 + \lambda h$, per a un h donat, una recta continguda a L_0. Volem provar que la corba $c(\lambda) = \varphi_0(\lambda h)$ de H_0, amb h fix, té h com a vector tangent en el punt de paràmetre $\lambda = 0$, és a dir, que $(d\varphi_0(\lambda h)/d\lambda)_{\lambda=0} = h$. Per la fórmula de Taylor,

$$\varphi_0(\lambda h) = x_0 + \left.\frac{d\varphi_0(\lambda h)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} \lambda + O(\lambda^2) .$$

Per tant,

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to 0} \frac{E_0(\lambda h)}{\|\lambda h\|} &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\varphi_0(\lambda h) - \psi_0(\lambda h)}{\|\lambda h\|} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\varphi_0(\lambda h) - (x_0 + \lambda h)}{\|\lambda h\|} \\ &= \frac{1}{\|h\|}\left(\left.\frac{d\varphi_0(\lambda h)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} - h\right) \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda}{|\lambda|} = \pm\frac{1}{\|h\|}\left(\left.\frac{d\varphi_0(\lambda h)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} - h\right) .\end{aligned}$$

La condició (3.1) exigeix que el límit anterior sigui nul, i per tant $\frac{d\varphi_0(\lambda h)}{d\lambda}|_{\lambda=0} = h$. És important tenir present que, tot i que H_0 és tangent a L_0 si f és linealment estable, en general H_q no és tangent a L_q quan $q \neq 0$ (fig.2).

En relació a la "nova" definició 16 podem enunciar el següent resultat:

Teorema 17. *Siguin X i Y dos espais de Banach, x_0 un element de X i*

$$f : U \longrightarrow Y$$

una aplicació contínuament diferenciable entre un cert entorn U de x_0 i Y. Suposem que aquest $x_0 \in X$ compleix l'equació $f(x) = y_0$, $y_0 \in Y$. Indiquem per L el nucli de $D_{x_0}f$ i suposem que L té un suplementari topològic S a X, $X = L \oplus S$, de manera que tot element de X es pot representar per un parell (z, u) amb $z \in L$ i $u \in S$. Aleshores, si l'aplicació lineal tangent

$$D_{x_0}f : X \longrightarrow Y$$

és exhaustiva, l'equació $f(x) = y_0 + q$ és linealment estable en x_0.

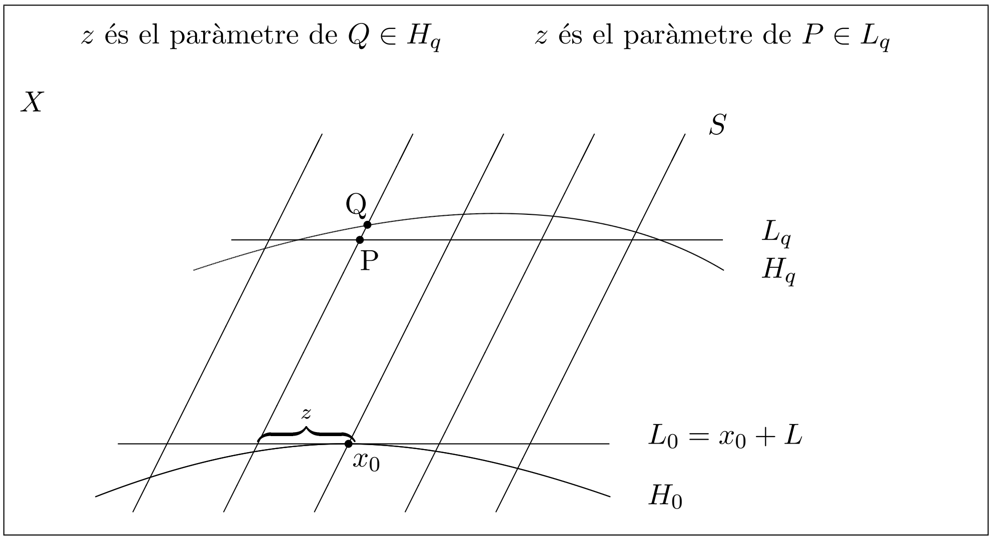

Figura 2: L_0 i H_0 són tangents, però no pas L_q i H_q. La nomenclatura és la corresponent a la del teorema 17.

Demostració. Si $(D_{x_0}f) : X = L \oplus S \longrightarrow Y$ és exhaustiva, la seva restricció a S dóna un isomorfisme de S a Y. Sigui $\alpha : Y \longrightarrow S$ l'isomorfisme invers. Per a tot $x \in X$, $x - x_0$ es descompondrà com $z + u$ amb $z \in L$ i $u \in S$. Per a tot $q \in Y$ la subvarietat L_q quedarà parametritzada per $\psi_q : z \to x = x_0 + z + \alpha(q)$, ja que

$$D_{x_0}f(x - x_0) = D_{x_0}f(z + \alpha(q)) = D_{x_0}f(\alpha(q)) = q \ .$$

Per ser f diferenciable en el punt x_0, tindrem $f(x_0 + z + u) = f(x_0) + (D_{x_0}f)(u) + \varepsilon(z, u)$, amb

$$\lim_{(z,u)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(z,u)}{\sqrt{\|z\|^2 + \|u\|^2}} = 0 \ .$$

Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} \gamma\colon \quad X &\longrightarrow L \times Y \\ x_0 + z + u &\longrightarrow (z, f(x_0 + z + u) - f(x_0)) \end{aligned}$$

Com que

$$\begin{aligned} D\gamma_{x_0} : \ X &\longrightarrow L \times Y \\ (z, u) &\longrightarrow (z, D_{x_0}f(u)) \end{aligned}$$

és isomorfisme, el teorema de la funció inversa ens assegura l'existència d'un entorn U' de x_0 a X i d'un entorn $W \times V$ de $\gamma(x_0) = (0, 0)$ a $L \times Y$ de manera que γ dóna un isomorfisme entre U' i $W \times V$. Considerem

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} : W \times V &\longrightarrow U' \subset X \\ (z, q) &\longrightarrow \gamma^{-1}(z, q) \end{aligned}$$

Per construcció $\varphi_q : z \longrightarrow \gamma^{-1}(z,q)$ és una parametrització de $H_q \cap U'$ per a tot $q \in V$. Vegem si $\gamma^{-1}(z,q)$ és de la forma $x_0 + z + u$ amb $u \in S$. En efecte, tenim $\gamma^{-1}(z,q) = x_0 + z' + u$ amb $z' \in L$ i $u \in S$. Hem de veure que $z' = z$. Escrivim

$$(z,q) = \gamma\gamma^{-1}(z,q) = \gamma(x_0 + z' + u) = (z', f(x_0 + z' + u) - f(x_0)).$$

Això implica $z = z'$. En $\gamma^{-1}(z,q) = x_0 + z + u$ l'element $u \in S$ depèn diferenciablement de z i q. Escrivim $\gamma^{-1}(z,q) = x_0 + z + \beta(q,z)$. Només ens resta ara provar la condició (3.1). Observem que

$$\gamma\varphi_q(z) = \gamma\gamma^{-1}(z,q) = (z,q)$$

i que

$$\gamma\psi_q(z) = \gamma(x_0 + z + \alpha(q)) = (z, f(x_0 + z + \alpha(q)) - f(x_0)).$$

Per tant

$$\gamma\psi_q(z) - \gamma\varphi_q(z) = (0,\ f(x_0 + z + \alpha(q)) - f(x_0) - q).$$

Ara bé,

$$f(x_0 + z + \alpha(q)) - f(x_0) - q = D_{x_0}f(\alpha(q)) + \varepsilon(z, \alpha(q)) - q.$$

Però $D_{x_0}f(\alpha(q)) = q$ i per tant $f(x_0 + z + \alpha(q)) - f(x_0) - q = \varepsilon(z, \alpha(q))$. Tindrem, doncs,

$$\|\gamma\varphi_q(z) - \gamma\psi_q(z)\|_{L\times Y} = \|\varepsilon(z, \alpha(q))\|_Y \ .$$

Com que el teorema de la funció inversa assegura que l'aplicació

$$(D\gamma)^{-1} : W \times V \longrightarrow \mathcal{L}(L \times Y, X)$$

és continua, donada una constant $C_1 > 0$ existeix un entorn $\mathcal{E}$ de $(0,0)$ a $W \times V$ tal que per a tot $z \in \mathcal{E}$ es té $\|(D\gamma)^{-1}(z)\| < C_1$. Si z_1 i z_2 són de $\mathcal{E}$, pel teorema del valor mig $\|\gamma^{-1}(z_1) - \gamma^{-1}(z_2)\| < C_1\|z_1 - z_2\|$. Apliquem això quan $z_1 = \gamma\varphi_q(z)$ i $z_2 = \gamma\psi_q(z)$. Suposem que z i q prou propers als orígens de L i Y per tal que z_1 i z_2 siguin de $\mathcal{E}$. Tindrem:

$$\|\varphi_q(z) - \psi_q(z)\| < C_1\|\gamma\varphi_q(z) - \gamma\psi_q(z)\| = C_1\|\varepsilon(z, \alpha(q))\| \ .$$

Sigui ara $C_2 = 1/\|\alpha\|$. Com que $\|\alpha(q)\| \le \|\alpha\|\,\|q\|$, tindrem

$$\frac{\|\varphi_q(z) - \psi_q(z)\|}{\sqrt{\|z\|^2 + \|q\|^2}} < \frac{C_1\|\varepsilon(z, \alpha(q))\|}{\sqrt{\|z\|^2 + C_2^2\|\alpha(q)\|^2}} \ .$$

Si $C_2^2 \ge 1$ es té

$$\sqrt{\|z\|^2 + \|\alpha(q)\|^2} \le \sqrt{\|z\|^2 + C_2^2\|\alpha(q)\|^2},$$

i si $C_2^2 < 1$ llavors es té

$$C_2\sqrt{\|z\|^2 + \|\alpha(q)\|^2} \le \sqrt{\|z\|^2 + C_2^2\|\alpha(q)\|^2}.$$

En tots dos casos finalment,

$$\frac{\|\varphi_q(z) - \psi_q(z)\|}{\sqrt{\|z\|^2 + \|q\|^2}} < C\frac{\|\varepsilon(z, \alpha(q))\|}{\sqrt{\|z\|^2 + \|\alpha(q)\|^2}} \longrightarrow 0 \ .$$

□

3.2 Aplicació a l'equació d'Einstein i exposició de resultats

El problema que ha motivat la nova definició d'estabilitat és el d'esbrinar si és correcte aproximar les mètriques $\tilde{g}$ que són solució de l'equació $G = \chi(T_0+\delta T)$, quan $G(\tilde{g}_0) = \chi T_0$, per mètriques del tipus $\tilde{g}_0 + \tilde{h}$, amb $\tilde{h}$ solució de l'equació linealitzada $D_{\tilde{g}_0}G(\tilde{h}) = \chi\delta T$. El tensor d'impulsió-energia, però, depèn de la mètrica $\tilde{g}$ i dels camps de la matèria, $T(\tilde{g}, \Omega^i)$, raó per la qual les variacions δT de T i $\tilde{h}$ de g no són independents. A més, s'ha de tenir present la condició suplementària $\mathrm{div}_{\tilde{g}}(T) = 0$, que cal acoblar amb $G = \chi T$. Per tant, només tindrà sentit aplicar la nova definició d'estabilitat al sistema format per $G = \chi T$ i $\mathrm{div}_{\tilde{g}}(T) = 0$ en una representació on totes les variables involucrades siguin independents.

L'estudi del problema de Cauchy de l'equació d'Einstein ha posat de manifest que les dades inicials han de complir les equacions de lligam $H(g, k) = \chi F(g, \omega^{(i)})$ i $\gamma(g, k) = \chi X(g, \omega^{(i)})$. Si el problema de Cauchy està ben posat, podem identificar tot parell (g, k), solució de les equacions de lligam per a uns certs $F(g, \omega^{(i)})$ i $X(g, \omega^{(i)})$, amb una mètrica de Lorentz $\tilde{g}$ solució de $G(\tilde{g}) = \chi T$. De fet, aquesta identificació podrà ser estesa fins el punt de dir que *l'equació d'Einstein $G(\tilde{g}) = \chi T$ és linealment estable en $\tilde{g}_0$ si les equacions de lligam són estables en* (g_0, k_0). Per veure-ho, i ja que l'estabilitat de l'equació d'Einstein s'ha d'estudiar quan $\tilde{g}_0$ representa una mètrica de Robertson-Walker, a partir d'ara ens restringirem al fluids perfectes els quals, com a cas particular de medis holònoms, tenen el problema de Cauchy ben posat. Suposem, doncs, que tots els tensors $T = T_0 + \delta T$ són del tipus $T = (\rho+p)u\otimes u + p\tilde{g}$ que compleixen les condicions establertes al final de l'apartat 1.8:

1. existeix una constant $\rho_0 > 0$ tal que $\rho \geq \rho_0 > 0$.

2. la funció $p(\rho)$ mai és negativa a l'interval $[\rho_0, +\infty]$.

3. la funció $p(\rho)$ ha de ser de classe C^1 i $0 < p'(\rho) < 1$.

Com que la pressió p i la densitat ρ estan relacionades per l'equació d'estat $p = p(\rho)$, tots aquests tensors vénen parametritzats per ρ i u, amb la condició que el camp de velocitats del fluid sigui unitari, $\tilde{g}(u, u) = -1$.

El problema de Cauchy ha estat plantejat en un sistema de coordenades (x^i, t) adaptat a la hipersuperfície inicial M, on t indica una direcció transversal, que escollirem normal, de forma que ∂_t representarà el camp unitari i normal a M. Escrivim la restricció de u a M en la forma $u = r\partial_t + v$, on r és un escalar ≥ 0 (u ha de ser temporal i apuntar cap el futur) i v és un camp tangent a M. La condició $\tilde{g}(u, u) = -1$ sobre M és $r = \sqrt{1 + g(v, v)}$. Per tant, (g, ρ, v) determinen el tensor T sobre M. Prendrem les dades de Cauchy (g, k, ρ, v) en espais de Sobolev convenients que ara anem a descriure. Recordem (ap.0.4) que $\mathcal{F}_s(M)$, $\mathcal{X}_s(M)$ i $\mathcal{S}_s(M)$ són els espais de Sobolev de funcions, 1-formes (camps vectorials) i de tensors covariants simètrics d'ordre 2, de grau de regularitat s. Donada una funció inicial f_0 sobre M, de classe C^∞ indiquem per $\mathcal{F}_s(f_0)$ l'espai de funcions f tals que $f - f_0 \in \mathcal{F}_s(M)$. El conjunt $\mathcal{F}_s(f_0)$ es topologitza imposant que l'aplicació $h \to h + f_0$ de $\mathcal{F}_s(M)$ a $\mathcal{F}_s(f_0)$ sigui un homeomorfisme. Anàlogament es defineixen els conjunts

$\mathcal{X}_s(\omega_0)$ i $\mathcal{S}_s(\alpha_0)$ per a un camp ω_0 i un 2-tensor covariant simètric α_0, de classe C^∞. Amb aquestes notacions, prendrem les dades de Cauchy (g,k,ρ,v) a l'espai $\mathcal{S}_s(g_0)\times\mathcal{S}_s(k_0)\times\mathcal{F}_{s-2}(\rho_0)\times\mathcal{X}_{s-1}(v_0)$, on s és un cert nombre enter positiu que s'especificarà més endavant i (g_0,k_0,ρ_0,v_0) són les dades de Cauchy corresponents a la mètrica $\tilde g_0$ i al tensor inicials T_0 inicials (de Robertson-Walker). Concretament, $g_0=\zeta^2(t_0)g$, $k_0=2\{\dot\zeta(t_0)/\zeta(t_0)\}g_0$, ρ_0 és la densitat inicial, i $v_0=0$. El parell (F,X) ve donat en funció de (g,ρ,v) per les expressions següents:

$$F=-T(\partial_t,\partial_t)|_M=-[\rho+p(\rho)]\tilde g^2(u,\partial_t)-p\tilde g(\partial_t,\partial_t)=p-[\rho+p(\rho)](1+g(v,v))$$
$$X_i=T(\partial_t,\partial_i)|_M=[\rho+p(\rho)]\tilde g(u,\partial_t)g(u,\partial_i)=-[\rho+p(\rho)]\sqrt{1+g(v,v)}\;v_i$$

Considerem

$$\begin{array}{rcl} H:\mathcal{S}_s(g_0)\times\mathcal{F}_{s-2}(\rho_0)\times\mathcal{X}_{s-1}(v_0) & \longrightarrow & \mathcal{S}_s(g_0)\times\mathcal{F}_{s-2}(F_0)\times\mathcal{X}_{s-1}(X_0)\\ (g,\rho,v) & \longrightarrow & (g,F,X)\end{array}$$

L'aplicació lineal tangent de H en (g_0,ρ_0,v_0) és

$$\begin{array}{rcl} D_{(g_0,\rho_0,v_0)}H:\mathcal{S}_s(M)\times\mathcal{F}_{s-2}(M)\times\mathcal{X}_{s-1}(M) & \longrightarrow & \mathcal{S}_s(M)\times\mathcal{F}_{s-2}(M)\times\mathcal{X}_{s-1}(M)\\ (h,f,w) & \longrightarrow & (h,f,-(\rho_0+p_0)w)\end{array}$$

Com que ρ_0+p_0 és positiu, l'aplicació anterior és un isomorfisme. Pel teorema de la funció inversa en espais de Banach es pot invertir H en un entorn de les dades inicials. Construïm l'aplicació Ψ obtinguda per composició de les següents aplicacions:

$$\Psi:\quad (g,k)\xrightarrow{\ \Phi\ }(g,(1/\chi)\mathcal{H}(g,k),(1/\chi)\gamma(g,k))\xrightarrow{\ H^{-1}\ }(g,\rho,v)\xrightarrow{\ \pi\ }(\rho,v)\ .$$

L'aplicació Ψ de $\mathcal{S}_s(g_0)\times\mathcal{S}_s(k_0)$ a $\mathcal{F}_{s-2}(\rho_0)\times\mathcal{X}_{s-1}(v_0)$, definida només en un entorn de (g_0,k_0), assigna a cada parell (g,k) pròxim a (g_0,k_0) l'únic parell (ρ,v) proper a (ρ_0,v_0) que compleix les equacions de lligam

$$\begin{cases}\mathcal{H}(g,k)=\chi F(g,\rho,v)\\ \gamma(g,k)=\chi X(g,\rho,v)\ .\end{cases}$$

A cada tensor d'impulsió-energia T correspon un parell (ρ,v) (que representa donar la distribució de matèria en un instant $t=t_0$). Llavors el problema de trobar una mètrica de Lorentz $\tilde g$ solució de l'equació d'Einstein per a aquest T donat ha quedat substituït pel problema de trobar aquell parell (g,k) solució de $\Psi(g,k)=(\rho,v)$, perquè segons el problema de Cauchy les dades inicials (g,k,ρ,v) sobre M determinen completament $\tilde g$ i T tals que $G(\tilde g)=\chi T$ i $\mathrm{div}_{\tilde g}T=0$. L'equació d'Einstein, en el marc dels fluids perfectes, és del tot equivalent a l'equació $\Psi(g,k)=(\rho,v)$. És en aquesta representació on té sentit plantejar l'estabilitat lineal: si (h_1,h_2) és una solució de $D_{(g_0,k_0)}\Psi(h_1,h_2)=(\delta\rho,\delta v)$ i l'equació $\Psi(g,k)=(\rho,v)$ és linealment estable en (g_0,k_0), aleshores (g_0+h_1,k_0+h_2) serveix per aproximar a una solució de $\Psi(g,k)=(\rho_0+\delta\rho,v_0+\delta v)$. A cada $(g_0+h_1,k_0+h_2,\rho_0+\delta\rho,v_0+\delta v)$ li correspon una mètrica de Lorentz $\tilde{g}'$ i un tensor d'impulsió-energia T', relacionats per $G(\tilde{g}') = \chi T'$, que sabem que existeixen, que són únics i que són de la forma $\tilde{g}_0 + \tilde{h}$ i $T_0 + \delta T$ amb $\tilde{h}$ i δT petits perquè, en ser el problema de Cauchy ben posat, les solucions depenen contínuament de les dades de Cauchy i a tota pertorbació de les dades inicials correspon una pertorbació de la solució. Llavors, per definició, prendrem la mètrica $\tilde{g}_0 + \tilde{h}$ com una aproximació vàlida a una solució de $G(\tilde{g}) = \chi(T_0 + \delta T)$. Aquest raonament pot ser estès a qualsevol classe de tensors d'impulsió-energia $T(\tilde{g}, \Omega^{(i)})$ sempre i quan el problema de Cauchy estigui ben posat i l'equació d'Einstein pugui ser identificada amb una equació del tipus $\Psi(g,k) = (\omega^{(i)})$. Pel que fa a aquest últim punt, ha estat important haver pogut aplicar el teorema de la funció inversa.

Adaptant-nos a la nomenclatura de la definició 16, l'aplicació $f : X \to Y$ és

$$\Psi = \pi \circ H^{-1} \circ \Phi : \quad \mathcal{S}_s(g_0) \times \mathcal{S}_s(k_0) \longrightarrow \mathcal{F}_{s-2}(\rho_0) \times \mathcal{X}_{s-1}(v_0) \ .$$

Segons el teorema 17 la condició perquè l'equació $\Psi(g,k) = (\rho, v)$ sigui linealment estable en un punt és que la diferencial de Ψ en aquest punt sigui exhaustiva. Però com que DH és un isomorfisme i π és la projecció canònica, l'exhaustivitat de $D\Psi$ dependrà exclusivament de $D\Phi$. En ser

$$(g,k) \xrightarrow{\ \Phi\ } (g, (1/\chi)\mathcal{H}(g,k), (1/\chi)\gamma(g,k))$$

concloem, amb abús de notació, que l'equació d'Einstein per a fluids perfectes és linealment estable en $\tilde{g}_0$ si i només si l'aplicació lineal tangent de

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_s(g_0) \times \mathcal{S}_s(k_0) & \xrightarrow{\ \Phi\ } & \mathcal{F}_{s-2}(\rho_0) \times \mathcal{X}_{s-1}(v_0) \\ (g,k) & \longrightarrow & (\mathcal{H}(g,k), \gamma(g,k)). \end{array}$$

és exhaustiva en el punt (g_0, k_0) i el seu nucli té un suplementari topològic (aquí es pot veure perquè els espais $\mathcal{F}(\rho_0)$ i $\mathcal{X}(v_0)$ tenen ordres de regularitat inferiors: com que en el terme R_g de $\mathcal{H}(g,k)$ apareixen derivades segones de g, $\mathcal{H}(g,k)$ és una funció amb l'ordre de regularitat dos unitats inferior; i en $\gamma(g,k)$ intervenen derivades primeres de k per la qual cosa $\gamma(g,k)$ és un camp vectorial amb regularitat $s-1$).

Exposició de resultats. Recordem que en un model de Robertson-Walker $(V, \tilde{g}, T)$ la mètrica de l'espai-temps $V = S \times I$ és $\tilde{g} = -dt^2 + \zeta(t)^2 g$ on (S, g) és una varietat de Riemann amb curvatura constant K i I un interval de $\mathbb{R}$; que $g_t = \zeta(t)^2 g$ s'interpreta com la mètrica riemanniana de la hipersuperfície $M_t = S \times \{t\}$; i que el tensor d'impulsió-energia ve donat per $T = (\rho + p) dt \otimes dt + p\tilde{g}$. Reescalant la funció $\zeta(t)$ de manera convenient, sempre es pot suposar que la constant K és -1, 0 ó 1. Llavors, l'equació d'Einstein $G(\tilde{g}) = \chi T$ serà linealment estable en la mètrica inicial $\tilde{g}$ de Robertson-Walker si la diferencial de Φ en el punt inicial (g_0, k_0), amb $\Phi(g_0, k_0) = (-\chi\rho_0, 0)$, compleix les condicions indicades anteriorment. Estrictament, en un model de R-W se suposa que la varietat (S, g) ha de ser completa i simplement connexa, fixant el tipus de varietat S per als tres tipus de curvatura: l'esfera unitat $\mathbb{S}^3$ en el cas $K = 1$, l'espai euclidià $\mathbb{R}^3$ quan $K = 0$ o bé l'espai hiperbòlic en el cas $K = -1$. Els dos models més corrents per a l'espai hiperbòlic són el semipla de Poincaré $\mathbb{H}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3,\ x^3 > 0\}$ amb mètrica

$$g = \frac{1}{(x^3)^2}(dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3).$$

i la bola unitat $\mathbb{B}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3,\ \parallel x \parallel < 1\}$ amb

$$g = \frac{4}{(1-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2)^2}(dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3).$$

Quan $K \leq 0$ (universos oberts, cap.2), la varietat S no és compacta, i en els universos tancats ($K = 1$) S és compacta. Evidentment, si no s'exigeix que S sigui simplement connexa són possibles altres casos com assegura el següent resultat: *tota varietat S completa de curvatura K constant és del tipus $\tilde{S}/\Gamma$ on $\tilde{S} = \mathbb{R}^n$ si $K = 0$, $\tilde{S} = \mathbb{S}^n$ si $K = 1$, $\tilde{S} = \mathbb{H}^n$ si $K = -1$, i Γ és un subgrup discret del grup de les isometries de $\tilde{S}$ que actua de manera lliure i pròpiament discontínua.* Els dos primers, $\mathbb{R}^n/\Gamma$ i $\mathbb{H}^n/\Gamma$, poden ser compactes o no compactes, orientables o no. En aquesta tesi s'estudiaran els casos $\mathbb{R}^3/\Gamma$ (tor pla) i $\mathbb{H}^n/\Gamma$ quan són compactes i orientables. Els resultats són:

varietat	*curvatura*	*compacitat*	*estabilitat*
$\mathbb{R}^3$	0	no	sí
$\mathbb{H}^3$	-1	no	sí
$\mathbb{S}^3$	1	sí	no
$\mathbb{R}^3/\Gamma$	0	sí	no
$\mathbb{H}^3/\Gamma$	-1	sí	sí

CAPÍTOL 4

L'estabilitat dels universos oberts de Robertson-Walker

Recordem que els universos oberts són aquells de curvatura constant nul·la o negativa. Encara que els espais funcionals en els que es demostra l'exhaustivitat de $D\Phi$ són diferents per a la mètrica euclídea que per a la mètrica hiperbòlica, el procediment és idèntic en ambdós casos.

4.1 L'aplicació diferencial $D_{(g,k)}\Phi$

Les diferencials $D_{(g,k)}\mathcal{H}$, $D_{(g,k)}\gamma$ de

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(g,k) &= \frac{1}{8}(k\cdot k - \operatorname{tr}^2(k) - 4\mathrm{R}) \\ \gamma(g,k)_i &= \frac{1}{2}\nabla^r(k_{ir} - \operatorname{tr}_g(k)g_{ir}). \end{aligned}$$

són els termes lineals en h i n de $\mathcal{H}(g',k')$ i de $\gamma(g',k')$ quan $g' = g+h$ i $k' = k+n$. Com totes les operacions algebraiques s'efectuen mitjançant la mètrica, primer de tot cal conèixer quins són els termes en h de la inversa de g':

$$\begin{aligned} g'^{-1} &= (g+h)^{-1} = [g(I+g^{-1}h)]^{-1} = (I+g^{-1}h)^{-1}g^{-1} \\ &= (I - g^{-1}h + g^{-1}hg^{-1}h - \cdots)g^{-1} = g^{-1} - g^{-1}hg^{-1} + g^{-1}hg^{-1}hg^{-1} - \cdots \quad . \end{aligned}$$

El terme $g^{-1}hg^{-1}$ es transforma com

$$(g^{-1}hg^{-1})^{ij} = g^{ik}h_{kl}g^{lj} = h^{ij}$$

L'últim terme s'escriu

$$(g^{-1}hg^{-1}hg^{-1})^{ij} = g^{ik}h_{kl}h^{lj} = h^i_l h^{lj} = (h\times h)^{ij}$$

Fins a ordre 2 en h, doncs,

$$g'^{ij} = g^{ij} - h^{ij} + (h\times h)^{ij} - \cdots \ . \tag{4.1}$$

El terme $k'\cdot k' = k'_{ij}g'^{il}g'^{jm}k'_{lm}$ de $\mathcal{H}(g',k')$ es igual a

$$\begin{aligned} &(k+n)_{ij}(g+h)^{il}(g+h)^{jm}(k+n)_{lm} \\ &\cong (k+n)_{ij}(g^{il}-h^{il})(g^{jm}-h^{jm})(k+n)_{lm} \\ &= k\cdot k + g^{il}g^{jm}(k_{ij}n_{lm} + n_{ij}k_{lm}) - (g^{il}h^{jm} + g^{jm}h^{il})k_{ij}k_{lm} \\ &= k\cdot k + 2k\cdot n - 2h\cdot(k\times k), \end{aligned}$$

on el signe $\cong$ indica igualtat llevat termes d'ordre >1 en h ó n. La diferencial del terme $\operatorname{tr}_g^2(k)$ és dues vegades la diferencial de $\operatorname{tr}_g(k)$ multiplicada per $\operatorname{tr}_g(k)$:

$$\begin{aligned}&2\operatorname{tr}_g(k)(\operatorname{tr}_{g+h}(k+n)-\operatorname{tr}_g(k))\cong 2\operatorname{tr}_g(k)\{(g^{ij}-h^{ij})(k+n)_{ij}-g^{ij}k_{ij}\}\\&=2\operatorname{tr}_g(k)(g^{ij}n_{ij}-h^{ij}k_{ij})=2\operatorname{tr}(k)\operatorname{tr}(n)-2\operatorname{tr}(k)h\cdot k\ .\end{aligned}$$

Per calcular els termes en h de $\mathrm{R}'=g'^{ij}\mathcal{R}'_{ij}\simeq(g^{ij}-h^{ij})\mathcal{R}'_{ij}$ és necessari saber els del tensor de Ricci $\mathcal{R}'$ i en definitiva del tensor de curvatura R'. Serà útil definir prèviament $Q(X,Y)=\nabla'_XY-\nabla_XY$. És un tensor simètric 2-covariant i 1-contravariant perquè és lineal en X i Y, i si f és una funció,

$$\begin{aligned}Q(fX,Y)&=\nabla'_{fX}Y-\nabla_{fX}Y=f\nabla'_XY-f\nabla_XY=fQ(X,Y)\\Q(X,fY)&=\nabla'_X(fY)-\nabla_X(fY)=X(f)Y+f\nabla'_XY-X(f)Y-f\nabla_XY\\&=fQ(X,Y)\end{aligned}$$

En components, si per conveni $Q(\partial_i,\partial_j)=Q^k_{ij}\partial_k$, tindrem que $Q^k_{ij}=\Gamma'^k_{ij}-\Gamma^k_{ij}$. Aleshores,

$$\begin{aligned}&R'(X,Y)Z=\nabla'_X\nabla'_YZ-\nabla'_Y\nabla'_XZ-\nabla'_{[X,Y]}Z\\&=\nabla'_X\{\nabla_YZ+Q(Y,Z)\}-\nabla'_Y\{\nabla_XZ+Q(X,Z)\}-\{\nabla_{[X,Y]}Z+Q([X,Y],Z)\}\\&=R(X,Y)Z+Q(X,\nabla_YZ)+\nabla_X(Q(Y,Z))+Q(X,Q(Y,Z))\\&-Q(Y,\nabla_XZ)-\nabla_Y(Q(X,Z))-Q(Y,Q(X,Z))-Q([X,Y],Z))\\&=R(X,Y)Z+\nabla_XQ(Y,Z)-\nabla_YQ(X,Z)+Q(X,Q(Y,Z))-Q(Y,Q(X,Z))\end{aligned}$$

Prenent $X=\partial_k$, $Y=\partial_j$ i $Z=\partial_i$,

$$R'^l_{ikj}=R^l_{ikj}+\nabla_kQ^l_{ij}-\nabla_jQ^l_{ik}+Q^l_{km}Q^m_{ij}-Q^l_{jm}Q^m_{ij}.$$

Tots els termes d'ordre 1 en h del tensor de curvatura R' provindran del termes en Q. Amb aquesta finalitat, considerem el producte escalar

$$2g'(Q(X,Y),Z)=2g'(\nabla'_XY,Z)-2g'(\nabla_XY,Z)$$

Emprant la fórmula de Riemann (0.1) en el terme $2g'(\nabla'_XY,Z)$ obtenim

$$\begin{aligned}2g'(Q(X,Y),Z)=&X(g'(Y,Z))+Y(g'(X,Z))-Z(g'(X,Y))-g'(X,[Y,Z])\\&-g'(Y,[X,Z])-g'(Z,[Y,X])-2g'(\nabla_XY,Z)\,.\end{aligned}$$

Substituint g' per $g+h$ i utilitzant altra vegada la fórmula de Riemann en sentit contrari per a la connexió ∇ compatible amb g deduïm que

$$\begin{aligned}2g'(Q(X,Y),Z))=&X(h(Y,Z))+Y(h(X,Z))-Z(h(X,Y))-h(X,[Y,Z])\\&-h(Y,[X,Z])-h(Z,[Y,X])-2h(\nabla_XY,Z).\end{aligned}$$

Recordant que $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ i que $X(h(Y,Z)) = \nabla_X h(Y,Z) + h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \nabla_X Z)$ arribem a

$$2g'(Q(X,Y),Z)) = \nabla_X h(Y,Z) + \nabla_Y h(X,Z) - \nabla_Z h(X,Y)\,.$$

En components, si $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ i $Z = \partial_k$,

$$Q^k_{ij} = \frac{1}{2} g'^{\,kl}(\nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij})\,. \tag{4.2}$$

Substituint $g'^{ij} \cong g^{ij} - h^{ij}$ en la fórmula anterior, els termes fins a ordre 1 en h de $\mathcal{R}'_{ij} = R'^k_{ikj}$ són

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}'_{ij} &\cong \mathcal{R}_{ij} + \nabla_k Q^k_{ij} - \nabla_j Q^k_{ik} \\
&\cong \mathcal{R}_{ij} + \frac{1}{2}\nabla^l(\nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij}) - \frac{1}{2}\nabla_j(\nabla_i h^k_k + \nabla^l h_{il} - \nabla^k h_{ik}) \\
&= \mathcal{R}_{ij} + \frac{1}{2}(\nabla^l\nabla_i h_{jl} + \nabla^l\nabla_j h_{il} - \nabla^l\nabla_l h_{ij}) - \frac{1}{2}\nabla_j\nabla_i \text{ tr}(h),
\end{aligned}$$

i per a R',

$$\mathrm{R}' = g'^{ij}\mathcal{R}'_{ij} \cong (g^{ij} - h^{ij})\mathcal{R}'_{ij} = \mathrm{R} - h^{ij}\mathcal{R}_{ij} + \nabla^i\nabla^j h_{ij} - \nabla^i\nabla_i \text{ tr}(h)\ .$$

Tot plegat,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(g',k') = \mathcal{H}(g,k) + \frac{1}{8}[&-2h\cdot(k\times k) + 2k\cdot n - 2\text{ tr}(k)\text{ tr}(n) + 2h\cdot k\ \text{ tr}(k) \\
&+ 4h\cdot\mathcal{R}(g) - 4\nabla^i\nabla^j h_{ij} + 4\nabla^i\nabla_i \text{ tr}(h)]
\end{aligned}$$

Abans de començar amb $D_{(g,k)}\gamma$ desenvolupem l'expressió del camp γ:

$$\gamma(g',k')_i = \frac{1}{2}\nabla'^j(k'_{ij} - \text{ tr}_{g'}(k')g'_{ij}) = \frac{1}{2}\{g'^{jl}\nabla'_l k'_{ij} - \partial_i \text{ tr}_{g'}(k')\}$$

El primer terme és:

$$\begin{aligned}
g'^{jl}\nabla'_l k'_{ij} &= g'^{jl}(\partial_l k'_{ij} - \Gamma'^m_{li} k'_{jm} - \Gamma'^m_{lj} k'_{im}) \\
&\cong (g^{jl} - h^{jl})\{\partial_l(k_{ij} + n_{ij}) - (\Gamma^m_{li} + Q^m_{li})(k_{jm} + n_{jm}) - (\Gamma^m_{lj} + Q^m_{lj})(k_{im} + n_{im})\} \\
&= g^{jl}\{\nabla_l k_{ij} + \nabla_l n_{ij} - Q^m_{li} k_{jm} - Q^m_{lj} k_{im}\} - h^{jl}\{\nabla_l k_{ij} + \nabla_l n_{ij}\}
\end{aligned}$$

El terme $g^{jl}Q^m_{li}k_{jm}$ dóna lloc, en primer ordre, a $\frac{1}{2}k^{jl}\nabla_i h_{jl}$ i el terme $g^{jl}Q^m_{lj}k_{im}$ a $k^j_i\nabla^l h_{lj} - \frac{1}{2}k_{ij}\nabla^j \text{ tr}(h)$.

D'altra banda, com que $\text{tr}_{g'}(k') \cong \text{ tr}(k) - \text{ tr}(n) - h\cdot k$ tenim que

$$\partial_i(\text{ tr}_{g'}(k')) = \partial_i(\text{ tr}(k)) - \partial_i \text{ tr}(n) - h^{jl}\nabla_i k^{jl} - k^{jl}\nabla_i h^{jl}$$

Substituint en l'expressió de $\gamma(g', k')$ arribem a

$$\gamma(g', k')_i = \gamma(g, k)_i + \frac{1}{2}[\,\nabla^j n_{ij} - \partial_i \ \mathrm{tr}(n) - h^{jl}\nabla_j k_{il} + h^{jl}\nabla_i k_{jl} + \frac{1}{2}(\nabla_i h_{jl})k^{jl} - (\nabla^j h_{jl})k_i^l + \frac{1}{2}\nabla^j \ \mathrm{tr}(h)k_{ij}]\ .$$

En definitiva,

$$\begin{aligned} D_{(g,k)}\mathcal{H}(h, n) &= \frac{1}{8}[\,-2h\cdot(k\times k) + 2k\cdot n - 2\ \mathrm{tr}(k)\ \mathrm{tr}(n) + 2h\cdot k\ \ \mathrm{tr}(k) \\ &\quad + 4h\cdot\mathcal{R}(g) - 4\nabla^i\nabla^j h_{ij} + 4\nabla^i\nabla_i\ \mathrm{tr}(h)\,] \\ D_{(g,k)}\gamma(h, n)_i &= \frac{1}{2}[\,\nabla^j n_{ij} - \partial_i\ \mathrm{tr}(n) - h^{jl}\nabla_j k_{il} + h^{jl}\nabla_i k_{jl} + \frac{1}{2}(\nabla_i h_{jl})k^{jl} \\ &\quad - (\nabla^j h_{jl})k_i^l + \frac{1}{2}\nabla^j\ \mathrm{tr}(h)k_{ij}\,]\ . \end{aligned}$$

En un model de Robertson-Walker, les fórmules (2.5) permeten simplificar notablement les expressions anteriors:

$$\begin{aligned} D_{(g_0,k_0)}\mathcal{H}(h, n) &= \frac{1}{8}[\,16C^2\ \mathrm{tr}(h) - 8C\ \mathrm{tr}(n) + \frac{8K}{\zeta^2(0)}\ \mathrm{tr}(h) - 4\nabla^i\nabla^j h_{ij} \\ &\quad + 4\nabla^i\nabla_i\ \mathrm{tr}(h)\,] \\ D_{(g_0,k_0)}\gamma(h, n)_i &= \frac{1}{2}[\,\nabla^j n_{ij} - \partial_i\ \mathrm{tr}(n) + 2C\ \partial_i\ \mathrm{tr}(h) - 2C\ \nabla^j h_{ji}\,]\ . \end{aligned} \tag{4.3}$$

on $C = \dot{\zeta}(0)/\zeta(0)$ és una constant.

4.2 El teorema d'estabilitat

A continuació s'enuncia el primer resultat d'aquesta tesi:

Teorema 18. *Els universos de Robertson-Walker de curvatura constant nul·la o negativa són linealment estables.*

Demostració. Segons la teoria del capítol anterior, per establir l'estabilitat lineal de l'equació d'Einstein en una mètrica $\tilde{g} = -dt^2 + \xi^2(t)g$ de Robertson-Walker cal demostrar que l'aplicació lineal tangent $D\Phi$ en el punt (g_0, k_0) és exhaustiva i el seu nucli té un suplementari topològic. Recordem que Φ és l'aplicació

$$\Phi\ \ : \mathcal{S}_s(g_0)\times\mathcal{S}_s(k_0) \longrightarrow \mathcal{F}_{s-2}(\rho_0)\times\mathcal{X}_{s-1}(0)$$

definida en un entorn del punt (g_0, k_0) amb imatge $\Phi(g_0, k_0) = (-\chi\rho_0, 0)$, i l'aplicació lineal tangent està definida entre

$$D_{(g_0,k_0)}\Phi\ \ : \mathcal{S}_s(M)\times\mathcal{S}_s(M) \longrightarrow \mathcal{F}_{s-2}(M)\times\mathcal{X}_{s-1}(M)\ .$$

Tots aquests espais són espais de Sobolev, els quals de moment s'han caracteritzat amb l'ordre de regularitat s perquè seran de diferent tipus en el cas de curvatura nul·la que de curvatura negativa. Però tret d'això, l'estructura de la demostració és idèntica en ambdós casos. Adaptant un procediment de Y.Choquet-Bruhat, A.Fischer i J.Marsden utilitzat en l'article [12] per a l'equació d'Einstein en el buit, la idea per a la demostració de l'exhaustivitat de $D\Phi$ és la de trobar uns (h, n) per als quals els components $D_{(g_0,k_0)}\mathcal{H}(h, n)$ i $D_{(g_0,k_0)}\gamma(h, n)$ puguin escriure's en termes d'operadors diferencials de segon ordre que siguin isomorfismes topològics entre uns espais de Sobolev adients. Per exemple, la laplaciana euclídea se sap que ho és entre certs espais de Sobolev sobre $\mathbb{R}^n$ [9, 10]. Tot seguit s'escriuran (sense concretar els tipus d'espais de Sobolev) els resultats sobre isomorfismes topòlogics necessaris per continuar amb la demostració, i després s'enunciaran amb tota precisió els teoremes i es demostraran aquells que són inèdits a l'apartat 4.4. Suposem, doncs, que els següents operadors són isomorfismes topòlogics, quan $M = \mathbb{R}^3$ i quan $M = \mathbf{H}^3$:

1. $F : Y \to \nabla^* L_Y g_0$, de $\mathcal{X}_s(M)$ a $\mathcal{X}_{s-2}(M)$
2. $\tau \to \Delta\tau - \frac{3K}{\zeta^2(0)}\tau$, de $\mathcal{F}_s(M)$ a $\mathcal{F}_{s-2}(M)$, és a dir, $\tau \to \Delta\tau$ quan $K = 0$ i $\tau \to \Delta\tau + \frac{3}{\zeta^2(0)}\tau$ quan $K = -1$

L'operador $F(X) = \nabla^* L_X g$ és igual per (0.4) a $\Delta_R - \mathcal{R} + d\delta$. Però en un model de Robertson-Walker, $\mathcal{R} = 2Kg$ (cap.2). Per tant,

$$F = \Delta_R - 2KI + d\delta \ . \tag{4.4}$$

La qüestió es ara trobar unes expressions algebraiques per als dos tensors (h, n) de forma que en substituir a (4.3) apareguin aquest tipus d'operadors. Per exemple, prenent $h = \alpha\tau g$ proporcional a un producte de la mètrica g per una funció τ qualsevol, els termes $\nabla^i\nabla^j h_{ij}$ i $\nabla^i\nabla_i \operatorname{tr}(h)$ esdevenen laplacianes (perquè $\nabla^i\nabla^j g_{ij}\tau = -\Delta\tau$ i $\nabla^i\nabla_i \operatorname{tr}(g\tau) = -3\Delta\tau$). Més evident és que si $n = L_Y g$, amb Y un camp vectorial qualsevol, $\nabla^j n_{ij}$ dóna lloc a $-\nabla^* L_Y g$. Però com $\operatorname{tr}(n) = -2\nabla^* Y$ el terme $\partial_i \operatorname{tr}(n)$ fa aparèixer $-2\partial_i\nabla^* Y$. Si volem que $D_{(g_0,k_0)}\gamma(h, n)$ sigui igual únicament a $\nabla^* L_Y g$ s'hauran de fer sorgir termes en $\partial_i\nabla^* Y$ per poder cancel·lar-lo. Això s'aconsegueix posant $n = L_Y g + g\nabla^* Y$, perquè $\nabla^j g_{ij}\nabla^* Y = \partial_i\nabla^* Y$ i $\operatorname{tr}(g\nabla^* Y) = 3\nabla^* Y$. La contribució dels dos últims termes $2C\partial_i \operatorname{tr}(h)$ i $2C\nabla^j h_{ji}$ quan $h = \alpha\tau g$ es compensa afegint un terme del mateix tipus τg en l'expressió de n, ja que $D_{(g_0,k_0)}\gamma(h, n)$ és quasi bé simètric en h i n.

En fi, per determinar els coeficients més adequats, substituïm $h = \alpha g\tau$, $n = \lambda L_Y g + \mu g\nabla^* Y + \nu g\tau$, $\operatorname{tr}(h) = 3\alpha\tau$ i $\operatorname{tr}(n) = (3\mu - 2\lambda)\nabla^* Y + 3\nu\tau$ en les equacions (4.3) per obtenir

$$D_{(g_0,k_0)}\mathcal{H}(Y,\tau) = \frac{1}{8}\left[48C^2\alpha\tau - 8C((3\mu - 2\lambda)\nabla^* Y + 3\nu\tau) + \frac{24\ K}{\zeta^2(0)}\alpha\tau - 8\alpha\Delta\tau\right]$$

$$D_{(g_0,k_0)}\gamma(Y,\tau) = \frac{1}{2}[-\lambda\nabla^* L_Y g + (2\lambda - 2\mu)\nabla\nabla^* Y + (4C\alpha - 2\nu)\nabla\tau \ .$$

Escollint $\lambda = \mu = -2$, $\alpha = 1$ i $\nu = 2C$ aconseguim que $D\gamma$ sigui F i que en $D\mathcal{H}$ desapareguin els termes d'ordre 1 en τ:

$$\begin{aligned} D_{(g_0,k_0)}\mathcal{H}(Y,\tau) &= \left(\frac{3\,K}{\zeta^2(0)}\tau + 2C\,\nabla^* Y - \Delta\tau\right) \\ D_{(g_0,k_0)}\gamma(Y,\tau)_i &= (\nabla^* L_Y g)_i\ . \end{aligned} \tag{4.5}$$

L'exhaustivitat de $D_{(g_0,k_0)}\Phi$ és ara immediata. Donat $(f,Z) \in \mathcal{F}_{s-2}(M) \times \mathcal{X}_{s-2}(M)$ existeix per hipòtesi un únic $Y \in \mathcal{X}_s$ tal que $\nabla^* L_Y g = Z$. Per a aquest $Y \in \mathcal{X}_s$, $D_{(g_0,k_0)}\mathcal{H}(Y,\tau) = f$ implica

$$\Delta\tau - \frac{3K}{\zeta^2(0)}\tau = 2C\,\nabla^* Y - f\,.$$

Com que, per hipòtesi, $\Delta - \frac{3K}{\zeta^2(0)}I$ és isomorfisme tant si $K = 0$ com si $K = -1$, existeix una única funció τ tal que $D_{(g_0,k_0)}\mathcal{H}(Y,\tau) = f$. A partir d'aquesta funció τ i d'aquest camp Y es construeixen h i n segons les expressions $h = g\tau$ i $n = -2L_Y g - 2g\nabla^* Y + 2C\,g\tau$. Per construcció, $D_{(g_0,k_0)}\Phi(h,n) = (f,Z)$. Per tant $D_{(g_0,k_0)}\Phi$ és exhaustiva.

Per veure que el nucli de $D_{(g_0,k_0)}\Phi$ té un suplementari topològic, considerem per a qualsevol element (h,n) el parell (h_1,n_1) de la forma

$$\begin{cases} h_1 = g\tau \\ n_1 = -2L_Y g - 2g\nabla^* Y + 2C\,g\tau \end{cases}$$

tal que $D_{(g_0,k_0)}\Phi(h_1,n_1) = D_{(g_0,k_0)}\Phi(h,n)$ (únic, ja que $D_{(g_0,k_0)}\Phi$ és isomorfisme restringit als parells (h_1,n_1)). Si escrivim

$$(h,n) = (h_1,n_1) + (h_2,n_2),$$

aleshores $(h_2,n_2) \in \ker\Phi$ i, en ser l'aplicació $(h,n) \to (h_1,n_1)$ contínua, el conjunt format pels (h_1,n_1) és un subespai vectorial tancat i constitueix per tant un suplementari topològic de $\ker\Phi$.

□

4.3 Isomorfismes entre espais de Sobolev en varietats de curvatura nul·la

És ben sabut que la funció $v(x) = v(x^1,\ldots,x^n) = |x|^{2-n}$ definida en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ per a $x \neq 0$ és una solució de l'equació de Laplace $\Delta v = 0$. Apliquem la fórmula de Green

$$\int_U (u\Delta v - v\Delta u)dv = \int_{\partial U}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial v}{\partial n}\right)d\sigma$$

en la regió $U = B_R - B_\epsilon$ delimitada per les boles B_R i B_ϵ, on $v(x) = |x|^{2-n}$ i $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ és de suport compacte, . El sentit de la normal n és el que apunta cap a l'exterior de ∂U. Escollim R suficientment gran perquè el suport de u estigui inclòs en la bola B_R i per tant la integral $\int_{\partial B_R}(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial v}{\partial n})d\sigma$ s'anul·li, i ϵ prou petit a fi d'aïllar la singularitat $x = 0$ de $v(x)$. Com que $\frac{\partial v}{\partial n} = C|x|^{1-n}$ i la mesura de ∂B_ϵ és proporcional a ϵ^{n-1},

$$\int_{\partial B_\epsilon} u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma = C\epsilon^{1-n}\int_{\partial B_\epsilon} ud\sigma = \frac{C}{\sigma(\partial B_\epsilon)}\int_{\partial B_\epsilon} ud\sigma$$
$$\int_{\partial B_\epsilon} v\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = C\epsilon^{2-n}\int_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = \frac{C\epsilon}{\sigma(\partial B_\epsilon)}\int_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial n}d\sigma.$$

Quan $\epsilon \to 0$, pel teorema de Lebesgue la primera integral tendeix a $u(0)$ i la segona a zero. Finalment, fent $R \to \infty$ i emprant $\Delta v = 0$ obtenim

$$u(0) = C\int_{\mathbb{R}^n} |y|^{2-n}\Delta u(y)dv.$$

Aplicant aquesta identitat a $(\tau_x u)(y) = u(x - y)$ arribem a

$$u(x) = C\int_{\mathbb{R}^n} |y|^{2-n}\Delta u(x-y)dv = C\int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{2-n}\Delta u(y)dv.$$

Així, recuperem u de la laplaciana mitjançant el seu producte de convolució amb l'anomenat *potencial de Riesz* $I_2(x) = C|x|^{2-n}$. La qüestió és ara trobar uns espais funcionals de Banach adequats en els quals l'operador $u \to \Delta u$ sigui un isomorfisme topològic d'invers $f \to I_2 * f$. En ser Δ un operador diferencial lineal de segon ordre, si triem $\Delta : \mathcal{F}_s^p(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}_{s-2}^p(\mathbb{R}^n)$ automàticament Δ és continu perquè $\|\Delta u\|_{s-2} \le \|u\|_s$ (recordem que $\mathcal{F}_s^p$ està constituït per tots aquells objectes de L^p amb les seves derivades generalitzades d'ordre $\le s$ també de L^p, veure l'apartat 0.4 dels preliminars.)

Succeeix, però, que els espais de Sobolev $\mathcal{F}_s^p(\mathbb{R}^n)$ no són els adequats, com evidencia el següent argument. Si $I_2 : \mathcal{F}_{s-2}^p(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}_s^p(\mathbb{R}^n)$ fos contínua i ja que $\Delta \circ I_2 = \mathrm{I}$, automàticament Δ passaria a ser un isomorfisme topològic: per una banda tota $f \in \mathcal{F}_s^p(\mathbb{R}^n)$ té una antiimatge donada per $I_2 * f$, i si I_2 és contínua, fent $u = \Delta f$ en $\|I_2 u\|_s \le \|u\|_{s-2}$, obtenim $\|f\|_s \le \|\Delta f\|_{s-2}$, amb la qual cosa $\Delta f = 0$ implica $f = 0$ (en general, sempre que $\| \ \|_A \le \| \ \|_B$, es diu que $\| \ \|_B$ controla $\| \ \|_A$, o bé que $\| \ \|_B$ és més forta que $\| \ \|_A$). S'hauria de complir, doncs, que

$$\|I_2 f\|_{p,s} \le C\|f\|_{p,s-2}\ , \qquad f \in \mathcal{F}_{s-2}^p(\mathbb{R}^n),$$

Per a $s = 2$ la desigualtat $\|I_2 f\|_{\mathcal{F}_2^p} \le C\|f\|_{\mathcal{F}_0^p}$ implica que

$$\|D^J I_2 f\|_p \le C\|f\|_p, \quad |J| \le 2.$$

En particular ha de succeir que $\|I_2 f\|_p \le C\|f\|_p$. Per veure que això és impossible, considerem les *funcions dilatades* $f_\lambda(x) = \lambda^{n/p} f(\lambda x), \quad \lambda > 0$. Les normes a L^p de f i de f_λ són iguals perquè

$$\|f_\lambda\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f_\lambda|^p(x)dv = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^n |f|^p(\lambda x)dv = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^n |f|^p(x)\frac{1}{\lambda^n}dv = \|f\|_p^p.$$

Per altra banda,

$$(I_2f)_\lambda(x) = \lambda^{n/p}\int_{\mathbb{R}^n}|\lambda x - y|^{2-n}f(y)dv = \lambda^{n/p}\int_{\mathbb{R}^n}|\lambda x - \lambda y|^{2-n}f(\lambda y)\lambda^n dv$$
$$= \lambda^{n/p}\lambda^2\int_{\mathbb{R}^n}|x-y|^{2-n}f(\lambda y)dv = \lambda^2 I_2(f_\lambda)(x).$$

Així, si $\|I_2f\|_p \leq C\|f\|_p$ fos cert, podríem escriure

$$\lambda^{-2}\|I_2(f)\|_p = \|I_2(f_\lambda)\|_p \leq C\|f_\lambda\|_p = C\|f\|_p,$$

per a qualsevol λ, desigualtat que és falsa quan $\lambda \to 0$.

Els espais de Banach adequats a aquest problema s'obtenen en afegir un pes en la norma de L^p: per a tot $s \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $p \in \mathbb{Z}^+$ i $\delta \in \mathbb{R}$ definim l'espai de funcions de Sobolev ponderat, que s'escriu $\mathcal{F}^p_{s,\delta}$, com la completació de l'espai $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$ de les funcions C^∞ amb suport compacte per la norma

$$\|f\|_{p,s,\delta} = \sum_{|k|\leq s}\left\|(D^kf)(x)\left(\sqrt{1+|x|^2}\right)^{|k|+\delta}\right\|_p .$$

Per exemple, per a $n = 3$ l'espai $\mathcal{F}^p_{s,0}$, amb $p > 3$, conté les funcions del tipus $f \sim 1/r$. En efecte: per a $r \to +\infty$, per a qualsevol $|k| = s$ obtenim $\int r^{-p(s+1)}(1+r^2)^{ps/2}r^2dr$ que convergeix si $p > 3$. En general, si $f \in \mathcal{F}^p_{s,\delta}$ amb $p > 3$ llavors $f = O(r^{-(\delta+1)})$. Si $\delta \geq 0$, $\|\ \|_{p,s} \leq \|\ \|_{p,s,\delta}$, és a dir, $\mathcal{F}^p_{s,\delta}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{F}^p_s(\mathbb{R}^n)$, i el lema de Sobolev continua essent cert: $\mathcal{F}^p_{s,\delta}(\mathbb{R}^n) \subset C^k(\mathbb{R}^n)$ si $s > \frac{n}{p} + k$.

El teorema sobre l'isomorfisme de la laplaciana euclídea és de M.Cantor[9]. L'isomorfisme de l'operador $Y \to \nabla^* L_Y g_0$ n'és un corol·lari.

Teorema 19 (Cantor). *Si $p > n/(n-2)$, $s \geq 2$, $-n/q < \delta < -2 + n/q$, essent p i q exponents conjugats ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), el laplacià euclideà Δ_e és un isomorfisme topològic entre els espais $\mathcal{F}^p_{s,\delta}(\mathbb{R}^n)$ i $\mathcal{F}^p_{s-2,\delta+2}(\mathbb{R}^n)$.*

Corol·lari 20. *L'operador $Y \to \nabla^* L_Y g$ és un isomorfisme topològic entre els mateixos espais del teorema anterior.*

Demostració del corol·lari. Si $\nabla^* L_Y g = Z$ l'antiimatge de Z ve donada explícitament per $Y_i = -\Delta^{-1}(Z_i + \frac{1}{2}\partial_j\partial_i\Delta^{-1}Z_j)$ i llavors l'isomorfisme de Δ implica el resultat. Efectivament, com que $K = 0$, per (4.4), $(\nabla^* L_Y g_0) = \Delta_R + d\delta I$, i com que a $\mathbb{R}^3$ totes les derivades commuten, $\Delta_R = \Delta$ per (0.2). Així que $(\nabla^* L_Y g_0)_i = \Delta Y_i - \partial_j\partial_i Y_j$. En substituir Y_i en el terme $\partial_j\partial_i Y_j$ per l'expressió anterior obtenim, tenint present que les derivades commuten i que $\partial_j\partial_j = -\Delta$,

$$\partial_j\partial_i Y_j = \partial_j\partial_i\Delta^{-1}(Z_j + \frac{1}{2}\partial_k\partial_j\Delta^{-1}Z_k) = \partial_j\partial_i\Delta^{-1}Z_j + \frac{1}{2}\partial_j\partial_j\Delta^{-1}\partial_i\partial_k\Delta^{-1}Z_k$$
$$= \partial_j\partial_i\Delta^{-1}Z_j - \frac{1}{2}\partial_i\partial_k\Delta^{-1}Z_k = \frac{1}{2}\partial_i\partial_j\Delta^{-1}Z_j.$$

Finalment,

$$\nabla^* L_Y g = \Delta Y_i - \partial_j \partial_i Y_j = Z_i + \frac{1}{2}\partial_j \partial_i \Delta^{-1} Z_j - \frac{1}{2}\partial_j \partial_i \Delta^{-1} Z_j = Z_i$$

□

4.4 Isomorfismes entre espais de Sobolev en varietats de curvatura negativa

Els dos operadors dels quals hem suposat que són isomorfismes són $\Delta + \frac{3}{\zeta^2(0)} I$ aplicat sobre funcions i $F(X) = \nabla^* L_X g$ sobre camps (o 1-formes), que en una varietat de dimensió n i curvatura constant $K = -1$ es pot escriure, equació (4.4), com $F = \Delta_R + 2I + d\delta$. La demostració en els dos casos és idèntica i obeeix un mateix patró: si $T : A \to B$ és un operador entre dos espais de Banach, cal que $\|T(x)\|_B \leq$ const $\|x\|_A$ i que $\|x\|_A \leq$ const $\|T(x)\|_B$ perquè T i T^{-1} siguin continus. Generalment, la desigualtat $\|T(x)\|_B \leq$ const $\|x\|_A$ resultarà evident, essent la contrària $\|x\|_A \leq$ const $\|T(x)\|_B$ la més difícil de provar, sobretot en el cas de l'operador F. Més d'una vegada es farà referència (aquí i a l'apèndix A) de l'article [8] de J.Bruna i J.Girbau, tant per fer esment de les tècniques allà utilitzades (convolució hiperbòlica de r-formes i regularització hiperbòlica) com per fer ús dels següents resultats (per seguir la notació de l'article abans citat, H^s_r és l'espai de Sobolev de les r-formes d'ordre de regularitat s, la lletra H implica normes a L^2):

- *(proposició 2.3 de [8]) Si M és una varietat amb curvatura constant i negativa, per a cada $s \geq 2$ i $0 < r < n$ existeix una constant positiva tal que*

  $$\|\alpha\|_s \leq \text{const } \|\Delta_R \alpha\|_{s-2}$$

  per a $\alpha \in H^s_r(M)$. Si $M = \mathbb{H}^n$ el resultat també és cert per a $r = 0, n$.

- *(lema 3.3 de [8]) Si en una una varietat riemanniana M de curvatura constant -1 una r-forma α i la seva laplaciana $\Delta_R \alpha$ són de $H^{s-2}_r(M)$, $0 < r < n$, aleshores $\alpha \in H^s_r(M)$. El resultat també és cert per a $r = 0, n$ quan $M = \mathbb{H}^n$.*

El teorema sobre l'isomorfisme de l'operador F entre els espais $\mathcal{X}_{s+2}(\mathbb{H}^3)$ i $\mathcal{X}_s(\mathbb{H}^3)$ $\forall s \geq 0$ (en el que resta d'aquesta secció se suposarà $p = 2$) es basa en els següents resultats, anàlegs als anteriors, la demostració dels quals es troba a l'apèndix A:
Sigui (M, g) una varietat de Riemann de curvatura -1 i $0 < r < n$. Aleshores,

- *(prop.33 de l'apèndix) Si $X \in \mathcal{X}_s(M)$, per a tot enter $s \geq 2$ existeix una constant positiva tal que*

  $$\|X\|_s \leq \text{const } \|F(X)\|_{s-2} \ .$$

- *(prop.34 de l'apèndix) Si $X \in \mathcal{X}_{s-2}(M)$ i $F(X) \in \mathcal{X}_{s-2}(M)$, llavors $X \in \mathcal{X}_s(M)$.*

Com abans, també es compleix per a $r = 0, n$ si $M = \mathbb{H}^n$.

Teorema 21. *Si M és una varietat de Riemann completa, amb curvatura constant -1, per a tot enter $s \geq 2$ l'operador F és un isomorfisme topològic entre $\mathcal{X}_s(M)$ i $\mathcal{X}_{s-2}(M)$.*

Demostració. En ser $F = \Delta_R + (n-1)I + d\delta$ un operador diferencial de segon ordre tenim que $\|F(X)\|_{s-2} \leq \text{const } \|X\|_s$ perquè en el primer membre hi ha menys derivades que en el segon. Per tant F és continu. Ara cal veure que per a tot $Y \in \mathcal{X}_{s-2}(M)$ existeix un únic element $X \in \mathcal{X}_s(M)$ tal que $F(X) = Y$, i que F^{-1} és contínua, és a dir, que $\|X\|_s \leq \text{const } \|Y\|_{s-2}$. Amb aquesta finalitat, considerem $\mathcal{X}_1(M)$ com un espai de Hilbert amb el producte escalar

$$B[X, Y] = \langle \nabla X, \nabla Y \rangle + (n-1)\langle X, Y \rangle + \langle \delta X, \delta Y \rangle \ ,$$

on $\langle \, , \rangle$ és el producte de L^2 habitual. La norma $\| \ \|_B$ induïda pel producte escalar B és equivalent a la norma de Sobolev $\| \ \|_1$, per la qual cosa $\| \ \| < C\| \ \|_B$. Donat un element $Y \in \mathcal{X}_{s-2}(M) \subset \mathcal{X}_0(M) = L^2(M)$, construïm l'element del dual

$$\begin{aligned} L : \mathcal{X}_1(M) &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ W \quad &\longrightarrow \ \langle Y, W \rangle. \end{aligned}$$

Com que

$$|L(W)| = |\langle Y, W \rangle| \leq \|X\| \, \|W\| \leq C\|X\| \, \|W\|_B \ ,$$

L és un funcional lineal continu de $\mathcal{X}_1(M)$. Per tant, existeix un $X \in \mathcal{X}_1(M)$ tal que $B[X, W] = L(W)$ per a tota $W \in \mathcal{X}_1(M)$, és a dir,

$$\langle \nabla X, \nabla W \rangle + (n-1)\langle X, W \rangle + \langle \delta X, \delta W \rangle = \langle Y, W \rangle \ .$$

En particular, per a $W \in \mathcal{D}_1(M)$ obtenim

$$\langle X, (\Delta_R + (n-1)I + d\delta)W \rangle = \langle Y, W \rangle \ .$$

que recordant la definició de F s'escriu

$$\langle X, F(W) \rangle = \langle Y, W \rangle \ .$$

la qual cosa indica que els elements $X, Y \in L^2(M) = \mathcal{X}_0(M)$ estan relacionats per $F(X) = Y$. Aleshores, segons les proposicions 33 i 32 de l'apèndix, $X \in \mathcal{X}_2(M)$ i $\|X\|_2 \leq C\|F(X)\|_0 \leq C\|Y\|_0$. Si, per hipòtesi d'inducció, suposem això cert per a $s-3$, tindrem que donat $Y \in \mathcal{X}_{s-2}(M) \subset \mathcal{X}_{s-3}(M)$ existeix $X \in \mathcal{X}_{s-1}(M) \subset \mathcal{X}_{s-2}(M)$, i l'aplicació altra vegada de les props. 33 i 32 demostra l'exhaustivitat.

Aquest $X \in \mathcal{X}_s(M)$ tal que $F(X) = Y$ és únic, ja que per la prop.33 de l'apèndix $F(X) = 0$ implica $X = 0$. $\square$

Sobre les funcions ó 0-formes els operadors Δ i Δ_R coincideixen (apartat 0.3). Llavors $\Delta_R + \frac{3}{\zeta^2(0)}I$ és una pertorbació d'ordre zero de Δ_R del tipus $\Delta_R + \lambda I$ amb $\lambda > 0$.

Teorema 22. *Sigui $T = \Delta_R + \lambda$ i $\lambda > 0$ una constant positiva. Aleshores T és un isomorfisme topològic de $\mathcal{F}_s(\mathbb{H}^n)$ a $\mathcal{F}_{s-2}(\mathbb{H}^n)$ per a tot $s \geq 2$.*

Demostració. Com s'ha comentat al principi d'aquest apartat, segueix la mateixa estructura que la del teorema anterior. Ara cal considerar el producte escalar

$$B[f,g] = \langle \nabla f, \nabla g \rangle + \lambda \langle f, g \rangle \ ,$$

per concloure que per a cada $h \in \mathcal{F}_{s-2}(\mathbb{H}^n)$ existeix $f \in \mathcal{F}_{s-2}(\mathbb{H}^n)$ tal que $Tf = h$. El següent resultat és necessari per cloure la demostració:

Si T és com el de l'enunciat anterior, aleshores $\|\Delta_R f\|_s \leq \text{const } \|Tf\|_s$.

Suposant cert aquest resultat, la demostració del teorema s'acaba tenint en compte que si $f \in \mathcal{F}_{s-2}(\mathbb{H}^n)$ i $Tf \in \mathcal{F}_{s-2}(\mathbb{H}^n)$, llavors $\Delta_R f = Tf - \lambda f$ també és de $\mathcal{F}_{s-2}(\mathbb{H}^n)$, i el lema 3.3 de [8] assegura que $f \in \mathcal{F}_s(\mathbb{H}^n)$ amb $\|f\|_s \leq C\|\Delta_R f\|_{s-2} \leq C\|Tf\|_{s-2} = C\|h\|_{s-2}$. La unicitat se segueix de que $\|Tf\|_s = 0$ implica $\|\Delta_R f\|_s = 0$ que alhora, per la proposició 2.3 de [8], implica $f = 0$.

La desigualtat $\|\Delta_R f\|_s \leq \text{const } \|Tf\|_s$ es demostra per inducció sobre s. Per a $s = 0$,

$$\|\Delta_R f\| = \|Tf - \lambda f\| \leq \|Tf\| + \lambda \|f\| \tag{4.6}$$

Però $\|f\| \leq \text{const } \|Tf\|$ perquè

$$\langle Tf, f \rangle = \langle \Delta_R f, f \rangle + \lambda \|f\|^2 \geq \lambda \|f\|^2 \ ,$$

ja que $\langle \Delta_R f, f \rangle = \langle \nabla f, \nabla f \rangle$ és sempre positiu.

Suposant que $\|\Delta_R f\|_r \leq \text{const } \|Tf\|_r$, $r < s$ i sabent per la proposició 2.3 de [8]) que $\|\alpha\|_s \leq \text{const } \|\Delta_R \alpha\|_{s-2}$,

$$\|\Delta_R f\|_s \leq \|Tf\|_s + \|f\|_s \leq \|Tf\|_s + \text{C } \|\Delta_R f\|_{s-2} \leq \|Tf\|_s + \text{C } \|Tf\|_{s-2} \leq \text{C } \|Tf\|_s$$

□

CAPÍTOL 5

La inestabilitat dels universos tancats de Robertson-Walker

Un univers tancat ve representat per un espai-temps dels tipus $V = S\times I$ on S és l'esfera unitat $\mathbb{S}^3$ de $\mathbb{R}^4$, que és l'única 3-varietat de Riemann simplement connexa i de curvatura constant i igual a 1. La mètrica de Lorentz de V és $\tilde{g} = -dt^2 + \zeta^2(t)g$, essent g la mètrica euclídea de $\mathbb{R}^4$ restringida a $\mathbb{S}^3$. El terme $g_0 = \zeta^2(0)g$ representa la restricció de $\tilde{g}$ a la hipersuperfície inicial $M = \mathbb{S}^3 \times \{0\}$. Per tant, M és l'esfera de $\mathbb{R}^4$ de radi $\zeta(0)$ centrada a l'origen. Es tracta, doncs, d'una hipersuperfície compacta i sense vora. Com en el capítol anterior, cal estudiar l'estabilitat de l'aplicació

$$\Phi\ : \mathcal{S}_s(g_0)\times\mathcal{S}_s(k_0) \longrightarrow \mathcal{F}_{s-2}(\rho_0)\times\mathcal{X}_{s-1}(0)$$

en un entorn del punt (g_0, k_0) en què $\Phi(g_0, k_0) = (-\chi\rho_0, 0)$. De fet, però, demostrarem que Φ és inestable al voltant de (g_0, k_0), provant que no existeix cap entorn de (g_0, k_0) format per parelles (g', k') tals que $\Phi(g', k') = (-\chi\rho_0, 0)$, que sigui una varietat diferenciable.

D'entrada, per simplificar els càlculs, introduïm la variable $p = k-(\mathrm{tr}_g k)g$. Com que $\mathrm{tr}(p) = -2\ \mathrm{tr}(k)$, tenim que $k = p - \frac{1}{2}\ \mathrm{tr}(p)g$. Llavors

$$k\cdot k = p\cdot p - \ \mathrm{tr}(p)p\cdot g + \frac{1}{4}\ \mathrm{tr}^2(p)g\cdot g = p\cdot p - \ \mathrm{tr}^2(p) + \frac{3}{4}\ \mathrm{tr}^2(p) = p\cdot p - \frac{1}{4}\ \mathrm{tr}^2(p).$$

Substituint en $\mathcal{H}(g,k) = \frac{1}{8}(k\cdot k - \ \mathrm{tr}^2(k) - 4\mathrm{R})$ i en $\gamma(g,k)_i = \frac{1}{2}\nabla^j(k_{ij} - \ \mathrm{tr}(k)g_{ij})$, obtenim

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(g,p) &= \frac{1}{8}\left(p\cdot p - 4\mathrm{R} - \frac{1}{2}\ \mathrm{tr}^2(p)\right)\\ \gamma(g,p)_i &= \frac{1}{2}\nabla^j p_{ij}\ .\end{aligned}$$

L'aplicació lineal $D_{(g,p)}\Phi$ indueix una aplicació

$$D_{(g,p)}\Phi : \mathcal{S}^\infty(M)\times\mathcal{S}^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{F}^\infty(M)\times\mathcal{X}^\infty(M)\,.$$

En ser la varietat M compacta, en aquests espais té sentit definir els productes escalars globals mitjançant integrals de Lebesgue. Introduïm a $\mathcal{S}^\infty(M)\times\mathcal{S}^\infty(M)$

$$\langle (h,P),(h',P')\rangle = \int_M (h,P)_x\cdot(h',P')_x\, d\mu\ ,$$

on

$$(h,P)_x\cdot(h',P')_x = g^{ir}(x)g^{js}(x)(h_{ir}h'_{js}(x) + P_{ir}P'_{js}(x))\,,$$

i a $\mathcal{F}^\infty(M)\times\mathcal{X}^\infty(M)$,

$$\langle (f,Y),(f',Y')\rangle = 4\int_M f(x)f'(x)\,dx + 4\int_M g(Y,Y')_x\,dx\ .$$

(el coeficient 4 és per a simplificacions posteriors). Respecte a aquests productes escalars l'aplicació

$$D_{(g,p)}\Phi : \mathcal{S}^\infty(M)\times\mathcal{S}^\infty(M)\longrightarrow \mathcal{F}^\infty(M)\times\mathcal{X}^\infty(M)$$

té un adjunt:

$$(D_{(g,p)}\Phi)^* : \mathcal{F}^\infty(M)\times\mathcal{X}^\infty(M)\longrightarrow \mathcal{S}^\infty(M)\times\mathcal{S}^\infty(M)\ ,$$

que indueix una aplicació entre els espais de Sobolev corresponents.

5.1 L'aplicació diferencial, la seva adjunta i la diferencial segona

Els operadors $D_{(g,p)}\Phi$, $(D_{(g,p)}\Phi)^*$ i $D^2_{(g,p)}\gamma$ són necessaris per a l'obtenció dels resultats posteriors. El càlcul del component $D_{(g,p)}\mathcal{H}$ (ja comentat a l'apartat 4.1) dóna, en les variables (g,p),

$$\begin{aligned} D_{(g,p)}\mathcal{H}(h,P) =& \frac{1}{8}[\,2p\cdot P - 2h\cdot(p\times p) + 4h\cdot\mathcal{R}(g) - 4\nabla^i\nabla^j h_{ij} \\ &+ 4\nabla^i\nabla_i \mathrm{tr}(h) - \mathrm{tr}(p)\mathrm{tr}(P) + \mathrm{tr}(p)h\cdot p\,]. \end{aligned}$$

Els operadors $D_{(g,p)}\gamma(h,P)$ i $D^2_{(g,p)}\gamma(h,P)$ són, respectivament, els termes d'ordre 1 i d'ordre 2 en h i P de $\gamma(g',p')_i = g'^{jk}\nabla'_k p'_{ij}$ quan $g'=g+h$ i $p'=p+P$. Però, recordant del capítol anterior que $Q(X,Y)=\nabla'_X Y - \nabla_X Y$,

$$\begin{aligned} \nabla'_k p'_{ij} &= \nabla'_{\partial_k} p'(\partial_i,\partial_j) = \partial_k p'(\partial_i,\partial_j) - p'(\nabla'_{\partial_k}\partial_i,\partial_j) - p'(\partial_i,\nabla'_{\partial_k}\partial_j) \\ &= \partial_k p'_{ij} - p'(\nabla_{\partial_k}\partial_i + Q(\partial_k,\partial_i),\partial_j) - p'(\partial_i,\nabla_{\partial_k}\partial_j + Q(\partial_k,\partial_j)) \\ &= \nabla_k p'_{ij} - Q^l_{ki}p'_{lj} - Q^l_{kj}p'_{li} = \nabla_k(p_{ij}+P_{ij}) - Q^l_{ki}(p_{lj}+P_{lj}) - Q^l_{kj}(p_{il}+P_{il}) \end{aligned}$$

on $Q^k_{ij} = \frac{1}{2}g'^{kl}(\nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij})$ (eq. 4.2). Com que $g'^{jk}\cong g^{jk} - h^{jk} + (h\times h)^{jk}$, els termes d'ordre 1 en h i P de $\gamma(g',p')_i = g'^{jk}\nabla'_k p'_{ij}$ provindran o bé del producte de $-h^{jk}$ per termes d'ordre zero de $\nabla'_k p'_{ij}$, o sigui $-h^{jk}\nabla_k p_{ij}$, o bé del producte de g^{jk} per termes d'ordre 1 de $\nabla'_k p'_{ij}$. Aquests últims sorgeixen dels productes $Q^l_{ki}p_{lj}$ i $Q^l_{kj}p_{il}$ substituint g' per g en l'expressió de Q. El primer d'ells és

$$g^{jk}Q^l_{ki}p_{lj} \cong g^{jk}\frac{1}{2}g^{lm}(\nabla_k h_{im} + \nabla_i h_{km} - \nabla_m h_{ki})p_{lj} = \frac{1}{2}p^{km}\nabla_i h_{km}.$$

El primer i tercer termes són oposats perquè l'índex "i", que és l'únic que no és mut, està col·locat en el mateix lloc. El segon producte és

$$g^{jk}Q^l_{kj}p_{il} \cong g^{jk}\frac{1}{2}g^{lm}(\nabla_k h_{jm} + \nabla_j h_{km} - \nabla_m h_{kj})p_{il} = p_{il}\nabla^j h^l_j - \frac{1}{2}p_{il}\nabla^l\ \mathrm{tr}(h).$$

Per tant,

$$D_{(g,p)}\gamma(h,P)_i = \frac{1}{2}\left[\nabla^s P_{is} - h^{rs}\nabla_r p_{is} - \frac{1}{2}p^{rm}\nabla_i h_{rm} - p_i^m\nabla^s h_{sm} + \frac{1}{2}p_i^m\nabla_m \mathrm{tr}(h)\right] .$$

Els termes d'ordre 2 en h i P són, primer, $(h\times h)^{jk}\nabla_k p_{ij}$, i els altres provenen de les combinacions de g^{jk} per termes de segon ordre en h i dels productes de g^{jk} amb termes de primer ordre en h i P. El resultat és

$$\begin{aligned} D^2_{(g,p)}\gamma(h,P)_i =& \frac{1}{2}\Big[\nabla_r((h\times h)^{rs}p_{is}) + h^{rs}p_s^m\nabla_i h_{rm} - \frac{1}{2}h^{rs}p_i^m\nabla_m h_{rs} \\ & -\frac{1}{2}h^{lm}p_{il}\nabla_m \ \mathrm{tr}(h) - \frac{1}{2}P^{mr}\nabla_i h_{rm} + \frac{1}{2}P_i^m\nabla_m \ \mathrm{tr}(h) - \nabla_r(h^{rs}P_{is})\Big] \end{aligned} \tag{5.1}$$

L'operador $D_{(g,p)}\Phi(h,P)$ és, doncs,

$$\begin{aligned} D_{(g,p)}\mathcal{H}(h,P) =& \frac{1}{8}[\,2p\cdot P - 2h\cdot(p\times p) + 4h\cdot\mathcal{R}(g) - 4\nabla^i\nabla^j h_{ij} \\ & + 4\nabla^i\nabla_i \mathrm{tr}(h) - \mathrm{tr}(p)\mathrm{tr}(P) + \mathrm{tr}(p)h\cdot p\,] \\ D_{(g,p)}\gamma(h,P)_i =& \frac{1}{2}\Big[\nabla^s P_{is} - h^{rs}\nabla_r p_{is} - \frac{1}{2}p^{rm}\nabla_i h_{rm} \\ & -p_i^m\nabla^s h_{sm} + \frac{1}{2}p_i^m\nabla_m \ \mathrm{tr}(h)\Big] \ . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Si designem per A i B els dos components de $D_{(g,p)}\Phi^*$, la identitat

$$\langle D_{(g,p)}\Phi(h,P),(f,Y)\rangle = \langle (h,P),(D_{(g,p)}\Phi)^*(f,Y)\rangle$$

implica que

$$\begin{aligned} & 4\int_M D_{(g,p)}\mathcal{H}(h,P)_x f(x)dx + 4\int_M g(D_{(g,p)}\gamma(h,P)_x, Y_x)dx \\ & = \int_M h\cdot A(f,Y)_x dx + \int_M P\cdot B(f,Y)_x dx \end{aligned} \tag{5.3}$$

Per poder identificar $A(f,Y)$ i $B(f,Y)$ com allò que acompanya a h i a P serà necessari manipular convenientment els integrands del primer membre de (5.3). Així, per exemple, en l'expressió de $D_{(g,p)}\mathcal{H}f$, el terme $(1/2)f\nabla^i\nabla^j h_{ij}$ s'ha d'anar transformant fins a fer aparèixer una divergència:

$$\frac{1}{2}f\nabla^i\nabla^j h_{ij} = \ \mathrm{div} - \frac{1}{2}(\nabla^j h_{ij})\nabla^i f = \ \mathrm{div} + \frac{1}{2}h_{ij}\nabla^j\nabla^i f \ .$$

Quant al terme $4f\nabla^i\nabla_i \mathrm{tr}(h)$,

$$4f\nabla^i\nabla_i \mathrm{tr}(h) = \mathrm{div} + 4g^{jk}h_{jk}\nabla^i\nabla_i f = -4g\cdot h\Delta f\,.$$

Aleshores, s'arriba a

$$\begin{aligned} D_{(g,p)}\mathcal{H}(h,P)f =& \frac{1}{8}[2fp\cdot P - 2fh\cdot(p\times p) + 4fh\cdot\mathcal{R}(g) - 4h_{ij}\nabla^j\nabla^i f - 4g\cdot h\Delta f \\ & - f\ \mathrm{tr}(p)\ \mathrm{tr}(P) + f\ \mathrm{tr}(p)h\cdot p] + \ \mathrm{div} \end{aligned}$$

L'altre integrand $g(D_{(g,p)}\gamma(h,P),Y)$ és un xic més complicat. El terme $Y^i\nabla^s P_i$ és igual a una divergència menys $P_{is}\nabla^s Y^i$. Com que $(L_Y g)_{ij} = \nabla_i Y_j + \nabla_j Y_i$, tenim que $Y^i\nabla^s P_i = \mathrm{div} - \frac{1}{2}L_Y g\cdot P$. Durant el procés d'anar fent aparèixer divergències, sorgeixen els termes $\frac{1}{2}h^{rm}(\nabla_i p^{rm})Y^i + h_{rm}p_i^m\nabla^r Y^i$, suma que és igual a $\frac{1}{2}h\cdot L_Y P$ perquè $(L_Y P)(Z,W) = (\nabla_Y P)(Z,W) + P(\nabla_Y Z,W) + P(Z,\nabla_Y W)$. El terme $Y^i\frac{1}{2}p_i^m\nabla_m\mathrm{tr}(h)$ origina $-\frac{1}{2}p_i^m\ \mathrm{tr}(h)\nabla_m Y^i$ i $-\frac{1}{2}(\nabla_m p_i^m)\ \mathrm{tr}(h)Y^i$. El primer és igual a $-\frac{1}{4}\ \mathrm{tr}(h)p\cdot L_Y g$ i el segon, com que $\gamma(g,p)_i = \nabla^j p_{ij}$, és $-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(h)g(\gamma(g,p),Y)$. Finalment,

$$\begin{aligned} g(D_{(g,p)}\gamma(h,P),Y) =& \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}P\cdot L_Y g - \frac{1}{2}(h\cdot p)\delta(Y) - \frac{1}{2}\ \mathrm{tr}(h)g(\gamma(g,p),Y)\right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(h\cdot L_Y p) - \frac{1}{4}\ \mathrm{tr}(h)p\cdot L_Y g\right] + \ \mathrm{div} \end{aligned}$$

En ser la varietat M compacta i sense vora, la integral a M d'una divergència és nul·la, i per simple identificació s'arriba a les expressions següents de A i B:

$$\begin{aligned} A(f,Y) =& - fp\times p + 2f\mathcal{R}(g) - 2\mathrm{Hess}(f) - 2(\Delta f)g + \frac{1}{2}f\ \mathrm{tr}(p)p \\ & + L_Y p - p\delta(Y) - \frac{1}{2}(p\cdot L_Y g)g - 2g(\gamma(g,p),Y)g \\ B(f,Y) =& - L_Y g + fp - \frac{1}{2}f\ \mathrm{tr}(p)g\ , \end{aligned} \tag{5.4}$$

on $(\mathrm{Hess}\ f)_{ij}$ indica el hessià $\nabla_i\nabla_j f$. Concretant els ordres de regularitat, l'adjunt de $D_{(g,p)}\Phi$ esta definit entre els espais

$$\begin{aligned} (D_{(g,p)}\Phi)^*\colon \mathcal{F}_{s-2}\times\mathcal{X}_{s-1} &\longrightarrow \mathcal{S}_{s-4}\times\mathcal{S}_{s-2} \\ (f,Y) &\longrightarrow (A,B) \end{aligned}$$

5.2 Demostració de la inestabilitat

Com en els casos anteriors, l'estudi de l'estabilitat per linealització de les equacions d'Einstein en la mètrica inicial $\tilde{g}$ de Robertson-Walker ens porta a l'estudi de l'estabilitat de l'aplicació

$$\begin{aligned} \Phi\colon \mathcal{S}_s(g_0)\times\mathcal{S}_s(k_0) &\longrightarrow \mathcal{F}_{s-2}(\rho_0)\times\mathcal{X}_{s-1}(0) \\ (g',p') &\longrightarrow (\mathcal{H}(g',p'),\gamma(g',p')) \end{aligned}$$

en el punt inicial (g_0,p_0), on $\Phi(g_0,p_0) = (-\chi\rho_0,0)$.

El resultat principal és el següent:

Teorema 23. *No hi ha cap entorn U de (g_0, p_0) a $\mathcal{S}_s(g_0) \times \mathcal{S}_s(k_0)$ en què el conjunt de parells $(g', p') \in U$ que compleixen $\Phi(g', p') = \chi(-\rho_0, 0)$ sigui una subvarietat diferenciable de U.*

Abans de la seva demostració ja podem assegurar que,

Corol·lari 24. *No pot existir cap subespai F de $\mathcal{F}_{s-2}(\rho_0) \times \mathcal{X}_{s-1}(0)$ tal que Φ sigui estable per linealització en el punt inicial (g_0, p_0) segons la direcció de F*

Demostració. Efectivament, en la definició 16 d'estabilitat per linealització respecte a qualsevol subespai F s'exigeix que $\Phi^{-1}(\Phi(g_0, p_0))$ sigui varietat diferenciable en un entorn de (g_0, p_0), la qual cosa el teorema afirma que no és certa. □

Demostració del teorema 23. Suposem que hi hagués a $\mathcal{S}_s(M) \times \mathcal{S}_s(M)$ un entorn U de (g_0, p_0) en què el conjunt de parells $(g', p') \in U$ que compleixen $\Phi(g', p') = -\chi(\rho_0, 0)$ fos una subvarietat diferenciable de U. Sigui $\lambda \to (g'(\lambda), p'(\lambda))$ una petita corba d'aquesta varietat que passi per (g_0, p_0) per al valor $\lambda = 0$. Indiquem per $(h, P) \in \mathcal{S}_s(M) \times \mathcal{S}_s(M)$ el vector tangent a aquesta corba en el punt (g_0, p_0). Sigui (h', P') la derivada segona $d^2(g'(\lambda), p'(\lambda))/d\lambda^2$ en el punt $\lambda = 0$. Com que $\Phi(g'(\lambda), p'(\lambda)) = -\chi(\rho_0, 0)$ per a tot λ, derivant aquesta igualtat en $\lambda = 0$ s'obté $(D_{(g_0,p_0)}\Phi)(h, P) = 0$. Derivant altra vegada en $\lambda = 0$ s'arriba a

$$D^2_{(g_0,p_0)}\Phi(h, P) + D_{(g_0,p_0)}\Phi(h', P') = 0 \; . \tag{5.5}$$

Sigui ara (f, Y) un element qualsevol de $\mathcal{F}^\infty(M) \times \mathcal{X}^\infty(M)$. Multiplicant escalarment (5.5) per (f, Y), tindrem

$$\langle D^2_{(g_0,p_0)}\Phi(h, P), (f, Y)\rangle + \langle D_{(g_0,p_0)}\Phi(h', P'), (f, Y)\rangle = 0 \; .$$

Tenint en compte que

$$\langle D_{(g,p)}\Phi(h, P), (f, Y)\rangle = \langle (h, P), (D_{(g,k)}\Phi)^*(f, Y)\rangle$$

es dedueix que per a tot $(h, P) \in \mathcal{S}_s(M) \times \mathcal{S}_s(M)$ que sigui de $\ker(D_{(g_0,p_0)}\Phi)$ i tot $(f, Y) \in \mathcal{F}^\infty(M) \times \mathcal{X}^\infty(M)$ de $\ker(D_{(g_0,p_0)}\Phi)^*$ es verifica que

$$\langle D^2_{(g_0,p_0)}\Phi(h, P), (f, Y)\rangle = 0 \; . \tag{5.6}$$

L'estratègia per a demostrar el teorema 23 (fent servir una idea de [1]) consistirà a trobar un parell (h, P) del nucli de $D_{(g_0,p_0)}\Phi$ i un parell (f, Y) del nucli de $(D_{(g_0,p_0)}\Phi)^*$ per als quals no es compleixi (5.6).

En un model de Robertson-Walker $\gamma(g, p) = 0$ i per tant l'últim terme de l'expressió de A en (5.4) és nul. Com que $g_t = \zeta^2(t)g$ i $k_t = \partial_t g_t = 2(\dot\zeta/\zeta)g_t$, obtenim que $p_0 = k_0 - \operatorname{tr}_{g_0}(k_0)g_0 = -4Cg$, on $C = \dot\zeta(0)/\zeta(0)$. Les noves expressions (2.5) en les variables (g, p) per a $K = 1$ són:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{R}(g_0) = \dfrac{2g_0}{\zeta^2(0)} & \mathrm{R}(g_0) = \dfrac{6}{\zeta^2(0)} & p_0 = -4Cg_0 \\ p_0 \times_{g_0} p_0 = 16C^2 g_0 & p_0 \cdot_{g_0} p_0 = 48C^2 & \operatorname{tr}_{g_0}(p_0) = -12C. \end{array} \tag{5.7}$$

Els components (A,B) de l'operador adjunt $(D_{(g_0,p_0)}\Phi)^*$ són ara

$$\begin{aligned} A(f,Y) &= \left(8C^2 + \frac{4}{\zeta^2(0)}\right) f g_0 - 4C L_Y g_0 - 2\mathrm{Hess}(f) - 2(\Delta f) g_0 \\ B(f,Y) &= 2C f g_0 - L_Y g_0 \ . \end{aligned}$$

La mètrica $g_0 = \zeta^2(0)\mathbf{g}$ és la restricció de la mètrica euclidiana de $\mathbb{R}^4$ a l'esfera $\mathbb{S}^3(\zeta(0))$ de radi $\zeta(0)$ i centre a l'origen. Escollim $f = 0$ i Y camp de Killing de g_0, $L_Y g_0$, com a elements del nucli de $(D_{(g_0,p_0)}\Phi)^*$. Per a qualsevol parell $(h,P) \in \mathrm{Ker}(D_{(g_0,p_0)}\Phi)$ i un parell de la forma $(0,Y) \in \mathrm{Ker}(D_{(g_0,p_0)}\Phi)^*$ tindrem:

$$\langle D^2_{(g_0,p_0)}\Phi(h,P),(0,Y)\rangle = 4\int_M g(D^2_{(g_0,p_0)}\gamma(h,P),Y)dv \ ,$$

on dv indica l'element de volum de $M = \mathbb{S}^3(\zeta(0))$ per g_0. L'expressió (5.1) de $D^2_{(g_0,p_0)}\Phi(h,P)$ en un model de Robertson-Walker, fent ús de $p_{ij} = -4C\,(g_0)_{ij}$, és

$$\begin{aligned} D^2_{(g_0,p_0)}\gamma(h,P)_i =& \frac{1}{2}[\,-4C\,\nabla^r(h\times h)_{ri} - 2C\,h^{rm}\nabla_i h_{rm} \\ &+ 2C\,h_{im}\nabla^m\ \mathrm{tr}(h) - \frac{1}{2}P_{mr}\nabla_i h^{rm} \\ &+ \frac{1}{2}P_{im}\nabla^m\ \mathrm{tr}(h) - \nabla_r(h^{rs}P_{is})\,] \ . \end{aligned} \tag{5.8}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} g(D^2_{(g_0,p_0)}\gamma(h,P),Y) =& \frac{1}{2}\ [4C\,(\nabla^r Y^i)(h\times h)_{ri} - 2C\,h^{rm}(\nabla_Y h)_{rm} \\ &- 2C\,(\nabla^m Y^i)h_{im}\ \mathrm{tr}(h) - 2C\,Y^i\ \mathrm{tr}(h)\nabla^m h_{im} \\ &- \frac{1}{2}P^{mr}\nabla_Y h_{rm} - \frac{1}{2}Y^i\ \mathrm{tr}(h)\nabla^m P_{im} \\ &- \frac{1}{2}\ \mathrm{tr}(h)P_{im}\nabla^m Y^i - Y^i\nabla_r(h^{rs}P_{is})] +\ \mathrm{div}\ . \end{aligned} \tag{5.9}$$

Si (h,P) ha de pertànyer al nucli de $D_{(g_0,p_0)}\Phi$ els dos components de (5.2) hauran de ser zero. De l'anul·lació de la segona expressió de (5.2), i ja que $p_{ij} = -4C\,(g_0)_{ij}$, es dedueix que $\nabla^m P_{im} = -4C\,\nabla^m h_{im}$. Substituint a (5.9) obtenim:

$$g(D^2_{(g_0,p_0)}\gamma(h,P),Y) = \frac{1}{2}\,\{-2C\,h\cdot\nabla_Y h - \frac{1}{2}(\nabla_Y h)\cdot P - Y^i\nabla_r(h^{rs}P_{is}\,\} + \mathrm{div}\,.$$

En integrar la identitat anterior sobre $M = \mathbb{S}^3(\zeta(0))$, el terme $\int_M (h.\nabla_Y h)dv$ s'anul·larà. En efecte:

$$h\cdot\nabla_Y h = h_{rm}Y^i\nabla_i h^{rm} = -h_{rm}(\nabla_i Y^i)h^{rm} - (\nabla_i h_{rm})Y^i h^{rm} + \mathrm{div}\,.$$

En ser Y un camp de Killing, té divergència zero a i el terme $h_{rm}(\nabla_i Y^i)h^{rm}$ de la igualtat anterior s'anul·la. Integrant a M s'obté $\int_M (h\cdot\nabla_Y h)dv = -\int_M (h\cdot\nabla_Y h)dv$ i per tant aquesta integral és zero. Finalment:

$$4\int_M g(D^2_{(g_0,p_0)}\gamma(h,P),Y)dv = -\int_M (\nabla_Y h\cdot P)dv - 2\int_M Y^i\nabla_r(h^{rs}P_{is})dv\ . \tag{5.10}$$

El problema consisteix, doncs, a trobar h i P que anul·lin (5.2) i un camp de Killing Y sobre l'esfera M per als quals (5.10) no s'anul·li.

Considerem l'espai euclideà $\mathbb{R}^4$ on és immersa l'esfera M. Indiquem per (x, y, z, t) les coordenades canòniques de $\mathbb{R}^4$. Els camps vectorials $e_1 = (y, -x, t, -z)$, $e_2 = (z, -t, -x, y)$, $e_3 = (t, z, -y, -x)$ són ortogonals dos a dos, els seus claudàtors de Lie són $[e_1 , e_2] = 2e_3$, $[e_2 , e_3] = 2e_1$, $[e_3 , e_1] = 2e_2$. Per exemple,

$$[e_1, e_2]f = -2y\partial_z f - 2x\partial_t f + 2t\partial_x f + 2z\partial_y f = 2e_3 f$$

Si $\varepsilon(i, j, k)$ és el signe de la permutació (i, j, k) quan els tres índexs són diferents, i zero en cas contrari, tenim que $[e_i, e_j] = 2\varepsilon(i, j, k)e_k$. Els camps e_i $(i = 1, 2, 3)$ són perpendiculars al camp radial $N = (x, y, z, t)$ respecte a la mètrica euclidiana usual de $\mathbb{R}^4$. Per tant, les seves restriccions a l'esfera M són camps tangents que en cada punt seran perpendiculars dos a dos amb norma $\zeta(0)$. La fórmula de Riemann

$$\begin{aligned}2g_0(\nabla_X Y, Z) =& X(g_0(Y, Z)) + Y(g_0(X, Z)) - Z(g_0(X, Y))\\ &- g_0(X, [Y, Z]) - g_0(Y, [X, Z]) - g_0(Z, [Y, X])\end{aligned}$$

aplicada als camps e_1, e_2, e_3 dóna

$$\begin{aligned}2g_0(\nabla_{e_i} e_j, e_k) &= -g_0(e_i, [e_j, e_k]) - g_0(e_j, [e_i, e_k]) - g_0(e_k, [e_j, e_i])\\ &= -g_0(e_i, 2\varepsilon(j, k, i)e_i) - g_0(e_j, 2\varepsilon(i, k, j)e_j) - g_0(e_k, 2\varepsilon(j, i, k)e_k)\\ &= -2\zeta^2(0)(\varepsilon(j, k, i) + 2\varepsilon(i, k, j) + 2\varepsilon(j, i, k)) = 2\varepsilon(i, j, k)\zeta^2(0).\end{aligned}$$

Per tant, $\nabla_{e_i} e_j = \varepsilon(i, j, k)e_k$, és a dir, els símbols de Christoffel Γ^k_{ij} en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ definits per $\nabla_{e_i} e_j = \Gamma^k_{ij} e_k$ són justament els $\varepsilon(i, j, k)$. Un camp vectorial de Killing X de M compleix

$$(L_X g_0)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i = g_0(\nabla_{e_i} X, e_j) + g_0(\nabla_{e_j} X, e_i) = 0$$

En particular, e_1, e_2 i e_3 són camps de Killing de M.

Escollim ara $Y = e_1$, $h = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$, $P = e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1$. Volem veure que aquesta terna (Y, h, P) satisfà totes les condicions volgudes. Veiem primer si aquests h i P anul·len el segon membre de (5.2). En un model de Robertson-Walker, les equacions (5.2) s'escriuen

$$\begin{aligned}(D_{(g_0,p_0)}\mathcal{H})(h, P) &= \frac{1}{8}\left[4C\ \mathrm{tr}(P) + \left(16C^2 + \frac{8}{\zeta^2(0)}\right)\ \mathrm{tr}(h) - 4\nabla^i\nabla^j h_{ij} - 4\Delta\ \mathrm{tr}(h)\right]\\ (D_{(g_0,p_o)}\gamma)(h, P)_i &= \frac{1}{2}\nabla^s(4C\, h + P)_{is}\ .\end{aligned} \tag{5.11}$$

Tant la traça de h com la de P s'anul·len ja que, per exemple,

$$\mathrm{tr}(h) = (g_0)^{ij} h_{ij} = (1/\zeta^2(0))(\sum_i h_{ii}) = 0.$$

També les divergències de h i de P s'anul·len. En efecte, si $\{\omega^i\}$ és la base dual de $\{e_i\}$,

$$\begin{aligned}\nabla_k A^{ij} &= \nabla_{e_k} A(\omega^i, \omega^j) = e_k(A^{ij}) - A(\nabla_{e_k}\omega^i, \omega^j) - A(\omega^i, \nabla_{e_k}\omega^j) \\ &= e_k(A^{ij}) + \Gamma^i_{kl}A^{lj} + \Gamma^j_{kl}A^{li}\ .\end{aligned}$$

Per tant, $\nabla_i A^{ij} = e_i(A^{ij}) + \Gamma^i_{il}A^{lj} + \Gamma^j_{il}A^{il}$. Si, com és el cas de h i P, els components A^{ij} són constants el primer terme d'aquesta darrera expressió s'anul·la; però també els altres dos: el segon perquè $\Gamma^k_{ij} = \varepsilon(i,j,k)$, i el tercer perquè Γ^k_{ij} és antisimètric en i,j i en canvi A^{ij} és simètric en els mateixos índexs.

L'únic terme que resta per demostrar la seva s'anul·lació és $\nabla_i\nabla_j h^{ij}$. Com que h és un tensor $(2,0)$ covariant, $\nabla^2 h$ és un tensor $(2,2)$ que actua sobre els camps X, Y i sobre les formes ω, ω' segons $\nabla^2 h(X,Y,\omega,\omega') = (\nabla_X\nabla h)(Y,\omega,\omega')$. En components, si $\nabla^2 h = \nabla_l\nabla_k h^{ij}\omega^l\otimes\omega^k\otimes e_i\otimes e_j$,

$$\begin{aligned}&\nabla_l\nabla_k h^{ij} = (\nabla^2 h)(e_l, e_k, \omega^i, \omega^j) = (\nabla_{e_l}\nabla h)(e_k, \omega^i, \omega^j) \\ &= e_l(\nabla_k h^{ij}) - (\nabla h)(\nabla_{e_l}e_k, \omega^i, \omega^j) - (\nabla h)(e_k, \nabla_{e_l}\omega^i, \omega^j) - (\nabla h)(e_k, \omega^i, \nabla_{e_l}\omega^j) \\ &\qquad = e_l(\nabla_k h^{ij}) - \Gamma^m_{lk}\nabla_m h^{ij} + \Gamma^i_{lm}\nabla_k h^{mj} + \Gamma^j_{lm}\nabla_k h^{mi}.\end{aligned}$$

Per tant, $\nabla_i\nabla_j h^{ij} = e_i(\nabla_j h^{ij}) - \Gamma^m_{ij}\nabla_m h^{ij} + \Gamma^i_{im}\nabla_j h^{mj} + \Gamma^j_{im}\nabla_j h^{mi}$. El segon i quart termes són oposats; el primer és zero perquè la divergència de h és nul·la; i el tercer també és zero perquè tant $\Gamma^i_{im} = \varepsilon(i,i,m)$ com $\nabla_j h^{mj}$ són nuls.

Només resta comprovar que (5.10) no s'anul·la. Tenim que $\nabla_Y h = \nabla_{e_1}(e_1\otimes e_2 + e_2\otimes e_1) = e_1\otimes e_3 + e_3\otimes e_1 = P$ i que $(\nabla_Y h)\cdot P = P\cdot P = P^{13}P_{31} + P^{31}P_{13} = 2/\zeta^2(0)$. Per altra banda, com que $Y = e_1$ i h té divergència nul·la,

$$Y^i\nabla_r(h^{rs}P_{is}) = h^{rs}\nabla_r P_{1s} = h^{12}\nabla_1 P_{12} + h^{21}\nabla_2 P_{11} = (1/\zeta^2(0))(\nabla_1 P_{12} + \nabla_2 P_{11})\ .$$

Però

$$\begin{aligned}\nabla_1 P_{12} &= \nabla_{e_1}P(e_1,e_2) = e_1(P(e_1,e_2)) - P(\nabla_{e_1}e_1, e_2) - P(e_1, \nabla_{e_1}e_2) \\ &= -P(e_1,e_3) = -1 \\ \nabla_2 P_{11} &= \nabla_{e_2}P(e_1,e_1) = e_2(P(e_1,e_1)) - P(\nabla_{e_2}e_1, e_1) - P(e_1, \nabla_{e_2}e_1) \\ &= P(e_3,e_1) + P(e_1,e_3) = 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

Per tant,

$$Y^i\nabla_r(h^{rs}P_{is}) = 1/\zeta^2(0).$$

Substituint aquests resultats a (5.10) obtenim

$$4\int_M g(D^2_{(g_0,p_0)}\gamma(h,P), Y)dv = -\int_M(\nabla_Y h\cdot P)dv - 2\int_M Y^i\nabla_r(h^{rs}P_{is})dv$$

$$= (1/\zeta^2(0))(-4\,\mathrm{vol}\{M\}) \neq 0\ .$$

□

CAPÍTOL 6

Universos no simplement connexos

Dels resultats obtinguts fins ara es podria arribar a la conclusió que l'estabilitat d'un univers R-W depèn de la compacitat o de si la curvatura de la hipersuperfície inicial S és negativa o nul·la. Per poder confirmar o descartar definitivament aquesta conjectura és necessari estudiar alguna altra possibilitat. En aquest capítol s'estudien els casos en els que $\mathbb{R}^3/\Gamma$ i $\mathbb{H}^3/\Gamma$ són compactes i orientables. El tor pla $\mathbb{R}^3/\Gamma$ va ser el primer exemple [6] que es va donar en què les solucions de l'equació linealitzada no servien per aproximar les solucions exactes de l'equació $G(\tilde{g}) = 0$ d'Einstein en el buit. El resultat és que el tor pla continua essent inestable sota l'equació d'Einstein $G(\tilde{g}) = \chi T$ en un model de Robertson-Walker. En canvi, $\mathbb{H}^n/\Gamma$ és estable. Amb aquest dos resultats podem refutar la conjectura anterior.

Proposició 25. *L'equació d'Einstein a l'interior és linealment inestable en un univers de Robertson-Walker $(S \times I, \tilde{g}, T)$ quan S és el tor pla $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\Gamma$, on $\Gamma = \{x \to x + ne_1 + me_2,\ n, m \in \mathbb{Z},\ e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)\}$*

Demostració. Per construcció, la restricció g de $\tilde{g}$ a $\mathbb{T}^3$ és la mètrica euclídea de $\mathbb{R}^3$. Seguint el mateix mètode que en el cas de la 3-esfera, es tracta de trobar uns h i P de $\ker D_{(g,p)}\Phi$ i un camp de Killing X del 3-tor $\mathcal{T}_3$ per als quals

$$4\int_{\mathcal{T}_3} g(D^2_{(g,p)}\gamma(h,P), X)dv = -\int_{\mathcal{T}_3} (\nabla_X h \cdot P)dv - 2\int_{\mathcal{T}_3} X^i \nabla_r (h^{rs} P_{is})dv$$

sigui diferent de zero. Com que els components $g_{ij} = \delta_{ij}$ no depenen de les coordenades x^i, qualsevol camp ∂_i és un camp de Killing. Escollim $X = \partial_x$, $h = \partial_x \otimes \partial_y + \partial_y \otimes \partial_x$ i $P = x(\partial_x \otimes \partial_y + \partial_y \otimes \partial_x) - z(\partial_y \otimes \partial_z + \partial_z \otimes \partial_y)$. Aleshores h i P tenen la traça i la divergència nul·les. A més a més, $\nabla_X h = 0$ i la primera integral és igual a zero. El segon terme és:

$$X^i \nabla_r (h^{rs} P_{is}) = \nabla_r (h^{rs} P_{1s}) = h^{12}\nabla_1 P_{12} + h^{21}\nabla_2 P_{11} = \nabla_1 P_{12} = \partial_x(x) = 1$$

i per tant

$$\int_{\mathcal{T}_3} X^i \nabla_r (h^{rs} P_{is})dv = \mathrm{vol}(\mathcal{T}_3) \neq 0$$

□

Proposició 26. *L'equació d'Einstein a l'interior és linealment estable en un univers de Robertson-Walker* $(S \times I, \tilde{g}, T)$ *quan* S *té curvatura constant negativa i és compacta i orientable.*

Demostració. Segons el teorema de Berger-Ebin [4], si M és una varietat compacta i orientable i un dels operadors $D_{(g,p)}\Phi : \mathcal{S}_s \times \mathcal{S}_s \rightarrow \mathcal{F}_{s-2} \times \mathcal{X}_{s-1}$ ó el seu adjunt $(D_{(g,p)}\Phi)^*$ té símbol injectiu, són vàlides les descomposicions

$$\mathcal{F}_{s-2} \times \mathcal{X}_{s-1} = \mathrm{Rang}(D\Phi) \oplus \ker(D\Phi)^* \quad , \quad \mathcal{S}_s \times \mathcal{S}_s = \ker(D\Phi) \oplus \mathrm{Rang}(D\Phi)^*$$

i l'exhaustivitat de $D_{(g,p)}\Phi$ és equivalent a la injectivitat de $(D_{(g,p)}\Phi)^*$.

De les equacions (2.5) i (5.4) s'obté que els components A i B de $(D_{(g,p)}\Phi)^*$ s'escriuen, en un model de Robertson-Walker amb $K = -1$,

$$\begin{aligned} A(f,X) &= \left(8C^2 - \frac{4}{\zeta^2(0)}\right) fg - 4CL_Xg - 2\mathrm{Hess}(f) - 2(\Delta f)g \\ B(f,X) &= 2Cfg - L_Xg \ . \end{aligned} \tag{6.1}$$

El símbol de $(D_{(g,p)}\Phi)^*$, per a cada $x \in M$ i $\xi \neq 0$, $\xi \in T_x(M)^*$, és l'aplicació lineal

$$\begin{aligned} \sigma_L(x,\xi) : T_x(M) \times \mathbb{R} &\longrightarrow S_2 \times S_2 \\ (X, f) &\longrightarrow (\alpha, \beta) \ . \end{aligned}$$

Recordant que $(L_Xg)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i$, $(\mathrm{Hess}\ f)_{ij} = \nabla_i \nabla_j f$ i $\Delta f = -\nabla^i \nabla_i f$, els components de α i de β són

$$\begin{aligned} \alpha_{rs} &= -2\xi_r \xi_s f - 2\xi \cdot \xi f g_{rs} \\ \beta_{rs} &= -\xi_r X_s - \xi_s X_r \ . \end{aligned}$$

Provem que el símbol és injectiu. De $\alpha = 0$ obtenim que $\mathrm{tr}(\alpha) = -8(\xi \cdot \xi) f$ també haurà de ser zero i com $\xi \cdot \xi \neq 0$ (perquè $\xi \neq 0$), $f = 0$. Com que $\xi \neq 0$ es pot prendre una base $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ de $T_x(M)^*$ en la qual $\omega^1 = \xi$. Llavors, de $\beta_{11} = 0$, $\beta_{12} = 0$ i $\beta_{13} = 0$, tenint en compte que en aquesta base $\xi = (1, 0, 0)$, s'obté respectivament $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ i $X_3 = 0$.

Quant a la injectivitat de $(D\Phi)^*$, si a (6.1) s'imposa $B = 0$, s'obté $L_Xg = 2Cfg$, i aleshores substituint en l'expressió de $A(f, X)$ hom arriba a

$$A(f,X) = \frac{-4}{\zeta^2(0)} fg - 2\mathrm{Hess}(f) - 2(\Delta f)g.$$

Si $A = 0$, llavors $\mathrm{tr}(A) = 0$, i de l'anterior equació obtenim

$$\frac{-12}{\zeta^2(0)} f - 4\Delta f = 0$$

és a dir,

$$\Delta f + \frac{3}{\zeta^2(0)} f = 0.$$

Multiplicant aquesta equació escalarment per f, i com $\langle \Delta f, f\rangle = \langle \delta df, f\rangle = \langle df, df\rangle$, tenim que

$$\langle df, df\rangle + \frac{3}{\zeta^2(0)}\langle f, f\rangle = 0$$

que implica $f = 0$. Tornant a (6.1) arribem a $L_X g = 0$. Per tant el nucli de $(D_{(g,p)}\Phi)^*$ està format per aquells parells de la forma $(0, X)$, X camp de Killing de S. Per altra banda, tota varietat diferenciable riemanniana i compacte amb tensor de Ricci definit negatiu té un nombre finit d'isometries , és a dir, no té isometries infinitesimals [5]. En un model de Robertson-Walker $V = S \times I$ tenim que $\mathcal{R}_g = \frac{2Kg}{\zeta^2(0)}$. Per tant, com que $K = -1$, $\mathcal{R}_g$ és negatiu, $L_X g = 0$ implica $X = 0$ i l'operador $(D_{(g,p)}\Phi)^*$ és injectiu. $\square$

APÈNDIX A

Algunes demostracions en varietats de curvatura negativa

El lector podrà comprovar que sovint en aquest apèndix es fa referència a l'article [8] de J.Bruna i J.Girbau. Per mantenir la notació allà emprada, $H_1^s(M)$ indicarà l'espai de Sobolev de les 1-formes d'ordre de regularitat s. Recordem que a l'apartat 0.4 dels preliminars hem definit $H_r^s(M)$ com la completació de $\mathcal{D}_r(M)$ (l'espai de les r-formes C^∞ amb suport compacte) per la norma

$$\|\alpha\|_s = \left(\sum_{k=0}^{s} \|\nabla^{(k)}\alpha\|^2 \right)^{1/2} ,$$

però com que en el nostre cas $H_r^s(M) = L^2_{s,r}$ podem pensar els objectes de $H_r^s(M)$ com aquelles r-formes α de L^2 amb totes les derivades generalitzades $\nabla^{(k)}\alpha$ també de L^2.

Tots els resultats que aquí apareixen són vàlids per a r-formes amb $0 < r < n$ si suposem que la varietat M és completa i té curvatura $K = -1$. Si $M = \mathbb{H}^n$ (és a dir, si a més a més M és simplement connexa) els resultats també són certs per a $r = 0, n$. Però com l'operador F en el nostre cas actua sobre els camps (identificats mitjançant g amb les 1-formes), ens limitarem a $r = 1$ en què no hi ha distinció entre $M = \mathbb{H}^n$ o $M = \mathbb{H}^n/\mathcal{G}$. El que aquí és $H_1^s(M)$ en el text principal és $\mathcal{X}_s(M)$. Pel que fa a la notació, la lletra ω es reservarà per a elements de $\mathcal{D}_1(M)$, i la lletra α per a elements de $H_1^s(M)$. Les constants positives s'indicaran explícitament per "const " o bé per la lletra C.

En aquest capítol hi ha tot el material necessari per arribar al resultat principal, que és el següent: *Sigui (M, g) una varietat de Riemann de curvatura -1. Si $X \in H_1^s(M)$ i $F(X) \in H_1^s(M)$, llavors $X \in H_1^{s+2}(M)$ i $\|X\|_{s+2} \leq \text{const } \|F(X)\|_s$ per a tot $s \geq 0$.* L'operador $F = \Delta_R + d\delta + (n-1)I$ és una pertorbació d'ordre zero de l'operador $G = \Delta_R + d\delta$, i el resultat anterior es deriva d'un de similar per a l'operador G. És tot allò relacionat amb G el que ocupa la major part de l'exposició, relegant el resultat sobre F com un simple corol·lari.

La desigualtat $\|\boldsymbol{\Delta_R\alpha}\|_{\mathbf{s}} \leq$ const $\|\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha}\|_{\mathbf{s}}$ en $\mathbf{H_1^{s+2}(M)}$

L'objectiu d'aquest apartat és provar que si $\alpha \in H_1^{s+2}(M)$ la norma $\|\Delta_R\alpha\|_s$ està dominada per $\|(\Delta_R + d\delta)\alpha\|_s$. La demostració utilitza que $\|\alpha\|_{s+2} \leq \text{const } \|\Delta_R\alpha\|_s$, resultat que es troba en l'article [8]. També son necessaris els tres lemes següents:

Lema 27. *Sigui (M, g) una varietat de Riemann de dimensió n, de curvatura constant K. Donat un p-tensor covariant α i una permutació σ dels índexs $\{1, \ldots, s\}$,* *definim el $(p+s)$-tensor covariant $\sigma(\nabla^{(s)}\alpha)$ mitjançant*

$$\sigma(\nabla^{(s)}\alpha)(X_1,\ldots,X_s,Y_1,\ldots,Y_p)=(\nabla^{(s)}\alpha)(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(s)},Y_1,\ldots,Y_p)\ .$$

Aleshores, donat un enter $s\geq 2$, existeix una constant $C>0$ tal que

$$\|\sigma(\nabla^{(s)}\alpha)-\nabla^{(s)}\alpha\|\leq \text{const }\|\alpha\|_{s-2}\ ,$$

per a tot p-tensor covariant α de classe C^∞ amb suport compacte.

Observi's que, intuïtivament, caldria esperar que, com a molt, $\|\sigma(\nabla^{(s)}\alpha)-\nabla^{(s)}\alpha\|\leq C\|\alpha\|_{s-1}$, fruit de la cancel·lació de les parts principals. Serà la identitat de Ricci la que permetrà baixar una unitat l'ordre de regularitat.

Demostració. Sigui τ la transposició dels índexs consecutius k i $k+1$:

$$\tau:\ \{1,\ldots,k,k+1,\ldots,s\}\longrightarrow\{1,\ldots,k+1,k,\ldots,s\}.$$

En una carta local, els components de $\tau(\nabla^{(s)}\alpha)$ són

$$\tau(\nabla^{(s)}\alpha)_{i_1\ldots i_s j_1\ldots j_p}=\nabla_{i_1}\ldots\nabla_{i_{k+1}}\nabla_{i_k}\ldots\nabla_{i_s}\alpha_{j_1\ldots j_p}$$

Combinant la identitat de Ricci (0.3) amb el fet que quan la curvatura seccional K és constant el tensor de curvatura compleix $R(X,Y)Z=K\{g(Z,Y)X-g(Z,X)Y\}$, obtenim que per a qualsevol r-tensor β

$$\begin{aligned}(\nabla_i\nabla_j-\nabla_j\nabla_i)\beta_{i_1\ldots i_r}&=-\sum_{k=1}^r\beta(\partial_{i_1},\ldots,R(\partial_i,\partial_j)\partial_{i_k},\ldots,\partial_{i_r})\\&=-K\sum_{k=1}^r(g_{i_kj}\beta_{i_1\ldots i_{k-1}ii_{k+1}\ldots i_r}-g_{i_ki}\beta_{i_1\ldots i_{k-1}ji_{k+1}\ldots i_r})\\&=K(g_{ii_1}\beta_{ji_2\ldots i_r}-g_{ji_1}\beta_{ii_2\ldots i_r})+\ldots+K(g_{ii_r}\beta_{i_1\ldots i_{r-1}j}-g_{ji_r}\beta_{i_1\ldots i_{r-1}i})\end{aligned}\tag{A.1}$$

Fent $\beta_{i_{k+2}\ldots i_s,j_1\ldots j_p}=\nabla_{i_{k+2}}\ldots\nabla_{i_s}\alpha_{j_1\ldots j_p}$ i tenint en compte que la diferencial covariant del tensor mètric g és nul·la, deduïm que

$$(\tau\nabla^{(s)}\alpha-\nabla^{(s)}\alpha)_{i_1\ldots i_s,j_1\ldots j_p}=\nabla_{i_1}\ldots\nabla_{i_{k-1}}(\nabla_{i_{k+1}}\nabla_{i_k}-\nabla_{i_k}\nabla_{i_{k+1}})\nabla_{i_{k+2}}\ldots\nabla_{i_s}\alpha_{j_1\ldots j_p}$$

serà suma de $2((s-k-1)+p)$ termes de la forma

$$\pm K g_{\eta(i_1)\eta(i_2)}\nabla_{\eta(i_3)}\ldots\nabla_{\eta(i_s)}\alpha_{j_1\ldots j_p}\ ,$$

on η és una certa permutació dels índexs $\{1,\ldots s\}$. Ja que en tots els termes de la forma anterior hi ha $s-2$ derivacions la norma $\|\tau(\nabla^{(s)}\alpha)-\nabla^{(s)}\alpha\|$ restarà dominada per $\|\alpha\|_{s-2}$.

Sigui ara una permutació qualsevol σ, producte de n transposicions $\tau_1,\ldots,\tau_n$. Si definim $\tau^{(k)}=\tau_k\circ\cdots\circ\tau_1$ llavors $\sigma=\tau^{(n)}$ i $\|\sigma(\nabla^{(s)}\alpha)-\nabla^{(s)}\alpha\|$ és igual a

$$\begin{aligned}&\|\tau^{(n)}(\nabla^{(s)}\alpha)-\tau^{(n-1)}(\nabla^{(s)}\alpha)+\tau^{(n-1)}(\nabla^{(s)}\alpha)-\cdots+\tau^{(1)}(\nabla^{(s)}\alpha)-\nabla^{(s)}\alpha\|\leq\\&\|\tau^{(n)}(\nabla^{(s)}\alpha)-\tau^{(n-1)}(\nabla^{(s)}\alpha)\|+\cdots+\|\tau_1(\nabla^{(s)}\alpha)-\nabla^{(s)}\alpha\|\leq\text{const }\|\alpha\|_{s-2}\end{aligned}$$

□

Lema 28. *Sigui (M,g) una varietat de Riemann de curvatura constant K. Donat un enter $s \geq 0$ existeix una constant per a la qual es compleix*

$$\|(\nabla^{(s)}\Delta_R - \Delta_R\nabla^{(s)})\alpha\| \leq \text{const } \|\alpha\|_s$$

per a tot p-tensor covariant α de classe C^∞ amb suport compacte.

Demostració. És una conseqüència del lema anterior, perquè

$$\begin{aligned}
(\nabla^{(s)}\Delta_R\alpha)_{i_1\ldots i_s,j_1\ldots j_p} &= -\nabla_{i_1}\cdots\nabla_{i_s}\nabla^i\nabla_i\alpha_{j_1\ldots j_p} = -g^{ij}\nabla_{i_1}\cdots\nabla_{i_s}\nabla_j\nabla_i\alpha_{j_1\ldots j_p} \\
(\Delta_R\nabla^{(s)}\alpha)_{i_1\ldots i_s,j_1\ldots j_p} &= -\nabla^i\nabla_i\nabla_{i_1}\cdots\nabla_{i_s}\alpha_{j_1\ldots j_p} = -g^{ij}\nabla_j\nabla_i\nabla_{i_1}\cdots\nabla_{i_s}\alpha_{j_1\ldots j_p} \\
&= \sigma(\nabla^{(s)}\Delta_R\alpha)_{i_1\ldots i_s,j_1\ldots j_p}
\end{aligned}$$

per a alguna permutació σ. □

Lema 29. *El producte $\langle\nabla^{(s)}d\delta\omega, \nabla^{(s)}\Delta_R\omega\rangle$ es pot expressar com a suma de dos termes $T_1 + T_2$, on $T_1 \geq 0$ i T_2 compleix la desigualtat*

$$|T_2| \leq \text{const } \|\omega\|_{s+1}^2 \ .$$

Demostració. El producte escalar local de $\nabla^{(s)}d\delta\omega$ per $\nabla^{(s)}\Delta_R\omega$ és

$$(\nabla^{(s)}d\delta\omega, \nabla^{(s)}\Delta_R\omega) = (\nabla_{i_1}\ldots\nabla_{i_s}\nabla_i\nabla^k\omega_k)(\nabla^{i_1}\ldots\nabla^{i_s}\nabla^r\nabla_r\omega^i)$$

Aplicant reiteradament (A.1) perquè en el primer factor $\nabla_{i_1}\ldots\nabla_{i_s}\nabla_i$ la derivada ∇_i passi davant de tot, tenim que

$$\nabla_{i_1}\ldots\nabla_{i_s}\nabla_i\nabla^k\omega_k = \nabla_i\nabla_{i_1}\ldots\nabla_{i_s}\nabla^k\omega_k + A(\omega)_{ii_1\ldots i_s} \ ,$$

on $A(\omega)$ és un $(s+1)$-tensor globalment definit. Aleshores,

$$(\nabla^{(s)}d\delta\omega, \nabla^{(s)}\Delta_R\omega) = (\nabla_i\nabla_{i_1}\ldots\nabla_{i_s}\nabla^k\omega_k)(\nabla^{i_1}\ldots\nabla^{i_s}\nabla^r\nabla_r\omega^i) + (A(\omega), \nabla^{(s)}\Delta_R\omega) \, .$$

Passem ara la derivació ∇_i al segon factor tot afegint una divergència:

$$\begin{aligned}
(\nabla^{(s)}d\delta\omega, \nabla^{(s)}\Delta_R\omega) = &- (\nabla_{i_1}\ldots\nabla_{i_s}\nabla^k\omega_k)(\nabla_i\nabla^{i_1}\ldots\nabla^{i_s}\nabla^r\nabla_r\omega^i) \\
&+ \text{ div} + (A(\omega), \nabla^{(s)}\Delta_R\omega) \ .
\end{aligned}$$

Anàlogament, passant la derivació ∇_i del segon factor del primer terme darrera de totes les altres,

$$\nabla_i\nabla_{i_1}\ldots\nabla_{i_s}\nabla^r\nabla_r\omega^i = \nabla_{i_1}\ldots\nabla_{i_s}\nabla_i\nabla^r\nabla_r\omega^i + B(\omega)_{i_1\ldots i_s} \ ,$$

on $B(\omega)$ també és un s-tensor globalment definit. Substituint, ens queda

$$\begin{aligned}
(\nabla^{(s)}d\delta\omega, \nabla^{(s)}\Delta_R\omega) = &- (\nabla_{i_1}\ldots\nabla_{i_s}\nabla^k\omega_k)(\nabla^{i_1}\ldots\nabla^{i_s}\nabla_i\nabla^r\nabla_r\omega^i) \\
&+ (\nabla^{(s)}\delta\omega, B(\omega)) + \text{ div} + (A(\omega), \nabla^{(s)}\Delta_R\omega) \ .
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Finalment, passant el laplacià $\Delta_R = -\nabla^r\nabla_r$ al davant en $\nabla^{i_1}\dots\nabla^{i_s}\nabla_i\nabla^r\nabla_r\omega^i$,

$$\nabla^{i_1}\dots\nabla^{i_s}\nabla_i\nabla^r\nabla_r\omega^i = \nabla^r\nabla_r\nabla^{i_1}\dots\nabla^{i_s}\nabla_i\omega^i + C(\omega)_{i_1\dots i_s} \ ,$$

amb $C(\omega)$ del mateix tipus que $A(\omega)$ i $B(\omega)$. De (A.2) obtenim

$$\begin{aligned}(\nabla^{(s)}d\delta\omega, \nabla^{(s)}\Delta_R\omega) &= -(\nabla_{i_1}\dots\nabla_{i_s}\nabla^k\omega_k)(\nabla^r\nabla_r\nabla^{i_1}\dots\nabla^{i_s}\nabla_i\omega^i) \\ &+(\nabla^{(s)}\delta\omega, C(\omega)) + (\nabla^{(s)}\delta\omega, B(\omega)) + \ \text{div} \ + (A(\omega), \nabla^{(s)}\Delta_R\omega) \ .\end{aligned}$$

Integrant sobre tota la varietat,

$$\begin{aligned}\langle\nabla^{(s)}d\delta\omega, \nabla^{(s)}\Delta_R\omega\rangle =& \langle\nabla^{(s)}\delta\omega, \Delta_R\nabla^{(s)}\delta\omega\rangle \\ &+ \langle\nabla^{(s)}\delta\omega, C(\omega)+B(\omega)\rangle + \langle A(\omega), \nabla^{(s)}\Delta_R\omega\rangle \ .\end{aligned}$$

Definim ara

$$T_1 = \langle\nabla^{(s)}\delta\omega, \Delta_R\nabla^{(s)}\delta\omega\rangle \qquad T_2 = \langle\nabla^{(s)}\delta\omega, C(\omega)+B(\omega)\rangle + \langle A(\omega), \nabla^{(s)}\Delta_R\omega\rangle \ .$$

Òbviament $T_1 \geq 0$, perquè $\langle\nabla^{(s)}\delta\omega, \Delta_R\nabla^{(s)}\delta\omega\rangle = \langle\nabla\nabla^{(s)}\delta\omega, \nabla\nabla^{(s)}\delta\omega\rangle$. Falta veure que T_2 compleix la desigualtat del lema. Per a això veurem que cada un dels termes que intervenen en la definició de T_2 és $\leq \|\omega\|^2_{s+1}$. El producte escalar local de $A(\omega)$ per $\nabla^{(s)}\Delta_R\omega$ és

$$\begin{aligned}(A(\omega), \nabla^{(s)}\Delta_R\omega) &= A(\omega)_{ii_1\dots i_s}\nabla^{i_1}\dots\nabla^{i_s}\nabla^r\nabla_r\omega^i \\ &= -(\nabla^{i_1}A(\omega)_{ii_1\dots i_s})(\nabla^{i_2}\dots\nabla^{i_s}\nabla^r\nabla_r\omega^i) + \ \text{div} \ .\end{aligned} \tag{A.3}$$

Denominem $D(\omega)$ el s-tensor definit per

$$D(\omega)_{ii_2\dots i_s} = -\nabla^{i_1}A(\omega)_{ii_1i_2\dots i_s} \ ,$$

que està globalment definit. Per integració de (A.3) es té

$$\langle A(\omega), \nabla^{(s)}\Delta_R\omega\rangle \ = \ \langle D(\omega), \nabla^{(s-1)}\Delta_R\omega\rangle \ .$$

Remuntant-nos a la definició de A i de D, tenim

$$D(\omega)_{ii_2\dots i_s} = (-\nabla^{i_1}\nabla_{i_1}\nabla_{i_2}\dots\nabla_{i_s}\nabla_i\nabla^k + \nabla^{i_1}\nabla_i\nabla_{i_1}\dots\nabla_{i_s}\nabla^k)\omega_k \ .$$

Veiem, doncs, que $D(\omega)$ és la diferència entre dues permutacions de $\nabla^{(s+2)}$, amb certes contraccions. Pel lema 27,

$$\|D(\omega)\| \leq \text{const}\|\omega\|_s \leq \text{const}\|\omega\|_{s+1} \ .$$

Per altre banda, de manera òbvia,

$$\|\nabla^{(s-1)}\Delta_R\omega\| \leq \|\omega\|_{s+1} \ .$$

De tot això deduïm

$$|\langle A(\omega), \nabla^{(s)}\Delta_R\omega\rangle| = |\langle D(\omega), \nabla^{(s-1)}\Delta_R\omega\rangle| \leq \|D(\omega)\|\|\nabla^{(s-1)}\Delta_R\omega\| \leq \text{const } \|\omega\|_{s+1}^2 .$$

Ocupem-nos ara del terme de T_2 que conté $B(\omega)$. Com que $B(\omega)$ és per definició la diferència entre dues permutacions de $\nabla^{(s+3)}$, amb certes contraccions, tindrem

$$\|B(\omega)\| \leq \text{const } \|\omega\|_{s+1} .$$

Per tant

$$|\langle \nabla^{(s)}\delta\omega, B(\omega)\rangle| \leq \|\nabla^{(s)}\delta\omega\| \; \|B(\omega)\| \leq \text{const } \|\omega\|_{s+1}^2 .$$

De manera anàloga, però utilitzant el lema 28, s'arriba a

$$|\langle \nabla^{(s)}\delta\omega, C(\omega)\rangle| \; \leq \text{const } \|\omega\|_{s+1}^2 .$$

□

El resultat principal abans esmentat és el següent:

Proposició 30. *Sigui* (M, g) *una varietat de Riemann de curvatura* -1*. Per a tot enter* $s \geq 0$ *existeix una constant positiva tal que*

$$\|\Delta_R\alpha\|_s \leq \text{const } \|G\alpha\|_s$$

per a $\alpha \in H_1^{s+2}(M)$*.*

Demostració. En ser $\mathcal{D}_1(M)$ dens a $H_1^{s+2}(M)$ és suficient provar la desigualtat per a $\omega \in \mathcal{D}_1(M)$. Procedirem per inducció sobre s. Quan $s = 0$,

$$\langle (\Delta_R + d\delta)\omega, (\Delta_R + d\delta)\omega\rangle \geq \langle \Delta_R\omega, \Delta_R\omega\rangle + 2\langle d\delta\omega, \Delta_R\omega\rangle . \tag{A.4}$$

Com que $\Delta_R = \Delta + (n-1)I = d\delta + \delta d + (n-1)I$, el terme $\langle d\delta\omega, \Delta_R\omega\rangle$ és

$$\langle d\delta\omega, \Delta_R\omega\rangle = \langle d\delta\omega, d\delta\omega + \delta d\omega + (n-1)\omega\rangle = \langle d\delta\omega, d\delta\omega\rangle + \langle d\delta\omega, \delta d\omega\rangle + (n-1)\langle d\delta\omega, \omega\rangle .$$

D'aquests tres termes, el primer i l'últim són ≥ 0 i el del mig és nul ja que $d^2 = 0$ i

$$\langle d\delta\omega, \delta d\omega\rangle = \langle dd\delta\omega, d\omega\rangle = 0 .$$

Per tant, $\langle d\delta\omega, \Delta_R\omega\rangle$ és ≥ 0. Llavors, de (A.4) deduïm que

$$\|(\Delta_R + d\delta)\omega\|^2 = \langle (\Delta_R + d\delta)\omega, (\Delta_R + d\delta)\omega\rangle \;\geq\; \langle \Delta_R\omega, \Delta_R\omega\rangle = \|\Delta_R\omega\|^2 ,$$

que és el que volíem demostrar. Suposant que la proposició es compleix per a $s-1$, cal provar-la per a s. Aplicant el lema 29,

$$\begin{aligned}\langle \nabla^{(s)}(\Delta_R + d\delta)\omega, \nabla^{(s)}(\Delta_R + d\delta)\omega\rangle &\geq \langle \nabla^{(s)}\Delta_R\omega, \nabla^{(s)}\Delta_R\omega\rangle + 2\langle \nabla^{(s)}d\delta\omega, \nabla^{(s)}\Delta_R\omega\rangle \\ &\geq \langle \nabla^{(s)}\Delta_R\omega, \nabla^{(s)}\Delta_R\omega\rangle + 2T_2 .\end{aligned}$$

D'aquí s'obté

$$\langle\nabla^{(s)}\Delta_R\omega,\nabla^{(s)}\Delta_R\omega\rangle\leq\langle\nabla^{(s)}(\Delta_R+d\delta)\omega,\nabla^{(s)}(\Delta_R+d\delta)\omega\rangle+ \\ +2|T_2|\leq\ \|\nabla^{(s)}(\Delta_R+d\delta)\omega\|^2+\text{const }\|\omega\|^2_{s+1}\,.$$

En l'article [8] es demostra que $\|\omega\|_{s+1}\leq\text{const }\|\Delta_R\omega\|_{s-1}$. Per hipòtesi d'inducció, $\|\Delta_R\omega\|_{s-1}\leq\|(\Delta_R+d\delta)\omega\|_{s-1}$. Per tant,

$$\|\nabla^{(s)}\Delta_R\omega\|^2\leq\|\nabla^{(s)}(\Delta_R+d\delta)\omega\|^2+\text{const }\|(\Delta_R+d\delta)\omega\|^2_{s-1}\leq C\|(\Delta_R+d\delta)\omega\|^2_s$$

que prova la proposició. □

Un teorema sobre l'operador G quan actua sobre $\mathbf{H^s_1(M)}$

El teorema a que fa referència l'encapçalament és el següent: *Sigui (M,g) una varietat de Riemann completa, de curvatura -1. Si $\alpha\in H^s_1(M)$ i $G(\alpha)\in H^s_1(M)$, llavors $\alpha\in H^{s+2}_1(M)$ i $\|\alpha\|_{s+2}\leq\text{const }\|G(\alpha)\|_s$.* La seva demostració és un xic més delicada que les anteriors, no es redueix únicament a un càlcul més o menys llarg. La dificultat rau en que a partir de les hipòtesis cal veure que $\nabla^{s+1}\alpha$ i $\nabla^{s+2}\alpha$ són de $L^2_1(M)$. L'eina que s'utilitza és la *regularització hiperbòlica* per a formes de $\mathbb{H}^n$ que, perquè pugui ser aplicada al cas $\mathbb{H}^n/\mathcal{G}$, ha de ser $\mathcal{G}$-invariant. Aquest procés a la vegada es basa en el concepte de *convolució hiperbòlica de formes* [8]. En definitiva, es tracta d'aproximar una forma de $H^s_1(M)$ invariant per $\mathcal{G}$ que compleix les hipòtesis del teorema per formes C^∞ de $H^s_1(M)$, que són denses a $L^2_{s,1}(M)=H^s_1(M)$. La demostració, doncs, constarà de dues parts: primer es verificarà que les formes C^∞ de $H^s_1(M)$ compleixen el teorema, i després s'estendrà a totes les formes de $H^s_1(M)$.

Lema 31. *Sigui (M,g) una varietat de Riemann completa, de curvatura -1. Si α és una 1-forma C^∞ sobre M tal que $\alpha\in H^s_1(M)$ i $G(\alpha)\in H^s_1(M)$, llavors $\alpha\in H^{s+2}_1(M)$ i existeixen constants tals que per a tota α amb les condicions anteriors es compleix*

$$\|\alpha\|_{s+2}\leq\text{const }\|G(\alpha)\|_s\ ,\ \|\Delta_R\alpha\|_s\leq\text{const }\|G(\alpha)\|_s\ .$$

Demostració. L'estratègia passa per demostrar la segona desigualtat $\|\Delta_R\alpha\|_s\leq\text{const }\|G(\alpha)\|_s$, que implica $\Delta_R\alpha\in H^s_1(M)$, ja que aleshores el lema 3.3 de [8] assegura $\alpha\in H^{s+2}_1(M)$ amb $\|\alpha\|_{s+2}\leq\text{const }\|\Delta_R\alpha\|_s$.

Com és habitual, usarem inducció sobre s. Per a $s=0$ volem veure en primer lloc que $\Delta_R\alpha\in L^2$. Considerem una successió de funcions de $\mathcal{D}(M)$ (una *exhausting sequence*) tal que $\chi_m\nearrow 1$ i tals que $|\nabla^{(k)}\chi_m(x)|\leq c_k$ per a tot m i tot $x\in M$. En l'article [8] es verifica que existeix una tal successió en els casos $M=\mathbb{H}^n$ i $M=\mathbb{H}^n/\mathcal{G}$, i es demostra que donada una forma C^∞ α de $H^s_1(M)$ aleshores $\chi_m\alpha\to\alpha$ a $H^s_1(M)$. Definim $\alpha_m=\chi_m\alpha$ i formem el producte $\langle G(\alpha_m),\alpha_m\rangle$ de L^2. Com que $G=\Delta_R+d\delta=\nabla^*\nabla+d\delta$,

$$\langle G(\alpha_m),\alpha_m\rangle\ =\ \langle\nabla\alpha_m,\nabla\alpha_m\rangle\ +\ \langle\delta\alpha_m,\delta\alpha_m\rangle\ .$$

D'aquí deduïm

$$\langle \nabla \alpha_m, \nabla \alpha_m \rangle \ \leq \ \langle G(\alpha_m), \alpha_m \rangle \ .$$

Desenvolupem per separat cada un dels dos membres de la desigualtat anterior. En ser $\nabla \alpha_m = \nabla(\chi_m \alpha) = (\nabla \chi_m) \otimes \alpha + \chi_m \nabla \alpha$, el producte escalar local $(\nabla \alpha_m, \nabla \alpha_m)$ serà

$$\begin{aligned}(\nabla \alpha_m, \nabla \alpha_m) &= (\nabla \chi_m \otimes \alpha, \nabla \chi_m \otimes \alpha) + (\chi_m \nabla \alpha, \chi_m \nabla \alpha) + 2(\nabla \chi_m \otimes \alpha, \chi_m \nabla \alpha) \\ &= |d\chi_m|^2 |\alpha|^2 + \chi_m^2 |\nabla \alpha|^2 + 2(d\chi_m \otimes \alpha, \chi_m \nabla \alpha)\,.\end{aligned}$$

Per desenrotllar $\langle G(\alpha_m), \alpha_m \rangle$ és necessari conèixer $G(\alpha_m) = G(\chi_m \alpha)$. Un càlcul en coordenades mostra que

$$\begin{aligned}G(\chi_m \alpha) = \chi_m G(\alpha) + (\Delta_R \chi_m)\alpha - C_{23}(\nabla^{(2)} \chi_m \otimes \alpha) \\ -2C_{12}(d\chi_m \otimes \nabla \alpha) - C_{13}(d\chi_m \otimes \nabla \alpha) + (\delta \alpha) d\chi_m\,.\end{aligned} \tag{A.5}$$

on per exemple C_{12} indica l'operador que en cada punt x s'obté per contracció (a través de la mètrica) entre el primer i el segon factor de $\otimes^3 T_x(M)^*$. Llavors,

$$\begin{gathered}(G(\alpha_m), \alpha_m) = (G(\chi_m \alpha), \chi_m \alpha) = \chi_m^2 (G(\alpha), \alpha) + \chi_m \Delta_R \chi_m (\alpha, \alpha) \\ -\chi_m (\nabla^{(2)} \chi_m, \alpha \otimes \alpha) - 2\chi_m (\nabla \alpha, d\chi_m \otimes \alpha) - \chi_m (\nabla \alpha, \alpha \otimes d\chi_m) - \chi_m \delta \alpha (d\chi_m, \alpha) \ .\end{gathered}$$

La desigualtat $\langle \nabla \alpha_m, \nabla \alpha_m \rangle \leq \langle G(\alpha_m), \alpha_m \rangle$ s'escriu

$$\begin{aligned}&\int \{ \ |d\chi_m|^2 |\alpha|^2 + |\chi_m|^2 |\nabla \alpha|^2 + 4\chi_m (d\chi_m \otimes \alpha, \nabla \alpha) \ \} d\mu \ \leq \\ &\qquad \leq \int \{ \ |\chi_m|^2 (G(\alpha), \alpha) + \chi_m \Delta_R \chi_m |\alpha|^2 - \chi_m (\nabla^{(2)} \chi_m, \alpha \otimes \alpha) \\ &\qquad\qquad - \chi_m (\nabla \alpha, \alpha \otimes d\chi_m) - \chi_m \delta \alpha (d\chi_m, \alpha) \ \} d\mu \ .\end{aligned}$$

Per hipòtesi, $|\chi_m|$, $|d\chi_m|$, $|\nabla^{(2)} \chi_m|$ i $|\Delta_R \chi_m|$ estan acotats (per a tot $x \in M$) per una constant C independent de m, per la qual cosa

$$\begin{aligned}&|(d\chi_m \otimes \alpha, \nabla \alpha)| \leq \text{const } |\alpha||\nabla \alpha| \qquad |(\nabla^{(2)} \chi_m, \alpha \otimes \alpha)| \leq \text{const } |\alpha|^2 \\ &|\delta \alpha||(d\chi_m, \alpha)| \leq \text{const } |\alpha||\nabla \alpha|\end{aligned}$$

Anomenem I_m a la integral $\int_M |\chi_m|^2 |\nabla \alpha|^2 d\mu$, que és finita perquè χ_m és de suport compacte. Com que $\alpha, G(\alpha) \in H_p^0(M)$ els productes $\langle G\alpha, \alpha \rangle$ i $\langle \alpha, \alpha \rangle$ són finits de forma que de la desigualtat anterior es dedueix

$$I_m \leq \text{const} \left(\langle G(\alpha), \alpha \rangle + \langle \alpha, \alpha \rangle + \int |\chi_m||\alpha| \ |\nabla \alpha| d\mu \right) \ . \tag{A.6}$$

Per la desigualtat de Schwarz,

$$\int |\chi_m||\alpha| \ |\nabla \alpha| d\mu \leq \left\{ \int |\chi_m|^2 |\nabla \alpha|^2 d\mu \right\}^{1/2} \left\{ \int |\alpha|^2 d\mu \right\}^{1/2} = I_m^{1/2} \|\alpha\| \ .$$

Ara bé, si x, y i ε són nombres reals, es té

$$(y-2\varepsilon x)^2 = y^2 + 4\varepsilon^2 x^2 - 4\varepsilon xy \geq 0 \quad \longrightarrow \quad xy \leq \varepsilon x^2 + \frac{y^2}{4\varepsilon}$$

és a dir,

$$\int |\chi_m||\alpha|\ |\nabla\alpha| d\mu \leq \varepsilon I_m + \frac{\|\alpha\|^2}{4\varepsilon}\ .$$

Prenent $0 < \varepsilon < 1$, l'expressió (A.6) dóna (passant al primer membre tots els termes que porten I_m)

$$I_m = \int |\chi_m|^2 |\nabla\alpha|^2 d\mu \leq \text{const}\ (\langle G(\alpha), \alpha\rangle + \|\alpha\|^2)\ .$$

Però $\langle G(\alpha), \alpha\rangle \ \leq\ \|G(\alpha)\|\,\|\alpha\| \leq (1/2)(\,\|G(\alpha)\|^2 + \|\alpha\|^2)$. Per tant

$$I_m = \int |\chi_m|^2 |\nabla\alpha|^2 d\mu \leq \text{const}\ (\,\|\alpha\|^2 + \|G(\alpha)\|^2)\ .$$

El teorema de la convergència dominada (que es pot aplicar perquè tant $\|\alpha\|$ com $\|G(\alpha)\|$ són finits per ser α i $G(\alpha)$ de $H_1^0(M) = L_1^2(M)$) ens diu que $\int |\nabla\alpha|^2 d\mu$ és finita, és a dir, que $\nabla\alpha \in L_1^2(M)$. Per tant $\alpha \in H_1^1(M)$. Sabem llavors que la successió $\{\alpha_m\}$ convergeix a α en la norma de $H_1^1(M)$. En particular, $\{\nabla\alpha_m\}$ convergeix a $\nabla\alpha$ en $L_1^2(M)$. Com que per altra banda $G(\alpha) \in L_1^2(M)$, $\{G(\alpha_m)\}$ convergeix a $G(\alpha)$ en $L_1^2(M)$. Prenent límits a la desigualtat $\langle\nabla\alpha_m, \nabla\alpha_m\rangle \leq \langle G(\alpha_m), \alpha_m\rangle$ obtenim

$$\langle\nabla\alpha, \nabla\alpha\rangle \ \leq\ \langle G(\alpha), \alpha\rangle\ .$$

D'aquí es dedueix que la norma de $\nabla\alpha$ està controlůlada per

$$\|\nabla\alpha\|^2 \ \leq\ \|G(\alpha)\|\ \|\alpha\| \ \leq\ (1/2)\,(\,\|G(\alpha)\|^2 + \|\alpha\|^2)\ .$$

Llavors, de l'expressió (A.5) s'obté que

$$\|G(\alpha_m)\|^2 \ \leq\ \text{const}\ (\,\|G(\alpha)\|^2 + \|\alpha\|^2)\ .$$

Aquesta desigualtat ens permetrà establir que $\Delta_R\alpha \in L_1^2(M)$. Aplicant la desigualtat de la proposició 30 d'aquest apèndix,

$$\|\Delta_R\alpha_m\|^2 \leq \text{const}\ \|G\alpha_m\|^2 \leq \text{const}\ (\,\|G\alpha\|^2 + \|\alpha\|^2)\ .$$

Com es pot comprovar fàcilment

$$\Delta_R(\alpha_m) = \Delta_R(\chi_m\alpha) = (\Delta_R\chi_m)\alpha + \chi_m\Delta_R\alpha - 2C_{12}(d\chi_m \otimes \nabla\alpha)\ , \qquad \text{(A.7)}$$

de forma que

$$\|\chi_m\Delta_R\alpha\| \leq \|\alpha_m\| + \|\alpha\Delta_R\chi_m\| + 2\|d\chi_m \otimes \nabla\alpha\|\ .$$

Com que $\{\chi_m\}$ és una "exhausting sequence" i la norma de $\nabla\alpha$ està control·lada per $(1/2)(\|G(\alpha)\|^2 + \|\alpha\|^2)$ arribem a

$$\int \chi_m^2 |\Delta_R \alpha|^2 d\mu \leq \text{const} \ (\, \|G(\alpha)\|^2 + \|\alpha\|^2) \ .$$

Pel teorema de la convergència dominada la integral $\int |\Delta_R\alpha|^2 d\mu$ és finita i $\Delta_R\alpha \in L_1^2(M)$. El lema 3.3 de [8] assegura aleshores que $\alpha \in H_1^2(M)$ i que $\|\alpha\|_2 \leq \text{const} \ \|\Delta_R\alpha\|$. Una vegada se sap que $\Delta_R\alpha \in L_1^2(M)$, es poden prendre límits a la desigualtat $\|\Delta_R\alpha_m\| \leq \text{const} \ \|G(\alpha_m)\|$ per obtenir $\|\Delta_R\alpha\| \leq \text{const} \ \|G(\alpha)\|$, que juntament amb l'anterior dóna

$$\|\alpha\|_2 \leq \text{const} \ \|\Delta_R\alpha\| \leq \text{const} \ \|G(\alpha)\| \ .$$

Això prova el lema quan $s = 0$.

Suposem el lema cert per a $s-1$. Com que d'entrada α i $G(\alpha)$ són de $H_1^s(M) \subset H_1^{s-1}(M)$, per hipòtesi d'inducció tindrem $\alpha \in H_1^{s+1}(M)$, $\|\alpha\|_{s+1} \leq C \, \|G(\alpha)\|_{s-1}$ i $\|\Delta_R\alpha\|_{s-1} \leq C \, \|G(\alpha)\|_{s-1}$. Intentem acotar la norma $\|\Delta_R\alpha_m\|_s$ per les quantitats finites $\|G(\alpha)\|_s$ i $\|\alpha\|_{s+1}$. La fórmula (A.5) escrita per l'ordre en les derivades de α és

$$\begin{aligned} G(\chi_m\alpha)_i = \chi_m G(\alpha)_i - 2(\nabla_k\chi_m)(\nabla^k\alpha_i) - (\nabla_k\chi_m)(\nabla_i\alpha^k) \\ -(\nabla^k\alpha_k)(\nabla_i\chi_m) + (\Delta_R\chi_m)\alpha_i - (\nabla_i\nabla_k\chi_m)\alpha^k \ . \end{aligned}$$

Llavors

$$\nabla^{(s)}G(\alpha_m) = \nabla^{(s)}G(\chi_m\alpha) = \chi_m\nabla^{(s)}G(\alpha) + T \ \ ,$$

on T és suma de termes que porten menys de s derivades de $G(\alpha)$ i de termes que porten menys de $s+2$ derivades de α, és a dir, $\|T\|^2 \leq \text{const} \ (\, \|\alpha\|_{s+1}^2 + \|G(\alpha)\|_{s-1}^2)$. El producte escalar local de $\nabla^{(s)}G(\alpha_m)$ per ell mateix serà

$$(\nabla^{(s)}G(\alpha_m), \nabla^{(s)}G(\alpha_m)) = \chi_m^2(\nabla^{(s)}G(\alpha), \nabla^{(s)}G(\alpha)) + (T,T) + 2\chi_m(\nabla^{(s)}G(\alpha), T) \ \ .$$

Integrant sobre M obtenim

$$\begin{aligned} \|\nabla^{(s)}G(\alpha_m)\|^2 &= \int |\chi_m|^2 |\nabla^{(s)}G(\alpha)|^2 d\mu + \|T\|^2 + 2\int |\chi_m| (\nabla^{(s)}G(\alpha), T) d\mu \\ &\leq \text{const} \ \|\nabla^{(s)}G(\alpha)\|^2 + \|T\|^2 + \text{const} \ |\langle \nabla^{(s)}G(\alpha), T\rangle| \, . \end{aligned}$$

Com que

$$|\langle \nabla^{(s)}G(\alpha), T\rangle| \leq \|\nabla^{(s)}G(\alpha)\| \ \|T\| \leq \frac{1}{2} (\, \|\nabla^{(s)}G(\alpha)\|^2 + \|T\|^2)$$

i $\|T\|^2 \leq \text{const} \ (\, \|\alpha\|_{s+1}^2 + \|G(\alpha)\|_{s-1}^2)$ arribem a

$$\|G(\alpha_m)\|_s^2 = \|\nabla^{(s)}G(\alpha_m)\|^2 + \|G(\alpha_m)\|_{s-1}^2 \leq \text{const} \ (\, \|G(\alpha)\|_s^2 + \|\alpha\|_{s+1}^2) \ \ .$$

Segons la proposició 30, $\|\Delta_R \alpha_m\|_s \leq \text{const } \|G(\alpha_m)\|_s$, per la qual cosa

$$\|\Delta_R \alpha_m\|_s^2 \leq \text{const } (\|G(\alpha)\|_s^2 + \|\alpha\|_{s+1}^2) \ . \tag{A.8}$$

Utilitzant la fórmula (A.7) i fent per a $\nabla^{(s)}\Delta_R\alpha_m$ el mateix raonament que per a $\nabla^{(s)}G(\alpha_m)$ arribem a la conclusió que

$$\nabla^{(s)}\Delta_R\alpha_m = \chi_m \nabla^{(s)}\Delta_R\alpha + T' \ ,$$

on ara T' és suma de termes en menys de s derivades de $\Delta_R\alpha$ i termes en menys de $s+2$ derivades de α. La norma de $\nabla^{(s)}\Delta_R\alpha_m$ és

$$\|\nabla^{(s)}\Delta_R\alpha_m\|^2 = \int |\chi_m|^2 |\nabla^{(s)}\Delta_R\alpha|^2 d\mu + \|T'\|^2 + 2\chi_m \langle \nabla^{(s)}\Delta_R\alpha, T'\rangle \tag{A.9}$$

amb $\|T'\|^2 \leq \text{const } (\|\Delta_R\alpha\|_{s-1}^2 + \|\alpha\|_{s+1}^2)$. Com que $\|\nabla^{(s)}\Delta_R\alpha_m\| \leq \|\Delta_R\alpha_m\|_s$, de (A.9) i (A.8) es dedueix que

$$\int |\chi_m|^2 |\nabla^{(s)}\Delta_R\alpha|^2 d\mu \leq \|T'\|^2 + 2|\langle \chi_m \nabla^{(s)}\Delta_R\alpha, T'\rangle| + \text{const } (\|G(\alpha)\|_s^2 + \|\alpha\|_{s+1}^2) \ .$$

Aquí ignorem si $\langle \nabla^{(s)}\Delta_R\alpha, T'\rangle$ és finit perquè només sabem que $\Delta_R\alpha \in H_p^{s-1}$. Com abans, cal aplicar la desigualtat de Schwarz a la integral $\langle \chi_m \nabla^{(s)}\Delta_R\alpha, T'\rangle$,

$$\begin{aligned} \int |\chi_m| |(\nabla^{(s)}\Delta_R\alpha, T')| d\mu &\leq \left(\int |\chi_m|^2 |\nabla^{(s)}\Delta_R\alpha|^2 d\mu \right)^{1/2} \|T'\| \\ &\leq \varepsilon \int |\chi_m|^2 |\nabla^{(s)}\Delta_R\alpha|^2 d\mu + \frac{\|T'\|^2}{4\varepsilon} \ , \end{aligned}$$

de forma que, escollint $0 < \epsilon < 1$,

$$\int |\chi_m|^2 |\nabla^{(s)}\Delta_R\alpha|^2 d\mu \leq \text{const } (\|\Delta_R\alpha\|_{s-1}^2 + \|G(\alpha)\|_s^2 + \|\alpha\|_{s+1}^2) \ .$$

Ara bé, per hipòtesi d'inducció $\|\Delta_R\alpha\|_{s-1}^2 \leq \text{const } \|G(\alpha)\|_{s-1}^2 \leq \text{const } \|G(\alpha)\|_s^2$, i $\|\alpha\|_{s+1}^2 \leq \text{const } \|G(\alpha)\|_{s-1}^2 \leq \text{const } \|G(\alpha)\|_s^2$, Per la qual cosa

$$\int \chi_m^2 |\nabla^{(s)}\Delta_R\alpha|^2 d\mu \leq \text{const } \|G(\alpha)\|_s \ .$$

Això prova que $\int |\nabla^{(s)}\Delta_R\alpha|^2 d\mu$ és finita i que

$$\int |\nabla^{(s)}\Delta_R\alpha|^2 d\mu \leq \text{const } \|G(\alpha)\|_s \ .$$

Per tant,

$$\|\Delta_R\alpha\|_s^2 = \int |\nabla^{(s)}\Delta_R\alpha|^2 d\mu + \|\Delta_R\alpha\|_{s-1}^2 \leq \text{const } \|G(\alpha)\|_s^2 \ .$$

Segons el lema 3.3 de [8] llavors $\alpha \in H_1^{s+2}(M)$ i $\|\alpha\|_{s+2} \leq \text{const } \|\Delta_R\alpha\|_s \leq \text{const } \|G(\alpha)\|_s$. Això clou la demostració. $\square$

La següent proposició afirma que el resultat del lema anterior s'estén a tot $H_1^s(M)$:

Proposició 32. *Sigui (M,g) una varietat de Riemann completa, de curvatura -1. Si $\alpha \in H_1^s(M)$ i $G(\alpha) \in H_1^s(M)$, llavors $\alpha \in H_1^{s+2}(M)$ i existeixen constants tals que per a tota α amb les condicions anteriors es compleix*

$$||\alpha||_{s+2} \leq \text{const } ||G(\alpha)||_s \ , \ ||\Delta_R \alpha||_s \leq \text{const } ||G(\alpha)||_s \ .$$

Demostració. Cal aproximar les formes $\alpha \in H_1^s(M)$ amb $G(\alpha) \in H_1^s(M)$ per formes C^∞ de M amb les mateixes propietats. La varietat M pot ser $\mathbb{H}^n$ o $\mathbb{H}^n/\mathcal{G}$, on $\mathcal{G}$ és un subgrup discret d'isometries de $\mathbb{H}^n$ que actua de manera lliure i pròpiament discontínua. Però el fet que es puguin identificar les formes de $\mathbb{H}^n/\mathcal{G}$ amb les formes de $\mathbb{H}^n$ $\mathcal{G}$-invariants ens permet pensar $H_1^s(M)$ com aquell conjunt format per totes aquelles p-formes $\alpha \in \mathbf{H}^n$ $\mathcal{G}$-invariants tals que $\nabla^{(k)}G(\alpha) \in L^2(\mathcal{F})$ per a tot enter k tal que $0 \leq k \leq s$, on $\mathcal{F}$ és una regió fonamental de $\mathcal{G}$ a $\mathbb{H}^n$ (una regió fonamental $\mathcal{F}$ és un tancat de $\mathbb{H}^n$ de forma que tots els conjunts $g(\mathcal{F}) = \{gx, \ \forall x \in \mathcal{F}\}$, $g \in \mathcal{G}$, defineixen una partició de $\mathbb{H}^n$).

El problema inicial d'aproximar una forma per formes C^∞ dins de $H_1^s(M)$ s'aconsegueix definint per a cada $\varepsilon > 0$ la convolució hiperbòlica de α amb $\delta_\varepsilon(x,y)$,

$$(C_\varepsilon \alpha)(x) = \int_{\mathbb{H}^n} \alpha(y) \wedge *_y \delta_\varepsilon(x,y) \ .$$

L'operador $*$ de Hodge de $H_p(M)$ a $H_{n-p}(M)$ es defineix intrínsecament mitjançant $\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge *\beta$ (per a una expressió algebraica, vegeu [38]). Es demostra que

- $C_0 \alpha = \alpha$ i $C_\varepsilon \alpha$ és C^∞
- $C_\varepsilon \alpha$ és $\mathcal{G}$-invariant si α ho és.
- $C_\varepsilon \alpha \in H_1^s(M)$ amb $\|C_\varepsilon \alpha\|_s \leq \text{const } \|\alpha\|_s$.
- $C_\varepsilon \alpha$ tendeix a α en $H_1^s(M)$ quan $\varepsilon \to 0$.

L'operador $G = \Delta_R + d\delta$ commuta amb totes les isometries, perquè Δ_R i $d\delta$ s'han definit a partir de la derivada covariant, que és un concepte mètric. Es pot veure aleshores que C_ε commuta amb G. Com que $\alpha \in H_1^s(M)$ i $G(\alpha) \in H_1^s(M)$, de la tercera propietat de la regularització hiperbòlica deduïm que $C_\varepsilon \alpha \in H_1^s(M)$ i $C_\varepsilon(G(\alpha)) \in H_1^s(M)$ per a tot ε. El lema 31 aplicat a $C_\varepsilon \alpha$ i a $G(C_\varepsilon \alpha) = C_\varepsilon(G(\alpha))$ ens diu que $C_\varepsilon \alpha \in H_1^{s+2}(M)$. Anem a demostrar que (en variar ε) $\{C_\varepsilon \alpha\}$ és una successió de Cauchy a l'espai $H_1^{s+2}(M)$. Aplicant el lema 31 a la diferència $C_\varepsilon \alpha - C_{\varepsilon'} \alpha$ obtenim

$$\|C_\varepsilon \alpha - C_{\varepsilon'} \alpha\|_{s+2} \leq \text{const } \|G(C_\varepsilon \alpha - C_{\varepsilon'} \alpha)\|_s \leq \text{const } \|C_\varepsilon G(\alpha) - C_{\varepsilon'} G(\alpha)\|_s \quad \text{(A.10)}$$

Ara bé, $G(\alpha)$ i $C_\varepsilon G(\alpha)$ són de $H_1^s(M)$ i en aquest espai $C_\varepsilon G(\alpha)$ convergeix a $G(\alpha)$ quan $\varepsilon \to 0$, i per tant $\{C_\varepsilon G(\alpha)\}$ és una successió de Cauchy en $H_1^s(M)$. Llavors (A.10) ens diu que $\{C_\varepsilon \alpha\}$ és de Cauchy a $H_1^{s+2}(M)$. Com que aquest espai és complet, $\{C_\varepsilon \alpha\}$ tindrà un límit $\beta \in H_1^{s+2}(M) \subset H_1^s(M)$. Però la convergència en la norma $\| \ \|_{s+2}$ és més forta que en la norma $\| \ \|_s$, per la qual cosa β també serà el límit de $\{C_\varepsilon \alpha\}$ en la norma $\| \ \|_s$, que és α. Per tant $\alpha = \beta$ i $\alpha \in H_1^{s+2}(M)$. Finalment, segons el lema 31,

$$\begin{aligned} \|C_\varepsilon \alpha\|_{s+2} &\le \text{const } \|G(C_\varepsilon \alpha)\|_s = \text{const } \|C_\varepsilon G(\alpha)\|_s \\ \|\Delta_R C_\varepsilon \alpha\|_s &\le \text{const } \|G(C_\varepsilon \alpha)\|_s = \text{const } \|C_\varepsilon G(\alpha)\|_s \ . \end{aligned}$$

Prenent límits en les desigualtats anteriors obtenim

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_{s+2} &\le \text{const } \|G(\alpha)\|_s \\ \|\Delta_R \alpha\|_s &\le \text{const } \|G(\alpha)\|_s \ . \end{aligned}$$

□

Resultats per a l'operador $\mathbf{F = G + (n-1)I}$

Proposició 33. *Sigui (M, g) una varietat de Riemann de curvatura -1. Per a tot enter $s \ge 0$ existeix una constant positiva tal que*

$$\|\alpha\|_{s+2} \le \text{const } \|F(\alpha)\|_s$$

per a $\alpha \in H_1^{s+2}(M)$.

Demostració. Es tracta de veure que $\|G(\alpha)\|_s \le$ *const* $\|F(\alpha)\|_s$ i la proposició 32 donarà el resultat final. La desigualtat anterior es demostra per inducció sobre s i considerant $\alpha \in \mathcal{D}(M)$. Com que

$$\langle F(\alpha), \alpha\rangle = \langle \nabla\alpha, \nabla\alpha\rangle + \langle \delta\alpha, \delta\alpha\rangle + 2\langle \alpha, \alpha\rangle \ \ge \ 2\langle \alpha, \alpha\rangle \ ,$$

d'aquí es dedueix en aquest ordre $\|\alpha\|^2 \le \text{const } \|F(\alpha)\| \ \|\alpha\|$, $\|\alpha\| \le \text{const } \|F(\alpha)\|$ i

$$\|G(\alpha)\| \le \|F(\alpha)\| + (n-1)\|\alpha\| \le \text{const } \|F(\alpha)\| \ .$$

que prova la desigualtat per a $s = 0$. Suposant que es compleix per a $s-1$ i emprant la proposició 30,

$$\|\alpha\|_s \le \|\alpha\|_{s+1} \le \text{const } \|G(\alpha)\|_{s-1} \le \text{const } \|F(\alpha)\|_{s-1} \le \text{const } \|F(\alpha)\|_s \ ,$$

i per tant

$$\|G(\alpha)\|_s \le \|F(\alpha)\|_s + (n-1)\|\alpha\|_s \le \text{const } \|F(\alpha)\|_s \ .$$

□

Finalment, el resultat necessari per a la demostració de l'isomorfisme de l'operador F és una conseqüència de les proposicions anteriors:

Proposició 34. *Sigui (M, g) una varietat de Riemann completa, de curvatura -1. Si $\alpha \in H_1^s(M)$ i $F(\alpha) \in H_1^s(M)$, llavors $\alpha \in H_1^{s+2}(M)$ i*

$$\|\alpha\|_{s+2} \leq \text{const } \|F(\alpha)\|_s \ .$$

Demostració. La primera afirmació se segueix de $\alpha \in H_1^s(M)$ i $F(\alpha) \in H_1^s(M)$, perquè $G(\alpha) = F(\alpha) - (n-1)\alpha \in H_1^s(M)$ i la proposició 32 ens assegura que $\alpha \in H_1^{s+2}(M)$. Llavors $\|\alpha\|_{s+2} \leq \text{const } \|F(\alpha)\|_s$ per la proposició 33. $\square$

APÈNDIX B

La propietat involutiva de l'equació d'Einstein

Lema 35 ([32, 33]). *Sigui* $\{t, x^1, x^2, x^3\}$ *un sistema de coordenades adaptat a* M. *Aleshores, si les dades de Cauchy compleixen les equacions de lligam* $G^0_\alpha = \chi T^0_\alpha$ *a* M *i* $\tilde{g}$ *és solució de*

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{ij} = \chi(T_{ij} - \frac{1}{2}(\ tr_{\tilde{g}}T)\tilde{g}_{ij}) \\ \qquad div_{\tilde{g}}(T) = 0 \end{cases} \tag{B.1}$$

aleshores $G^0_\alpha = \chi T^0_\alpha$ *per a tot* t *per al qual existeix una solució de (B.1).*

Demostració. En ser G el tensor d'Einstein i $\operatorname{div}(T) = 0$, tindrem que $\operatorname{div}(G - \chi T) = 0$, és a dir, $\nabla_\beta(G^\beta_\alpha - \chi T\beta_\alpha) = 0$. La idea és transformar aquesta divergència en una equació en $(G^0_\alpha - \chi T^0_\alpha)$. Com que

$$\nabla_\beta(G^\beta_\alpha - \chi T^\beta_\alpha) = \nabla_i(G^i_\alpha - \chi T^i_\alpha) + \nabla_t(G^0_\alpha - \chi T^0_\alpha), \tag{B.2}$$

serà necessari relacionar els $(G^i_\alpha - \chi T^i_\alpha)$ amb els $(G^0_\alpha - \chi T^0_\alpha)$. Recordem que $G^\alpha_\beta = \mathcal{R}^\alpha_\beta - \frac{1}{2}\mathrm{R}\delta^\alpha_\beta$ i que de $G = \chi T$ es dedueix que $R = -\chi\ \mathrm{tr}_{\tilde{g}}(T)$. Els components $(G^0_i - \chi T^0_i)$ són, tenint present que $\mathcal{R}_{ij} - \chi T_{ij} = -\frac{1}{2}\ \mathrm{tr}_{\tilde{g}}(T)\tilde{g}_{ij}$,

$$G^0_i - \chi T^0_i = \mathcal{R}^0_i - \chi T^0_i = \tilde{g}^{0\alpha}(\mathcal{R}_{\alpha i} - \chi T_{\alpha i}) = \tilde{g}^{00}(\mathcal{R}_{0i} - \chi T_{0i}) - \frac{1}{2}\tilde{g}^{0j}\tilde{g}_{ij}\ \mathrm{tr}_{\tilde{g}}(T) \tag{B.3}$$

Quant als $G^0_0 - \chi T^0_0$,

$$\begin{aligned} G^0_0 - \chi T^0_0 &= \mathcal{R}^0_0 - \frac{1}{2}\mathrm{R} - \chi T^0_0 = \tilde{g}^{0\alpha}(\mathcal{R}_{\alpha 0} - \chi T_{\alpha 0}) - \frac{1}{2}\mathrm{R} \\ &= \tilde{g}^{00}(\mathcal{R}_{00} - \chi T_{00}) + \tilde{g}^{0i}(\mathcal{R}_{i0} - \chi T_{i0}) + \frac{1}{2}\chi\ \mathrm{tr}_{\tilde{g}}(T)\ . \end{aligned} \tag{B.4}$$

Els termes que cal relacionar amb els anteriors són,

$$G^i_0 - \chi T^i_0 = \mathcal{R}^i_0 - \chi T^i_0 = \tilde{g}^{i\alpha}(\mathcal{R}_{\alpha 0} - \chi T_{\alpha 0}) = \tilde{g}^{i0}(\mathcal{R}_{00} - \chi T_{00}) + \tilde{g}^{ij}(\mathcal{R}_{j0} - \chi T_{j0}) \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned} G^i_j - \chi T^i_j &= \mathcal{R}^i_j - \frac{1}{2}\mathrm{R}\delta^i_j - \chi T^i_j = \tilde{g}^{i\alpha}(\mathcal{R}_{\alpha j} - \chi T_{\alpha j}) - \frac{1}{2}\mathrm{R}\delta^i_j \\ &= \tilde{g}^{i0}(\mathcal{R}_{0j} - \chi T_{0j}) - \frac{1}{2}\chi\ \mathrm{tr}(T)\tilde{g}^{ik}\tilde{g}_{kj} + \frac{1}{2}\chi\ \mathrm{tr}(T)\delta^i_j \\ &= \tilde{g}^{i0}(\mathcal{R}_{0j} - \chi T_{0j}) + \frac{1}{2}\chi\ \mathrm{tr}(T)\tilde{g}^{i0}\tilde{g}_{0j} \end{aligned} \tag{B.6}$$

Aquí s'ha fet ús de $\tilde{g}^{ik}\tilde{g}_{kj} + \tilde{g}^{i0}\tilde{g}_{0j} = \delta^i_j$ i altra vegada de la hipòtesi $\mathcal{R}_{ij} - \chi T_{ij} = -\frac{1}{2}\ \mathrm{tr}_{\tilde{g}}(T)\tilde{g}_{ij}$. Aïllant la combinació $\mathcal{R}_{0i} - \chi T_{0i}$ de (B.3),

$$\mathcal{R}_{0i} - \chi T_{0i} = \frac{1}{\tilde{g}^{00}}[(G^0_i - \chi T^0_i) + \frac{1}{2}\chi\ \mathrm{tr}(T)\tilde{g}^{0j}\tilde{g}_{ij}].$$

Substituint aquesta última expressió en (B.4) i emprant les identitats $\tilde{g}^{0j}\tilde{g}_{jk} + \tilde{g}^{00}\tilde{g}_{0k} = \delta^0_k = 0$ i $\tilde{g}^{0i}\tilde{g}_{i0} + \tilde{g}^{00}\tilde{g}_{00} = \delta^0_0 = 1$, s'obté

$$\mathcal{R}_{00} - \chi T_{00} = \frac{1}{\tilde{g}^{00}}\left[(G^0_0 - \chi T^0_0) - \frac{\tilde{g}^{0i}}{\tilde{g}^{00}}(G^0_i - \chi T^0_i) - \frac{1}{2}\chi\ \mathrm{tr}(T)\tilde{g}^{00}\tilde{g}_{00}\right].$$

En substituir aquestes expressions de $\mathcal{R}_{00} - \chi T_{00}$ i $\mathcal{R}_{0i} - \chi T_{0i}$ en les fórmules (B.5) i (B.6) els termes en $\mathrm{tr}(T)$ desapareixen. Els que acompanyen a $G^i_0 - \chi T^i_0$ són

$$-\tilde{g}^{i0}\tilde{g}_{00} + \frac{\tilde{g}^{ij}\tilde{g}^{0k}\tilde{g}_{jk}}{\tilde{g}^{00}} = -\tilde{g}^{i0}\tilde{g}_{00} - \tilde{g}^{ij}\tilde{g}_{j0} = -\tilde{g}^{i\alpha}\tilde{g}_{\alpha 0} = -\delta^\alpha_0 = 0$$

perquè $\tilde{g}^{0k}\tilde{g}_{kj} + \tilde{g}^{00}\tilde{g}_{0j} = 0$, i els de $G^0_0 - \chi T^0_0$,

$$\frac{\tilde{g}^{i0}\tilde{g}^{0k}\tilde{g}_{jk}}{\tilde{g}^{00}} + \tilde{g}^{i0}\tilde{g}_{0j} = -\tilde{g}^{i0}\tilde{g}_{0j} + \tilde{g}^{i0}\tilde{g}_{0j} = 0.$$

Llavors, els $G^i_0 - \chi T^i_0$ són iguals a una combinació de tots els $G^0_\alpha - \chi T^0_\alpha$, mentre que els $G^i_j - \chi T^i_j$ únicament dels $G^0_j - \chi T^0_j$:

$$G^i_0 - \chi T^i_0 = B^{i\alpha}(G^0_\alpha - \chi T^0_\alpha) \quad ; \quad G^i_j - \chi T^i_j = C^i(G^0_j - \chi T^0_j),$$

on els coeficients $B^{i\alpha}$ i C^i depenen de la mètrica $\tilde{g}$.

La condició (B.2) quan $\alpha = 0$ és $\nabla_t(G^0_0 - \chi T^0_0) + \nabla_i(G^i_0 - \chi T^i_0) = 0$. Com que $\nabla_\alpha A^\beta_\gamma = \partial_\alpha A^\beta_\gamma + \Gamma^\beta_{\alpha\delta}A^\delta_\gamma - \Gamma^\delta_{\alpha\gamma}A^\beta_\delta$ les derivades covariants fan aparèixer termes en $G^\beta_\alpha - \chi T^\beta_\alpha$, es a dir, una vegada usades les relacions (B.5) i (B.6), termes en $G^0_\alpha - \chi T^0_\alpha$:

$$\partial_t(G^0_0 - \chi T^0_0) + A^{i\beta}\partial_i(G^0_\beta - \chi T^0_\beta) + B^\beta(G^0_\beta - \chi T^0_\beta) = 0.$$

Anàlogament, quan $\alpha = j$ l'expressió $\tilde{\nabla}_i(G^i_j - \chi T^i_j) + \tilde{\nabla}_t(G^0_j - \chi T^0_j) = 0$ s'escriu

$$\partial_t(G^0_j - \chi T^0_j) + A^i\partial_i(G^0_j - \chi T^0_j) + B^\alpha(G^0_\alpha - \chi T^0_\alpha) = 0.$$

En aquestes expressions els coeficients A i B depenen únicament de la mètrica $\tilde{g}$ i dels símbols de Christoffel. En conjunt, aquestes dues equacions equivalen al sistema

$$\partial_t(G^0_\alpha - \chi T^0_\alpha) + A^{i\beta}_\alpha\partial_i(G^0_\beta - \chi T^0_\beta) + B^\beta_\alpha(G^0_\beta - \chi T^0_\beta) = 0,$$

amb $A^{i\beta}_0 = A^{i\beta}$ i $A^{i\beta}_j = A^i\delta^\beta_j$, l'unica solució del qual, per a $(G^0_\alpha - \chi T^0_\alpha)|_M = 0$ és $(G^0_\alpha - \chi T^0_\alpha) = 0$ a tot V_M. $\square$

Bibliografia

[1] **J.M.Arms, J.E.Marsden:** The absence of Killing fields is necessary for linearization stability of Einstein's equations, *J.Math.Phys. 18 (1977), 830-833.*

[2] **T.Aubin:** Espaces de Sobolev sur les variétés riemanniennes, *Bull. Sc. math. 100 (1976), 149-173.*

[3] **D.Bao, J.E.Marsden, R.Walton:** The hamiltonian structure of general relativistic perfect fluids. *Commun. Math. Phys. 99 (1985), 319-345.*

[4] **Berger, Ebin:** . *J. of Diff. Geom. 3 (1969), 379-392.*

[5] **S.Bochner:** Vector fields and Ricci curvature. *Bull.Am.Math.Soc. 52 (1946), 776-797*

[6] **D.Brill, S.Deser:** Instability of closed spaces in general relativity. *Comm. Math. Phys. 32 (1973), 291-304*

[7] **U.Brauer:** Singularitäten in relativistischen Materiemodellen. *PhD Thesis, University of Postdam, 1995*

[8] **J.Bruna, J.Girbau:** Mapping properties of the laplacian in Sobolev spaces of forms on complete hyperbolic manifolds, *Annals of Global Analysis and Geometry. 25 (2004), 151-176*

[9] **M.Cantor:** Some problems of global analysis on asymptotically simple manifolds. *Comp. Math. 38 (1979), p.3-35.*

[10] **M.Cantor:** Spaces of functions with asymptotic conditions on $\mathbb{R}^n$. *Indiana Univ. Mat. J. 24 (1975), 897-902.*

[11] **Y.Choquet-Bruhat, S.Deser:** On the stability of flat space, *Ann. Phys. 81 (1973), 165-178.*

[12] **Y.Choquet-Bruhat, A.Fischer, J.E.Marsden:** Equations des constraintes sur une variété non compacte, *C. R. Acad. Sci. Paris, 284 (1977), A975-A978.*

[13] **Y.Choquet-Bruhat:** Théorème d'existence pour certain systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires, *Acta Mathematica, 88 (1952), 141-225.*

[14] **Y.Choquet-Bruhat, J.York:** The Cauchy problem, *Einstein Centenary Volume, Held(ed.) (1980a), 99-172*

[15] **Y.Choquet-Bruhat:** Hyperbolicity of 3+1 system of Einstein equations, *Comm. Math. Phys.89 (1983), 269-275*

[16] **Y.Choquet-Bruhat,J.W.York:** Geometrical well posed systems for Einstein equations, *C.R. Acad. Sci. Paris, t.231, série I (1995), 1089-1095*

[17] **Courant-Hilbert:** Methods of Mathematical Physics *Interscience Publishers, Vol.II,1962.*

[18] **A.Einstein:** Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. *Preussiche Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberiche, (1916), 688-696.*

[19] **A.Einstein:** Über Gravitationswellen. *Preussiche Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberiche, (1918), 154-167.*

[20] **A.Fischer, J.Marsden:** The Einstein evolution equations as a first-order quasi-linear symmetric hyperbolic system. *Comm. Math. Phys. 28(1972), 1-38.*

[21] **A.Fischer, J.Marsden:** Linearization stability of nonlinear partial differential equations. *Proc. Symposia in Pure Mathematics, 27, (1975), 219-263.*

[22] **A.Fischer, J.Marsden:** The initial value problem and the dynamical formulation of general relativity. *Einstein Centenary Volume, Hawking and Israel (eds.) Cambridge University Press, Cambridge (1979), 138-211.*

[23] **A.Fischer, J.Marsden:** Linearization stability of the Einstein equations. *Bull. Am. Math. Soc., 79, (1979), 995-1001.*

[24] **H.Friedrich, A.Rendall:** The Cauchy problem for the Einstein equations. *Einstein's Field Equations and Their Physical Implications. Lecture Notes in Physics, 540, 2000, p. 27-223.*

[25] **S.Frittelli,O.A.Reula:** First-order symmetric hyperbolic Einstein equations with arbitrary fixed gauge. *Physical Review Letters,vol.76,n.25 (1996).*

[26] **J.Girbau:** Geometria diferencial i Relativitat. *Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra 1993.*

[27] **S.Hawking, G.F.Ellis:** The large scale structure of space-time. *Cambridge monographs on mathematical physiscs, Cambridge (1973).*

[28] **S.Hawking, R.Penrose:** The nature of space and time. *The Isaac Newton Institute series of lectures, Princeton University Press, Princeton New Jersey (1996).*

[29] **E.Hebey:** Sobolev spaces on Riemannian manifolds. *Lectures notes in Mathematics 1635, Springer-Verlag, Berlin.*

[30] **J.R.Hugues,T.Kato,J.Marsden:** Well-posed quasi-linear second-order hiperbolic systems with applications to nonlinear elastodynamics and general relativity. *Arch. Ration. Mech. Anal.,63,(1977),273-294.*

[31] **J.Leray:** Hyperbolic differential equations. *Institute for Advanced Study, (1953).*

[32] **A.Lichnerowicz:** Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. *Masson et Cie, éditeurs, Paris, (1955).*

[33] **A.Lichnerowicz:** Relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics. *Benjamin, New York, (1967).*

[34] **J.E.Marsden:** The initial value problem and dynamics of gravitational fields. *Proceedings of the ninth International Conference on General Relativity and Gravitation, Cambridge University Press, (1983), p.115-126.*

[35] **V.Moncrief:** Space-time symmetries and linearization stability of the Einstein equations (I). *J. Math. Phys. 16 (1975), 493-498.*

[36] **V.Moncrief:** Space-time symmetries and linearization stability of the Einstein equations (II). *J. Math. Phys. 17 (1976), 1893-1902.*

[37] **J.Stewart:** Advanced general relativity. *Cambridge University Press.*

[38] **S.Xambó:** Algebra lineal y geometrias lineales, vol. II. *Ed. Eunibar, 1977.*