Localización, acciones propias y espacios clasificadores de grupos discretos

Ramón J. Flores

Localización, acciones propias y espacios clasificadores de grupos discretos

Ramón Jesús Flores Díaz

Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona.

Bellaterra, Diciembre de 2003.

CERTIFICO que la presente Memoria ha sido realizada bajo mi dirección por Ramón Jesús Flores Díaz, y constituye su Tesis Doctoral.

Bellaterra, Diciembre de 2003.

Fdo: Dr. Carlos Broto Blanco.

We may not hold that strength which in old days

Moved earth and heaven; what we can do, we'll do,

One equal temper of heroic hearts,

Tested by time and fate, but strong in will

To strive, to seek, to find and not to yield.

A. Tennyson, *Ulysses*

Índice general

Introducción

En 1974, Sullivan conjeturó ([163]) que si X fuera un complejo finito, o al menos sometido a ciertas condiciones de finitud, el espacio de aplicaciones $\mathrm{map}_*(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p, X)$ debería ser contráctil para todo primo p. La resolución de este problema por Miller ([127]) y los subsiguientes trabajos de Dwyer-Zabrodsky ([79]), Lannes ([106]) y otros pusieron de manifiesto que quizá la manera más apropiada de estudiar la homotopía mod p de un espacio era a través del mencionado espacio de aplicaciones, al menos para el caso de X nilpotente. Una excelente exposición de estos resultados puede encontrarse en el libro de Schwartz ([157]).

Sean A y X dos espacios. Dror-Farjoun y Nofech han formalizado y generalizado recientemente ([69] y [136]) este método de trabajo definiendo la teoría de A-homotopía de X, donde A y sus suspensiones desempeñan el mismo papel que las esferas juegan en homotopía clásica (que en este contexto no es más que la S^0-homotopía), y los grupos de A-homotopía $\pi_i(X; A)$ se definen como las clases de homotopía de aplicaciones punteadas $\Sigma^i A \longrightarrow X$. De acuerdo con lo dicho anteriormente, es claro que conocer el espacio $\mathrm{map}_*(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p, X)$ es equivalente a conocer la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-homotopía de X.

Dos de las herramientas que se han mostrado más efectivas en este contexto han sido los funtores de anulación $\mathbf{P}_{\Sigma^i A}$ y celularización $\mathbf{CW}_{\Sigma^i A}$, que pueden verse como los análogos en teoría de A-homotopía de las secciones de Postnikov y los recubridores i-conexos de X. Además, los espacios para los cuales $X \simeq \mathbf{P}_A(X)$ (espacios A-nulos) desempeñan el papel de los espacios débilmente contráctiles, y los espacios tales que $A \simeq \mathbf{CW}_A X$, llamados espacios A-celulares, son los análogos de los CW-complejos; en particular, la A-celularización puede verse sencillamente como la aproximación A-celular a X. Estos funtores fueron definidos por Bousfield ([23]) en 1994 y Dror-Farjoun ([69]) en 1996, respectivamente, y desde entonces han sido ampliamente estudiados ([19], [24], [42], [43], [72]...); en el primer capítulo los definimos y describimos con precisión.

Nuestro objetivo en este trabajo ha sido calcular la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación y $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celularización de espacios clasificadores de grupos discretos. El estudio se divide de forma natural en dos partes bien diferenciadas, que corresponden a los casos finito e infinito, y que son tratadas con diferentes métodos y propósitos.

En la primera de ellas, nuestra idea ha sido ver cómo el valor de estos funtores sobre $\mathrm{B}G$ refleja y a la vez describe la estructura p-primaria del grupo, incluso en el caso en que G no es nilpotente, y por tanto su espacio clasificador tampoco lo es. Es sintomático que la inmensa mayoría de los resultados que han descrito el tipo de homotopía de X a través del espacio de aplicaciones $\mathrm{map}_*(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p, X)$ hacen uso de hipótesis de nilpotencia sobre X. Podemos recordar por ejemplo el resultado de Lannes-Schwartz ([105]), que establece que si X es nilpotente con grupo fundamental finito y cohomología módulo p de tipo finito, entonces es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-nulo si y sólo si su cohomología es localmente finita respecto de la acción del álgebra de Steenrod. Desafortunadamente, no se sabe demasiado si X no cumple la condición de nilpotencia.

Sin embargo, el caso del espacio clasificador de un grupo discreto G no nilpotente parece el primer ejemplo de espacio no nilpotente cuya homotopía módulo p es accesible a través del espacio de aplicaciones punteadas con espacio de partida $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$. La razón de esto es que el espacio $\mathrm{map}_*(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p, \mathrm{B}G)$ se describe como el espacio de homomorfismos $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p, G)$, que es homotópicamente discreto. Si además suponemos que G es finito, el espacio $\mathrm{B}G$ es $\mathbb{Z}/p$-bueno para la $\mathbb{Z}/p$-compleción de Bousfield-Kan, y esto nos permite utilizar técnicas como cuadrados aritméticos o descomposiciones homológicas mod p que no tienen análogos en el caso infinito.

Uno de los invariantes clásicos que miden la parte p-primaria de la estructura homotópica de un espacio X son los grupos de homotopía con coeficientes en $\mathbb{Z}/p$, introducidos por Peterson en [142] y estudiados posteriormente en [48] y [134]. Recordemos que el $(n+1)$-simo grupo de homotopía de X con coeficientes en $\mathbb{Z}/p$ se define como el grupo de clases de homotopía de aplicaciones punteadas $[M(\mathbb{Z}/p, n), X]_*$, donde $M(\mathbb{Z}/p, n)$ es el espacio de Moore correspondiente y n es mayor que 1. Por tanto, entender estos grupos de homotopía equivale a describir la $M(\mathbb{Z}/p, 1)$-teoría de homotopía de X. Este problema fue abordado en los trabajos [24], [34] y [152], donde se describe con precisión la $M(\mathbb{Z}/p, 1)$-anulación y la $M(\mathbb{Z}/p, 1)$-celularización de $\mathrm{B}G$. Así, parece natural preguntarse si es posible dar una descripción similar de la $B\mathbb{Z}/p$-homotopía de BG y, en caso de ser esto posible, qué relación la une con la ya mencionada parte p-primaria de su homotopía clásica. Dicha relación es clarificada en los primeros capítulos del trabajo.

La segunda parte de esta Memoria está dedicada, esencialmente, a probar que el funtor de $B\mathbb{Z}/p$-anulación establece un puente entre la teoría de acciones clásicas de grupos discretos y la teoría de acciones propias. Recordemos que si G es un grupo discreto, se dice que un CW-complejo X es un G-CW-complejo si G actúa sobre X permutando células. Si además los grupos de isotropía de la acción son finitos, decimos que X es un G-CW-complejo *propio*, o bien que la acción de G sobre X es propia.

El interés por la teoría de acciones propias se ha multiplicado a partir del establecimiento de la conjetura de Baum-Connes, que tal y como es reformulada en [11], establece que si G es un grupo localmente compacto, Hausdorff y segundo numerable, los K-grupos algebraico-topológicos de la C^*-álgebra de G, $K_j(C_r^*(G))$, son isomorfos a los grupos de K-homología equivariante de Kasparov $K_j^G(\underline{E}G)$, para $j = 0, 1$. Aquí, $\underline{E}G$ es el "espacio clasificador para acciones propias", que puede describirse como el único G-CW-complejo propio $\underline{E}G$ (salvo G-homotopía) que posee la siguiente propiedad universal:

"Si X es otro G-CW-complejo propio, existe una G-aplicación $X \longrightarrow \underline{E}G$ que es única salvo G-homotopía."

Hay que destacar que la definición de acción propia para grupos topológicos es la que damos en 2.1.4, que coincide con la mencionada anteriormente si G es discreto. Supondremos a partir de ahora que éste es el caso.

Una parte importante de los esfuerzos desarrollados en teoría de acciones propias han estado encaminados a entender la relación existente entre la estructura algebraica de G y las propiedades homotópicas de $\underline{E}G$ y su espacio cociente $\underline{E}G/G$, que suele ser denotado $\underline{B}G$. Esta línea de investigación se ha revelado particularmente eficaz interpretando correctamente condiciones de finitud de teoría de grupos de G para construir modelos finitos (finito-dimensionales, finitamente dominados) de $\underline{E}G$. En 2.4 repasamos los mayores logros en esta área.

Igual que ocurre con las acciones clásicas de grupos, la relevancia de $\underline{E}G$ y en particular de $\underline{B}G$ no proviene únicamente de que reflejan geométricamente las propiedades algebraicas de G, sino también de la importancia de estos espacios en la teoría de G-fibrados. Ya Baum-Connes-Higson señalaron que $\underline{B}G$

clasifica G-fibrados propios (ver 2.2.3), y describieron el modo de obtenerlos mediante productos fibrados de aplicaciones $X \longrightarrow \underline{\mathrm{B}}G$, un método de claro regusto clásico.

El intento más serio realizado hasta la fecha de entender el tipo de homotopía de $\underline{\mathrm{B}}G$ es el artículo de Leary-Nucinkis [108]. En él, los autores demuestran que para cada CW-complejo X existe un grupo discreto G_X de modo que $\underline{\mathrm{B}}G_X$ es del mismo tipo de homotopía que X. Este resultado tipo "Kan-Thurston" se prueba utilizando esencialmente herramientas procedentes de la teoría de grafos de grupos. Como consecuencia, se obtiene una descripción precisa del grupo fundamental de $\underline{\mathrm{B}}G$ y una construcción de $\underline{\mathrm{B}}G$ para ciertos grupos de Coxeter.

Aunque estos resultados nos han sido muy útiles, creemos que una de las mayores aportaciones de este trabajo, si no la mayor, ha sido abordar el estudio de $\underline{\mathrm{B}}G$ desde un punto de vista radicalmente diferente, utilizando herramientas de teoría de homotopía que han aparecido en los últimos años en contextos bastante alejados del que nos ocupa. Más concretamente, nuestra idea ha sido encontrar un funtor de localización homotópica $F : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Top}$ que transforme modelos de $\mathrm{B}G$ en modelos de $\underline{\mathrm{B}}G$, y que a la vez tenga propiedades suficientemente buenas como para poder "leer" información sobre $\underline{\mathrm{B}}G$ a partir de $\mathrm{B}G$, y a la inversa.

En concreto, el funtor que resuelve nuestro problema es de nuevo la anulación respecto a ciertos espacios clasificadores de grupos, que nos permite utilizar la maquinaria de teoría de localización descrita en la primera parte de la Memoria (y en particular las propiedades de preservación de fibraciones y el lema 1.1.6) para obtener abundante información homotópica sobre $\underline{\mathrm{B}}G$ y modelos para la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de espacios clasificadores de grupos discretos infinitos. Nuestro principal resultado es el siguiente:

Teorema 7.1.2. *Sea G un grupo discreto tal que existe un modelo finito-dimensional o finitamente dominado para $\underline{\mathrm{B}}G$. Denotemos $W = \bigvee \mathrm{B}\mathbb{Z}/p$, donde el wedge está extendido a todos los primos. Entonces tenemos una equivalencia homotópica $\mathbf{P}_W \mathrm{B}G \simeq \underline{\mathrm{B}}G$, donde $\mathbf{P}_W$ denota la W-anulación.*

Obsérvese que la condición concerniente a la existencia de un modelo de $\underline{\mathrm{B}}G$ que cumpla condiciones de finitud no es demasiado restrictiva, debido a la gran cantidad de grupos que han surgido en los últimos años para los cuales dichas condiciones se cumplen (ver la sección 2.4).

A continuación describiremos con mayor detalle el contenido de cada uno de los capítulos de esta Memoria.

En el capítulo primero se presenta la maquinaria de teoría de homotopía que va a ser estudiada cuidadosamente y usada con gran frecuencia en el trabajo, poniendo énfasis especial en la descripción de los funtores $\mathbf{P}_A$ y $\mathbf{CW}_A$. Tras recordar las circunstancias y motivaciones que provocaron la aparición de estos funtores (lo cual incluye un resumen histórico de teoría de (co)localización homotópica), comentamos sus principales propiedades, construimos explícitamente sus modelos más conocidos y citamos los ejemplos más importantes que de ellos han aparecido. Especial atención dedicamos igualmente al estudio de las clases de espacios en que estos funtores repiten (espacios A-nulos y A-celulares respectivamente), a los espacios A-acíclicos y al resto de las estrechas relaciones que unen a dichos funtores. Este capítulo concluye con un breve resumen de las características de los colímites homotópicos y de la compleción de Bousfield-Kan, herramientas que son utilizadas masivamente en la Memoria.

El capítulo segundo, también preliminar, se dedica al estudio de la teoría de acciones propias y de los espacios clasificadores para familias de subgrupos. Tras exponer los conceptos generales y propiedades principales de estas construcciones y recordar sus antecedentes históricos, realizamos un recorrido por los variados problemas en que se han visto envueltas. En este sentido, describimos de forma bastante detallada la conjetura de Baum-Connes, pues éste es con toda seguridad el motivo del notable incremento en los últimos años de la investigación sobre esta teoría, que ha pasado a ocupar un papel central dentro de la homotopía G-equivariante. La última parte del capítulo la dedicamos a recordar los principales avances que la aparición de los espacios clasificadores para acciones propias supuso en teoría de la dimensión y en la determinación de la relación entre condiciones de finitud geométricas y algebraicas.

Nuestro estudio de la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-homotopía de $\mathrm{B}G$ para G finito es desarrollado en los capítulos tercero, cuarto y quinto. El primero de ellos comienza con la caracterización de la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación del espacio clasificador de un grupo finito por medio de una fibración recubridora. Recordemos que el $\mathbb{Z}/p$-radical $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$ de un grupo G es el subgrupo normal minimal de G que contiene a toda la p-torsión.

Teorema 3.1.6. *Sea G un grupo finito, p un número primo; entonces, la*

$\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de $\mathrm{B}G$ es el espacio total de la siguiente fibración:

$$\prod_{q \neq p} \mathrm{B}(\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G)^{\wedge}_{q} \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G \longrightarrow \mathrm{B}(G/\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G).$$

Como corolario inmediato obtenemos que si el grupo G es simple (y contiene p-torsión), la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de $\mathrm{B}G$ es simplemente conexa, y una prueba sencilla de que si G es nilpotente, $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G$ es un espacio de Eilenberg-MacLane que también lo es; de hecho, se puede probar que esto ocurre incluso si el grupo no es finito.

Si $M(\mathbb{Z}/p, 1)$ es un espacio de Moore de dimensión dos, los resultados de ([24], sección 7) y el teorema anterior garantizan que la $M(\mathbb{Z}/p, 1)$-anulación de $\mathrm{B}G$ es homotópicamente equivalente a la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de $\mathrm{B}G$. Por tanto, estos funtores coinciden sobre espacios clasificadores de grupos finitos, y esto prueba que la relación citada más arriba entre la parte p-primaria de la homotopía de $\mathrm{B}G$ y su $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-teoría de homotopía es realmente muy estrecha. Por otro lado, es fácil ver que estos dos funtores no siempre coinciden: basta tomar por ejemplo $p = 2$ y $X = \mathbb{R}\mathbf{P}^2$.

Una importante consecuencia de la anterior observación es que una gran parte de los resultados de [152] relativos a espacios de Moore son también válidos para el caso de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación, y en particular nos permiten obtener una descripción muy precisa del valor del funtor acíclico $\overline{\mathbf{P}}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}$ sobre $\mathrm{B}G$.

Finalizamos el estudio de $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G$, G finito, utilizando nuestra descripción para probar (3.2.2) que los funtores de anulación $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}$ y $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}$ conmutan sobre $\mathrm{B}G$ para primos diferentes p y q y estableciendo algunas relaciones (3.3.2 y 3.3.4) entre la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación y la compleción de Bousfield-Kan en los anillos $\mathbb{Z}/p$ y $\mathbb{Z}[1/p]$.

El cuarto capítulo de esta Memoria está dedicado al análisis de la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celularización de $\mathrm{B}G$, de nuevo para G finito. Nuestro principal resultado en este tema ha sido la caracterización de la clase de grupos finitos G tales que $\mathrm{B}G$ es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celular.

Teorema 4.4.1. *Sea G un grupo finito $\mathbb{Z}/p$-celular. Entonces $\mathrm{B}G$ es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celular si y sólo si G es un p-grupo generado por elementos de orden p.*

La prueba se basa esencialmente en un resultado de Chachólski (1.2.6) sobre conservación de celularidad por fibraciones.

En general, la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celularización de $\mathrm{B}G$ está estrechamente relacionada con la $\mathbb{Z}/p$-celularización $\mathrm{CW}_{\mathbb{Z}/p}G$ de G en la categoría de grupos (ver 3.1), así que dedicamos el resto de este capítulo a analizar el funtor $\mathrm{CW}_{\mathbb{Z}/p}$ y estudiar con precisión la relación mencionada. Así, tras describir el núcleo de la extensión central que determina la $\mathbb{Z}/p$-celularización ([152], 2.1)

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \mathrm{CW}_{\mathbb{Z}/p}G \longrightarrow \mathrm{S}_{\mathbb{Z}/p}G \longrightarrow 0,$$

donde $\mathrm{S}_{\mathbb{Z}/p}G$ es el subgrupo (normal) de G generado por los elementos de orden p (el $\mathbb{Z}/p$-*zócalo* de G), probamos que este objeto puede proporcionar bastante información sobre algunos invariantes de teoría de grupos del grupo G, tales como su multiplicador de Schur o su extensión central universal con coeficientes en $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}[1/p]$ (si G es respectivamente perfecto o $\mathbb{Z}[1/p]$-perfecto). De hecho, este último resulta ser el grupo fundamental de $\overline{\mathbf{P}}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G$, y esto se usa para probar que el funtor $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-acíclico "conmuta" con el grupo fundamental, de un modo análogo a como lo hace la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación. La sección concluye con una descripción del grupo fundamental de $\mathbf{CW}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G$.

En el capítulo quinto calculamos el valor de los funtores $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}$ y $\mathbf{CW}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}$ cuando se aplican sobre varias familias concretas de espacios clasificadores de grupos finitos, como por ejemplo grupos diédricos, semidiédricos, especiales lineales, simétricos y cuaterniónicos.

Nuestro estudio de los espacios clasificadores para grupos discretos infinitos comienza en el capítulo sexto, y es el objetivo de la segunda parte de este trabajo. En primer lugar, presentamos una aplicación canónica $\mathrm{B}G \longrightarrow \underline{\mathrm{B}}G$ que siempre relaciona los espacios clasificadores, y damos una descripción de su fibra homotópica en términos de categorías localizadas (en el sentido de Gabriel-Zisman) y extensiones de Kan homotópicas. Un detalle técnico interesante que aparece en esta prueba y que concierne a la localización de una categoría coma es demostrado más tarde en el apéndice.

El siguiente capítulo está dedicado a la demostración del teorema principal que hemos enunciado anteriormente. La técnica es la siguiente: aplicamos el funtor $\mathbf{P}_W$ a un modelo apropiado de $\mathrm{B}G$, y obtenemos, utilizando el modelo ya desarrollado anteriormente para la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de espacios clasificadores de grupos infinitos, que tiene el tipo de homotopía de la W-anulación del nervio de una cierta categoría pequeña que solamente depende de G. Este nervio es un modelo simplicial de $\underline{\mathrm{B}}G$, y concluimos probando que en las hipótesis del teorema $\underline{\mathrm{B}}G$ es W-nulo.

El resto de la Memoria está consagrada a desarrollar consecuencias interesantes del teorema principal. En la segunda parte de este mismo capítulo ya describimos el comportamiento del funtor $\underline{\mathrm{B}}$ respecto a varias construcciones fundamentales en teoría de homotopía, como son los productos, wedges o colímites. Además, identificamos (bajo una condición sobre la torsión de G) el recubridor universal de $\underline{\mathrm{B}}G$, y concluimos el capítulo mostrando que en algunos casos, si

$$G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3$$

es una extensión de grupos, la fibra homotópica de la aplicación inducida $\underline{\mathrm{B}}G_2 \longrightarrow \underline{\mathrm{B}}G_3$ es homotópicamente equivalente a $\underline{\mathrm{B}}G_1$.

Comenzamos el capítulo octavo con una prueba sencilla de que si G es un grupo localmente finito cuyo cardinal es menor que $\aleph_\omega$, entonces $\underline{\mathrm{B}}G$ es contráctil. Después, estudiamos los grupos que cumplen la condición del normalizador, una amplia clase que contiene, entre otros, a los grupos localmente nilpotentes (y por tanto a los nilpotentes). Demostramos que si un grupo G en esta clase (sometido a una condición extra de finitud no muy restrictiva) admite un modelo finito-dimensional o finitamente dominado para $\underline{\mathrm{B}}G$, entonces $\underline{\mathrm{B}}G \simeq \mathrm{B}H$ para un cierto grupo H que identificamos. En particular, en este caso $\underline{\mathrm{B}}G$ es nilpotente como espacio si G es nilpotente como grupo. Terminamos el capítulo estudiando la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación, p impar, de espacios clasificadores de grupos supersolubles.

En el último capítulo tomamos un punto de vista similar al de la primera parte de la Memoria, mostrando que el teorema principal puede proporcionar información en las dos direcciones. Más concretamente, centramos nuestra atención en grupos de isometrías del plano, y aprovechando sus propiedades geométricas obtenemos vía $\underline{\mathrm{B}}G$ mucha información sobre la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de sus espacios clasificadores.

Las herramientas utilizadas en la segunda parte de esta Memoria y, en particular, en el último capítulo, ponen de manifiesto que los métodos que deben utilizarse para resolver el problema de la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de $\mathrm{B}G$ en los casos finito e infinito son completamente diferentes, pues $\mathrm{B}G$ no es $\mathbb{Z}/p$-bueno en general si G es infinito, y a la inversa, el espacio clasificador para G-fibrados propios es contráctil si G es finito, lo cual no nos aporta ninguna información sobre la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de $\mathrm{B}G$.

Notación. G normalmente denotará a un grupo discreto. Denotaremos por **Spaces** a la categoría de espacios, por $\mathbf{Spaces}_*$ a la categoría de espacios con punto base y por **sSpaces** a la categoría de conjuntos simpliciales. Normalmente supondremos que los espacios poseen el tipo de homotopía de un CW-complejo. El símplice canónico de dimensión n se denotará Δ^n. Llamaremos frecuentemente $X_p^\wedge$ a la $\mathbb{Z}/p$-compleción de Bousfield-Kan de X, y $\mathbb{Z}[1/p]_\infty X$ a la $\mathbb{Z}[1/p]$-compleción.

Agradecimientos

Esta tesis debe más que la vida a dos relámpagos del genio creador de Carlos Broto: el primero, una calurosa tarde de Junio, levantó el velo que cubría el camino, que recorrí durante un año a su lado como un ciego con su lazarillo; el segundo me mostró la meta, aún lejana, aún difusa, quizá un punto en lontananza, pero ya cierta y real, en el dominio de lo visible y lo alcanzable. Dos años después, este trabajo es el resultado de su inmensa capacidad como mentor, guía, compañero y amigo.

Dicen que hasta un viaje de diez mil millas comienza con un solo paso; el mío comenzó cinco años atrás, cuando entré como último remero en una nave llamada Grupo de Topología Algebraica de Barcelona; yo aún desconocía que compartía puente y velamen con algunos de los marineros más intrépidos y avezados, que me ayudarían a esquivar mil escollos y dificultades sin número, y me desembarcarían, sin un rasguño y mucho más sabio, en esta playa de conocimiento, donde sopla una dulce brisa de levante, y desde la cual escribo.

Cómo olvidar a Carles Casacuberta, ubicuo allí donde aparezca la localización, y siempre con un rato para hablar, siempre con una referencia, una respuesta, una ayuda... Jerôme revisó mi primer artículo como si le fuera la vida en ello, y nunca ha dudado en mancharse de barro si le he planteado alguna dificultad técnica que aguantase impertérrita una simple ojeada. Ahí he tenido a mis tres hermanos, al malagueño, al economista y a esa pequeña gran Natalia (a veces tan semejante a mí, a veces tan arriba), que han cuidado de mí cuando han venido mal dadas y siempre, tanto desde la lejanía como en el quehacer cotidiano, han tenido una palabra de ánimo, una agradable charla o simplemente una sonrisa. Y en la sala de máquinas, el piloto que vino de Súria, maestro de computadoras y compañero de nostalgias matritenses, que jamás ha tenido un no por respuesta. Y qué decir de Gemma, la anterior en llegar, y de Javier, el siguiente, uña y carne dos años, y de la pareja londinense, y de José Luis, ahora en Almería pero perfecto anfitrión cuando hizo falta, y al cual debo la mansión que habito, y Lola, una bendición para el grupo, y Laia, y Manuel Castellet, y Jaume Aguadé, y Jordi, Isa y los que vendrán después de ellos...

Los primeros tiempos fueron duros. Costó cambiar de ciudad y de vida, pero pronto apareció Javier, y llegó Israel, y hubo comidas juntos, y noches de guitarra y conversación, y mucho tenis de mesa. Luego el tiempo, viento tan inapelable como voluble, se los llevó de mi vida, pero para siempre quedará el agradecimiento a meses de compañerismo quizá irrepetibles. La tesina cerró esta época, y aquí aparecen los recuerdos de Antonio Quintero, sombra enorme y tutelar que me sacó del Sur y me envió a esta nuestra particular Meca, y de Juan Antonio Navarro y Juan Sancho, que hace ya largos años plantaron la semilla cuyo vástago mayor y más reconocible es esta tesis.

Llegó el primer fogonazo de Broto, y la aparición desde Britania de Ian Leary me brindó el conocimiento de una de esas extrañas personas en las cuales su calidad matemática, excepcional, sólo palidece ante su talante humano y su simpatía, de modo que uno considera una gran fortuna conocerlo y un privilegio su trato. Sus aportaciones a mi trabajo, inmensas, se resumen en el último capítulo, que no existiría si ese mail llegado de Southampton no hubiera formulado la pregunta correcta en el momento preciso. Espero que el futuro, como pensamos, nos vuelva a reunir alrededor de un problema o, como mínimo, de un puñado de grupos discretos.

Y llegó el cambio de siglo, y mi primera estancia de investigación. La Ciudad Luz me recibió con los brazos abiertos, en particular por el trabajo que se tomaron Lionel Schwartz y Bob Oliver en brindarme las condiciones idóneas de trabajo y el interés mostrado en el mismo. Pero no fue sólo homotopía en París; fue la ciudad inolvidable, el cosmopolitismo, las noches y más noches, y gente como Filipe y Luba que siempre podré reencontrar con un bagaje de afectos compartidos que nos hará sentirnos especiales.

A la vuelta, comienzo de un nuevo siglo, millares de horas de estudio, borrachera de optimismo y almuerzos con tertulias sin fin cargadas de interés y anécdotas. En ellas, gente como Enrique, Daniel, Carlos, Francesc, Hara y, sobre todo, Javi de Málaga, la persona que uno señalaría quizá como el compañero de piso ideal y aún mejor amigo, me acompañaron y me dieron la felicidad de formar parte de algo en este tramo del camino. En medio había congresos, y cursos, tantas personas y lugares que no habría papel aquí para mencionarlos a todos, aunque sin duda cada uno tiene en propiedad un trocito de mi memoria.

Con el segundo fogonazo de Broto apareció Fernando, que tanta huella dejó entre los topólogos de Barcelona como la que la propia Ciudad Condal imprimió en él. Indiscutiblemente, ha sido la última persona cuyas aportaciones a la tesis superan ampliamente el calificativo de destacable, particularmente en el punto de vista utilizado al tratar la celularización. Con él, con Carmen, con Mónica o con Sergio construí un curso vital e intenso, musical, a veces sufrido pero de enorme creatividad. Cuando las campanadas que marcaban el ocaso de 2002 anunciaban también el final de mi beca, era alguien diferente, quizá menos despreocupado pero sin duda más adulto, el que contemplaba con ojos reflexivos el final del camino, que podía vislumbrarse ya en la línea del horizonte.

Y así, andando el tiempo y es casi un lustro, llegamos al presente. De nuevo mi presencia gozó París, cuatro meses de enorme riqueza intelectual, con Muriel relevando a Lionel como anfitriona, con noches en vela frente a la pantalla, haciendo realidad este sueño que tienes en tu mano, lector, y nuevos nombres que añadir a la lista de imborrables: Pablo, Rocío, Mario, Yvanne, Miro, Juan Carlos, Susana... y sobre todo mis dos musas literarias, conocidas en circunstancias bien diferentes, pero a las que profeso igual afecto.

Y a la vuelta, historia venturosamente repetida: algunos rostros nuevos, otros ya conocidos, pero la misma camaradería: los de Albert, Gerard, Sara, Miquel, Martin, Judith, Isa, Francesco, Birgit, Mateo, Noemi, Nacho, MªÁngeles... Y sobre todo Lola y Javi, asidero perfecto a la felicidad cotidiana de alguien como yo, que realmente la necesita. Ellos estarán conmigo en la meta, y también, físicamente o en espíritu, esos chistosos muertos de Badajoz con quienes tanto llevo vivido, y cuyos mensajes me han dado la vida en tantas y tantas mañanas y tardes de Matemáticas en soledad...

Y bueno, aunque esté de sobra decirlo, el Departamento de Mates de la UAB ha sido mi segunda casa estos años, y a todos sus componentes agradezco el trato recibido (y ayudas puntuales e importantes, como la de Warren Dicks); especial voluntad han necesitado para soportarme los que han compartido conmigo alguno de los siete despachos que he tenido la fortuna de habitar, y especial afecto dedico a los futboleros de los viernes.

Y nada, esto es el final. Dicen que los padres son los que no fallan, aquellos en los que siempre se puede confiar, y sin duda los míos fueron los modelos que sirvieron al autor de la frase. Y de Rosa, ¿qué decir, si ya lo sabe todo? Quizá que, como el resto de las cosas que hago, que sufro, que gozo y que vivo, este trabajo es de ambos. A ella y a mi familia (con especial mención a mis abuelos, que nos abandonaron en el camino) está dedicada esta tesis.

Capítulo 1

Preliminares sobre localización

En este capítulo preliminar presentamos las principales herramientas que vamos utilizar en esta Memoria, que son los funtores de anulación y celularización, recordando en cada caso el contexto en que aparecieron, sus propiedades principales, sus aplicaciones y los ejemplos más relevantes. También recordamos dos construcciones que aparecerán frecuentemente en lo sucesivo, como son la R-compleción de Bousfield-Kan y los colímites homotópicos.

Durante las tres primeras secciones del capítulo, y salvo mención expresa en contra, todos los espacios que aparecen se supondrán punteados, y las construcciones se realizarán en la categoría $\mathbf{Spaces}_*$ de espacios con punto base. El desarrollo de la teoría de funtores de anulación y celularización puede llevarse a cabo de forma casi idéntica en la categoría **sSpaces** de conjuntos simpliciales (ver la introducción de [69] para más detalles).

1.1. Funtores de anulación

1.1.1. Introducción histórica y definiciones principales

Sean A y X dos espacios con punto base.

Los funtores de anulación son definidos por Bousfield ([23]) en 1994 dentro de sus investigaciones sobre fenómenos periódicos en homotopía inestable, del siguiente modo:

Definición 1.1.1. Un espacio X se dice A-*nulo* si el espacio de aplicaciones $\mathrm{map}_*(A, X)$ es débilmente contráctil, o lo que es lo mismo, cada aplicación punteada de una n-suspensión de A en X es inesencial. La A-*anulación* $\mathbf{P}_A X$

(a veces llamada A-*periodización*) es el único espacio A-nulo, salvo equivalencia homotópica, dotado de una aplicación $X \longrightarrow \mathbf{P}_A X$ que induce, para cada espacio A-nulo Y, una equivalencia débil

$$\mathrm{map}_*(\mathbf{P}_A X, Y) \simeq \mathrm{map}_*(A, Y).$$

De este modo se define un funtor $\mathbf{P}_A : \mathbf{Spaces}_* \longrightarrow \mathbf{Spaces}_*$ que es coaumentado e idempotente.

Es destacable que no hay ningún problema en definir este funtor en la categoría no punteada, con ninguna referencia al punto base. Por otra parte, los espacios X para los cuales $\mathbf{P}_A(X)$ es contráctil se denominan A-*acíclicos*.

El objetivo de ese trabajo es desarrollar una teoría "cromática"en el rango inestable similar a la que Ravenel ([147]) y Devinatz-Hopkins-Smith ([61]) construyeron en los ochenta para el caso estable. Recuérdese que esa jerarquía comienza con los fenómenos que son descritos por la homotopía racional y sigue con los que son visibles vía la teoría K clásica y las teorías K de Morava (ver definición en [147], 1.5).

A semejanza de lo que ocurre en el caso estable, Bousfield impone a los espacios (CW-complejos) que estudia la condición de finitud, y también la restricción de que sean suspensiones cuya homología sea de p-torsión.

El motivo principal, aunque no el único, de la introducción de los funtores de anulación y los espacios A-nulos es que son las principales herramientas que Bousfield utiliza para clasificar los espacios. Más concretamente, dos espacios W y W' se dicen P-similares si todo espacio W-nulo es W'-nulo y viceversa. Así, si W' es P-similar a W, decimos que W' está en la misma clase de nulidad $\langle W \rangle$ que W. Más tarde, estas clases fueron estudiadas cuidadosamente y generalizadas por el propio Bousfield ([24], sección 4) y por Dror-Farjoun ([69], capítulo 7), y en particular se sabe que constituyen un retículo, que el wedge y el smash de espacios inducen operaciones sobre ellas, y que además, si W satisface la condición de p-torsión n-soportada, se tiene que $\langle \Sigma W \rangle = \langle \Sigma^k W \rangle \vee \langle K(\mathbb{Z}/p, n+1) \rangle$ para todo $k \geq 1$. Recordemos que un espacio cumple la condición de torsión n-soportada si su homología entera es de p-torsión, $H_i(W; \mathbb{Z})$ es nulo para $i < n$ y $H^n(W; \mathbb{F}_p)$ es distinto de cero.

Una vez que disponemos de estas herramientas, el teorema de clasificación ([23], 9.15) asegura que dos suspensiones finitas de p-torsión ΣW y $\Sigma W'$ están en la misma clase de nulidad si y sólo si poseen la misma conectividad y el mismo tipo. Recordemos que el tipo de un espacio X se define como el menor entero m tal que la $\tilde{K}(m)$-teoría reducida de Morava no se anula sobre X. Esta clasificación es semejante a la clasificación estable de la que hablábamos al principio.

Una importante característica de este teorema es que además demuestra la existencia de unas clases de nulidad canónicas $\langle \Sigma \overline{V}_n \rangle$ cuyas suspensiones iteradas dan lugar a todas las posibles clases de nulidad de espacios de p-torsión de tipo $n+1$. De hecho, cualquier espacio de tipo $n+1$ tal que su conectividad sea minimal entre los espacios de ese tipo sirve como $\overline{V}_n$. Por ejemplo, un modelo para $\overline{V}_0$ es $M(\mathbb{Z}/p, 2)$ y un modelo para $\overline{V}_1$ y p impar es la cofibra de la aplicación de Adams $A : \Sigma^{2p-2} M(\mathbb{Z}/p, 3) \longrightarrow M(\mathbb{Z}/p, 3)$.

Una vez probada la existencia de las clases canónicas, Bousfield define la v_n-periodización de un espacio Y como su $\Sigma\overline{V}_n$-nulificación $\mathbf{P}_{v_n} Y$, y demuestra los siguientes resultados de importancia:

- Para todo $n \geq 0$, existen aplicaciones $\mathbf{P}_{v_{n+1}} Y \longrightarrow \mathbf{P}_{v_n} Y$ que dan lugar a una "torre cromática"

  $$\mathbf{P}_{v_0} Y \leftarrow \mathbf{P}_{v_1} Y \leftarrow \dots$$

  cuyo límite inverso es Y.

- Mahowald y Thompson estudian en [121] los grupos de homotopía periódicos $v_m^{-1} \pi_*(Y; V_{m-1})$, donde V_{m-1} es un espacio de tipo m cuya homología reducida entera es finitamente generada como $\mathbb{Z}_{(p)}$-módulo. Estos grupos se definen a partir de una auto-aplicación de V_{m-1} cuya existencia queda garantizada por el teorema de periodicidad de Devinatz-Hopkins-Smith (ver [61]), y poseen una periodicidad d que crece con el tipo. El resultado que prueba Bousfield es que los grupos de homotopía periódicos de Y son los grupos de V_n-homotopía (en el sentido en que fue utilizado este término en la introducción) de $\mathbf{P}_{v_n} Y$, y por tanto el tipo de homotopía de la v_n-periodización captura la estructura periódica del espacio. De este modo puede considerarse la torre cromática anterior como una descomposición del espacio Y en "clases de periodicidad".

- Los resultados del apartado anterior permiten realizar una comparación entre equivalencias periódicas y equivalencias en teoría K mod p de espacios 3-conexos. Este teorema, que es una versión inestable de un resultado anterior (ver [22]), tiene como consecuencia la resolución de una conjetura de Miller-Snaith que aparece en [120] y [128], y que concierne a la aplicación de Snaith. Ver detalles en ([23], sección 14).

Así, queda claro que, al menos en este ejemplo inicial, la estructura de la A-anulación de un espacio ofrece un camino accesible para estudiar las propiedades homotópicas que dependen de A. Este es evidentemente el motivo de la popularidad que han alcanzado estos funtores, pero no podemos dejar de mencionar otros dos de índole práctica que parecen de bastante importancia: el buen comportamiento de $\mathbf{P}_A$ respecto a fibraciones (que veremos un poco más adelante) y la abundancia de construcciones que lo modelan.

En efecto, ya Bousfield propone en el artículo comentado los dos siguientes modelos, uno en la categoría de espacios con punto base, y otro en la categoría no punteada. La primera es una construcción *ad hoc* bastante intuitiva: tomamos un espacio X_λ para cada ordinal λ; definimos $X_0 = X$ y por inducción $X_{\lambda+1}$ es el espacio obtenido a partir de λ pegando conos sobre todas las posibles clases de homotopía de aplicaciones de n-suspensiones de A en X_λ. Así, la A-anulación de X se construye como el colímite de estos espacios.

La segunda construcción de Bousfield ya lleva implícita la idea de mirar la anulación como una localización homotópica, como vamos a ver en el siguiente epígrafe.

1.1.2. Localización

El concepto de localización en teoría de homotopía aparece por primera vez a principios de los años 70 como un ingrediente fundamental en la demostración llevada a cabo por Sullivan ([163]) de la conjetura de Adams. El enunciado de dicho problema establecía que ciertos fibrados estables asociados a los elementos de teoría K de un complejo finito debían tener un fibrado esférico asociado homotópicamente trivial, y su resolución posibilitó la descripción de los fibrados tangentes a todas las variedades compactas con un tipo de homotopía dado.

La idea de localización de Sullivan recoge esencialmente dos conceptos. En primer lugar, "localizar" un espacio quiere decir simplificarlo, reducirlo a sus partes p-primarias para poder estudiarlo mejor, y en segundo lugar la construcción entronca con la localización clásica de grupos, en el sentido que localiza en conjuntos de primos los grupos de homotopía y homología.

Con más precisión, dado un conjunto de primos P y un espacio X con grupo fundamental abeliano y que posee una torre de Postnikov de fibraciones principales (espacio simple de Postnikov), Sullivan construye un nuevo espacio que denomina X_l y un coaumento $l : X \longrightarrow X_l$ que cumplen:

- X_l es $\mathbb{Z}_P$-local, o lo que es lo mismo, sus grupos de homotopía son módulos sobre $\mathbb{Z}_P$, el anillo de los enteros localizados en P.
- Si Y es otro espacio $\mathbb{Z}_P$-local, cualquier aplicación $X \longrightarrow Y$ factoriza a través del coaumento l.

En estas condiciones, se dice que X_l es la $\mathbb{Z}_P$-localización de X, que es construida de forma efectiva localizando primero las esferas mediante un telescopio infinito y después induciendo sobre los esqueletos. De este modo queda definido un funtor de localización en la subcategoría de la categoría homotópica de espacios generada por los espacios simples de Postnikov. Un poco más adelante, Anderson ([6], ver también [34]) definió un funtor análogo al de Sullivan en la categoría topológica que coincidía con éste sobre espacios simplemente conexos.

Aunque Sullivan construye su localización sólo para espacios de Postnikov finitos, asegura que una construcción similar debe ser posible para cualquier espacio nilpotente (ver definición en 1.3.3, un poco más adelante). Este trabajo es llevado a cabo en el libro de Hilton-Mislin-Roitberg ([89]), que además desarrolla la teoría de localización de grupos nilpotentes, pone en relación ambos funtores y estudia diferentes aplicaciones, como por ejemplo la relación entre las estructuras de H-espacio de un espacio X y sus localizaciones en diferentes primos, o el efecto de estos funtores sobre espacios de aplicaciones.

Una generalización de gran importancia de esta teoría lo constituye el trabajo de Bousfield ([20]) en el cual aparece por primera vez la teoría de localizaciones homológicas. Asi, para cualquier teoría de homología generalizada h_*, el autor prueba la existencia de un endofuntor coaumentado E, definido en la categoría homotópica de CW-complejos punteados, y caracterizado por las siguientes propiedades universales:

- Para todo X, el coaumento $\eta_X : X \longrightarrow EX$ induce una equivalencia homológica $h_*(X) \simeq h_*(EX)$.
- Cualquier aplicación $f : X \longrightarrow Y$ que induzca isomorfismo en h_*-homología factoriza a través del coaumento η_X.

El funtor E así definido se denomina $\mathbf{h}_*$-localización, y los espacios X para los cuales el coaumento η_X es una equivalencia homotópica se llaman $\mathbf{h}_*$-locales. Nótese la semejanza formal entre la definición de E y la de la $\mathbb{Z}_P$-localización de Sullivan.

Bousfield construye su funtor E sobre la categoría de conjuntos simpliciales utilizando una versión de la teoría de homotopía simplicial donde las h_*-equivalencias desempeñan el papel de las equivalencias débiles y las fibraciones tienen la propiedad de levantamiento de homotopía con respecto a ciertas h_*-equivalencias, y a continuación prueba que el funtor inducido en la categoría de CW-complejos posee las propiedades apropiadas.

El gran avance que supone la aparición de los funtores E tiene que ver tanto con que amplía enormemente el campo de acción de la teoría de localización homotópica como con que en el caso en que X es nilpotente, engloba una gran cantidad de construcciones anteriores. Por supuesto, si h_* es la homología con coeficientes en $\mathbb{Z}_P$, la $\mathbf{h}_*$-localización coincide con las localizaciones de Sullivan y Hilton-Mislin-Roitberg definidas anteriormente, pero es que además, el funtor E generaliza la compleción de Artin-Mazur de grupos ([8]) si el anillo de coeficientes R es finitamente generado, generaliza también la compleción de Mal'cev ([122]) si R es un subanillo de $\mathbb{Q}$, y en el caso en que X es de tipo finito y R es $\mathbb{Z}_P$, coincide con la compleción p-profinita de Quillen ([145]).

Aproximadamente por la misma fecha en que aparece este artículo, el propio Bousfield y D. Kan desarrollan ([25]) para un anillo R el funtor de R-compleción que lleva su nombre, cuya existencia ya había sido sugerida por Sullivan en el artículo comentado basándose en el resultado de Kan que presenta cualquier espacio como el límite inverso de una torre de espacios nilpotentes.

De todos modos, aunque la R-compleción es construida de modo radicalmente diferente a la $\mathbf{H}_*(-, R)$-localización (y en eso reside su mayor ventaja sobre ella, como veremos más adelante), se puede probar que ambos funtores coinciden en cualquier subcategoría de la categoría de espacios donde el funtor de R-compleción sea idempotente . En la sección 3 comentaremos más detalladamente las principales propiedades de este funtor, del que hacemos uso extensivo en la Memoria.

La noción más moderna de localización es la denominada localización con respecto a una aplicación, o más abreviadamente f-localización. Fue propuesta originalmente por Dror-Farjoun en 1992 ([67]) y desarrollada posteriormente en [69], que es quizá la referencia principal sobre este tema.

Definición 1.1.2. Sea **Spaces**$_*$ la categoría de espacios con punto base, y sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación continua. Entonces existe un funtor idempotente $\mathbf{L}_f$ dotado de un coaumento $\mathrm{Id} \longrightarrow \mathbf{L}_f$ tal que:

- Para todo X, la aplicación f induce una equivalencia débil
$$\mathrm{map}_*(B, \mathbf{L}_f X) \simeq \mathrm{map}_*(A, \mathbf{L}_f X).$$
En particular, los espacios Y tales que f induce una equivalencia débil
$$\mathrm{map}_*(B, Y) \simeq \mathrm{map}_*(A, Y)$$
se denominan f-locales.
- Si Y es f-local, cualquier aplicación $X \longrightarrow Y$ factoriza a través del coaumento $X \longrightarrow \mathbf{L}_f X$.

La construcción del funtor $\mathbf{L}_f$ es como sigue. Si X es un espacio, se define por medio de un cierto pushout un espacio $\mathbf{L}^1_f X$ que cumple la condición 2) de la definición anterior, dotado además de una cofibración $X \longrightarrow \mathbf{L}^1_f X$. Si β es un cierto ordinal, entonces $\mathbf{L}^{\beta+1}_f X$ se define por inducción como $\mathbf{L}^{\beta}_f \mathbf{L}^1_f X$. De este modo obtenemos una torre de cofibraciones:

$$X \longrightarrow \mathbf{L}^1_f X \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathbf{L}^{\beta}_f X \longrightarrow \mathbf{L}^{\beta+1}_f X \longrightarrow \ldots$$

Entonces, si λ es el primer ordinal cuya cardinalidad es mayor que la del producto $[0,1] \times (A \coprod B)$, Dror-Farjoun prueba mediante un "argumento del objeto pequeño" de Quillen (ver [144]) que el colímite de la torre anterior para todos los ordinales $\beta < \lambda$ cumple las condiciones arriba mencionadas, y por tanto es un modelo para la f-localización de X. Es remarcable que la construcción puede llevarse a cabo tanto en la categoría simplicial como en la topológica, punteada o no punteada. Nosotros hemos mencionado la última de ellas porque es el contexto en el que está desarrollada esta Memoria, a pesar de que la categoría de espacios sin punto base presenta algunas ventajas técnicas.

La gran importancia del funtor de f-localización procede de que, para elecciones adecuadas de f, engloba todos los funtores de homotopía coaumentados e idempotentes conocidos hasta la fecha (en particular todas las localizaciones arriba descritas). De hecho, Dror-Farjoun conjeturó que todo funtor de homotopía (es decir, que lleva equivalencias débiles en equivalencias débiles) idempotente debía ser una f-localización, aunque se ha probado posteriormente ([40]) que dicha pregunta es indecidible dentro de la axiomática ZFC con los principios de grandes cardinales usuales.

En relación con esto, un campo actualmente muy activo de investigación es el conocimiento de estructuras que son preservadas por estos funtores; por ejemplo, se ha probado que envían espacios conexos en espacios conexos, H-espacios en H-espacios -preservando asociatividad o conmutatividad, en su caso-, espacios de lazos en espacios de lazos o espacios de Eilenberg-MacLane generalizados en espacios de Eilenberg-MacLane generalizados (recordemos que un espacio de Eilenberg-MacLane generalizado, o GEM, es un producto de espacios de Eilenberg-MacLane ordinarios abelianos). Se sabe que las localizaciones homológicas preservan espacios 1-conexos ([39]), aunque no se sabe si el resultado es cierto para cualquier funtor idempotente, y de hecho no lo es si pedimos que se preserve la n-conexión para $n \geq 2$ ([129]). Un buen resumen de los resultados más recientes en este contexto puede encontrarse en [36].

Probablemente el problema abierto más interesante en este contexto es la preservación de la nilpotencia, cuya dificultad procede probablemente de que ni siquiera se conoce la respuesta al problema análogo a nivel de grupos. En esta Memoria estudiaremos el comportamiento de los espacios clasificadores de grupos nilpotentes bajo los funtores $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}$, con una aproximación diferente a la utilizada, por ejemplo, en el artículo [70].

Antes de centrarnos en el caso de funtores de anulación, mencionaremos que Goerss-Jardine ([84]) y Hirschhorn ([90]) han probado que en casi cualquier categoría de modelos (en particular en todas las simpliciales) existen f-localizaciones. Como consecuencia, la noción de f-localización ha sido extendida a otros contextos diferentes de la categoría homotópica de espacios, tales como la categoría homotópica estable ([21] y [90]), los espacios sobre un diagrama ([66] y [77]), el cálculo de funtores de Goodwillie ([85]) o la teoría de homotopía de motivos ([83] y [133]). Un excelente resumen de estos trabajos puede encontrarse en [74].

1.1.3. Propiedades de los funtores de anulación

Centrándonos ya en el caso concreto de funtores de anulación, citamos a continuación algunas de sus propiedades elementales, que son consecuencia en su mayor parte de resultados análogos para $\mathbf{L}_f$, y que son utilizadas frecuentemente en este trabajo. Las pruebas pueden encontrarse en ([69], 1.A.8, 1.D.3 y 3.D.1, y [72], 6.9):

- La aplicación natural $\mathbf{P}_A(X \times Y) \longrightarrow \mathbf{P}_A X \times \mathbf{P}_A Y$ es una equivalencia homotópica.

- Si X es A-nulo entonces también es $\Sigma^n A$-nulo para todo n, y por adjunción $\Omega^n X$ es A-nulo.

- Si $\mathbf{P}_A X \simeq *$, entonces $\mathbf{P}_{\Sigma A}\Sigma X \simeq *$.

- Si tenemos una fibración donde la base y la fibra son A-nulas, el espacio total también lo es.

- Si X es 1-conexo, $\mathbf{P}_A X$ también es 1-conexo.

- Si I es una categoría pequeña y $F : I \longrightarrow \mathbf{Spaces}_*$ es un diagrama sobre I, la aplicación inducida por el coaumento da lugar a una equivalencia homotópica $\mathbf{P}_A\mathrm{hocolim}\ {}_*F \simeq \mathbf{P}_A\mathrm{hocolim}\ {}_*\mathbf{P}_A F.$, y lo mismo ocurre en el caso no punteado.

- Un caso particular interesante del punto anterior surge si $Y \xrightarrow{f} X \longrightarrow C_f$ es una cofibración. Entonces, si además Y es A-acíclico, $\mathbf{P}_A X \simeq \mathbf{P}_A C_f$, y si $\mathbf{P}_A f$ es una equivalencia, entonces C_f es A-acíclico.

Recordamos que las propiedades principales de los colímites homotópicos se estudiarán en la sección 4.

Antes de pasar a estudiar las fibraciones, comentaremos brevemente el concepto de equivalencia A-periódica, debido a Bousfield:

Definición 1.1.3. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ se llama *equivalencia A-periódica* si para cualquier espacio A-nulo Z y cualquier elección de punto base en X, Y, y Z, la aplicación f induce una equivalencia débil $\mathrm{map}_*(Y, Z) \simeq \mathrm{map}_*(X, Z)$. En particular, el coaumento $X \longrightarrow \mathbf{P}_A X$ es una equivalencia A-periódica, porque el funtor $\mathbf{P}_A$ es idempotente.

En ([42], sección 13), pueden encontrarse las principales propiedades de las equivalencias A-periódicas.

Una gran parte de las investigaciones que se han llevado a cabo en los últimos años sobre funtores de localización, en general, y de anulación, en particular, han ido encaminadas a describir el efecto de dichos funtores sobre fibraciones. En particular, una gran parte del libro [69] está dedicada a este tema, y es referencia inevitable en su estudio. A continuación comentaremos tres resultados que por diferentes razones nos parecen ineludibles en este contexto, remitiendo al lector al libro citado y a ([23], secciones 4 y 8) y ([24], sección 9) para información ulterior.

La primera de estas proposiciones aparece en el artículo ([23], 8.1) de Bousfield:

Proposición 1.1.4. *Sea A un espacio punteado, sea J un conjunto de primos y sea $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ una fibración. Entonces, si X cumple la condición de torsión n-soportada para todos los primos de J, se tiene que la aplicación natural de $\mathbf{P}_{\Sigma A}F$ a la fibra homotópica de $\mathbf{P}_{\Sigma A}E \longrightarrow \mathbf{P}_{\Sigma A}B$ tiene como fibra homotópica un espacio de Eilenberg-MacLane $K(G,n)$ con G un grupo abeliano de J-torsión, y además la acción de $\pi_1(\mathbf{P}_{\Sigma A}F)$ sobre dicho grupo es trivial.*

Este resultado es de importancia por varias razones. En primer lugar, es el primer resultado fuerte de preservación de fibraciones bajo funtores de localización del que tenemos noticia; en segundo lugar, introduce dos condiciones que van a ser de gran utilidad en trabajos futuros, como son realizar la anulación respecto de un espacio que es una suspensión, y "cuantificar" la diferencia entre la fibra homotópica de la localización y la localización de la fibra homotópica mediante un término de error $K(G,n)$; en tercer lugar, este resultado es vital en la prueba de todos los resultados sobre clases de nulidad y v_n-periodización citados al principio del epígrafe; y por último, la prueba ya usa el concepto de localización fibra a fibra, formalizada más tarde por Dror-Farjoun ([69], 1.F.1) y desde entonces central en la teoría de localización homotópica:

Teorema 1.1.5. *Sea $L : \mathbf{Spaces}_* \longrightarrow \mathbf{Spaces}_*$ un funtor de homotopía coaumentado. Toda fibración $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ de espacios conexos puede ser aplicada (sobre B) en otra fibración de la forma $L(F) \longrightarrow \overline{E} \longrightarrow B$. Además, si $F \longrightarrow L(F)$ es una equivalencia también lo es $E \longrightarrow \overline{E}$.*

Esta última idea está muy presente en el siguiente resultado de preservación de fibraciones, que ha sido una de las herramientas claves utilizadas en esta Memoria:

Teorema 1.1.6. ([69], 1.H.1 y 3.D.3). *Sea $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ una fibración. Entonces:*

1. *Si $\mathbf{P}_A(F)$ es contráctil, se tiene que la aplicación inducida $\mathbf{P}_A(E) \longrightarrow \mathbf{P}_A(B)$ es una equivalencia homotópica.*

2. *Si B es A-nulo entonces la fibración es preservada por la A-anulación.*

Es interesante notar que mientras que la primera parte de la proposición es cierta para cualquier funtor de localización, la segunda es una propiedad característica de los funtores $\mathbf{P}_A$. La razón de esta diferencia es que la prueba de la segunda aserción utiliza que $\mathbf{P}_A\overline{\mathbf{P}}_A X \simeq *$ para todo X, siendo $\overline{\mathbf{P}}_A X$ el coaumento canónico. Esto no es cierto en general para f-localizaciones cualesquiera, aunque sí es cierto para toda f que $\mathbf{L}_f\overline{\mathbf{L}}_{\Sigma f} X \simeq *$.

Para concluir con la relación entre funtores de anulación y fibraciones, presentamos el último resultado obtenido sobre este tema, debido a Berrick-Dror-Farjoun ([13], 0.1):

Proposición 1.1.7. *Sea $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ una fibración, W un espacio, y denotemos por $\overline{\mathbf{P}}_W B$ a la fibra homotópica del coaumento $B \longrightarrow \mathbf{P}_W B$. En estas condiciones, son equivalentes:*

- *La W-anulación preserva la fibración.*
- *El producto fibrado $F \longrightarrow E' \xrightarrow{q} \overline{\mathbf{P}}_W B$ de la fibración p a lo largo de la aplicación inducida $\overline{\mathbf{P}}_W B \longrightarrow B$ es preservado por el funtor $\mathbf{P}_W$.*
- *La localización fibra a fibra de q es un fibrado producto.*

Esta proposición tiene dos características interesantes. En primer lugar, muestra que, en cierta medida, la preservación de la fibración depende de la fibra homotópica de la A-anulación de B, esto es, la parte "no local" de la base. Y en segundo lugar, sirve como llave para probar que si un funtor de anulación preserva una fibración, preserva sus productos fibrados.

1.1.4. Ejemplos

En este epígrafe comentaremos los principales ejemplos de funtores de anulación que han ido surgiendo en los últimos años.

1. *Secciones de Postnikov.* El ejemplo más sencillo y clásico de funtor de anulación es la n-sima sección de Postnikov, que no es más que la S^{n+1}-anulación. De hecho, como quedó dicho en la introducción, los funtores de anulación pueden ser vistos como las generalizaciones naturales de las secciones de Postnikov a teoría de A-homotopía. La notación $\mathbf{P}_A$ procede de aquí.

2. *Espacios de Moore.* La anulación con respecto a espacios de Moore de grupos abelianos finitamente generados ha sido muy estudiada y se conocen razonablemente bien sus propiedades. La razón de este estudio ha sido doble: en primer lugar, el hecho de que existan modelos de dimensión finita para espacios de Moore evita muchas dificultades técnicas, y por otra parte, varios modelos para los espacios $\overline{V}_n$ de los que hemos hablado anteriormente se construyen a partir de espacios de Moore o de cofibras de aplicaciones entre ellos. Los trabajos más relevantes en este contexto son los de Casacuberta ([34]), de nuevo Bousfield ([23], sección 5 y [24], secciones 7 y 8), donde el cálculo de las $M(G,1)$-anulaciones es además utilizado para describir anulaciones más generales de espacios de Eilenberg-MacLane generalizados, o el de Neisendorfer ([135]) que prueba que la $\mathbb{Z}/p$-compleción de un espacio simplemente conexo no es más que la anulación con respecto a $M(\mathbb{Z}[1/p],1)$.

3. *Construcción plus*. En 1971, Quillen introdujo en [146] la construcción plus para poder definir los grupos superiores de teoría K algebraica. Así, dado un espacio X y un anillo R, construye un espacio X^+ y una aplicación $X \longrightarrow X^+$ que no cambia la homología pero hace cociente de $\pi_1(X)$ por su subgrupo perfecto maximal, y a continuación define $K_n^{alg}(R)$ como el n-simo grupo de homotopía de $K_0^{alg}(R) \times \mathrm{BGL}(R)$. El impacto de la construcción plus no se hace esperar: Kervaire ([100]) descubre la relación con la teoría de extensiones centrales; Maunder ([124]) la utiliza para dar una demostración elemental del teorema de Kan-Thurston; Adem-Milgram ([4]) prueban que el espacio de lazos de la construcción plus del doble recubridor de A_5 es un modelo para la fibra de la autoaplicación de S^3 de grado 120...

En 1999, Berrick-Casacuberta ([12]) demuestran que la construcción plus puede construirse como un funtor de anulación respecto del espacio clasificador de un cierto grupo acíclico universal $\mathcal{F}$, que es un producto libre de un conjunto no numerable de grupos perfectos localmente libres, y esta idea ha permitido recientemente generalizar la construcción plus a contextos más amplios, como teorías de homología generalizadas (ver [38] y [131]) o a la categoría de álgebras sobre una opérada ([46]).

4. *Anulación respecto a* $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$. El ejemplo principal para nosotros es la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación. Como se ha dicho en la introducción, los primeros criterios de $\mathbb{Z}/p$-nulidad fueron la resolución por Miller de la conjetura de Sullivan ([127]) y el teorema de Lannes-Schwartz ([105]). Más adelante, y ya con la terminología de localización, se prueba en [35] que si G es cualquier grupo localmente finito de p-torsión, $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G$ es contráctil, y si G es un grupo abeliano discreto que ya cumple que $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G \simeq *$, entonces $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}K(G,n) \simeq *$ para cualquier $n \geq 2$; en cambio, si q es otro primo, cualquier espacio que sea $\mathbf{H}_*(-,\mathbb{Z}/q)$-local es en particular $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-nulo, y la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de $K(\mathbb{Z},n)$ es $K(\mathbb{Z}[1/p],n)$ si $n \geq 2$. Además, aunque el hecho de que para cualquier grupo abeliano $(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}K(G,n))^{\wedge}_p$ es contráctil para $n > 1$ podría dar la impresión de que $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anular seguido de p-completar mata a todos los espacios, dicha intuición se desvanece tomando $G = \mathbb{Z}$ y aplicando el teorema de Miller. De hecho, el mejor resultado obtenido hasta ahora para espacios de dimensión finita es el de Neisendorfer ([135]) que prueba que si X es un CW-complejo finito 1-conexo cuyo segundo grupo de homotopía es de torsión, se tiene que $(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}X\langle n\rangle)^{\wedge}_p \simeq X^{\wedge}_p$. En particular, esto demuestra que cualquier CW-complejo de dimensión finita simplemente conexo y no contráctil tiene infinitos grupos de homotopía no nulos, y el hecho sorprendente de que el tipo de homotopía de la $\mathbb{Z}/p$-compleción de X puede ser reconstruido obviando un número finito arbitrariamente grande de grupos de homotopía $\pi_n(X)$. En la sección 3.3 estudiaremos con detalle la relación entre la $\mathbb{Z}/p$-compleción y la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de $\mathrm{B}G$ en el caso en que G sea finito.

Una aproximación diferente es el trabajo de Dwyer ([72]) en el cual prueba que si G es un grupo de Lie compacto cuyo grupo de componentes es un p-grupo, la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de su espacio clasificador es homotópicamente equivalente a su $\mathbf{H}(-,\mathbb{Z}[1/p])$-localización. Nosotros esperamos que los resultados obtenidos en esta Memoria aplicados al grupo de componentes permitan probar en el futuro una versión más general del teorema.

5. *v_n-periodización*. Este ejemplo ya se ha tratado anteriormente; sólo nos gustaría remarcar aquí que el funtor de periodización $\mathbf{P}_{v_n}$, que es, como vimos, la $\overline{V}_n$-anulación, es naturalmente equivalente a la localización respecto a una autoaplicación nilpotente $\Sigma^j\overline{V} \longrightarrow \overline{V}$, y de hecho esto ocurre para la anulación respecto de cualquier espacio W, ver [69]. Sobre la teoría de autoaplicaciones, el lector interesado puede consultar ([147], capítulo 2).

Por último, nos gustaría señalar que, a diferencia de lo que ocurre en el caso estable, en el que la f-localización (en el sentido de [74]) de cualquier espectro tiene el tipo de homotopía de la anulación respecto a la cofibra de f, en general la f-localización de espacios no puede identificarse siempre como una A-anulación. Más información sobre esto puede encontrarse en [74].

1.2. Celularización

En esta sección siempre supondremos, salvo mención expresa en contra, que los colímites homotópicos a los que nos referiremos son punteados. Más información sobre los colímites homotópicos podrá encontrarse en la sección 4.

1.2.1. Definiciones principales e introducción histórica. Modelos para la A-celularización.

Sean A y X dos espacios con punto base. A principios de los 90, E. Dror-Farjoun ([68] y [69]) define los conceptos de celularización y espacio A-celular del siguiente modo:

Definición 1.2.1. Un espacio X se dice A-*celular* si para cualquier elección de punto base en X, para cualesquiera espacios Y y Z y para toda aplicación punteada $f: Y \longrightarrow Z$ tal que $f_A^*: \mathrm{map}_*(A,Y) \longrightarrow \mathrm{map}_*(A,Z)$ es una equivalencia débil, tenemos que la aplicación inducida $f_X^*: \mathrm{map}_*(X,Y) \longrightarrow \mathrm{map}_*(X,Z)$ es también una equivalencia débil. Puede probarse que esto es equivalente a decir que X puede construirse como un colímite homotópico punteado (iterado) de copias de A.

Así, la A-*celularización* de X se define de modo natural como el único espacio A-celular $\mathbf{CW}_A X$ (salvo homotopía) tal que existe un aumento canónico $cw : \mathbf{CW}_A X \longrightarrow X$ que induce una equivalencia débil $\mathrm{map}_*(A, \mathbf{CW}_A X) \simeq \mathrm{map}_*(A, X)$. En particular, dicho aumento tiene las dos siguiente propiedades ([69], 2.E.8):

1. Si $f : Y \longrightarrow X$ induce una equivalencia débil $\mathrm{map}_*(A, Y) \simeq \mathrm{map}_*(A, X)$, existe una aplicación $f' : \mathbf{CW}_A X \longrightarrow Y$, única salvo homotopía, tal que $f \circ f'$ es homotópica a cw.

2. Si Z es A-celular y $g : Z \longrightarrow X$ es una aplicación, entonces existe $g' : Z \longrightarrow \mathbf{CW}_A X$ de modo que $cw \circ g'$ es homotópica a g y g' es única salvo homotopía.

No es difícil ver que de este modo se define un funtor $\mathbf{CW}_A : \mathbf{Spaces}_* \longrightarrow \mathbf{Spaces}_*$ que es aumentado e idempotente. Es interesante observar también, siguiendo a Chachólski, que no hay manera de definir un funtor con las mismas propiedades universales en la categoría de espacios sin punto base. La razón de ello es que si esto fuera posible, el aumento natural cw poseería una sección canónica, y hay ejemplos que prueban que esto no siempre ocurre (ver [42], 7.4).

Dror-Farjoun dio también las dos primeras construcciones del funtor $\mathbf{CW}_A$; la primera, que aparece en ([69] 2.E.3), es standard:

Sea X un espacio. Recordemos que se define la n-*semisuspensión* de A como $\tilde{\Sigma}^n A = (S^n \times A) \cup (D^{n+1} \times \{*\})$ para $n \geq 1$, y convenimos que $\tilde{\Sigma}^0 A = A$. Sea pues $F(X)_0 = \bigvee_{n \geq 0} \tilde{\Sigma}^n A$, donde para cada n, el wedge está extendido sobre todas las aplicaciones de $[\tilde{\Sigma}^n A, X]_*$. Aumentamos F mediante una aplicación $p_0 : F(X)_0 \longrightarrow X$ definida como el wedge $\bigvee_{n \geq 0} h$ extendido de nuevo, para cada n, sobre todas las aplicaciones $h \in [\tilde{\Sigma}^n A, X]_*$.

A continuación consideramos $D_0 = \bigvee_{n \geq 0} \tilde{\Sigma}^n A$, donde el wedge ahora está indizado, para cada n, por pares $\{h, h'\}$, donde h es una aplicación de $[\tilde{\Sigma}^n A, X]$ y h' es una extensión de $p_0 \circ h$ a $D^{n+1} \times A$. Así queda definida claramente una aplicación $D_0 \longrightarrow F(X)_0$. Sea entonces $F(X)_1$ el pushout del diagrama:

$$\begin{tikzcd} D_0 \arrow[r] \arrow[d] & \bigvee_{\{h,h'\},\, n\geq 0} D^{n+1} \times A \arrow[d] \\ F(X)_0 \arrow[r] & F(X)_1 \end{tikzcd}$$

A partir de aquí es fácil deducir $F(X)_i$ por inducción (transfinita en su caso) como el pushout del diagrama correspondiente. De este modo hemos definido un telescopio:

$$F(X)_0 \longrightarrow F(X)_1 \longrightarrow F(X)_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow F(X)_\alpha \longrightarrow \ldots$$

Si tomamos λ como el primer ordinal transfinito mayor que la cardinalidad de X, el colímite del telescopio anterior para $\alpha < \lambda$ es un modelo para la A-celularización de X.

La segunda construcción tiene la desventaja de no ser funtorial, pero es en cierto modo más intuitiva y produce un modelo de la A-celularización más manejable:

Proposición 1.2.2. *Sea A un complejo finito y X un espacio numerable. Entonces la A-celularización de X puede definirse como*

$$\mathbf{CW}_A X = (\bigvee \tilde{\Sigma}^i A) \cup_{\phi_1} C\tilde{\Sigma}^{i_1} A \cup_{\phi_2} \tilde{\Sigma}^{i_1} A \ldots$$

donde las aplicaciones ϕ_t se definen sobre $\tilde{\Sigma}^{i_1} A$ para todo $t \geq 0$, y esencialmente tienen la función eliminar los núcleos de las aplicaciones $F(X)_i \longrightarrow X$ definidas durante la construcción anterior.

De este modo obtenemos un modelo numerable para $\mathbf{CW}_A X$ que es incluso más simple si X ya es una suspensión ([69] 2.E.5-2.E.7). Otros modelos de la A-celularización serán recordados un poco más adelante, cuando estudiemos la relación entre los funtores $\mathbf{P}_A$ y $\mathbf{CW}_A$.

La motivación original de estas definiciones puede encontrarse en el problema de clasificar los acíclicos de una determinada teoría de homología generalizada E_*, propuesto originalmente por J.F. Adams ([2]) en los años 70. Así, aprovechando el hecho de que los colímites homotópicos punteados de acíclicos son siempre acíclicos, la idea es buscar un espacio finito A tal que cualquier espacio E_*-acíclico (o al menos una cantidad importante de ellos) pueda ser obtenido a partir de A realizando reiteradamente estos colímites. De hecho, si X es un CW-complejo finito E_*-acíclico y $\mathbf{P}_{\Sigma A} X$ es contráctil, se tiene que es el límite de sus subcomplejos E_*-acíclicos. Con estas herramientas se ha probado tambíen, por ejemplo, que para todo $i \geq 0$ y para algún $k(n) \geq 0$, el espacio de Eilenberg-MacLane $K(G, i+k)$ es el colímite homotópico de sus subcomplejos acíclicos para la teoría $K(n)$ de Morava ([69], 3.C.5). Además, si $V(n)$ es un espacio de p-torsión finito de tipo n, se tiene que:

- Si G es un grupo de p-torsión, existe un $m \geq n$ de modo que $K(G, m+j)$ es $V(n)$-celular para todo j.
- Si X es un espacio 2-conexo y de p-torsión tal que la teoría K reducida compleja de su espacio de lazos es nula, X es $V(n)$-celular.
- Sea $\tilde{S}(n)_*$ la teoría de homología definida por Bousfield en ([23], 12.2) a través del espectro de las esferas p-localizado. Para todo $n \geq 1$, existe $N \geq n$ tal que todo espacio de p-torsión N-conexo cuyo N-espacio de lazos sea $\tilde{S}(n)_*$-acíclico es $V(n)$-celular.

El lector interesado en las demostraciones, así como en otras condiciones de este tipo y en las relaciones con otras teorías de homología (muy particularmente con las teorías K de Morava) puede consultar las referencias [23], [121] o [147].

Este planteamiento, que bebe de la filosofía de descomposiciones homotópicas de grupos de Lie compactos de Jackowski-McClure-Oliver ([94] y [95]) por una parte, y de la construcción de las categorías "gruesas" por Ravenel ([147], capítulos 4-6) como la clausura por cofibraciones y por (de)suspensiones de los espacios de tipo $V(n)$ por otra, está estrechamente relacionado con el problema de decidir si una teoría de cohomología es "smashing"(ver [68], A.2 para más detalles) y además llevó a Dror-Farjoun a proponer el concepto de clase cerrada, que estudiamos en el siguiente epígrafe.

1.2.2. Clases cerradas. Propiedades del funtor $\mathbf{CW}_A$. Ejemplos.

Una *clase cerrada* es una clase de espacios que es cerrada bajo equivalencias débiles y colímites homotópicos punteados.

Las características principales de las clases cerradas fueron descritas por Chachólski en [42]. Asimismo, este autor observa que la clase de los espacios

A-celulares es cerrada, y que de hecho es la menor clase cerrada que contiene a A. Entre los ejemplos de clases cerradas podemos destacar los espacios A-acíclicos (que constituyen una clase cerrada peculiar, de la cual hablaremos un poco más tarde), los espacios n-conexos, los espacios X tales que para todo espacio de dimensión finita se tiene que $\mathrm{map}_*(X, Y)$ es contráctil (espacios de Miller) o los espacios E_*-acíclicos para una teoría de (co)homología generalizada E_*.

Es evidente a partir de la definición que las clases cerradas lo son para colímites homotópicos punteados, y de hecho uno de los motivos que llevó a Dror-Farjoun a definir dichas clases de este modo fue el estudio de la aplicación natural hocolim $F \longrightarrow$ colim F, y en particular de su fibra y cofibra homotópica. Por ejemplo, mediante estos métodos este autor prueba que si los valores de F son espacios A-celulares, tanto la fibra como la cofibra de la aplicación son espacios $\Sigma^2 A$-celulares. Un estudio detallado de este problema puede encontrarse en ([68], sección F).

A continuación listamos algunas propiedades interesantes de los espacios A-celulares y del funtor $\mathbf{CW}_A$, muchas de las cuales se prueban a partir de propiedades análogas de las clases cerradas.

Proposición 1.2.3. *Sea A un espacio. Entonces:*

- [[42], 4.3] *Si X es débilmente contráctil, es A-celular .*
- [[69], 2.E.11] *Si X es A-celular e Y es retracto de X, Y es A-celular.*
- [[69], 2.D.2.6] *Si A es n-conexo, para $n \geq 0$, entonces cualquier espacio A-celular es n-conexo, y análogamente si A es (co)homológicamente n-conexo para una teoría de (co)homología generalizada E_*. En particular, si A es E_*-acíclico, también lo es X.*
- [[69], 2.E.10] *Si X e Y son conexos, entonces existe una equivalencia $\mathbf{CW}_A(X \times Y) \simeq \mathbf{CW}_A X \times \mathbf{CW}_A Y$. En particular, el producto de espacios A-celulares es A-celular (de hecho esto es cierto aunque los espacios no sean conexos).*
- [[69], 2.D.8] *Si X es A-celular e Y es B-celular, el producto smash $X \wedge Y$ es $(A \wedge B)$-celular.*
- [[42], 4.3] *Si X es A-celular, entonces la n-suspensión $\Sigma^n A$ y la n-semisuspensión $\tilde{\Sigma}^n A$ son A-celulares.*

- [[42], 11.1] *Si X es simplemente conexo, se tiene una equivalencia homotópica $\Omega\mathbf{CW}_{\Sigma A}X \simeq \mathbf{CW}_A\Omega X$.*

- [[42], 10] *Si B es A-celular y X es B-celular, entonces X es A-celular.*

- [[69], 9.A] *Si X es A-celular e Y es otro espacio tal que $map_*(A, Y)$ es débilmente contráctil, entonces también lo es $map_*(X, Y)$.*

- [[69], 4.A.2] *Si X es un G-espacio tal que para todo $H < G$ el subespacio de puntos fijos X^H es A-celular, se tiene que X/G también lo es.*

- [[69], 4.B.3] *Si X es un GEM, también lo es $\mathbf{CW}_AX$.*

- [[42], 4.4-4.5] *Sean $D_1, D_2 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Spaces}_*$ diagramas, y sea una transformación natural $\Psi : D_1 \longrightarrow D_2$. Si para cada objeto a de $\mathcal{C}$ la fibra homotópica de Ψ_a es A-celular, entonces también lo es la fibra homotópica de la aplicación inducida entre los colímites homotópicos. En particular esto implica que si $f : A \longrightarrow X$ es una aplicación y C_f es su cofibra homótópica, la fibra homotópica de la inclusión $X \hookrightarrow C_f$ es A-celular.*

En ([69], capítulo 9 y [42], sección 10) se prueban otras propiedades interesantes de la A-celularización, sobre todo relacionadas con el comportamiento del funtor $\mathbf{CW}_A$ respecto a suspensiones y espacios de lazos.

Antes de pasar a describir el comportamiento del funtor $\mathbf{CW}_A$ respecto a fibraciones, vamos a definir el concepto de equivalencia A-celular.

Definición 1.2.4. Una aplicación $X \longrightarrow Y$ es una equivalencia A-celular si induce una equivalencia débil $\mathrm{map}_*(A, X) \simeq \mathrm{map}_*(A, Y)$.

Las principales propiedades de las equivalencias A-celulares pueden encontrarse en ([42], sección 6). Este concepto es utilizado con gran frecuencia en dicho trabajo.

Al igual que ocurría en el caso de A-anulación, se han dedicado grandes esfuerzos a intentar dilucidar bajo qué circunstancias o hasta qué punto el funtor $\mathbf{CW}_A$ preserva fibraciones, así como qué relación hay entre la A-celularidad de los componentes de una fibración. Algunos de los principales resultados obtenidos han sido los siguientes:

Proposición 1.2.5. *Sea A un espacio punteado. Entonces:*

- [[42], 4.7] *Si $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ es una fibración con una sección y F y B son A-celulares, entonces E es A-celular.*

- [[69], 2.D.11 y 3.E.1] *Si $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ es una fibración con base conexa y E y F A-celulares, también lo es B. En particular, si B y E son ΣA-celulares, la fibra es A-celular, y si la base y la fibra son ΣA-celulares, el espacio total es A-celular.*

- [[69], 5.E.7] *Si A es una doble suspensión, la fibra de $\mathbf{CW}_A\Omega X \longrightarrow \Omega\mathbf{CW}_A X$ es el espacio total de una fibración cuya base y fibra son GEMs.*

Obsérvese cómo en el último ejemplo, el término de error viene dado por un GEM. Esta idea, que se utiliza para medir la "conmutatividad" entre funtores de localización y celularización por una parte, y otro tipo de funtores tales como suspensiones, espacios de lazos o fibras homotópicas por otra, es especialmente explotada en ([69], capítulo 5).

También en [69], en este caso en el capítulo 3, podemos encontrar bastantes ejemplos de espacios A-celulares. A continuación comentamos brevemente los más importantes:

1. *La construcción de James JX.* En 1955 I. James propone ([96]), dado un espacio X, un modelo combinatorial para el espacio de lazos de la suspensión de X, que desde entonces se denomina "construcción de James de X". Este modelo ha sido muy usado posteriormente, pues sobre él pueden utilizarse técnicas como el teorema de aproximación celular o filtraciones por subcomplejos de los cuales se conoce la homología.

   Utilizando una descomposición como telescopio debida a Blanc ([18]), Dror Farjoun prueba constructivamente que JX es X-celular, y después lleva a cabo una demostración elemental utilizando solamente las propiedades de conmutación mencionadas más arriba de los funtores $\mathbf{CW}_X$ con la suspensión y espacio de lazos. De modo similar se prueba que, para todo n, $\Omega^n\Sigma^n X$ es X-celular. Sin embargo, existen ejemplos en los que $\Sigma^n\Omega^n X$ no lo es, como por ejemplo $X = K(\mathbb{Z}, 3)$.

2. *La construcción de Dold-Thom.* Si X es un espacio y X^n es el producto de n-copias del espacio, el grupo simétrico Σ_n actúa en X^n intercambiando componentes. Al espacio cociente X^n/Σ_n se se le suele

denominar SP^nX, y al límite directo del telescopio $X = SP^1X \to SP^2X \to \dots$ se le llama construcción de Dold-Thom de X, y se le denota $SP^\infty X$. Esta construcción apareció en el trabajo [65] y ha sido ampliamente utilizada por Bousfield-Kan ([25]) y Dror-Farjoun ([69]), este último en el análisis del efecto de los funtores de localización sobre espacios de Eilenberg-MacLane generalizados.

El espacio $SP^\infty X$ es X-celular, y la prueba se lleva a cabo en ([69], 3.C.3) de dos modos diferentes: aplicando una técnica general sobre Γ-espacios debida a Bousfield, o bien de modo más sencillo, presentando el producto simétrico infinito $SP^\infty X$ como un colímite homotópico de productos finitos de X.

3. *Espacios clasificadores de grupos.* Sea G un grupo topológico, y consideremos su espacio clasificador. La construcción "join" de Milnor de $\mathrm{B}G$ proporciona una demostración directa de que $\mathrm{B}G$ es G-celular, y en particular para todo $k > 0$ se tiene que $K(G, n+k)$ es $K(G, n)$-celular. De hecho, las propiedades de conmutación de la celularización permiten probar que $\mathrm{B}G$ es, además, ΣG-celular.

   La G-celularidad de $\mathrm{B}G$ puede deducirse igualmente del hecho de que la ΣG-anulación de $\mathrm{B}G$ es contráctil ([69] 3.C.6).

4. *Espacios de Moore*. El estudio de las celularizaciones respecto a espacios de Moore $M(G, n)$ ha sido bastante popular en los últimos años, además de por su interés intrínseco, por su relación con la $\mathbb{Z}/p$-homotopía y por la posibilidad de encontrar modelos de dimensión finita para ellos. Así, Dror-Farjoun ya identifica la $M(\mathbb{Z}/p, n+1)$-celularización de $M(\mathbb{Z}/p^r, n+1)$ como la fibra homotópica de una cierta aplicación $M(\mathbb{Z}/p^r, n+1) \longrightarrow K(\mathbb{Z}/p^{r-1}, n)$, y obtiene como consecuencia que para todo p-grupo G y $j \geq 2$ el espacio $M(G, n+j)$ es $M(\mathbb{Z}/p, n+1)$-celular. Más tarde, Casacuberta-Hernández-Rodríguez ([37]) y Blanc ([19]) clasifican las celularizaciones respecto a los espacios $M(\mathbb{Z}/p^k, n)$ para $n \geq 2$, y Rodríguez-Scherer ([152]), por medio de herramientas diferentes como la $\mathbb{Z}/p$-celularización de grupos (que será de gran importancia en nuestro trabajo, ver capítulo 4) extienden la clasificación al caso $n = 1$, calculan para todo grupo discreto G el grupo fundamental de $\mathbf{CW}_{M(G,1)}X$, y, para cada grupo discreto N, describen el espacio $\mathbf{CW}_{M(G,1)}\mathrm{B}N$ por medio de una fibración universal. De hecho, nuestro

trabajo en celularización puede verse como un desarrollo de parte de este programa en el caso infinito dimensional $\mathbf{CW}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}$. Una discusión sobre espacios $M(G,1)$-celulares para $G \neq \mathbb{Z}/p^n$ puede encontrarse en [153].

5. *Espacios de Eilenberg-MacLane.* Una parte muy importante de los resultados obtenidos en el campo de la celularización de espacios han concernido a espacios de Eilenberg MacLane (a veces generalizados) como objeto de estudio *per se*, como términos de error o como herramienta de clasificación. Aquí citamos tres de los más representativos; el lector interesado en más detalles puede consultar ([69], 3.C).

   - Si $V(n)$ es un espacio finito de p-torsión de tipo n se tiene que para un cierto entero $k = k(n)$ y para todo $i \geq 0$, el espacio de Eilenberg-MacLane $K(G, i+k)$ es $V(n)$-celular. El resultado de aciclicidad correspondiente que hemos visto más arriba es una consecuencia directa de esta proposición.
   - Para cualesquiera $n, k \geq 0$, se tiene que $K(G, n+k)$ es un espacio $K(\mathbb{Z}, n)$-celular. La prueba de este resultado es sencilla utilizando una presentación del grupo G y un argumento inductivo.
   - Sea $n \geq 1$. Se tiene que que $K(\mathbb{Z}/p^j, n)$ es $K(\mathbb{Z}/p^k, n)$-celular si $k \geq j$, y que $\mathbf{CW}_{K(\mathbb{Z}/p^k,n)}K(\mathbb{Z}/p^k, n) = K(\mathbb{Z}/p^j, n)$ en caso contrario. La prueba de este resultado es una consecuencia de las propiedades de preservación de fibraciones vistas más arriba. Los resultados del capítulo 4 fueron en parte estimulados por este resultado, que es "patológico" en el sentido de que establece, por ejemplo, que $K(\mathbb{Z}/p^2, 1)$ *no* es $K(\mathbb{Z}/p, 1)$-celular.

Para concluir este epígrafe, mencionaremos que los trabajos más recientes sobre A-celularización han tratado esta construcción desde dos puntos de vista diferentes, que podríamos denominar respectivamente intrínseco y general. Así, en [44], los autores estudian el mínimo número de veces que hay que reiterar la construcción colímite homotópico para obtener la A-celularización de un cierto espacio X a partir de A. Este número $k_A(X)$, que es un ordinal no necesariamente finito, se denomina la A-*complejidad* de X, y describe en cierto modo la complejidad de $\mathbf{CW}_A X$.

El otro punto de vista es desarrollado en [75], donde los autores generalizan el concepto de celularización a ciertas categorías algebraicas. Más precisamente, definen un concepto general de $\mathbb{S}$-álgebra que engloba tanto a anillos como a álgebras diferenciales graduadas o espectros anillo, y dada una tal $\mathbb{S}$-álgebra R, definen la k-celularización $\mathrm{Cell}_k(M)$ de un R-módulo como otro R-módulo que cumple propiedades universales análogas a las ya estudiadas para $\mathbf{CW}_A X$. Esta construcción es ampliamente explotada en la segunda parte del artículo en la uniformización de teoremas de dualidad en contextos muy diferentes, tales como teoría de variedades, anillos conmutativos, grupos de homotopía estable o cohomología de grupos.

1.2.3. La relación entre $\mathbf{P}_A$ y $\mathbf{CW}_A$.

Desde que aparece la noción de celularización a principios de los años 90 se hace patente la existencia de una relación muy estrecha entre los funtores $\mathbf{P}_A$ y $\mathbf{CW}_A$. Filosóficamente, la dualidad es clara: mientras que $\mathbf{P}_A$ es un funtor que elimina la "parte" de X que es visible a través de A vía el espacio de aplicaciones $\mathrm{map}_*(A, X)$, la A-celularización aísla y preserva dicha parte. Esta dualidad es acentuada por el hecho de que mientras el funtor de A-anulación es una localización, $\mathbf{CW}_A$ es una colocalización, es decir, una localización en la categoría opuesta ([74]), y también por el resultado estable que prueba que si A y X son espectros y $\mathbf{P}^s_A$ y $\mathbf{CW}^s_A$ los análogos en la categoría estable a los funtores que estamos estudiando, entonces existe una cofibración

$$\mathbf{CW}^s_A X \longrightarrow X \longrightarrow \mathbf{P}^s_A X.$$

Ya en el libro de Dror-Farjoun aparecen las primeras relaciones entre estos funtores. Por ejemplo, para cualquier espacio X se tiene que $\mathbf{P}_A \mathbf{CW}_A X \simeq \mathbf{CW}_A \mathbf{P}_A X \simeq \{*\}$, y si A y X son conexos y $[A, X]_*$ es contráctil, entonces $\mathbf{CW}_A X$ es la fibra homotópica de la ΣA-anulación de A. De hecho, en cualquier caso se tiene que si $\mathbf{P}_{\Sigma A} X$ es contráctil, X es A-celular.

Otra relación importante viene dada por las *clases de celularidad*: se dice que $A \leq X$ si X es A-celular, y que A y X están en la misma clase de celularidad si $A \leq X$ y $X \leq A$. Tras definir estas clases y probar sus principales propiedades ([68]), Dror-Farjoun analiza su relación con las clases de nulidad de Bousfield ya comentadas anteriormente, y en particular obtiene un teorema de clasificación de suspensiones de p-torsión finitas paralelo al ya referido ([69], 7.C). La principal diferencia reside en que mientras Bousfield clasifica las clases de nulidad en función de la conectividad y el tipo, la clases de celularidad vienen determinadas, además de por la conectividad, por el p-exponente de la homología entera de dimensión máxima.

De todos modos, a pesar de toda la información obtenida anteriormente, la relación entre $\mathbf{CW}_A$ y $\mathbf{P}_A$ no es completamente aclarada hasta el trabajo [42] de Chachólski, donde la dualidad es analizada desde dos nuevos puntos de vista: la posibilidad de construir cada uno de estos funtores a partir del otro, y la comparación entre la imagen y el núcleo de ambos. Aclaramos que por núcleo de $\mathbf{P}_A$ entendemos los espacios A-acíclicos (respectivamente los espacios X para los que $\mathbf{CW}_A X \simeq \{*\}$), y por imagen de $\mathbf{P}_A$ a los espacios A-nulos (respectivamente A-celulares).

En el primero de los dos supuestos, la A-anulación es construida a partir de la A-celularización mediante el siguiente proceso recursivo ([42], 17.1): tomamos $X_0 = X$, X_1 como la cofibra del aumento $\mathbf{CW}_A X_0 \longrightarrow X_0$, y en general X_n como la cofibra del aumento $\mathbf{CW}_A X_{n-1} \longrightarrow X_{n-1}$; tras repetir el proceso quizá un número transfinito de veces, obtenemos que el colímite del telescopio $X_0 \to X_1 \to X_2 \dots$ tiene el tipo de homotopía de la A-anulación de X.

El siguiente teorema nos muestra la manera de realizar el proceso inverso:

Proposición 1.2.6. *Si A es conexo, la A-celularización de X tiene el tipo de homotopía de la fibra homotópica de la aplicación $\eta : X \longrightarrow LX$, donde η es la composición de la inclusión $X \hookrightarrow Cf$ en la cofibra homotópica de la evaluación $\bigvee_{[A,X]_*} A \longrightarrow X$ con la anulación $Cf \longrightarrow \mathbf{P}_{\Sigma A} Cf$.*

Este resultado es probablemente la herramienta más potente que se conoce para calcular la A-celularización de espacios, y es fundamental en nuestros resultados del capítulo 4. Dwyer, en particular, la utiliza para probar que la n-esfera es ΩS^{n+1}-celular si y sólo si $n = 1, 3$ o 7. La prueba puede encontrarse en ([42], 20.10).

Veamos, pues, para terminar esta sección, la relación existente entre la imagen y el núcleo de los funtores citados, lo cual es, quizá junto con la última proposición, la mayor aportación del trabajo [42]. La mencionada relación es clarificada por el teorema que citamos a continuación. Recordemos que una clase cerrada $\mathcal{C}$ es cerrada por extensiones por fibraciones si para cada fibración $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ tal que $F \in \mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{C}$, se tiene que $E \in \mathcal{C}$.

Teorema 1.2.7. *Sea A un espacio. Entonces:*

1. *Un espacio X es A-nulo si y sólo si su A-celularización es un punto.*

2. *Un espacio X es A-acíclico si y sólo si pertenece a la menor clase cerrada que contiene a A y es cerrada por extensiones por fibraciones. En particular, cada espacio A-celular es A-acíclico.*

La prueba de la primera parte de la proposición no es difícil, pues es una consecuencia más o menos inmediata de las definiciones. Lo novedoso e importante es el provecho que este autor extrae de la definición de clase cerrada para llegar a una caracterización tan sorprendentemente precisa de los espacios A-acíclicos como es el segundo enunciado. Además, en ese trabajo se lleva a cabo una descripción exhaustiva de dicha clase de espacios, y en particular se describen clases de aciclicidad semejantes a las clases de nulidad y celularidad vistas anteriormente.

A la vista de estos resultados, una conclusión a la que podemos llegar es que si $\overline{\mathbf{P}}_A : \mathbf{Spaces}_* \longrightarrow \mathbf{Spaces}_*$ es el funtor aumentado e idempotente que envía cada espacio X es la fibra homotópica del coaumento natural $X \longrightarrow \mathbf{P}_A X$ (y que es llamado frecuentemente "funtor acíclico" porque su imagen es la clase de los espacios A-acíclicos), se puede decir que la A-celularización de X es una especie de "mezcla" entre $\overline{\mathbf{P}}_A X$ y $\overline{\mathbf{P}}_{\Sigma A} X$. En el capítulo 4 estudiaremos el efecto del funtor acíclico sobre el grupo fundamental en el caso en que $A = \mathrm{B}\mathbb{Z}/p$ y X es el espacio clasificador de un grupo finito.

1.3. La compleción de Bousfield-Kan

La fuente principal para esta sección ha sido la primera parte de [25].

En esta sección estudiaremos la compleción de Bousfield-Kan, que será una herramienta básica en la primera parte de esta Memoria. Durante toda la sección R denotará un anillo conmutativo con unidad (que en nuestro caso será siempre $\mathbb{Z}/p$ o un subanillo de $\mathbb{Q}$).

P. Bousfield y D. Kan construyen en [25] un endofuntor coaumentado

$$R_\infty : \mathbf{Spaces} \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

que cumple las siguientes propiedades:

1. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación que induce un isomorfismo $f_* : H_*(X; R) \longrightarrow H_*(Y; R)$, entonces $R_\infty f : R_\infty X \longrightarrow R_\infty Y$ es una equivalencia de homotopía.

2. R_∞ preserva uniones disjuntas arbitrarias y productos finitos.

3. Si X es un espacio n-conexo y R es un anillo sólido (es decir, que la multiplicación $R \otimes_{\mathbb{Z}} R \longrightarrow R$ es un isomorfismo), entonces $R_\infty X$ también es n-conexo.

4. Si X es un H-espacio, $R_\infty X$ también es un H-espacio.

Nótese la semejanza de las propiedades 2) y 3) con algunas propiedades de los funtores de localización descritas en los preliminares. Como ya dijimos allí, aunque la compleción de Bousfield-Kan no es una localización en general, sí que lo es en cualquier subcategoría de **Spaces** donde el funtor R_∞ sea idempotente. Los espacios que aparecen en estas categorías son los espacios R-buenos, que describimos a continuación.

Definición 1.3.1. Un espacio X se dice *R-bueno* si el coaumento natural $X \longrightarrow R_\infty X$ es una equivalencia homológica con coeficientes en R, y *R-completo* si dicha aplicación es una equivalencia homotópica.

No es difícil ver ([25], I.5.2) que un espacio X es R-bueno si y sólo si $R_\infty X$ es R-completo, y a su vez esto ocurre si y sólo si $R_\infty X$ es R-bueno. La importancia y utilidad de la R-compleción proviene esencialmente de que en estos espacios aísla de forma muy adecuada la parte R-primaria de la homotopía de X, por una parte, y en que se ha descrito una ingente cantidad de ejemplos de espacios R-buenos, por otra, en particular para $R = \mathbb{Z}/p$ o $R \subset \mathbb{Q}$. A continuación describiremos estos ejemplos, no sin antes hacer notar, como contrapartida, que la R-compleción se muestra como una herramienta muy ineficaz en el estudio de espacios que no son R-buenos, principalmente por el hecho de que si un espacio no es R-bueno tampoco lo es ninguna de sus sucesivas R-compleciones.

Los ejemplos mejor estudiados de espacios R-buenos son los espacios R-nilpotentes. Antes de definirlos, necesitamos un par de conceptos de teoría de grupos:

Definición 1.3.2. Un grupo G se dice *R-nilpotente* si posee series centrales finitas

$$G = G_1 \supsetneq G_2 \supsetneq \ldots \supsetneq G_n = *$$

tales que cada uno de los cocientes sucesivos G_j/G_{j+1} admite estructura de R-módulo (que es única). Si $R = \mathbb{Z}$, el grupo se denomina sencillamente nilpotente. Asimismo, si G actúa en un grupo abeliano M, se dice que la acción es nilpotente si existe algún entero k tal que $I^k M = 0$, siendo I el ideal de aumento de $\mathbb{Z}[G]$.

Definición 1.3.3. Un espacio X se dice *R-nilpotente* si la acción monodrómica del grupo fundamental de X sobre los grupos de homotopía superior $\pi_n(X)$ es nilpotente para todo n y además todos los grupos de homotopía de X son R-nilpotentes. Si $R = \mathbb{Z}$, el espacio se dice nilpotente.

De la definición se deduce que todo espacio simplemente conexo es nilpotente, y si además sus grupos de homotopía son abelianos finitos, se tienen isomorfismos $\pi_i(X_p^\wedge) \simeq \mathbb{Z}_p^\wedge \otimes \pi_i(X)$ para todo i, donde $\mathbb{Z}_p^\wedge$ denota los enteros p-ádicos. Por otra parte, los espacios cuyos grupos de homotopía son p-grupos finitos también son nilpotentes, porque un p-grupo finito actúa siempre de modo nilpotente sobre otro p-grupo finito. En particular, el espacio clasificador de un p-grupo finito es siempre $\mathbb{Z}/p$-completo.

De ahora en adelante supondremos que $R = \mathbb{Z}/p$ o $R \subset \mathbb{Q}$; de acuerdo con ([25], I.9), esta restricción no es de gran importancia.

Entre los ejemplos de espacios R-buenos que no son nilpotentes podemos destacar los siguientes:

1. Los espacios X con grupo fundamental R-perfecto, es decir $H_1(X;R)=0$.
2. Los espacios con todos los grupos de homotopía finitos, y en particular los espacios clasificadores de grupos finitos.
3. Si $R = \mathbb{Z}/p$, los espacios con grupo fundamental finito.
4. El espacio de Eilenberg-MacLane $K(S_\infty, 1)$, donde S_∞ denota al grupo simétrico infinito.

Como contrapartida, es sabido que el plano proyectivo real no es $\mathbb{Z}$-bueno (a pesar de que es $\mathbb{Z}/p$-bueno para todo primo p), que un wedge finito de circunferencias tampoco lo es, y que un wedge infinito de circunferencias no es $\mathbb{Z}/p$-bueno para ningún p.

Una de las principales razones de la utilidad de la R-compleción es que se ha descrito con bastante precisión su efecto sobre fibraciones, sobre todo en los casos en que los espacios que aparecen satisfacen condiciones de nilpotencia. Mencionemos aquí el fundamental "lema de fibras"([25], II.5.1), que utilizaremos más adelante:

Teorema 1.3.4. *Sea $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ una fibración con fibra conexa de modo que la acción del grupo fundamental B sobre la homología mod R de la fibra sea nilpotente. Entonces la aplicación inducida $R_f : R_\infty E \longrightarrow R_\infty B$ es una fibración cuya fibra es homotópicamente equivalente a $R_\infty F$.*

Para más información sobre R-compleción y fibraciones puede consultarse el capítulo II de [25], donde también es descrita la R-compleción fibra a fibra, o el apéndice de [78].

Si BG es el espacio clasificador de un grupo finito, la $\mathbb{Z}/p$-compleción nos permite fracturar el tipo de homotopía de X en sus componentes p-primarias, como vemos en el siguiente lema, que usaremos a menudo en la primera parte de esta Memoria, y que es una consecuencia inmediata del cuadrado aritmético de Sullivan ([25], VI.8.1).

Lema 1.3.5. *Si G es un grupo finito, se tiene que la aplicación natural* $\mathrm{B}G \longrightarrow \prod_{p \text{ primo}} \mathrm{B}G_p^\wedge$ *es una equivalencia de homotopía.*

El hecho de que la R-compleción se construya como el límite inverso de una torre de fibraciones da lugar a la existencia de una sucesión espectral que en ciertas condiciones (teorema de Curtis, por ejemplo) converge a sus grupos de homotopía, y que coincide, si $R = \mathbb{Z}/p$, con la sucesión espectral de Adams inestable. En ciertos casos, sin embargo, no es preciso recurrir a herramientas tan sofisticadas para conocer la homotopía de $R_\infty X$. Por ejemplo, $\pi_1(R_\infty X)$ es siempre el cociente de $\pi_1(X)$ por su subgrupo normal maximal R-perfecto, y si $R = \mathbb{Z}/p$ y X es nilpotente, existe una sucesión exacta escindible ([25], VI.5.1)

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p_\infty, \pi_n(X)) \longrightarrow \pi_n(R_\infty X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p_\infty, \pi_{n-1}(X)) \longrightarrow 0.$$

En particular, si para cada n el grupo $\pi_n(X)$ es abeliano finitamente generado y sus elementos de torsión tienen orden acotado, se tiene que $\pi_n(R_\infty X)$ es la $\mathbb{Z}/p$-compleción de Artin-Mazur de $\pi_n(X)$.

1.4. Colímites homotópicos

Las referencias utilizadas en esta sección, a las que remitimos al lector para más detalles, han sido [25], [69] y [76]. Tratamientos exhaustivos de la teoría de colímites homotópicos pueden hallarse en [45] y [90].

Es sabido en general que los colímites estrictos en la categoría de espacios no se comportan bien respecto a equivalencias débiles. Un ejemplo paradigmático es el siguiente: si consideramos el diagrama conmutativo, donde las aplicaciones horizontales superiores son las inclusiones canónicas

$$\begin{array}{ccccc} D^n & \longleftarrow & S^n & \longrightarrow & D^n \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} & & \downarrow \\ * & \longleftarrow & S^n & \longrightarrow & * \end{array}$$

las columnas son equivalencias débiles, pero sin embargo los pushouts de cada una de las filas no poseen el mismo tipo de homotopía. En general, el tipo de homotopía de dicho pushout queda fijado si sustituimos las aplicaciones horizontales por cofibraciones que sean homotópicas a ellas, y el pushout resultante es el que es considerado "pushout homotópico".

Entre las diferentes construcciones que se han propuesto del colímite homotópico (como diagonal de un cierto conjunto simplicial, como colímite estricto de un diagrama libre, etc.) escogemos una que es descrita en ([76], pág 19), y que destaca por su sencillez: sea $F : \mathcal{C} \longrightarrow$ **sSpaces** un diagrama. Por cada objeto c_0 de $\mathcal{C}$ tomamos una copia de $F(c_0)$, por cada morfismo $c_0 \longrightarrow c_1$ una copia de $F(c_0) \times \Delta^1$, y en general para cada cadena $c_0 \longrightarrow c_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow c_n$ una copia de $F(c_0) \times \Delta^n$. A continuación, realizamos las siguientes identificaciones:

- Colapsamos el producto $F(c_0) \times \Delta^n$ si alguno de los morfismos que aparecen en la cadena correspondiente es la identidad.
- Identificamos el subespacio "borde" $F(c_0) \times \partial\Delta^n$ de $F(c_0) \times \Delta^n$ con el subespacio apropiado determinado por la cadena de longitud menor correspondiente.

El objeto obtenido de este modo es el colímite homotópico del diagrama que determina el funtor F. No es difícil ver que esta construcción es funtorial en F, en el sentido de que una transformación natural de funtores (o, dicho de otro modo, un morfismo de diagramas) induce una aplicación entre los colímites homotópicos. Además, si todos los morfismos a que da lugar la transformación natural $F \longrightarrow F'$ son equivalencias débiles, la aplicación inducida entre los colímites homotópicos también lo es (esta es la propiedad de invariancia homotópica). Por otra parte, la construcción también es funtorial en $\mathcal{C}$, queriendo decir esto que un funtor $f : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ da siempre lugar a una aplicación natural hocolim $F \circ f \longrightarrow$ hocolim F. Utilizando categorías coma ([118], II.6) no es difícil deducir también la existencia de una aplicación hocolim $F \longrightarrow$ colim F, que en general no es una equivalencia débil, aunque hay bastantes situaciones en las que sí que lo es, como por ejemplo las que siguen:

- Si la categoría $\mathcal{C}$ es discreta; en este caso ambos colímites tienes el tipo de homotopía de la unión disjunta de los espacios que aparezcan.

- Si $\mathcal{C}$ es la categoría $* \longrightarrow *$; los colímites tienen ahora el tipo de homotopía del cilindro reducido de la correspondiente aplicación.

- Si $\mathcal{C}$ tiene algún objeto terminal, es decir, existe $c \in \mathcal{C}$ tal que para todo $c' \in \mathcal{C}$ existe una y sólo una aplicación $c' \longrightarrow c$. En este caso los colímites poseen el tipo de homotopía de $F(c)$.

Algunos ejemplos más pueden encontrarse en ([25], XII.3).

Como ejemplo de un caso en el que la aplicación no sea una equivalencia débil podemos recordar el ya comentado que encabeza la sección, o bien el siguiente: si consideramos el diagrama

$$* \longleftarrow S^n \xrightarrow{*} D^{n+1}$$

el colímite estricto es D^{n+1}, mientras que el colímite homotópico (resultante de sustituir la aplicación constante por la inclusión canónica) es S^{n+1}.

Nota 1.4.1. Una vez concluida la construcción del colímite homotópico, que se ha llevado a cabo en la categoría de conjuntos simpliciales, en lo que sigue nos referiremos indistintamente al susodicho colímite homotópico y a su realización geométrica en la categoría de espacios.

Una herramienta que se ha mostrado eficaz en el cálculo de la homología de un colímite homotópico ha sido la sucesión espectral de Bousfield-Kan. Concretamente, para todo grupo abeliano G existe una sucesión espectral natural $E^r_{i,j}(F,G)$ que converge a $H_*(\text{hocolim } F; M)$, cuya página E^2 es descrita por medio de las igualdades $E^2_{i,j}(F,G) = \text{colim}_i\ H_j(F,G)$, donde colim_i representa al i-ésimo funtor derivado del funtor colímite ($\text{colim}_0 = \text{colim}$) y $H_j(F,G)$ es el funtor obtenido al componer F con $H_j(-,G)$. También existe una sucesión espectral similar para cohomología.

Estas herramientas han sido utilizadas con éxito en el contexto de descomposiciones homológicas de espacios clasificadores de grupos de Lie compactos ([94] y [95]), de espacios clasificadores de grupos finitos ([76]), así como más recientemente en las descomposiciones homológicas de sus análogos homotópicos, grupos p-compactos ([41]) y grupos p-locales finitos ([30]).

Pasamos a comentar algunos ejemplos concretos interesantes de colímites homotópicos de diagramas.

1. Denotemos por v_0 y v_1 a los vértices del símplice canónico Δ^1, y sea C la categoría de pushouts

$$a \xleftarrow{f} b \xrightarrow{g} c.$$

En estas condiciones, el colímite (pushout) homotópico de cualquier funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Spaces}$ viene dado por el espacio

$$F(a) \coprod F(b)_f \times \Delta^1 \coprod F(b) \coprod (F(b)_g \times \Delta^1 \coprod F(c))$$

sometido a los pegamientos determinados por la categoría de índices, que son:

- $F(b)_f \times v_1$ se pega a $F(a)$ vía $F(f)$.
- $F(b)_f \times v_0$ se pega a $F(b)$ por la identidad.
- $F(b)_g \times v_0$ se pega a $F(b)$ también por la identidad, y
- $F(b)_g \times v_1$ se pega a $F(c)$ por $F(g)$.

2. Sea $\mathcal{C}$ ahora la categoría dada por los números naturales:

$$1 \to 2 \to 3 \to \dots$$

El colímite homotópico de un funtor F definido sobre esta categoría y tal que las imágenes de los morfismos sean cofibraciones es del mismo tipo de homotopía que el colímite estricto, que a su vez es el límite directo del telescopio

$$F(1) \to F(2) \to F(3) \to \dots$$

3. Si Δ es la categoría cuyos objetos son los símplices canónicos ordenados y cuyos morfismos son las aplicaciones simpliciales que preservan el orden, cualquier conjunto simplicial X se describe como el colímite homotópico del funtor $F : \Delta^{op} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ que envía Δ^n en X_n.

4. Si $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña, se define el *nervio* $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ como el colímite homotópico sobre $\mathcal{C}$ del funtor constante con valores en el espacio de un punto. En particular, si G es un grupo discreto y $\mathbf{G}$ es la categoría con un sólo objeto y un morfismo por cada elemento de G con la composición evidente, se tiene que $\mathrm{N}(\mathbf{G})$ es el espacio clasificador de G.

   Las siguiente propiedades del nervio serán utilizadas en esta Memoria:

   - Si F y G son dos funtores definidos entre categorías pequeñas relacionados por una transformación natural, entonces las aplicaciones inducidas entre los nervios, $\mathrm{N}(F)$ y $\mathrm{N}(G)$, son simplicialmente homotópicas, y una de ellas es una equivalencia débil si y sólo si lo es la otra.
   - Si un functor F es una equivalencia de categorías pequeñas, $\mathrm{N}(F)$ es una equivalencia débil de espacios.
   - Si el funtor identidad de una categoría pequeña $\mathcal{C}$ está conectado a un funtor constante por medio de un zigzag de transformaciones naturales, entonces el nervio de la categoría pequeña es contráctil.

Concluimos esta sección con un par de notas sobre colímites no punteados y límites homotópicos.

Nota 1.4.2. Merece la pena hacer notar que así como hemos definido los colímites homotópicos en la categoría de espacios sin punto base, pueden definirse igualmente en la categoría punteada; la relación entre ambos colímites viene dada por una cofibración ([69], pág. 177)

$$\mathrm{N}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{hocolim}\ F \longrightarrow \mathrm{hocolim}_* F,$$

donde $\mathcal{C}$ es la categoría de índices. Por ejemplo, en el caso sencillo en que $\mathcal{C}$ es una categoría discreta, ya hemos visto que el colímite punteado es el wedge, mientras que el no punteado es la unión disjunta de los espacios que aparecen en el diagrama. En esta Memoria, utilizaremos en general los colímites homotópicos con punto base en el contexto de (co)localización, y los no punteados en el estudio de espacios clasificadores para acciones propias de grupos discretos infinitos.

Nota 1.4.3. El desarrollo realizado de la teoría de colímites homotópicos puede dualizarse a una teoría de límites homotópicos, sobre la cual no entraremos en detalles porque estos objetos apenas aparecen en esta Memoria. El lector interesado puede consultar ([25], capítulo XI).

Capítulo 2

Preliminares sobre acciones propias

Durante todo este capítulo, y salvo mención explícita en contra, G será un grupo topológico de Hausdorff, segundo numerable y localmente compacto.

Como quedó dicho en la introducción, uno de los principales innovaciones que aporta esta Memoria es la utilización sistemática de herramientas propias de teoría de localización (la mayor parte de las cuales han sido descritas en el capítulo anterior) para arrojar luz sobre la estructura homotópica de $\underline{\mathrm{B}}G$, el espacio clasificador para G-fibrados propios. Este espacio desempeña en la teoría de G-acciones propias un papel similar al que el espacio clasificador clásico $\mathrm{B}G$ desempeña en el contexto de G-acciones libres, y como aquél, se define como el cociente de un cierto G-espacio "universal" contráctil $\underline{\mathrm{E}}G$ por la acción del grupo G. Este capítulo está dedicado a describir detalladamente estos objetos, así como los principales problemas en los cuales están involucrados, como la conjetura de Baum-Connes (a la cual en el resto de la Memoria nos referiremos frecuentemente como **BCC**), la teoría de la dimensión o las relaciones entre condiciones de finitud para grupos y espacios. Comenzamos con algunas nociones necesarias de homotopía G-equivariante y acciones propias.

2.1. Acciones propias

Las referencias fundamentales de este epígrafe son los libros de Bredon ([28]), tom Dieck ([63]) y Lück ([113]). En las dos primeras referencias, en particular, puede consultarse toda la información necesaria sobre acciones clásicas de grupos sobre espacios.

Los objetos básicos sobre los cuales se asienta la teoría de homotopía G-equivariante son los G-CW-complejos, definidos originalmente por Matumoto ([123]) para el caso de G un grupo de Lie compacto, y generalizados posteriormente al caso no compacto por Illman ([93]) y tom Dieck ([63]).

Definición 2.1.1. Un G-CW-*complejo* es un G-espacio X dotado de una filtración $X^{-1} \subseteq X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \ldots \subseteq X$ y de una colección de $\{e_i^n \mid i \in I_n\}$, para todo $n \geq 0$, de modo que los siguientes axiomas se cumplen:

1. Un subespacio $Y \subseteq X$ es cerrado si y sólo si $Y \cap X^n$ es cerrado en X^n para todo $n \geq -1$.
2. $\bigcup_{n\geq 0} X^n = X$.
3. Para todo $n \geq 0$, existe una colección $\{H_i \mid i \in I_n\}$ de subgrupos cerrados de G y aplicaciones G-equivariantes $q_i^n \colon S^{n-1} \times G/H_i \longrightarrow X^{n-1}$, $Q_i^n \colon B^n \times G/H_i \longrightarrow X^n$ de manera que si las aplicaciones verticales son inclusiones, el siguiente diagrama es un G-pushout

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i\in I_n} G/H_i \times S^{n-1} & \xrightarrow{\amalg_{i\in I_n} q_i^n} & X^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{i\in I_n} G/H_i \times B^n & \xrightarrow{\amalg_{i\in I_n} Q_i^n} & X^n. \end{array}$$

de modo que para todo n se tiene que $e_i^n = Q_i^n(G/H_i \times int\ B^n)$.

Los subespacios e_n^i y $Q_i^n(G/H_i \times B^n)$ se llamarán *células abiertas* y *células cerradas* de X, respectivamente, mientras que X^n será el *n-esqueleto* de X.

Los conceptos de G-CW-subcomplejo, G-CW-complejo relativo y aplicación G-celular se definen del modo obvio.

Definición 2.1.2. Una aplicación G-equivariante $f : X \longrightarrow Y$ entre G-espacios se dice *G-equivalencia débil* si para cada subgrupo compacto $H < G$ la aplicación inducida sobre los espacios de puntos fijos $f^H : X^H \longrightarrow Y^H$ es una equivalencia homotópica débil.

Puede demostrarse ([113], I.2.4) que si X es un G-CW-complejo, la noción de G-equivalencia homotópica coincide con la de G-equivalencia definida un poco más arriba.

El teorema de aproximación celular ([113], pág. 35) prueba que la importancia de los G-CW-complejos en teoría de homotopía G-equivariante es análoga a la de los CW-complejos en homotopía clásica, y en particular, su aparición permitió trasladar al entorno G-equivariante multitud de conceptos y resultados de homotopía clásica, al menos en el caso de G un grupo de Lie compacto. Entre estos últimos podemos destacar el teorema de Whitehead, la teoría de obstrucción a la finitud geométrica, el teorema del "slice", las equivalencias homotópicas simples o los grupos de torsión de Whitehead. En particular, entre los conceptos clásicos cuyos análogos G-equivariantes se han mostrado de mayor utilidad destacan las condiciones de finitud. A continuación recordamos las principales entre ellas, que se han mostrado de crucial importancia en esta Memoria.

Definición 2.1.3. Un G-CW-complejo se dice *n-dimensional* si $X = X^n$ para algún n, y de dimensión finita si es n-dimensional para algún n. Diremos que X es *finito* si posee solamente un número finito de celdas abiertas, *de tipo finito* si cada n-esqueleto es finito, y *finitamente dominado* si existe un G-CW-complejo finito Y y aplicaciones G-equivariantes $r : Y \longrightarrow X$ y $i : X \longrightarrow Y$ tales que $r \circ i$ es G-homotópicamente equivalente a la identidad de X. Si X es finito, entonces trivialmente es de dimensión finita, de tipo finito y finitamente dominado.

La referencia clave sobre extensión de propiedades clásicas al contexto G-equivariante es el capítulo primero del libro de Lück ([113]).

Aunque en un principio todos estos invariantes se redefinieron solamente para espacios con acciones de grupos de Lie compactos, pronto quedó patente la necesidad de realizar la extensión apropiada al caso no compacto, y este requerimiento llevó de forma natural a considerar acciones *propias* de grupos topológicos sobre G-CW-complejos.

Definición 2.1.4. Sea G un grupo topológico localmente compacto de Hausdorff y segundo numerable y X un G-espacio. La acción de G en X se dice *propia* si para cada punto $p \in X$ existe un triple (U, H, ρ) de modo que se cumplen las siguientes condiciones:

1. H es un subgrupo compacto de G.

2. U es un entorno abierto de p de modo que $gu \in U$ para cada $(g, u) \in G \times U$.

3. ρ es una G-aplicación de U a G/H.

La denominación "propia" proviene de que la aplicación $G \times X \longrightarrow X \times X$ que envía el par (g, x) es (x, gx) es propia en sentido geométrico, o sea, cerrada y tal que la antiimagen de cada punto es compacta.

No es difícil ver que todos los grupos de isotropía de una acción propia son compactos, que un G-CW-complejo es propio si y sólo si el grupo de isotropía de cada punto es un subgrupo compacto de G. En el caso en que G es discreto, podemos decir que si X es un G-CW-complejo propio, G actúa esencialmente permutando células.

La primera definición de acción propia corresponde a Palais ([140]), que la utiliza para demostrar el teorema del "slice" en el caso no compacto, y desde entonces la condición de "propia" se ha hecho imprescindible para estudiar acciones de grupos no compactos con ciertas garantías, sobre todo desde un punto de vista geométrico. Entre las mayores contribuciones realizadas en este tema destacan los trabajos de Abels ([1]) sobre acciones de grupos de Lie en variedades diferenciables paracompactas, Connolly-Koźniewski ([51]) sobre acciones de grupos cristalográficos en variedades de Hadamard o Connolly-Prassidis ([52]) que describen acciones de grupos de dimensión cohomológica virtual finita sobre productos de $\mathbb{R}^n$ y m-esferas.

Al igual que los G-CW-complejos libres, los G-CW-complejos propios están clasificados vía una cierta aplicación a un espacio "universal" Y, y del mismo modo que ocurre con los G-fibrados principales, los G-fibrados propios son clasificados mediante aplicaciones de la base del fibrado al cociente Y/G. En el siguiente epígrafe definimos y describimos con detalle estos espacios, cuyo estudio constituye, como ya se dijo al principio del capítulo, el objetivo de la segunda parte de esta Memoria.

2.2. Espacios clasificadores para familias de subgrupos

La idea de "espacio universal" o "espacio clasificador" para acciones propias se enmarca dentro de la teoría más general de espacios clasificadores para familias de subgrupos, que son los objetos que definimos a continuación:

Definición 2.2.1. Sea $\mathcal{F}$ una familia de subgrupos de un grupo G, cerrada por conjugación y por subgrupos. Diremos que un G-CW-complejo Y es un *modelo* para $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$ si el grupo de isotropía de cada punto pertenece a $\mathcal{F}$ y para todo $H \in \mathcal{F}$, el espacio de puntos fijos Y^H es contráctil.

Nosotros estaremos interesados esencialmente en el caso de G discreto y $\mathcal{F}$ la familia de subgrupos finitos o de p-subgrupos finitos de $\mathcal{F}$. Es sencillo ver que $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$ es un punto si y sólo si $G \in \mathcal{F}$, y que si la familia $\mathcal{F}$ de subgrupos compactos de G se reduce al grupo trivial, entonces $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G = \mathrm{E}G$, el espacio universal clásico para G-fibrados principales.

El objeto $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$ está caracterizado por la siguiente propiedad universal:

Proposición 2.2.2. *Si X es un modelo para $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$, entonces para cada G-CW-complejo propio existe una aplicación $X \longrightarrow \mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$ que es única salvo G-homotopía, y dos modelos para $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$ son siempre G-homotópicamente equivalentes. A la inversa, si Y es un G-CW-complejo que cumple esta propiedad universal, Y es un modelo para $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$.*

Demostración. Ver [63], sección 1.6.

□

A causa de esta propiedad, el espacio $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$ se denomina normalmente el *espacio clasificador de la familia* $\mathcal{F}$. En particular, como un G-CW-complejo es propio si y sólo si tiene grupos de isotropía compactos, los G-CW-complejos propios están clasificados por aplicaciones a $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$, donde $\mathcal{F}$ es la familia de subgrupos *compactos* de G. En este caso a $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$ se le suele denotar $\underline{\mathrm{E}}G$ y denominar "espacio universal para acciones propias" o más comúnmente "espacio clasificador para acciones propias".

El espacio cociente $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G/G$ se denota normalmente $\mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$. Como el espacio universal $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$ es único salvo G-equivalencia homotópica, $\mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$ es único salvo homotopía, pero al contrario de lo que ocurre con $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$, esto no significa que todo espacio del tipo de homotopía de un modelo de $\mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$ sea un modelo de $\mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$. Por ejemplo, de la definición se deduce que $\mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$ es un punto si sólo si G es compacto, pero se sabe (y veremos ejemplos en 8.1) que hay muchos grupos no compactos para los cuales $\mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$ es contráctil.

Ahora, si G y G' son grupos, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ familias de subgrupos de G y G', respectivamente, cerradas por conjugación y subgrupos, y $f : G \longrightarrow G'$ es un homomorfismo tal que $f(H) \in \mathcal{F}'$ para todo $H \in \mathcal{F}$, no es difícil ver que f da lugar a una aplicación G-equivariante $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G \longrightarrow \mathrm{E}_{\mathcal{F}'}G'$, que es única salvo G-homotopía, y a una aplicación $\mathrm{B}_{\mathcal{F}}G \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathcal{F}'}G'$, única salvo homotopía.

Si no media mención explícita en contra, supondremos de aquí en adelante que $\mathcal{F}$ es la familia de subgrupos compactos de G. Así, de acuerdo con el párrafo anterior, todo homomorfismo de grupos $G \longrightarrow G'$ induce una aplicación G-equivariante $\underline{\mathrm{E}}G \longrightarrow \underline{\mathrm{E}}G'$ (respectivamente una aplicación $\underline{\mathrm{B}}G \longrightarrow \underline{\mathrm{B}}G'$) que es única salvo G-homotopía (respectivamente salvo homotopía).

Sabemos que si $\mathcal{F} = \{e\}$, $\mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$ coincide con el espacio clasificador clásico para G-fibrados principales $\mathrm{B}G$. A continuación, siguiendo [11], veremos en qué sentido es también $\underline{\mathrm{B}}G$ un espacio clasificador.

Definición 2.2.3. Sea X un espacio metrizable. Un *G-fibrado propio sobre X* es un par (Z, π), donde Z es un G-espacio propio y $\pi : Z \longrightarrow X$ es una aplicación continua tal que:

1. Si (g, z) pertenece a $G \times Z$, entonces $\pi(gz) = \pi(z)$.
2. La aplicación cociente $G \setminus Z \longrightarrow X$ inducida por π es un homeomorfismo.

En el artículo citado también se definen las correspondientes nociones de equivalencia homotópica y clases de isomorfismo de G-fibrados propios, y eso permite probar el siguiente resultado de clasificación:

Teorema 2.2.4. *Si $P(G, X)$ es el conjunto de clases de homotopía de G-fibrados propios sobre X, existe una biyección de conjuntos $[X, \underline{\mathrm{B}}G] \xrightarrow{\simeq} P(G, X)$.*

Demostración. La aplicación se obtiene asignando a cada clase de homotopía de aplicaciones $\phi : X \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$ el producto fibrado a lo largo de ϕ de $\underline{\mathrm{E}}G$ sobre $\underline{\mathrm{B}}G$. Ver [11], apéndice 3.

□

De este modo $\underline{\mathrm{B}}G$ es realmente un espacio clasificador. De acuerdo con [108], hemos adoptado la terminología "G-fibrado propio" en lugar de la original "G-espacio propio" porque la primera realza el paralelismo entre el papel de $\mathrm{B}G$ en la teoría clásica de acciones de grupos y el de $\underline{\mathrm{B}}G$ en la teoría de acciones propias.

En $\underline{\mathrm{E}}G$ y $\underline{\mathrm{B}}G$ se entrelazan las corrientes de ideas que han surgido en torno a dos problemas centrales en homotopía G-equivariante: el problema de la clasificación de G-espacios y el problema de clasificación de fibrados G-equivariantes. Aunque ambas cuestiones están relacionadas, han dado origen a líneas de investigación con un cierto grado de independencia.

Los primeros resultados sobre clasificación de G-espacios se remontan a los años 60, y conciernen al caso en que G es un grupo de Lie compacto. En el artículo [139] Palais define dos invariantes, el tipo de órbitas Σ del grupo y su Σ-función de dimensión, y basándose en ellos, construye un cierto espacio universal por medio de una variante de la construcción de "join" de Milnor llamada desde entonces "join de Palais". Posteriormente el interés se ha centrado en tratar de clasificar las acciones diferenciables de grupos de Lie compactos sobre diferentes clases de espacios, como por ejemplo esferas de homotopía ([59]) o variedades diferenciables ([17], [57], [158]).

En lo que respecta a la segunda cuestión, el germen de las construcciones de espacios clasificadores para fibrados G-equivariantes se encuentra en el trabajo ([125]) de May, en el marco de su investigación sobre fibraciones esféricas orientadas y fibraciones cuyas fibras son compleciones o localizaciones de esferas. Concretamente, si G es un monoide topológico, define nociones de espacio universal y clasificador para G-fibrados principales con G-estructura adicional. Esta construcción, que generaliza al espacio universal y clasificador clásico, es llevada a cabo utilizando como herramientas principales la construcción de barras y los espacios clasificadores de categorías que habían sido desarrollados poco antes por Milgram ([126]) y Segal ([159]), respectivamente. Más adelante y en el caso de G un grupo de Lie compacto, Bierstone ([16]) considera G-fibrados con estructura diferenciable sobre variedades diferenciables y prueba la propiedad de homotopía recubridora en su versión equivariante, generalizando resultados de Palais-Stewart ([141]). Por último, es interesante mencionar en este contexto el trabajo de tom Dieck ([62]), donde para grupos topológicos cualesquiera G, considera y clasifica G-fibrados principales cuyo espacio total y base poseen una acción de un grupo de Lie compacto Γ, que es compatible en un cierto sentido con la estructura de G-fibrado. Una buena exposición de todo este material puede encontrarse en el artículo de Lashof ([107]).

Como puede verse, gran parte de los resultados clásicos sobre estos dos temas describen el caso "inicial" en que G es un grupo de Lie compacto y la acción es clásica, quizá sometida a hipótesis de diferenciabilidad. Aunque, como ha quedado dicho, las acciones propias surgen mucho tiempo antes en un contexto algo diferente, el primer trabajo que estudia G-espacios cuyos grupos de isotropía están en una cierta familia desde el punto de vista de la clasificación que estamos tratando ahora es el artículo [81] de Elmendorf. Aunque todavía considera acciones de grupos de Lie compactos, ya define, probablemente influido por los trabajos de Bredon sobre cohomología equivariante ([27]), el concepto de módulo sobre la categoría de órbitas (que denomina sistema de puntos fijos), que lleva en sí mismo implícita la idea de G-fibrado propio. Este último hecho, junto con la primera definición de espacio clasificador para familia de subgrupos (que es utilizada para extender construcciones de homotopía clásica al contexto G-equivariante), coloca este artículo como antecedente directo de la monografía clave de Baum-Connes-Higson ([11]), cuyo punto de partida es, en cierto modo, la unificación de toda la teoría anterior en un contexto de acciones propias de grupos topológicos no necesariamente compactos. Así, estos autores definen directamente $\underline{E}G$ como cualquier G-espacio que cumpla la propiedad 2.2.2, con lo cual enfatizan ya la importancia de $\underline{E}G$ como el análogo propio de los espacios clasificadores de G-espacios que habían ido surgiendo en el seno de la primera de las dos líneas de investigación que acabamos de describir, y son los primeros en poner de manifiesto la naturaleza de $\underline{E}G/G$ como espacio clasificador de G-fibrados propios (en el sentido preciso en el que lo hemos definido anteriormente), con lo cual enlazan con la segunda corriente de ideas arriba mencionada. Dado que la utilización de acciones propias permite utilizar métodos de la teoría de acciones de grupos de Lie compactos para probar resultados sobre acciones de grupos que no lo son, podemos decir que que este punto de vista constituye una generalización más que una analogía.

A continuación describiremos los principales modelos que han aparecido en los últimos años para $\underline{E}G$ (y por tanto también para $\underline{B}G$) y construiremos uno en particular que será de vital importancia para nuestros propósitos en esta Memoria. Más adelante, en la última sección de estos preliminares, estudiaremos de qué manera condiciones algebraicas sobre el grupo G conducen a obtener modelos para $\underline{E}G$ y $\underline{B}G$ con condiciones de finitud geométricas; dichos modelos son con frecuencia modificaciones de las construcciones más generales que recordamos a continuación.

- Sea G es un grupo topológico localmente compacto, T_2 y segundo numerable. Consideramos la unión disjunta, para todo $H < G$ compacto, de los espacios homogéneos G/H, y sea $M(n)$ el "join" de n copias de dicha unión. El espacio $M(n)$, con la acción inducida, es un G-CW-complejo propio, y la unión infinita $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M(n)$ es un modelo para $\underline{E}G$

([166] A.2). Esta construcción es una generalización del modelo clásico de Milnor para el espacio clasificador de un grupo G.

En el resto de los ejemplos G será un grupo discreto.

- Sea $X = \coprod_{H\in G} G/H$, para todo $H < G$ finito, X^{n+1} el producto de $(n+1)$-copias de X, y sea E_X el conjunto simplicial cuyos n-símplices son los elementos de X^{n+1}, con las caras y las degeneraciones obvias. El espacio E_X está dotado de una acción natural de G inducida por la acción diagonal de G sobre X^n. En estas condiciones ([108], ver también [159]), E_X es un modelo para $\underline{E}G$.

- Se dice que un espacio métrico completo X es CAT(0) si entre cada par de puntos contiene un arco geodésico tal que para cada tres puntos, el triángulo geodésico determinado por dichos arcos no tiene mayor área que el triángulo euclídeo cuyos lados tienen la misma longitud. De acuerdo con esta definición, se puede probar ([26], prop. 3) que un G-CW-complejo propio y CAT(0) es siempre un modelo para $\underline{E}G$. Este modelo es de particular importancia si G es un grupo de Coxeter (ver 2.4.21 más adelante).

- Sea el espacio
$$X = \{f : G \longrightarrow [0,1] \mid f \text{ tiene soporte compacto y } \sum_{x\in G} f(x) = 1\},$$
con la acción de G dada por
$$gf(g') = f(g^{-1}g'),$$
si $f \in X$ y $g,\ g' \in G$. Si dotamos a X de la métrica habitual del supremo, el G-espacio topológico resultante es un modelo ([11], sección 2) para $\underline{E}G$, que es de especial importante en el estudio de la conjetura de Baum-Connes desde el punto de vista analítico.

- La realización geométrica del conjunto parcialmente ordenado de los subconjuntos finitos de G, con la acción dada por la multiplicación, es un modelo para $\underline{E}G$.

Es también interesante destacar en este contexto que si $H < G$, entonces cualquier modelo para $\underline{E}G$ es también un modelo para $\underline{E}H$, y que si G y H

son dos grupos, $\underline{\mathrm{E}}(G\times H)$ es $G\times H$-homotópicamente equivalente a $\underline{\mathrm{E}}G\times\underline{\mathrm{E}}H$, y por tanto $\underline{\mathrm{B}}(G\times H)$ es del mismo tipo de homotopía que $\underline{\mathrm{B}}G\times\underline{\mathrm{B}}H$.

El modelo particular que será especialmente útil en esta Memoria describe $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$ como nervio de un cierto conjunto simplicial. Por conveniencia, durante esta construcción $\mathcal{F}$ denotará una familia cualquiera de subgrupos finitos de un grupo discreto G

Recordemos que la *categoría de órbitas* asociada a $\mathcal{F}$ es la categoría $\mathbf{O}_{\mathcal{F}}G$ cuyos objetos son los espacios homogéneos G/H, $H\in\mathcal{F}$, y cuyos morfismos son las aplicaciones G-equivariantes. No es difícil ver que existe una aplicación biyectiva

$$\mathrm{Mor}(G/K,G/H)=\{g\in G\mid g^{-1}Kg\subseteq H\}/H$$

dada por $f\longrightarrow f(eK)$, donde e es el elemento identidad de G. La definición clave que necesitamos para construir el modelo deseado de $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$ es la siguiente (ver [73], sección 2, para más detalles):

Definición 2.2.5. Sea $\mathcal{D}$ una categoría pequeña, **Cat** la categoría cuyos objetos son las categorías pequeñas y cuyos morfismos son los funtores, y $f:\mathcal{D}\to\mathbf{Cat}$ un funtor. La *construcción de Grothendieck* $\mathbf{Gr}(f)$ asociada a f se define como la categoría cuyos objetos son los pares (d,x), con $d\in\mathcal{D}$ y $x\in f(d)$, y donde un morfismo $(d,x)\to(d',x')$ es un par (u,v) donde $u:d\to d'$ es un morfismo en $\mathcal{D}$ y $v:f(u)(x)\to x'$ es un morfismo en $f(d')$. La composición se define del modo obvio.

Teorema 2.2.6. *Sea $\mathcal{D}$ una categoría pequeña, $F:\mathcal{D}\longrightarrow\mathbf{Cat}$ un funtor, y $\mathbf{Gr}(F)$ la construcción de Grothendieck de F. Entonces existe una equivalencia homotópica débil*

$$\mathrm{N}(\mathbf{Gr}(F))\simeq\mathrm{hocolim}\ \mathrm{N}(F),$$

que en natural. Recordemos que N *denota el nervio.*

Demostración. Ver ([165], 1.2). □

Ya podemos describir nuestro modelo del espacio universal $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$.

Proposición 2.2.7. *Sea G un grupo discreto. Consideramos el funtor*

$$R:\mathbf{O}_{\mathcal{F}}G\longrightarrow\mathbf{Cat}$$

que envía cada espacio homogéneo G/H a la categoría que seguimos denotando G/H (cuyos objetos son los elementos de G/H y los morfismos son las identidades), y los morfismos a los funtores obvios. En estas condiciones, tenemos que el nervio de la construcción de Grothendieck de R es un modelo para $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$.

Demostración. Por conveniencia, denotaremos $X = |\mathrm{N}(\mathbf{Gr}(R))|$. El espacio $\mathrm{N}(\mathbf{Gr}(R))$ posee una acción natural de G dada por la acción a izquierda de G en cada espacio homogéneo G/H, que es simplicial y dota a X de estructura de G-CW-complejo. Comenzamos demostrando que esta acción es propia, probando que para cada $x \in X$ el grupo de isotropía G_x de x pertenece a $\mathcal{F}$.

Como la acción de G sobre el espacio X es simplicial, se tiene que para todo símplice $\sigma = \langle v_1 \dots v_n \rangle$ de X tenemos $G_\sigma = \bigcap_{0 \leq i \leq n} G_{v_i}$; por tanto, solamente hay que considerar el caso en el cual x es un vértice de X. Sea $(G/H, a)$ el par asociado a dicho vértice. Está claro que

$$G_x = \{g \in G \mid gaH = aH\} = \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ t. q. } gah = a\}$$

y esto es lo mismo que decir que $g \in aHa^{-1}$. Por tanto, $G_x = aHa^{-1}$, que pertenece a $\mathcal{F}$, porque H también pertenece y la familia $\mathcal{F}$ es cerrada por conjugación.

Ahora veremos que para todo $K \in \mathcal{F}$, el conjunto de puntos fijos X^K es contráctil. Podemos reducirnos de nuevo al caso en el cual x es un vértice de X. Un punto $x \in X$ es fijado por K si, dado el par $(G/H, aH)$ asociado a x, se tiene que $kaH = aH$ para cada $k \in K$. Por tanto, tenemos que

$$X^K = \bigcup_{H \in \mathcal{F}} \{(G/H, aH) \mid a^{-1}Ka \subseteq H\}/H,$$

y para todo elemento $(G/H, aH) \in X^K$ existe un morfismo $(G/K, eK) \longrightarrow (G/H, aH)$, que es único. Así, podemos identificar X^K con el nervio de la undercategory (ver definición en 6.2) asociada al elemento $(G/K, eK)$ de $\mathbf{Gr}(R)$. Como esta categoría coma es contráctil, X^K también lo es, y hemos concluido.

□

Nota 2.2.8. La idea de esta construcción viene de ([7], sección 2), aunque en este trabajo los autores la describen solamente si el grupo G es finito, y con propósitos diferentes. En su lenguaje, hemos probado que X es la $\mathcal{F}$-aproximación a un punto.

Como ya hemos comentado anteriormente, el interés en la teoría de espacios clasificadores para familias de subgrupos, en general, y en la búsqueda de modelos finitos para ellos, en particular, se retoma e incrementa fuertemente a partir del artículo [11], en el marco de la conjetura de Baum-Connes. La siguiente sección está dedicada a comentar este trascendente problema y sus numerosas implicaciones.

2.3. La conjetura de Baum-Connes

La conjetura de Baum-Connes forma parte del programa de “geometría no conmutativa” de Connes ([49]) y fue establecida en su forma actual en el artículo arriba citado de Baum-Connes-Higson, aunque, como dicen los autores, puede que dicha formulación no sea aún lo adecuada en ciertos casos. En este epígrafe intentaremos describir esta conjetura con cierta precisión, haciendo especial hincapié en el caso de grupos discretos, que es el que tratamos esencialmente en esta Memoria. Intentaremos también dar una idea de la enorme importancia e implicaciones de esta conjetura en diferentes áreas de las Matemáticas. Las principales referencias utilizadas para esta sección han sido [11], [132] y [166].

Sea pues G de nuevo un grupo topológico de Hausdorff localmente compacto y segundo numerable. *Grosso modo*, la conjetura propone utilizar métodos e invariantes topológico-geométricos para estudiar un objeto esencialmente analítico, como son los K-grupos algebraico-topológicos $K_i(C_r^*(G))$, $i = 0, 1$, de la C^*-álgebra del grupo G, que describimos a continuación.

Si G es un grupo en las condiciones anteriores, el *espacio de las funciones de cuadrado sumable sobre G*,

$$l_2G = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tales que } \sum_{s\in G} |f(s)|^2 < \infty\}$$

posee estructura de espacio de Hilbert, con el producto escalar dado por $fg = \sum_{s\in G} f(s)\overline{g(s)}$.

Si $\mathcal{B}(l_2G)$ es el álgebra de Banach de las funciones lineales acotadas

$l_2G \longrightarrow l_2G$, la representación lineal de G en $\mathcal{B}(l_2G)$ dada por

$$\begin{array}{cccccccc} G & \xrightarrow{\lambda_G} & \mathcal{B}(l_2G) & & & & & \\ s & \longrightarrow & \lambda_G(s): & l_2G & \longrightarrow & l_2G & & \\ & & & f & \longrightarrow & \lambda_G(s)(f): & G \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & & & & & t \longrightarrow & f(s^{-1}t) \end{array}$$

define, vía la extensión $\lambda_G(\sum_{s\in G} a_s s) = \sum_{s\in G} a_s \lambda_G(s)$, una representación fiel de $\mathbb{C}G$ que sumerge dicho anillo de grupo en $\mathcal{B}(l_2G)$. La clausura de la imagen $\lambda_G(\mathbb{C}G)$ es una subálgebra de $\mathcal{B}(l_2G)$, que se denota $C_r^*(G)$ y se denomina la *C^*-álgebra reducida de G*.

Como hemos dicho anteriormente, los invariantes que se desea calcular son los K-grupos algebraico-topológicos $K_0(C_r^*(G))$ y $K_1(C_r^*(G))$. Para definirlos, recordemos en primer lugar que un A-módulo M es *proyectivo de tipo finito* si existe un A-módulo N tal que $A^n = M \oplus N$ para algún $n \geq 1$; por ejemplo, si $A = \mathbb{C}$, los módulos proyectivos de tipo finito son los $\mathbb{C}$-espacios vectoriales de dimensión finita, y si A es $\mathbb{C}\Gamma$ para algún grupo finito Γ, se identifican con las representaciones complejas de dimensión finita de Γ.

Así, si A es un álgebra de Banach con unidad, se define $K_0(A)$ como el *grupo de Grothendieck* de A, o sea, el grupo de clases de isomorfismo de módulos proyectivos de tipo finito sobre A.

Por su parte, los K-grupos algebraico-topológicos superiores $K_n(A)$ se definen, para todo $n > 0$, como los grupos de homotopía $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_\infty A)$, donde $\mathrm{GL}_\infty A$ es el colímite de los grupos $\mathrm{GL}_n A$ con respecto a las inclusiones. La razón de que sólo sea necesario estudiar los casos iniciales $i = 0, 1$ es que estos grupos cumplen periodicidad de Bott ([166], 3.3.7), lo cual quiere decir que para todo $n \geq 0$, $K_n(A) = K_{n+2}(A)$.

Para establecer la conjetura general hemos de definir los grupos de K-homología equivariante de Kasparov, pero antes vamos a recordar un caso sencillo mediante el cual queda claro por qué es bastante razonable utilizar herramientas topológicas para estudiar los K-grupos algebraico-topológicos de $C_r^*(G)$.

Sea pues G un grupo *abeliano* localmente compacto. Recuérdese que se define el *dual de Pontryagin* de G como el espacio $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, S^1)$ (donde S^1 se ve como subgrupo de $\mathbb{C}$) dotado de la topología compacto-abierta inducida por la de $\mathrm{map}(G, S^1)$. En estas condiciones, si $C(\hat{G})$ es el álgebra de funciones continuas sobre $\hat{G}$ (que es un grupo abeliano compacto) con la norma del supremo, se tiene que la transformada de Fourier

$$\begin{array}{ccl} C_r^*(G) & \longrightarrow & C(\hat{G}) \\ f & \longrightarrow & \hat{f} : \{\chi \longrightarrow \sum_{\gamma \in G} f(\gamma)\chi(\gamma)\} \end{array}$$

es un isomorfismo isométrico. Por tanto, el estudio del álgebra $C_r^*(G)$ se reduce al estudio del espacio $C(\hat{G})$, y de hecho los K-grupos algebraico-topológicos de la C^*-álgebra no son más que los grupos de teoría K topológica clásica de $\hat{G}$, que como es sabido sólo dependen de la estructura topológica del espacio. Ver ([166], 1.7) para más detalles.

Los grupos de teoría K topológica son también de gran interés en este contexto por su su relación con la teoría de operadores elípticos. Recordemos que un operador diferencial parcial D sobre una variedad diferenciable M^n se dice *elíptico* si su símbolo principal $a_m(x, \xi)$ es no nulo para todo $x \in M^n$ y para todo vector ξ no nulo de $\mathbb{R}^n$ (las principales propiedades de los operadores elípticos pueden encontrarse, por ejemplo, en [167]). Sea pues M una variedad diferenciable con grupo fundamental abeliano G, y sea D un operador elíptico sobre M. Cada elemento del dual de Pontryagin de G, que es en particular una aplicación $G \longrightarrow S^1$, determina un fibrado de línea L_α sobre la variedad. Haciendo un "twist" de D sobre L_α, se obtiene un nuevo operador D_α que actúa sobre secciones de L_α, y a partir de él obtenemos familias de espacios vectoriales $\{\text{Ker } D_\alpha\}$ y $\{\text{Coker } D_\alpha\}$, que están indizados sobre los elementos α de $\hat{G}$. Perturbando si es preciso, estas familias dan lugar a dos fibrados vectoriales sobre $\hat{G}$, que determinan a su vez dos elementos $[F]$ y $[F']$ en el grupo de teoría K topológica $K^0(\hat{G})$; la diferencia $[F] - [F']$, que está bien definida en el sentido de que no depende de la perturbación, es de este modo un índice para el operador elíptico D. Información más detallada sobre esta construcción puede encontrarse en el artículo de Lusztig ([117]).

Esencialmente, lo que acabamos de ver es que si G es un grupo abeliano localmente compacto, la estructura de los K-grupos algebraico-topológicos de la C^*-álgebra de grupo de G puede estudiarse, utilizando los índices que acabamos de definir, a través de operadores elípticos sobre variedades que tienen a G como grupo fundamental.

Pasamos ya pues a definir los grupos de K-homología equivariante de Kasparov, que pueden verse esencialmente como una generalización de los métodos de Lusztig al caso no abeliano. En primer lugar, este autor considera ([98]) una variedad diferenciable M donde un grupo (localmente compacto) G actúa propiamente con cocientes compactos, y define un índice para operadores elípticos G-equivariantes que toma valores en $K_0(C_r^*(G))$. A continuación ya estudia el caso en que X es un G-espacio propio cocompacto cualquiera, y considera operadores elípticos G-equivariantes *abstractos* (ver definición y propiedades en [97]). Así, construye los grupos de *K-homología equivariante con soportes compactos* $K_j^G(X)$ $(j = 0, 1)$ como clases de homotopía de estos operadores, donde un operador D cualquiera (respectivamente autoadjunto) define un elemento de $K_0^G(X)$ (respectivamente $K_1^G(X)$). De este modo queda definida una teoría de homología periódica sobre G-espacios propios con cociente compacto, que luego es ampliada de forma natural ([11], 3.13) a G-espacios propios cualesquiera. A continuación, utilizando un sistema similar al comentado anteriormente en el caso abeliano, se asigna a cada operador elíptico G-equivariante abstracto (respectivamente autoadjunto) un índice que "vive" en $K_0(C_r^*(G))$ (respectivamente $K_1(C_r^*(G))$), y de este modo queda definida una "aplicación de ensamblaje":

$$\mu_X : K_j^G(X) \longrightarrow K_j(C_r^*(G)).$$

La conjetura **BCC** establece que si X es el espacio clasificador para G-acciones propias $\underline{E}G$, la aplicación μ_X es un isomorfismo de grupos abelianos para $j = 0, 1$. Por tanto, si la conjetura **BCC** es cierta, el conocimiento del objeto geométrico-topológico $\underline{E}G$ llevará aparejada la descripción de la "misteriosa" estructura analítica de $C_r^*(G)$.

Existe una versión más refinada de **BCC** que es la conjetura de Baum-Connes *con coeficientes en una C^*-álgebra* (**BCCwC**), ver ([11], pág 244).

La parte "topológica" de la conjetura es más accesible (al menos en el caso discreto) por la existencia de una sucesión espectral tipo Atiyah-Hirzebruch que permite calcular la K-homología equivariante con soportes compactos de un G-espacio propio X a partir de la (co)homología de Bredon de dicho espacio. Antes de pasar a describir brevemente esta teoría de homología (que volverá a aparecer en la sección siguiente como fuente de condiciones de finitud), mencionaremos que en el trabajo [132], en el que está descrita la sucesión espectral anterior, aparece también una definición alternativa de los grupos $K_*^G(X)$ como la teoría de homología asociada a un cierto espectro, lo cual enfatiza el carácter topológico del objeto $K_*^G(\underline{E}G)$.

Sea G un grupo discreto y sea $\mathcal{F}$ la familia de subgrupos finitos de G. Se define la categoría $\mathrm{Mod}_{\mathcal{F}}$-$G$ de $\mathbf{O}_{\mathcal{F}}G$-módulos, o categoría de sistemas de coeficientes de Bredon, como la categoría de funtores contravariantes de $\mathrm{Mod}_{\mathcal{F}}$-$G$ a la categoría de grupos abelianos (recuérdese la definición de $\mathbf{O}_{\mathcal{F}}G$

en la sección 2). Esta categoría es abeliana, y los núcleos, conúcleos, sucesiones exactas, etc. se definen objeto a objeto.

Si K es un subgrupo finito de G, se denota por $P_{G/K}(G/H)$ al grupo abeliano libre sobre $\mathrm{Map}_G(G/H, G/K)$. Como $\mathrm{Hom}(P_{G/K}, -)$ es un funtor exacto, el objeto $P_{G/K}(-)$ es un objeto proyectivo en $\mathrm{Mod}_{\mathcal{F}}\text{-}G$. Se puede probar que esta categoría posee suficientes proyectivos, y por tanto todo $M \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{F}}\text{-}G$ tiene una resolución proyectiva $P_\bullet \longrightarrow M$. Así, podemos definir el funtor derivado $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(M, N)$ como la cohomología $H^*(\mathrm{Hom}(P_\bullet, N))$, que como es previsible no depende de la resolución tomada. Si denotamos ahora por $\underline{\mathbf{Z}}$ al $\mathbf{O}_{\mathcal{F}}G$-módulo constante $\mathbb{Z}$, se define la *cohomología de Bredon de G con coeficientes en M* como $H^*_{\mathcal{F}}(G, M) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\underline{\mathbf{Z}}, M)$. De forma dual, el *producto tensorial* de dos $\mathbf{O}_{\mathcal{F}}G$-módulos M y N se define como

$$M \otimes_{\mathcal{F}} N = \bigoplus_{K \in \mathcal{F}} M(G/K) \otimes_{\mathbb{Z}} N(G/K)/\sim$$

donde la relación de equivalencia viene dada por $\phi(m) \otimes n = m \otimes \phi(n)$, con $m \in M$, $n \in N$ y $\phi : M \longrightarrow N$ una aplicación G-equivariante. Así, para una resolución proyectiva $P_\bullet \longrightarrow M$, se define $\mathrm{Tor}^{\mathcal{F}}_*(M, N)$ como $H_*(P_\bullet \otimes_{\mathcal{F}} N)$, y la *homología de Bredon de G con coeficientes en M* como $H^{\mathcal{F}}_* = \mathrm{Tor}^{\mathcal{F}}_*(\underline{\mathbf{Z}}, M)$.

Sea ahora X un G-CW-complejo propio. Para todo $i \geq 0$ sea $\underline{C_i(X)} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{F}}\text{-}G$ el funtor

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{O}_{\mathcal{F}}G & \longrightarrow & \mathbf{Ab} \\ G/H & \longrightarrow & C_i(X^H) \end{array}$$

y el borde $\partial_i : \underline{C_i(X)} \longrightarrow \underline{C_{i-1}(X)}$ objeto a objeto. La *homología de Bredon de X con coeficientes en M* se define como $H^{\mathcal{F}}_*(X, M) = H_*(\underline{C_*(X)} \otimes_{\mathcal{F}} M)$, y la cohomología como $H^*_{\mathcal{F}}(X, M) = H^*(\mathrm{Hom}(\underline{C_*(X)}, M))$. Estos dos conceptos están relacionados mediante el espacio clasificador para acciones propias, del modo siguiente:

Proposición 2.3.1. *Para cualesquiera coeficientes $M \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{F}}\text{-}G$, se tienen isomorfismos $H^*_{\mathcal{F}}(\underline{\mathrm{E}}G; M) \simeq H^*_{\mathcal{F}}(G, M)$ y $H^{\mathcal{F}}_*(\underline{\mathrm{E}}G; M) \simeq H^{\mathcal{F}}_*(G, M)$.*

Así, el papel de $\underline{\mathrm{E}}G$ en relación a la (co)homología de Bredon es análogo al que desempeña el espacio universal para G-fibrados principales $\mathrm{E}G$ con respecto a la (co)homología ordinaria; en particular, la prueba del resultado anterior es análoga a la clásica. De hecho, si G es libre de torsión, la categoría $\mathrm{Mod}_{\mathcal{F}}$-$G$ se reduce a la categoría habitual de G-módulos, y el desarrollo que hemos realizado no es en este caso más que la construcción de la (co)homología ordinaria de grupos, tal y como es realizada por ejemplo en [32]. Un estudio exhaustivo de la (co)homología de Bredon puede encontrarse en [27], y Mislin ([132]) proporciona un excelente resumen de la relación de estos invariantes algebraicos con la teoría de acciones propias.

La sucesión espectral que hemos citado anteriormente no es más que un caso particular de la generalización realizada por Davis-Lück ([56]) de la sucesión clásica de Atiyah-Hirzebruch a espacios (o espectros) sobre una categoría. Más precisamente, se trata de una sucesión espectral de tipo homológico de primero y cuarto cuadrante, que permite calcular la K-homología equivariante $K_i^G(X)$ de un espacio X a partir de su homología de Bredon con coeficientes en los anillos de representación compleja de los subgrupos finitos de G (que definen en particular un $\mathbf{O}_{\mathcal{F}}G$-módulo). En ciertos casos en que existe un modelo de $\underline{\mathrm{E}}G$ de dimensión baja, esta sucesión espectral se reduce a una sucesión exacta ([132], 5.29), que ha sido utilizada recientemente en la determinación de la K-homología equivariante de ciertas clases de grupos, como por ejemplo los grupos triangulares ([154]).

Estos resultados muestran hasta qué punto puede ser calculable, en el caso discreto, la K-homología equivariante con soportes compactos, y proporciona una idea de por qué **BCC** ha provocado la aparición de gran cantidad de modelos más o menos sencillos para $\underline{\mathrm{E}}G$ y $\underline{\mathrm{B}}G$; en la sección anterior pueden encontrarse los más generales, mientras que en la que sigue nos ocuparemos de los modelos que han aparecido sometidos a condiciones de finitud algebraico-geométrica.

A partir de ahora mostraremos los principales resultados obtenidos en los últimos años sobre **BCC**, con especial interés en el caso en que G es discreto. Así, se han identificado recientemente tres grandes clases de grupos para los cuales la conjetura se verifica. y que contienen una gran cantidad de ejemplos: los grupos con la propiedad de Haagerup (o grupos a-T-menables), los grupos de la clase $\mathbf{H}\mathcal{TH}$ y los grupos de la clase $\mathbf{H}\mathcal{ETH}$. Las referencias básicas en este tema son [47] y [132]. Por otro lado, en [11] el problema es abordado para ciertas familias de grupos de Lie y grupos p-ádicos desde un punto de vista diferente que no vamos a describir aquí.

Según la definición de Gromov, un grupo G localmente compacto y segundo numerable posee la propiedad de Haagerup si existe una acción isométrica y continua α de G en algún espacio de Hilbert afín H que sea *métricamente* *propia*, esto es, que para cualquier subconjunto acotado $B \subseteq H$, el conjunto de los elementos g de G tales que $\alpha(g)B \cap B$ es no vacío es relativamente compacto. Existen varias definiciones de la propiedad de Haagerup equivalentes a ésta.

La clase de los grupos que cumplen la propiedad de Haagerup es cerrada por subgrupos y productos finitos, pero no lo es por productos semidirectos y no se sabe qué ocurre con extensiones centrales. En particular, esta clase incluye a las siguientes subclases de grupos:

- Los grupos que actúan de forma propia en árboles y, más generalmente, en $\mathbb{R}$-árboles.

- Los grupos amenables. Recordemos que un grupo G es *amenable* si dado el $\mathbb{R}G$-módulo $l_\infty(G, \mathbb{R})$ de funciones acotadas sobre G con valores reales, existe una aplicación $\mathbb{R}[G]$-lineal $M : l_\infty(G, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $M(1) = 1$ y para todo $\phi \geq 0$ se tiene que $M(\phi) \geq 0$. Se puede probar que los grupos compactos y los grupos solubles (y en particular los abelianos) son amenables.

- Los "monstruos" de Baumslag-Solitar $BS_{p,q} = \{a, b \mid ab^p a^{-1} = b^q\}$, con $p, q \geq 1$.

- Los grupos de Lie localmente isomorfos a un producto directo de un grupo de Lie amenable, finitas copias de $\mathrm{SO}(n_k, 1)$ y finitas copias de $\mathrm{SU}(m_l, 1)$, para diferentes valores de k y l.

- Los grupos que actúan propiamente vía isometrías en un complejo cúbico que cumpla la propiedad CAT(0) (ver definición en 3.2). En particular el grupo de Thompson

  $$T = \{x_0, x_1, x_2, \dots \mid x_i^{-1} x_j x_i = x_{j+1}, (i < j)\}$$

  posee la propiedad de Haagerup.

- Los grupos fundamentales de superficies.

- Los grupos que actúan de forma isométrica y propia sobre los espacios hiperbólicos, y en particular $\mathrm{SO}(n, 1)$, $\mathrm{SU}(n, 1)$ y los grupos fundamentales de variedades hiperbólicas (no necesariamente compactas).

La demostración de que los grupos que poseen la propiedad de Haagerup cumplen **BCC** fue llevada a cabo por Higson y Kasparov en 1997 ([88]). Más adelante, y utilizando las ideas de descomposiciones jerárquicas de Kropholler que trataremos en la siguiente sección, Mislin define $\mathbf{H}\mathcal{TH}$ como la menor clase de grupos que contiene a los que poseen la propiedad de Haagerup y a los grupos G que actúan en un CW-complejo contráctil de dimensión uno cuyos grupos de isotropía ya están en $\mathbf{H}\mathcal{TH}$.

La clase $\mathbf{H}\mathcal{TH}$ contiene obviamente a los grupos que poseen la propiedad de Haagerup, y posee buenas propiedades de clausura, ya que es cerrada por subgrupos, productos amalgamados, HNN-extensiones y uniones ascendentes numerables. Las siguientes clases de grupos también son subclases de $\mathbf{H}\mathcal{TH}$:

- Los grupos libres, y en general todos los grupos de dimensión cohomológica menor que o igual que uno.
- Los grupos fundamentales de variedades de Haken ([138]), lo cual incluye en particular a todos los grupos de nudos.
- Los grupos con una sola relación.

La prueba de que los grupos de la clase $\mathbf{H}\mathcal{TH}$ satisfacen **BCC** es una consecuencia de un resultado de Oyono-Oyono que aparece en [138].

La segunda ampliación realizada por Mislin es la clase $\mathbf{H}\mathcal{ETH}$, que se define como la clase de grupos más pequeña que contiene a $\mathbf{H}\mathcal{TH}$, contiene a los grupos G tales que existe un G-CW-complejo contráctil de dimensión uno con grupos de isotropía en $\mathbf{H}\mathcal{ETH}$, y también a los grupos G dotados de una aplicación epiyectiva a otro grupo $Q \in \mathbf{H}\mathcal{ETH}$ de modo que para todo subgrupo finito F de Q se tiene que la antiimagen por dicha aplicación de F está en $\mathbf{H}\mathcal{ETH}$.

La clase $\mathbf{H}\mathcal{ETH}$ tiene esencialmente dos ventajas sobre su subclase $\mathbf{H}\mathcal{TH}$: que es cerrada por extensiones centrales con cociente libre de torsión, y que contiene a los grupos de trenzas B_n (se desconoce si $B_n \in \mathbf{H}\mathcal{TH}$ para $n \geq 3$). El hecho de que los grupos de esta clase también cumplen **BCC** se prueba de forma similar al caso anterior.

Después de haber analizado todas estas familias de grupos para los cuales se cumple la conjetura, y dado que aún no está probada en general, parece interesante buscar alguna manera de encontrar contraejemplos. Una técnica útil en este contexto es proponer condiciones que imposibiliten a un grupo G para poseer, por ejemplo, la propiedad de Haagerup. En este sentido, una caracterización importante es la *propiedad T de Kazhdan*: un grupo G posee la propiedad T si cada acción isométrica de G es un espacio de Hilbert afín tiene puntos fijos. Se sabe que ningún grupo infinito puede poseer a la vez las propiedades de Haagerup y Kazhdan, y de hecho si G posee la propiedad de Haagerup ningún subgrupo infinito suyo puede poseer la propiedad T. Aunque existen grupos sencillos como $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}), n \geq 3$ que cumplen la propiedad T y para los cuales no se ha podido probar **BCC** (y son, por tanto, contraejemplos en potencia) esta línea de investigación ha sufrido un golpe con el trabajo de Lafforgue ([104]), que prueba que todos los retículos cocompactos de grupos de Lie simples de rango uno (grupos hiperbólicos "clásicos") cumplen **BCC**; en particular, si tomamos los grupos de Lie $G = Sp(n), n \geq 2$, tenemos los primeros ejemplos de grupos con la propiedad T para los cuales se cumple **BCC**. De todos modos, es conveniente no olvidar la advertencia de Baum-Connes-Higson, en el sentido de que la evidencia a favor de una validez total de **BCC** no es tan fuerte como para asegurar que la conjetura esté ya en su forma definitiva.

Con objeto de mostrar la importancia de la conjetura de Baum-Connes y por qué ha estimulado tan poderosamente la investigación en teoría de acciones propias en los últimos años, concluimos esta sección recordando varios problemas que son implicados por **BCC**. La referencia principal que hemos utilizado aquí ha sido ([132], sección 6).

1. *Conjetura de los idempotentes* [**IC**]. Formulada por Kaplansky, establece que si G es un grupo libre de torsión, $\mathbb{Q}[G]$ no posee idempotentes diferentes de 0 y 1.

2. *Conjetura fuerte de los idempotentes* [**SIC**]. Motivado por la pregunta anterior, Kadison conjetura que para cualquier grupo libre de torsión G, la C^*-álgebra reducida de G tampoco posee idempotentes no triviales.

3. *Conjetura de la traza de Kadison-Kaplansky* [**KKTC**]. Sea G un grupo. Los elementos de g pueden vistos como funciones $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$, donde $g(x)$ es la delta de Kronecker $\delta_{g,x}$; de este modo, G se sumerge en $l_2(G)$ y los elementos de G constituyen una base de Hilbert de $l_2(G)$. La aplicación anterior induce una inmersión continua $C_r^*(G) \hookrightarrow l_2(G)$ que lleva cada cada función f es el elemento $f(e)$ de $l_2(G)$ que define

la imagen del elemento neutro e del grupo. De este modo, podemos utilizar la estructura de espacio de Banach de $l_2(G)$ para definir una nueva aplicación $\kappa_{C_r^*} : C_r^* \longrightarrow \mathbb{C}$, que se denomina aplicación "traza" y que se extiende a un homomorfismo $\kappa_{C_r^*} : K_0(C_r^*(G)) \longrightarrow \mathbb{R}$ que, vía la identificación usual de $K_0(C_r^*(G))$ con $C_r^*(G) \otimes_{\mathbb{C}} M_n(\mathbb{C})$, es una traza (en sentido clásico) sobre matrices idempotentes. En estas condiciones, la conjetura **KKTC** aserta que $\kappa_{C_r^*}$ toma valores en $\mathbb{Z}$.

4. *Conjetura de la traza de Kaplansky* [**KTC**]. La aplicación natural

$$\mathbb{C}[G] \longrightarrow C_r^*(G)$$

permite generalizar $\kappa_{C_r^*}$ a teoría K algebraica clásica, pues da lugar a la *traza de Kaplansky* $\kappa_{\mathbb{C}} : K_0^{alg}(\mathbb{C}[G]) \longrightarrow \mathbb{R}$. Se sabe que esta traza toma valores en los racionales (teorema de Zaleskii) y la conjetura **KTC** pregunta si, de hecho, esos valores son siempre enteros. No es difícil ver que **KKTC** implica **KTC**.

5. *Conjetura de Novikov* [**NC**]. Sea M una variedad diferenciable orientada, conexa y cerrada, L^M su L-clase de Hirzebruch y L_M la clase dual de Poincaré, que es un elemento de $H_*(M, \mathbb{Q})$. Si $f : M \longrightarrow \mathrm{B}\pi_1(M)$ es la aplicación clasificadora del recubrimiento universal, entonces **NC** establece que $f_*(L_M)$ es un invariante homotópico orientado. Así, esta conjetura puede verse como una generalización del teorema de la signatura de Hirzebruch.

6. *Conjetura fuerte de Novikov* [**SNC**]. La aplicación natural $\mathrm{E}G \longrightarrow \underline{\mathrm{E}}G$, de importancia crucial en esta Memoria, induce una inyección $K^*(\mathrm{B}G) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow K_*^G(\underline{\mathrm{E}}G) \otimes \mathbb{Q}$. La conjetura **SNC** pregunta si la composición

$$K^*(\mathrm{B}G) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow K_*^G(\underline{\mathrm{E}}G) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow K_*(C_r^*(G)) \otimes \mathbb{Q}$$

es inyectiva, donde la segunda flecha representa la racionalización de la aplicación de ensamblaje de Baum-Connes.

Esta conjetura implica la anterior vía una versión analítica de la signatura.

7. *Conjetura de Gromov-Lawson-Rosenberg* [**GLRC**]. Sea de nuevo M una variedad diferenciable cerrada, conexa y orientada. En la notación

usada un poco más arriba para **NC**, sea $f_*(\hat{A}_M)$ la imagen del $\hat{A}$-género de M en $H_*(\mathrm{B}\pi_1(M), \mathbb{Q})$ (recordemos que, al igual que la L^M clase de Hirzebruch, el $\hat{A}_M$-género es un polinomio en las clases de Pontryagin racionales de M). La conjetura **GLRC** afirma que si M es spin y admite una métrica de curvatura escalar positiva, se tiene que $f_*(\hat{A}_M) = 0$.

8. *Conjetura "Cero en el espectro"* [$0 \in$ **SC**]. Esta conjetura establece que si M es una variedad riemanniana cerrada, conexa, orientada y anesférica y G es su grupo fundamental, los grupos de homología del complejo $(C_*M) \otimes_G l_2G$ se anulan. Equivalentemente, podemos decir que para todo n los grupos de homología equivariante $H_*^G(\tilde{M}, C_r^*(G))$ son nulos.

9. *Conjetura débil de la traza de Bass* [**wBTC**]. Si G es libre de torsión y $\kappa_{\mathbb{C}}$ es la traza de Kaplansky definida más arriba, la conjetura **wBTC** pregunta si dicha traza se identifica con la aplicación $\epsilon_{\mathbb{C}} : K_0^{alg}(\mathbb{C}[G]) \longrightarrow \mathbb{C}$, inducida por el aumento natural $\epsilon : \mathbb{C}[G] \longrightarrow \mathbb{C}$. La conjetura **BCC** implica **wBTC** si G es *K-amenable* (ver definición en [47], 1.3.2).

Además de las mencionadas, que son directamente implicadas por **BCC**, hay otra serie de conjeturas que están fuertemente relacionadas con ella, como por ejemplo la conjetura del divisor de cero (**ZDC**), la conjetura de Atiyah (**AC**), la conjetura de la inmersión (**EC**), la conjetura de la traza de Bass (**BTC**) o la conjetura del grupo de clases proyectivas (**PCGC**).

Esta sorprendente ubicuidad ha provocado, en lo que respecta a la parte topológica de **BCC** un inmenso interés en la búsqueda y construcción de modelos para espacios clasificadores de acciones propias que sean lo más sencillos y manejables posibles. La descripción de estos modelos (que, como ya hemos dicho, son en general variaciones sobre las construcciones generales descritas anteriormente) será el objetivo de la próxima sección, así como su conexión con las condiciones de finitud geométrico-algebraicas y con la teoría de la dimensión.

2.4. Condiciones de finitud para $\underline{\mathrm{E}}$G y $\underline{\mathrm{B}}$G

En lo que resta de capítulo G será un grupo discreto. En esta última sección preliminar vamos a recordar los principales resultados de finitud geométrica sobre $\underline{E}G$ que se han ido obteniendo a lo largo de los años y, que como veremos, están muy relacionados con condiciones de finitud algebraico-cohomológicas. Nuestra principal motivación para ello es el teorema 7.1.2, fundamental en esta tesis, combinado con el hecho de que si G es discreto y X es un modelo para $\underline{E}G$, X/G es a su vez un modelo para $\underline{B}G$ y además $\dim X = \dim X/G$. Sin embargo, el interés en buscar modelos de $\underline{E}G$ y $\underline{B}G$ ha procedido, además del del interés intrínseco que han despertado estos espacios sobre todo después de la conjetura de Baum-Connes, de la teoría de la dimensión de grupos, cuyas líneas maestras pasamos a describir a continuación.

Clásicamente, se define *la dimensión cohomológica* de un grupo G como la dimensión proyectiva cd G de $\mathbb{Z}$ sobre el anillo de grupo $\mathbb{Z}G$, con la acción trivial de G sobre $\mathbb{Z}$, y la *dimensión geométrica* de G como el mínimo entero gd G tal que existe un modelo de dimensión finita para EG. Como el complejo de cadenas de EG produce siempre una resolución proyectiva (de hecho libre) de G sobre $\mathbb{Z}G$, se tiene siempre la desigualdad cd $G \leq$ gd G, que es una igualdad si:

- cd $G = 0$, en cuyo caso G es el grupo trivial.
- cd $G = 1$, lo cual es equivalente por el teorema de Swan-Stallings ([164]) a que el grupo es libre.
- cd $G \geq 3$, resultado probado por Eilenberg-Ganea en [80].

Estos dos últimos autores conjeturaron que la igualdad se da siempre, y aunque se sospecha que no es cierta, no ha podido encontrarse ningún contraejemplo. Este problema ha sido reformulado de modo completamente geométrico, en el sentido de que la conjetura es cierta sí y sólo si siempre que un grupo actúa de forma libre sobre un G-CW-complejo acíclico de dimensión 2, actúa a su vez en un G-CW-complejo contráctil de la misma dimensión. Más información sobre este tema puede encontrarse en [14], [15] y [26].

Una de las mayores limitaciones de las dimensiones geométrica y cohomológica clásica es que si para un grupo G se tiene que cd G es finita, entonces el grupo es libre de torsión, y por tanto estos conceptos están vacíos de significado en el caso de grupos con torsión. Este problema, y la gran cantidad de espacios que han aparecido con G-acciones propias (que aunque en general no son libres están cerca de serlo, ya que los grupos de isotropía son finitos) han llevado a utilizar el espacio clasificador para acciones propias $\underline{E}G$ para generalizar la definición de gd G a un contexto más amplio de grupos infinitos con torsión. Así, se define la dimensión geométrica propia $\underline{\mathrm{gd}}\ G$ como la dimensión mínima de un modelo de $\underline{\mathrm{E}}G$. Es fácil comprobar que esta definición es equivalente a la clásica en el caso libre de torsión, pues si G es libre de torsión entonces $\mathrm{E}G = \underline{\mathrm{E}}G$, y que si G es finito, su dimensión geométrica propia es 0, pues un punto es en este caso un modelo para $\underline{\mathrm{E}}G$.

Históricamente, el primer análogo algebraico que aparece de la dimensión cohomológica propia (aunque no con esta nomenclatura) es la dimensión cohomológica virtual, que se define del siguiente modo: si G es un grupo discreto y H es un subgrupo de G libre de torsión y de índice finito, se define la dimensión cohomológica virtual vcd G como la dimensión cohomológica de H. Por un resultado de Serre ([160]) la definición no depende del subgrupo escogido. En un principio, no parecía descabellado pensar que éste fuera el análogo correcto, por cuanto que si $H < G$ es un subgrupo libre de torsión, cualquier modelo de $\underline{\mathrm{E}}G$ es un modelo de $\mathrm{E}H$, y automáticamente vcd $G \leq \underline{\mathrm{gd}}\ G$. Ya K.S. Brown preguntó en [31] si dicha desigualdad era realmente una igualdad o no, y algunos resultados parciales fueron propuestos poco tiempo después por Connolly-Koźniewski ([50]), como veremos un poco más abajo. Sin embargo, esta definición se revela definitivamente como inadecuada en el trabajo de Schneebeli ([156]), que demuestra que el grupo de Higman $A = \{a, b, c, d; a^b = a^2, b^c = b^2, c^d = c^2, d^a = d^2\}$, que no tiene cocientes finitos no triviales, posee sin embargo un modelo de dimensión 2 para $\underline{\mathrm{E}}G$. Otras nociones que no se han mostrado eficaces en este contexto han sido la dimensión cohomológica racional o la homología relativa a los subgrupos finitos.

La noción correcta de dimensión cohomológica propia parece ser la que se define a partir de la (co)homología de Bredon de $\underline{\mathrm{E}}G$, cuyas propiedades principales recordamos en la sección anterior. Concretamente, si G es un grupo discreto, se define $\underline{\mathrm{cd}}\ G$ como la dimensión proyectiva del módulo "constante" $\mathbf{Z}$. No es difícil ver que $\underline{\mathrm{cd}}\ G \leq \underline{\mathrm{gd}}\ G$, y que $\underline{\mathrm{cd}}\ G$ coincide con cd G si G es libre de torsión. Dunwoody ([71]) y Lück ([113]) probaron la igualdad entre las definiciones geométrica y algebraica si $\underline{\mathrm{cd}}\ G = 1$ y $\underline{\mathrm{cd}}\ G \geq 3$, respectivamente, y el caso pendiente, conocido como conjetura de Eilenberg-Ganea propia, fue respondido negativamente por Brady-Leary-Nucinkis, que en [26] encontraron un ejemplo de grupo G con $\underline{\mathrm{cd}}\ G = 2$ y $\underline{\mathrm{gd}}\ G = 3$.

Una vez expuestas las razones que han motivado el interés actualmente existente en la búsqueda de modelos sometidos a condiciones de finitud para

$\underline{\mathrm{E}}G$, pasamos ya a recordar las principales clases de grupos discretos para los cuales han sido encontrados dichos modelos; como no podía ser de otra manera dada la estrecha relación existente entre las nociones de dimensión algebraica y geométrica arriba descritas, la mayor parte de las condiciones que aparecen son de tipo cohomológico. Es conveniente resaltar aquí la importancia que tienen estos grupos en el contexto de esta Memoria, pues los resultados que aparecen en ella conciernen esencialmente a sus espacios clasificadores para G-fibrados propios.

Cronólogicamente, la primera caracterización que conocemos de la dimensión geométrica propia es debida a Serre ([160]):

Proposición 2.4.1. *Sea G un grupo discreto de dimensión cohomológica virtual finita n que contenga un subgrupo libre de torsión de índice m. Entonces existe un modelo de $\underline{\mathrm{E}}G$ de dimensión mn.*

La demostración es constructiva, en el sentido de que se construye de modo efectivo el modelo de $\underline{\mathrm{E}}G$ apropiado y se prueba que la acción de G cumple las condiciones requeridas. Es interesante hacer notar que este es uno de los primeros modelos conocidos de $\underline{\mathrm{E}}G$, aunque no lo mencionamos en su momento porque no surgió dentro del contexto de la teoría de acciones propias ni de espacios clasificadores para G-acciones y G-fibrados. Como curiosidad, en este trabajo se prueba por primera vez (con un lenguaje diferente) que el Bruhat-Tits building es un modelo para $\underline{\mathrm{E}}G$ de una cierta clase de grupos p-ádicos.

El resultado anterior de Serre fue generalizado fuertemente por Connolly-Koźniewski en el artículo ya citado. Estos autores, respondiendo a una pregunta de C.T.C. Wall, dan por primera vez condiciones para que el modelo sea finito o finitamente dominado. Antes de citar cada uno de los dos resultados necesitaremos unas definiciones previas.

Definición 2.4.2. Un grupo G se dice de tipo F_∞ si existe un modelo para $\mathrm{B}G$ con esqueletos finitos en cualquier dimensión.

Enunciamos ya la primera de las dos condiciones mencionadas:

Proposición 2.4.3. *Sea G un grupo de dimensión cohomológica virtual finita. Se tiene que:*

- *Existe un modelo finitamente dominado para $\underline{\mathrm{E}}G$ si y sólo si G contiene un número finito de clases de conjugación de subgrupos finitos y el normalizador $N(H)$ de cada subgrupo H es de tipo F_∞.*

- *Existe un modelo finitamente dominado para $\underline{\mathrm{E}}G$ si y sólo si la obstrucción de Wall $\pi(G)$ es cero en $\bigoplus_{i=1}^{k} \tilde{K}_0(\mathbb{Z}(N(H_i)/H_i))$. Aquí los H_i son representantes de todas las clases de conjugación de subgrupos finitos de G.*

Antes de enunciar el segundo resultado, necesitamos recordar el concepto de cohomología equivariante:

Definición 2.4.4. Si X es un G-espacio, se define la cohomología equivariante $H^*_G(X, B)$ de X con coeficientes en un $\mathbb{Z}G$-módulo B como la cohomología con coeficientes en B del complejo de cadenas de $\mathrm{E}G \times_G Z$, con la acción diagonal de G en el producto.

Asignamos también a cada $H < G$ finito un número $k(H)$ tal que $k(H) \geq k(K)$ si $H < K$ y de modo que $k(H) \geq \max(3, \mathrm{vcd}\ N(H))$. Se tiene:

Proposición 2.4.5. *Sea G un grupo tal que vcd $G < \infty$, y si $H < G$ finito, denotemos por $\mathcal{F}_H(G)$ al conjunto parcialmente ordenado de los subgrupos finitos de G que contienen a H (nótese que este conjunto tiene una acción de $N(H)/H$). Las dos siguientes condiciones son equivalentes:*

- *Existe un modelo para $\underline{\mathrm{E}}G$ tal que la dimensión del espacio $(\underline{\mathrm{E}}G)^H$ es $k(H)$ para todo H.*
- *Si $H < G$ es finito, $\tilde{H}_{k(H)}(|\mathcal{F}_H(G)|)$ es nulo, y también lo es la cohomología equivariante $\tilde{H}_\Gamma(|\mathcal{F}_H(G)|; B)$ para algún subgrupo $\Gamma < G$ de índice finito y para cualquier $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo B.*

Estos autores concluyen su trabajo probando que estas condiciones son aplicables, por ejemplo, en casos de grupos de dualidad de Poincaré, y en el caso $Sp(4, \mathbb{Z})$. Es interesante remarcar que resultados análogos a la condición 2) de la primera proposición ya habían sido resueltos anteriormente para los grupos $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ ([10] y [162]) y para el grupo de automorfismos exteriores de un grupo libre finitamente generado ([55]). Notemos también que en este trabajo es donde aparecen por primera vez condiciones de finitud en función del número de clases de conjugación de subgrupos finitos y también de la estructura de los grupos de Weyl $WH = N(H)/H$. Como veremos, este tipo de condiciones reaparecerán más tarde en los trabajos de Lück.

Los últimos resultados sobre grupos de dimensión cohomológica virtual finita aparecen en el reciente artículo [109], imprescindible sobre todo por el gran número de ejemplos y contraejemplos que contiene. En el contexto que nos ocupa ahora mismo, en dicho trabajo aparecen ejemplos de grupos de dimensión cohomológica virtual finita $3n$ cuya dimensión geométrica propia es como mínimo $4n$. Esto, en particular, responde de forma negativa a la pregunta de K.S. Brown enunciada un poco más arriba.

El siguiente resultado es folklore, y concierne a la existencia de modelos de $\underline{E}G$ de dimensión 1:

Proposición 2.4.6. ([11], pág. 249) *Si G actúa en un árbol T mediante una acción simplicial y continua cuyos grupos de isotropía son finitos, entonces T es un modelo para $\underline{E}G$.*

En particular, y dentro de la investigación sobre árboles, amalgamas y grafos de grupos que realiza para describir la estructura de los grupos lineales sobre un cuerpo local, Serre muestra ([161], I.6,1) que si G_1, G_2 y H son grupos finitos, el pushout $G = G_1 *_H G_2$ actúa sobre un árbol T del modo anterior. Este árbol procede de realizar la construcción “doble cilindro de la aplicación” al diagrama

$$G/G_1 \longleftarrow G/H \longrightarrow G/G_2.$$

Así obtenemos una gran cantidad de grupos para los cuales $\underline{E}G$ es de dimensión uno. Además, este método permite describir de forma muy sencilla el grupo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ como una amalgama de $\mathbb{Z}/4$ y $\mathbb{Z}/6$ a través de $\mathbb{Z}/2$.

Recientemente, Leary-Nucinkis ([108]) y Platten [143]) han generalizado el resultado de Serre al caso de $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$, siendo $\mathcal{F}$ cualquier familia de subgrupos finitos de G; los primeros, como ingrediente necesario de su demostración del teorema de Kan-Thurston para $\underline{B}G$, y el segundo dentro de su estudio de las clases $\mathbf{H}\mathcal{F}$.

Puede considerarse que el magnífico trabajo [114] de Lück, realizado poco después del establecimiento definitivo de la conjetura de Baum-Connes y muy probablemente motivado por ella, tuvo el efecto de activar fuertemente la investigación en esta área, que ha experimentado su mayor auge en los últimos diez años. En el artículo mencionado se reformulan algebraicamente las condiciones de finitud geométrica sobre $\underline{E}G$, y se prueba multitud de relaciones entre éstas y los invariantes cohomológicos del grupo G; en particular, el resultado que citamos a continuación establece una de de las más importantes. Recordemos que un grupo G se dice de tipo FP_∞ si posee una resolución proyectiva donde todos los $\mathbb{Z}G$-módulos que aparecen son finitamente generados.

Proposición 2.4.7. ([114], 4.2) *Si G es un grupo discreto, son equivalentes:*

- *Existe un modelo para $\underline{E}G$ de tipo finito.*
- *Solamente existe un número finito de clases de conjugación de subgrupos finitos de G, y para cualquier subgrupo finito H de G hay un CW-modelo para BWH que es también de tipo finito.*
- *Sólo existen un número finito de clases de conjugación de subgrupos finitos de G y los grupos de Weyl de los subgrupos finitos de G son grupos de tipo FP_∞ finitamente presentados. Además, si G cumple el último enunciado y además la condición $b(d)$, (que cada $\mathbb{Z}G$-módulo M que sea proyectivo sobre el anillo de grupo de cualquier subgrupo finito posee una $\mathbb{Z}G$ resolución proyectiva de dimensión d), se tiene que G posee un modelo finitamente dominado para $\underline{E}G$, y el recíproco también es cierto.*

No aparecen, sin embargo, en este artículo caracterizaciones algebraicas que determinen la existencia de modelos finitos o finito-dimensionales para $\underline{E}G$. En lo que respecta a los primeros, proporciona una lista de grupos discretos para los cuales es conocido que existe un modelo finito para $\underline{E}G$, algunos de los cuales ya habían sido citados en [11]:

- Los grupos hiperbólicos de Gromov (ver [87]), dotados de la métrica de la longitud de la palabra. El modelo es el complejo de Rips, definido como la realización del complejo simplicial cuyos p-símplices son los subconjuntos de $(p+1)$-elementos del grupo de diámetro mayor que una cierta constante.
- Los subgrupos discretos con cociente compacto de un grupo de Lie G con un número finito de componentes conexas. Si $K < G$ es el subgrupo compacto maximal de G, el modelo buscado es G/K.
- Si G es una extensión $\mathbb{Z}^n \longrightarrow G \longrightarrow H$ con H finito, entonces el modelo es $\mathbb{R}^n$, debido a que G es entonces una extensión de un grupo cristalográfico por un grupo finito, y para todo grupo cristalográfico se tiene que $\mathbb{R}^n$ es un modelo para $\underline{E}G$. En 9.1.1 damos una prueba elemental de este hecho en el caso 2-dimensional.

- Los grupos virtualmente policíclicos. Recordemos que un grupo G es virtualmente policíclico si contiene un subgrupo policíclico H de índice finito, es decir, un subgrupo H con una serie subnormal de factores cíclicos.

En lo que respecta a modelos de dimensión finita, se retoma aquí el caso de grupos de dimensión cohomológica virtual finita que hemos visto anteriormente, aprovechando en particular el hecho de que para estos grupos existe una cota l de las longitudes de los subgrupos finitos de G. Recordemos que la longitud $l(H)$ de un grupo H es el supremo de todos los naturales n tal que existe una cadena de inclusiones estrictas $\{1\} \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = H$. Así, mediante el siguiente resultado se obtienen modelos de $\underline{E}G$ cuya dimensión depende tanto de la dimensión virtual como de dicha longitud.

Proposición 2.4.8. ([114], 6.4) *Sea G un grupo discreto tal que* $\mathrm{vcd}\, G \leq d$*, y sea l una cota de las longitudes de los subgrupos finitos de G. Entonces existe un G-CW-modelo para $\underline{E}G$ de dimensión* $max\{3, d\} + l$.

El caso de modelos de dimensión finita para grupos más generales es tratado en el artículo ligeramente posterior de Lück-Meintrup ([115]), donde las condiciones cohomológicas para la finitud se obtienen a partir de la cohomología de Bredon del grupo G, y por tanto se relacionan las dimensiones propias geométrica y cohomológica. Además, se obtienen caracterizaciones diferentes a las anteriores, y muy precisas, para las demás condiciones de finitud.

Proposición 2.4.9. ([115], 0.1) *Sea G un grupo discreto con $d \geq 3$, y sea $\mathcal{F}$ una familia de subgrupos de G. Se tiene:*

- *Existe un G-CW-modelo de dimensión d para $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$ si y sólo si G posee dimensión cohomológica propia finita igual o menor que d.*

- *G posee un G-CW-modelo de tipo finito (respectivamente finito) para $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$ si y sólo si G posee un modelo para $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$ con 2-esqueleto finito y el $\mathbb{Z}\mathbf{O}_{\mathcal{F}}G$ módulo constante $\underline{\mathbf{Z}}$ posee una resolución proyectiva de tipo finito (respectivamente libre y finita).*

- *Existe un modelo de $\underline{E}G$ con 2-esqueleto finito si y sólo hay un número finito de clases de conjugación de subgrupos finitos de G y el grupo de Weyl de cada subgrupo finito es finitamente presentado.*

Es destacable que en este artículo se obtienen condiciones similares para grupos G localmente compactos, no necesariamente discretos.

Una clase de grupos que ha merecido recientemente atención en este contexto ha sido la de los grupos *jerárquicamente descomponibles*, definida por Kropholler en [101] como herramienta para probar que los grupos solubles y los grupos lineales de característica cero son de dimensión cohomológica virtual finita, y que ya han aparecido en estos preliminares.

Definición 2.4.10. Sea $\mathcal{C}$ una clase de grupos. Escribiremos $\mathbf{H}_1\mathcal{C}$ para denotar a la clase de grupos G que admiten un G-CW-complejo contráctil de dimensión finita con grupos de isotropía en $\mathcal{C}$, y $\mathbf{H}\mathcal{C}$ para la clase más pequeña $\mathcal{C}'$ tal que $\mathcal{C} < \mathcal{C}'$ y $\mathbf{H}_1\mathcal{C}' = \mathcal{C}'$. Si $\mathcal{F}$ es la clase de los grupos finitos, entonces $\mathbf{H}\mathcal{F}$ es la clase de los grupos *jerárquicamente descomponibles.*

Esta clase posee interés en este contexto por varios motivos. En primer lugar, es una clase muy general, que contiene a todos los grupos de dimensión cohomológica virtual finita, a algunos que no lo son (como ciertos grupos de Burnside), a todos los grupos lineales finitamente generados y todos los grupos solubles finitamente generados. En segundo lugar, porque ha dado lugar a interesantes variantes, como la clase $\mathbf{k}\mathcal{C}$ de Kropholler-Mislin ([102]), las clases $\mathbf{H}\mathcal{TH}$ y $\mathbf{H}\mathcal{ETH}$ de las que hemos hablado en la sección anterior, o la clase $\mathcal{KC}$ de Broto-Kitchloo ([29]). Y en tercer lugar, por las conjeturas propuestas en ([101], 5.1) sobre ella, que han dado lugar, en particular, al citado artículo ([102]), y cuya resolución parcial ha conllevado la aparición de nuevas condiciones de finitud, que describimos a continuación.

Teorema 2.4.11. ([102], teorema A) *Todo grupo G jerárquicamente descomponible de tipo FP_∞ admite un modelo de dimensión finita para $\underline{E}G$.*

Además, si $\Lambda(G)$ es el conjunto parcialmente ordenado de subgrupos finitos no triviales de G y $B(G,\mathbb{Z})$ es el anillo de G-operadores de funciones acotadas de G a $\mathbb{Z}$, se obtiene:

Teorema 2.4.12. ([102], teorema B) *Si G es un $\mathbf{H}\mathcal{F}$-grupo tal que $m =$ dim. proy.$_{\mathbb{Z}G}B(G,\mathbb{Z})$ y $d = \dim|\Lambda(G)|$ son finitos, entonces existe un modelo de $\underline{E}G$ de dimensión menor o igual que $D(d,m)$, donde $D(d,m)$ es una función con valores naturales que crece exponencialmente en d y linealmente en m.*

Obsérvese la semejanza entre este último resultado y 2.4.8. Quizá tan interesante como el resultado en sí son los métodos utilizados, ya que los autores, a partir de los datos cohomológicos mencionados, construyen de forma efectiva los modelos de $\underline{E}G$ con las dimensiones prescritas usando espacios parametrizados por un conjunto parcialmente ordenado. Mediante una versión refinada de esta técnica, Mislin prueba el siguiente resultado de finitud:

Proposición 2.4.13. ([130], 3.4) *Sea X un G-CW-complejo de dimensión finita tal que para $H < G$ finito el espacio de puntos fijos X^H sea contráctil, y supongamos que para todo $x \in X$ la dimensión de $\underline{E}H_x$ es menor que una cierta cota b independiente de x. Entonces la dimensión de $\underline{E}G$ está acotada por $(b+1)(dim\ X+1)-1$.*

En la prueba de este resultado desempeña un papel importante la parte singular de $\underline{E}G$, que son los puntos de $\underline{E}G$ con isotropía no trivial, lo cual es un ingrediente crucial en el contraejemplo que presentan Leary-Nucinkis a la conjetura de Eilenberg-Ganea propia, ya descrita anteriormente.

Otro problema que aparece aquí y que ya había sido tratado anteriormente es el comportamiento de $\underline{E}G$ con respecto a extensiones de grupos. Concretamente, si tenemos una extensión $0 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow K \longrightarrow 0$ de modo que $\underline{E}H$ y $\underline{E}K$ están sometidos a condiciones de finitud, ver de qué modo pueden interpretarse éstas como condiciones de finitud para $\underline{E}G$. Las primeras respuestas parciales a esta pregunta se encuentra en el ya mencionado artículo de Lück:

Proposición 2.4.14. ([114], 3.1 y 3.2) *Sea $H \longrightarrow G \longrightarrow K$ una extensión. Entonces:*

- *Si existe un entero positivo d que acote el orden de los subgrupos finitos de K, y si H y K tienen dimensiones geométricas propias k y h, respectivamente, se tiene que $\underline{\mathrm{gd}}\ G \leq dh+k$.*

- *Si para cualquier subgrupo finito $H' < H$ y para cualquier extensión $H' \longrightarrow G' \longrightarrow K$ se tiene que existe un H'-CW modelo finito para $\underline{E}H'$, y si además existe un K-CW-modelo finito para $\underline{E}K$, se tiene que G posee un G-CW-modelo finito para $\underline{E}G$. En particular la primera condición siempre se cumple si H es hiperbólico o virtualmente policíclico.*

Nota 2.4.15. Un resultado análogo al segundo enunciado es cierto para modelos de tipo finito.

Más adelante, en el artículo ya citado y basándose en la proposición 2.4.13 y en las propiedades de los grupos jerárquicamente descomponibles, Mislin estudió cuidadosamente este problema, obteniendo los siguientes resultados:

Proposición 2.4.16. ([130], 3.1 y 3.2) *Sea $H \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} K$ una extensión de grupos. Se tiene:*

- *Si $\underline{\mathrm{E}}K$ es finito-dimensional y existe una cota para la dimensión de $\underline{\mathrm{E}}\pi^{-1}\pi(F)$, con F un subgrupo finito cualquiera de G, entonces $\underline{\mathrm{gd}}\ G < \infty$.*
- *Si $K \in \mathbf{H}_1\mathcal{F}$, siendo $\mathcal{F}$ la categoría de grupos finitos, y para cada subgrupo finito $F < G$ existe un $\pi^{-1}\pi(F)$-CW-complejo de dimensión acotada por un número que no depende de F, entonces $G \in \mathbf{H}_1\mathcal{F}$.*
- *Si $K \in \mathbf{H}_1\mathcal{F}$ y el orden de los subgrupos de torsión de K admite una cota universal, se tiene que si H está en $\mathbf{H}_1\mathcal{F}$, G también, y si $\underline{\mathrm{gd}}\ H < \infty$, entonces $\underline{\mathrm{gd}}\ G < \infty$.*

Las primeras consecuencias importantes de esta proposición conciernen a grupos localmente finitos. Recordemos que un grupo discreto G es localmente finito si todo subgrupo finitamente generado es finito.

Proposición 2.4.17. ([130], 4.1 y 4.2) *Sea G un grupo localmente finito cuya cardinalidad sea menor que $\aleph_\omega$. Entonces G tiene dimensión geométrica propia finita.*

Combinando este resultado con los anteriores se obtiene:

Proposición 2.4.18. ([130], 4.4) *Sea $H \longrightarrow G \longrightarrow K$ una extensión de grupos, tal que el orden de los subgrupos de torsión de K está acotado, y tal que H es localmente finito con $|H| < \infty$. Entonces, si $K \in \mathbf{H}_1\mathcal{F}$ (respectivamente si $\underline{\mathrm{gd}}\ K < \infty$) entonces $G \in \mathbf{H}_1\mathcal{F}$ (respectivamente $\underline{\mathrm{gd}}\ G < \infty$).*

Recientemente, Dicks-Kropholler-Leary-Thomas ([64]) han probado que para cualquier grupo localmente finito G de orden $\aleph_n$ existe un modelo para $\underline{\mathrm{E}}G$ de dimensión $n+1$, y han utilizado este hecho para hacer cálculos con la cohomología con coeficientes inducidos de estos grupos y para situar grupos grandes abelianos en la jerarquía $\mathbf{H}\mathcal{F}$.

Otra consecuencia importante de los resultados de Mislin es la siguiente, que concierne a grupos solubles:

Proposición 2.4.19. *Sea G un grupo soluble con $|G| < \aleph_\omega$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El rango libre de torsión (número de Hirsch) de G es finito.*
2. $\dim_G \underline{E}G$ *es finito.*
3. *La dimensión cohomológica racional de G es finita.*

La última aportación al problema de las extensiones aparece en el artículo [109], ya citado anteriormente, en el cual los autores presentan una extensión $N \longrightarrow G \longrightarrow G'$ tales que existen modelos finitos para $\underline{E}N$ y $\underline{E}G'$, pero no para $\underline{E}G$. La prueba se basa en una modificación de la construcción de Bestvina-Brady que aparece en [15], y que es la clave de todo el artículo. En él aparecen también varios contraejemplos que prueban que en general si $H < G$ es un subgrupo de índice finito de un grupo discreto, las condiciones de finitud sobre H no determinan condiciones de finitud semejantes sobre G.

Todos estos resultados de finitud sobre fibraciones serán de gran importancia en esta Memoria.

Para terminar, vamos a citar un resultado de Leary-Nucinkis de naturaleza esencialmente geométrica, que sirvió como motivación a los autores para probar el teorema de Kan-Thurston propio del que ya se ha hablado en la introducción. Antes necesitamos algunas definiciones.

Definición 2.4.20. Un *grupo de Coxeter right-angled* es un grupo generado por un conjunto de elementos de orden dos (los *generadores de Coxeter*) sujetos únicamente a relaciones de conmutación entre pares de generadores.

Una presentación de Coxeter de G puede ser siempre codificada mediante un complejo simplicial $K = K(G)$ que posee un vértice por cada generador de Coxeter, y un símplice por cada subconjunto de generadores que conmutan. A este complejo se le suele denominar *complejo de Coxeter* de G. No es difícil probar que cada complejo lleno es el complejo de Coxeter de algún grupo de Coxeter right-angled G.

Definición 2.4.21. Definimos el *complejo de Davis* $\Sigma = \Sigma(G)$ como la realización del conjunto parcialmente ordenado cuyos elementos son los cosets de subgrupos finitos de Coxeter de G.

La acción de G sobre los cosets induce una acción propia sobre Σ, y puede probarse ([26], sección 3, ver también [58]) que con esta acción Σ se convierte en un modelo para $\underline{\mathrm{E}}G$. Ahora ya podemos establecer el resultado prometido:

Proposición 2.4.22. *Sea G el grupo de Coxeter right-angled correspondiente a un cierto complejo lleno K, y H el subgrupo de índice dos de G cuyos elementos son las palabras que se escriben con un número par de letras. Entonces Σ/H, que es un modelo para $\underline{\mathrm{B}}H$, es isomorfo a la suspensión de la subdivisión baricéntrica de K.*

El estudio de estos subgrupos de índice dos fue una de las primeras motivaciones de nuestro trabajo.

Capítulo 3

$\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de espacios clasificadores de grupos finitos

3.1. La $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de $\mathrm{B}G$

Sea G un grupo finito, p un número primo. Como hemos dicho en la introducción, nuestro interés está enfocado en estudiar la parte p-primaria del espacio clasificador de G utilizando los funtores $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}$ y $\mathbf{CW}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}$; en este capítulo nos ocuparemos del primero de ellos. Así, nuestro primer resultado es una caracterización del espacio $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G$ por medio de una fibración recubridora. Hasta donde nosotros sabemos, la única descripción ya existente de este espacio era para el caso en que G fuera además nilpotente, en el que la prueba es muy sencilla: si H es el subgrupo de p-torsión de G, basta con $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anular la fibración

$$\mathrm{B}H \longrightarrow \mathrm{B}G \longrightarrow \mathrm{B}(G/H)$$

para obtener que $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G \simeq \mathrm{B}(G/H)$. La dificultad del caso general reside en que en general en el subgrupo minimal que contiene a la p-torsión aparecen elementos que *no* son de p-torsión. Nosotros sortearemos este problema identificando en primer lugar el caso en que la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación es simplemente conexa, y luego pasando al caso general.

Proposición 3.1.1. *Sea G un grupo finito, p primo. Supongamos que G no tiene cocientes no triviales de orden primo con p. Entonces tenemos que $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G \simeq \prod_{q\neq p}\mathrm{B}G^{\wedge}_q$ (que es de hecho homotópicamente equivalente a $\mathbb{Z}[1/p]_\infty\mathrm{B}G$, por [25], VII, 4.2 y 4.3).*

Demostración. En primer lugar, debemos demostrar que $\prod_{q\neq p} BG_q^\wedge$ es un espacio $B\mathbb{Z}/p$-nulo. Esto es sencillo porque

$$\mathrm{map}_*(B\mathbb{Z}/p, BG_q^\wedge) \simeq \mathrm{map}_*((B\mathbb{Z}/p)_q^\wedge, BG_q^\wedge) \simeq *$$

donde la primera equivalencia es cierta porque $BG_q^\wedge$ es $\mathbb{Z}/q$-completo.

A continuación debemos ver que si X es otro espacio $B\mathbb{Z}/p$-nulo, existe una equivalencia homotópica

$$\mathrm{map}_*(BG, X) \simeq \mathrm{map}_*(\prod_{q\neq p} BG_q^\wedge, X).$$

Consideraremos dos casos.

Supongamos primero que X es simplemente conexo. En este caso, el cuadrado aritmético de Sullivan nos da una equivalencia homotópica

$$\mathrm{map}_*(BG, X) \simeq \mathrm{map}_*(BG, \prod_{q \text{ primo}} X_q^\wedge).$$

Así, debemos comprobar que $\mathrm{map}_*(BG, X_p^\wedge)$ es contráctil. El espacio $X_p^\wedge$ es $\mathbb{Z}/p$-completo, así que tenemos una equivalencia homotópica $\mathrm{map}_*(BG, X_p^\wedge) \simeq \mathrm{map}_*(BG_p^\wedge, X_p^\wedge)$. Utilizando la descomposición en subgrupos de Dwyer ([73], ver también [95]), obtenemos que

$$\mathrm{map}_*(BG_p^\wedge, X_p^\wedge) \simeq \mathrm{map}_*((\mathrm{hocolim}_{\mathbf{O}_\mathcal{C}}\beta_\mathcal{C})_p^\wedge, X_p^\wedge)$$

donde $\mathbf{O}_\mathcal{C}$ es la categoría de órbitas asociada a la colección (amplia) de p-subgrupos no triviales de G, que es $\mathbb{Z}/p$-acíclica, y $\beta_\mathcal{C}$ es un funtor cuyos valores poseen el tipo de homotopía de espacios clasificadores de dichos subgrupos. Como $X_p^\wedge$ es $\mathbb{Z}/p$-completo, tenemos

$$\mathrm{map}_*((\mathrm{hocolim}_{\mathbf{O}_\mathcal{C}}\beta_\mathcal{C})_p^\wedge, X_p^\wedge) \simeq \mathrm{map}_*(\mathrm{hocolim}_{\mathbf{O}_\mathcal{C}}\beta_\mathcal{C}, X_p^\wedge).$$

Ahora, si denotamos por $B\mathbf{O}_\mathcal{C}$ a la realización del nervio de $\mathbf{O}_\mathcal{C}$, la $\mathbb{Z}/p$-aciclicidad de $B\mathbf{O}_\mathcal{C}$ proporciona equivalencias homotópicas de espacios de aplicaciones no punteados

$$\mathrm{map}(B\mathbf{O}_\mathcal{C}, X_p^\wedge) \simeq \mathrm{map}((B\mathbf{O}_\mathcal{C})_p^\wedge, X_p^\wedge) \simeq X_p^\wedge.$$

Pero de acuerdo con ([72], 3.8), existe una equivalencia homotópica

$$\mathrm{map}(B\mathbf{O}_\mathcal{C}, X_p^\wedge) \simeq \mathrm{map}(\mathrm{hocolim}_{\mathbf{O}_\mathcal{C}}\beta_\mathcal{C}, X_p^\wedge) \simeq X_p^\wedge,$$

de modo que a partir de la fibración clásica de ([69], nota 1.A.1), se deduce que el espacio de aplicaciones *punteado* $\mathrm{map}_*(\mathrm{hocolim}_{\mathbf{O}_\mathcal{C}}\beta_\mathcal{C}, X_p^\wedge)$ es contráctil, y por tanto también $\mathrm{map}_*(\mathrm{B}G, X_p^\wedge)$, como queríamos ver.

Tenemos pues la siguiente sucesión de equivalencias débiles:

$$\mathrm{map}_*(\mathrm{B}G, X) \simeq \mathrm{map}_*(\mathrm{B}G, \prod_{q\neq p} X_q^\wedge) \simeq \prod_{q\neq p} \mathrm{map}_*(\mathrm{B}G, X_q^\wedge) \overset{(*)}{\simeq}$$

$$\prod_{q\neq p} \mathrm{map}_*(\mathrm{B}G_q^\wedge, X_q^\wedge) \simeq \prod_{q\neq p} \mathrm{map}_*(\prod_{r\neq p} \mathrm{B}G_r^\wedge, X_q^\wedge) \overset{(**)}{\simeq} \mathrm{map}_*(\prod_{q\neq p} \mathrm{B}G_q^\wedge, X)$$

donde la equivalencia $(*)$ es cierta porque X es simplemente conexo (y por tanto $X_q^\wedge$ es $\mathbb{Z}/q$-completo para cada q) y $(**)$ se cumple porque el espacio $\mathrm{map}_*(\mathrm{B}G_q^\wedge, X_r^\wedge)$ es contráctil si q y r son primos diferentes.

Ahora podemos atacar el caso general. Sea X un espacio $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-nulo. Si $\tilde{X}$ es el recubridor universal de X, tenemos la fibración:

$$\tilde{X} \longrightarrow X \xrightarrow{h} \mathrm{B}\pi_1(X).$$

Nuestro primer objetivo es ver que la aplicación

$$\mathrm{map}_*(\mathrm{B}G, X) \xrightarrow{h_\natural} \mathrm{map}_*(\mathrm{B}G, \mathrm{B}\pi_1(X))$$

lleva cada elemento del espacio $\mathrm{map}_*(\mathrm{B}G, X)$ a la clase de la aplicación constante, o lo que es lo mismo, que $h_\natural$ toma valores en la componente de la constante $\mathrm{map}_*(\mathrm{B}G, \mathrm{B}\pi_1(X))_c$. Así, sea $f\colon \mathrm{B}G \longrightarrow X$ un elemento de $\mathrm{map}_*(\mathrm{B}G, X)$, y consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "h"] \\
\mathrm{B}G \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "h_\natural f"'] & \mathrm{B}\pi_1(X)
\end{tikzcd}$$

Debemos demostrar que $h_\natural f \simeq *$. Sea pues $g : \mathrm{B}\mathbb{Z}/p \longrightarrow \mathrm{B}G$ una aplicación continua. Como X es un espacio $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-nulo, sabemos que $f \circ g \simeq *$, y en particular $h_\natural f \circ g \simeq *$. Por otro lado, hay dos homomorfismos de grupos, $\mu : \mathbb{Z}/p \longrightarrow G$ y $\rho : G \longrightarrow \pi_1(X)$ de manera que $\mathrm{B}\mu \simeq g$ y $\mathrm{B}\rho \simeq h_\natural f$. Así, es claro que la composición

$$\mathbb{Z}/p \xrightarrow{\mu} G \xrightarrow{\rho} \pi_1(X)$$

es el homomorfismo nulo, y esto ocurre para *cualquier* homomorfismo $\mathbb{Z}/p \longrightarrow G$; por tanto, obtenemos que Im ρ debe ser un cociente de G cuyo orden sea primo con p. Pero por hipótesis, sabemos que G no posee tales cocientes (no triviales), así que ρ es cero, y la aplicación que induce a nivel de espacios clasificadores es homotópica a la constante, como queríamos ver. Así pues, consideramos el siguiente diagrama, donde la columna de la izquierda es una fibración, las aplicaciones horizontales están inducidas por el producto de las $\mathbb{Z}/q$-compleciones de BG, y $\tilde{X}$ es el recubridor universal de X:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{map}_*(\prod_{q\neq p} \mathrm{B}G_q^\wedge, \tilde{X}) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "(2)"] & \mathrm{map}_*(\mathrm{B}G, \tilde{X}) \arrow[d, "(3)"] \\
\mathrm{map}_*(\prod_{q\neq p} \mathrm{B}G_q^\wedge, X) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "h_\natural"] & \mathrm{map}_*(\mathrm{B}G, X) \arrow[d, "h_\natural"] \\
\mathrm{map}_*(\prod_{q\neq p} \mathrm{B}G_q^\wedge, \mathrm{B}\pi_1(X)) \arrow[r] & \mathrm{map}_*(\mathrm{B}G, \mathrm{B}\pi_1(X))_c
\end{tikzcd}$$

La aplicación de arriba es una una equivalencia por el primer caso ya probado y ([5] 9.7), y la aplicación inferior derecha toma valores en la componente de la constante, y por tanto es una fibración. Es claro que esta componente es contráctil, y lo mismo es cierto para $\mathrm{map}_*(\prod_{q\neq p} \mathrm{B}G_q^\wedge, \mathrm{B}\pi_1(X))$, porque $\prod_{q\neq p} \mathrm{B}G_q^\wedge$ es simplemente conexo y $\mathrm{B}\pi_1(X)$ es un espacio de Eilenberg-MacLane. Recuérdese que si G es un grupo finito y p es un número primo, se sabe ([25], II.5, ver también [111]) que el grupo fundamental de $\mathrm{B}G_q^\wedge$ es el cociente de G por su subgrupo normal maximal p-perfecto $O_p(G)$ y en particular, dicho grupo fundamental es un p-grupo; como por otra parte G no tiene cocientes primos entre sí con p, se tiene que $\pi_1(\prod_{q\neq p} \mathrm{B}G_q^\wedge)$ es nulo. Así, las aplicaciones (2) y (3) son equivalencias débiles, y por tanto (1) también lo es, con lo que hemos concluido.

□

Para el caso general del teorema deberemos identificar de algún modo la p-torsión de G, y por ello necesitaremos el concepto de $\mathbb{Z}/p$-radical.

Definición 3.1.2. Sea G un grupo finito, p un primo. El $\mathbb{Z}/p$-*radical* de G (a veces denominado $\mathbb{Z}/p$-aislador) es el subgrupo normal minimal $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$ que contiene a todos los elementos de p-torsión de G.

Los siguientes lemas describen las principales propiedades de este subgrupo.

Lema 3.1.3. *El índice de $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$ en G y p son primos entre sí, y $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$ es minimal entre los subgrupos normales de G para los cuales se cumple esta condición.*

Demostración. Observemos en primer lugar que la condición del lema se cumple para G, y que cada cadena $G > O_1 > O_2 > \dots$ para la cual se cumple dicha condición estabiliza, pues el grupo es finito. Llamemos $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$ al elemento minimal de una de estas cadenas, que tomamos de longitud máxima.

Es claro que $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$ contiene a la p-torsión. Sea O' otro subgrupo normal de G que cumpla esta condición, y sea S un p-subgrupo de Sylow de G. Como $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$ y O' son normales en G, ambos contienen a S. Esto implica que $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G \cap O'$ es un subgrupo normal de G cuyo índice en G es primo con p y está contenido en $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$. Por la minimalidad de $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$, se tiene que $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G = \mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G \cap O'$, y esto implica, por la minimalidad de O', que $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G = O'$, como queríamos ver.

□

Lema 3.1.4. $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$ *es un subgrupo característico de G, es decir, cada automorfismo de G se restringe a un automorfismo de $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$.*

Demostración. Sea ϕ un automorfismo de G. Como $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G \lhd G$, $\phi(\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G) \lhd \phi(G) = G$. Pero el índice de $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$ en G es primo con G, porque es igual al índice de $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$ en G. De nuevo por la minimalidad de $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$ obtenemos la inclusión $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G \leq \phi(\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G)$, y por cardinalidades, $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G = \phi(\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G)$, como queríamos demostrar.

□

Lema 3.1.5. $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$ *no tiene subgrupos normales cuyo índice en $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$ y p son primos entre sí.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que existe $O' \lhd \mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$ tal que $|\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G/O'|$ es primo con p. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que O' es minimal para esta condición. Por el lema anterior esto significa que todo automorfismo de $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$ se restringe a un automorfismo de O'. En particular, esto ocurre para todos los automorfismos de $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$ dados por conjugación por elementos de G (porque $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$ es normal en G). Por consiguiente, $O' \lhd G$, y $|G/O'| = |G/\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G||\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G/O'|$, y esto significa, por la minimalidad de $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$ en G, que $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G = O'$.

□

Nótese que el radical puede definirse en un contexto general de grupos discretos, y respecto a un grupo fijo cualquiera que no sea $\mathbb{Z}/p$ (ver [34], 3.2 para más detalles), aunque nosotros nos hemos concentrado en este caso porque es el único que vamos a necesitar en este trabajo. Por otra parte, en libros clásicos de teoría de grupos, como por ejemplo [86], se suele utilizar la notación O^pG para referirse al $\mathbb{Z}/p$-radical, y más modernamente Bousfield también ha usado $G//\mathbb{Z}/p$; nosotros hemos preferido $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$ por ser lo más habitual en este contexto.

Ahora estamos preparados para probar el caso general del teorema:

Teorema 3.1.6. *Sea G un grupo finito, p un primo; entonces tenemos que la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de $\mathrm{B}G$ es el espacio total de la siguiente fibración:*

$$\prod_{q\neq p} \mathrm{B}(\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G)^{\wedge}_q \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G \longrightarrow \mathrm{B}(G/\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G).$$

Demostración. El $\mathbb{Z}/p$-radical es normal en G, así que podemos considerar la siguiente fibración de espacios clasificadores:

$$\mathrm{B}\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G \longrightarrow \mathrm{B}G \longrightarrow \mathrm{B}(G/\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G).$$

El orden del grupo cociente $G/\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$ y p son primos entre sí, luego el espacio clasificador de dicho grupo es $\mathbb{Z}/p$-nulo. Ahora, por (1.1.6), la sucesión de anulaciones

$$\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G \longrightarrow \mathrm{B}(G/\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G)$$

es una fibración; pero $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G \simeq \prod_{q\neq p} \mathrm{B}(\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G)^{\wedge}_q$ por 3.1.1, así que hemos concluido.

□

Nótese que, debido a que $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$ no tiene cocientes primos entre sí con p, $\prod_{q\neq p} \mathrm{B}(\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G)^{\wedge}_q$ es simplemente conexo, y por tanto es el recubridor universal de $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G$.

Si $S = \{p_1, \ldots, p_r\}$ es una colección finita de números primos, puede definirse el S-radical de G del mismo modo que se hizo en 3.1.2 como el subgrupo normal minimal T_SG de G que contiene a toda la S-torsión. Este grupo verifica propiedades análogas a las citadas para $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$, y de hecho contiene como subgrupo normal al $\mathbb{Z}/p_i$-radical para cada $p_i \in S$. Utilizando este objeto, podemos establecer la siguiente generalización del teorema previo, que se prueba de manera análoga:

Proposición 3.1.7. *Sea G un grupo finito, $S = p_1, \ldots, p_n$ una colección finita de números primos, y $W = \mathrm{B}\mathbb{Z}/p_1 \vee \ldots \vee \mathrm{B}\mathbb{Z}/p_n$; entonces tenemos que la W-anulación de $\mathrm{B}G$ encaja en la siguiente fibración:*

$$\prod_{q \notin S} \mathrm{B}(\mathrm{T}_S G)^{\wedge}_q \longrightarrow \mathbf{P}_W \mathrm{B}G \longrightarrow \mathrm{B}(G/\mathrm{T}_S G).$$

Siguiendo ([150] 1.1) es suficiente considerar el caso en que los primos de S son diferentes, porque existe una equivalencia homotópica $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G \simeq \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \vee \mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G$.

Es también interesante señalar que la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de un grupo simple finito no es más que una compleción:

Corolario 3.1.8. *Si p es un número primo y G es un grupo simple finito con p-torsión, entonces se cumple que $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G = \mathbb{Z}[1/p]_\infty \mathrm{B}G$.*

Demostración. Es una consecuencia directa de la fibración que proporciona el teorema 3.1.6.

□

También podemos destacar el hecho de que, si $M(\mathbb{Z}/p, 1)$ es un espacio de Moore de dimensión dos, el espacio $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G$ es $M(\mathbb{Z}/p, 1)$-nulo ([152] 2.3, ver también [24], sección 7), y por tanto el coaumento natural $\mathrm{B}G \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G$ factoriza a través de una aplicación $\mathbf{P}_{M(\mathbb{Z}/p,1)}\mathrm{B}G \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G$, que de acuerdo con 3.1.6 y el resultado citado de [152] es una equivalencia homotópica. En otras palabras, hemos establecido que la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de $\mathrm{B}G$ depende solamente del 2-esqueleto. Por otro lado, esto prueba el siguiente resultado, que concierne a localización de grupos:

Corolario 3.1.9. *Si G es un grupo finito y p es un número primo, $L_{\mathbb{Z}/p}\pi_1(\mathrm{B}G)$ es isomorfo a $\pi_1(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G)$. Aquí $L_{\mathbb{Z}/p}$ denota la localización clásica de G con respecto a la aplicación nula $\mathbb{Z}/p \longrightarrow *$.*

Demostración. Sólo hay que apuntar ([151], 3.2) que $\pi_1(\mathbf{P}_{M(\mathbb{Z}/p,1)}\mathrm{B}G) \simeq G/\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G \simeq L_{\mathbb{Z}/p}G$.

□

Un estudio detallado del funtor acíclico en el contexto de localización de grupos y su relación con anulación respecto a espacios de Moore y localización de Anderson puede encontrarse en ([34], 3.2).

Todos estos resultados serán utilizados más adelante para dar una descripción precisa del grupo fundamental de $\overline{\mathbf{P}}_{B\mathbb{Z}/p}BG$, una manera de calcularlo y una caracterización de los grupos finitos cuyo espacio clasificador es $B\mathbb{Z}/p$-acíclico.

Concluimos esta sección mencionando brevemente el artículo [72], donde el autor demuestra que la $B\mathbb{Z}/p$-anulación del espacio clasificador de un grupo de Lie compacto G cuyo grupo de componentes es un p-grupo es homotópicamente equivalente a su localización en $\mathbb{Z}[1/p]$. Consideramos que nuestro trabajo complementa a éste, y sería ciertamente deseable encontrar un modo de utilizar todos estos datos para encontrar una descripción de $\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p}BG$ para cualquier grupo de Lie compacto G.

3.2. Conmutación de los funtores de anulación

En la sección anterior hemos obtenido una expresión explícita de la $B\mathbb{Z}/p$-anulación del espacio clasificador de un grupo finito G y, más generalmente, de la W-anulación de BG, siendo $W = B\mathbb{Z}/p_1 \vee \ldots \vee B\mathbb{Z}/p_n$ y $\{p_1, \ldots, p_n\}$ una colección finita de números primos. En este epígrafe utilizamos estos datos para conocer la relación que une, para p y q primos diferentes, a $\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p \vee B\mathbb{Z}/q}BG$ con $\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p}\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/q}BG$ y $\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/q}\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p}BG$. Esto es esencialmente estudiar si los funtores $\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p}$ y $\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/q}$ conmutan sobre BG.

El problema de la conmutación entre funtores de localización homotópica fue ampliamente estudiado en el artículo [150]. En él, los autores prueban que dos funtores de localización L_f y L_g no conmutan en general, y estudian el comportamiento de la serie iterada $L_f L_g L_f L_g \ldots$ En particular, prueban por medio de un ejemplo que los funtores de $M(\mathbb{Z}/p, 1)$-anulación, con $M(\mathbb{Z}/p, 1)$ un espacio de Moore de dimensión dos, no conmutan ni siquiera cuando se aplican sobre espacios clasificadores de grupos discretos. Recordamos brevemente dicho ejemplo:

Ejemplo 3.2.1. ([150], 1.5)

Sea $G = \{X, Y, Z \mid X^3 = 1, Y^3 = 1, XY = Z^2\}$. La localización $L_{\mathbb{Z}/2}L_{\mathbb{Z}/3}G$ es $\mathbb{Z}/2$, mientras que $L_{\mathbb{Z}/3}L_{\mathbb{Z}/2}G$ es trivial. Pero sabemos que $\pi_1(\mathbf{P}_{M(\mathbb{Z}/p,1)}X) \simeq$

$L_{\mathbb{Z}/p}\pi_1(X)$ para todo espacio X y todo primo p, así que se tiene

$$\pi_1(\mathbf{P}_{M(\mathbb{Z}/2,1)}\mathbf{P}_{M(\mathbb{Z}/3,1)}\mathrm{B}G) \neq \pi_1(\mathbf{P}_{M(\mathbb{Z}/3,1)}\mathbf{P}_{M(\mathbb{Z}/2,1)}\mathrm{B}G)$$

y los funtores $\mathbf{P}_{M(\mathbb{Z}/2,1)}$ y $\mathbf{P}_{M(\mathbb{Z}/3,1)}$ no conmutan sobre $\mathrm{B}G$, como queríamos ver.

Sin embargo, nosotros hemos probado que para primos diferentes p y q, los funtores $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}$ y $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}$ sí que conmutan cuando los aplicamos sobre $\mathrm{B}G$. De acuerdo con lo dicho hace un momento, este hecho constituye una interesante excepción al caso general, y marca una notable diferencia entre los casos finito e infinito.

Pasamos, pues, a probar el resultado de conmutación.

Proposición 3.2.2. *Sea G un grupo finito, p y q primos diferentes. Entonces tenemos equivalencias homotópicas*

$$\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G \simeq \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G \simeq \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\vee\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G.$$

Demostración. La prueba la llevaremos a cabo en dos pasos: primero demostraremos el caso en que G coincide con su S-radical para $S=\{p,q\}$, y luego deduciremos de aquí el caso general.

Sea pues $G = \mathrm{T}_S G$. Veremos que $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G$ tiene el mismo tipo de homotopía que $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\vee\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G$ y la otra equivalencia se obtendrá intercambiando los papeles de p y q. Así, queremos probar que $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\vee\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G$ es la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G$, o lo que es lo mismo, qie $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\vee\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G$ es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-nulo, y que para todo espacio $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-nulo X tenemos una equivalencia homotópica

$$\mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\vee\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G, X) \simeq \mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G, X)$$

que debe venir dada por un coaumento $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\vee\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G$. Lo primero es trivial, porque $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\vee\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G$ es por definición un espacio $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-nulo. Por tanto, solamente debemos verificar la equivalencia mencionada entre los espacios de aplicaciones. Así, sea X un espacio $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-nulo.

En primer lugar, como $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\vee\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G$ es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/q$-nulo, tenemos una aplicación natural

$$\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\vee\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G$$

que induce otra entre los correspondientes espacios de aplicaciones

$$\mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\vee\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G, Y) \longrightarrow \mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G, Y)$$

para cada espacio Y. Así, si consideramos el espacio $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-nulo X y su recubridor universal $\tilde{X}$ podemos obtener el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\vee\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G, \tilde{X}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G, \tilde{X}) \arrow[d] \\
\mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\vee\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G, X) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{p}_{p,q}"] & \mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G, X) \arrow[d, "\tilde{p}_q"] \\
\mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\vee\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G, \mathrm{B}\pi_1(X)) \arrow[r, "r_\natural"] & \mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G, \mathrm{B}\pi_1(X))
\end{tikzcd} \quad . \tag{3.1}$$

Para ver que las columnas son fibraciones, hemos de comprobar que las aplicaciones $\tilde{p}_{p,q}$ y $\tilde{p}_q$ toman valores en las respectivas componentes de la constante. En el caso de $\tilde{p}_{p,q}$ es sencillo, porque como $G = \mathrm{T}_S G$, el resultado 3.1.7 implica que $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\vee\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G$ es simplemente conexo, y por tanto el espacio de aplicaciones $\mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\vee\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G, \mathrm{B}\pi_1(X))$ es contráctil. Para probar el otro caso, hemos de verificar que si $f : \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G \longrightarrow X$ es una aplicación, la composición con la proyección natural $\pi : X \longrightarrow \mathrm{B}\pi_1(X)$ es homotópicamente nula. Denotemos por g a la composición

$$\mathrm{B}G \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G \xrightarrow{f} X \xrightarrow{\pi} \mathrm{B}\pi_1(X),$$

donde $\mathrm{B}G \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G$ es el coaumento natural. Es claro que para cualquier aplicación $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \longrightarrow \mathrm{B}G$, la composición

$$\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \longrightarrow \mathrm{B}G \xrightarrow{g} \mathrm{B}\pi_1(X)$$

ha de ser homotópicamente nula, pues X es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-nulo, y lo mismo ocurre para cualquier aplicación $\mathrm{B}\mathbb{Z}/q \longrightarrow \mathrm{B}G$, ya que $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G$ es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/q$-nulo. Como G es igual a su S-radical y por tanto no tiene cocientes que sean primos entre sí a la vez con p y con q, se tiene que la aplicación inducida por g a nivel de grupos fundamentales es la aplicación trivial. Como la aplicación g factoriza, por definición, a través de $\mathrm{B}(G/\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/q}G)$ y la proyección canónica es epiyectiva, se tiene que la aplicación inducida $G/\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/q}G \longrightarrow \pi_1(X)$ es trivial, y el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{B}\pi_1(X) \\
\mathrm{B}(G/\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/q}G) \arrow[urr, "*"] & &
\end{tikzcd}$$

donde $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G \longrightarrow \mathrm{B}(G/\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/q}G)$ es la proyección natural sobre el espacio clasificador del grupo fundamental, ya prueba que la composición $\pi \circ f$ es trivial, como queríamos ver.

Para acabar la demostración del primer caso, pues, debemos probar que la aplicación horizontal superior del diagrama 3.1 es una equivalencia débil. Sabemos ([5], 9.7) que si X es un espacio $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-nulo, su recubridor universal también lo es, de modo que sólo hay que comprobar que la aplicación previamente descrita

$$\mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\vee\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G, X) \longrightarrow \mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G, X)$$

es una equivalencia si X es un espacio simplemente conexo y $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-nulo. Como X es simplemente conexo, es homotópicamente equivalente al producto fibrado del cuadrado aritmético de Sullivan ([25] V,9). Por (3.1.6), las racionalizaciones de $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\vee\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G$ and $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G$ son contráctiles, de modo que

$$\mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\vee\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G, X) \simeq \mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\vee\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G, \prod_{r \text{ primo}} X_r^\wedge),$$

y lo mismo es cierto para las aplicaciones que provienen de $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G$.

Es claro que

$$\mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G, \prod_{r \text{ primo}} X_r^\wedge) \simeq \prod_{r \text{ primo}} \mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G, X_r^\wedge)$$

y, como $X_r^\wedge$ es $\mathbb{Z}/r$-completo para todo primo r, lo anterior es también homotópicamente equivalente a $\prod_{r \text{ primo}} \mathrm{map}_*((\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G)_r^\wedge, X_r^\wedge)$. Si $r \neq q$, por el resultado 3.3.2 se tiene que $(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G)_r^\wedge \simeq \mathrm{B}G_r^\wedge$, y por otro lado, la $\mathbb{Z}/q$-compleción de la fibración de (3.1.6) implica que $(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G)_q^\wedge$ es contráctil (ver 3.3.4). Obsérvese además que $\mathrm{map}_*(\mathrm{B}G_p^\wedge, X_p^\wedge)$ también es contráctil, porque X es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-nulo (por la prueba de 3.1.1). Así, obtenemos que

$$\mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G, X) \simeq \prod_{r\neq p,q} \mathrm{map}_*(\mathrm{B}G_r^\wedge, X_r^\wedge).$$

En el otro caso, tenemos de nuevo

$$\mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p\vee B\mathbb{Z}/q}BG, X) \simeq \mathrm{map}_*((\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p\vee B\mathbb{Z}/q}BG)^\wedge_r, \prod_{r \text{ primo}} X^\wedge_r).$$

Como antes, si $r \neq p, q$, existe una equivalencia homotópica $(\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p\vee B\mathbb{Z}/q}BG)^\wedge_r \simeq BG^\wedge_r$, y por otro lado, utilizando de nuevo la fibración de (3.1.6),

$$(\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p\vee B\mathbb{Z}/q}BG)^\wedge_p \simeq * \simeq (\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p\vee B\mathbb{Z}/q}BG)^\wedge_q.$$

Así tenemos la cadena de equivalencias

$$\mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p\vee B\mathbb{Z}/q}BG, X) \simeq \prod_{r\neq p,q} \mathrm{map}_*(BG^\wedge_r, X^\wedge_r) \simeq \mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/q}BG, X)$$

con la cual concluye la prueba del primer caso.

Sea ahora G un grupo finito cualquiera, y consideremos la fibración

$$BT_SG \longrightarrow BG \longrightarrow B(G/T_SG).$$

Como la base es $B\mathbb{Z}/p \vee B\mathbb{Z}/q$-nula (y en particular $B\mathbb{Z}/p$-nula y $B\mathbb{Z}/q$-nula), la fibración se conserva después de $B\mathbb{Z}/p \vee B\mathbb{Z}/q$-anular, por un lado, y también después de $B\mathbb{Z}/p$-anular y $B\mathbb{Z}/q$-anular, por otro. Como además $\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p\vee B\mathbb{Z}/q}BG$ es $B\mathbb{Z}/p$-nulo y $B\mathbb{Z}/q$-nulo, tenemos un diagrama conmutativo donde las filas son fibraciones:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p\vee B\mathbb{Z}/q}BT_SG \arrow[r] & \mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p\vee B\mathbb{Z}/q}BG \arrow[r] & B(G/T_SG) \\
\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p}\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/q}BT_SG \arrow[r] \arrow[u] & \mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p}\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/q}BG \arrow[r] \arrow[u] & B(G/T_SG). \arrow[u, "\mathrm{Id}"']
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, la aplicación vertical izquierda es una equivalencia por el primer caso ya demostrado, y la aplicación vertical derecha es la identidad, luego la aplicación natural $\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p}\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/q}BG \longrightarrow \mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p\vee B\mathbb{Z}/q}BG$ también lo es y hemos concluido la prueba.

$\square$

Finalizamos la sección con una pequeña generalización de la proposición anterior:

Corolario 3.2.3. *Sean $p_1 \dots p_r$ y $q_1 \dots q_s$ dos familias de números primos, y denotemos $W = B\mathbb{Z}/p_1 \vee \dots \vee B\mathbb{Z}/p_r$ y $W' = B\mathbb{Z}/q_1 \vee \dots \vee B\mathbb{Z}/q_s$; entonces tenemos la equivalencia $\mathbf{P}_W\mathbf{P}_{W'}BG \simeq \mathbf{P}_{W\vee W'}BG \simeq \mathbf{P}_{W'}\mathbf{P}_WBG$.*

Demostración. Se prueba exactamente como el resultado anterior. Dejamos los detalles al lector.

□

3.3. Relación entre la anulación y la compleción

Parece natural preguntarse por la relación entre el efecto que causan sobre espacios clasificadores de grupos finitos los funtores de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación, de $\mathbb{Z}[1/p]_\infty$-compleción y de $\mathbb{Z}/q$-compleción en otro primo, porque todos ellos "matan"la parte p-primaria de $\mathrm{B}G$. Ya hemos visto, por ejemplo, que los dos primeros coinciden si G es un grupo simple con p-torsión, aunque ahora veremos por medio de un ejemplo sencillo que esto no ocurre siempre.

Ejemplo 3.3.1. Consideremos el grupo diédrico D_{15}, que es isomorfo al producto semidirecto $\mathbb{Z}/15 \rtimes \mathbb{Z}/2$ con la acción dada por la inversión. Veremos en 5.1 que la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/3$-anulación de $\mathrm{B}D_{15}$ es homotópicamente equivalente a $\mathrm{B}D_{10}$.

Por otro lado, el grupo $\mathbb{Z}/15$ es normal en el producto semidirecto, y podemos considerar la fibración asociada

$$\mathrm{B}\mathbb{Z}/15 \longrightarrow \mathrm{B}D_{15} \longrightarrow \mathrm{B}\mathbb{Z}/2.$$

De acuerdo con el lema de fibras 1.3.4, esta fibración se preserva por $\mathbb{Z}/2$-compleción, y obtenemos una equivalencia homotópica $\mathrm{B}D_{15}^\wedge \simeq \mathrm{B}\mathbb{Z}/2$.

Es obvio que $\pi_1(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/3}\mathrm{B}D_{15}) = D_{10}$, mientras que $\pi_1(\mathrm{B}D_{15}^\wedge \times \mathrm{B}\mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$, pues $(\mathrm{B}D_{15})_5^\wedge$ es simplemente conexo (D_{15} no tiene cocientes que sean 5-grupos). Así, en este caso, obtenemos que la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/3$-anulación no puede ser el producto de la $\mathbb{Z}/2$-compleción y la $\mathbb{Z}/5$-compleción de $\mathrm{B}D_{15}$, y en particular $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/3}\mathrm{B}D_{15} \neq \mathbb{Z}[1/3]_\infty \mathrm{B}D_{15}$, como queríamos ver.

Comenzamos estudiando qué ocurre si aplicamos sucesivamente los funtores de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación y $\mathbb{Z}/p$-compleción a $\mathrm{B}G$ en los dos órdenes posibles, y para primos p y q no necesariamente diferentes. Llegaremos a la conclusión de que el funtor $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}$ es bastante sensitivo, en el sentido de que mata la estructura p-primaria de $\mathrm{B}G$ dejando intacta la parte q-primaria que es detectada por el funtor de $\mathbb{Z}/q$-compleción.

Consideramos en primer lugar el caso $p \neq q$.

Proposición 3.3.2. *Sea G un grupo finito, p y q primos diferentes. Entonces tenemos equivalencias homotópicas*

$$\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p}(BG^\wedge_q) \simeq BG^\wedge_q \simeq (\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p}BG)^\wedge_q$$

Demostración. Toda aplicación $B\mathbb{Z}/p \longrightarrow BG^\wedge_q$ factoriza a través de la $\mathbb{Z}/q$-compleción de $B\mathbb{Z}/p$, porque $BG^\wedge_q$ es $\mathbb{Z}/q$-completo. Pero el espacio $(B\mathbb{Z}/p)^\wedge_q$ es contráctil, de modo que $BG^\wedge_q$ es $B\mathbb{Z}/p$-nulo y la hemos demostrado la primera equivalencia.

En cuanto a la segunda, obsérvese que la aplicación $B\mathbb{Z}/p \longrightarrow *$ es una $\mathbf{H}(-, \mathbb{F}_q)$-equivalencia, y por tanto, el coaumento canónico $BG \longrightarrow \mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p}BG$ es otra vez una $\mathbf{H}(-, \mathbb{F}_q)$-equivalencia, con lo que hemos concluido.

$\square$

Nota 3.3.3. Los argumentos de la última demostración siguen siendo correctos si reemplazamos BG por cualquier espacio $\mathbb{Z}/q$-bueno.

Si ahora consideramos el caso $p = q$, obtenemos lo siguiente:

Proposición 3.3.4. *Si G es un grupo finito y p es un número primo, entonces $\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p}(BG^\wedge_p)$ es contráctil, y lo mismo ocurre con $(\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p}BG)^\wedge_p$.*

Demostración. Debemos comprobar que, para todo espacio $B\mathbb{Z}/p$-nulo, el espacio de aplicaciones $\mathrm{map}_*(BG^\wedge_p, X)$ es débilmente contráctil. Consideremos la fibración recubridora

$$\tilde{X} \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} B\pi_1(X).$$

Recordemos que si X es $B\mathbb{Z}/p$-nulo, su recubridor universal también lo es (ver [5], 9.7). Consideramos un grupo finito G tal que $BG^\wedge_p$ sea simplemente conexo. En este caso tenemos $\mathrm{map}_*(BG^\wedge_p, B\pi_1(X)) \simeq *$, de modo que para demostrar que $\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/p}BG^\wedge_p$ también es contráctil debemos comprobar que $\mathrm{map}_*(BG^\wedge_p, \tilde{X})$ lo es. Pero esto se prueba del mismo modo a como lo hicimos en (3.1.1), teniendo en cuenta que si $q \neq p$, entonces $\mathrm{map}_*(BG^\wedge_p, \tilde{X}^\wedge_q)$ es contráctil.

Ahora, sea G un grupo finito. Si denotamos por $O_p(G)$ el subgrupo normal maximal p-perfecto de G, se sabe que $\pi_1(BG^\wedge_p)$ es isomorfo a $G/O_p(G)$. Tenemos pues una fibración:

$$\mathrm{B}O_p(G) \longrightarrow \mathrm{B}G \longrightarrow \mathrm{B}(G/O_p(G)).$$

El cociente $G/O_p(G)$ es un p-grupo, así que por 1.3.4 la correspondiente sucesión de $\mathbb{Z}/p$-compleciones es una fibración:

$$\mathrm{B}O_p(G)^\wedge_p \longrightarrow \mathrm{B}G^\wedge_p \longrightarrow \mathrm{B}(G/O_p(G))$$

Como $O_p(G)$ no tiene cocientes de orden una potencia de p, la $\mathbb{Z}/p$-compleción $\mathrm{B}O_p(G)^\wedge_p$ es un espacio simplemente conexo, y por tanto la última fibración es una fibración recubridora de $\mathrm{B}G^\wedge_p$. Pero hemos probado que la fibra $\mathrm{B}O_p(G)^\wedge_p$ es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-acíclica, así que por 1.1.6, $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}(\mathrm{B}G^\wedge_p)$ tiene el tipo de homotopía de $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}(\mathrm{B}(G/O_p(G)))$, que es contráctil porque $G/O_p(G)$ es un p-grupo. Así concluye la prueba del primero de los enunciados.

En cuanto al segundo, obsérvese que el recubridor universal de $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G$, que es $\prod_{q\neq p}(\mathrm{B}G)^\wedge_q$ para q primo, es $\mathbb{Z}/p$-homológicamente equivalente a un punto. Por el lema de fibras 1.3.4, la fibración

$$\prod_{q\neq p}(\mathrm{B}G)^\wedge_q \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G \longrightarrow \mathrm{B}(G/\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G)$$

es preservada por la la $\mathbb{Z}/p$-compleción. Pero las $\mathbb{Z}/p$-compleciones de la base y la fibra son contráctiles, lo cual implica que $(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G)^\wedge_p$ es contráctil, como queríamos ver.

□

La última proposición contrasta fuertemente con el teorema de Neisendorfer ([135], 0.1) ya citado en los preliminares, que establece que para cierta clase de CW-complejos finitos el tipo de homotopía de su $\mathbb{Z}/p$-compleción puede recuperarse totalmente a partir del tipo de homotopía de la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de cualquiera de sus recubridores n-conexos.

Estos resultados nos permiten también estudiar la compatibilidad de los funtores de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación con la compleción respecto del anillo de los enteros localizados en p. Concretamente, vemos que estos funtores siempre conmutan sobre $\mathrm{B}G$, y que la parte p-primaria de la homotopía del espacio clasificador que es eliminada por el funtor $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}$ es esencialmente la misma que desaparece por la acción de $\mathbb{Z}[1/p]_\infty$.

Proposición 3.3.5. *Sea G un grupo finito, y sean p y q dos primos diferentes. Entonces se tiene:*

1. $\mathbb{Z}[1/p]_\infty \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G \simeq \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathbb{Z}[1/p]_\infty \mathrm{B}G \simeq \mathbb{Z}[1/p]_\infty \mathrm{B}G$.
2. $\mathbb{Z}[1/p]_\infty \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G \simeq \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathbb{Z}[1/p]_\infty \mathrm{B}G \simeq \mathbb{Z}[1/p, 1/q]_\infty \mathrm{B}G$

Demostración. De acuerdo con 3.1.6 y ([25], VII, 4.3), el espacio $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G$ tiene todos los grupos de homotopía finitos, así que por ([25], VII, 4.2) se tiene la equivalencia homotópica $\mathbb{Z}[1/p]_\infty \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G \simeq \prod_{q\neq p}(\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G)^\wedge_q$. Ahora basta utilizar el resultado 3.3.4 y el hecho de que G es finito para obtener la equivalencia $\mathbb{Z}[1/p]_\infty \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G \simeq \mathbb{Z}[1/p]_\infty \mathrm{B}G$. De modo similar, usando 3.3.2 en lugar de 3.3.4, se demuestra que $\mathbb{Z}[1/p]_\infty \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/q}\mathrm{B}G \simeq \mathbb{Z}[1/p, 1/q]_\infty \mathrm{B}G$.

Para probar las dos equivalencias restantes, es suficiente utilizar de nuevo la equivalencia $\mathbb{Z}[1/p]_\infty \mathrm{B}G \simeq \prod_{q\neq p}\mathrm{B}G^\wedge_q$ y el hecho ya visto en el capítulo primero de que la anulación conmuta con productos para obtener el resultado deseado.

□

Capítulo 4

B$\mathbb{Z}/p$-celularización de espacios clasificadores de grupos finitos

Sea G un grupo finito. En la proposición 3.1.9 hemos visto que la B$\mathbb{Z}/p$-anulación de BG está íntimamente relacionada con la $\mathbb{Z}/p$-localización de G como grupo. Por ello, la filosofía de este capítulo será estudiar la $\mathbb{Z}/p$-celularización del grupo G para obtener información sobre la B$\mathbb{Z}/p$-celularización de su espacio clasificador.

4.1. $\mathbb{Z}/p$-celularización de grupos

En primer lugar, recordaremos brevemente las principales definiciones concernientes a la celularización en la categoría de grupos. Así, un grupo se dice *$\mathbb{Z}/p$-celular* si puede construirse a partir de G usando colímites (posiblemente reiterados), y la *$\mathbb{Z}/p$-celularización* de G se define como el único grupo $\mathbb{Z}/p$-celular dotado de un aumento $\mathrm{CW}_{\mathbb{Z}/p}G \longrightarrow G$ que induce isomorfismo $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p, \mathrm{CW}_{\mathbb{Z}/p}G) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p, G)$. Este concepto fue definido originalmente en [152] (basándose en ideas de Dror-Farjoun) y utilizado principalmente para describir la celularización de espacios de Moore.

Comenzamos nuestro estudio mostrando que el problema de la B$\mathbb{Z}/p$-celularización de espacios clasificadores de grupos finitos se reduce al problema de la B$\mathbb{Z}/p$-celularización de espacios clasificadores de grupos $\mathbb{Z}/p$-*celulares*. Más adelante veremos que la $\mathbb{Z}/p$-celularización de un grupo finito siempre es finita.

Proposición 4.1.1. *Si G es un grupo finito, el aumento* $\mathrm{CW}_{\mathbb{Z}/p}G \longrightarrow G$

induce una equivalencia homotópica $\mathbf{CW}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{BCW}_{\mathbb{Z}/p}G \simeq \mathbf{CW}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G$.

Demostración. Por la funtorialidad de $\mathbf{CW}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}$, la aplicación mencionada $\mathrm{CW}_{\mathbb{Z}/p}G \longrightarrow G$ induce otra $\mathbf{CW}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{BCW}_{\mathbb{Z}/p}G \longrightarrow \mathbf{CW}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G$ que compuesta con el aumento canónico da lugar a una aplicación

$$f : \mathbf{CW}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{BCW}_{\mathbb{Z}/p}G \longrightarrow \mathrm{B}G.$$

El espacio de salida es B$\mathbb{Z}/p$-celular, así que solamente necesitamos ver que esta última aplicación induce una equivalencia débil entre los espacios de aplicaciones punteadas $\mathrm{map}_*(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p, \mathbf{CW}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{BCW}_{\mathbb{Z}/p}G)$ y $\mathrm{map}_*(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p, \mathrm{B}G)$. Esto lo demuestra la siguiente cadena de equivalencias débiles

$$\mathrm{map}_*(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p, \mathbf{CW}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{BCW}_{\mathbb{Z}/p}G) \simeq \mathrm{map}_*(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p, \mathrm{BCW}_{\mathbb{Z}/p}G) \simeq$$

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p, \mathrm{CW}_{\mathbb{Z}/p}G) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p, G) \simeq \mathrm{map}_*(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p, \mathrm{B}G)$$

que concluye la prueba. Nótese que hemos construido explícitamente el aumento f.

□

Debido a este lema, será útil encontrar herramientas apropiadas para calcular la $\mathbb{Z}/p$-celularización de un grupo finito G. Con este objeto, recordamos el siguiente concepto de teoría de grupos, que será crucial en lo sucesivo:

Definición 4.1.2. Si G es un grupo finito, el *$\mathbb{Z}/p$-zócalo* $\mathrm{S}_{\mathbb{Z}/p}G$ de G es el subgrupo de G generado por sus elementos de orden p.

Puede comprobarse sin dificultad que este subgrupo es siempre normal y característico, y está contenido en el $\mathbb{Z}/p$-radical $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$. De hecho, se tiene

Proposición 4.1.3. *Si G es un grupo $\mathbb{Z}/p$-celular, entonces* $G = \mathrm{S}_{\mathbb{Z}/p}G = \mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$.

Demostración. Si G es $\mathbb{Z}/p$-celular puede expresarse como un colímite de $\mathbb{Z}/p'$s, y por tanto está generado por elementos de orden p. Como el $\mathbb{Z}/p$-zócalo es precisamente el grupo generado por los elementos de orden p de G, $G = \mathrm{S}_{\mathbb{Z}/p}G$, y la otra igualdad se obtiene trivialmente de las inclusiones $\mathrm{S}_{\mathbb{Z}/p}G \subseteq \mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G \subseteq G$.

□

La propiedad del $\mathbb{Z}/p$-zócalo que va a ser usada más frecuentemente en nuestro trabajo es el hecho de que la inclusión $\mathrm{S}_{\mathbb{Z}/p}G \subseteq G$ induce siempre un isomorfismo $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p, \mathrm{S}_{\mathbb{Z}/p}G) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p, G)$, y esto implica que $\mathrm{CW}_{\mathbb{Z}/p}G \simeq \mathrm{CW}_{\mathbb{Z}/p}\mathrm{S}_{\mathbb{Z}/p}G$. Esta última afirmación prueba, en particular, que el cálculo de la $\mathbb{Z}/p$-celularización de grupos puede ser de nuevo reducido al caso de grupos generados por elementos de orden p. Además, en el caso de grupos finitos, no es difícil calcular el $\mathbb{Z}/p$-zócalo de un grupo a partir de una presentación de G (utilizando GAP, por ejemplo).

La principal herramienta que vamos a usar para obtener nuestra descripción de la $\mathbb{Z}/p$-celularización es el siguiente teorema, que esencialmente es un resultado de Rodríguez-Scherer ([152] 3.7) particularizado para el caso $\mathbb{Z}/p$:

Teorema 4.1.4. *Para todo grupo G, existe una extensión central*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \mathrm{CW}_{\mathbb{Z}/p}G \longrightarrow \mathrm{S}_{\mathbb{Z}/p}G \longrightarrow 0$$

tal que A no tiene ningún elemento de orden p, y es universal con respecto a esta propiedad.

De acuerdo con lo dicho anteriormente, el caso clave aparece cuando G es finito y tal que $G = \mathrm{S}_{\mathbb{Z}/p}G$; así, el problema principal reside en calcular A. De acuerdo con (1.2.6), este grupo es el segundo grupo de homotopía de la $\Sigma M(\mathbb{Z}/p, 1)$-anulación de la cofibra C_f de la evaluación

$$\bigvee_{[M(\mathbb{Z}/p,1),\mathrm{B}G]} M(\mathbb{Z}/p, 1) \xrightarrow{f} \mathrm{B}G,$$

donde $M(\mathbb{Z}/p, 1)$ es un espacio de Moore de dimensión dos. No es difícil ver que $\pi_2(\mathbf{P}_{\Sigma M(\mathbb{Z}/p,1)}C_f) = \pi_2(C_f)/\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}\pi_2(C_f)$, de modo que la cuestión es describir el segundo grupo de homotopía de esta cofibra homotópica. Como G está generado por elementos de orden p, C_f es simplemente conexo, y entonces $\pi_2(C_f) = H_2(C_f)$. Utilizando esta propiedad, hemos calculado este grupo del siguiente modo:

Proposición 4.1.5. *Sea G un grupo finito generado por elementos de orden p, sea H el producto libre $*\mathbb{Z}/p$ extendido sobre todos los homomorfismos $\mathbb{Z}/p \longrightarrow G$, y sea K el núcleo de la evaluación $H \longrightarrow G$. Con la notación del párrafo anterior, se tiene que $\pi_2(C_f) = K/[K, H]$.*

Demostración. Es una consecuencia sencilla de ([33], 3.4), tomando, en la notación que aparece en ese artículo, $P = H$, $M = H$ y $N = K$.

$\square$

Como hemos dicho en la introducción, utilizando esta proposición no es difícil calcular una presentación del grupo $\pi_2(C_f)$ a partir de presentaciones de K y H usando el método de Reidemeister-Schreier ([119], 2.3). De este modo obtuvimos inicialmente el valor de $\pi_2(C_f)$ en el caso del grupo tetraedral $G = \mathrm{PSL}(2,3)$ (ver más adelante 5.2) y este ejemplo patológico sirvió como motivación a nuestro trabajo. Esta fórmula se muestra particularmente útil para calcular la $\mathbb{Z}/p$-celularización de G si no conocemos el multiplicador de Schur de G, y de hecho proporciona una forma de obtener este último invariante:

Corolario 4.1.6. *Con la notación de la proposición anterior,* $H_2(G) = K \cap [H,H]/[K,H]$.

Demostración. Es una consecuencia inmediata del resultado previo y la sucesión de Mayer-Vietoris asociada a la cofibración f.

□

Por otro lado, si conocemos el segundo grupo de homología de G, los cálculos se simplifican bastante utilizando el siguiente lema, que de hecho nos lleva a clasificar completamente los grupos finitos $\mathbb{Z}/p$-celulares.

Lema 4.1.7. *Sea G un grupo finito generado por elementos de orden p. Entonces el grupo A de 4.1.4 es isomorfo a $H_2(G)/\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}(H_2(G))$. Obsérvese que en particular A es finito.*

Demostración. La sucesión de Mayer-Vietoris de la cofibración f tiene la siguiente forma:

$$0 \longrightarrow H_2(G) \longrightarrow \pi_2(C_f) \longrightarrow \bigoplus \mathbb{Z}/p \longrightarrow G^{ab} \longrightarrow 0.$$

El resultado ahora se sigue de $A = \pi_2(C_f)/\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}\pi_2(C_f)$,

□

Proposición 4.1.8. *Sea G un grupo finito. Entonces G es $\mathbb{Z}/p$-celular si y sólo si está generado por elementos de orden p y $H_2(G)$ es un p-grupo.*

Demostración. Si G es $\mathbb{Z}/p$-celular, es un colímite de copias de $\mathbb{Z}/p$, y por tanto está generado por elementos de orden p. De acuerdo con 4.1.4 y la proposición anterior, H_2G debe ser igual a su $\mathbb{Z}/p$-radical, y por tanto debe ser un p-grupo, porque lo es el $\mathbb{Z}/p$-radical de cualquier grupo abeliano. Recíprocamente, si G está generado por elementos de orden p, entonces $G =$

$S_{\mathbb{Z}/p}G$, y el hecho de que $H_2(G)$ es un p-grupo ya implica que el grupo A de 4.1.4 es trivial; por tanto, G es $\mathbb{Z}/p$-celular y hemos concluido.

□

4.2. Grupos perfectos

Una vez que hemos descrito A, lo único que nos queda para obtener la $\mathbb{Z}/p$-celularización de cualquier grupo finito es identificar cuál es la extensión que la define. Esto normalmente no es muy difícil, porque el resultado 4.1.4 describe dicha extensión con bastante precisión. Aún así, en algunas casos favorables, podemos dar un paso más e incluso identificar explícitamente la clase de cohomología asociada a la extensión. Por este motivo, nuestra atención se centrará ahora en grupos perfectos. Recordemos que un grupo G se dice *perfecto* si es igual a a su subgrupo de conmutadores o, equivalentemente, si su primer grupo de homología entera es trivial.

Proposición 4.2.1. *Sea G un grupo perfecto finito generado por elementos de orden p, y sea*

$$0 \longrightarrow H_2G \longrightarrow \tilde{G} \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

la extensión central universal de G; sea también B el cociente de H_2G por la p-torsión (que es de hecho isomorfo a un subgrupo de H_2G) y sea

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

la extensión central $\mathcal{E}$ inducida por la anterior. Entonces, esta última extensión es equivalente a 4.1.4, y en particular H es isomorfo a la $\mathbb{Z}/p$-celularización de G.

Demostración. El grupo B no posee p-torsión, así que por la universalidad la extensión $\mathcal{E}'$ que define la $\mathbb{Z}/p$-celularización existe un único morfismo de extensiones

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{CW}_{\mathbb{Z}/p}G \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & H \arrow[r] & G \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

que es la identidad sobre G.

Por otro lado, está claro que para cualquier extensión central universal cuyo núcleo no tenga p-torsión, el único morfismo que proviene de la extensión central universal factoriza a través de $\mathcal{E}'$. Esto prueba que hay de nuevo un único morfismo sobre G de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{E}'$, y es fácil comprobar, por universalidad, que los dos morfismos que hemos definido son inversos uno del otro. Por tanto, las extensiones $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ son equivalentes y hemos concluido.

□

Los métodos de cálculo de $\mathrm{CW}_{\mathbb{Z}/p}G$ que han sido desarrollados más arriba pueden ser reinterpretados en el ámbito de la teoría de grupos finitos como herramientas que permiten describir la extensión central universal de un grupo perfecto G. Por ejemplo, podemos obtener la siguiente consecuencia:

Corolario 4.2.2. *Si G es un grupo perfecto generado por elementos de orden p y cuyo multiplicador de Schur no posee p-torsión, se tiene que la $\mathbb{Z}/p$-celularización de G es isomorfa a su grupo recubridor universal $\tilde{G}$.*

Una línea de razonamiento similar puede aplicarse en ocasiones a grupos no perfectos, como podemos ver en la siguiente proposición:

Proposición 4.2.3. *Sea p un primo impar, G un grupo finito tal que el multiplicador de Schur de su $\mathbb{Z}/p$-zócalo es $\mathbb{Z}/2$. Entonces la extensión central de 4.1.4 que identifica la $\mathbb{Z}/p$-celularización de G es la única que no es trivial.*

Demostración. El $\mathbb{Z}/p$-zócalo $\mathrm{S}_{\mathbb{Z}/p}G$ de G está generado por elementos de orden p, y por tanto su abelianizado es un p-grupo abeliano elemental. Así, tenemos que $\mathrm{Ext}(\mathrm{S}^{ab}_{\mathbb{Z}/p}G, \mathbb{Z}/2) = 0$. Por el teorema de coeficientes universales, existen isomorfismos

$$H^2(\mathrm{S}_{\mathbb{Z}/p}G, \mathbb{Z}/2) \simeq \mathrm{Hom}(H_2(\mathrm{S}_{\mathbb{Z}/p}G), H_2(\mathrm{S}_{\mathbb{Z}/p}G)) \simeq \mathbb{Z}/2.$$

Esto implica que hay solamente dos extensiones centrales de $\mathrm{S}_{\mathbb{Z}/p}G$ por $\mathbb{Z}/2$. Ahora observamos que el grupo que define la extensión central trivial $\mathbb{Z}/2 \times \mathrm{S}_{\mathbb{Z}/p}G$ no es $\mathbb{Z}/p$-celular, porque no puede estar generado por elementos de orden p, y así, la celularización es identificada por la extensión no trivial, como queríamos ver.

□

Este resultado será muy útil en ciertos casos concretos, como veremos en el capítulo siguiente.

4.3. La celularización de G y el funtor acíclico

Una vez que hemos estudiado con detalle el funtor de $\mathbb{Z}/p$-celularización en la categoría de grupos finitos, es interesante relacionarlo con la otra colocalización de grupos que aparece en este trabajo, que es el núcleo $\overline{L}_{\mathbb{Z}/p}G$ de la aplicación localización $G \longrightarrow L_{\mathbb{Z}/p}G$ descrita en 3.1. Este es el objetivo de la siguiente proposición:

Proposición 4.3.1. *Si G es un grupo finito de modo que $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G = \mathrm{S}_{\mathbb{Z}/p}G$, la $\mathbb{Z}/p$-celularización de G es isomorfa al grupo fundamental de $\overline{\mathbf{P}}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G$, que normalmente se denota $\mathrm{D}_{\mathbb{Z}/p}G$.*

Demostración. Siguiendo ([152] 4.3, ver también [131]), el grupo $\mathrm{D}_{\mathbb{Z}/p}G$ está definido por una extensión central $\mathcal{D}$ dada por

$$0 \longrightarrow H_2(\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G; \mathbb{Z}[1/p]) \longrightarrow \mathrm{D}_{\mathbb{Z}/p}G \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G \longrightarrow 0$$

que es universal entre las extensiones centrales

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow E \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G \longrightarrow 0$$

tales que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p, B) = 0$ y $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p, B) = 0$.

Ahora, estas condiciones se cumplen también para la extensión de 4.1.4 que define $\mathrm{CW}_{\mathbb{Z}/p}G$, porque p no divide el orden de A. Por tanto, si seguimos denotando por $\mathcal{E}'$ a esta última extensión, existe una única aplicación $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}'$ que es la identidad sobre G. Por otro lado, el grupo $H_2(\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G)$ no tiene p-torsión, y entonces por 4.1.4 existe una sola aplicación $g : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{D}$ que es de nuevo la identidad sobre G. Por universalidad, $\mathcal{E}' \simeq \mathcal{D}$ y el resultado sigue.

□

La última proposición establece que las herramientas que hemos descrito más arriba para calcular la $\mathbb{Z}/p$-celularización de un grupo finito G son útiles igualmente para obtener $\mathrm{D}_{\mathbb{Z}/p}G$, que en lenguaje de teoría de grupos es la extensión central universal del $\mathbb{Z}/p$-radical de G con coeficientes en $\mathbb{Z}[1/p]$. Ver ([152], 4.5) y especialmente [131] para un estudio detallado de las extensiones centrales con coeficientes.

El siguiente resultado de conmutación, análogo a 3.1, aparece como una consecuencia sencilla de la anterior proposición:

Corolario 4.3.2. *Si G es un grupo finito $\mathbb{Z}/p$-celular, se tiene un isomorfismo*

$$\pi_1 \overline{\mathbf{P}}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G \simeq \overline{L}_{\mathbb{Z}/p}G.$$

Demostración. De acuerdo con el resultado previo, el grupo fundamental de $\overline{\mathbf{P}}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}$ es $\mathbb{Z}/p$-celular, así que aplicando 4.1.8 obtenemos que $H_2(G;\mathbb{Z}[1/p]) = 0$. Esto implica que $\mathrm{D}_{\mathbb{Z}/p}G = G$, y G coincide con su $\mathbb{Z}/p$-radical porque es $\mathbb{Z}/p$-celular. Pero el $\mathbb{Z}/p$-radical es necesariamente el núcleo de la $\mathbb{Z}/p$-localización de G, luego hemos concluido.

□

Es importante señalar que la hipótesis de que G sea $\mathbb{Z}/p$-celular es esencial, como se puede comprobar tomando por ejemplo $G = \mathbb{Z}/p^2$.

4.4. La $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celularización de $\mathrm{B}G$

Una vez hemos completado la descripción de la $\mathbb{Z}/p$-celularización de grupos finitos, estamos preparados para demostrar el que es probablemente el principal resultado de este capítulo, una caracterización completa de los grupos finitos G tales que su espacio clasificador es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celular.

Teorema 4.4.1. *Sea G un grupo finito $\mathbb{Z}/p$-celular. Se tiene entonces que $\mathrm{B}G$ es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celular si y sólo si G es un p-grupo.*

Demostración. Si G no es un p-grupo, $H_n(G)$ no posee p-torsión para un cierto $n \geq 2$. Aplicando el resultado ([152], 7.3), el espacio clasificador de este grupo no puede ser $M(\mathbb{Z}/p,1)$-celular para ningún espacio de Moore de dimensión dos $M(\mathbb{Z}/p,1)$. Pero como $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$ es $M(\mathbb{Z}/p,1)$-celular, el resultado 1.2.3 implica que G no puede ser $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celular.

Supongamos ahora que G es un p-grupo, y utilicemos inducción sobre el orden de G. Es trivial que $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$ es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celular, así que suponemos que la hipótesis es cierta para todo grupo de orden estrictamente menor que p^k. Sea pues G de orden p^k, y consideremos un sistema minimal de generadores de orden p $\{x_1,\ldots,x_r,y\}$, que existe porque el grupo es finito y $\mathbb{Z}/p$-celular. Denotemos por H el subgrupo de G generado por $\{x_1,\ldots,x_r\}$ y sus conjugados por y^j, con $0 \leq j \leq p-1$. Es claro que H es normal en G, luego tenemos una extensión:

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow G/H \longrightarrow 0.$$

Como G/H es isomorfo a $\langle y\rangle = \mathbb{Z}/p$, la extensión escinde, y por tanto la fibración asociada tiene una sección. Ahora, H está generado por elementos de orden p (por construcción) y está estrictamente contenido en G, de modo que por hipótesis de inducción $\mathrm{B}H$ es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celular. Como $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$ también lo es, el resultado 1.2.3 implica ya que $\mathrm{B}G$ es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celular, como queríamos demostrar.

□

Concluimos esta sección describiendo el grupo fundamental de la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celularización de $\mathrm{B}G$, que utilizamos para probar una condición necesaria y suficiente de anesfericidad para dicho espacio. Recordemos que un espacio X es *anesférico* si $\pi_n(X) = 0$ para $n \geq 2$.

Proposición 4.4.2. *Sea G un grupo finito $\mathbb{Z}/p$-celular. Denotamos por r al orden de $H_2(G)$ y por s al número de homomorfismos $\mathbb{Z}/p \longrightarrow G$. Entonces el grupo fundamental π de la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celularización de $\mathrm{B}G$ viene definido por una extensión central*

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow \pi \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

donde π es un p-grupo finito cuyo orden está acotado por prs.

Demostración. Consideremos de nuevo la evaluación $\bigvee_{[\mathrm{B}\mathbb{Z}/p,\mathrm{B}G]_*} \mathrm{B}\mathbb{Z}/p \longrightarrow \mathrm{B}G$, donde el wedge está extendido a todos los elementos de $[\mathrm{B}\mathbb{Z}/p, \mathrm{B}G]_*$, y sea C_g la cofibra homotópica de dicha aplicación. La sucesión de Mayer-Vietoris de esta cofibración es la siguiente

$$0 \longrightarrow H_2(\mathrm{B}G) \longrightarrow H_2(C_g) \longrightarrow \bigoplus \mathbb{Z}/p \longrightarrow G^{ab} \longrightarrow 0,$$

donde el rango del p-grupo abeliano elemental $\bigoplus \mathbb{Z}/p$ es el número de homomorfismos $\mathbb{Z}/p \longrightarrow G$. La cofibra C_g es simplemente conexa, de modo que $H_2(C_g) = \pi_2(C_g)$, y su orden está claramente acotado por prs. El grupo fundamental π está definido, pues, por una extensión central

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \pi \longrightarrow \mathrm{S}_{\mathbb{Z}/p}G \longrightarrow 0$$

donde A es el segundo grupo de homotopía de la $\Sigma\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de C_g. Utilizando el hecho de que la suspensión de C_g es simplemente conexa y la construcción del funtor de anulación descrita en los preliminares obtenemos que A es un cociente de $\pi_2(C_f)$. La demostración concluye observando que el $\mathbb{Z}/p$-zócalo de G es $\mathbb{Z}/p$-celular, y por tanto igual a G.

□

Corolario 4.4.3. *Sea G un grupo finito. Entonces* $\mathbf{CW}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G$ *es anesférico si y sólo si la $\mathbb{Z}/p$-celularización de G es un p-grupo.*

Demostración. Si la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celularización de $\mathrm{B}G$ es homotópicamente equivalente a $\mathrm{B}G'$ para cierto grupo finito G', tenemos que G' es $\mathbb{Z}/p$-celular, porque tomar grupo fundamental conmuta con colímites, y por tanto (4.4.1) es un p-grupo. De acuerdo con el resultado anterior, la $\mathbb{Z}/p$-celularización de G es un cociente de G', y por tanto es también un p-grupo. Por otro lado, si $\mathrm{CW}_{\mathbb{Z}/p}G$ es un p-grupo, de nuevo por 4.4.1 su espacio clasificador es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celular, y ahora ya basta aplicar 4.1.1 para concluir.

□

El problema de determinar exactamente cuántas copias de $\mathbb{Z}/p$ aparecen en el núcleo de la extensión que aparece en la proposición anterior no parece nada fácil de resolver, porque dicho número depende esencialmente de cuántas aplicaciones que partan de $M(\mathbb{Z}/p, 2)$ y lleguen a las sucesivas cofibras que aparecen en la construcción de la $\Sigma\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de C_g pueden ser levantadas a $\Sigma\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$. Sin embargo, en el siguiente capítulo veremos varios ejemplos de grupos para los cuales es posible determinar exactamente quién es el citado grupo fundamental.

Capítulo 5

Ejemplos

En este capítulo aplicaremos el teorema 3.1.6 para calcular explícitamente la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación y la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celularización de algunas familias bien conocidas de espacios clasificadores de grupos finitos. De hecho, estos son los primeros ejemplos que conocemos de estos cálculos para espacios clasificadores de grupos finitos *no nilpotentes*. Es interesante recordar también que como $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G = \mathbf{P}_{M(\mathbb{Z}/p,1)}\mathrm{B}G$, estos cálculos pueden verse también en el contexto de anulaciones respecto a espacios de Moore.

Los detalles omitidos sobre la estructura de estos grupos pueden encontrarse en [86], [149] o [168], y supondremos siempre que los primos que aparecen dividen al orden del grupo, porque en caso contrario el espacio clasificador del grupo será siempre $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-nulo y por tanto su $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celularización será un punto.

5.1. Grupos diédricos

Sea $D_n = \{X, Y; X^n = 1, Y^2 = 1, (XY)^2 = 1\}$ el grupo diédrico de orden $2n$.

a) *Anulación.*

Para calcular $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}D_n$, distinguiremos los casos $p \neq 2$ y $p = 2$.

Supongamos en primer lugar que p es diferente de 2. Entonces $|D_n| = p^r q$, con p y q primos entre sí. Si $r = 0$ no hay p-torsión, así que sea pues $r > 0$. El $\mathbb{Z}/p$-radical $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}G$ de D_n es el subgrupo generado por X^{n/p^r}, y es fácil ver que este el único p-subgrupo de Sylow de D_n (en particular es normal). Además, $\langle X^{n/p^r}\rangle$ es isomorfo a D_{n/p^r}, de modo que por el resultado 3.1.6

tenemos la siguiente fibración recubridora:

$$\prod_{s\neq p}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^r)^\wedge_s \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}D_n \longrightarrow \mathrm{B}D_{n/p^r}.$$

Como $(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^r)^\wedge_s$ es contráctil si $s \neq p$ obtenemos que $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}D_n$ tiene el tipo de homotopía de $\mathrm{B}D_{n/p^r}$.

Analizamos a continuación el caso $p = 2$. Es claro por las relaciones que definen el grupo que Y y XY pertenecen al $\mathbb{Z}/2$-radical de D_n. Esto implica que X también pertenece, y entonces $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/2}(D_n) = D_n$. Por consiguiente, $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/2}\mathrm{B}D_n \simeq \mathbb{Z}[1/2]_\infty \mathrm{B}D_n$ y hemos concluido.

b) *Celularización.*

Si $p \neq 2$, el $\mathbb{Z}/p$-zócalo de D_n es el grupo cíclico de orden p, cuyo generador se identifica en D_n con $X^{n/p}$. Por tanto, la $\mathbb{Z}/p$-celularización de D_n es $\mathbb{Z}/p$, y entonces $\mathbf{CW}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}D_n = \mathrm{B}\mathbb{Z}/p$.

Si $p = 2$, podemos efectuar el cambio $Z = XY$ para obtener la presentación $D_n = \{X, Z; X^2 = 1, Z^2 = 1, (XZ)^n = 1\}$. Esto prueba que D_n está siempre generado por elementos de orden dos. En particular, si $n = 2^j$ para un cierto número natural j, el grupo diédrico correspondiente es un 2-grupo, y por tanto por 4.4.1 su espacio clasificador es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/2$-celular.

En el caso $n \neq 2^j$, podemos asegurar que $\mathrm{B}D_n$ no es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/2$-celular, porque tiene torsión en otros primos, pero podemos probar que dicho grupo es $\mathbb{Z}/2$-cellular. De hecho, vamos a dar una construcción explícita de D_n, para cada n, como un colímite de copias de $\mathbb{Z}/2$.

Consideremos la segunda presentación vista más arriba, las presentaciones usuales $\mathbb{Z}/2 = \{A; A^2 = 1\}$, $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2 = \{B, C; B^2 = 1, C^2 = 1\}$, y supongamos que n es impar. Entonces D_n es el coigualador de los homomorfismos

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2 \\ A & \longrightarrow & BCB\dots CB \end{array}$$

donde B aparece $(n+1)/2$ veces, y

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2 \\ A & \longrightarrow & CB\dots BC \end{array}$$

donde en esta ocasión el generador C aparece $(n+1)/2$ veces. El caso en que n es par es similar, con la diferencia de que ahora B aparece $n/2$ veces en el primer homomorfismo, y C aparece $(n/2)+1$ veces en el segundo. Como todo coigualador es un colímite, hemos completado la demostración de que los grupos diédricos son $\mathbb{Z}/2$-celulares.

5.2. Grupos especiales lineales

En este epígrafe estudiaremos con detalle la familia de grupos especiales lineales $\mathrm{SL}(2,q)$, con q primo, y sus cocientes proyectivos $\mathrm{PSL}(2,q)$, que poseen orden $q(q^2-1)$ y $q(q^2-1)/2$ respectivamente. Recuérdese que $\mathrm{SL}(2,2) = \mathrm{PSL}(2,2) = D_6$ (caso ya estudiado anteriormente) y que si $q \geq 3$, la aplicación cociente induce una extensión

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathrm{SL}(2,q) \longrightarrow \mathrm{PSL}(2,q) \longrightarrow O,$$

en la cual el núcleo está generado por la matriz $M = -\mathrm{Id}$. Los grupos $\mathrm{PSL}(2,q)$ son simples si $q > 3$, así que habitualmente deberemos distinguir el caso del grupo tetraedral $\mathrm{PSL}(2,3)$.

a) *Anulación.*

Consideremos la presentación del grupo tetraedral $\mathrm{PSL}(2,3)$ dada por $\{X,Y; X^3 = 1, Y^3 = 1, (XY)^2 = 1\}$. El único subgrupo normal de $\mathrm{PSL}(2,3)$ que no es trivial es $H = \{1, XY, YX, XY^2X\}$, que es isomorfo al grupo de Klein $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, y es sencillo ver que éste es precisamente el $\mathbb{Z}/2$-radical de $\mathrm{PSL}(2,3)$. La extensión asociada da lugar a una fibración de espacios clasificadores

$$\mathrm{B}\mathbb{Z}/2 \times \mathrm{B}\mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathrm{BPSL}(2,3) \longrightarrow \mathrm{B}\mathbb{Z}/3.$$

Como la fibra es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/2$-acíclica, tenemos una equivalencia $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/2}\mathrm{BPSL}(2,3) \simeq \mathrm{B}\mathbb{Z}/3$. Para $p = 3$, $\mathrm{PSL}(2,3)$ está generado por elementos de orden tres, así que es igual a su $\mathbb{Z}/3$-radical, y por tanto $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/3}\mathrm{BPSL}(2,3) \simeq \mathrm{BPSL}(2,3)^{\wedge}_{2}$. Si $q \geq 5$, entonces $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}\mathrm{PSL}(2,q) = \mathrm{PSL}(2,q)$ para todo primo p que divida al orden de $\mathrm{PSL}(2,q)$, porque el grupo es simple. Así, por 3.1.6, la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de $\mathrm{BPSL}(2,q)$ tiene el tipo de homotopía de la $\mathbb{Z}[1/p]$-compleción de $\mathrm{BPSL}(2,q)$. Si consideramos ahora el caso no proyectivo, tenemos siempre la fibración

$$\mathrm{B}\mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathrm{BSL}(2,q) \longrightarrow \mathrm{BPSL}(2,q).$$

Como la base es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/2$-nula, se tiene $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/2}\mathrm{BPSL}(2,q) \simeq \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/2}\mathrm{BSL}(2,q)$, que es de nuevo simplemente conexo excepto para el caso patológico $q = 3$. Si $p \neq 2$ y divide al orden de $\mathrm{PSL}(2,q)$, como este grupo está generado por las transvecciones de orden p ([149],3.2.10) tenemos de nuevo que la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de su espacio clasificador es homotópicamente equivalente a su $\mathbb{Z}[1/p]$-compleción.

b) *Celularización.*

Consideramos de nuevo inicialmente el caso $q = 3$ correspondiente al grupo tetraedral.

Si $p = 2$, hemos dicho que el $\mathbb{Z}/2$-radical es el grupo de Klein $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, que es igual a su $\mathbb{Z}/2$-zócalo, porque está generado por elementos de orden dos. Como $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ es de hecho un 2-grupo, se deduce la equivalencia $\mathbf{CW}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/2}\mathrm{BPSL}(2,3) \simeq \mathrm{B}\mathbb{Z}/2 \times \mathrm{B}\mathbb{Z}/2$. Por otra parte, como $\mathrm{CW}_{\mathbb{Z}/2}\mathrm{SL}(2,3)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/2$, tenemos que $\mathbf{CW}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/2}\mathrm{BSL}(2,3) = \mathrm{B}\mathbb{Z}/2$.

Para el caso $p = 3$, recordemos que $\mathrm{PSL}(2,3)$ está generado por las transvecciones de orden tres, así que es igual a su $\mathbb{Z}/3$-zócalo. Es bien sabido que el multiplicador de Schur $H_2(\mathrm{PSL}(2,3))$ es $\mathbb{Z}/2$, y entonces, de acuerdo con 4.1.4 y 4.1.7, la $\mathbb{Z}/3$-celularización de $\mathrm{PSL}(2,3)$ está definida por una extensión central

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathrm{CW}_{\mathbb{Z}/3}\mathrm{PSL}(2,3) \longrightarrow \mathrm{PSL}(2,q) \longrightarrow 0.$$

Esta extensión no es trivial (por 4.2.3), y se sabe que la única extensión central no trivial de $\mathrm{PSL}(2,3)$ por $\mathbb{Z}/2$ es $\mathrm{SL}(2,3)$. Así, obtenemos que la $\mathbb{Z}/3$-celularización de $\mathrm{PSL}(2,3)$ es $\mathrm{SL}(2,3)$ y, en particular, este último grupo es $\mathbb{Z}/3$-celular, porque la celularización es un funtor idempotente.

Si $q \geq 5$, el grupo $\mathrm{PSL}(2,q)$ es perfecto, y su extensión central universal es precisamente

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathrm{SL}(2,q) \longrightarrow \mathrm{PSL}(2,q) \longrightarrow 0.$$

Por tanto, el multiplicador de Schur de $\mathrm{PSL}(2,q)$ es $\mathbb{Z}/2$, y por 4.1.7 este grupo es $\mathbb{Z}/2$-celular. Además, $\mathrm{SL}(2,q)$ es el grupo recubridor universal de sí mismo, y en particular $H_2(\mathrm{SL}(2,q)) = 0$, de modo que el corolario 4.2.2 implica que es $\mathbb{Z}/2$-celular. Para p impar, el mismo corolario demuestra que si p divide al orden de $\mathrm{PSL}(2,3)$, la $\mathbb{Z}/p$-celularización de $\mathrm{PSL}(2,q)$ es $\mathrm{SL}(2,q)$ y este último grupo es $\mathbb{Z}/p$-celular.

Para concluir, observamos que ni $\mathrm{SL}(2,q)$ ni $\mathrm{PSL}(2,q)$ son p-grupos para primos $p \geq 2$ y $q > 2$; por lo tanto, sus espacios clasificadores no pueden ser $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celulares. Es interesante apuntar también que $\mathrm{BSL}(2,q)$ no puede ser la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celularización de $\mathrm{BPSL}(2,q)$, ni siquiera en el caso p impar, en el que ya sabemos que $\mathrm{SL}(2,q)$ es la $\mathbb{Z}/p$-celularización de $\mathrm{PSL}(2,q)$.

5.3. Grupos simétricos y alternados

En esta sección nos ocuparemos de los grupos de permutaciones S_n y los grupos alternados A_n, los subgrupos de permutaciones de signatura par de S_n.

a) *Anulación.*

El grupo simétrico de n-letras ($n \geq 2$) admite la siguiente presentación:

$$S_n = \{X_1, \ldots, X_{n-1}; X^i = 1, X_i X_{i+1} X_i = X_{i+1} X_i X_{i+1}, X_i X_{i+j} X_i = X_{i+j} \text{ for } j \geq 2\}.$$

Esto muestra que el grupo S_n está generado por elementos de orden dos, y en particular es igual a su $\mathbb{Z}/2$-radical. Por tanto, su $\mathrm{B}\mathbb{Z}/2$-anulación tiene el tipo de homotopía de su $\mathbb{Z}[1/2]$-compleción. Si p es impar, podemos considerar la fibración definida por la inclusión del correspondiente grupo alternado:

$$\mathrm{B}A_n \longrightarrow \mathrm{B}S_n \longrightarrow \mathrm{B}\mathbb{Z}/2.$$

Como la base es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-nula para p impar, la fibración es preservada por la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación. Si $n = 3$, $A_3 = \mathbb{Z}/3$, y entonces $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/3}\mathrm{B}S_3 \simeq \mathrm{B}\mathbb{Z}/2$. En el caso $n \geq 4$, A_n está siempre generado por elementos de orden p: si $n = 4$, se sabe que $A_4 = \mathrm{PSL}(2,3)$, que ya hemos visto que está generado por las 3-transvecciones; si $n > 4$, A_n es simple y entonces el $\mathbb{Z}/p$-radical, que es normal, es todo el grupo. Así, todas estas consideraciones demuestran que para $n \geq 4$ y p impar, $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}A_n$ tiene el tipo de homotopía de $\mathbb{Z}[1/p]_\infty \mathrm{B}A_n$. En particular, la fibración que define la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de $\mathrm{B}S_n$ toma la forma

$$\mathbb{Z}[1/p]_\infty \mathrm{B}A_n \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}S_n \longrightarrow \mathrm{B}\mathbb{Z}/2$$

y vuelve a ser una fibración recubridora, porque $\mathbb{Z}[1/p]_\infty \mathrm{B}A_n$ es simplemente conexo.

Los argumentos anteriores también prueban que $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/2}\mathrm{B}A_n \simeq \mathbb{Z}[1/2]_\infty \mathrm{B}A_n$ si $n \geq 5$. Si $n = 4$, hemos visto que el grupo alternado es isomorfo al grupo tetraedral, y este caso ya ha sido estudiado.

b) *Celularización.*

En ([152], 7.5) Rodríguez-Scherer construyen de forma efectiva S_n como colímite de copias de $\mathbb{Z}/2$, así que S_n es $\mathbb{Z}/2$-celular. Si p es impar, toda permutación de orden p es par, y esto significa que el $\mathbb{Z}/p$-zócalo de S_n

es un subgrupo de A_n, que es normal porque el zócalo siempre es un subgrupo característico; esto ya demuestra que $\mathrm{S}_{\mathbb{Z}/p}S_n = A_n$, y en particular $\mathrm{CW}_{\mathbb{Z}/3}S_4 = \mathrm{CW}_{\mathbb{Z}/3}A_4 = \mathrm{SL}(2,3)$. Ahora fijamos nuestra atención de nuevo en los grupos alternados A_n con $n \geq 5$. Se sabe ([9], 33.15) que el multiplicador de Schur de A_n es $\mathbb{Z}/2$ para todo $n \neq 6, 7$, y $H_2(A_6) = H_2(A_7) = \mathbb{Z}/6$. Por tanto, si $p \geq 5$, el resultado 4.2.2 implica que la $\mathbb{Z}/p$-celularización de A_n es en este caso isomorfa a la extensión central universal de A_n. Si $p = 3$, de acuerdo con 4.2.3 la $\mathbb{Z}/3$-celularización viene dada por la única extensión no trivial de A_n por $\mathbb{Z}/2$ y si $p = 2$, A_n es $\mathbb{Z}/2$-celular para cada n diferente de 6 o 7; en este último caso patológico, 4.2.1 implica que la $\mathbb{Z}/2$-celularización de A_n para $n = 6, 7$ es la extensión de A_n por $\mathbb{Z}/3$ inducida por la extensión central universal correspondiente.

Como los órdenes de S_n y A_n son respectivamente $n!$ y $n!/2$, estos grupos no son nunca p-grupos para $n \geq 2$, y por tanto sus espacios clasificadores no pueden ser $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celulares.

5.4. p-grupos

Nos gustaría concluir describiendo el efecto de la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celularización sobre los espacios clasificadores de tres familias de p-grupos, concretamente los grupos cuaterniónicos, semidiédricos y los grupos $M_m(p)$.

Consideremos el grupo cuaterniónico $Q_{m+1} = \{H, K;\ H^{2^{m-1}} = K^2 = 1,\ HK = KH^{-1}\}$, con $m \geq 3$. Este grupo tiene orden 2^{m+1}, y el $\mathbb{Z}/2$-zócalo es el centro, que es el subgrupo generado por $H^{2^{m-1}}$. Este subgrupo es isomorfo a $\mathbb{Z}/2$, y por tanto $\mathbf{CW}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/2}\mathrm{B}Q_m \simeq \mathrm{B}\mathbb{Z}/2$ para todo m.

Sea ahora el grupo semidiédrico de orden 2^m, que admite una presentación $SD_m = \{X, Y;\ X^{2^{m-1}} = Y^2 = 1,\ YXY^{-1} = X^{-1+2^{m-2}}\}$. El $\mathbb{Z}/2$-zócalo de SD_m está generado por $X^{2^{m-2}}$ e Y, y es isomorfo a $D_{2^{m-2}}$. Por tanto, $\mathbf{CW}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/2}\mathrm{B}SD_m$ tiene el tipo de homotopía de $\mathrm{B}D_{2^{m-2}}$.

Finalmente, si $p = 2$ y $m > 3$, se define el grupo $M_m(p) = \{X, Y;\ X^{p^{m-1}} = Y^p = 1,\ YXY^{-1} = X^{1+p^{m-2}}\}$. El $\mathbb{Z}/p$-zócalo de $M_m(p)$ está generado por $X^{p^{m-2}}$ e Y y es isomorfo a $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$. Por consiguiente, la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celularización de $\mathrm{B}M_m(p)$ es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \times \mathrm{B}\mathbb{Z}/p$.

Estos últimos cálculos han sido muy sencillos, pero nos dan una expresión explícita de la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-celularización de una clase muy amplia de grupos, entre los que podemos citar las siguientes familias:

- Los p-grupos de orden p^m que contienen un subgrupo cíclico de orden p^{m-1}.
- Los p-grupos sin subgrupos normales abelianos cíclicos.
- Los grupos de orden p^3.

La demostración de estas últimas afirmaciones subyace en resultados de clasificación que pueden encontrarse, por ejemplo, en ([86], 5.4).

Capítulo 6

La aplicación natural $\mathbf{BG} \longrightarrow \mathbf{B}_{\mathcal{F}}\mathbf{G}$

Sea G un grupo discreto, $\mathcal{F}$ una familia de subgrupos de G que es cerrada por conjugación y subgrupos. Como primer paso en nuestra descripción de la relación estre los espacios clasificadores clásico y propio, estudiamos una aplicación canónica que siempre relaciona dichos espacios, expresamos su fibra homotópica como la extensión homotópica de Kan a izquierda de un cierto funtor, y dilucidamos hasta qué punto dicha fibra depende de los espacios clasificadores de los subgrupos de G que pertenecen a $\mathcal{F}$. Así, conseguimos en cierto modo "fracturar" la estructura homotópica de $\mathrm{B}G$ en dos partes: una correspondiente a la torsión, que se concentra en la fibra homotópica y que, como hemos dicho, somos capaces de describir con precisión, y otra "libre", representada por el espacio clasificador para G-fibrados propios.

6.1. La aplicación $\mathrm{B}G \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$

Consideramos pues modelos simpliciales de $\mathrm{E}G$ y $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$, que continuaremos llamando de este modo. Ambos son G-espacios, así que podemos realizar la construcción de Borel $\mathrm{E}G \times_G \mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$ con la estructura simplicial inducida. Ahora, sea p_1 la proyección

$$\mathrm{E}G \times_G \mathrm{E}_{\mathcal{F}}G \xrightarrow{p_1} \mathrm{E}G/G \simeq \mathrm{B}G.$$

La acción de G sobre $\mathrm{E}G$ es libre, de modo que la aplicación inducida a nivel de realizaciones es una fibración, y su fibra $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$ es contráctil. Por tanto,

p_1 es una equivalencia débil (en el sentido de [84], pág. 60), y $\mathrm{E}G \times_G \mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$ es un modelo para $\mathrm{B}G$.

Consideremos ahora la proyección sobre la segunda componente:

$$\mathrm{E}G \times_G \mathrm{E}_{\mathcal{F}}G \xrightarrow{p_2} \mathrm{E}_{\mathcal{F}}G/G \simeq \mathrm{B}_{\mathcal{F}}G.$$

Ya hemos visto que $\mathrm{E}G \times_G \mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$ y $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G/G \simeq \mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$ son modelos para $\mathrm{B}G$ y $\mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$ respectivamente, y esto posibilita que podamos pensar p_2 como una aplicación simplicial $\mathrm{B}G \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$, que llamaremos f de ahora en adelante. Tomando subdivisiones si fuera necesario, podemos utilizar los resultados de ([143], capítulo 4) y asumir que $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$ y su espacio cociente $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G/G$ poseen estructura de complejo simplicial; así en adelante denotaremos de la misma forma a estos complejos y a su realización geométrica en la categoría de espacios topológicos.

La acción de G sobre $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}G$ no es libre, así que la aplicación $|f|$ no es una fibración en general. Si $x \in \mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$, existe un único símplice σ tal que x pertenece al interior de σ, y la definición de la aplicación implica que $|f|^{-1}(x)$ tiene el tipo de homotopía de $|\mathrm{E}G| \times_G G/H_\sigma$, siendo H_σ el grupo de isotropía de la antiimagen por f del baricentro de σ. Por simplicidad, en lo que sigue llamaremos a este grupo "el grupo de isotropía de σ".

Ahora, $\mathrm{E}G \times_G G/H_\sigma$ es un modelo simplicial para $\mathrm{B}H_\sigma$, y por tanto todas las fibras de la aplicación $|f|$ tienen el tipo de homotopía de espacios clasificadores de grupos de $\mathcal{F}$. La cuestión de determinar precisamente hasta qué punto la fibra homotópica de f depende de estos espacios clasificadores motivó originalmente nuestro trabajo, y dedicamos el resto de este capítulo a contestarla. El primer paso será encontrar un modelo apropiado para la imagen inversa de cada símplice de $x \in \mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$.

Sea σ un n-símplice de $\mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$. Recordemos que la *categoría de símplices* de σ es la categoría $\mathbf{\Gamma}(\sigma)$ cuyos objetos son las caras de σ y cuyos morfismos son las aplicaciones cara. Definimos un funtor

$$F : \mathbf{\Gamma}(\sigma)^{op} \longrightarrow \mathbf{sSpaces}$$

que envía cada símplice τ en $\mathrm{E}G \times_G G/H_\tau$ y cada aplicación cara $\tau \leq \tau'$ en la aplicación

$$\mathrm{E}G \times_G G/H_{\tau'} \longrightarrow \mathrm{E}G \times_G G/H_\tau$$

inducida por la inclusión $H_{\tau'} \subseteq H_\tau$. Obsérvese que la realización de esta última es homotópicamente equivalente a la aplicación entre espacios clasificadores

$$\mathrm{B}H_{\tau'} \xrightarrow{\mathrm{B}i} \mathrm{B}H_{\tau},$$

siendo i la inclusión de grupos. El funtor F determina la antiimagen de cada símplice de $\mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$ del siguiente modo:

Lema 6.1.1. *Con la notación del párrafo previo,* $|f|^{-1}(\sigma) \simeq |\mathrm{hocolim}_{\mathbf{\Gamma}(\sigma)^{op}} F|$.

Demostración. Si x es un punto de $f^{-1}(\sigma)$, se tiene que $x \in |\mathrm{E}G| \times_G (int\ \tau \times G/H_\tau)$ para un único símplice $\tau \leq \sigma$. Utilizando esto no es difícil ver que

$$|f|^{-1}(\sigma) \simeq \bigcup_{\tau \leq \sigma} \mathrm{E}G \times_G (\tau \times G/H_\tau)/\sim$$

donde la relación de equivalencia denotada por $\sim$ se define del siguiente modo: si $\tau \leq \tau', \tau''$, se tiene que $(x, \tau', g_1 H_{\tau'}) \sim (x, \tau'', g_2 H_{\tau''})$ si y sólo si $p'([g_1 H_{\tau'}]) = p''([g_2 H_{\tau''}])$, donde p' y p'' son las correspondientes proyecciones $p' : G/H_{\tau'} \longrightarrow G/H_\tau$ y $p'' : G/H_{\tau''} \longrightarrow G/H_\tau$. Obsérvese que esta relación de equivalencia refleja la estructura simplicial de $f^{-1}(\sigma)$ (como subconjunto simplicial de $\mathrm{B}G$) tomando en cuenta la relaciones entre caras en $\mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$ y los grupos de isotropía de los símplices. Además, si τ es un símplice de $\mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$, tenemos una equivalencia de homotopía $|\mathrm{E}G| \times_G (\tau \times G/H_\tau) \simeq \tau \times \mathrm{B}H_\tau \simeq \Delta^n \times \mathrm{B}H_\tau$ relativa a τ, porque la acción es propia y por consiguiente intercambia los símplices.

Por otro lado, recordemos que por definición de colímite homotópico, para cada cadena de símplices (caras de σ, en este caso) $\tau_1 \leq \ldots \leq \tau_n$ aparece en el colímite homotópico una copia de $\Delta^n \times F(\tau_1)$, que es del tipo de homotopía (relativamente a Δ^n) de $\Delta^n \times \mathrm{B}H_{\tau_1}$. Ahora, de acuerdo con ([76], 4.15), la identificación

$$\partial\Delta^n \times \mathrm{B}H_{\tau_2} \longrightarrow \Delta^{n-1} \times \mathrm{B}H_{\tau_1}$$

viene dada por la aplicación que la inclusión $H_{\tau_2} \leq H_{\tau_1}$ induce a nivel de espacios clasificadores. Pero estas son precisamente las relaciones que definen la estructura simplicial del espacio cociente por la relación de equivalencia anterior, y esto significa que $|f|^{-1}(\sigma)$ y la realización de $\mathrm{hocolim}_{\mathbf{\Gamma}(\sigma)^{op}} F$ tienen el mismo tipo de homotopía.

□

Si extendemos el funtor F a la categoría de símplices de $\mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$, obtenemos la siguiente descomposición de $\mathrm{B}G$:

Proposición 6.1.2. *En las condiciones anteriores, existe una equivalencia débil*

$$\mathrm{B}G \simeq \mathrm{hocolim}_{\mathbf{\Gamma B_{\mathcal{F}}G}^{op}} F.$$

Demostración. Se prueba exactamente del mismo modo que el lema anterior. Dejamos los detalles al lector.

□

6.2. La extensión homotópica de Kan y la localización de Gabriel-Zisman

Para realizar la descomposición deseada de la fibra homotópica de $|f|$, necesitaremos algunas herramientas de teoría de categorías, como la extensión homotópica de Kan a izquierda de un funtor y la localización de Gabriel-Zisman. A continuación recordaremos brevemente sus definiciones.

En lo que sigue $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ serán categorías topológicas pequeñas. Sea un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Si d es un objeto de $\mathcal{D}$, definimos la *overcategory* $F \downarrow d$ como la categoría cuyos objetos son los pares (c, ϕ) tales que c es un objeto de $\mathcal{C}$ y $\phi : F(c) \to d$ es un morfismo en $\mathcal{D}$. Un morfismo entre dos pares (c, ϕ) y (c', ϕ') vendrá dado por una aplicación $\psi : c \to c'$ en $\mathcal{C}$ tal que $\phi(F(c)) = \phi' \circ F(\psi)(c')$. Del mismo modo, se define la *undercategory* $d \downarrow F$ como la categoría cuyos objetos son los pares (c, ϕ), donde c es de nuevo un objeto de $\mathcal{C}$ y ahora ϕ es un morfismo $\phi : d \to F(c)$, y cuyos morfismos $\psi : (c, \phi) \to (c', \phi')$ son las aplicaciones $\psi' : c \to c'$ tales que $F(\psi') \circ \phi = \phi'$.

Cuando $F \downarrow d$ sea contráctil para cada objeto d en $\mathcal{D}$ diremos que F es *cofinal a izquierda*, y cuando lo sea $d \downarrow F$ diremos que F es *cofinal a derecha*.

Nota 6.2.1. La overcategory y undercategory sobre un funtor son casos particulares de "categorías coma". Un estudio completo de las categorías coma en el marco más general de la teoría de categorías puede encontrarse en ([118], II.6).

Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. En su trabajo ([159]) sobre espacios clasificadores de categorías, Segal probó la existencia de un funtor inducido

$$L_F : \mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{Spaces}) \longrightarrow \mathbf{Fun}(\mathcal{D}, \mathbf{Spaces})$$

cuyo valor sobre cada $X : \mathcal{C} \to$ **Spaces** viene dado por una equivalencia $L_F(X)(d) \simeq \mathrm{hocolim}_{F\downarrow d} X \circ p$, donde p es el funtor proyección $p : F \downarrow d \to \mathcal{C}$. Al funtor $L_F(X)$ se le llama la *extensión homotópica de Kan a izquierda* de X a lo largo de F. Lógicamente, este funtor es la generalización al contexto homotópico del concepto categórico clásico de extensión de Kan, que puede encontrarse por ejemplo en [118].

La importancia de esta construcción proviene del siguiente resultado:

Teorema 6.2.2 (Teorema del pushdown homotópico). *Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $X : \mathcal{C} \to$ **Spaces** son funtores, entonces existe una equivalencia:*

$$\mathrm{hocolim}_{\mathcal{D}} L_F(X) \simeq \mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}} X.$$

Demostración. La prueba se lleva a cabo haciendo uso de la descripción de la extensión homotópica de Kan a izquierda como el espacio clasificador de una cierta categoría. Ver ([91],5.5). $\square$

Para concluir esta sección, recordamos la definición clásica de categoría de fracciones asociada a una categoría $\mathcal{C}$. Este concepto apareció a finales de los 60 en el trabajo ([82]), en el cual Gabriel-Zisman proporcionan una construcción de la categoría homotópica de conjuntos semisimpliciales utilizando esencialmente métodos categóricos. Nótese la semejanza de la definición con los conceptos de localización homotópica que hemos recordado en los preliminares.

Teorema 6.2.3. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría, existe otra categoría $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ y un funtor $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{C})$ tales que las siguientes condiciones se cumplen:*

- *$\mathcal{L}$ invierte los morfismos de $\mathcal{C}$.*
- *Si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es otro funtor que invierte los morfismos de $\mathcal{C}$, existe un funtor $F' : \mathcal{L}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{D}$, que es único, tal que $F' \circ \mathcal{L} = F$.*

A $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ se la denomina la categoría de fracciones de $\mathcal{C}$ o simplemente la localización de $\mathcal{C}$.

Demostración. Ver ([82], capítulo 1).

$\square$

En el problema en el que estamos interesados, $\mathbf{\Gamma B}_{\mathcal{F}}\mathbf{G}^{op}$ desempeñará el papel de $\mathcal{C}$, y $\mathcal{D}$ será la localización de $\mathbf{\Gamma B}_{\mathcal{F}}\mathbf{G}^{op}$.

6.3. Descomposición de la fibra homotópica

Ya hemos desarrollado todos los ingredientes que necesitábamos, y podemos dar nuestra descomposición, que está basada en el concepto de "balance homotópico", definido por Dror-Farjoun (ver [69], capítulo 9) dentro de su estudio de las desigualdades celulares (que ya comentamos en los preliminares).

Consideremos la aplicación $\mathrm{B}G \to \mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$ definida más arriba. De acuerdo con 6.1.2, tenemos que $\mathrm{hocolim}_{\mathbf{\Gamma B_{\mathcal{F}}G}^{op}} F$ es un modelo simplicial para $\mathrm{B}G$, donde F es el funtor

$$F : \mathbf{\Gamma B_{\mathcal{F}}G}^{op} \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

ya descrito. Ahora, si $\mathcal{L}$ el funtor de localización que acabamos de describir, podemos considerar la extensión homotópica de Kan a izquierda $L_{\mathcal{L}}(F)$. El teorema de pushdown homotópico 6.2.2 implica que se tiene una equivalencia

$$\mathrm{hocolim}_{\mathcal{L}(\mathbf{\Gamma B_{\mathcal{F}}G}^{op})} L_{\mathcal{L}}(F) \simeq \mathrm{hocolim}_{\mathbf{\Gamma}\mathrm{B}_{\mathcal{F}}\mathbf{G}^{op}} F.$$

Así, uniendo todos estos datos obtenemos una cadena de aplicaciones

$$\mathrm{hocolim}_{\mathcal{L}(\mathbf{\Gamma B_{\mathcal{F}}G}^{op})} L_{\mathcal{L}}(F) \simeq \mathrm{hocolim}_{\mathbf{\Gamma B_{\mathcal{F}}G}^{op}} F \simeq \mathrm{B}G \xrightarrow{f} \mathrm{B}_{\mathcal{F}}G.$$

Pero si σ es un n-símplice en $\mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$, es claro que su imagen inversa (en el sentido preciso descrito más arriba) por esa cadena de aplicaciones es $L_{\mathcal{L}}F(\sigma)$, de modo que podemos establecer lo siguiente:

Teorema 6.3.1. *Si $|f| : |\mathrm{B}G| \to \mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$ es la realización de la aplicación anterior, existe una equivalencia homotópica*

$$\mathbf{Fib}|f| \simeq |L_{\mathcal{L}}F(\sigma)|$$

para todo símplice σ de $\mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$. Aquí $\mathbf{Fib}|f|$ designa la fibra homotópica de $|f|$.

Demostración. Es suficiente comprobar que el tipo de homotopía de la realización de $L_{\mathcal{L}}F(\sigma)$ no depende del símplice σ de $\mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$. Sabemos, por la construcción de la extensión de Kan, que $L_{\mathcal{L}}F(\sigma) = \mathrm{hocolim}_{\mathcal{L}\downarrow\sigma}(F \circ p)$, donde p es el funtor proyección $p : \mathcal{L} \downarrow \sigma \to \mathcal{C}$. Así, si σ y σ' son dos símplices diferentes de $\mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$, será suficiente ver que las overcategories $\mathcal{L} \downarrow \sigma$ y $\mathcal{L} \downarrow \sigma'$ son equivalentes. Para demostrar esto, sea $g : \sigma \to \sigma'$ un morfismo en $\mathcal{L}(\mathbf{\Gamma B}_{\mathcal{F}}\mathbf{G}^{op})$, que siempre existe porque $\mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$ es conexo. Se tiene que g induce una transformación natural

$$\mathbf{T}_g : \mathcal{L} \downarrow \sigma \longrightarrow \mathcal{L} \downarrow \sigma'$$

que envía cada objeto (τ, ϕ) de $\mathcal{L} \downarrow \sigma$ a $(\tau, g \circ \phi) \in \mathcal{L} \downarrow \sigma'$ y los morfismos a sus imágenes obvias. Pero el morfismo g es invertible (porque es un morfismo en la categoría localizada) y claramente las transformaciones naturales $\mathbf{T}_g$ y $\mathbf{T}_{g^{-1}}$ son inversas una de otra. En otras palabras, las dos categorías son equivalentes, y los correspondientes colímites homotópicos poseen el mismo tipo de homotopía, como queríamos ver.

□

Nota 6.3.2. Es de hecho posible demostrar que las dos overcategories que aparecen en la prueba del teorema anterior son contráctiles. Daremos esta prueba en el apéndice, porque pensamos que esta cuestión puede tener interés independiente.

Corolario 6.3.3. *La fibra homotópica* $\mathbf{Fib}|f|$ *posee el tipo de homotopía de* $\mathrm{hocolim}_{\mathcal{L}\downarrow\sigma}(F \circ p)$, *y en particular es un colímite homotópico de espacios clasificadores de grupos de* $\mathcal{F}$ *sobre una categoría contráctil.*

Demostración. Es consecuencia de A.0.1 y de la definición de extensión homotópica de Kan que hemos visto en la sección anterior.

□

En particular si G es tal que $\mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$ es contráctil, $\mathrm{hocolim}_{\mathcal{L}\downarrow\sigma}(F \circ p)$ da una descomposición homotópica en el sentido de Dwyer ([73]) de $\mathrm{B}G$.

Capítulo 7

El tipo de homotopía de $\underline{\mathrm{B}}$G

En el capítulo anterior describimos con precisión en qué sentido (más o menos restringido) puede construirse la fibra homotópica de $|f|$ utilizando como piezas espacios clasificadores de grupos de la familia $\mathcal{F}$. Este hecho nos hizo intuir que la aplicación $|f|$ podía codificar una manera funtorial de pasar del espacio clasificador de G al espacio clasificador para G-fibrados propios, y lo que es más importante, que se podría obtener valiosa información sobre el segundo a partir de la estructura homotópica del primero. Más concretamente, estábamos buscando un funtor F que cumpliera las siguientes condiciones:

1. Que F "matara" a la fibra homotópica de $|f|$.

2. Que $F(|f|)$ fuera una equivalencia débil.

3. Que $F(\underline{\mathrm{B}}G) \simeq \underline{\mathrm{B}}G$.

Las dos primeras condiciones daban la impresión de que F debía ser un funtor de localización en el sentido de Dror-Farjoun, y de hecho, el funtor que hemos encontrado es la anulación con respecto a un cierto espacio A.

Desde ahora en adelante (y a menos que haya mención explícita en contra) particularizaremos para el caso en que $\mathcal{F}$ es la familia de *todos* los subgrupos finitos de G, aunque una gran parte de los resultados obtenidos siguen siendo válidos para cualquier subfamilia de $\mathcal{F}$ cerrada por conjugación y subgrupos.

7.1. El teorema principal

En esta sección probaremos el que es probablemente el resultado más destacado de esta Memoria, y sin duda el eje alrededor del cual gira la segunda parte de la misma. En cada una de las dos pruebas que ofrecemos puede apreciarse con claridad la manera en que el funtor de anulación aprovecha las propiedades geométricas de $\underline{\mathrm{B}}G$ (en particular las condiciones de finitud) para arrojar luz de modo natural sobre su estructura homotópica. De hecho, ésta es a grandes rasgos la filosofía del estudio que se lleva a cabo en este trabajo del espacio clasificador para G-fibrados propios, aunque también es importante destacar que el puente establecido entre teoría de homotopía y acciones propias puede recorrerse en sentido inverso. Las ventajas de este último planteamiento se aprecian, en particular, en el último capítulo.

Comenzamos con una sencilla y a la vez importante consecuencia de 3.1.6, que es a su vez una generalización de un resultado que aparece en ([35], pág. 18)

Consideramos el conjunto de todos los números primos $\{p_1, p_2, p_3 \dots\}$ con el orden habitual, y sea X un espacio. En el resto de la Memoria denotaremos por W_n al espacio $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p_1 \vee \dots \vee \mathrm{B}\mathbb{Z}/p_n$, y por W al wedge $\bigvee \mathrm{B}\mathbb{Z}/p$ extendido sobre todos los números primos. El siguiente lema ofrece una razón fundamental de que la W-anulación es el funtor que necesitamos.

Lema 7.1.1. *Si G es un grupo finito, se tiene que $\mathbf{P}_W\mathrm{B}G$ es contráctil.*

Demostración. Un punto es siempre nulo, así que sólo tenemos que demostrar que $\mathrm{map}_*(\mathbf{P}_W\mathrm{B}G, X)$ es contráctil para todo espacio W-nulo X. Los espacios W-nulos son, en particular, W_n-nulos para todo natural n; por consiguiente,

$$\mathrm{map}_*(\mathbf{P}_W\mathrm{B}G, X) \simeq \mathrm{map}_*(\mathrm{B}G, X) \simeq \mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{W_n}\mathrm{B}G, X)$$

para todo n. Ahora, supongamos que $|G| = p_{j_1}^{n_1} p_{j_2}^{n_2} \dots p_{j_m}^{n_m}$, con $j_1 < \dots < j_m$. El resultado 3.1.6 implica que $\mathbf{P}_{W_k}\mathrm{B}G$ es contráctil para todo $k \geq j_m$, y esto a su vez ya implica que

$$\mathrm{map}_*(\mathbf{P}_W\mathrm{B}G, X) \simeq \mathrm{map}_*(\mathbf{P}_{W_n}\mathrm{B}G, X) \simeq *$$

como queríamos ver. □

Ahora supongamos que G es un grupo discreto tal que existe un modelo de dimensión finita o finitamente dominado para $\underline{\mathrm{B}}G$. Ya podemos establecer el teorema principal:

Teorema 7.1.2. *Con la notación anterior, se tiene que* $\underline{\mathrm{B}}G$ *tiene el tipo de homotopía de* $\mathbf{P}_W\mathrm{B}G$.

Demostración. Consideremos el modelo simplicial de $\underline{\mathrm{E}}G$ dado en 2.2.7 como el nervio de la construcción de Grothendieck de un cierto funtor

$$R : \mathbf{O}_{\mathcal{F}}G \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

ya descrito allí. Si tenemos en cuenta la acción de G sobre $\mathbf{Gr}\ R$ vía funtores, el nervio de la categoría cociente $(\mathbf{Gr}\ R)/G$ es por definición un modelo simplicial para $\underline{\mathrm{B}}G$. No es difícil ver que los objetos de $(\mathbf{Gr}\ R)/G$ son los espacios homogéneos G/H, con $H < G$ finito, y los morfismos son las aplicaciones G-equivariantes, así que esta categoría cociente se identifica de modo natural con la categoría de órbitas $\mathbf{O}_{\mathcal{F}}G$, y en particular $\mathrm{N}(\mathbf{O}_{\mathcal{F}}G)$ es un modelo para $\underline{\mathrm{B}}G$.

Sabemos que $\mathrm{E}G \times_G \underline{\mathrm{E}}G$ es un modelo para $\mathrm{B}G$, y usando 2.2.6 obtenemos

$$\mathrm{E}G \times_G \underline{\mathrm{E}}G \simeq \mathrm{E}G \times_G (\mathrm{hocolim}_{\mathbf{O}_{\mathcal{F}}G} R) \simeq \mathrm{hocolim}_{\mathbf{O}_{\mathcal{F}}G}(\mathrm{E}G \times_G R(-)),$$

donde la última equivalencia es una simple aplicación de ([76], 6.5). Ahora, si aplicamos el funtor de anulación $\mathbf{P}_W$ a la realización de la anterior cadena de equivalencias, obtenemos una equivalencia débil

$$\mathbf{P}_W\mathrm{B}G \simeq \mathbf{P}_W|\mathrm{hocolim}_{\mathbf{O}_{\mathcal{F}}G}(\mathrm{E}G \times_G R(-))|,$$

y lo último es equivalente, por ([69], 1.H.1), a

$$\mathbf{P}_W|\mathrm{hocolim}_{\mathbf{O}_{\mathcal{F}}G}\mathbf{P}_W(\mathrm{E}G \times_G R(-))|.$$

Obsérvese que los espacios que aparecen en la imagen del funtor

$$\mathrm{E}G \times_G \mathrm{N}(R(-)) : \mathbf{O}_{\mathcal{F}}G \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

tienen, después de realizar, el tipo de homotopía de espacios clasificadores de subgrupos finitos de G. Por tanto, si aplicamos la anterior proposición, tendremos que $\mathbf{P}_W \circ (\mathrm{E}G \times_G R(-))$ es equivalente al funtor constante, y entonces

$$\mathbf{P}_W\mathrm{B}G \simeq \mathbf{P}_W|\mathrm{hocolim}_{\mathbf{O}_{\mathcal{F}}G} *| \simeq \mathbf{P}_W|\mathrm{N}(\mathbf{O}_{\mathcal{F}}G)| \simeq \mathbf{P}_W(\underline{\mathrm{B}}G).$$

Ahora, por la solución de Miller a la conjetura de Sullivan ([127], 9.9), sabemos que el espacio $\mathrm{map}_*(W, \underline{\mathrm{B}}G)$ es contráctil, y por consiguiente $\underline{\mathrm{B}}G$ es W-nulo. Esto significa que $\mathbf{P}_W\underline{\mathrm{B}}G$ es homotópicamente equivalente a $\underline{\mathrm{B}}G$, y hemos terminado.

□

Otra posible demostración del teorema es como sigue: como la fibra de la aplicación natural $\mathrm{B}G \longrightarrow \underline{\mathrm{B}}G$ se descompone (ver corolario 6.3.3) como $\mathbf{Fib}|f| \simeq \mathrm{hocolim}_{\mathcal{L}\downarrow\sigma}(F \circ p)$, no es difícil probar que es W-acíclica, ya que los valores de $F \circ p$ tienen el tipo de homotopía de espacios clasificadores de subgrupos finitos de G y $\mathcal{L} \downarrow \sigma$ es contráctil (A.0.1). Así, basta aplicar ahora el resultado 1.1.6 a la aplicación $|f|$ para obtener el resultado deseado.

Corolario 7.1.3. *Si G es un grupo discreto, los espacios clasificadores* $\mathrm{B}G$ *y* $\underline{\mathrm{B}}G$ *son W-periódicamente equivalentes, y la realización de la aplicación f que fue descrita en el capítulo anterior es, de hecho, homotópica a la W-anulación si G admite un modelo finito-dimensional o finitamente dominado para* $\underline{\mathrm{B}}G$.

Demostración. El hecho de que $\mathrm{B}G$ y $\underline{\mathrm{B}}G$ son W-periódicamente equivalentes está implícito en la demostración del teorema anterior. En cuanto al segundo enunciado, si tenemos la fibración

$$\mathbf{Fib}|f| \longrightarrow \mathrm{B}G \xrightarrow{|f|} \underline{\mathrm{B}}G$$

la base es W-nula, y por el teorema 1.1.6 la fibración se preserva por W-anulación. Ahora el resultado es una consecuencia sencilla de ([42], 14.2). $\square$

Nota 7.1.4. Las demostraciones anteriores prueban, en particular, que si $\mathcal{F}$ es una familia de subgrupos finitos de G cerrada por conjugación y subgrupos, y $\mathbf{P}_A$ es un funtor de anulación que trivializa los espacios clasificadores de los elementos de $\mathcal{F}$, se tiene que $\mathrm{B}G$ es A-equivalente a $\mathrm{B}_{\mathcal{F}}G$. De hecho, todas la propiedades del espacio clasificador para G-fibrados propios que se prueban en la siguiente sección se extienden, *mutatis mutandis* y con demostraciones análogas, a propiedades del espacio clasificador para cualquier familia $\mathcal{F}$. Para nosotros será también interesante el caso en que $\mathcal{F}$ sea la familia de p-grupos finitos de G y A sea el espacio clasificador de $\mathbb{Z}/p$.

Concluimos esta sección mostrando por medio de un ejemplo que la condición de que G sea *discreto* es esencial en el teorema 7.1.2.

Ejemplo 7.1.5. Consideremos la sucesión exacta de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Q} \longrightarrow 0,$$

y la correspondiente fibración de espacios clasificadores

$$\mathrm{B}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{B}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{B}(\mathbb{R}/\mathbb{Q}).$$

Se sabe que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es isomorfo a la suma directa de copias de grupos de Prüfer $\bigoplus \mathbb{Z}_{p_\infty}$, donde p recorre todos los primos, que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es isomorfo a S^1 y que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es libre de torsión. Así, se tiene que $\mathrm{B}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es W-acíclico, y $\mathrm{B}(\mathbb{R}/\mathbb{Q})$ es W-nulo; por tanto (1.1.6) la fibración se preserva por W-anulación, y se obtiene que $\mathbf{P}_W \mathrm{B}S^1 \simeq \mathrm{B}(\mathbb{R}/\mathbb{Q})$. Sin embargo, como S^1 es compacto, un modelo para $\underline{\mathrm{B}}S^1$ es un punto, y por tanto $\mathbf{P}_W \mathrm{B}S^1 \neq \underline{\mathrm{B}}S^1$.

Nótese por otra parte que, por la sucesión exacta de la fibración

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Q},$$

se tiene que $\pi_2(\mathrm{B}(\mathbb{R}/\mathbb{Q})) = \pi_2(\mathrm{B}S^1) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$, y $\pi_n(\mathrm{B}(\mathbb{R}/\mathbb{Q})) = \pi_n(\mathrm{B}S^1) = 0$ si $n \neq 2$. Estas igualdades, junto con el hecho de que para un grupo de Lie compacto y conexo se tiene ([72]) que $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G \simeq \mathbf{H}(\mathrm{B}G, \mathbb{Z}[1/p])$, y la razón "filosófica" de que la estructura racional de $\mathrm{B}G$ debe sobrevivir después de que la W-anulación aniquile la estructura p-primaria, hacen pensar que en el caso en que G es un grupo de Lie compacto la W-anulación de su espacio clasificador puede ser equivalente a su racionalización. Intentaremos probar esta conjetura en un trabajo posterior.

7.2. El tipo de homotopía de $\underline{\mathrm{B}}$G

En este epígrafe vamos a probar varias consecuencias que sobre el tipo de homotopía de $\underline{\mathrm{B}}G$ tiene el teorema principal 7.1.2. Esencialmente, la idea es utilizar las propiedades de los funtores de anulación que aparecen en los preliminares, para describir el antedicho espacio clasificador para G-fibrados propios. Supondremos hasta el final del capítulo que los grupos que aparecen cumplen las condiciones de finitud bajo las cuales se verifica el teorema mencionado (esta asunción será una constante durante el resto de la Memoria).

Comenzamos analizando el comportamiento del funtor $\underline{\mathrm{B}}$ respecto a productos.

Proposición 7.2.1. *Sean G_1 y G_2 dos grupos discretos. Se tiene:*

- *Un modelo para $\underline{\mathrm{B}}(G_1 \times G_2)$ viene dado por $\underline{\mathrm{B}}G_1 \times \underline{\mathrm{B}}G_2$.*
- *El wedge $\underline{\mathrm{B}}G_1 \vee \underline{\mathrm{B}}G_2$ es un modelo para $\underline{\mathrm{B}}(G_1 * G_2)$.*

Demostración. Es conocido que $\mathrm{B}(G_1 \times G_2) \simeq \mathrm{B}G_1 \times \mathrm{B}G_2$. Utilizando el hecho de que $\underline{\mathrm{B}}G_1 \times \underline{\mathrm{B}}G_2$ es W-nulo (debido a la finitud) y la propiedad de preservación de productos de la W-anulación (ver 1.1.3), se obtiene que:

$$\underline{\mathrm{B}}(G_1 \times G_2) \simeq \mathbf{P}_W(\underline{\mathrm{B}}(G_1 \times G_2)) \simeq \mathbf{P}_W(\underline{\mathrm{B}}G_1) \times \mathbf{P}_W(\underline{\mathrm{B}}G_2) \simeq \underline{\mathrm{B}}G_1 \times \underline{\mathrm{B}}G_2.$$

La demostración del segundo resultado es similar, teniendo en cuenta el hecho de que $\mathrm{B}(G_1 * G_2) \simeq \mathrm{B}G_1 \vee \mathrm{B}G_2$ y que como el wedge es un colímite homotópico (punteado), se puede aplicar la propiedad correspondiente de 1.1.3. $\square$

Recuérdese que el primero de los dos enunciados anteriores se demostró en 2.2 por métodos más geométricos. Por otra parte, el segundo de ellos puede ser generalizado a otros colímites más generales, como telescopios y ciertos pushouts.

Proposición 7.2.2. *Sea $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de grupos discretos.*

- *Si tenemos el pushout de grupos*

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & G_2 \arrow[d] \\ G_3 \arrow[r] & G \end{tikzcd}$$

  de modo que α y β son inyectivas, se tiene que el pushout del diagrama inducido es un modelo para $\underline{\mathrm{B}}G$.

- *Si $G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow \ldots$ es un telescopio de monomorfismos de grupos tal que su colímite G cumple las condiciones de finitud de 7.1.2, se tiene que el colímite del telescopio inducido por $\underline{\mathrm{B}}$ es un modelo para $\mathrm{B}G$.*

Demostración. Para probar el primer enunciado, recordemos que por el teorema de Whitehead ([32], II.7.3) el pushout de los espacios clasificadores (clásicos) es el espacio clasificador de los pushouts. Como las inclusiones $\mathrm{B}G_1 \hookrightarrow \mathrm{B}G_2$ y $\mathrm{B}G_1 \hookrightarrow \mathrm{B}G_3$ pueden tomarse cofibraciones, $\mathrm{B}G$ tiene el tipo de homotopía del pushout homotópico. Si aplicamos el funtor $\mathbf{P}_W$ al diagrama, el resultado se deduce de 7.1.2 y 1.1.6 y del hecho de que existe un modelo con condiciones de finitud del pushout homotópico del diagrama inducido $\underline{\mathrm{B}}G_2 \longleftarrow \underline{\mathrm{B}}G_1 \longrightarrow \underline{\mathrm{B}}G_3$. El segundo enunciado se prueba de forma análoga utilizando la relación entre los funtores de localización y colímites (ver 1.1.3) y el hecho de que el colímite de un telescopio de cofibraciones es siempre del tipo de homotopía del colímite homotópico.

$\square$

Como consecuencia de que el teorema de Whitehead no es válido si las aplicaciones que aparecen en el diagrama no son inyectivas, no existe un resultado análogo al primer enunciado de la proposición anterior para pushouts en general, y por tanto tampoco para colímites homotópicos cualesquiera.

Recordemos que en ([108], proposición 3) se identifica para un grupo discreto cualquiera G el grupo fundamental de $\underline{\mathrm{B}}G$ como el cociente de G por el subgrupo (normal) que genera la torsión. Utilizando el teorema 7.1.2, podemos identificar en ciertos casos el recubridor universal de $\underline{\mathrm{B}}G$.

Proposición 7.2.3. *Sea G un grupo discreto que cumpla las condiciones de finitud de 7.1.2, de modo que el subgrupo $T < G$ generado por los elementos de torsión sea tal que G/T sea libre de torsión. Entonces el recubridor universal de $\underline{\mathrm{B}}G$ tiene el tipo de homotopía de la W-anulación de* $\mathrm{B}T$.

Demostración. Sabemos que el grupo T es normal en G, así que tenemos una fibración

$$\mathrm{B}T \longrightarrow \mathrm{B}G \longrightarrow \mathrm{B}(G/T).$$

Como G/T es libre de torsión, su espacio clasificador es W-nulo. Por tanto, la fibración anterior se preserva por W-anulación, y obtenemos otra:

$$\mathbf{P}_W\mathrm{B}T \longrightarrow \underline{\mathrm{B}}G \longrightarrow \mathrm{B}(G/T).$$

Nótese que como $T < G$, cualquier modelo para $\underline{\mathrm{E}}G$ es un modelo para $\underline{\mathrm{E}}T$, y T cumple las condiciones de finitud. Por consiguiente, $\underline{\mathrm{B}}T$ es un modelo para $\mathbf{P}_W\mathrm{B}T$, y en particular $\pi_1(\mathbf{P}_W\mathrm{B}T) = \pi_1(\underline{\mathrm{B}}T) = \{1\}$. Esto implica que $\mathbf{P}_W\mathrm{B}T$ es simplemente conexo, y hemos concluido.

□

La última consecuencia del teorema principal que vamos a probar aquí concierne a fibraciones, y tendrá gran importancia durante el resto del trabajo. Es un hecho bien conocido de teoría de homotopía elemental que si tenemos una extensión de grupos, la sucesión inducida a nivel de espacios clasificadores es una fibración. Utilizando la descripción de 7.1.2, hemos encontrado condiciones suficientes que garantizan que el resultado análogo para $\underline{\mathrm{B}}G$ es cierto. También mostramos por medio de un ejemplo que dicha analogía puede no verificarse si las hipótesis mencionadas no se cumplen.

Supondremos que todos los grupos que aparecen hasta el final de la sección admiten un modelo de dimensión finita o finitamente dominado para $\underline{\mathrm{B}}G$.

Sea, pues una sucesión exacta corta de grupos:

$$\{1\} \longrightarrow G_1 \longrightarrow G \longrightarrow G_2 \longrightarrow \{1\}.$$

Entonces se cumple lo siguiente:

Proposición 7.2.4. *Si G_2 es libre de torsión o G_1 admite un modelo contráctil para $\underline{\mathrm{B}}G_1$, la fibra homotópica de la aplicación inducida $\underline{\mathrm{B}}G \longrightarrow \underline{\mathrm{B}}G_2$ tiene el mismo tipo de homotopía que $\underline{\mathrm{B}}G_1$.*

Demostración. Es suficiente combinar el resultado de Dror-Farjoun (1.1.6) y nuestra descripción de $\underline{\mathrm{B}}G$ como anulación.

□

El siguiente ejemplo muestra que sin las condiciones de la proposición anterior el resultado puede no ser cierto.

Ejemplo 7.2.5. Consideremos el producto de grupos diédricos infinitos $D_\infty \times D_\infty$, con H el subgrupo de índice dos cuyos elementos son las palabras que se pueden escribir con un número par de letras en el sistema usual de generadores. Se tiene una extensión

$$H \longrightarrow D_\infty \times D_\infty \longrightarrow \mathbb{Z}/2$$

que induce una sucesión de aplicaciones

$$\underline{\mathrm{B}}H \longrightarrow \underline{\mathrm{B}}(D_\infty \times D_\infty) \longrightarrow \underline{\mathrm{B}}\mathbb{Z}/2.$$

No es difícil ver que $\mathbb{R}^2$ es un modelo para $\underline{\mathrm{E}}(D_\infty \times D_\infty)$, y que el cociente por la acción de $D_\infty \times D_\infty$ es un cuadrado, que es contráctil. Por 2.4.22, $\underline{\mathrm{B}}H$ tiene el tipo de homotopía de una esfera, y por otro lado, $\underline{\mathrm{B}}\mathbb{Z}/2$ es un punto porque $\mathbb{Z}/2$ es finito. Esto significa que la última sucesión descrita no puede ser una fibración. Por supuesto, ninguna de las condiciones de la proposición anterior se cumple en este caso.

Capítulo 8

Modelos homotópicos de $\underline{\mathrm{B}}$G para algunas familias de grupos discretos

En este capítulo utilizaremos el teorema 7.1.2 para describir el tipo de homotopía de $\underline{\mathrm{B}}G$ para una amplia familia de grupos, demostraremos que si G es nilpotente y admite un modelo finito-dimensional o finitamente dominado para $\underline{\mathrm{B}}G$ se tiene que $\underline{\mathrm{B}}G$ es nilpotente como espacio, y determinaremos también la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de los espacios clasificadores de ciertos grupos supersolubles. Comenzamos considerando la clase de los grupos localmente finitos.

8.1. Grupos localmente finitos

Se sabe que el espacio clasificador para G-fibrados propios de un grupo G es contráctil si el grupo es localmente finito. Empezamos esta sección dando una prueba sencilla de este hecho para una amplia clase de estos grupos.

Proposición 8.1.1. *Sea G un grupo discreto localmente finito que admite un modelo de dimensión finita o finitamente dominado para $\underline{\mathrm{B}}G$. Entonces, $\underline{\mathrm{B}}G$ es contráctil.*

Demostración. Se sabe (ver, por ejemplo, [127], 9.8) que todo grupo localmente finito es el colímite del sistema dirigido de sus subgrupos finitos ordenados por inclusión. Por tanto, tenemos una equivalencia homotópica

$\mathrm{B}G \simeq \mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}}\mathrm{B}H$, donde $\mathcal{C}$ es una categoría contráctil (porque el grupo trivial es un objeto inicial) y $\mathrm{B}H$ representa los espacios clasificadores de los subgrupos finitos $H < G$. Así, por ([69], 1.D.3), obtenemos

$$\mathbf{P}_W\mathrm{B}G \simeq \mathbf{P}_W(\mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}}\mathbf{P}_W\mathrm{B}H) = \mathbf{P}_W(|\mathcal{C}|) = \mathbf{P}_W(*) = *$$

con lo que hemos terminado. □

Nota 8.1.2. Por 2.4.17, esta proposición se aplica, en particular, a todos los grupos localmente finitos cuyo cardinal es menor que $\aleph_\omega$. .

A continuación demostraremos un resultado que concierne a los espacios clasificadores para G-fibrados propios de extensiones de grupos localmente finitos.

Proposición 8.1.3. *Sea*

$$\{1\} \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow \{1\}$$

una extensión de grupos; K un grupo localmente finito de cardinal menor que $\aleph_\omega$, y asumamos que el orden de los subgrupos finitos de Q está acotado. Entonces, si Q admite un modelo finito para $\underline{\mathrm{B}}Q$ y G admite un modelo finito $\underline{\mathrm{B}}G$, se tiene que $\underline{\mathrm{B}}Q$ es del mismo tipo de homotopía que $\underline{\mathrm{B}}G$.

Demostración. Si aplicamos los resultados 7.1.2 y 8.1.1, obtenemos que el enunciado es cierto si existe un modelo de dimensión finita para $\underline{\mathrm{B}}G$, y esto ocurre por (2.4.18).

□

8.2. Grupos que cumplen la condición del normalizador

En esta sección estudiaremos los grupos que cumplen la condición del normalizador, una clase de grupos cuya importancia proviene esencialmente de que contiene a todos los grupos virtualmente nilpotentes (y en particular a los nilpotentes). Recordemos que un grupo G verifica la *condición del normalizador* si cada subgrupo propio de G es distinto de su normalizador. En este caso se cumple lo siguiente:

Lema 8.2.1. *Sea G un grupo discreto. Se tiene:*

1. *Para cada primo p, existe un p-grupo normal T_p tal que si $x \in G$ y el orden de x es una potencia de p, entonces $x \in T_p$.*

2. *Los elementos de orden finito de G forman un subgrupo normal que es isomorfo a $\prod_{p \text{ primo}} T_p$.*

Demostración. Ver ([103], pág. 215).

□

Durante toda esta sección impondremos a los grupos que aparecen para los cuales la condición del normalizador se cumple que los p-subgrupos de torsión T_p que acabamos de definir sean localmente finitos. La necesidad de esta condición proviene de que no se sabe si la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación del espacio clasificador de un p-grupo cualquiera es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-acíclica (a menos que el grupo sea localmente finito, en cuyo caso es trivial por un argumento de paso al límite). Entre los pocos ejemplos que se han descrito de p-grupos no localmente finitos podemos destacar los grupos de Burnside $B(n, e)$ para $n > 1$ y $e > 664$ (ver [3]) y los "monstruos" de Tarski-Olshanskii ([137]).

Esto tiene la siguiente consecuencia interesante:

Proposición 8.2.2. *Si G es un grupo discreto para el cual se cumple la condición del normalizador y $\{p_1, \ldots, p_n\}$ es una colección de primos, existe una equivalencia homotópica $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p_1 \vee \ldots \vee \mathrm{B}\mathbb{Z}/p_n} \mathrm{B}G \simeq \mathrm{B}(G/T_{p_1} \times \ldots \times T_{p_n})$. En particular, tenemos una equivalencia débil $\mathbf{P}_W \mathrm{B}G \simeq \mathrm{B}(G/\prod_{p \text{ primo}} T_p)$.*

Demostración. Por simplicidad, solamente demostraremos el caso de un primo p (la generalización a una familia en inmediata). Es claro que $\mathrm{B}T_p$ es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-acíclico y $\mathrm{B}(G/T_p)$ es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-nulo, de modo que si $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulamos la fibración

$$\mathrm{B}T_p \longrightarrow \mathrm{B}G \longrightarrow \mathrm{B}(G/T_p)$$

obtenemos la equivalencia homotópica deseada.

□

Si suponemos que existe un modelo de dimensión finita o finitamente dominado para $\underline{\mathrm{B}}G$ obtenemos

Corolario 8.2.3. $\underline{\mathrm{B}}G \simeq \mathrm{B}(G/\prod_{p \text{ primo}} T_p)$.

De este modo tenemos una descripción completa del tipo de homotopía de $\underline{\mathrm{B}}G$.

Otro caso que puede resolverse con las mismas herramientas es el que se describe en la siguiente proposición:

Proposición 8.2.4. *Sea G un grupo discreto, H un subgrupo normal de G para el cual se verifica la condición del normalizador, y tal que G/H no tiene p-torsión. Si T_p es el subgrupo de p-torsión de H, se tiene que la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de $\mathrm{B}G$ es el espacio total de la siguiente fibración:*

$$\mathrm{B}(H/T_p) \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G \longrightarrow \mathrm{B}(G/H)$$

y por consiguiente es un espacio anesférico.

Demostración. La base de la fibración

$$\mathrm{B}H \longrightarrow \mathrm{B}G \longrightarrow \mathrm{B}(G/H)$$

es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-nula, así que por 1.1.6 la fibra se preserva por $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación. El resultado se deduce ahora de 8.2.2.

$\square$

Tomando en cuenta el teorema principal 7.1.2, el siguiente corolario es inmediato:

Corolario 8.2.5. *En las hipótesis de la proposición previa, si G/H es libre de torsión y T es el subgrupo de torsión de H, se tiene que la fibración*

$$\mathrm{B}(H/T) \longrightarrow \underline{\mathrm{B}}G \longrightarrow \mathrm{B}(G/H)$$

define el espacio clasificador para G-fibrados propios, que vuelve a ser un espacio anesférico.

Concluimos esta sección centrándonos en grupos nilpotentes, que es una clase distinguida de grupos discretos para los cuales se verifica la condición del normalizador (de hecho, se verifica para cualquier grupo localmente nilpotente). El siguiente resultado demuestra que la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación preserva nilpotencia cuando se aplica sobre espacios clasificadores de grupo nilpotentes, y de hecho, el funtor $\underline{\mathrm{B}}$ envía grupos nilpotentes (que cumplan las condiciones de finitud usuales) a espacios nilpotentes.

Corolario 8.2.6. *Si G es es un grupo nilpotente, el espacio $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p_1\vee\ldots\vee\mathrm{B}\mathbb{Z}/p_n}\mathrm{B}G$ es el espacio clasificador de un grupo nilpotente para cualquier familia (no necesariamente finita) de primos $\{p_1, p_2 \ldots\}$ Si además G admite un modelo de dimensión finita o finitamente dominado para $\underline{\mathrm{B}}G$, entonces se tiene que $\underline{\mathrm{B}}G$ es de nuevo el espacio clasificador de un grupo nilpotente, y por lo tanto nilpotente como espacio.*

Demostración. Utilizando los resultado anteriores, basta tener en cuenta que el cociente de un grupo nilpotente es siempre nilpotente, y que de acuerdo con ([137], 2.7.1), todo p-grupo nilpotente es localmente finito.

□

En particular, usando 2.4.19, obtenemos que la parte del corolario anterior que alude a $\underline{\mathrm{B}}G$ es cierta si G es un grupo nilpotente cuyo cardinal es menor que $\aleph_\omega$ y cuyo rango libre de torsión (número de Hirsch) es finito.

8.3. Grupos supersolubles

En esta sección calcularemos, para p impar, la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de espacios clasificadores de grupos supersolubles. En este caso no obtenemos ningún resultado sobre el tipo de homotopía de $\underline{\mathrm{B}}G$ (por razones que serán explicadas un poco más adelante) pero incluimos aquí este cálculo por su interés intrínseco, y porque ha sido llevado a cabo con herramientas similares a las utilizadas para obtener la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación en las secciones anteriores.

Recordemos que un grupo G se dice *supersoluble* si posee series normales cíclicas de longitud finita. Se sabe que todo grupo nilpotente finitamente generado es supersoluble, y que todo grupo supersoluble es policíclico.

Nuestro resultado clave para calcular $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G$ es el siguiente ([148], pág. 67):

Proposición 8.3.1. *Si G es un grupo supersoluble, existen una serie característica $1 \trianglelefteq L \trianglelefteq M \trianglelefteq G$ tal que L es finito de orden impar, M/L es un grupo nilpotente libre de torsión finitamente generado, y G/M es un 2-grupo finito.*

En lo sucesivo utilizaremos la notación de la anterior proposición. Sea p un primo impar, y consideremos la fibración

$$\mathrm{B}L \longrightarrow \mathrm{B}M \longrightarrow \mathrm{B}(M/L).$$

Como M/L es libre de torsión, su espacio clasificador es automáticamente $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-nulo, y entonces por 1.1.6 tenemos la fibración anulada:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}L \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}M \longrightarrow \mathrm{B}(M/L).$$

Por (7.1.2), el grupo fundamental de $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}M$ viene identificado por una extensión

$$L/\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}L \longrightarrow \pi_1\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}M \longrightarrow M/L$$

donde $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}L$ es el $\mathbb{Z}/p$-radical de L, y el recubridor universal de $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}M$ tiene el tipo de homotopía de $\mathbb{Z}[1/p]_\infty(\mathrm{B}\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}L)$.

Aparte, tenemos la fibración que implica a M y a G:

$$\mathrm{B}M \longrightarrow \mathrm{B}G \longrightarrow \mathrm{B}(G/M).$$

Esta fibración también es preservada por $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación, porque G/M es un 2-grupo y p es impar. La sucesión exacta larga de la fibración $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulada prueba que el grupo fundamental de $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G$ viene definido por la siguiente sucesión exacta corta:

$$\pi_1\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}M \longrightarrow \pi_1\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G \longrightarrow G/M$$

cuyo núcleo ya ha sido descrito. Por otro lado, el recubridor universal de $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}G$ es el mismo que el recubridor universal de $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}\mathrm{B}M$, que es el espacio $\mathbb{Z}[1/p]_\infty\mathrm{B}\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p}L$, como vimos anteriormente. Así, hemos descrito la anulación deseada por medio de una fibración recubridora. Por otro lado, el hecho de que el espacio clasificador del cociente G/M no sea $\mathrm{B}\mathbb{Z}/2$-nulo hace que este método no sirva para calcular la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/2$-anulación de $\mathrm{B}G$. Como consecuencia, $\mathrm{B}(G/M)$ no es W-nulo (en la notación de 7.1.2) y no sabemos obtener ninguna descripción homotópica de $\underline{\mathrm{B}}G$ de este modo.

Capítulo 9

B$\mathbb{Z}/p$-anulación de espacios clasificadores vía acciones propias

Hasta ahora hemos utilizado el teorema 7.1.2 para obtener resultados sobre $\underline{\mathrm{B}}G$ usando propiedades de los funtores de anulación. En este capítulo mostraremos que también es posible recorrer el camino inverso, utilizando propiedades geométricas del grupo G para obtener resultados topológicos sobre su espacio clasificador.

9.1. Grupos de isometrías del plano

Nuestro análisis se ha centrado en los grupos cristalográficos del plano, también conocidos como wallpaper groups. Recordemos que estos son grupos de isometrías de $\mathbb{R}^2$ que dejan fijo un modelo que es invariante por traslaciones en las direcciones de dos vectores linealmente independientes. Se sabe que hay exactamente diecisiete de estos grupos, y que son siempre extensiones de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ por un grupo finito.

La aproximación mas detallada que conocemos a las propiedades elementales de estos grupos es el articulo de Schattsneider ([155]), que ha sido especialmente interesante para nosotros por los detallados dibujos de los dominios fundamentales, ejes de reflexión, centros de rotación, regiones generatrices, etc. que pueden encontrarse en él. Además contiene una discusión de las implicaciones artísticas de este estudio (por ejemplo, a las pinturas de Escher) y varias teselaciones del plano construidas a partir de estos grupos; otras teselaciones pueden encontrarse en las páginas web [112] y [110]. Conway ([53]) ofrece una interesante discusión desde un punto de vista geométrico y propone la notación de orbifolds, aunque nosotros hemos preferido la mas común adoptada por la Unión Internacional de Cristalografía en 1952. No pretendemos llevar a cabo un estudio exhaustivo de este tema, así que remitimos al lector a estos textos de referencia sobre los detalles que en lo sucesivo queden sin prueba explícita.

Nuestro interés se centra especialmente en el estudio de la parte p-primaria de los espacios clasificadores de estos grupos a través del funtor de $B\mathbb{Z}/p$-anulación. Para ello, utilizaremos frecuentemente el siguiente resultado, que prueba que los cocientes de $\mathbb{R}^2$ bajo la acción de los wallpaper groups son, de hecho, modelos de $\underline{B}G$. Aunque este resultado es conocido ([116], sección 4), damos aquí una demostración sencilla del caso particular que nos interesa:

Lema 9.1.1. *Sea G uno de los diecisiete wallpaper groups. Entonces $\mathbb{R}^2$, considerado como G-espacio bajo la acción natural de G, es un modelo para $\underline{E}G$.*

Demostración. Es fácil ver que la acción de G sobre $\mathbb{R}^2$ dota al plano de estructura de G-CW-complejo, así que debemos comenzar demostrando que para todo $x \in \mathbb{R}^2$, el grupo de isotropía G_x es finito. Por la estructura de los wallpaper groups, los únicos puntos de $\mathbb{R}^2$ con isotropía no trivial son los centros de rotación o los ejes de reflexión; como las rotaciones son elementos de orden finito y las reflexiones son elementos de orden 2, los grupos de isotropía G_x son siempre finitos. Por otra parte, los subgrupos finitos de los wallpaper groups son rotaciones, que fijan el centro de rotación, y reflexiones, que fijan el eje de reflexión. Pero los puntos y las líneas rectas son contráctiles, así que por 2.2.1 ya hemos probado que el plano es un modelo para $\underline{E}G$.

□

La principal propiedad que vamos a utilizar de los wallpaper groups es que existe un modelo bien conocido del espacio de órbitas $\mathbb{R}^2/G$ para todos ellos, que de hecho se describe siempre como un orbifold de dimensión finita. Listas de estos modelos standard pueden encontrarse en las páginas web citadas más arriba. De acuerdo con el lema anterior, pueden interpretarse como modelos para $\underline{B}G$, y utilizando esto aplicamos 7.1.2 para obtener el valor de la $B\mathbb{Z}/p$-anulación del espacio clasificador de G. Sólo unos pocos casos quedan sin poder ser dilucidados, por razones que se explican en su lugar.

9.2. $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-anulación de espacios clasificadores de wallpaper groups

En lo que sigue denotaremos por $\mathrm{B}_{\mathcal{F}_{p_1\cdots p_n}}$ al espacio clasificador para G-fibrados propios respecto a la familia de subgrupos finitos de G cuyo orden es de la forma ${p_1}^{j_1}{p_2}^{j_2}\ldots{p_n}^{j_n}$, con $j_k \geq 0$ para todo $k \leq n$. Esta familia es claramente cerrada por conjugación y subgrupos. Si el grupo G posee solamente torsión en los primos $p_1 \ldots p_n$, es fácil deducir de la definición que cualquier modelo para $\underline{\mathrm{B}}G$ es un modelo para $\mathrm{B}_{\mathcal{F}_{p_1\cdots p_n}}$ y viceversa. Por tanto, si G admite además un modelo para $\underline{\mathrm{B}}G$ de dimensión finita, tendremos (7.1.4) que $\underline{\mathrm{B}}G = \mathrm{B}_{\mathcal{F}_{p_1\cdots p_n}}G \simeq \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p_1\vee\ldots\vee\mathrm{B}\mathbb{Z}/p_n}\mathrm{B}G$. Estas propiedades serán utilizadas constantemente en el resto de la sección.

En el hermoso libro de Coxeter-Moser ([54]) son descritas con sumo detalle numerosas presentaciones de estos grupos, aunque las que aparecen en lo sucesivo han sido tomadas esencialmente del artículo [60]. La razón de esta elección es que en estas últimas se diferencian claramente los generadores que son traslaciones de los que no lo son.

Comenzamos ya nuestro análisis:

1. **El grupo monotrópico p1**=$\{X, Y; XYX^{-1}Y^{-1} = 1\}$.

Este es el caso más sencillo, porque este grupo es isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y es libre de torsión. Por tanto, su espacio clasificador, que tiene el tipo de homotopía del toro $S^1 \times S^1$, es homotópicamente equivalente a $\underline{\mathrm{B}}\mathbf{p1}$, y por tanto $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-nulo para todo primo p.

2. **El grupo ditrópico p2**=$\{X, Y, Z; XYX^{-1}Y^{-1} = 1, Z^2 = 1, ZXZX = 1, ZYZY = 1\}$.

Este grupo posee 2-torsión, porque está generado por las dos traslaciones usuales y una rotación de ángulo π. En este caso el cociente $\mathbb{R}^2/\mathbf{p2}$ es una "funda de almohada cerrada", que posee el tipo de homotopía de una 2-esfera. Como **p2** no tiene torsión en ningún otro primo, tenemos que $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/2}\mathrm{B}\mathbf{p2} = \mathrm{B}_{\mathcal{F}_2}\mathbf{p2} \simeq S^2$.

3. **El grupo monoscópico pm**$=\{X,Y,Z; XYX^{-1}Y^{-1}=1, Z^2=1, ZXZX^{-1}=1, ZYZY=1\}$.
Este grupo tiene de nuevo solamente torsión en el primo dos, porque un sistema de generadores está constituido por dos traslaciones y una reflexión. Una región fundamental es un rectángulo, y un modelo para $\underline{\mathrm{B}}$**pm** (y por tanto para $\mathrm{B}_{\mathcal{F}_2}$**pm**) viene dado por el cilindro. Por tanto, $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/2}\mathrm{B}\mathbf{pm}\simeq S^1$.

4. **El grupo monoglide pg**$=\{X,Y,Z; XYX^{-1}Y^{-1}=1, Z^2X^{-1}=1, ZYZ^{-1}Y=1\}$.
Este es el grupo fundamental de la botella de Klein K, y es el segundo y último wallpaper group que es libre de torsión. Como la botella de Klein es un complejo finito, B**pg** es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$-nulo para todo primo p, por el teorema de Miller ([127], 9.9), y en particular el espacio clasificador para **pg** tiene el tipo de homotopía de K.

5. **El grupo monorrómbico cm**$=\{X,Y,Z; XYX^{-1}Y^{-1}=1, Z^2=1, ZYZY=1, ZXZY^{-1}X^{-1}=1\}$.
Este grupo no contiene rotaciones, pero sí reflexiones y reflexiones especulares. Por tanto, tiene torsión sólo en el primo dos. En este caso, el cociente del plano por la acción de **cm** es una curva de Moebius, que retracta con deformación sobre la circunferencia. Así, $\underline{\mathrm{B}}\mathbf{cm}=\mathrm{B}_{\mathcal{F}_2}\mathbf{cm}\simeq\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/2}\mathrm{B}\mathbf{cm}\simeq S^1$.

6. **El grupo discópico pmm**$=\{X,Y,Z,T; XYX^{-1}Y^{-1}=1, ZTZ^{-1}T^{-1}=1, Z^2=T^2=1, ZXZX^{-1}=1, TXTX=1, ZYZY=1, TYTY^{-1}=1\}$.
Por primera vez estudiamos un grupo que contiene reflexiones y rotaciones. Sin embargo, las rotaciones que aparecen son de orden dos, y por consiguiente el grupo posee solamente 2-torsión. La región fundamental de **pmm** es un cuadrado, y curiosamente el cuadrado también es un modelo para $\underline{\mathrm{B}}$**pmm** y $\mathrm{B}_{\mathcal{F}_2}$**pmm**. Esto demuestra que la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/2$-anulación de B**pmm** es un punto.

7. **El grupo dígiro pmg**$=\{X,Y,Z,T; XYX^{-1}Y^{-1}=1, T^2=1, Z^2T^{-1}=1, TXTX^{-1}=1, ZXZ^{-1}X=1, TYTY=1, TZTZ=1\}$.
Este grupo contiene rotaciones, reflexiones y reflexiones especulares, y su región fundamental es un rectángulo. Las rotaciones tienen orden dos, de modo que en este grupo solamente hay 2-torsión. El modelo correcto para el espacio de órbitas $\mathbb{R}^2/$**pmg** es una "funda de almohada abierta", que tiene el tipo de

homotopía de un punto. Así que en este caso se tiene $\underline{\mathrm{B}}\mathbf{pmg} = \mathrm{B}_{\mathcal{F}_2}\mathbf{pmg} \simeq \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/2}\mathrm{B}\mathbf{pmg} \simeq *$.

8. **El grupo diglide pgg**$=\{X, Y, Z, T; XYX^{-1}Y^{-1} = 1, Z^2X^{-1} = 1, T^2Y^{-1} = 1, TXT^{-1}X = 1, ZYZ^{-1}Y = 1, ZTZT = 1\}$.
El grupo diglide está generado por las traslaciones usuales, una rotación y una reflexión especular. Una vez más sólo aparece 2-torsión, y el espacio cociente tiene la forma de "pelota de fútbol no orientable", lo cual significa que $\underline{\mathrm{B}}\mathbf{pgg}$ es homotópicamente equivalente al plano proyectivo. Así, obtenemos que la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/2$-anulación del espacio clasificador de **pgg** tiene el tipo de homotopía de $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

9. **El grupo dirrómbico cmm**$=\{X, Y, Z, T; XYX^{-1}Y^{-1} = 1, Z^2 = T^2 = 1, ZYZY = 1, ZXZY^{-1}X^{-1} = 1, TYTY = 1, TXTX = 1, ZTZT = 1\}$.
Igual que **pmg**, este grupo posee las tres clases de isometría posibles en este contexto. De nuevo las rotaciones son de ángulo π, y sólo hay 2-torsión. El espacio de órbitas $\mathbb{R}^2/\mathbf{cmm}$ es una "empanada rasgada" con una esquina y dos puntos especulares, y esto implica que el espacio clasificador para **cmm**-fibrados propios es contráctil. Así, $\mathrm{B}_{\mathcal{F}_2}\mathbf{cmm} \simeq *$ y se tiene que el espacio clasificador del grupo dirrómbico es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/2$-acíclico.

10. **El grupo tetratrópico p4**$=\{X, Y, Z; XYX^{-1}Y^{-1} = 1, Z^4 = 1, ZYZ^{-1}X = 1, ZXZ^{-1}Y^{-1} = 1\}$.
Este es el primer grupo que aparece que posee rotaciones de ángulo $\pi/2$, y de hecho estas son las únicas isometrías diferentes de traslaciones que aparecen, así que otra vez aparece sólo 2-torsión. Como en el ejemplo anterior, el espacio de órbitas tiene forma de "empanada", pero en este caso no es rasgada. Este hecho cambia dramáticamente su tipo de homotopía, y se comprueba que $\underline{\mathrm{B}}\mathbf{p4}$ tiene el tipo de homotopía de la esfera. Por tanto obtenemos que $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/2}\mathrm{B}\mathbf{p4} \simeq S^2$.

11. **El grupo tetrascópico p4m**$=\{X, Y, Z, T; XYX^{-1}Y^{-1} = 1, Z^4 = T^2 = 1, ZYZ^{-1}X = 1, ZXZ{-}1Y^{-1} = 1, TXTY^{-1} = 1, TZTZ = 1\}$.
El grupo tetrascópico tiene 2-rotaciones, 4-rotaciones, reflexiones y reflexiones especulares, así que su torsión está concentrada en el primo dos. Ahora el espacio cociente no tiene esquinas, y de hecho tiene la forma de un triángu-

lo con dos puntos 4-especulares y un punto 2-especular. El correspondiente $\underline{\mathrm{B}}$**p4m** es contráctil, y por consiguiente también lo es el correspondiente espacio clasificador para la familia de 2-grupos finitos de **p4m**. Esto prueba que la $B\mathbb{Z}/2$-anulación de B**p4m** es homotópicamente equivalente a un punto.

12. **El grupo tetrágiro p4g**$=\{X, Y, Z, T; XYX^{-1}Y^{-1} = 1, Z^4 = T^2 = 1, ZYZ^{-1}X = 1, ZXZ{-}1Y^{-1} = 1, TXTY^{-1} = 1, TZTXZ = 1\}$.
Este es el último ejemplo con 4-rotaciones, y de nuevo posee 2-rotaciones, reflexiones y reflexiones especulares. Además, este será también el último grupo en el que la torsión se concentra en el primo dos. Como ocurre para **pmg**, un modelo para el espacio de órbitas viene dado por una empanada rasgada, aunque en este caso sólo hay un punto especular (y una esquina también). De cualquier modo, el espacio clasificador para **p4g**-acciones propias es contráctil, y por tanto el espacio clasificador del grupo es $B\mathbb{Z}/2$-acíclico.

13. **El grupo tritrópico p3**$=\{X, Y, Z; XYX^{-1}Y^{-1} = 1, Z^3 = 1, ZXZ^{-1}Y^{-1}X = 1, ZYZ^{-1}X = 1\}$.
Las únicas isometrías distinguidas de este grupo son las 3-rotaciones, de modo que no hay reflexiones ni reflexiones especulares. Por tanto, la torsión está concentrada en el primo tres, y además este es el primer ejemplo cuya región fundamental, que es un hexágono, no es un cuadrilátero. El cociente $\mathbb{R}^2/$**p3** es de nuevo una "empanada", no rasgada, con tres esquinas y sin puntos especulares. Por tanto, $\mathbb{R}^2/$**p3** tiene el tipo de homotopía de una esfera, y $\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/3}B\mathbf{p3} \simeq B_{\mathcal{F}_3}\mathbf{p3} \simeq S^2$.

14. **El grupo triscópico p3m1**$=\{X, Y, Z, T; XYX^{-1}Y^{-1} = 1, Z^3 = T^2 = 1, TZTZ = 1, ZXZ^{-1}Y^{-1}X = 1, ZYZ^{-1}X = 1, TXTX = 1, TYTY^{-1}X = 1\}$.
Este es el primer caso que estudiamos de un grupo con torsión en dos primos diferentes: las rotaciones de ángulo $2\pi/3$ dan la 3-torsión, y las reflexiones proporcionan la 2-torsión. El espacio de órbitas es un triángulo, y por tanto el espacio clasificador para **p3m1**-fibrados propios es contráctil. Así, $B_{\mathcal{F}_{2,3}}\mathbf{p3m1}$ también es contráctil, y esto significa que B**p3m1** es $B\mathbb{Z}/2 \vee B\mathbb{Z}/3$-acíclico. Por otro lado, el grupo **p3** es subgrupo normal de índice dos de **p3m1**, y tenemos una fibración:

$$B\mathbf{p3} \longrightarrow B\mathbf{p3m1} \longrightarrow B\mathbb{Z}/2.$$

El espacio base es $\mathrm{B}\mathbb{Z}/3$-nulo, así que de acuerdo con 1.1.6 y nuestra descripción de $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/3}\mathrm{B}\mathbf{p3}$, la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/3$-anulación de $\mathrm{B}\mathbf{p3m1}$ viene identificada por la siguiente fibración recubridora:

$$S^2 \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/3}\mathrm{B}\mathbf{p3m1} \longrightarrow \mathrm{B}\mathbb{Z}/2.$$

En el caso restante concerniente a la $\mathrm{B}\mathbb{Z}/2$-anulación no podemos utilizar estos razonamientos, porque no conocemos ningún subgrupo normal H de **p3m1** tal que podamos describir fácilmente un modelo de $\underline{\mathrm{B}}G$ y cuyo grupo factor no posea 3-torsión.

15. **El grupo trígiro p31m**$=\{X,Y,Z,T; XYX^{-1}Y^{-1}=1, Z^2=T^2=1, (TZ)^3=1, ZXZX^{-1}=1, TYTY^{-1}=1, TXTY^{-1}X=1, ZYZYX=1\}$.
Este grupo es bastante similar al anterior, en el sentido de sólo tiene 3-rotaciones, reflexiones y reflexiones especulares, y por tanto la torsión está de nuevo concentrada en los primos 2 y 3. Sin embargo, se distinguen visualmente en que en este caso los centros de rotación no están sobre los ejes de reflexión. Esto se refleja en el hecho de que el espacio cociente tiene una esquina, y se modela mediante una "empanada rasgada", lo cual significa que $\underline{\mathrm{B}}\mathbf{p31m}$ es contráctil, y de nuevo $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/2\vee \mathrm{B}\mathbb{Z}/3}\mathrm{B}\mathbf{p3m1} \simeq \mathrm{B}_{\mathcal{F}_{2,3}}\mathbf{p31m} \simeq *$. Ahora, el grupo tritrópico es un subgrupo normal de **p31m**, y una línea de razonamiento análoga al caso anterior demuestra que $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/3}\mathrm{B}\mathbf{p3m1}$ se describe mediante la siguiente fibración:

$$S^2 \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/3}\mathrm{B}\mathbf{p31m} \longrightarrow \mathrm{B}\mathbb{Z}/2.$$

El caso $p=2$ queda sin resolverse por la misma razón que en el grupo anterior, y es interesante observar que un modelo para $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/2}\mathrm{B}\mathbf{p31m}$ proporcionaría automáticamente otro para $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/2}\mathrm{B}\mathbf{p3m1}$, debido a que **p31m** es un subgrupo normal de índice tres de **p3m1**.

16. **El grupo hexatrópico p6**$=\{X,Y,Z; XYX^{-1}Y^{-1}=1, Z^6=1, ZXZ^{-1}Y^{-1}=1, ZYZY^{-1}X=1\}$.
Como los demás **pn**-grupos, contiene sólo rotaciones, que son en este caso de ángulo $\pi/3$. Por tanto, la región fundamental es un hexágono, y $\mathbb{R}^2/\mathbf{p6}$ tiene forma de empanada, siendo éste el único caso entre los wallpaper groups de un espacio cociente con tres esquinas de órdenes diferentes. El espacio clasificador para **p6**-acciones propias es una esfera, y por tanto $\mathbf{P}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/2\vee \mathrm{B}\mathbb{Z}/3}\mathrm{B}\mathbf{p6} \simeq$

$B_{\mathcal{F}_{2,3}}\mathbf{p6} \simeq S^2$. Como el grupo tritrópico se incluye en **p6** como un subgrupo normal de índice dos, tenemos una fibración recubridora:

$$S^2 \longrightarrow \mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/3}B\mathbf{p6} \longrightarrow B\mathbb{Z}/2.$$

Sin embargo, a diferencia de los casos anteriores, podemos calcular también la $B\mathbb{Z}/2$-anulación, utilizando el hecho de que el grupo ditrópico es un subgrupo normal de índice tres de **p6**. Como $\mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/2}B\mathbf{p2} \simeq S^2$, podemos obtener la fibración

$$S^2 \longrightarrow \mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/2}B\mathbf{p6} \longrightarrow B\mathbb{Z}/3$$

que describe la anulación deseada.

17. **El grupo hexascópico p6m**$=\{X, Y, Z, T; XYX^{-1}Y^{-1} = 1, Z^6 = T^2 = 1, ZYZ^{-1}Y^{-1}X = 1, ZXZ^{-1}Y^{-1} = 1, TXTX = 1, TYTY^{-1}X = 1, TZTY^{-1}Z = 1\}$.
Éste es el último ejemplo, y probablemente también el más complejo de estos grupos. De hecho, catorce de los wallpaper groups pueden sumergirse en **p6m**, y es el único de estos grupos que posee 6-rotaciones, reflexiones y reflexiones especulares. El espacio de órbitas es un triángulo con tres puntos especulares de órdenes diferentes, y por consiguiente $\underline{B}\mathbf{p6m} \simeq \mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/2 \vee B\mathbb{Z}/3}B\mathbf{p6m} \simeq *$. Nuestro viejo amigo **p3** es en este caso un subgrupo normal de índice cuatro, y por consiguiente la fibración

$$S^2 \longrightarrow \mathbf{P}_{B\mathbb{Z}/3}B\mathbf{p6m} \longrightarrow B\mathbb{Z}/4.$$

identifica la $B\mathbb{Z}/3$-anulación.

Este es también el tercer y último caso en el que no hemos sido capaces de identificar la $B\mathbb{Z}/2$-anulación, y es curioso que la solución del problema análogo para los grupos triscópico y trígiro no respondería automáticamente a éste, pues estos son subgrupos normales de **p6m** de índice dos.

Como puede verse, hemos resuelto casi todos los casos. En un marco de trabajo más amplio de cálculo de anulaciones de grupos discretos, esperamos que estos métodos de carácter esencialmente homotópico sean útiles para tratar otros grupos de carácter geométrico, como por ejemplo, los grupos de isometrías del plano hiperbólico o del espacio afín.

Apéndice A

Contractibilidad de la overcategory

Como ya dijimos en 6.3.2, dedicaremos este apéndice a demostrar que la categoría $\mathcal{L} \downarrow \sigma$ es contráctil. Nos gustaría señalar que este resultado parece conocido (ver [69], 9.E.3), pero no hemos encontrado ninguna prueba en la literatura, así que damos una aquí.

Proposición A.0.1. *Sea X un complejo simplicial, y sea $\mathcal{L} : \mathbf{\Gamma X} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{\Gamma X})$ el funtor de localización de Gabriel-Zisman aplicado a la categoría de símplices de X. En estas condiciones, se tiene que para cada símplice $\sigma \in X$ la overcategory $\mathcal{L} \downarrow \sigma$ es contráctil.*

Demostración. La idea de la demostración es construir, para cada símplice $\sigma \in X$, una homotopía entre una aplicación constante y la identidad $\mathrm{Id}_{|\mathrm{N}(\mathcal{L}\downarrow\sigma)|}$. Para ello, comenzaremos probando la existencia de una sucesión de endofuntores

$$\{F_n\} : \mathcal{L} \downarrow \sigma \longrightarrow \mathcal{L} \downarrow \sigma$$

para todo $n \geq 0$ tales que $F_0 = \mathrm{Id}$ y para todo $(\tau, \phi) \in \mathcal{L} \downarrow \sigma$ existe un número natural $n_{(\tau,\phi)}$ de modo que $F_m((\tau, \phi)) = (\sigma, \mathrm{Id})$ para todo $m \geq n_{(\tau,\phi)}$.

En lo sucesivo las aplicaciones en $\mathbf{\Gamma X}$ y sus imágenes en $\mathcal{L}(\mathbf{\Gamma X})$ serán denotadas indistintamente por i_α, donde α será un subíndice apropiado. Llamaremos j_α al inverso de i_α en la categoría localizada.

Es claro a partir de la definición del funtor de localización que todo elemento (τ, ϕ) de $\mathcal{L} \downarrow \sigma$ admite una única expresión de la forma $(\tau, j_n \circ i_{n-1} \circ \ldots \circ j_2 \circ i_1)$, donde permitimos que j_n o i_1 puedan ser la identidad (pero no está permitido para ninguna otra de las aplicaciones que aparecen) y $j_{t-1} \neq i_t^{-1} \neq j_{t+1}$ para todo t.

Así, comenzamos con $F_0 = \mathrm{Id}$. Se define el funtor

$$F_1 : \mathcal{L} \downarrow \sigma \longrightarrow \mathcal{L} \downarrow \sigma$$

de la siguiente manera: si $(\tau, j_n \circ i_{n-1} \circ \ldots \circ j_2 \circ i_1)$ es un elemento de la overcategory, entonces $F_1((\tau, j_n \circ i_{n-1} \circ \ldots \circ j_2 \circ i_1)) = (i_1(\tau), j_n \circ i_{n-1} \circ \ldots \circ j_2)$, y la aplicación inducida por la inclusión $\tau < \tau'$ se enviará por F_1 a la identidad entre las imágenes. Puede verse fácilmente que este funtor está bien definido.

Ahora, $F_2 : \mathcal{L} \downarrow \sigma \longrightarrow \mathcal{L} \downarrow \sigma$ se definirá como $F_2((\tau, j_n \circ i_{n-1} \circ \ldots \circ j_2 \circ i_1)) = (j_2^{-1} \circ i_1(\tau), j_n \circ i_{n-1} \circ \ldots \circ i_3)$. Obsérvese que esta definición es correcta porque el funtor de localización es, en nuestro caso, biyectivo sobre los objetos. Otra vez, la imagen por F_2 de cada morfismo será la identidad, y de nuevo es sencillo ver que así se define un funtor.

De modo análogo podemos definir, para m impar, $F_m((\tau, j_n \circ i_{n-1} \circ \ldots \circ j_2 \circ i_1)) = (i_m \circ j_{m-1} \circ i_1(\tau), j_n \circ i_{n-1} \circ \ldots j_{m+1})$, y para m par, $F_m((\tau, j_n \circ i_{n-1} \circ \ldots \circ j_2 \circ i_1)) = (j_m \circ i_{m-1} \circ i_1(\tau), j_n \circ i_{n-1} \circ \ldots i_{m+1})$, enviando siempre cualquier morfismo en la aplicación identidad. De este modo, hemos definido ya una sucesión de funtores.

Nuestro siguiente objetivo será relacionar todos estos funtores entre sí por medio de transformaciones naturales, con el fin de obtener la homotopía deseada.

Sea $m \geq 0$ un número natural. En primer lugar, definiremos la transformación $T_{2m} : F_{2m} \longrightarrow F_{2m+1}$. Si $(\tau, j_n \circ i_{n-1} \circ \ldots \circ j_2 \circ i_1)$ es un objeto de la overcategory, definimos $F_{2m}((\tau, j_n \circ i_{n-1} \circ \ldots \circ j_2 \circ i_1)) \longrightarrow F_{2m+1}((\tau, j_n \circ i_{n-1} \circ \ldots \circ j_2 \circ i_1))$ como la aplicación obvia inducida por

$$i_{2m} : j_{2m-1} \circ \ldots \circ i_1(\tau) \longrightarrow i_{2m} \circ j_{2m-1} \circ \ldots \circ i_1(\tau).$$

Por otro lado, se define, para cada $m \geq 1$, la transformación natural $T_{2m-1} : F_{2m} \longrightarrow F_{2m-1}$ del siguiente modo: $F_{2m}((\tau, j_n \circ i_{n-1} \circ \ldots \circ j_2 \circ i_1)) \longrightarrow F_{2m-1}((\tau, j_n \circ i_{n-1} \circ \ldots \circ j_2 \circ i_1))$ será la aplicación inducida por

$$i_{2m-1} : j_{2m-1} \circ \ldots \circ i_1(\tau) \longrightarrow i_{2m-2} \circ j_{2m-3} \circ \ldots \circ i_1(\tau).$$

Es conveniente recordar aquí que, por la definición de los j's, j^{-1} representa un morfismo en $\mathbf{\Gamma X}$.

Los argumentos anteriores definen, pues, una cadena de transformaciones naturales

$$\mathrm{Id} = F_0 \xrightarrow{T_0} F_1 \xleftarrow{T_1} F_2 \xrightarrow{T_2} F_3 \xleftarrow{T_3} \ldots$$

Antes de continuar, realizaremos un par de observaciones útiles.

- Se sabe ([76], I.5) que los funtores F_n definen aplicaciones simpliciales entre los nervios

  $$\mathrm{N}(F_n) : \mathrm{N}(\mathcal{L} \downarrow \sigma) \longrightarrow \mathrm{N}(\mathcal{L} \downarrow \sigma),$$

  las cuales, a su vez, inducen aplicaciones de la realización del nervio en sí misma. Como F_n está siempre relacionado con F_{n+1} por medio de una transformación natural, se tiene que f_n es simplicialmente homotópica a f_{n+1}, y por tanto, $|f_n|$ es homotópica a $|f_{n+1}|$. El hecho clave es que las homotopías entre las realizaciones se definen primero sobre los vértices del nervio de $\mathcal{L} \downarrow \sigma \times I$ y después se extienden por linealidad a todo el complejo. Haremos uso de esto un poco más adelante.

- Sea $(\tau, j_n \circ \ldots \circ i_1)$ un objeto de la overcategory. De las definiciones de los funtores F_i podemos deducir que $F_n \circ \ldots \circ F_1((\tau, j_n \circ \ldots \circ i_1)) = (\sigma, \mathrm{Id})$. Así, como la cadena de aplicaciones $j_n \circ \ldots \circ i_1$ es siempre finita, podemos decir que para todo $(\tau, \phi) \in (\mathcal{L} \downarrow \sigma)$ existe un número natural minimal $n_{(\tau,\phi)}$ tal que $F_{n_{\tau,\phi}} \circ \ldots \circ F_1((\tau, \phi)) = (\sigma, \mathrm{Id})$. A nivel de nervios, estamos diciendo que para cada vértice $v \in \mathrm{N}(\mathcal{L} \downarrow \sigma)$ existe n_v tal que $f_{n_v} \circ \ldots \circ f_1(v) = \mathrm{N}(\sigma, \mathrm{Id})$.

Para n par, llamemos H_n a la homotopía simplicial inducida por la transformación T_n. Si n es impar, denotemos por H'_{n-1} a la homotopía inducida por T_n entre f_n y f_{n-1}, y pongamos $H_{n-1}(x,t) = H'_{n-1}(x, 1-t)$, la homotopía opuesta que comienza en f_{n-1} y acaba en f_n.

Ahora ya estamos preparados para definir la homotopía entre la identidad y la aplicación constante de la realización en sí misma con valor $|\mathrm{N}(\sigma, \mathrm{Id})|$ (en lo que queda denotaremos por $*$ a este elemento). Así, consideremos un vértice $v \in \mathrm{N}(\mathcal{L} \downarrow \sigma)$. Definimos una aplicación $H : |\mathrm{N}(\mathcal{L} \downarrow \sigma)| \times I \longrightarrow |\mathrm{N}(\mathcal{L} \downarrow \sigma)|$ por:

$$H(v,t) = \begin{cases} |H_0|(v, n_v t) & \text{if } t \in [0, \frac{1}{n_v}] \\ |H_1|(v, n_v t - 1) & \text{if } t \in [\frac{1}{n_v}, \frac{2}{n_v}] \\ \vdots & \vdots \\ |H_{n-1}|(v, n_v t - (n-1)) & \text{if } t \in [\frac{n_v - 1}{n_v}, 1] \end{cases}$$

La aplicación H definida de este modo se extiende linealmente a todo el nervio $|\mathrm{N}(\mathcal{L} \downarrow \sigma)|$. Veamos que H es la aplicación deseada.

1. Si v es un vértice de $\mathrm{N}(\mathcal{L} \downarrow \sigma)$, $H(v, 0) = H_0(v, 0) = v$. Del mismo modo, $H(v, 1) = H_{n_v}(v, 1) = *$. Como $|H_i|$ se define por extensión lineal y lo mismo ocurre para H, las igualdades anteriores se cumplen para todos los puntos del complejo.

2. H es continua respecto a t porque las homotopías $|H_i|$ lo son, y además $|H_j(x, 1)| = f_{j+1}(x) = |H_{j+1}(x, 0)|$ para todo $x \in |\mathrm{N}(\mathcal{L} \downarrow \sigma)|$.

3. Finalmente, H es continua respecto a la primera componente porque es una extensión lineal de una aplicación definida sobre los vértices de un complejo simplicial.

De esta manera acabamos de demostrar que H es la homotopía que buscábamos entre la identidad y la constante. Por tanto, $\mathcal{L} \downarrow \sigma$ es contráctil y hemos concluido.

$\square$

Bibliografía

[1] H. Abels. *Parallelizability of proper actions, global K-slices and maximal compact subgroups.* Math. Ann. **212** (1974), 1–19.

[2] J.F. Adams. *Infinite loop spaces*, volumen 90 de Annals of Math. Studies Princeton University Press, 1978.

[3] S.I. Adyan. *The Burnside problem and identities in groups.* Izdat. Nauka, Moscú, 1975.

[4] A. Adem y J.R. Milgram. *Cohomology of finite groups*, volumen 309 de Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1994.

[5] J. Aguadé, C. Broto y D. Notbohm. *Homotopy classification of spaces with interesting cohomology and a conjecture of Cooke part I.* Topology **33** (1994), no. 3, 455–492.

[6] D.W. Anderson. *Localizing CW-complexes.* Illinois J. Math. **16** (1972), 519–525.

[7] G.Z. Arone y W.G. Dwyer. *Partition complexes, Tits buildings and symmetric products.* Proc. London Math. Soc. **82** (2001), no. 1, 229–256.

[8] M. Artin y B. Mazur. *Étale homotopy*, volumen 100 de Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1969.

[9] M. Aschbacher. *Finite group theory*, volumen 10 de Cambridge studies in advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2000.

[10] A. Ash. *Deformation retracts with lowest possible dimension of arithmetic quotients of self-adjoint homogeneous cones.* Math. Ann. **225** (1977), no. 1, 69–76.

[11] P. Baum, A. Connes y N. Higson. *Classifying space for proper actions and K-Theory of group C^*-Algebras.* Contemp. Math. **167** (1994), 241–291.

[12] A.J. Berrick y C. Casacuberta. *A universal space for plus-constructions.* Topology **38** (1999), no. 3, 467–477.

[13] A.J. Berrick y E. Dror-Farjoun. *Fibrations and nullifications.* Israel J. Math. **135** (2003), 205–220.

[14] M. Bestvina. *The virtual cohomological dimension of Coxeter groups.* En Geometric group theory I (Sussex 1991), volumen 181 de Lecture Note Ser., págs. 19–23. Cambridge University Press, 1993.

[15] M. Bestvina y N. Brady. *Morse theory and finiteness properties of groups.* Invent. Math. **129** (1997), no. 3, 445–470.

[16] E. Bierstone. *The equivariant covering homotopy property for differential G-fibre bundles.* J. Differential Geometry **8** (1973), 615–622.

[17] E. Bierstone. *Lifting isotopies from orbit spaces.* Topology, **14** (1975), no. 3, 245–252.

[18] D. Blanc. *Loop spaces and homotopy operations.* Fund. Math. **154** (1997), no. 1, 75–95.

[19] D. Blanc. *Mapping spaces and M-CW-complexes.* Forum Math. **9** (1997), no. 3, 367–382.

[20] A.K. Bousfield. *The localization of spaces with respect to homology.* Topology **14** (1975), 133–150.

[21] A.K. Bousfield. *Construction of factorization systems in categories.* J. Pure Appl. Algebra **9** (1976/77), no. 2, 207–220.

[22] A.K. Bousfield. *The localization of spectra with respect to homology.* Topology **18** (1979), no. 4, 257–281.

[23] A.K. Bousfield. *Localization and periodicity in unstable homotopy theory.* J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), no. 4, 831–873.

[24] A.K. Bousfield. *Homotopical localizations of spaces.* Amer. J. Math. **119** (1997), no. 6, 1321–1354.

[25] A.K. Bousfield y D.M. Kan. *Homotopy limits, completions and localizations*, volumen 304 de Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1972.

[26] N.P. Brady, I.J. Leary y B.E.A. Nucinkis. *On algebraic and geometric dimensions for groups with torsion.* J. London Math. Soc. **64** (2001), no. 2, 489–500.

[27] G.E. Bredon. *Equivariant cohomology theories*, volumen 34 de Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1967.

[28] G.E. Bredon. *Introduction to compact transformation groups.* Academic Press, 1972.

[29] C. Broto y N. Kitchloo. *Classifying spaces of Kač-Moody groups.* Math. Z. **240** (2002), no. 3, 621–649.

[30] C. Broto, R. Levi y R. Oliver. *The homotopy theory of fusion systems.* J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 4, 779–856.

[31] K.S. Brown. *Groups of virtually finite dimension.* En Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977), volumen 36 de Lecture Note Ser., págs. 27–70. Cambridge University Press, 1979.

[32] K.S. Brown. *Cohomology of groups*, volumen 87 de Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1982.

[33] R. Brown y J.L. Loday. *Van Kampen theorems for diagrams of spaces.* Topology **26** (1987), no. 3, 311–335.

[34] C. Casacuberta. *Anderson localization from a modern point of view.* En The Čech Centennial, volumen 181 de Contemp. Math., págs. 35–44. American Mathematical Society, 1994.

[35] C. Casacuberta. *Recent advances in unstable localization.* En The Hilton Symposium 1993 (Montreal, PQ), volumen 6 de CRM Proc. Lecture Notes, págs. 1–22. American Mathematical Society, 1994.

[36] C. Casacuberta. *On structures preserved by idempotent transformations of groups and homotopy types.* En Crystallographic groups and their generalizations (Kortrijk, 1999), volumen 262 de Contemp. Math., págs. 39–68. American Mathematical Society, 2000.

[37] C. Casacuberta, L.J. Hernández y J.L. Rodríguez. *Models for torsion homotopy types.* Israel J. Math. **107** (1998), 301–318.

[38] C. Casacuberta y J.L. Rodríguez. *On towers approximating homological localizations.* J. London Math. Soc. (2) **56** (1997), no. 3, 645–656.

[39] C. Casacuberta y J. Scherer. *Homological localizations preserve 1-connectivity.* En Une Dégustation Topologique: Homotopy Theory in the Swiss Alps (Arolla 1999)., volumen 265 de Contemp. Math., págs 1–6. American Mathematical Society, 2000.

[40] C. Casacuberta y D. Scevenels. *On the existence of group localizations under large-cardinal axioms.* Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. **95** (2001), no. 2, 163–170.

[41] N. Castellana, R. Levi y D. Notbohm. *Homology decompositions for p-compact groups.* Prepublicación 2003, en http://mat.uab.es/∼ natalia/articles/cln2.pdf

[42] W. Chachólski. *On the functors* $\mathbf{CW}_A$ *and* $\mathbf{P}_A$*.* Duke J. Math. **84** (1996), no. 3, 599–631.

[43] W. Chachólski. *Desuspending and delooping cellular inequalities.* Invent. Math. **129** (1997), no. 1, 37–62.

[44] W. Chachólski, W.G. Dwyer y M. Intermont. *The A-complexity of a space.* J. London Math. Soc. **65** (2002), no. 1, 204–222.

[45] W. Chachólski y J. Scherer. *Homotopy theory of diagrams*, volumen 155 de Mem. Amer. Math. Soc. American Mathematical Society, 2002.

[46] D. Chataur, J.L. Rodríguez y J. Scherer. *Plus-construction of algebras over an operad, cyclic and Hochschild homologies up to homotopy.* Prepublicación 2003, en http://hopf.math.purdue.edu/cgi-bin/generate?/Chataur-Rodriguez-Scherer/operadplus

[47] P.A. Cherix, M. Cowling, P. Jolissaint, P. Julg y A. Valette. *Groups with the Haagerup property. Gromov a-T-menability*, volumen 197 de Progress in Mathematics. Birkhäuser, 2002.

[48] F.R. Cohen, J.C. Moore y J.A. Neisendorfer. *Torsion in homotopy groups.* Ann. of Math. **109** (1979), no. 1, 121–168.

[49] A. Connes. *Noncommutative geometry.* Academic Press, 1994.

[50] F.X. Connolly y T. Koźniewski. *Finiteness properties of classifying spaces of proper* Γ*-actions.* J. Pure Appl. Algebra **41** (1986), no. 1, 17–36.

[51] F.X. Connolly y T. Koźniewski. *Rigidity in cristallographic groups I.* Invent. Math. **99** (1990), no. 1, 25–48.

[52] F.X. Connolly y S. Prassidis. *Groups which act freely on* $\mathbb{R}^m \times S^{n-1}$. Topology **28** (1989), no. 2, 133–148.

[53] J.H. Conway. *The orbifold notation for surface groups.* En Groups, combinatorics and geometry, número 165 de London Math. Soc. Lecture Note Ser., págs. 438–447. Cambridge Univ. Press, 1990.

[54] H. Coxeter y W. Moser. *Generators and relations for discrete groups*, volumen 14 de Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, 2nd edition, 1965.

[55] M. Culler y K. Vogtmann. *Moduli of graphs and automorphisms of free groups.* Invent. Math. **84** (1986), no. 1, 91–119.

[56] J.F. Davis and W. Lück. *Spaces over a category and assembly maps in isomorphism conjectures in* K*- and* L*-theory.* K-Theory **15** (1998), no. 3, 201–252.

[57] M.W. Davis. *Smooth* G*-manifolds as collections of fiber bundles.* Pacific J. Math. **77** (1978), no. 2, 315–362.

[58] M.W. Davis. *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by euclidean space.* Ann. of Math. (2) **117** (1983), no. 2, 293–324.

[59] M.W. Davis, W.C. Hsiang y W.Y. Hsiang. *Differential actions of compact simple Lie groups on homotopy spheres and Euclidean spaces.* En Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Parte 1, volumen 33 de Proc. Sympos. Pure Math., págs 313–323. American Mathematical Society, 1978.

[60] J. Dermott, M. Du Sautoy y G. Smith. *Zeta functions of crystallographic groups and analytic continuation.* Proc. Lond. Math. Soc. **79** (1999), no. 3, 511–534.

[61] E. Devinatz, M.J. Hopkins y J.H. Smith. *Nilpotence and stable homotopy theory I.* Ann. of Math. (2) **128** (1988), no. 2, 207–241.

[62] T. tom Dieck. *Faserbündel mit Gruppenoperation.* Arch. Math. **20** (1969), 367–382.

[63] T. tom Dieck. *Transformation groups*, volumen 8 de De Gruyter Studies in Mathematics. de Gruyter and Co., 1987.

[64] W.P. Dicks, P.H. Kropholler, I.J. Leary y S. Thomas. *Classifying spaces for proper actions of locally finite groups.* J. Group Theory **5** (2002), no. 4, 453–480.

[65] A. Dold y R. Thom. *Quasifibration and infinite symmetric product.* Ann. of Math. (2) **67** (1958), 239–281.

[66] E. Dror-Farjoun. *Homotopy and homology of diagrams of spaces.* En Algebraic topology (Seattle, 1985), volumen 1286 de Lecture Notes in Math., págs 93–134. Springer-Verlag, 1987.

[67] E. Dror-Farjoun. *Homotopy localization and v_1-periodic spaces.* En Algebraic Topology (San Feliu de Guixols, 1990), volumen 1509 de Lecture Notes in Math., págs 104–113. Springer-Verlag, 1992.

[68] E. Dror-Farjoun. *Cellular inequalities.* En The Čech Centennial, volumen 181 de Contemp. Math., págs. 159–181. American Mathematical Society, 1994.

[69] E. Dror-Farjoun. *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization*, volumen 1622 de Lecture Notes in Math. Springer, 1995.

[70] E. Dror-Farjoun, W.G. Dwyer y D.C. Ravenel. *Bousfield localizations of classifying spaces of nilpotent groups.* Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), no. 6, 1855–1861.

[71] M.J. Dunwoody. *Accesibility and groups of cohomological dimension one.* Proc. London Math. Soc. **38** (1979), no. 2, 193–215.

[72] W.G. Dwyer. *The centralizer decomposition of BG.* En Algebraic topology; New Trends in Localization and Periodicity, volumen 136 de Progress in Mathematics, págs 167–184. Birkhäuser, 1994.

[73] W.G. Dwyer. *Homology decompositions for classifying spaces of finite groups.* Topology **36** (1997), no. 4, 783–804.

[74] W.G. Dwyer. *Localizations.* Prepublicación 2003, en http://www.nd.edu/∼wgd/Dvi/Localizations.dvi

[75] W.G. Dwyer, J. Greenlees y S. Iyengar. *Duality in algebra and topology.* Prepublicación 2002, en http://www.nd.edu/∼wgd/Dvi/Duality.Algebra.Topology.dvi

[76] W.G. Dwyer y H.W. Henn. *Homotopy theoretic methods in group cohomology*, volumen 1 de Adv. Courses in Math. CRM Barcelona, 2000.

[77] W.G. Dwyer y D.M. Kan. *Function complexes for diagrams of simplicial sets.* Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. **45** (1983), no. 2, 139–147.

[78] W.G. Dwyer y C.W. Wilkerson. *Homotopy fixed-point methods for Lie groups and finite loop spaces.* Ann. of Math. **139** (1994), no. 2, 395–442.

[79] W. Dwyer y A. Zabrodsky. *Maps between classifying spaces.* En Algebraic Topology, Barcelona, volumen 1298 de Lecture Notes in Math., págs 106–119. Springer-Verlag, 1986.

[80] S. Eilenberg y T. Ganea. *On the Lusternik-Schnirelmann category of abstract groups.* Ann. of Math. **65** (1957), 517–518.

[81] A. Elmendorf. *Systems of fixed point sets.* Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), no. 1, 275–284.

[82] P. Gabriel and M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory*, volumen 35 de Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, 1967.

[83] P.G. Goerss y J.F. Jardine. *Localization theories for simplicial presheaves.* Canad. J. Math. **50** (1998), no. 5, 1048–1089.

[84] P.G. Goerss y J.F. Jardine. *Simplicial homotopy theory*, volumen 174 de Progress in Mathematics. Birkhäuser, 1999.

[85] T.G. Goodwillie. *Calculus II. Analytic functors.* K-Theory **5** (1991/92), no. 4, 295–332.

[86] D. Gorenstein. *Finite groups.* Chelsea Publishing Co. Inc., 1980.

[87] M. Gromov. *Hyperbolic groups.* En Essays in group theory, volumen 8 de Math. Sci. Res. Inst. Publ., págs. 75–263 Springer-Verlag, 1987.

[88] N. Higson y G. Kasparov. *Operator K-theory for groups which act properly and discontinuously on Hilbert space.* Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. **3** (1997), 131–142.

[89] P. Hilton, G.Mislin y J. Roitberg. *Localization of nilpotent groups and spaces*, volumen 15 de Notes in Mathematics. North Holland/American Elsevier 1975.

[90] P.S. Hirschhorn. *Model categories and their localizations.* Volumen 99 de Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2003.

[91] J. Hollender y R.M. Vogt. *Modules of topological spaces, applications to homotopy limits and E_∞-structures.* Arch. Math. **59** (1992), no. 2, 115–129.

[92] M.J. Hopkins. *Global methods in stable homotopy theory.* En Homotopy theory (Durham, 1985), volumen 117 de London Math. Soc. Lecture Note Ser., págs 73–96. Cambridge University Press, 1987.

[93] S. Illman. *Whitehead torsion and group actions.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. **588** (1974), 1–44.

[94] S. Jackowski y J. McClure. *Homotopy decomposition of classifying spaces via elementary abelian subgroups.* Topology **31** (1992), no. 1, 113–132.

[95] S. Jackowski, J. McClure y R. Oliver. *Homotopy classification of self-maps of BG via G-actions.* Ann. of Math. (2) **135** (1992), no. 1, 183–226.

[96] I.M. James. *Reduced product spaces.* Ann. of Math. (2) **62** (1955), no. 62, 170–197.

[97] G.G. Kasparov. *The operator K-functor and extensions of C^*-algebras.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **44** (1980), no. 3, 571–636.

[98] G.G. Kasparov. *Index for invariant elliptic operators, K-theory and representations of Lie groups.* Dokl. Akad. Nauk SSSR **268** (1983), no. 3, 533–537.

[99] G.G. Kasparov. *Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture.* Invent. Math. **91** (1988), no. 1, 147–201.

[100] M.A. Kervaire. *Multiplicateurs de Schur et K-théorie.* Essays on topology and related topics: Mémoires dédiés à Georges de Rham, págs. 212–225. Springer-Verlag, 1970.

[101] P.H. Kropholler. *Hierarchical decompositions, generalized Tate cohomology and groups of type FP_∞.* En Combinatorial and geometric group theory (Edinburgh, 1993), volumen 204 de London Math. Soc. Lecture Note Ser., págs 190–216. Cambridge University Press, 1995.

[102] P.H. Kropholler y G. Mislin. *Groups acting on finite dimensional spaces with finite stabilizers.* Comment. Math. Helv. **73** (1998), no. 1, 122–136.

[103] A.G. Kurosh. *The Theory of Groups*, volumen II. Chelsea publishing Co., 1960.

[104] V. Lafforgue. *Une démonstration de la conjecture de Baum-Connes pour les groupes réductifs sur un corps p-adique et pour certains groupes discrets possédant la proprieté (T).* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **327** (1998), no. 5, 439–444.

[105] J. Lannes y L. Schwartz. *Sur la structure des $\mathcal{A}$-modules instables injectifs.* Topology **28** (1989), no. 2, 153–169.

[106] J. Lannes. *Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un groupe abélien élémentaire.* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **75** (1992), 135–244.

[107] R. Lashof. *Equivariant bundles.* Illinois J. Math. **26** (1982), no. 2, 257–271.

[108] I.J. Leary y B.E.A. Nucinkis. *Every CW-Complex is a classifying space for proper bundles.* Topology **40** (2001), no. 3, 539–550.

[109] I.J. Leary y B.E.A. Nucinkis. *Some groups of type VF.* Invent. Math. **151** (2003), no. 1, 135–165.

[110] X. Lee. http://www.xahlee.org/wallpaper_dir/c5_17wallpapergroups.html.

[111] R. Levi. *On finite groups and homotopy theory*, volumen 118 de Mem. Amer. Math. Soc.. American Mathematical Society, 1995.

[112] S. Levy. http://www.geom.umn.edu/docs/reference/crc−formulas/node12.html.

[113] W. Lück. *Transformation groups and algebraic K-theory*, volumen 1408 de Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1989.

[114] W. Lück. *The type of the classifying space for a family of subgroups.* J. Pure Appl. Algebra **149** (2000), no. 2, 177–203.

[115] W. Lück y D. Meintrup. *On the universal space for group actions with compact isotropy.* En Geometry and Topology (Aarhus 1998), volumen 258 de Contemp. Math., págs 293–305. American Mathematical Society, 2000.

[116] W. Lück y R. Stamm. *Computations of K and L-theory of cocompact planar groups.* K-Theory **21** (2000), no. 3, 242–292.

[117] G. Lusztig. *Novikov's higher signature and families of elliptic operators.* J. Differential Geometry **7** (1972), 229–256.

[118] S. MacLane. *Categories for the working mathematician*, volumen 5 de Graduate Texts in Math. Springer-Verlag, 1971.

[119] W. Magnus, A. Karrass y D. Solitar. *Combinatorial group theory.* Dover publications Inc., 1976.

[120] M. Mahowald y D. Ravenel. *Towards a global understanding of stable homotopy groups of spheres*, volumen 58 de Contemp. Math., parte II, págs 75-88. American Mathematical Society, 1987.

[121] M. Mahowald y R. Thompson. *K-theory and unstable homotopy groups*, volumen 96 de Contemp. Math., págs 273–279. American Mathematical Society, 1989.

[122] A.L. Mal'cev. *Nilpotent torsion-free groups.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **13** (1949), 201–212.

[123] T. Matumoto. *On G-CW-complexes and a theorem of J.H.C. Whitehead.* J. Fac. Sci. Tokyo, Sect. IA Math. **18** (1971), 363–374.

[124] C.R.F. Maunder. *A short proof of a theorem of Kan and Thurston.* Bull. London Math. Soc. **13** (1981), no. 4, 325–327.

[125] J.P. May. *Classifying spaces and fibrations*, volumen 1 de Mem. Amer. Math. Soc. American Mathematical Society, 1975.

[126] R.J. Milgram. *The bar construction and abelian H-spaces.* Illinois J. Math. **11** (1967), 242–250.

[127] H. Miller. *The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces.* Ann. of Math. (2) **120** (1984), no. 1, 39–87.

[128] H. Miller. y V.P. Snaith. *On the K-theory of the Kahn-Priddy map.* J. London Math. Soc. (2) **20** (1979), no. 2, 339–342.

[129] G. Mislin. *Localization with respect to K-theory.* J. Pure Appl. Algebra **10** (1977/78), no. 2, 201–213.

[130] G. Mislin. *On the classifying space for proper actions.* En Cohomological Methods in Homotopy Theory, número 196 en Progress in Mathematics, págs 263–269. Birkhäuser, 2001.

[131] G. Mislin y G. Peschke. *Central extensions and generalized plus-constructions.* Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 2, 585–608.

[132] G. Mislin y A. Valette. *Advanced course in proper group actions.* CRM, Barcelona, 2001.

[133] F. Morel y V. Voevodsky. $\mathbf{A}^1$*-homotopy theory of schemes.* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **90** (2001), 45–143.

[134] J.A. Neisendorfer. *Primary homotopy theory*, volumen 25 de Mem. Amer. Math. Soc. American Mathematical Society, 1980.

[135] J.A. Neisendorfer. *Localization and connected covers of finite complexes.* En The Čech Centennial, volumen 181 de Contemp. Math., págs. 385–390. American Mathematical Society, 1994.

[136] Nofech, A. *A-cellular homotopy theories.* J. Pure Appl. Algebra **141** (1999), no. 3, 249–267.

[137] A.Y. Ol'shanskii. *The geometry of defining relations in groups.* Nauka, Moscú, 1989.

[138] Oyono-Oyono, H. *Baum-Connes conjecture and group actions on trees.* K-Theory **24** (2001), no. 2, 115–134.

[139] R.S. Palais. *The classification of G-spaces*, volumen 36 de Mem. Amer. Math. Soc. American Mathematical Society, 1960.

[140] R.S. Palais. *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups.* Ann. of Math. **73** (1961), 295–323.

[141] R.S. Palais y T.E. Stewart. *Deformations of compact differentiable transformation groups.* Amer. J. Math. **82** (1960), 935–937.

[142] F.P. Peterson. *Generalized cohomotopy groups.* Amer. J. Math. **78** (1956), 259–281.

[143] R.J. Platten. *On the minimal dimension of a classifying space for proper bundles.* Tesis Doctoral, University of London, 1999.

[144] D.G. Quillen. *Homotopical algebra*, volumen 43 de Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1967.

[145] D.G. Quillen. *An application of simplicial profinite groups.* Comm. Math. Helv. **44** (1969), 45–60.

[146] D.G. Quillen. *Cohomology of groups.* Actes du congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tomo 2, págs. 37–41. Gauthier-Villars, 1971.

[147] D.C. Ravenel. *Nilpotence and stability in stable homotopy theory*, volumen 80 de Annals of Mathematical Studies. Princeton University Press, 1992.

[148] D.J. Robinson. *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, volumen I. Springer-Verlag, 1972.

[149] D.J. Robinson. *A course in the theory of groups*, volumen 80 de Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1996.

[150] J.L. Rodríguez y D. Scevenels. *Iterating series of localization functors.* En Une Dégustation Topologique: Homotopy Theory in the Swiss Alps (Arolla 1999), volumen 265 de Contemp. Math., págs 211–221. American Mathematical Society, 2000.

[151] J.L. Rodríguez y D. Scevenels. *Universal epimorphic equivalences for group localizations.* J. Pure Appl. Algebra **148** (2000), no. 3, 309–316.

[152] J.L. Rodríguez y J. Scherer. *Cellular approximations using Moore spaces.* En Cohomological methods in homotopy theory, volumen 196 de Progress in Mathematics, págs 357–374, 1998.

[153] J.L. Rodríguez y J. Scherer. *CW-complejos de dimensión dos y espacios celulares.* Actas del VII Encuentro de Topología (El Escorial 2000). Universidad Complutense de Madrid, 2000.

[154] R.J. Sánchez. Transfer Thesis, University of London, 1999.

[155] D. Schattschneider. *The plane symmetry groups: their recognition and notation.* Amer. Math. Monthly **85** (1978), no. 6, 439–450.

[156] H.R. Schneebeli. *On virtual properties and group extensions.* Math. Z. **159** (1978), no. 2, 159–167.

[157] L. Schwartz. *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan fixed point set conjecture.* Chicago University Press, 1994.

[158] G. Schwarz. *Lifting smooth homotopies of orbit spaces.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **51** (1980), 37–136.

[159] G. Segal. *Classifying spaces and spectral sequences.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **34** (1968), 105–112.

[160] J.P. Serre. *Cohomologie des groupes discrets.* En Prospects in Mathematics (Proc. Sympos., Princeton Univ., Princeton, N.J., 1970), volumen 70 de Ann. of Math. Studies, págs 77–169. Princeton University Press, 1971.

[161] J.P. Serre. *Trees.* Springer-Verlag, 1980.

[162] C. Soulé. *The cohomology of $SL_3(\mathbb{Z})$.* Topology **17** (1978), no. 1, 1–22.

[163] D. Sullivan. *Genetics of the homotopy theory and the Adams conjecture.* Ann. of Math. (2) **100** (1974), 1–79.

[164] R.G. Swan. *Groups of cohomological dimension one.* J. Algebra **12** (1969), 585–601.

[165] R.W. Thomason. *Homotopy colimits in the category of small categories.* Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **85** (1979), no. 1, 91–109.

[166] A. Valette. *Introduction to the Baum-Connes conjecture*, en Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser, 2002.

[167] F.W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Scott, Foresman and Co., 1971.

[168] M. Weinstein. *Examples of groups.* Polygonal Publishing House, Passaic N.J., 1977.