On the Algebraic Limit Cycles of Quadratic Systems

Jordi Sorolla Bardají

Resum

Aquest treball consta de 5 capítols, el primer dels quals és una breu descripció dels conceptes bàsics necessaris per comprendre i avançar en els capítols següents. Així doncs, donat que s'estudien sistemes d'equacions differencials definits en pla i els cicles límits algebraics, són necessaris tots els conceptes preliminars sobre equacions diferencials i corbes planes; però també utilitzem tècniques projectives i resultats sobre solucions ja no polinomials sinó formals, per la qual cosa se'n fa una introducció.

En el Capítol 2, trobem tots els sistemes quadràtics (grau 2) que poden deixar invariant alguna corba de grau menor o igual que 4 que contingui un óval que sigui cicle límit del sistema. Primer fem un estudi de les possibles corbes en funció dels seus punts d'autointersecció (punts múltiples). Després arrivem a una aproximació de la forma de la corba a partir de certes propietats dels indexos d'intersecció en els punts múltiples i la seva localització. Finalment, comprovem si pot ser invariant per a un sistema quadràtic i acabem d'ajustar els paràmetres que han quedat lliures.

Al 3r capítol, comencem a estudiar els cicles límit des del punt de vista dels sistemes i no pas de les corbes invariants. Així, prenem els sistemes quadràtics que poden tenir cicles límit, concretament la classificació chinesa (famílies I, II i III). A aquest sistemes els apliquem un mètode que de forma recurrent ens podria donar les corves que poden ser invariant pel sistema a partir dels termes de grau màxim i de forma descendent, simplement coneixent el cofactor. Per a la família I busquem corves invariants i inversos de factor integrant, per a les famílies II i III busquem únicament inversos de factor integrant i en els casos en que el càlcul ens ho permet. D'aquesta manera obtenim conclusions sobre l'existència de cicles límits i cicles límits algebraics en certs casos. Observem que totes les corves invariants i inversos de factor integrant que podem anar obtenint al llarg de l'estudi tenen grau molt baix. Val a dir que l'estudi de la família I es força exhaustiu.

En el Capítol 4 ens proposem demostrar algebraicament allò ens permetia intuir el capítol anterior. Utilitzant tècniques projectives, l'estudi dels punts singulars i el valor del cofactor en certs punts (sobretot als de l'infinit, ja que depen del grau de la corba), es pot demostrar que la família I no te corbes invariants de grau superior a 3. Com a corol.lari, aquesta família no té cicles límit algebraics.

Finalment, l'últim capítol està dedicat a la coexistència de dos cicles límit algebraics que pertanyen a corbes invariants irreduibles diferents en un sistema quadràtic. Es demostra que aquests cicles límits hauran d'estar continguts un dins de l'altre. La

demostració passa per veure que si aquests cicles límit poguessin viure sense que les regions que defineixen s'intersequessin, aleshores estudiant els valors del cofactor en els punts singulars veiem que podríem construir un invers de factor integrant polinomial que seria el producte de les dues corbes i que donaria lloc a una integral primera Darboux, la qual cosa portarà a una contradicció.

Universitat Autònoma de Barcelona, 17 de Maig de 2005.

On the Algebraic Limit Cycles of Quadratic Systems

Jordi Sorolla Bardají

Summary

This work consists of 5 chapters, the first one of which is a brief description of the necessary basic concepts to understand and to advance in the following chapters. Therefore, since we study systems of differential equations defined in the plane and the algebraic limit cycles, it is necessary all the preliminary concepts on differential equations and plane curves; but we also use projective techniques and results on solutions no only polynomial but also formal, for that, an introduction is made to them.

In the Chapter 2, we find all the quadratic systems (degree 2) that can have an invariant algebraic curve of degree smaller or equal to 4, and contains an oval which is a limit cycle of the system. First we make a study of the possible curves in function of their self-intersection points (multiple points). Then, we arrive to an approach in the form of the curve by using certain properties of the indexes of intersection in the singular points and their localization. Finally, we test if it can be invariant for a quadratic system and we compute the parameters that are already free.

In the 3rd chapter, we start studying the limit cycles from the point of view of the systems instead of the invariant curves. We take the systems quadratic that can have cycles limit, concretely the Chinese classification (families I, II and III). To these systems we apply a method that would give us in a recurrent way the curves that can be invariant for the system starting from the terms of maximum degree and in a descending way, only knowing the cofactor. We look for invariant curves and inverse of integrating factors for family I; for the families II and III we look for inverse integrating factors only in the cases in which the calculation allows it. We obtain conclusions about the existence of limit cycles and algebraic limit cycles in certain cases. We observe that all the invariant curves and inverse integrating factors that we obtain along the study have a very low degree. The study of the family I is quite exhaustive.

In the Chapter 4, we proof algebraically what is induced by the previous chapter. Using projective techniques, the study of the singular points and the value of the cofactor in certain points (mainly those at the infinite since here depends on the degree of the curve), we can proof that family I doesn't have invariant algebraic curves of degree greater than 3. As corollary, this family does not have algebraic limit cycles.

Finally, the last chapter is dedicated to the coexistence of two algebraic limit cycles that belong to different irreducible invariant curves, in a system quadratic. It is proved that these limit cycles will be contained one inside the other. In the proof we see that if these cycles define regions that doesn't intersect, then studying the values of the

cofactor in the singular points we see that we could construct a polynomial inverse integrating factor that would be the product of the two curves and that would give place to a Darboux first integral, which brings to a contradiction.

Universitat Autònoma de Barcelona, 17^{th} May, 2005.