ESTUDI D'UNA CLASSE DE VARIETATS COMPLEXES COMPACTES

MÒNICA MANJARÍN ARCAS

En aquesta tesi doctoral presentem una nova tècnica per construir una família d'estructures complexes no-Kählerianes sobre certes classes de varietats compactes. La motivació principal d'aquest estudi es deu al fet que la majoria d'exemples de varietats complexes que es coneixen, en particular totes les varietats projectives, són de tipus Kählerià, tot i que a partir de dimensió 3 les varietats complexes de tipus Kähler són relativament escasses. L'eina bàsica és la classe $\mathcal{T}$ de varietats reals de dimensió senar que admeten una estructura CR de dimensió màxima i una acció CR transversa, que es coneix com estructura normal de quasi contacte (o nacs). Més precisament, partim d'una varietat de la classe $\mathcal{T}$ i per construccions geomètriques elementals obtenim una varietat compacta amb una estructura complexa definida per mitjà de la nacs de partida. Considerem tres construccions: (A) productes dues varietats reals de la classe $\mathcal{T}$, (B) S^1-fibrats principals sobre una varietat de la classe $\mathcal{T}$ (verificant una restricció addicional sobre el fibrat) i (C) suspensions d'una varietat de la classe $\mathcal{T}$ per un automorfisme preservant la nacs. Totes les varietats obtingudes per aquests procediments tenen en comú que admeten un camp holomorf sense zeros. Recíprocament, demostrem que l'estructura complexa d'una varietat Kähler compacta que admet un camp holomorf sense zeros es pot recuperar per la construcció del cas (C). La següent qüestió que ens plantegem és caracteritzar quan les estructures complexes anteriors admeten una mètrica Kähler. Demostrem que existeix una obstrucció per a que les varietats d'aquests tipus siguin de tipus Kählerià que s'expressa en termes d'un invariant cohomològic de la nacs de partida: la classe d'Euler del flux $\mathcal{F}$ associat a la CR-acció. Provem que cap varietat complexa obtinguda per les construccions anteriors pot ser de tipus Kählerià a menys que les classes d'Euler de totes les nacs implicades siguin zero. A més, quan els fluxos associats a les CR-accions són isomètrics donem condicions necessàries i suficients per a que la varietat sigui de tipus Kählerià utilitzant la teoria transversa de Hodge. En els casos (A) i (B) la caracterització es pot expressar de forma aproximada dient que la varietat complexa resultant és de tipus Kählierià si i només si les classes d'Euler són zero i els fluxos són transversalment Kählerians. En el cas (C), donat que imposar que el flux és isomètric és massa restrictiu, estudiem la qüestió sota altres hipòtesis. D'altra banda, en la memòria estudiem nacs sobre grups de Lie compactes i connexes de dimensió senar. Comencem caracteritzant geomètricament totes les nacs invariants per l'esquerra sobre els grups de Lie semisimples compactes i connexos i utilizem aquesta discussió per construir (noves) nacs no-invariants sobre qualsevol grup de Lie connex compacte de dimensió senar.

STUDY OF A CLASS OF COMPACT COMPLEX MANIFOLDS

MÒNICA MANJARÍN ARCAS

In this thesis we present a new approach to construct a new family of non-Kählerian complex structures on some classes of compact manifolds. The principal motivation of this study is that most of the known examples of complex manifolds, in particular all projective manifolds, are of Kähler type, even though besides dimensions 1 and 2, Kähler manifolds are the exception rather than the rule. The basic ingredient is the class $\mathcal{T}$ of odd-dimensional real manifolds admitting a CR-structure of maximal dimension and a transverse CR-action, which is also known as a normal almost contact structure or nacs for shortness. Namely, we depart from a manifold in the class $\mathcal{T}$ and by very elementary geometrical constructions we produce a compact manifold together with a complex structure defined by means of the nacs. More precisely, we consider three constructions: (A) products of odd-dimensional real manifolds in the class $\mathcal{T}$, (B) S^1-principal bundles over a manifold in the class $\mathcal{T}$ (with an extra restriction on the bundle) and (C) suspensions of a manifold in the class $\mathcal{T}$ by an automorphism preserving the nacs. The common feature of all the manifolds so constructed is the existence of a holomorphic vector field without zeros. Conversely, we prove that the complex structure of a compact Kähler manifold with a non-vanishing holomorphic vector field can be recovered by the construction of case (C). The next question that we consider is whether it is possible to characterize when the previous complex structures admit a Kähler metric. We prove that there is an obstruction for the resulting manifolds to be Kähler which can be expressed in terms of a cohomological invariant of the departing nacs: the Euler class of the flow $\mathcal{F}$ associated to the CR-action. We show that no complex manifold obtained by the previous constructions of cases (A), (B) or (C) can possibly be Kähler unless the Euler classes of all the involved nacs are zero. Moreover, when the flows associated to the CR-action are isometric we give necessary and sufficient conditions for the complex manifold to be Kähler exploiting transverse Hodge theory. In cases (A) and (B) the characterization can be roughly stated by saying that the resulting complex manifold is Kähler if and only if the Euler classes are zero and the flows are transversely Kählerian. In case (C) as imposing that the flow is isometric is too restrictive we study the question under different assumptions. On the other hand we study nacs on compact connected Lie groups of odd dimension. We begin by characterizing geometrically all left-invariant nacs on semisimple compact connected Lie groups and use this discussion to construct (new) non-invariant nacs on any compact connected Lie group of odd dimension.