“CICLOS ALGEBRAICOS Y REDUCCION SEMIESTABLE.”

Carlos A. Infante

“CICLOS ALGEBRAICOS Y REDUCCION SEMIESTABLE.”

Carlos A. Infante

CERTIFICO que la present memòria ha estat realitzada per Carlos A. Infante Vargas sota la meva direcció, i constitueix la seva Tesis per aspirar al grau de Doctor en Ciències Matemàtiques per la Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, Maig de 2006

Dr. Xavier Xarles i Ribas.

“He comprès. Hauria d’estar en pau. Qui deia que la pau sorgeix de la contemplació de l’ordre, de l’ordre comprès, gaudit, realitzat sense residus, joia, triomf, cessació de l’esforç? Tot és clar, límpid, i l’ull es posa sobre el tot i sobre les parts, i veu com les parts aspiren al tot, copsa el centre on s’escola la limfa, l’alè, la rel del perquè...”

Umberto Eco (El pèndul de Foucault).

“Només per a vosaltres, fills de la doctrina i de la saviesa, hem escrit aquesta obra. Escorcolleu el llibre, pareu esment en la intenció que hi hem dispersat i disposat en llocs diversos; alló que hem ocultat en un lloc, ho hem posat de manifest en un altre, per tal que pugui ser comprés per la vostra sagacitat.”

Heinrich Cornelius Agrippa von Nettesheim (De occulta philosophia, 3, 65).

Índice general

Introducción

La teoría de *ciclos algebraicos* tiene por objeto el estudio de las subvariedades de una variedad algebraica. Es por ello que un ciclo algebraico se define como combinación lineal de subvariedades irreducibles de una codimensión dada. Sin embargo, el conjunto de ciclos generado de esta forma es demasiado grande por lo que su estudio requiere imponer relaciones de equivalencia adecuadas que reflejen de manera más clara la geometría de la variedad. En el caso de las variedades proyectivas no-singulares, una buena relación de equivalencia es la *equivalencia racional*. Bajo esta relación las clases de ciclos algebraicos poseen un producto intersección que les da una estructura de anillo tradicionalmente llamado *anillo de Chow*. La principal herramienta para entender estos anillos es el estudio de la relación que hay entre ellos y los anillos de cohomología para diversas teorías cohomológicas. Por ejemplo, en el caso complejo, podemos usar la cohomología usual proveniente de la topología algebraica. Todas estas comparaciones con las diversas cohomologías nos llevan a la famosa *conjetura de Hodge* (que caracteriza los ciclos algebraicos como la parte pura de la descomposición de Hodge de la cohomología clásica) y a la teoría de *motivos de Grothendieck* (la cual, a *grosso modo*, puede pensarse como una teoría universal de cohomología para variedades algebraicas).

La idea subyacente a esta última teoría es que también sirve para estudiar los grupos de Chow de una variedad algebraica. A saber, la teoría de Grothendieck funciona para toda teoría de intersección "buena" sobre las variedades algebraicas, es decir, para toda relación de equivalencia adecuada sobre los ciclos algebraicos.

Más concretamente, si X es una variedad lisa y proyectiva sobre un cuerpo, se tiene $CH^0(X) \cong \mathbb{Z}$ y $CH^1(X) = Pic(X)$ es la variedad de Picard de X. Sin embargo, la estructura de los grupos de Chow $CH^j(X)$ para $j \geq 2$ es básicamente desconocida ya que, en general, $CH^2(X)$ no es un funtor representable.

La *conjetura de Hodge* predice que, para todo $j \geq 0$, el morfismo ciclo

(racional)

$$cl_X : CH^j(X)_{\mathbb{Q}} \to Hdg^j(X)_{\mathbb{Q}} \subseteq H^{2j}(X, \mathbb{Q}),$$

debe ser exhaustivo. Por otro lado, usando las aplicaciones de Abel-Jacobi construídas en los trabajos de Griffiths ([Gri])

$$AJ^j(X) : Ker(cl_X) \to J^j(X)_{\mathbb{Q}},$$

se han probado una serie de resultados interesantes (ver [Cl], [Ro], [Gre]). Sin embargo, hasta la fecha, no se tiene una descripción explícita del núcleo y la imagen de AJ^j.

En este sentido, los trabajos de Beilinson, Bloch, Deligne y Murre (entre otros) sugieren la existencia de una filtración:

$$CH^j(X)_{\mathbb{Q}} = F^0CH^j(X)_{\mathbb{Q}} \supseteq F^1CH^j(X)_{\mathbb{Q}} \supseteq \cdots \supseteq F^{j+1}CH^j(X)_{\mathbb{Q}} = \{0\}$$

tal que

$$F^1CH^j(X)_{\mathbb{Q}} = Ker(cl_X)$$

y

$$F^2CH^j(X)_{\mathbb{Q}} = Ker(AJ^j(X)).$$

Más aún, se ha sugerido que los cocientes graduados para esta filtración deben parecerse a los dados por la *fórmula conjetural de Beilinson* (ver [Ja1]):

$$Gr^mCH^j(X)_{\mathbb{Q}} \cong Ext^m_{\mathcal{MM}}(1, h^{2j-m}(X)(j)),$$

donde $\mathcal{MM}$ es la categoría conjetural de *motivos mixtos*.

En esta memoria nos proponemos estudiar los grupos de Chow de una variedad lisa y proyectiva sobre un cuerpo completo a través del estudio del morfismo ciclo. Más concretamente, construiremos un morfismo (que llamaremos *morfismo reducción*) que tiene por dominio los grupos de Chow de nuestra variedad y cuya imagen vive en un cociente del grupo de Chow de la variedad reducción. A diferencia del morfismo ciclo ℓ-ádico nuestro morfismo tiene la ventaja que su definición es independiente del primo ℓ. Será este morfismo reducción el que nos permitirá describir la imagen del morfismo ciclo ℓ-ádico en el caso que la reducción de la variedad satisfaga ciertas hipótesis de *degeneración total*.

Resulta claro para un experto que este problema cae dentro del tema más general de *motivos*. Sin embargo, y puesto que hemos de marcar límites (muy modestos), en esta memoria no trabajaremos el punto de vista motívico y sólo trataremos con la cohomología étale y de De Rham de la variedad dejando de lado el estudio de las cohomologías de Weil en general. Así mismo, tampoco estudiaremos teorías estrechamente relacionadas con la teoría de ciclos algebraicos como lo son, por ejemplo, la teoría K o la teoría de Hodge.

En nuestro estudio de los grupos de Chow hay dos ideas de fondo:

La primera consiste en restringirnos al estudio de las variedades con reducción *estrictamente semiestable.* Estas variedades presentan modelos cuyas reducciones tienen comportamientos que de alguna manera conocemos o podemos controlar. A partir de ciertas combinaciones de los grupos de Chow de las componentes de la reducción, construiremos estructuras enteras y operadores naturales sobre ellas de forma que podamos reconstruir los grupos de Chow de la reducción y, lo que es más importante, estudiar los grupos de Chow de la propia variedad.

La segunda idea consiste en relacionar estos operadores sobre las estructuras enteras con la *monodromía* asociada a la cohomología de nuestra variedad. Son estas relaciones las que nos permitirán describir de forma explícita la imagen del morfismo ciclo ℓ-ádico sólo en términos de los ciclos algebraicos y de manera independiente del primo ℓ, siempre que se impongan ciertas restricciones de degeneración total sobre la reducción de la variedad. La existencia de una monodromía no trivial es una particularidad de este tipo de variedades con *reducción totalmente degenerada.*

La memoria está organizada de la manera siguiente:

En el capítulo 1 se describe de forma breve la estructura de los cuerpos sobre las que nuestras variedades están definidas, así como las funciones logaritmo definidas sobre ellos. También se hace un estudio extenso de la *filtración de monodromía* asociada a una representación cuasi-unipotente en la categoría de espacios vectoriales sobre cuerpos completos.

El capítulo 2 está dedicado a la descripción de los *grupos de Chow* de variedades algebraicas y a su generalización a esquemas definidos sobre anillos completos. El capítulo termina con una serie de conjeturas que están en el centro de la teoría de los *ciclos algebraicos.*

En el capítulo 3 introduciremos el concepto de *semiestabilidad estricta*, así como la construcción de ciertos complejos (complejos de Chow) que nos permitirán definir estructuras enteras y operadores de monodromía sobre los cuales podremos aplicar los resultados del capítulo 2.

El capítulo 4 trata la construcción del morfismo principal de esta memoria, a saber, el *morfismo reducción* c_X (def. 4.2.1):

$$c_X : CH^j(X) \longrightarrow \frac{CH^j(Y)}{CH^j(Y) \cap Im(d_j^{-1})}.$$

Este morfismo se construye de forma completamente general en el sentido de que para definirlo no es necesario imponer una gran cantidad de hipótesis sobre la variedad. Este morfismo viene a ser la generalización natural del morfismo especialización para el caso de variedades estrictamente semiestables (ver teo. 4.2.6).

El capítulo 5 está dedicado al concepto de *reducción totalmente degenerada*. En él se definen una serie de propiedades sobre las cohomologías de la variedad reducción que tienen que ver con las conjeturas estandares y que son de gran utilidad cuando se combinan con la monodromía.

Es en este capítulo donde se enuncia y demuestra el teorema principal de esta memoria (teo. 5.4.4). En él se establece la relación existente entre el morfismo ciclo ℓ-ádico y el morfismo reducción construído en el capítulo 4:

Teorema 5.4.4. *Sea X una variedad lisa y proyectiva sobre K con un modelo estrictamente semiestable tal que la reducción satisface las propiedades (a) y (b) de la def. 5.2.1. Entonces, para todo $\ell \neq p$, se tiene:*

$$pr_{Gr_0^M}(cl_{\ell,X} \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha) = \rho \circ (c_X \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha), \quad \forall \alpha \in CH^j(X)_{\mathbb{Q}_\ell}.$$

Su importancia es crucial ya que, en cierto sentido, nos dice que el morfismo ciclo ℓ-ádico es la realización ℓ-ádica de nuestro morfismo reducción. Como consecuencia directa se tiene que los núcleos del morfismo ciclo y el morfismo reducción coinciden (cor. 5.4.6).

El capítulo 5 termina con un estudio detallado de la cohomología de De Rham y del operador de monodromía en el caso de *reducción ordinaria* (prop. 5.6.7).

El capítulo 6 está dedicado al estudio de las *variedades abelianas* con reducción totalmente degenerada y al producto de Curvas de Mumford. Aquí se calculan de forma explícita algunas de las construcciones hechas en los capítulos anteriores con el fin de ilustrar los conceptos y resultados que aparecen en ellos. El capítulo termina con la definición de las *Jacobianas intermedias* de [R-X2] y de su posible relación con el *morfismo asociado* AJ_X definido en la sec.4.4.

La memoria termina con un apéndice dedicado a exponer (de manera poco formal) una serie de preguntas abiertas que surgen de los resultados establecidos en esta memoria y que marcan una línea de investigación futura en nuestro estudio de los ciclos algebraicos.

Agradecimientos

Agradezco al *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México* (CONACyT) la ayuda recibida a través de la beca 116077 durante mis primeros años en Barcelona.

Quiero agradecer de forma especial el apoyo que en todo momento me ha brindado (y me brinda) mi asesor Xavier Xarles. En él he encontrado no sólo a un matemático excepcional sino a una persona excelente. Sin su constante y acertada ayuda esta tesis jamás hubiera llegado a buen término. Xavi, gracias por tu paciencia y por confiar en mí.

A toda la gente que hace posible que el STNB tenga vida y goze de su espléndida calidad matemática.

A todos los amigos y compañeros de la UB, UAB y UPC que he tenido la suerte de conocer desde que llegué a Barcelona.

A mis amigos Luis, Virginia, Iñaki, Caro y Francesc, por todos los momentos que hemos compartido juntos.

A mis suegros Pere y Pilar, y a mi cuñadita Claudia, por hacer que mi estancia en Catalunya sea más grata.

A mi hermana Penélope y a Daniel, por los siete largos años que tuve la oportunidad de gozar de su apoyo y compañía en Barcelona.

A mis padres y a mi hermana Lucrecia, el inmenso cariño y apoyo que siempre llevo conmigo y me convierten en un ser afortunado.

A mi pequeño sobrino Erik (a quien en breve espero conocer), el traernos una nueva alegría a la familia.

A mi sobrina Dunaí, el habernos enseñado (desde que era una niña) lo que es el amor a la vida.

Por último, quiero mencionar de manera especial a Laura, mi mujer, quien durante todos estos años (en el día a día) ha llenado mi vida con su amor y su alegría.

Capítulo 1

Preliminares.

En este capítulo introduciremos algunos de los conceptos que utilizaremos a lo largo de esta memoria. En la primera parte describiremos la estructura de los anillos de valoración discreta y las funciones logaritmo que se pueden definir sobre ellos. La segunda parte está dedicada al estudio general de las filtraciones sobre categorías abelianas. De especial interés es el estudio de la filtración de monodromía asociada a representaciones cuasi-unipotentes. Cabe mencionar que las proposiciones 1.2.4 y 1.5.1 probablemente son conocidas pero no hemos encontrado ninguna referencia. La proposición 1.5.6 es nuestra. El resto de proposiciones y teoremas de este capítulo pertenecen a [Se], [De2] y [De5]. Respecto a sus demostraciones, sólo escribiremos aquellas que nos parezcan de utilidad o sean de interés en la posterior introducción de nuevos conceptos.

1.1. Anillos de valoración discreta.

El descubrimiento de los números p-ádicos por parte de Hensel en 1905 dió paso a la creación de las completaciones no-arquimedianas $\mathbb{Q}_p$ del cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$. Desde el punto de vista aritmético estos cuerpos son tan naturales como la completación arquimediana $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$. Así como los reales $\mathbb{R}$ son la base del análisis clásico, los p-ádicos $\mathbb{Q}_p$ son el fundamento del análisis no-arquimediano.

La teoría de funciones no-arquimediana moderna nace con J. Tate en 1961. Motivado por el hecho de cómo caracterizar a las curvas elípticas con mala reducción, descubrió una nueva categoría de objetos algebraico-analíticos con una estructura suficientemente rica para hacer posible lo imposible: la continuación analítica sobre cuerpos totalment disconexos.

En esta sección seguiremos la exposición de [Se], (ver sec.I.1).

Un anillo R es un ***anillo de valoración discreta*** si es un dominio de ideales principales que tiene un único ideal primo $\mathcal{M} \neq 0$. El cuerpo $k = R/\mathcal{M}$ se llama cuerpo residual de R. Observemos que los elementos invertibles de R (que denotaremos por R^*) son los elementos de R que no pertenecen a $\mathcal{M}$. Estos elementos forman un grupo multiplicativo llamado las *unidades* de R.

Dado R un anillo de valoración discreta, el ideal $\mathcal{M}$ es de la forma (π) para algún elemento π en R que es irreducible. De esto se sigue que (salvo multiplicación por unidades) R tiene un único elemento irreducible. Llamaremos a uno de tales elementos un *uniformizante* de R.

Si denotamos por K el cuerpo de cocientes de R, entonces todo elemento x en K^* (el grupo multiplicativo de elementos no cero de K) puede ser escrito de forma única como $x = u\pi^n$ con u una unidad en R y $n \in \mathbb{Z}$. El entero n se llama valoración de x y se denota por $\nu(x)$. Observemos que la valoración es independiente del uniformizante π en R escogido.

Se tienen las siguientes propiedades:

(a) La aplicación $\nu : K^* \to \mathbb{Z}$ es un homomorfismo exhaustivo.

(b) $\nu(x+y) \geq min\{\nu(x), \nu(y)\}$.

Por convención $\nu(0) = +\infty$.

Observemos que la función ν determina completamente el anillo R ya que

$$R = \{x \in K | \nu(x) \geq 0\}.$$

Dado $a \in (0,1)$, se define el siguiente valor absoluto no-arquimediano en K:

$$|x| = \begin{cases} a^{\nu(x)}, \text{si} \quad a \neq 0 \\ 0, \text{si} \quad a = 0. \end{cases}$$

Denotaremos por $\widehat{K}$ la completación de K respecto de la topología definida por este valor absoluto.

Ahora estudiaremos la estructura de los anillos completos. Para ello seguiremos la exposición de [Se], sec. II.4, II.5

Sea R un anillo completo respecto a una valoración discreta con cuerpo de fracciones K y cuerpo residual k. Sea S un sistema de representantes de k en R y π un uniformizante de R.

La siguiente proposición nos dice como son todos los elementos de K.

Proposición 1.1.1. *Todo elemento $x \in K$ puede escribirse de forma única como una serie convergente*

$$x = \sum_{n \gg -\infty} s_n \pi^n, \quad s_n \in S.$$

que sólo incluye un número finito de términos negativos. Los elementos de R son los de la forma $\sum_{n\geq 0} s_n \pi^n$.

Ahora, si las características de R y k son iguales, se tiene:

Teorema 1.1.2. *Sea R un anillo de valoración discreta completo con cuerpo residual k. Si R y k tienen la misma característica y k es perfecto, entonces R es isomorfo a $k[[T]]$.*

Por otro lado, si las característica de R y k son diferentes (es decir, R de característica cero y k de característica $p > 0$), entonces podemos identificar $\mathbb{Z}$ con un subanillo de R y $p \in \mathbb{Z}$ con un elemento de R. Más aún, dado que p reduce a cero en k, se tiene $\nu(p) \geq 1$. El entero $e = \nu(p)$ se llama *índice de ramificación absoluto* de R.

La inclusión $\mathbb{Z} \hookrightarrow R$ se extiende por continuidad a una inyección de $\mathbb{Z}_p$ en R. Observemos que si k es el cuerpo finito con $q = p^f$ elementos, entonces R es un $\mathbb{Z}_p$-módulo libre de rango $n = ef$ y K es una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$ de grado n.

Si $e = 1$, se tiene que p es un uniformizante en R y en este caso se dice que R es *absolutamente no ramificado.*

El siguiente teorema analiza el caso no ramificado.

Teorema 1.1.3. *Si k es un cuerpo perfecto de característica $p > 0$, existe un único anillo de valoración discreta completo $W(k)$ (salvo isomorfismo) que es absolutamente no ramificado y que tiene a k como cuerpo residual.*

El anillo $W(k)$ se conoce como el anillo de Witt de k.

En el caso general, tenemos el siguiente:

Teorema 1.1.4. *Sea R un anillo de valoración discreta completo de característica distinta a la del cuerpo residual k perfecto y sea e el índice de ramificación absoluto. Entonces, existe un único homomorfismo de $W(k)$ en R que hace conmutar el diagrama siguiente:*

$$\begin{tikzcd} W(k) \arrow[rr] \arrow[dr] & & R \arrow[dl] \\ & k & \end{tikzcd}$$

Este homomorfismo es inyectivo y R es un $W(k)$-módulo libre de rango e.

Una descripción más precisa nos dice que R se obtiene de $W(k)$ adjuntando un elemento π que satisface una "*ecuación de Eisentein*":

$$\pi^e + a_1\pi^{e-1} + \cdots + a_e = 0, \quad a_i \in W(k)$$

tales que $p|a_i$ pero $p^2 \nmid a_e$.

Definición 1.1.5. *Diremos que un cuerpo k es* **pequeño** *si es una extensión puramente inseparable de una extensión finitamente generada de su cuerpo primo.*

1.2. Logaritmos.

En esta sección seguiremos la exposición de ([Fo], sec. 4.2).

Sea K un cuerpo de característica 0 completo respecto a un valor absoluto no-arquimediano $|\cdot|_K$. Para todo $r > 0$, denotemos por

$$B(a,r) = \{x \in K; |x-a|_K < r\}$$

la bola abierta de radio r y centro $a \in K$ y por

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in K; |x-a|_K \leq r\}$$

la correspondiente bola cerrada.

Consideremos la serie de potencias con coeficientes racionales siguiente:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}.$$

De acuerdo a ([Gou], cap. 4) el radio de convergencia de la serie se calcula como

$$\rho = \frac{1}{limsup|1/n|_K^{1/n}}.$$

Observando que la restricción de $|\cdot|_K$ a $\mathbb{Q}$ coincide con el valor absoluto p-ádico $|\cdot|_p$ (teo. de Ostrowski), se sigue que

$$|1/n|_p^{1/n} = p^{\nu_p(n)/n} \to 1$$

y por lo tanto la serie converge a un elemento en K para todo $x \in B(0,1)$.

Observación 1.2.1. *Obsérvese que la serie no converge sobre $|x| = 1$.*

Si K es completo respecto a una valoración discreta ν_K, entonces $R = \overline{B}(0,1)$ es el anillo de enteros de ν_K, $\mathcal{M} = B(0,1)$ es el ideal maximal (que es principal) y $k = R/\mathcal{M}$ es el cuerpo residual.

Recordemos que si k es perfecto y S es un sistema multiplicativo de representantes de Teichmüller de k en R, el grupo de unidades R^* está generado por S y por $U_0 = B(1,1)$:

$$R^* = S \cdot U_0.$$

Bajo estas hipótesis, se define la función logaritmo

$$log : R^* \longrightarrow K$$

por la serie

$$log(u) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}(u_0 - 1)^n}{n},$$

donde $u = su_0$ para algunos $s \in S$ y $u_0 \in U_0$.

Observemos que la función log tiene imagen en $B(0,1)$.

Definición 1.2.2. *Una* **prolongación del logaritmo** *a K^* es un homomorfismo*

$$Log : K^* \longrightarrow K$$

cuya restricción a R^* coincide con la función log definida anteriormente.

Observación 1.2.3. *Observemos que definir una prolongación del logaritmo equivale a elegir un elemento $c \in K$ tal que $Log(\pi) = c$ para π un elemento uniformizante en R (pues dado $x \in K^*$, existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $\pi^{-r}x \in R^*$ y por tanto*

$$Log(x) = rc + log(\pi^{-r}x).$$

En los objetos que estudiaremos más adelante, una "elección natural" del logaritmo será la dada por $Log(\pi) = 0$, es decir, nos interesarán aquellas prolongaciones que satisfacen $Log(K^*) = log(R^*)$.

Sean

$$\mathcal{P} = \{\text{Log prolongación de log tal que} : Log(K^*) = log(R^*)\}$$

y

$$\mathcal{U} = \{\pi \text{ uniformizante de } K\}/S.$$

Proposición 1.2.4. *Se tiene una biyección entre $\mathcal{P}$ y $\mathcal{U}$ dada por*

$$(Log(\pi) = 0) \longmapsto [\pi].$$

Demostración:. La aplicación es claramente exhaustiva.

Supongamos que π' es otro uniformizante de R tal que $[\pi'] = [\pi]$, entonces $\pi' = s\pi$ para algún $s \in S$.

Ahora, si $x \in K^*$, sea $r \in \mathbb{Z}$ tal que $\pi'^{-r}x \in R^*$. Luego,

$$Log(x) = log(\pi'^{-r}x) = log((s\pi)^{-r}x) = log(\pi^{-r}x)$$

de donde π' y π' definen la misma prolongación de log. ■

De aquí en adelante denotaremos por $\mathbf{log}_\pi$ al elemento de $\mathcal{P}$ tal que $Log(\pi) = 0$. Luego, si $\pi' = u\pi$ con $u \in R^*$ es otro uniformizante, se tiene:

$$log_{\pi'}(x) - log_\pi(x) = \nu(x)log(u), \quad \forall x \in K^*.$$

Observación 1.2.5. *Si L es una extensión finita de K, entonces $|\cdot|_K$ se extiende de manera única a un valor absoluto no-arquimediano $|\cdot|_L$ en L de forma que L es completo respecto a este valor absoluto (ver [Se], II,2). De esto se sigue que si $\overline{K}$ es una clausura algebraica de K, la función Log se extiende de manera única a una función*

$$Log : \widehat{\overline{K}^*} \longrightarrow \widehat{\overline{K}}.$$

1.3. Filtraciones.

En toda esta sección seguiremos la exposición de [De2], sec. 1.1.

Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. En general, sólo consideraremos filtraciones finitas sobre los objetos de $\mathcal{A}$.

Definición 1.3.1. *Una filtración decreciente (resp. creciente) F de un objeto A de $\mathcal{A}$ es una familia $(F^n(A))_{n\in\mathbb{Z}}$ (resp. $(F_n(A))_{n\in\mathbb{Z}}$) de subobjetos de $\mathcal{A}$ que satisfacen:*

$$F^m(A) \subseteq F^n(A), \forall n, m \quad tal\ que \quad n \leq m$$

$$(resp. F_n(A) \subseteq F_m(A), \forall n, m \quad tal\ que \quad n \leq m).$$

Un objeto filtrado es un objeto dotado de una filtración.

Si F es una filtración decreciente (resp. creciente) sobre A, pondremos $F^\infty(A) = 0$ y $F^{-\infty}(A) = A$ (resp. $F_{-\infty}(A) = 0$ y $F_\infty(A) = A$).

Las *filtraciones desplazadas* de una filtración decreciente W están definidas por:

$$W[n]^p(A) = W^{n+p}(A).$$

Observación 1.3.2. *(a) Si F es una filtración decreciente (resp. creciente) de un objeto A, entonces los $F_n(A) = F^{-n}(A)$ (resp. $F^n(A) = F_{-n}(A)$) forman una filtración creciente (resp. decreciente) de A.*

(b) Durante toda esta sección supondremos que todas las filtraciones son decrecientes salvo que se especifique lo contrario.

Una filtración F de A se llama finita si existen $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $F^n(A) = A$ y $F^m(A) = 0$.

Un *morfismo* de un objeto filtrado (A, F) en un objeto filtrado (B, F) es un morfismo $f : A \to B$ que satisface $f(F^n(A)) \subseteq F^n(B)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Los objetos filtrados (resp. filtrados de filtración finita) de $\mathcal{A}$ forman una categoría aditiva en la que existen los límites inductivos y proyectivos finitos (y por lo tanto los núcleos, conúcleos, imágenes y coimágenes de morfismos).

Un morfismo $f : A \to B$ se llama ***estricto (o estrictamente compatible con las filtraciones***) si la flecha canónica

$$Coim(f) = A/Ker(f) \to Im(f)$$

es un isomorfismo de objetos filtrados.

Si (A, F) es un objeto filtrado de $\mathcal{A}$, el graduado asociado es el objeto de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ definido por

$$Gr^n(A) = F^n(A)/F^{n+1}(A).$$

Sea (A, F) un objeto filtrado y $j : X \hookrightarrow A$ un subobjeto de A. La *filtración inducida sobre* X *por* F es la única filtración sobre X para la cual j es estrictamente compatible con las filtraciones, es decir,

$$F^n(X) = j^{-1}(F^n(A)) = X \cap F^n(A).$$

De manera dual, la *filtración cociente* sobre A/X (que es la única filtración para la cual $p : A \to A/X$ es estrictamente compatible con las filtraciones) está dada por

$$F^n(A/X) = p(F^n(A)) \simeq (X + F^n(A))/X \simeq F^n(A)/(X \cap F^n(A)).$$

Lema 1.3.3. *Si X e Y son dos subobjetos de A tales que $X \subseteq Y$, entonces sobre $Y/X \xrightarrow{\sim} Ker(A/X \to A/Y)$, la filtración cociente de Y coincide con la filtración inducida por A/X.*

La filtración del lema 1.3.3 sobre Y/X se llama *filtración inducida* por A. En particular, si $\Sigma : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es un complejo y B es filtrado, entonces $H(\Sigma) = Ker(g)/Im(f) = Ker(Coker(f) \to Coim(g))$ está dotado de forma canónica de la filtración inducida.

Proposición 1.3.4. *(i) Sea $f : (A, F) \to (B, F)$ un morfismo de objetos filtrados de filtración finita. Para que f sea estricto es necesario y suficiente que la sucesión*

$$0 \to Gr(Ker(f)) \to Gr(A) \to Gr(B) \to Gr(Coker(f)) \to 0$$

sea exacta.

(ii) Sea $\Sigma : (A, F) \to (B, F) \to (C, F)$ un complejo de morfismos estrictos. Se tiene de manera canónica

$$H(Gr(\Sigma)) \simeq Gr(H(\Sigma)).$$

En particular, si Σ es exacta en $\mathcal{A}$, se tiene que $Gr(\Sigma)$ es exacta en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

A continuación seguiremos la exposición de ([De2], sec. 1.2).

Sea A un objeto de $\mathcal{A}$ dotado de dos filtraciones F y G.

Por definición $Gr_F^n(A)$ es un cociente de un subobjeto de A y por lo tanto, está dotado de una filtración inducida por G. Luego, por paso a los graduados asociados, se tiene definido un objeto bigraduado $(Gr_G^n Gr_F^m(A))_{n,m\in\mathbb{Z}}$.

Si se definen las filtraciones inducidas como las filtraciones cocientes de las filtraciones inducidas sobre un subobjeto, se tienen los isomorfismos canónicos siguientes:

$$\begin{aligned} Gr_G^n Gr_F^m(A) &\simeq (F^m(A)\cap G^n(A))/(F^{m+1}(A)\cap G^n(A)+F^m(A)\cap G^{n+1}(A)) \\ &= (G^n(A)\cap F^m(A))/(G^{n+1}(A)\cap F^m(A)+G^n(A)\cap F^{m+1}(A)) \\ &\simeq Gr_F^m Gr_G^n(A). \end{aligned}$$

Definición 1.3.5. *Dos filtraciones finitas F y $\overline{F}$ sobre A se llaman n-*opuestas *si $Gr_F^p Gr_{\overline{F}}^q(A)=0, \forall p,q$ tal que $p+q\neq n$.*

Ahora supongamos que $A^{p,q}$ es un subobjeto bigraduado de $\mathcal{A}$ tal que:

a) $A^{p,q}=0$ salvo para un número finito de pares (p,q),

b) $A^{p,q}=0, \forall p,q, \quad p+q\neq n$,

En este caso se pueden definir dos filtraciones finitas n-opuestas de $A=\sum_{p,q}A^{p,q}$ haciendo:

$$F^p(A)=\sum_{p'\geq p}A^{p',q'} \quad \text{y} \quad \overline{F}^q(A)=\sum_{q'\geq q}A^{p',q'}.$$

Observemos que

$$Gr_F^p Gr_{\overline{F}}^q(A)=A^{p,q}.$$

Inversamente, se tiene:

Proposición 1.3.6. *Sean F y $\overline{F}$ dos filtraciones finitas de A.*

(i) Para que F y $\overline{F}$ sean n-opuestas, es necesario y suficiente que

$$\forall p,q, \quad p+q=n+1 \Longrightarrow F^p(A)\oplus\overline{F}^q(A)\xrightarrow{\sim} A.$$

(ii) Si F y $\overline{F}$ son n-opuestas y se hace

$$\begin{cases} A^{p,q}=0, & \textit{para} \quad p+q\neq n \\ A^{p,q}=F^p(A)\cap\overline{F}^q(A), & \textit{para} \quad p+q=n \end{cases}$$

entonces A es la suma directa de los $A^{p,q}$ y $F,\overline{F}$ se deducen de la bigraduación $A^{p,q}$ de A por el procedimiento anterior.

Dado que más adelante nos interesará comparar filtraciones crecientes con decrecientes, la proposición anterior nos permite hacer la siguiente definición:

Definición 1.3.7. *Sea F una filtración finita decreciente y G una filtración finita creciente sobre A. Diremos que F y G son n-**opuestas** si, y sólo si,*

$$\forall p, q \quad p - q = n + 1 \Longrightarrow F^p(A) \oplus G_q(A) \xrightarrow{\sim} A.$$

1.4. Monodromía.

En esta sección seguiremos la exposición de [De5], sec. 1.6.

Proposición 1.4.1. *Sea N un endomorfismo nilpotente de un objeto V de una categoría abeliana. Entonces, existe una, y sólo una, filtración finita M de V que es creciente y tal que*

(i) $NM_i \subseteq M_{i-2}$,

(ii) N^k *induce un isomorfismo*

$$Gr_k^M V \xrightarrow{\sim} Gr_{-k}^M V.$$

Llamaremos a esta filtración la ***filtración de monodromía*** asociada a N.

Demostración: La existencia se prueba por inducción sobre el menor entero positivo d tal que $N^{d+1} = 0$, que llamaremos *orden de nilpotencia de* N.

Si $d = 0$, es decir, si $N = 0$, se coge como M la filtración trivial: $Gr_i^M V = 0$ para $i \neq 0$.

Si $d \geq 0$, se hace $M_d = V, M_{d-1} = KerN^d, M_{-d} = ImN^d$ y $M_{-d-1} = 0$, de manera que $Gr_d^M V$ y $Gr_{-d}^M V$ son la coimagen y la imagen de N^d.

Ahora, sobre $KerN^d/ImN^d$, la d-ésima potencia de N es cero y así (por hipótesis de inducción) podemos definir M sobre $KerN^d/ImN^d$.

Finalmente, se define M_i sobre V (para $d-1 \geq i \geq -d$) como la imagen inversa en $KerN^d$ de los correspondientes subobjetos M_i en $KerN^d/ImN^d$.■

Observación 1.4.2. *Una definición más explícita de la filtración asociada a N es a través del* **producto de convolución** *(ver [Il1], [Sa], sec 2.1) :*

Si designamos por $K_\bullet V$ (resp. $I^\bullet V$) la filtración núcleo (resp. imagen) definida por

$$K_k V = KerN^{k+1} \quad (\textit{resp.} \quad I^k V = ImN^k),$$

*entonces la filtración M es el "*producto de convolución*" de las filtraciones K e I:*

$$M_i = \sum_{k-j=i} K_k \cap I^j.$$

Definición 1.4.3. *La parte primitiva $P_i(V)$ de $Gr_i^M V$ es el núcleo del morfismo inducido por N sobre los graduados:*

$$P_i(V) = Ker(N : Gr_i^M V \to Gr_{i-2}^M V).$$

Observemos que si $i > 0$, del isomorfismo

$$N^{i-1} \circ N : Gr_i^M V \to Gr_{-i}^M V,$$

se sigue que $N : Gr_i^M V \to Gr_{i-2}^M V$ es inyectivo y por lo tanto que $P_i = 0$.

De manera similar, si $i \geq 0$, del isomorfismo

$$N \circ N^{i+1} : Gr_{i+2}^M V \to Gr_{-i}^M V \to Gr_{-i-2}^M V,$$

se sigue que $Gr_{-i}^M V$ es suma directa de P_{-i} y de la imagen de $Gr_{i+2}^M V$ por N^{i+1}. Pero, dado que N induce un isomorfismo de esta imagen con $Gr_{-i-2}^M V$, se tiene

$$Gr_{-i}^M V \simeq P_{-i} \oplus Gr_{-i-2}^M V.$$

Luego, por inducción decreciente sobre $i \geq 0$, se construye un isomorfismo de $Gr_{-i}^M V$ con la suma de los P_{-j}'s para $j \geq i$, $j \equiv i$ (mod 2).

Observación 1.4.4. *(a) Utilizando los isomorfismos $N^i : Gr_i^M V \xrightarrow{\sim} Gr_{-i}^M V$, obtenemos isomorfismos*

$$Gr_i^M V \simeq \bigoplus_{j \geq |i|, j \equiv i (2)} P_{-j}.$$

(b) Vía los anteriores isomorfismos, los morfismos $N : Gr_i^M V \to Gr_{i-2}^M V$ son las inclusiones evidentes para $i \geq 1 (i-2 \geq -1)$, y las proyecciones evidentes para $i - 2 \leq -1$:

$$\begin{array}{rccccccc}
\downarrow Gr_3 : & & & & P_{-3} & \downarrow & \cdots \\
Gr_2 \downarrow : & & & P_{-2} & \downarrow & P_{-4} & \cdots \\
\downarrow Gr_1 : & & P_{-1} & \downarrow & P_{-3} & \downarrow & \cdots \\
Gr_0 \downarrow : & P_0 & \downarrow & P_{-2} & \downarrow & P_{-4} & \cdots \\
\downarrow Gr_{-1} : & & P_{-1} & \downarrow & P_{-3} & \downarrow & \cdots \\
Gr_{-2} \downarrow : & & & P_{-2} & \downarrow & P_{-4} & \cdots \\
\downarrow Gr_{-3} : & & & & P_{-3} & \downarrow & \cdots
\end{array}$$

Recordemos que el desplazar en -2 una filtración creciente se denota por [2].

Lema 1.4.5. *El morfismo $N : (V, M) \to (V, M[2])$ es estrictamente compatible con las filtraciones.*

Demostración: Hay que probar que la flecha canónica

$$CoimN = V/KerN \rightarrow ImN$$

es un isomorfismo de objetos filtrados. Dado que

$$N(M_{i+2}/(KerN \cap M_{i+2})) = NM_{i+2}$$

y

$$ImN \cap M_{i+2}[2] = ImN \cap M_i,$$

basta probar que $NM_{i+2} = ImN \cap M_i$ (ver lema 1.6.5 [De5]).

Claramente $NM_{i+2} \subseteq ImN \cap M_i$. Para probar la inclusión contraria consideremos dos casos:

(i) Si $i < 0$, el morfismo $N : M_{i+2} \rightarrow M_i$ tiene un graduado exhaustivo:

$$N : Gr^M_{i+2}V = M_{i+2}/M_{i+1} \twoheadrightarrow Gr^M_i V = M_i/M_{i-1},$$

de donde $N : M_{i+2} \rightarrow M_i$ es exhaustivo y por lo tanto $NM_{i+2} = M_i$.

(ii) Si $i + 2 > 0$, el morfismo $N : V/M_{i+2} \rightarrow V/M_i$ tiene un graduado inyectivo:

$$N : Gr^M_{i+3}V = M_{i+3}/M_{i+2} \hookrightarrow M_{i+1}/M_i = Gr^M_{i+1}V,$$

de donde $N : V/M_{i+2} \rightarrow V/M_i$ también es inyectivo y por lo tanto $N^{-1}M_i \subseteq M_{i+2}$. ■

El lema 1.4.5 y la prop. 1.3.4(i) nos permiten intercambiar $KerN$ y Gr^M.

Corolario 1.4.6. *La inclusión de $KerN$ en V induce los isomorfismos*

$$Gr^M_i(KerN) \xrightarrow{\sim} P_i(V), \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Definición 1.4.7. *Dentro de la categoría de K-espacios vectoriales se define el producto tensorial de (V', N') y (V'', N'') como la pareja (V, N), donde*

$$V = V' \otimes V'' \quad y \quad N = N' \otimes 1 + 1 \otimes N''.$$

Proposición 1.4.8. *(Ver [De5], prop. 1.6.9) Si K es de característica 0, entonces*

(i)

$$M_i(V' \otimes V'') = \sum_{i'+i''=i} M_{i'}(V') \otimes M_{i''}(V'').$$

(ii) La formación del graduado Gr^M es compatible con el producto tensorial.

1.5. Representaciones cuasi-unipotentes.

En esta sección aplicaremos los resultados de la sección anterior a la categoría abeliana de los espacios vectoriales sobre un cuerpo K. Seguiremos la exposición de ([Il1], sec. 1).

Sea R un anillo de valoración discreta completo con cuerpo de cocientes K y cuerpo residual k de característica $p \geq 0$. Denotemos por $\overline{K}$ una clausura separable de K y por K^{nr} la máxima extensión no ramificada de K en $\overline{K}$. Observemos que el cuerpo residual $\overline{k}$ de K^{nr} es una clausura separable de k. Denotemos por $G_K = Gal(\overline{K}/K)$ el grupo de Galois absoluto de K y por $I_K = Gal(\overline{K}/K^{nr})$ el subgrupo de inercia.

Sea $\ell \neq p$ un número primo. Recordemos (ver [Il1], sec. 1) que si V es un $\mathbb{Q}_\ell$-espacio vectorial de dimensión finita, entonces una representación ℓ-ádica de G_K

$$\rho : G_K \longrightarrow GL(V)$$

es cuasi-unipotente si existe un subgrupo abierto I_1 de I_K tal que la restricción de ρ a I_1 es unipotente, es decir, dado $g \in I_1$ existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que

$$(\rho^m(g) - \mathrm{Id})^n = 0.$$

Más aún, si ρ es una representación cuasi-unipotente, existe un único morfismo nilpotente llamado **operador de monodromía**

$$N : V(1) \to V$$

caracterizado por el hecho de que la restricción de la representación ℓ-ádica a I_1 queda determinada por:

$$\rho(g) = exp(N \circ t_\ell(g)), \quad \forall g \in I_1$$

donde

$$t_\ell : I_K \to \mathbb{Z}_\ell(1) := \varprojlim \mu_{\ell^n}(\overline{K})$$

$$g \longmapsto (\frac{g(\pi^{1/\ell^n})}{\pi^{1/\ell^n}})_n$$

es la ℓ-componente del morfismo t en la sucesión canónica del grupo de inercia

$$1 \to P \to I_K \xrightarrow{t} \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell(1) \to 1$$

con P un pro-p-grupo y $\prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell(1)$ el grupo de inercia moderado.

ACLARACION: Lo anterior quiere decir que la acción de I_1 está dada por:

$$\rho(g)x = \sum_{i\geq 0} \frac{N^i(t_\ell(g)x)}{i!}, \quad \forall g \in I_1$$

donde $t_\ell(g)x := t_\ell(g) \otimes x \in \mathbb{Q}_\ell(1) \otimes V = V(1)$.

Más aún, el operador

$$N : \mathbb{Q}_\ell(1) \to End(V)$$

es G_K-invariante, es decir, para $z \in \mathbb{Q}_\ell(1)$, $x \in V$, $g \in G_K$ se tiene

$$\rho(g)N(zx) = N(\chi(g)z \cdot \rho(g)x)$$

donde $\chi : G_K \to \mathbb{Z}_\ell^*$ es el caracter ciclotómico.

De acuerdo a la prop. 1.4.1, el endomorfismo N nos permite definir la ***filtración de monodromía*** sobre H caracterizada como la única filtración creciente

$$\cdots \subseteq M_iV \subseteq M_{i+1}V \subseteq \cdots$$

tal que

$$NM_iV(1) \subseteq M_{i-2}V$$

y N^k induce un isomorfismo

$$N^k : Gr_k^M V(k) \xrightarrow{\sim} Gr_{-k}^M V.$$

En particular, si $k = \mathbb{F}_q$ es finito y $F \in G_K$ es un levantamiento del Frobenius geométrico ($a \mapsto a^{1/q}$) de G_k, se tiene la relación

$$N(zFx) = qFN(zx)$$

que escribiremos como $NF = qFN$.

Proposición 1.5.1. *La filtración de monodromía $M_\bullet$ sobre V satisface:*

$$V^{I_1} = KerN \subseteq M_0.$$

Más aún, $V^{G_K} = M_0^{G_K}$.

Demostración: La demostración se sigue del hecho de que la monodromía es tal que la representación de G_K restringida a I_1 está dada por

$$\rho(g) = exp(N \circ t_\ell(g)), \quad \forall g \in I_1.$$

Luego, $x \in V^{I_1}$ si, y sólo si,

$$x = \rho(g)x = exp(N(t_\ell(g)x)), \quad \forall g \in I_1.$$

Pero esto sucede si, y sólo si, $N(t_\ell(g)x) = 0$ para todo $g \in I_1$; es decir si, y sólo si, $x \in KerN$.

Por otro lado, observemos que si el orden de nilpotencia de N es d, entonces

$$\begin{aligned} M_0 &= \sum_{k=j} K_k \cap I^j = \sum_{k=0}^{d} K_k \cap I^k \\ &= KerN \cap ImN^0 + \cdots + KerN^{d+1} \cap ImN^d \\ &\supseteq KerN. \end{aligned}$$

Finalmente, cogiendo fijos por G_K en

$$V^{G_K} \subseteq V^{I_K} \subseteq V^{I_1} \subseteq M_0,$$

se obtiene $V^{G_K} = M_0^{G_K}$. ■

Observación 1.5.2. *Notemos que si la acción de I_1 sobre V es unipotente, entonces también lo es su acción sobre $V(1)$. Esto se sigue del hecho de que el "twist"por $\mathbb{Z}_\ell(1)$ sólo involucra raíces de la unidad de orden primo con p y por lo tanto la inercia I_K actúa trivialmente sobre él.*

Ahora analicemos el caso particular en que V es un K-espacio vectorial de dimensión finita $d+1$ con una base $\mathbf{e} = \{e_d, e_{d-2}, \ldots, e_{-d}\}$ tal que $N(e_i) = e_{i-2}$, para $i \neq -d$ y $N(e_{-d}) = 0$ (ver [De5], sec. 1.6.7).

En este caso la matriz asociada a N tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que $ImN^j = KerN^{d+1-j}$, para $0 \leq j \leq d+1$, es fácil ver que la filtración por el núcleo y la filtración por la imagen coinciden.

Más aún, para todo $0 \leq j \leq d+1$

$$\begin{aligned} M_{d-2j} &= \sum_{k-l=d-2j} KerN^{k+1} \cap ImN^l \\ &= \sum_{k} KerN^{k+1} \cap ImN^{k-d+2j} \end{aligned}$$

$$= \sum_k KerN^{k+1} \cap KerN^{2d+1-k-2j}$$

de donde,

$$N^{d+1-j}(M_{d-2j}) \subseteq \sum_k KerN^{k-d+j} \cap KerN^{-(k-d+j)} = KerN^0 = \{0\}$$

por lo tanto $M_{d-2j} \subseteq KerN^{d+1-j}$.

De manera similar, se tiene

$$M_{d-2j} = \sum_{k-l=d-2j} KerN^{k+1} \cap ImN^l$$

$$= \sum_{l\geq 0} KerN^{l+d-2j+1} \cap ImN^l$$

$$= \sum_{l\geq 0} ImN^{2j-l} \cap ImN^l \supseteq \underbrace{ImN^j \cap ImN^j}_{\text{sumando} \quad l=j} = ImN^j.$$

De lo anterior se sigue que, para todo $0 \leq j \leq d+1$,

$$ImN^j = M_{d-2j} = KerN^{d-j+1},$$

por lo que en este caso las tres filtraciones coinciden y

$$M_i =< e_i, e_{i-2} \cdots , e_{-d} > .$$

Observación 1.5.3. *Debido a la forma en que se han escogido las bases, se tiene que si $i \equiv d(mod2)$, entonces $M_{i+1} = M_i$. De esto se sigue que la filtración de monodromía sólo tiene la mitad de elementos que en un principio se esperan.*

Para el caso general (ver [De5], sec. 1.6.7), cogiendo una base de vectores propios generalizados para V, se tiene que $V = \oplus V_\alpha$ con V_α K-subespacio N-estable tal que la matriz asociada a $N|_{V_\alpha}$ es un bloque de Jordan del tipo anterior de tamaño $d_\alpha + 1 = dimV_\alpha$. Se tiene que $M_i(V) = \oplus_\alpha M_{i,\alpha}(V_\alpha)$.

A partir de la obs. 1.5.3, hacemos la siguiente:

Definición 1.5.4. *Diremos que la filtración de monodromía $M_\bullet$ es* **reducida** *si satisface:*

$$M_{i+1} = M_i \iff i \equiv d(mod2).$$

Observación 1.5.5. *Si en una filtración reducida sólo consideramos una vez cada elemento repetido, obtenemos una nueva filtración (que denotaremos por* $\widetilde{M}_\bullet$*) que tiene la mitad de elementos que la filtración inicial. Observemos que esto es lo mismo que renombrar los elementos de la filtración de la manera siguiente :*

Si $i \equiv d(mod2)$ *(digamos* $d+i=2j$ *con* $j \in \mathbb{Z}$*), entonces*

$$\widetilde{M}_j = M_i (= M_{2j-d}).$$

Así, se tiene que la nueva filtración

$$0 = \widetilde{M}_{-1} \subset \widetilde{M}_0 \subset \cdots \subset \widetilde{M}_d$$

satisface:

(i) $N\widetilde{M}_j \subseteq \widetilde{M}_{j-1}$.

(ii) Se tienen isomorfismos

$$N^{2j-d} : Gr_j^{\widetilde{M}} V \xrightarrow{\sim} Gr_{d-j}^{\widetilde{M}} V.$$

Proposición 1.5.6. *Sea* V *un* K*-espacio vectorial y* N *un operador nilpotente sobre* V *con orden de nilpotencia* d*. La filtración de monodromía para* N *es reducida si, y sólo si, para todo* α *se cumple*

$$d_\alpha \equiv d(mod2).$$

Demostración: Del caso general se tiene

$$\begin{aligned} M_{i+1}(V) = M_i(V) &\Longleftrightarrow M_{i+1,\alpha}(V_\alpha) = M_{i,\alpha}(V_\alpha), \quad \forall\alpha \\ &\Longleftrightarrow i \equiv d_\alpha(mod2), \quad \forall\alpha, \end{aligned}$$

de lo cual se sigue la afirmación. ■

Observación 1.5.7. *En general, aún en el caso de la prop. 1.5.6, las tres filtraciones* $KerN, ImN$ *y* N *son distintas como lo muestra el siguiente:*

Ejemplo 1.5.8. *Si* $N^4 = 0$ *sobre* V *con* $dimV = 6$*, entonces* $V = V_1 \oplus V_2$ *con* $V_1 =< e_1, N(e_1) >$*,* $V_2 =< e_3, N(e_3), N^2(e_3), N^3(e_3) >$ *y* N *está representado por la matriz*

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Un cálculo sencillo muestra que

$$V \supset KerN^3 = V_1 \oplus < N(e_3), N^2(e_3), N^3(e_3) >$$

$$\supset KerN^2 = V_1 \oplus < N^2(e_3), N^3(e_3) >$$

$$\supset KerN =< N(e_1) > \oplus < N^3(e_3) > \supset \{0\},$$

$$V \supset ImN =< N(e_1) > \oplus < N(e_3), N^2(e_3), N^3(e_3) >$$

$$\supset ImN^2 =< N^2(e_3), N^3(e_3) >$$

$$\supset ImN^3 =< N^3(e_3) > \supset \{0\}.$$

Mientras que

$$V = M_3 \supset M_2 = M_1 = KerN^3$$

$$\supset M_0 = M_{-1} =< N(e_1) > \oplus < N^2(e_3), N^3(e_3) >$$

$$\supset M_{-2} = M_{-3} = ImN^3 \supset \{0\}.$$

Capítulo 2

Grupos de Chow.

En este capítulo introduciremos los conceptos de geometría algebraica necesarios para definir los principales objetos de estudio de esta memoria, a saber, los grupos de Chow. Estos grupos son las clases de equivalencia de los ciclos algebraicos respecto a la equivalencia racional. Esta es una generalización a dimensiones superiores del concepto de equivalencia lineal para divisores sobre variedades no-singulares. Los grupos de homología de Chow comparten cierta analogía formal con los grupos de homología de una variedad. Así, la teoría de clases bivariantes viene a ser una extensión de las propiedades de homología-cohomología que aparecen en topología y que son particularmente útiles cuando se trabaja con propiedades funtoriales y formales. Es importante observar que se permiten variedades singulares.

2.1. Equivalencia racional.

En esta parte seguiremos la exposición de ([Fu], cap. 1).

Comencemos por aclarar qué es lo que entenderemos por una variedad a lo largo de esta memoria.

Dado un cuerpo arbitrario K, un esquema algebraico sobre K es un esquema X junto con un morfismo $X \to Spec(K)$ que es de tipo finito. Recordemos que esto último quiere decir que X tiene un recubrimiento finito por abiertos afines cuyos anillos de coordenadas son K-algebras finito generadas.

También recordemos que un esquema es íntegro si, y sólo si, es irreducible y reducido.

Una **variedad** X sobre K es un esquema algebraico sobre K que es íntegro. Observemos que estamos permitiendo variedades con singularidades.

Una subvariedad V de un esquema X es un subesquema cerrado de X que es una variedad. Si denotamos por $\mathcal{O}_{V,X}$ el anillo local de X a lo largo de V y por $\mathcal{M}_{V,X}$ su ideal maximal, entonces el cuerpo de funciones de V, denotado por $R(V)$, es el cuerpo residual $\mathcal{O}_{V,X}/\mathcal{M}_{V,X}$.

Si X es una variedad y V es una subvariedad de X de codimensión 1, entonces el anillo local $A = \mathcal{O}_{V,X}$ es un dominio local de dimensión 1 que determina un homomorfismo bien definido

$$ord_V : R(X)^* \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$r \mapsto \ell_A(A/(r))$$

donde $\ell_A(A/(r))$ denota la longitud del A-módulo $A/(r)$. Observemos que si X es no-singular a lo largo de V, A es un anillo de valoración discreta y ord_V no es más que la valoración respectiva. En general, para $r \in \mathcal{O}_{V,X}$, se tiene (ver [Fu], Ex. 1.2.4)

$$ord_V(r) \geq min\{n \in \mathbb{Z} | r \in \mathcal{M}^n_{V,X}\}$$

con igualdad si X es no-singular a lo largo de V y desigualdad esctricta si $r \in \mathcal{M}_{V,X}$ y X es singular a lo largo de V.

Dado X un esquema algebraico sobre K, definimos el **grupo de j-ciclos sobre** X, que denotaremos por $Z_j(X)$, como el grupo abeliano libre generado por las subvariedades de dimensión j de X. Así, un j-ciclo sobre X es una suma formal $\sum n_i[V_i]$ donde V_i es una subvariedad de dimensión j de X y n_i un entero.

Observemos que si W es una subvariedad de dimensión $j+1$ de X y $t \in R(W)^*$ es una función regular, podemos definir el j-ciclo sobre X siguiente:

$$[div(t)] = \sum ord_V(t)[V],$$

la suma variando sobre todas las subvariedades V de W de codimensión 1. La suma es finita ya que, para $t \in R(W)^*$ fija, sólo hay un número finito de tales subvariedades V en W con $ord_V(t) \neq 0$.

Diremos que un j-ciclo α es ***racionalmente equivalente a cero*** si existe un número finito de subvariedades W_i de dimensión $j+1$ de X y funciones $t_i \in R(W_i)^*$, tales que

$$\alpha = \sum [div(t_i)].$$

Observemos que los ciclos racionalmente equivalentes a cero forman un subgrupo $Rat_j(X)$ de $Z_j(X)$. Definimos el j-ésimo ***grupo de homología de Chow*** como el grupo cociente de j-ciclos módulo equivalencia racional sobre X:

$$CH_j(X) := Z_j(X)/Rat_j(X).$$

También definimos

$$CH_*(X) = \bigoplus_{j\geq 0}^{dimX} CH_j(X)$$

cuyos elementos son llamados *clases de ciclos* sobre X.

Ahora definiremos dos de las operaciones principales que existen entre estos grupos.

Para ello, sea $f : X \to Y$ un morfismo propio entre esquemas algebraicos sobre K. Observemos que si V es una variedad de X, entonces $f(V) = W$ es subvariedad en Y y se tiene una inmersión de $R(W)$ en $R(V)$ que viene a ser una extensión finita de cuerpos si $dimW = dimV$. Si hacemos

$$deg(V/W) = \begin{cases} [R(V) : R(W)], & \text{si} \quad dim(W) = dim(V) \\ 0, & \text{si} \quad dim(W) < dim(V), \end{cases}$$

entonces podemos definir el **push-forward** del morfismo f como

$$f_*[V] = deg(V/W)[W]$$

Este morfismo se extiende por linealidad a un homomorfismo entre los grupos de ciclos

$$f_* : Z_j(X) \to Z_j(Y),$$

que pasa bien bajo equivalencia racional y por lo tanto induce un homomorfismo

$$f_* : CH_j(X) \to CH_j(Y),$$

de manera que CH_* es un funtor covariante para morfimos propios, es decir, si $g : Y \to Z$ es morfismo propio, entonces $(gf)_* = g_* f_*$.

De manera similar, si $f : X \to Y$ es un morfismo plano de dimensión relativa n (lo cual quiere decir que para toda subvariedad V de Y y todo componente irreducible V' de $f^{-1}(V)$, se tiene $dimV' = dimV + n$), se define el **pull-back** de f por

$$f^*[V] = [f^{-1}(V)].$$

Este se extiende por linealidad a un homomorfismo pull-back

$$f^* : CH_j(Y) \to CH_{j+n}(X)$$

de manera que CH_* es un funtor contravariante para morfismos planos, es decir, $(gf)^* = f^* g^*$ para todo morfismo plano $g : Y \to Z$.

Por último, recordemos que si Y es un subesquema cerrado de X y hacemos $U = X - Y$ el complemento de Y, se tiene la sucesión exacta

$$CH_j(Y) \xrightarrow{i^*} CH_j(X) \xrightarrow{j^*} CH_j(U) \to 0$$

donde $i : Y \to X$ y $j : U \hookrightarrow X$ son las inclusiónes respectivas.

Para esquemas algebraicos sobre un cuerpo K, siempre se tiene definido el producto exterior:

$$CH_i(X) \otimes CH_j(Y) \xrightarrow{\times} CH_{i+j}(X \times Y)$$

$$[V] \times [W] = [V \times W].$$

2.2. Morfismo Gysin.

En esta sección seguiremos la exposición de ([Fu], cap. 6).

Comencemos por recordar que una sucesión de elementos $a_1, ..., a_d$ en un anillo A se llama *regular* si el ideal $I = (a_1, ..., a_d)$ es un ideal propio de A y la imagen de a_i en $A/(a_1, ..., a_{i-1})$ no es un divisor de cero para todo $1 \leq i \leq d$.

Una inmersión cerrada de esquemas $X \hookrightarrow Y$ es una *inmersión regular de codimensión d* si todo punto de X tiene un entorno afín $U = Spec(A)$ en Y tal que si I es el ideal de A que define a X, entonces I está generado por una sucesión regular de longitud d.

Sea $i : X \hookrightarrow Y$ una inmersión regular de codimensión d e $\mathcal{I}$ el haz de ideales de definición de X en Y. Recordemos que tenemos un morfismo proyección

$$\pi : N_X Y \to X$$

donde

$$N_X Y = Spec(\oplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1})$$

es el *haz normal de X en Y* (que es un haz vectorial de rango d sobre X) y una sección cero

$$s_N : X \to N_X Y$$

tal que $\pi \circ s = id_X$. Más aún, se tiene un isomorfismo (ver [Fu], sec. 3.3)

$$\pi^* : CH_{j-d}(X) \to CH_j(N_X Y)$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Observemos que si V es una subvariedad de dimensión j en Y, entonces el cono normal de $V \cap X$ en V (que denotaremos por $C_{V \cap X} V$ y cuya definición es la misma que la del haz normal) es un subesquema cerrado de dimensión pura j de N_XY. Esto nos permite definir el *homomorfismo especialización* siguiente:

$$\sigma : CH_j(Y) \to CH_j(N_XY)$$
$$[V] \mapsto [C_{V\cap X}V].$$

Más aún, se define el ***homomorfismo Gysin***:

$$i^! : CH_j(Y) \to CH_{j-d}(X)$$

a través de la composición:

$$\begin{array}{ccc} CH_j(Y) & \xrightarrow{i^!} & CH_{j-d}(X) \\ \searrow \sigma & & \nearrow s_N^* \\ & CH_j(N_XY) & \end{array}$$

donde $s_N^*(\beta) = (\pi^*)^{-1}(\beta)$.

Esta construcción se puede generalizar a morfismos $f : Y' \to Y$ en general de la manera siguiente:

A partir del cuadrado fibrado

$$\begin{array}{ccc} X' = X \times_Y Y' & \to & Y' \\ \downarrow g & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{i} & Y. \end{array}$$

se construye el ***homomorfismo de Gysin refinado***:

$$i^! : CH_jY' \to CH_{j-d}X'$$

$$i^!(\sum n_i[V_i]) = \sum n_i X \cdot V_i$$

donde

$$X \cdot V_i = s^*[C_{W_i}V_i]$$

es el *producto intersección de V_i con X sobre Y'* y s denota la sección cero del cono $C_{W_i}V_i$ para $W_i = f^{-1}(X) \cap V_i$.

La construcción anterior goza de buenas propiedades cuando se trabaja con variedades no-singulares:

Sea Y una variedad no-singular de dimensión n. Reindexemos los grupos de homología de Chow por codimensión, es decir, hagamos

$$CH^j(Y) = CH_{n-j}(Y).$$

Observemos que en este caso el producto intersección

$$CH^i(Y) \otimes CH^j(Y) \to CH^{i+j}(Y)$$

$$x \otimes y \mapsto x \cdot y$$

hace de $CH^*(Y) = \oplus CH^j(Y)$ un anillo conmutativo y asociativo con unidad $[Y] \in CH^0(Y)$, de manera que la asociación

$$Y \rightsquigarrow CH^*(Y)$$

es un funtor contravariante de variedades no-singulares a anillos.

Más aún, si $f : X \to Y$ es un morfismo, el morfismo gráfica $\gamma_f : X \to X \times Y$ nos permite definir el producto cap:

$$CH^i(Y) \otimes CH_j(X) \xrightarrow{\cap} CH_{j-i}(X)$$
$$x \otimes y \mapsto f^*(y) \cap x = \gamma_f^*(x \times y)$$

que hace de $CH_*(X)$ un $CH^*(Y)$-módulo.

Por último, observemos que si $f : X \to Y$ es un morfismo entre variedades no-singulares, el pull-back

$$f^* : CH^j(Y) \to CH^j(X)$$

preserva grados y, en el caso de ser f propio, se tiene la fórmula de la proyección

$$f_*(f^*y \cdot x) = y \cdot f_*(x).$$

2.3. Clases bivariantes.

Las clases bivariantes son los objetos adecuados que generalizan a variedades posiblemente singulares, por un lado, los homomorfismos de Gysin refinados y, por otro, la estructura de anillo de los grupos de Chow de variedades no-singulares cuando se indexan por codimensión (ver [Fu], cap. 17).

Definición 2.3.1. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas algebraicas sobre K. Dado un morfismo $g : Y' \to Y$ de esquemas sobre K, consideremos el cuadrado fibrado:*

$$\begin{array}{ccc} X' = X \times Y' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

Una **clase bivariante** $c \in A^j(X \xrightarrow{f} Y)$ *es una colección de homomorfismos*

$$c_g^{(r)} : CH_r(Y') \to CH_{r-j}(X')$$

para todo morfismo $g : Y' \to Y$ y todo entero r, que es compatible con push-forward propio, pull-back plano y producto intersección.

Esto último quiere decir lo siguiente:

(C_1) Si $h : Y'' \to Y'$ es un morfismo propio, a partir del cuadrado fibrado

$$\begin{array}{ccc} X''' & \xrightarrow{f''} & Y'' \\ h' \downarrow & & \downarrow h \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

para todo $\alpha \in CH_r(Y'')$, se tiene

$$c_g^{(r)}(h_*(\alpha)) = h'_* c_{gh}^{(r)}(\alpha) \quad \text{en} \quad CH_{r-j}(X').$$

(C_2) Si $h : Y'' \to Y'$ es un morfismo plano de dimensión relativa n, para $\alpha \in CH_r(Y')$, se tiene

$$c_{gh}^{(r+n)}(h^*(\alpha)) = h'^* c_g^{(r)}(\alpha) \quad \text{en} \quad CH_{r+n-j}(X'').$$

(C_3) Si $h : Y' \to Z'$ es morfismo e $i : Z'' \to Z'$ es una inmersión regular de codimensión d, del cuadrado fibrado

$$\begin{array}{ccccc} X'' & \xrightarrow{f''} & Y'' & \xrightarrow{h'} & Z'' \\ i'' \downarrow & & \downarrow i' & & \downarrow i \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{h} & Z' \\ g' \downarrow & & \downarrow g & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & & \end{array}$$

para todo $\alpha \in CH_r(Y')$, se tiene

$$i''^! c_g^{(r)}(\alpha) = c_{gi'}^{(r-d)}(i'^! \alpha) \quad \text{en} \quad CH_{r-j-d}(X'').$$

A partir de ahora, denotaremos por $A^j(X \to Y)$ el grupo $A^j(X \xrightarrow{f} Y)$ y por $A^*(X \to Y)$ la suma directa de todos los grupos $A^j(X \to Y)$ con $j \in \mathbb{Z}$. También, en algunas ocasiones, denotaremos los elementos $c_g^{(r)}(\alpha)$ por $c \cap \alpha$.

Ejemplo 2.3.2. *Ciertos morfismos $f : X \to Y$ determinan de forma natural elementos $[f]$ en $A(X \xrightarrow{f} Y)$ llamados* orientaciones canónicas*:*

(1) *Si $f : X \to Y$ un morfismo plano de dimensión relativa n, definiremos $[f] \in A^{-n}(X \to Y)$ a través del pull-back plano:*

Si $g : Y' \to Y$ es un morfismo y $r \in \mathbb{Z}$, el morfismo inducido $f' : X \times Y' \to Y'$ también es plano. Luego, para todo $\alpha \in CH_r(Y')$, se define

$$[f](\alpha) = f'^*(\alpha).$$

(2) *Si $f : X \to Y$ es una inmersión regular de codimensión d, se define $[f] \in A^d(X \to Y)$ a través del homomorfismo de Gysin refinado:*

Para $g : Y' \to Y$ morfismo y $r \in \mathbb{Z}$, se tiene que $f^!(\alpha) \in CH_{r-d}(X')$. Luego, para $\alpha \in CH_r(Y')$, se define

$$[f](\alpha) = f^!(\alpha).$$

(3) *Más en general, si $f : X \to Y$ es una intersección local completa que factoriza como*

$$X \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} Y$$

con i inmersión regular de codimensión e y p liso de dimensión relativa n, se define

$$[f] = [i] \cdot [p] \in A^{e-n}(X \to Y)$$

con $[i] \in A^e(X \to P)$ y $[p] \in A^{-n}(P \to Y)$.

Observemos que se tienen definidas las siguientes operaciones básicas sobre los grupos $A^*(X \to Y)$:

(P_1) **Producto**: Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son morfismo, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$, se tiene un homomorfismo

$$A^i(X \xrightarrow{f} Y) \otimes A^j(Y \xrightarrow{g} Z) \xrightarrow{\cdot} A^{i+j}(X \xrightarrow{gf} Z)$$

$$c \otimes d \mapsto c \cdot d$$

donde, si $Z' \to Z$ es un morfismo, a partir del diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\
g' \downarrow & & \downarrow g & & \\
X & \xrightarrow{f} & Y & &
\end{array}$$

para todo $\alpha \in CH_r(Z')$, se tiene

$$c \cdot d(\alpha) = c(d(\alpha)) \in CH_{r-j-i}(X').$$

(P_2) **Push-forward**: Si $f : X \to Y$ es un morfismo propio, entonces para $g : Y \to Z$ y $j \in \mathbb{Z}$, se tiene un homomorfismo

$$f_* : A^j(X \xrightarrow{gf} Z) \to A^j(Y \xrightarrow{g} Z)$$

definido por

$$f_*(c)(\alpha) = f'_*(c(\alpha)) \in CH_{r-j}(Y')$$

donde $\alpha \in CH_r(Z')$ y $c \in A^j(X \overset{gf}{\to} Z)$, ya que en este caso f' también es un morfismo propio.

(P_3) **Pull-back**: Dados $f : X \to Y$ y $g : Y_1 \to Y$, a partir del cuadrado fibrado:

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \overset{f_1}{\to} & Y_1 \\ \downarrow & & \downarrow g \\ X & \overset{f}{\to} & Y \end{array}$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$, se tiene definido un homomorfismo

$$g^* : A^j(X \overset{f}{\to} Y) \to A^j(X_1 \overset{f_1}{\to} Y_1)$$

$$g^*(c)(\alpha) = c(\alpha) \in CH_{r-j}(X')$$

para $c \in A^j(X \overset{f}{\to} Y)$ y todo morfismo $Y' \to Y_1$ donde $X' = X \times_Y Y' = X_1 \times_{Y_1} Y'$.

Más aún, estas tres operaciones satisfacen los axiomas siguientes(ver [Fu], sec. 17.2):

(A_1) **Asociatividad del producto**:

Si $c \in A(X \to Y), d \in A(Y \to Z), e \in A(Z \to W)$, entonces

$$(c \cdot d) \cdot e = c \cdot (d \cdot e) \in A(X \to W).$$

(A_2) **Funtorialidad del push-forward**:

Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son morfismos propios y $Z \to W$ es arbitrario, entonces

$$(gf)_*(c) = g_*(f_*c) \in A(Z \to W)$$

para todo $c \in A(X \to W)$.

(A_3) **Funtorialidad del pull-back**:

Si $c \in A(X \to Y)$, $g : Y_1 \to Y$, $h : Y_2 \to Y_1$, entonces

$$(gh)^*(c) = h^*g^*(c) \in A(X_2 \to Y_2)$$

donde $X_2 = X \times_Y Y_2$.

(A_{12}) **Conmutatividad entre el producto y el push-forward**:

Si $f : X \to Y$ es propio y $Y \to Z$, $Z \to W$ arbitrarios, entonces

$$f_*(c) \cdot d = f_*(c \cdot d) \in A(Y \to W)$$

para todo $c \in A(X \to Z)$ y $d \in A(Z \to W)$

(A_{13}) **Conmutatividad entre el producto y el pull-back**:

Si $c \in A(X \xrightarrow{f} Y)$, $d \in A(Y \to Z)$ y $g : Z_1 \to Z$ es un morfismo, a partir del diagrama fibrado:

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{f'} & Y_1 & \to & Z_1 \\ \downarrow & & \downarrow g' & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

se tiene

$$g^*(c \cdot d) = g'^*(c) \cdot g^*(d) \in A(X_1 \to Z_1).$$

(A_{23}) **Conmutatividad entre el push-forward y el pull-back**:

Si $f : X \to Y$ es propio y $Y \to Z$, $g : Z_1 \to Z$, entonces para todo $c \in A(X \to Z)$, se tiene

$$g^* f_*(c) = f'_*(g^*(c)) \in A(Y_1 \to Z_1).$$

(A_{123}) **Fórmula de proyección**:

Dado el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' & & \\ g' \downarrow & & \downarrow g & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{h} & Z \end{array}$$

con g propio, para todo $c \in A(X \to Y)$ y $d \in A(Y' \to Z)$, se tiene

$$c \cdot g_*(d) = g'_*(g^*(c) \cdot d) \in A(X \to Z).$$

Tenemos la proposición siguiente (ver [Fu], sec. 17.3.1):

Proposición 2.3.3. *Para $S = Spec(K)$, el homomorfismo canónico*

$$\varphi : A^{-j}(X \to S) \longrightarrow CH_j(X)$$

$$c \longmapsto c([S])$$

es un isomorfismo.

La aplicación es la que se obtiene de $c_g^{(0)} : CH_0(S) \to CH_j(X)$ para el morfismo identidad $g : S \to S$.

El inverso está dado por

$$\psi : CH_j(X) \longrightarrow A^{-j}(X \to S)$$

$$a \mapsto \psi(a)$$

donde, para $g : Y \to S$ y $\alpha \in CH_r(Y)$, se hace

$$\psi(a)(\alpha) = a \times \alpha \in CH_{r+j}(X \times_S Y).$$

Definición 2.3.4. *Sea X un esquema algebraico sobre K y $j \in \mathbb{Z}$. Se define el j-ésimo* **grupo de cohomología de Chow** *como*

$$CH^j(X) = A^j(X \xrightarrow{id} X).$$

Observación 2.3.5. *Observemos que con esta definición se recuperan muchas de las propiedades que se tenían para las variedades no-singulares en la sec. 2.2, a saber:*

(a) A partir de la composición $X \xrightarrow{id} X \xrightarrow{id} X$, la operación producto en las clases bivariantes determina un producto "cup"

$$CH^i(X) \otimes CH^j(X) \to CH^{i+j}(X)$$

que hace de

$$CH^*(X) = \oplus_{j \geq 0} CH^j(X)$$

un anillo asociativo y graduado con unidad $1 \in CH^0(X)$ (el elemento que actúa como la identidad en todos los grupos $CH_r(X'))$ de forma que para todo morfismo $g : X_1 \to X$ el pull-back

$$g^* : CH^*(X) \to CH^*(X_1)$$

es un homomorfismo de anillos que es funtorial en g.

(b) Existen homomorfismos canónicos (llamados productos "cap")

$$CH^i(X) \otimes CH_j(X) \xrightarrow{\cap} CH_{j-i}(X)$$

$$c \otimes \alpha \longmapsto c(\alpha)$$

que se obtienen del producto bivariante para la composición $X \xrightarrow{id} X \to Spec(K)$ bajo la identificación $CH_j(X) \simeq A^{-j}(X \to Spec(K))$.

(c) El producto cap hace de $CH_*(X)$ un $CH^*(X)$-módulo izquierdo.

(d) Se tiene la fórmula de proyección*:*

$$f_*(f^*\beta \cap \alpha) = \beta \cap f_*(\alpha)$$

para $f : X_1 \to X$, $\alpha \in CH_*(X_1)$ y $\beta \in CH^*(X)$.

(e) En particular, si X es liso de dimensión pura n se tiene la **Dualidad de Poncaré** *(ver [Fu], Cor. 17.4): Los homomorfismos canónicos*

$$CH^j(X) \xrightarrow{\cap[X]} CH_{n-j}(X)$$

que se obtienen al hacer producto con la clase orientación $[X] \in A^{-n}(X \to Spec(K))$, son isomorfismos. La estructura de anillo sobre $CH^*(X)$ es compatible con la estructura definida sobre $CH_*(X)$ al final de la sec. 2.2.

Finalmente, las clases bivariantes c en $A^j(X \xrightarrow{f} Y)$ determinan homomorfismos Gysin

$$c^* : CH_r(Y) \to CH_{r-j}(X)$$

por la fórmula $c^*(\alpha) = c(\alpha)$ y si f es propio

$$c_* : CH^r(X) \to CH^{r+j}(Y)$$

por la fórmula $c_*(\beta) = f_*(\beta \cdot c)$.

2.4. Generalizaciones.

Esta sección queda justificada por la necesidad de trabajar con los grupos (de cohomología) de Chow no sólo de variedades lisas y proyectivas sobre cuerpos sino de esquemas definidos sobre anillos locales que presentan variedades no-singulares como fibras especiales.

Mucha de la teoría de las secciones anteriores sigue siendo válida para una clase de esquemas más amplia que la de esquemas algebraicos sobre un cuerpo si se utiliza una definición apropiada de dimensión. La categoría apropiada para nuestros fines es la categoría de esquemas de tipo finito sobre un esquema regular (ver [Fu], cap. 20).

Recordemos que un anillo local A de dimensión d e ideal maximal M se llama regular si M está generado por una sucesión regular de d elementos.

También recordemos que un esquema S es regular si es Noetheriano y todos sus anillos locales son regulares.

Se tiene la siguiente definición (ver [Fu], sec. 20.1):

Definición 2.4.1. *Sea S un esquema regular y sea $p : \mathcal{X} \to S$ separado de tipo finito. Si V es un subesquema cerrado e íntegro de $\mathcal{X}$, definimos la* **dimensión relativa de V a S** *como*

$$dim_S V = gr.tr(R(V)/R(W)) - codim(W, S)$$

donde W es la clausura de $p(V)$ en S y $R(V)$, $R(W)$ son los cuerpos de funciones respectivos.

Se tienen las siguientes propiedades:
(i) Si S es un esquema algebraico sobre un cuerpo, entonces

$$dim_S V = dim V - dim S.$$

En particular, si $S = Spec(K)$, se tiene $dim_S V = dim V$.

(ii) Si V° es un subesquema abierto no vacío de V, entonces

$$dim_S V^\circ = dim_S V.$$

(iii) Si W es subesquema íntegro y cerrado de V, entonces

$$dim_S V = dim_S W + codim(W, V).$$

(iv) Si $f : V \to W$ es un morfismo dominante de esquemas íntegros sobre S, entonces

$$dim_S V = dim_S W + gr.tr(R(V)/R(W)).$$

Observación 2.4.2. *Ninguna de las propiedades anteriores es cierta si se utiliza la noción ordinaria de dimensión para esquemas íntegros (ver [Fu], Ex. 20.1.5).*

Con esta noción de dimensión relativa, de la misma forma que en la sec. 2.1, podemos definir un r-ciclo sobre $\mathcal{X}$ (relativo a S) como una suma formal $\sum n_i[V_i]$ con V_i subesquema cerrado e íntegro en $\mathcal{X}$ de $dim_S V_i = r$ y $n_i \in \mathbb{Z}$.

De manera similar, se define el concepto de equivalencia racional y el *grupo de homología de Chow*, $CH_j(\mathcal{X}/S)$ como el grupo de clases de equivalencia racional de j-ciclos relativos a S.

Observación 2.4.3. *(a) Aunque el grupo $CH_*(\mathcal{X}) = \oplus_{j\geq 0} CH_j(\mathcal{X}/S)$ es independiente de S, la graduación depende de la dimensión relativa a S.*

(b) CH_* es un funtor covariante para morfismos propios y contravariante para morfismos planos (de alguna dimensión relativa).

La definición y el formalismo de las clases bivariantes $A^{\cdot}(\mathcal{X} \to \mathcal{Y})$ de la sec. 2.3 se extienden sin problemas a esquemas sobre S con la única excepción de aquellas propiedades donde se utiliza el producto exterior ya que, en general, las subvariedades de $\mathcal{X}$ no tienen porque ser planas sobre S.

En particular, si se define

$$CH^j(\mathcal{X}/S) = A^j(\mathcal{X} \xrightarrow{id} \mathcal{X}),$$

se tiene que CH^* es un funtor contravariante de esquemas sobre S a anillos y si $\mathcal{Y} \to S$ es liso de dimensión relativa n, entonces

$$CH^j(\mathcal{Y}/S) \cong A^{j-n}(\mathcal{Y} \to S).$$

Observemos que si el esquema regular S es de dimensión 1 y sólo se consideran esquemas separados y de tipo finito sobre S, entonces toda variedad (esquema íntegro) V o es plana sobre S o se mapea a un punto cerrado P de S. En este caso se tiene un producto exterior:

Proposición 2.4.4. *Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ esquemas de tipo finito y separados sobre S. Si $V \subset \mathcal{X}$, $W \subset \mathcal{Y}$ son subvariedades, el producto ciclo definido por*

$$[V] \times_S [W] = \begin{cases} [V \times_S W], & \text{si } V \text{ o } W \text{ es plano sobre } S \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

induce un producto

$$CH_k(\mathcal{X}/S) \otimes CH_l(\mathcal{Y}/S) \xrightarrow{\times} CH_{k+l}(\mathcal{X} \times_S \mathcal{Y}/S)$$

que satisface las propiedades de asociatividad y conmutatividad de los productos exteriores.

Finalmente, se tiene la siguiente proposición (ver [Fu], Ex. 20.2.3):

Proposición 2.4.5. *Para todo $\mathcal{X}$ sobre S el homomorfismo canónico*

$$\varphi : A^{-j}(\mathcal{X} \to S) \longrightarrow CH_j(\mathcal{X}/S)$$
$$c \longmapsto c([S])$$

es un isomorfismo.

Más aún, si $\mathcal{X}$ es liso de dimensión relativa n sobre S, se tiene

$$CH^j(\mathcal{X}/S) \cong A^{j-n}(\mathcal{X} \to S) = CH_{n-j}(\mathcal{X}/S).$$

2.5. Especialización.

En esta sección consideraremos la situación especial con la que trabajaremos a lo largo de toda esta memoria:

Sean S, S_0 esquemas regulares tales que $i : S_0 \to S$ es una inmersión cerrada regular de codimensión d. Más aún, supongamos que el haz normal a S_0 en S es trivial.

Sea $\eta = S - S_0$ el complemento abierto de S_0 y $j : \eta \hookrightarrow S$ la inclusión correspondiente.

Para todo esquema $\mathcal{X}$ sobre S, sean

$$Y = \mathcal{X} \times_S S_0 \quad \text{y} \quad X = \mathcal{X} \times_S \eta.$$

Se tiene la situación siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{i} & \mathcal{X} & \xleftarrow{j} & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_0 & \to & S & \leftarrow & \eta \end{array}$$

De acuerdo a las propiedades de la dimensión relativa (ver def. 2.4.1), tenemos:

$$CH_r(Y/S_0) = CH_{r-d}(Y/S)$$

y

$$CH_r(X/\eta) = CH_r(X/S).$$

Más aún, se tiene la sucesión exacta

$$CH_r(Y/S) \xrightarrow{i_*} CH_r(\mathcal{X}/S) \xrightarrow{j^*} CH_r(X/S) \to 0$$

donde i_* es el push-forward y j^* el pull-back de las inclusiones respectivas de Y, X en $\mathcal{X}$ y los homomorfismos Gysin:

$$i^! : CH_r(\mathcal{X}/S) \to CH_{r-d}(Y/S) = CH_r(Y/S_0).$$

Dado que $i^! i_* = 0$, existe un único homomorfismo (llamado ***homomorfismo especialización***)

$$\sigma : CH_r(X/\eta) \to CH_r(Y/S_0)$$

tal que si $\alpha = j^*(\beta) \in CH_r(X/\eta)$ para algún $\beta \in CH_r(\mathcal{X}/S)$, entonces

$$\sigma(j^*(\beta)) = i^!(\beta).$$

$$\begin{array}{ccccc}
CH_r(Y/S) & \xrightarrow{i_*} & CH_r(\mathcal{X}/S) & \xrightarrow{j^*} & CH_r(X/S) \ \to 0 \\
 & & \downarrow i^! & & \shortparallel \\
 & & CH_{r-d}(Y/S) & & CH_r(X/\eta) \\
 & & \shortparallel & \swarrow \sigma & \\
 & & CH_r(Y/S_0) & &
\end{array}$$

Finalmente, estudiemos el caso particular de $S = Spec(R)$ para R un anillo de valoración discreta con cuerpo de cocientes K y cuerpo residual k.

Si $\mathcal{X}$ es un esquema de tipo finito sobre S, entonces Y y X son esquemas algebraicos sobre $S_0 = Spec(k)$ y $\eta = Spec(K)$, respectivamente.

Para los grupos de homología de Chow (ver sec. 2.1), se tiene $CH_r(Y) = CH_r(Y/S_0)$ y $CH_r(X) = CH_r(X/\eta)$.

Más aún, σ tiene la siguiente descripción simple a nivel de ciclos:

Si V_η es una subvariedad de X y V es su clausura en $\mathcal{X}$, entonces V es plano sobre S y $\sigma[V_\eta] = [V_0]$.

Corolario 2.5.1. *Sea $S = Spec(R)$ con R anillo de valoración discreta. Si $\mathcal{X}$ es liso sobre $S = Spec(R)$, entonces la aplicación especialización*

$$\sigma : CH_*(X/\eta) \to CH_*(Y/S_0)$$

es un homomorfismo de anillos, es decir, preserva el producto intersección.

2.6. Morfismo ciclo.

El principal objetivo de esta sección es definir el morfismo ciclo. Recordemos que este morfismo relaciona los grupos de Chow con los grupos de cohomología.

Sea X una variedad sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, sea Λ el haz constante $\mathbb{Z}/\ell^n$ con ℓ diferente de la característica de k. También se permite que Λ sea $\mathbb{Z}_\ell$.

Denotemos por $H^*(X) = \sum_{r\geq 0} H^{2r}(X, \Lambda(r))$, que es un anillo graduado bajo el producto cup.

Se tiene un homomorfismo canónico de anillos graduados que dobla el grado y que asocia una clase de cohomología a cada ciclo algebraico (ver [Mi]):

$$cl_X^* : CH^*(X) \to H^*(X).$$

Más concretamente, si Z es un r-ciclo primo de X no-singular, se define $cl_X(Z)$ como la imagen del 1_Z (el generador de Λ) bajo el morfismo Gysin

$$\Lambda = H^0(Z, \Lambda) \cong H_Z^{2r}(X, \Lambda(r)) \to H^{2r}(X, \Lambda(r)).$$

Ahora, dado que para toda subvariedad cerrada Z de codimensión r en X, se tiene $H_Z^s(X, \Lambda) = 0$ si $s < 2r$, la definición anterior se extiende a ciclos singulares de la forma siguiente:

Si Z es un r-ciclo primo sobre X, sea Y el lugar singular de Z. A partir de la sucesión exacta asociada a la tercia $X, X - Y, X - Z$:

$$\cdots \to H_Y^{2r}(X, \Lambda) \to H_Z^{2r}(X, \Lambda) \to H_{Z-Y}^{2r}(X - Y, \Lambda) \to \cdots$$

se tiene el isomorfismo

$$H_Z^{2r}(X, \Lambda) \cong H_{Z-Y}^{2r}(X - Y, \Lambda).$$

Se define $cl_X(Z)$ como la imagen del 1_{Z-Y} bajo la composición de las aplicaciones siguientes:

$$\Lambda = H^0(Z - Y, \Lambda) \cong H_{Z-Y}^{2r}(X - Y, \Lambda(r)) \cong H_Z^{2r}(X, \Lambda(r)) \to H^{2r}(X, \Lambda(r)).$$

Este homomorfismo se extiende por linealidad a un homomorfismo

$$cl_X^r : CH^r(X) \to H^{2r}(X, \Lambda(r)).$$

Observación 2.6.1. *Notemos que para determinar la clase $cl_X(Z)$ de un r-ciclo Z se pueden remover todas las subvariedades de codimensión $> r$ en X.*

Dado que la homología y la cohomología son conceptos duales comparten muchas propiedades. En esta parte seguiremos la exposición de ([Ku1], sec. 5.4) para enumerar algunas de las propiedades principales de la homología de una variedad.

Sea k un cuerpo (no necesariamente algebraicamente cerrado). Denotemos por $\overline{k}$ una clausura separable de k.

Si X es un esquema separado de tipo finito sobre k, se denota por $G_k = Gal(\overline{k}/k)$ el grupo de Galois absoluto de k y por $\overline{f} : \overline{X} \to Spec(\overline{k})$ el cambio de base de X a $\overline{k}$ con $\overline{X} = X \times_k Spec(\overline{k})$.

Se define la *homología étale* de $\overline{X}$ por:

$$H_i(\overline{X}_{et}, \mathbb{Q}_\ell) := H^{-i}(\overline{X}_{et}, R\overline{f}^!\mathbb{Q}_\ell(j))$$

para todo $\ell \neq car(k)$

Se tienen las siguientes propiedades:

(1) $H_i(\overline{X}_{et}, \mathbb{Q}_\ell)$ y $H^i(\overline{X}_{et}, \mathbb{Q}_\ell)$ son $\mathbb{Q}_\ell$-espacios vectoriales de dimensión finita con acción continua de G_k. La homología étale es covariante para morfismos propios y la cohomología étale es contravariante para morfismos arbitrarios.

(2) Si X es geométricamente conexo, existe un apareamiento no-degenerado:

$$H_i(\overline{X}_{et}, \mathbb{Q}_\ell) \times H^i_c(\overline{X}_{et}, \mathbb{Q}_\ell) \to \mathbb{Q}_\ell$$

dado por el producto cap y el morfismo traza. El push-forward en homología y el pull back en cohomología son adjuntos con respecto a este apareamiento.

(3) Si X tiene dimensión d, entonces X determina de manera canónica una clase $cl_{\ell,X}([X])$ en $H_{2d}(\overline{X}_{et}, \mathbb{Q}_\ell(-d))$, llamada *clase fundamental de* X.

(4) Existe una única aplicación de clases de ciclos:

$$cl_{\ell,X} : CH_j(X) \to H_{2j}(\overline{X}_{et}, \mathbb{Q}_\ell(-j))$$

que es funtorial respecto a morfismos propios y aplica la clase de X en $CH_d(X)$ en la clase fundamental $cl_X([X])$.

(5) *Dualidad de Poincaré*: Si X es variedad lisa y proyectiva sobre k de dimensión d, entonces el producto cup en $H^*(\overline{X}_{et}, \mathbb{Q}_\ell)$ induce un apareamiento bilineal no-degenerado:

$$H^i(\overline{X}_{et}, \mathbb{Q}_\ell(r)) \times H^{2d-i}(\overline{X}_{et}, \mathbb{Q}_\ell(d-r)) \longrightarrow H^{2d}(\overline{X}_{et}, \mathbb{Q}_\ell(d)) \xrightarrow[\sim]{Tr_X} \mathbb{Q}_\ell$$

para todo $r \in \mathbb{Z}$.

Sea $S = Spec(R)$ con R anillo de valoración discreta de cuerpo residual k y cuerpo de cocientes K. Si $\mathcal{X} \to S$ es separado y de tipo finito, existe un dual de la aplicación especialización en homología étale

$$sp_H : H_i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j)) \to H_i(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j))$$

que es compatible con la aplicación ciclo.

El teorema siguiente se demuestra en ([Ku1], ver teo. 5.8):

Teorema 2.6.2. *(Künnemann) Si $\mathcal{X} \to S$ es separado de tipo finito, entonces se tiene el diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} CH_j(X) & \xrightarrow{cl_{\ell,X}} & H_{2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(-j)) \\ \downarrow_\sigma & & \downarrow_{sp_H} \\ CH_j(Y) & \xrightarrow{cl_{\ell,Y}} & H_{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(-j)). \end{array}$$

2.7. Relaciones adecuadas y conjeturas.

En esta sección explicaremos lo que se entiende por una relación de equivalencia adecuada sobre los ciclos algebraicos y resumiremos algunos resultados conocidos sobre ellos. Terminaremos enunciando algunas de las conjeturas sobre ciclos que nos serán de gran utilidad en esta memoria.

Seguiremos la exposición de ([A], cap. 2).

Sea K un cuerpo base. Denotemos por $\mathcal{P}(K)$ la categoría de esquemas lisos y proyectivos sobre K. Para todo $X \in \mathcal{P}(K)$, denotamos por $Z^\bullet(X)$ el grupo graduado de ciclos algebraicos sobre X (el grupo abeliano generado por los subesquemas cerrados e íntegros de X) graduados por codimensión. Llamamos a los elementos de $Z^r(X)$ ciclos algebraicos de codimensión r.

Recordemos que la teoría de intersección da una ley interna bilineal, parcialmente definida sobre los ciclos algebraicos, ya que sólo está definida para ciclos cuyas componentes se cortan propiamente. Para extender este producto intersección al caso general, necesitamos introducir relaciones de equivalencia adecuadas sobre ellos.

Una relación de equivalencia $\sim$ sobre los ciclos algebraicos se llama ***adecuada*** si para todo $X, Y \in \mathcal{P}(K)$, satisface:

1) $\sim$ es compatible con la estructura de grupo y con la graduación.

2) Para todo $Z_1, Z_2 \in Z^*(X)$, existe $Z_1' \sim Z_1$ tal que Z_1' y Z_2 se cortan propiamente (de manera que el producto intersección $Z_1' \cdot Z_2$ está bien definido).

3) Para todo $Z_1 \in Z^*(X)$, $Z_1 \sim 0$ y todo $Z_2 \in Z^*(X \times Y)$ cortando propiamente a $(pr_X^{XY})^{-1}(Z_1)$, se tiene $pr_Y^{XY}(Z_2 \cdot (pr_X^{XY})^{-1}(Z_1)) \sim 0$.

Estas condiciones implican la existencia de un producto exterior $Z_1 \times Z_2$ sobre $X \times Y$ de manera que $Z_1 \times Z_2 \sim 0$, si $Z_1 \sim 0$ o $Z_2 \sim 0$.

Más aún, las condiciones anteriores nos dicen que este producto intersección parcialmente definido sobre $Z^*(X)$ se comporta bien al hacer cociente por $\sim$ y se extiende a una operación bien definida sobre

$$Z^*_\sim(X) := Z^*(X)/\sim$$

que lo hace un anillo conmutativo graduado.

Dado que en esta memoria estaremos principalmente interesados en estudiar los anillos anteriores tensor con $\mathbb{Q}$ (o $\mathbb{Q}_\ell$), vale la pena observar que se tiene un morfismo natural

$$Z^*_\sim(X) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q} \longrightarrow Z^*_\sim(X)_\mathbb{Q} := Z^*(X) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}/\sim .$$

Observemos que si $\overline{K}$ es una clausura separable de K y partimos de una relación adecuada $\sim$ para ciclos algebraicos sobre los objetos de $\mathcal{P}(\overline{K})$, por "restricción" se induce una relación adecuada para los ciclos algebraicos sobre los objetos de $\mathcal{P}(K)$ de forma que

$$Z \sim 0 \Leftrightarrow Z_{\overline{K}} \sim 0.$$

Más aún, el grupo de Galois absoluto $G_K = Gal(\overline{K}/K)$ actúa de forma natural sobre $Z^*_\sim(\overline{X})$ de manera que se tiene un monomorfismo canónico

$$Z^*_\sim(X) \hookrightarrow Z^*_\sim(\overline{X})^{G_K}$$

que en general no es exhaustivo. Sin embargo, si primero se hace tensor con $\mathbb{Q}$ (o $\mathbb{Q}_\ell$), se obtiene un isomorfismo

$$Z^*_\sim(X)_\mathbb{Q} \cong Z^*_\sim(\overline{X})^{G_K}_\mathbb{Q}.$$

Ejemplos de relaciones adecuadas son:

(a) ***Equivalencia racional*** (ver sec. 2.1): $Z \in Z^i(X)$ se llama racionalmente equivalente a cero ($Z \sim_{rat} 0$) si existe una colección finita Y_i de subvariedades irreducibles de X de codimensión $i-1$ y funciones racionales f_i sobre Y_i tales que $Z = \sum_j div(f_i)$. Esto es equivalente a pedir que exista $Y \in Z^i(X \times \mathbb{P}^1)$ tal que $Z = Y(0) - Y(\infty)$.

(b) ***Equivalencia algebraica***: $Z \in Z^i(X)$ es algebraicamente equivalente a cero ($Z \sim_{alg} 0$) si existe una pareja (T, Y) con T variedad lisa, proyectiva y conexa, $Y \in Z^i(T \times X)$ y puntos $t_1, t_0 \in T$ tales que $Z = Y(t_0) - Y(t_1)$.

(c) $\otimes$***-nil-equivalencia***: $Z \in Z^i(X)$ se llama $\otimes$-nil-equivalente a cero ($Z \sim_{\otimes nil} 0$) si existe $N > 0$ tal que $Z \times \cdots \times Z \sim_{rat} 0$ sobre X^N.

(d) ***Equivalencia numérica***: $Z \in Z^i(X)$ es numéricamente equivalente a cero ($Z \sim_{num} 0$) si para todo $Y \in Z^{d-i}(X)$ ($d = dimX$) tal que $Z \cdot Y$ está definido, se tiene que el número de intersección es nulo $\sharp(Z \cdot Y) = 0$.

(e) ***Equivalencia homológica***: Diremos que $Z \in Z^i(X)$ es homológicamente equivalente a cero ($Z \sim_{hom} 0$) si $cl_{\ell,X}(Z) = 0$ donde

$$cl_{\ell,X} : Z^i(X) \longrightarrow H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))$$

es el morfismo ciclo ℓ-ádico con $\ell \neq char(K)$.

Usando la notación de las secciones anteriores, hacemos:

$$CH^*(X) := Z^*_{rat}(X).$$

Se tiene que las operaciones de $\sim_{rat}$ y tensor con $\mathbb{Q}$ (o $\mathbb{Q}_\ell$) conmutan, es decir,

$$CH^*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = Z^*_{rat}(X)_{\mathbb{Q}},$$

y lo mismo se tiene para $\sim_{alg}$, $\sim_{\otimes nil}$ y $\sim_{num}$.

Para poder comparar estas relaciones de equivalencia, diremos que $\sim$ es más fina que $\sim'$ ($\sim \succ \sim'$), si $Z \sim 0$ implica $Z \sim' 0$. Luego, se tiene que la equivalencia racional es la más fina de las relaciones adecuadas y la numérica la menos fina:

$$\sim_{rat} \succ \sim_{alg} \succ \sim_{hom} \succ \sim_{num},$$

y tensor $\mathbb{Q}$ (o $\mathbb{Q}_\ell$)

$$\sim_{rat} \succ \sim_{alg} \succ \sim_{\otimes nil} \succ \sim_{hom} \succ \sim_{num} \ .$$

Algunos de los resultados principales sobre ciclos algebraicos son los siguientes (para $K = \overline{K}$):

•(Matsusaka): $Z^i_{alg}(X)_{\mathbb{Q}} = Z^i_{num}(X)_{\mathbb{Q}}$, si $i \leq 1$.

• $Z^1_{hom}(X)_{\mathbb{Q}} = Z^1_{num}(X)_{\mathbb{Q}}$.

•(Néron-Severi): El grupo de Néron-Severi

$$NS(X) = Z^1_{alg}(X)$$

es finitamente generado.

• $Alg^1(X)/Rat^1(X) \xrightarrow{\sim} Pic^0(X)(K)$ donde $Pic^0(X)$ es la variedad de Picard de X.

•(Clemens): Existe una variedad X 3-dimensional, lisa y proyectiva tal que el grupo de Griffiths

$$Gr^2(X) = Hom^1(X)/Alg^1(X)$$

satisface $dim_{\mathbb{Q}}(Gr^2(X) \otimes \mathbb{Q}) = \infty$.

• Si $Pic(X)$ denota el grupo de clases de isomorfismo de haces invertibles en X, se tiene

$$CH^1(X) \cong Pic(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}^*).$$

• En el caso $K = \mathbb{C}$, se tienen las aplicaciones de Abel-Jacobi:

$$AJ : CH^i_{hom}(X) \rightarrow J^i(X)$$

donde $CH^i_{hom}(X) = Hom^i(X)/Rat^i(X)$ y $J^i(X)$ es la Jacobiana intermedia de Griffiths que, en general, sólo tiene estructura de toro complejo. Si consideramos la restricción de esta aplicación a $CH^i_{alg}(X) = Alg^i(X)/Rat^i(X)$:

$$AJ : CH^i_{alg}(X) \to J^i_a(X) \subseteq J^i(X),$$

donde $J^i_a(X)$ denota la imagen de esta restricción, se sabe que $J^i_a(X)$ es una variedad abeliana y que AJ es regular.

Por último, enunciaremos algunas de las principales conjeturas existentes sobre ciclos algebraicos.

Sea Y una variedad lisa y proyectiva definida sobre un cuerpo k. Fijemos una clausura algebraica y separable $\overline{k}$ de k. Sea $d = dimY$.

Para todo número primo $\ell \neq char(k)$, consideremos el morfismo ciclo ℓ-ádico

$$cl_{\ell,Y} : Z^j(Y) \longrightarrow H^{2j}(\overline{Y}_{et}, \mathbb{Q}_\ell(j)).$$

Denotemos por $A^j(Y)$ el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial generado por $Im(cl_{\ell,Y})$. Así,

$$A^j(Y) \cong Z^j_{hom}(Y)_{\mathbb{Q}}.$$

Más aún, la acción continua de $G_k = Gal(\overline{k}/k)$ sobre $H^{2j}(\overline{Y}_{et}, \mathbb{Q}_\ell(j))$ deja fijos los elementos de $A^j(Y)$, de forma que la inclusión

$$A^j(Y) \hookrightarrow H^{2j}(\overline{Y}_{et}, \mathbb{Q}_\ell(j))^{G_k}$$

induce un morfismo

$$Z^j_{hom}(Y)_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow H^{2j}(\overline{Y}_{et}, \mathbb{Q}_\ell(j))^{G_k}.$$

Sea $D \in CH^1(Y)$ la clase de un divisor amplio sobre Y y L el operador de Lefschetz asociado a D que se obtiene haciendo producto cup con el elemento $cl_{\ell,Y}(D)$ de $H^2(\overline{Y}_{et}, \mathbb{Q}_\ell(1))$.

• **Conjeturas estandares de Grothendieck ([Gr])**:

(i) (**fuerte de Lefschetz**): El operador L de Lefschetz induce isomorfismos

$$L^{d-2j} : Z^j_{hom}(Y)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\simeq} Z^{d-j}_{hom}(Y)_{\mathbb{Q}}.$$

(ii) (**del índice de Hodge**): La forma cuadrática sobre $Z^j_{hom}(Y)_{\mathbb{Q}}$ dada por

$$\alpha \longmapsto (-1)^j deg_X(\alpha \cdot L^{d-2j}\alpha)$$

toma valores en $\mathbb{Q}$ y es definida positiva.

• **Conjetura de Tate ([T])**: Si k es un cuerpo finitamente generado sobre su cuerpo primo, entonces el morfismo

$$Z^j_{hom}(Y)_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow H^{2j}(\overline{Y}_{et}, \mathbb{Q}_\ell(j))^{G_k}$$

es exhaustivo para todo $\ell \neq char(k)$.

Recordemos que si V es un $\mathbb{Q}_\ell$-espacio vectorial de dimensión finita sobre el cual el grupo profinito $G_k = Gal(\overline{k}/k)$ actúa continuamente (respecto a la topología ℓ-ádica) sobre V, entonces la acción se llama *semisimple* si todo endomorfismo de V determinado por $\sigma \in G_k$ es semisimple. Así, submódulos, cocientes y productos tensoriales de G_k-módulos semisimples también son semisimples.

• **Conjetura de semisimplicidad**: Si k es un cuerpo finitamente generado sobre su cuerpo primo, la acción de G_k sobre $H^i_{et}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j))$ es semisimple para todo i, j.

• **Conjetura de Beilinson ([Be])**: Si k es un cuerpo finito, entonces el morfismo ciclo

$$cl_{\ell,Y} \otimes \mathbb{Q}_\ell : CH^j(Y)_{\mathbb{Q}_\ell} \longrightarrow H^{2j}(\overline{Y}_{et}, \mathbb{Q}_\ell(j))$$

es injectivo para todo $\ell \neq char(k)$.

Observación 2.7.1. *(i) Las conjeturas de Grothendieck y Tate implican otra famosa* ***conjetura****:*

$$Z^*_{hom}(Y)_{\mathbb{Q}} = Z^*_{num}(Y)_{\mathbb{Q}}.$$

(ii) Si $char(k) = 0$, la conjetura de Lefschetz implica la de Hodge.

(iii) La conjetura de Tate implica la conjetura de Lefschetz.

(iv) Las conjeturas de Tate y Beilinson implican que si k es finito, entonces el morfismo ciclo

$$cl_{\ell,Y} \otimes \mathbb{Q}_\ell : CH^j(Y)_{\mathbb{Q}_\ell} \xrightarrow{\sim} H^{2j}(\overline{Y}_{et}, \mathbb{Q}_\ell(j))^{G_k}$$

es un isomorfismo para todo $\ell \neq char(k)$.

Capítulo 3

Ciclos sobre fibras degeneradas.

En este capítulo describiremos las hipótesis y suposiciones que haremos sobre las variedades con las que trabajaremos a lo largo de esta memoria. La idea principal consiste en pasar a un modelo cuya reducción, aunque singular, es de naturaleza "básicamente lineal" para después transportar (vía este modelo) la mayoría de las propiedades que presentan las intersecciones de la reducción a la propia variedad. Para ello, el primer paso será aplicar las ideas de [BGS2] a ciertos complejos cuyas definiciones están inspiradas en la teoría de variaciones de estructuras de Hodge (ver [St], [G-N]).

3.1. Divisores con cruzamientos normales.

Comencemos recordando algunas cuestiones sobre divisores (ver [dJ], sec. 2). Sea $\mathcal{X}$ un esquema, un *divisor* $Y \subset \mathcal{X}$ es un subesquema cerrado dado por una inmersión regular de codimensión 1.

Sean $\mathcal{X}$ un esquema Noetheriano y $Y \subset \mathcal{X}$ un divisor. Denotemos por $Y_i \subset Y$, $i \in \Sigma = \{1, .., t\}$ las componentes irreducibles de Y considerados como subesquemas cerrados y reducidos de Y o de $\mathcal{X}$.

Diremos que Y es un ***divisor con cruzamientos normales estrictos*** en $\mathcal{X}$ si:

(a) Para todo $x \in Y$, el anillo local $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ es regular.

(b) Y es un esquema reducido, es decir,

$$Y = \cup_{i\in\Sigma} Y_i.$$

(c) Para todo subconjunto $I \subset \Sigma$, el subesquema cerrado $Y_I = \cap_{i\in I} Y_i$ (como esquema teórico) es regular de codimensión $|I|$ en $\mathcal{X}$.

Ahora, sea R un anillo de valoración discreta con cuerpo de cocientes K y cuerpo residual k de característica $p \geq 0$.

Definición 3.1.1. *Dada X una variedad lisa y proyectiva sobre K, diremos que un esquema $\mathcal{X} \to Spec(R)$ es un* **modelo** *de X si es propio y plano sobre $Spec(R)$ y se tiene un isomorfismo de la fibra genérica $\mathcal{X} \times_S Spec(K)$ con X. De ahora en adelante, consideraremos este isomorfismo como una identificación.*

Un morfismo de modelos $\pi : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ es un morfismo de esquemas sobre $Spec(R)$ que es la identidad sobre las fibras genéricas. Dado un modelo $\mathcal{X}$ de X, denotaremos por $Y = \mathcal{X} \times_S Spec(k)$ la fibra especial.

Un modelo se llama *regular* si el esquema $\mathcal{X}$ es regular (lo cual es una propiedad intrínseca de $\mathcal{X}$). Observemos que Y no tiene porque ser regular ni reducido.

3.2. Semiestabilidad estricta.

El concepto de curva semiestable ha desempeñado un papel central en el análisis de la degeneración de curvas lisas proporcionando una herramienta importante en el paso del estudio de curvas definidas sobre el cuerpo de fracciones K de un anillo de valoración discreta R, a curvas definidas sobre el cuerpo residual k. La noción de simiestabilidad ha sido generalizada a dimensiones superiores de manera que las variedades semiestables sigan presentando el tipo de singularidades que uno espera en la degeneración de variedades lisas (ver [dJ]). Sin embargo, mientras toda curva lisa sobre K admite un modelo semiestable sobre R después de pasar a una extensión finita de anillos de valoración discreta, el resultado análogo en dimensión superior sólo es conocido en el caso en que k es de característica cero. El caso general sigue siendo una conjetura.

Sea K un cuerpo completo respecto a una valoración discreta, R el anillo de enteros y k el cuerpo residual de característica $p \geq 0$. Observemos que $S = Spec(R)$ es un esquema regular de dimensión 1.

Sea X una variedad lisa y proyectiva sobre K de dimensión d. Sea $\mathcal{X}$ un modelo de X sobre S. Observemos que $dim\mathcal{X} = d + 1$.

Dado que la noción de dimensión puede no comportarse del todo bien para esquemas que no son propios sobre S (en el sentido que la operación de restringir ciclos de $\mathcal{X}$ a la fibra genérica puede no conservar la dimensión), introduciremos la siguiente ***noción absoluta de dimensión***:

Definición 3.2.1. *Si V es un esquema íntegro sobre S, definimos su* dimensión *(que denotaremos por $\mathbf{dim_a}$) como la dimensión de cualquier V' propio sobre S que contiene a V como subesquema abierto (denso-Zariski). Esta de-*

finición es independiente de la elección de V' y es igual a $dim_S V + 1$ (ver [BGS1], sec. 1.2).

Los grupos de Chow respecto a esta dimensión absoluta serán denotados por $CH_j(\mathcal{X}/S)$.

Con las notaciones de la sección anterior, hagamos la siguiente definición (ver [R-X1], sec. 1, [dJ], sec. 2.16):

Definición 3.2.2. *Sea X una variedad lisa y proyectiva sobre K y $\mathcal{X}$ un modelo* regular *de X. Diremos que $\mathcal{X}$ es un modelo* **estrictamente semiestable** *si satisface:*

(a) La fibra especial Y de $\mathcal{X}$ es un esquema reducido, es decir,

$$Y = \cup_{i \in \Sigma} Y_i$$

con Y_i, $i \in \Sigma = \{1, .., t\}$ las componentes irreducibles de Y.

(b) Para todo subconjunto no vacío $I \subset \Sigma$, $Y_I = \cap_{i \in I} Y_i$ (como esquema teórico) es un esquema liso sobre k de codimensión pura $|I|$ en $\mathcal{X}$, si $Y_I \neq \emptyset$.

Observación 3.2.3. *(a) Si k es perfecto la estabilidad estricta implica que Y es un divisor en $\mathcal{X}$ con cruzamientos normales estrictos (ya que en este caso $sm(Y_I/Spec(k)) = Reg(Y_I)$, ver [dJ], sec. 2.10).*

(b) Se tiene la siguiente descripción local de la semiestabilidad estricta (ver [dJ], sec. 2.16 y [Ha], prop. 1.3):

Denotemos por n la dimensión relativa de $\mathcal{X}$ sobre R. Sea $x \in Y$ un punto de la fibra especial. Supongamos que x pertenece a las componentes $Y_1, ..., Y_r$ de Y y sólo a estas componentes. Sea $t_i \in \mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ tal que $V(t_i) = Y_i \cap Spec(\mathcal{O}_{\mathcal{X},x})$. Si $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}$ es la completación de $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$, entonces

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x} \cong R[[t_1, ..., t_n]]/(t_1 \cdots t_r - \pi), \quad r \leq n.$$

De donde se concluye que x tiene un entorno que es liso sobre el esquema

$$Spec R[t_1, ..., t_n]/(t_1 \cdots t_r - \pi), \quad r \leq n.$$

(c) Se tiene que cada Y_i es un divisor de Cartier de multiplicidad 1 en $\mathcal{X}$ y que Y es el divisor de Cartier principal definido por la sección global $\{(t_i, V(t_i))\}$ del haz $\mathcal{K}^*$.

Ejemplo 3.2.4. *(i) En [Ku1] (teo. 4.6(iii)) se demuestra que toda variedad abeliana sobre K con reducción completamente tórica split, después de pasar a una extensión finita de K, tiene un modelo semiestable, propio y regular cuya fibra especial es un divisor con cruzamientos normales estrictos. En este* *caso las componentes de la fibra especial y todos sus estratos son variedades tóricas lisas y proyectivas.*

(ii) de Jong ha probado (ver [dJ], teo. 6.5) que si K es un cuerpo local y X es una variedad definida sobre K, entonces existe una ***alteración*** *de X (es decir, un morfismo propio y dominante $X' \to X$ de variedades sobre K, con $dimX' = dimX$) y una extensión finita K' de K, de forma que X' puede verse como el complemento de un divisor con cruzamientos normales estrictos de una variedad regular y proyectiva $\overline{X'}$ definida sobre K' que admite un modelo estrictamente semiestable sobre $\mathcal{O}_{K'}$.*

La suposición siguiente será básica en todas las construcciones que haremos de aquí en adelante:

SUPOSICION 3.2.5. ***A partir de ahora, y a lo largo de toda esta memoria, asumiremos que X tiene un modelo $\mathcal{X}$ sobre S estrictamente semiestable.***

Bajo esta suposición tenemos la situación siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{i} & \mathcal{X} & \xleftarrow{j} & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Spec(k) & \hookrightarrow & S & \hookleftarrow & Spec(K). \end{array}$$

donde i es inmersión cerrada de codimensión 1, j es la respectiva inmersión abierta y $dim\mathcal{X} = d+1$.

(a) Si $V \subset Y_I$ es una subvariedad, entonces

$$dim_S V = gr.tr.(R(V)/k) - codim(\mathcal{M}, S) = dimV - 1$$

y por lo tanto, tiene dimensión absoluta

$$dim_a V = dimV$$

Lo cual implica que (ver sec. 2.5):

$$CH_j(Y_I) = CH_j(Y_I/S).$$

Es más, de lo anterior se sigue que $CH^j(Y_I) = CH^j(Y_I/S)$.

(b) Se tiene que

$$CH^*(Y_I) = \bigoplus_{j \geq 0} CH^j(Y_I)$$

es un anillo graduado con $1 \in CH^0(Y_I)$.

(c) El hecho de que todo $Y_I \neq \emptyset$ sea liso sobre k de codimensión pura $|I|$ en $\mathcal{X}$, implica la Dualidad de Poncaré (ver obs. 2.3.5(e)):

$$CH^j(Y_I) \cong CH_{d+1-|I|-j}(Y_I).$$

(d) Para todo par $\emptyset \neq J \subseteq I$, las inclusiones correspondientes

$$u_{IJ} : Y_I \hookrightarrow Y_J$$

son inmersiones regulares de codimensión $|I|-|J|$ que, bajo las identificaciones del apartado (c), definen morfismos Gysin:

$$\begin{array}{ccc} CH_{d+1-|J|-j}(Y_J) & \xrightarrow{u_{IJ}^*} & CH_{d+1-|J|-j-|I|+|J|}(Y_I) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ CH^j(Y_J) & & CH^j(Y_I) \end{array}$$

y morfismos restricción:

$$\begin{array}{ccc} CH_{d+1-|I|-j}(Y_I) & \stackrel{u_{IJ*}}{\rightarrow} & CH_{d+1-|I|-j}(Y_J) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ CH^j(Y_I) & & CH^{j+|I|-|J|}(Y_J). \end{array}$$

Observemos que los morfismos Gysin dan lugar a homomorfismos de anillos (ver después de obs. 2.3.5):

$$u^* : CH^*(Y_J) \to CH^*(Y_I).$$

Observación 3.2.6. *Los apartados (a) y (b) también son válidos para Y. Observemos que para X se tiene:*

$$CH^j(X) \cong CH_{d-j}(X).$$

Sin embargo, si $V \subset X$ es una subvariedad, entonces:

$$dim_a V = dim V + 1$$

y por lo tanto

$$CH_r(X/S) = CH_{r-1}(X).$$

(e) Dado que los elementos de $CH^j(Y_I)(= A^j(Y_I \stackrel{id}{\rightarrow} Y_I))$ son clases bivariantes, estos satisfacen los axiomas $(A_1) - (A_{123})$ de la sec. 2.3.

En particular, de los axiomas (A_{23}) y (A_{123}), para los homomorfismos de anillos u^*, se tiene:

$$u^* u_*(x) = u_* u^*(x) = x u_*(1).$$

(A_4) **Divisor de Cartier principal**: Dado que $Y = \bigcup_{i\in\Sigma} Y_i$ es divisor de Cartier principal en $\mathcal{X}$, se tiene

$$\sum_{i\in\Sigma} u_{i*}(1) = [Y] = 0$$

donde $u_i : Y_i \to \mathcal{X}$ son las inclusiones respectivas y los homomorfismos

$$CH_d(Y_i) = CH_d(Y_i/S) \xrightarrow{u_{i*}} CH_d(\mathcal{X}/S)$$

son tales que

$$1 = [Y_i] \mapsto u_{i*}(1),$$

3.3. Complejos de Chow.

En esta sección seguiremos bajo las suposiciones de la sección anterior.

Para todo $m \geq 1$ definimos:

$$Y^{(m)} := \bigsqcup_{|I|=m} Y_I,$$

la unión disjunta recorriendo todos los subconjuntos $I \subseteq \Sigma$ con $|I| = m$ y

$$CH^i(Y^{(m)}) = \bigoplus_{|I|=m} CH^i(Y_I).$$

Ahora, consideremos $\emptyset \neq I = \{i_1, \dots, i_{m+1}\} \subseteq \Sigma$ con $i_1 < \cdots < i_{m+1}$. Observemos que $|I| = m+1$.

A partir de las inclusiones correspondientes

$$u_{I,I-\{i_r\}} : Y_I \to Y_{I-\{i_r\}},$$

para todo $1 \leq r \leq m+1$, definimos

$$\theta_{i,m} : CH^i(Y^{(m)}) \to CH^i(Y^{(m+1)})$$

mediante la fórmula

$$\theta_{i,m} = \sum_{r=1}^{m+1} (-1)^{r-1} u^*_{I,I-\{i_r\}}$$

y

$$\delta_{i,m} : CH^i(Y^{(m+1)}) \to CH^{i+1}(Y^{(m)})$$

por la fórmula

$$\delta_{i,m} = \sum_{r=1}^{m+1} (-1)^r u_{I,I-\{i_r\}*}.$$

Finalmente, para cada par de enteros i, j, definimos

$$C_j^i(Y) := \bigoplus_{k=max\{i,0\}}^{i+j} CH^{i+j-k}(Y^{(2k-i+1)})$$

y aplicaciones

$$d_j^i : C_j^i(Y) \to C_j^{i+1}(Y)$$

con $d_j^i = d' + d''$ donde

$$d' = \bigoplus_{k=max\{i,0\}}^{i+j} \delta_{i+j-k,2k-i}$$

y

$$d'' = \bigoplus_{k=max\{i,0\}}^{i+j} \theta_{i+j-k,2k-i+1}.$$

Observación 3.3.1. *Observemos que en los grupos $C_j^i(Y)$'s nunca aparecen sumandos con $Y^{(0)}$ (de hecho $Y^{(0)}$ no se ha definido):*

Ya que si $2k - i + 1 = 0$, entonces $k = \frac{i-1}{2}$ y la condición $k \geq max\{i, 0\}$ equivale a $\frac{i-1}{2} \geq 0$ y $\frac{i-1}{2} \geq i$. Pero esto último se satisface si, y sólo si, $-1 \geq i \geq 1$!

Lema 3.3.2. *Para las aplicaciones*

$$d_j^i : C_j^i(Y) \to C_j^{i+1}(Y)$$

se tiene $d_j^i d_j^{i-1} = 0$.

Demostración: Tenemos $dd = d'd' + d'd'' + d''d' + d''d''$.
Observemos que la restricción de $d'd'$ a $CH^i(Y^{(m)})$ coincide con

$$\theta_{j,m+1}\theta_{j,m} = (\sum_{r=1}^{m+2} (-1)^{r-1} u^*_{I,I-\{i_r\}})(\sum_{k=1,k\neq r}^{m+2} (-1)^{k-1} u^*_{I-\{i_r\},I-\{i_k,i_r\}})$$

$$= \sum_{r=1}^{m+2} \sum_{k=1,k\neq r}^{m+2} (-1)^{r+k} u^*_{I,I-\{i_k\}} u^*_{I-\{i_r\},I-\{i_k,i_r\}} \qquad (*)$$

para todo I con $|I| = m + 2$.

Sin perder generalidad, podemos suponer que $i_k < i_r$. A partir del diagrama:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & CH^i(Y_{i_1\dots i_k\dots\widehat{i_r}\dots i_{m+2}}) \arrow[dr, "(-1)^{r-1}u^*"] & \\
CH^i(Y_{i_1\dots\widehat{i_k}\dots\widehat{i_r}\dots i_{m+2}}) \arrow[ur, "(-1)^{k-1}u^*"] \arrow[dr, "(-1)^{r-2}u^*"'] & & CH^i(Y_{i_1\dots i_k\dots i_r\dots i_{m+2}}) \\
 & CH^i(Y_{i_1\dots\widehat{i_k}\dots i_r\dots i_{m+2}}) \arrow[ur, "(-1)^{k-1}u^*"'] &
\end{tikzcd}$$

se sigue que $(*)$ es igual a

$$\sum_{r,k=1,k\neq r}^{m+2} [(-1)^{r+k} u^*_{I,I-\{i_k\}} u^*_{I-\{i_k\},I-\{i_k,i_r\}} + (-1)^{r+k-1} u^*_{I,I-\{i_r\}} u^*_{I-\{i_r\},I-\{i_k,i_r\}}]$$

$$= \sum_{r,k=1,k\neq r}^{m+2} [u^*_{I,I-\{i_k,i_r\}} - u^*_{I,I-\{i_k,i_r\}}] = 0 \quad \text{(por el axioma}(A_3) \quad \text{de la sec. 2.3).}$$

De donde concluimos que $d'd' = 0$. De manera similar se tiene $d''d'' = 0$. Luego, $dd = d'd'' + d''d'$ y el resultado se reduce a demostrar la igualdad $\delta_{i,m}\theta_{i,m} + \theta_{i+1,m-1}\delta_{i,m-1} = 0$.

Para ello, observemos que:

$$\delta_{i,m}\theta_{i,m} + \theta_{i+1,m-1}\delta_{i,m-1} : CH^i(Y^{(m)}) \to CH^{i+1}(Y^{(m)})$$

Primero veamos el caso en que el dominio es $CH^i(Y_I)$ y la imagen está en $CH^{i+1}(Y_I)$ con $|I| = m + 1$.

De los diagramas correspondientes para cada $i \in I$ y $j \notin I$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & CH^i(Y_{I\cup\{j\}}) \arrow[dr, "(-1)^{\ell}u_*"] & \\
CH^i(Y_I) \arrow[ur, "(-1)^{\ell-1}u^*"] \arrow[dr, "(-1)^{k}u_*"'] & & CH^{i+1}(Y_I) \\
 & CH^{i+1}(Y_{I-\{i\}}) \arrow[ur, "(-1)^{k-1}u^*"'] &
\end{tikzcd}$$

se sigue que la restricción del morfismo $\delta_{i,m}\theta_{i,m} + \theta_{i+1,m-1}\delta_{i,m-1}$ a $CH^i(Y_I)$, coincide con

$$\sum_{j\notin I}(-1)^{2\ell-1} u_{I\cup\{j\},I*} u^*_{I\cup\{j\},I} + \sum_{i\in I}(-1)^{2k-1} u^*_{I,I-\{i\}} u_{I,I-\{i\}*}$$

$$= -[\sum_{j\notin I} u_{I\cup\{j\},I*}u^*_{I\cup\{j\},I} + \sum_{i\in I} u^*_{I,I-\{i\}}u_{I,I-\{i\}*}].$$

Pero de la sec. 3.2(e) (ver después de obs. 3.2.6), para todo $x \in CH^i(Y_I)$, se tiene

$$\sum_{j\notin I} u_{I\cup\{j\},I*}u^*_{I\cup\{j\},I}(x) = x\sum_{j\notin I} u_{I\cup\{j\},I*}(1) = x\sum_{j\notin I} u_{j*}(1)$$

y

$$\sum_{i\in I} u^*_{I,I-\{i\}}u_{I,I-\{i\}*}(x) = \sum_{i\in I} u_{I\cup\{i\},I*}u^*_{I\cup\{i\},I}(x) = x\sum_{i\in I} u_{i*}(1),$$

de donde el resultado se sigue de la propiedad (A_4).

Ahora estudiemos el caso en que el dominio es $CH^i(Y_I)$ y la imagen está en $CH^{i+1}(Y_J)$ con $|I| = |J|$ pero $I \neq J$. Así, podemos suponer que $J = I \cup \{j\} - \{i\}$. De los morfismos:

$$\begin{tikzcd}
& CH^i(Y_{I\cup\{j\}}) \arrow[dr, "(-1)^k u_*"] & \\
CH^i(Y_I) \arrow[ur, "(-1)^{\ell-1}u^*"] \arrow[dr, "(-1)^k u_*"'] & & CH^{i+1}(Y_{I\cup\{j\}-\{i\}}) \\
& CH^{i+1}(Y_{I-\{i\}}) \arrow[ur, "(-1)^{\ell-2}u^*"'] &
\end{tikzcd}$$

se sigue que si (por ejemplo) $i < j$, la restricción del morfismo $\delta_{i,m}\theta_{i,m} + \theta_{i+1,m-1}\delta_{i,m-1}$ sobre $CH^i(Y_I)$ coincide con

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\notin I}(-1)^k u_{I\cup\{j\},I*}(-1)^{\ell-1}u^*_{I\cup\{j\},J} + \sum_{j\notin I}\sum_{i\in I}(-1)^{\ell-2}u^*_{I,I-\{i\}}(-1)^k u_{I-\{i\},J*}$$

$$= \sum_{i\in I}\sum_{j\notin I}(-1)^{k+\ell-1}u_{I\cup\{j\},I*}u^*_{I\cup\{j\},J} + \sum_{j\notin I}\sum_{i\in I}(-1)^{\ell+k}u^*_{I,I-\{i\}}u_{I-\{i\},J*}$$

$$= \sum_{i\in I}\sum_{j\notin I}(-1)^{k+\ell}[-u_{I\cup\{j\},I*}u^*_{I\cup\{j\},J} + u^*_{I,I-\{i\}}u_{I-\{i\},J*}] = 0,$$

por el axioma (A_{23}) de la sec. 2.3.

Si $i > j$, se utiliza el mismo razonamiento. ■

El lema anterior nos asegura que, para cada $j \in \{0, \ldots, d\}$ fijo, se tiene un complejo $(C^i_j(Y), d)$.

Sea T^i_j la homología en grado i del complejo anterior, es decir,

$$T^i_j(Y) = \frac{Ker(d : C^i_j(Y) \to C^{i+1}_j(Y))}{Im(d : C^{i-1}_j(Y) \to C^i_j(Y))}.$$

Recordemos que el operador de *monodromía*

$$N : C^i_j(Y) \to C^{i+2}_{j-1}(Y),$$

definido como la identidad sobre los sumandos en común y cero en los sumandos diferentes conmuta con las diferenciales (ver [BGS2], Lema 1(ii)), por lo que induce un operador de monodromía sobre las T's que seguiremos denotando por N.

Observación 3.3.3. *Para todo $i \geq 0$, el morfismo*

$$N^i : C^{-i}_j(Y) \to C^i_{j-i}(Y)$$

es la identidad. Esto se sigue del hecho de que, para $i \geq 0$,

$$C^{-i}_j(Y) = C^i_{j-i}(Y)$$

y que para $a \geq 2$, las aplicaciones

$$N : C^{-a}_b(Y) \to C^{-a+2}_{b-1}(Y) = CH^{b-a+1}(Y^{(a-1)}) \oplus C^{-a}_b(Y)$$

son las inclusiones naturales. Mientras que para $a \geq 0$, las aplicaciones

$$N : C^a_b(Y) = CH^b(Y^{(a+1)}) \oplus C^{a+2}_{b-1}(Y) \to C^{a+2}_{b-1}(Y)$$

son las proyecciones naturales. Así, cada uno de los sumandos de $C^{-i}_j(Y)$ persiste a través de todos los morfismos de monodromía, mientras que los sumandos nuevos que aparecen en grupos subsecuentes eventualmente desaparecen (comparar con la obs.1.4.4(b)).

Más aún, del hecho de que N conmuta con las diferenciales, se tiene que N induce un operador sobre los T^i_j's que seguiremos denotando por N.

En este punto necesitaremos hacer algunas hipótesis sobre las componentes de la reducción Y. Estas hipótesis restringirán en gran medida el conjunto de variedades con las que podremos trabajar en el sentido de que no son válidas para cualquier variedad en general.

Definición 3.3.4. *Sea Y una variedad proyectiva sobre k de dimensión d. Sean Y_i, $i \in \Sigma = \{1, .., t\}$ las componentes irreducibles de Y. Asumiremos que Y es reducida (es decir, que cada componente tiene multiplicidad 1) y que para cada subconjunto no vacío $I \subset \Sigma$, los estratos $Y_I = \cap_{i \in I} Y_i$ (como esquemas teóricos) son lisos sobre k. Fijemos una inmersión de Y en el espacio proyectivo y, respecto de esta inmersión, fijemos $H \in CH^1(Y)$ la clase de la sección de un hiperplano.*

Para cada subconjunto no vacío $I \subset \Sigma$ y para todo $j \geq 0$, se tiene un operador de Lefschetz $L : CH^j(Y_I) \longrightarrow CH^{j+1}(Y_I)$ haciendo producto cup con la correspondiente restricción de la clase del hiperplano H a Y_I.

(i) Diremos que ***todos los estratos Y_I's satisfacen el teorema fuerte de Lefschetz*** *si el operador L induce isomorfismos*

$$L^{d_I-2j} : CH^j(Y_I)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\simeq} CH^{d_I-j}(Y_I)_{\mathbb{Q}}$$

donde $d_I = dimY_I$.

(ii) Diremos que ***todos los estratos Y_I's satisfacen el teorema del índice de Hodge*** *si la forma bilineal simétrica*

$$CH^j(Y_I)_{\mathbb{Q}} \times CH^j(Y_I)_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto (-1)^j deg_X(\alpha \cdot L^{d_I-2j}\beta)$$

es definida positiva sobre el subespacio de elementos primitivos $Ker(L^{d_I+1-2j})$.

Observación 3.3.5. *Las propiedades de la def. 3.3.4 que los estratos deben satisfacer son las reformulaciones correspondientes a las conjeturas estandares de Grothendieck (ver sec. 2.7) para variedades lisas y proyectivas en las cuales la equivalencia homológica y la equivalencia racional coinciden módulo torsión. En particular, una conjetura de Beilinson (ver [Be]) afirma que esto debe suceder en el caso de cuerpos finitos.*

Ejemplo 3.3.6. *(a) Las variedades tóricas lisas y proyectivas satisfacen las propiedades (i) y (ii) de la def. 3.3.4 (ver [FMSS],[Ku1]).*

(b) Para variedades abelianas, la propiedad (i) de la def. 3.3.4 es cierta (ver [So]).

(c) Las propiedades (i) y (ii) de la def. 3.3.4 son ciertas para curvas. Para superficies, la propiedad (ii) es consecuencia del teorema del índice de Hodge correspondiente (ver [Fu]).

Respecto al comportamiento de N, tenemos el teorema siguiente (que se puede interpretar como el equivalente de la conjetura de monodromía-peso):

Teorema 3.3.7. *Supongamos que Y satisface las propiedades (i) y (ii) de la def. 3.3.4. Entonces, el operador de monodromía N^i induce isogenias*

$$N^i : T^{-i}_{j+i}(Y) \to T^i_j(Y)$$

para todo $i \geq 0$ y $j \in \mathbb{Z}$. Y por lo tanto se tienen isomorfismos

$$N^i \otimes \mathbb{Q} : T^{-i}_{j+i}(Y)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} T^i_j(Y)_{\mathbb{Q}}$$

Demostración: Ver ([BGS2], sec. 4.1, teo. 2) y ([G-N], prop. 9, teo. 5.2). ■

Los grupos de Chow de la fibra especial Y del modelo estrictamente semiestable $\mathcal{X}$ pueden expresarse en términos de los respectivos grupos de Chow de los estratos.

Más concretamente, y teniendo en cuenta las identificaciones anteriores, la aplicación natural (ver [BGS1], sec. 1.2):

$$\pi : Y^{(1)} \to Y$$

nos proporciona las siguientes presentaciones:

$$CH_j(Y) = Coker(\delta_{d-1-j,1} : CH^{d-1-j}(Y^{(2)}) \to CH^{d-j}(Y^{(1)}))$$

y

$$CH^j(Y) = Ker(\theta_{j,1} : CH^j(Y^{(1)}) \to CH^j(Y^{(2)})).$$

De manera similar (ver [BGS1], sec. 1.3), la inclusión $i : Y \to \mathcal{X}$ define homomorfismos

$$i^* : CH^j(\mathcal{X}/S) \to CH^j(Y/S) = CH^j(Y)$$

y

$$i_* : CH_{d+1-j}(Y) = CH_{d+1-j}(Y/S) \to CH_{d+1-j}(\mathcal{X}/S).$$

La siguiente suposición será escencial en nuestro trabajo, ya que nos permitirá relacionar los grupos de homología y cohomología de Chow de la reducción:

SUPOSICION 3.3.8. *(**Dualidad de Poincaré**, [BGS1], sec. 1.2). Sea $[\mathcal{X}] \in CH_{d+1}(\mathcal{X}/S)$ la clase fundamental de $\mathcal{X}$.* ***De aquí en adelante asumiremos que para todo*** $j \geq 0$***, el morfismo***

$$CH^j(\mathcal{X}/S) \to CH_{d+1-j}(\mathcal{X}/S)$$

$$\alpha \mapsto \alpha \cap [\mathcal{X}]$$

es un isomorfismo*.*

Observación 3.3.9. *De acuerdo con ([K-T], sec. 3) esto sucede siempre al hacer tensor con $\mathbb{Q}$ y también cuando todo esquema de dimensión menor o igual que la dimensión de $\mathcal{X}$ tiene una desingularización. Si el anillo R es la localización de una algebra de tipo finito sobre un cuerpo k_0, entonces se puede deducir la dualidad de Poincaré sobre R a partir del resultado correspondiente sobre k_0.*

En este caso, podemos considerar la composición:

$$i^*i_* : CH_{d+1-j}(Y) \to CH_{d+1-j}(\mathcal{X}/S) \cong CH^j(\mathcal{X}/S) \to CH^j(Y)$$

para el cual se tiene el siguiente:

Lema 3.3.10. *La composición*

$$CH^{j-1}(Y^{(1)}) \twoheadrightarrow CH_{d+1-j}(Y) \overset{i^*i_*}{\to} CH^j(Y) \hookrightarrow CH^j(Y^{(1)})$$

coincide con $-\delta_{j-1,1}\theta_{j-1,1}$.

Demostración: Sea $u = i \circ \pi : Y^{(1)} \to \mathcal{X}$. De los diagramas:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & CH^j(Y) \arrow[r, "\pi^*"] & CH^j(Y^{(1)}) \arrow[r, "\theta_{j,1}"] & CH^j(Y^{(2)}) \\ & & CH^j(\mathcal{X}/S) \arrow[ul, "i^*"] \arrow[u, "u^*"'] & \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} CH^{j-2}(Y^{(2)}) \arrow[r, "\delta_{j-2,1}"] & CH^{j-1}(Y^{(1)}) \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d, "u_*"] & CH_{d+1-j}(Y) \arrow[r] \arrow[dl, "i_*"] & 0 \\ & CH_{d+1-j}(\mathcal{X}/S) & & \end{tikzcd}$$

se sigue que la composición considerada coincide con $u^* \cdot u_*$. El resultado se reduce a demostrar que

$$u^* \cdot u_* + \delta_{j-1,1}\theta_{j-1,1} = 0,$$

lo cual se demuestra de la misma forma que en el lema 3.3.2. ∎

3.4. Ciclos sobre fibras degeneradas.

En esta sección aplicaremos las ideas de [BGS2] a ciertos complejos cuyas definiciones están inspiradas en la teoría de variaciones de estructuras de Hodge (ver [St], [G-N]) para deducir sucesiones largas que los relacionan y que serán de gran utilidad en secciones posteriores.

Comencemos por considerar los grupos bigraduados siguientes:

$$Ker(N)^{\cdot}_{\cdot} = Ker(C^{\cdot}_{\cdot} \overset{N}{\to} C^{\cdot+2}_{\cdot-1}),$$

$$Coker(N)^{\cdot}_{\cdot} = Coker(C^{\cdot}_{\cdot} \overset{N}{\to} C^{\cdot+2}_{\cdot-1}),$$

$$Con(N)^{\cdot}_{\cdot} = Cono(C^{\cdot}_{\cdot} \overset{N}{\to} C^{\cdot+2}_{\cdot-1}),$$

donde $Con(N)^i_j = C^{i-1}_{j+1} \bigoplus C^i_j$ es el cono asociado a N.

Siguiendo las ideas de [BGS2], definimos los siguientes grupos de homología

$$K^i_j = \frac{Ker(d : Ker(N)^i_j \to Ker(N)^{i+1}_j)}{Im(d : Ker(N)^{i-1}_j \to Ker(N)^i_j)},$$

$$V^i_{j+1} = \frac{Ker(d : Coker(N)^{i-2}_{j+1}) \to Coker(N)^{i-1}_{j+1})}{Im(d : Coker(N)^{i-3}_{j+1} \to Coker(N)^{i-2}_{j+1})},$$

$$B^i_j = \frac{Ker(\partial : Con(N)^{i+1}_{j-1} \to Con(N)^{i+2}_{j-1})}{Im(\partial : Con(N)^i_{j-1} \to Con(N)^{i+1}_{j-1})},$$

donde la diferencial ∂ sobre el cono se define de la siguiente manera:

$$\partial : Con(N)^i_j \to Con(N)^{i+1}_j$$

$$(x, y) \mapsto (-d(x), N(x) + d(y))$$

Teorema 3.4.1. *Para todo par $i, j \in \mathbb{Z}$ se tienen las sucesiones exactas largas*

$$\cdots \xrightarrow{N} T^i_j \to B^{i-1}_{j+1} \to T^{i-1}_{j+1} \xrightarrow{N} T^{i+1}_j \to B^i_{j+1} \to T^i_{j+1} \xrightarrow{N} \cdots \qquad (*)$$

y

$$\cdots \longrightarrow K^{i-1}_{j+1} \to B^{i-1}_{j+1} \to V^i_{j+1} \to K^i_{j+1} \to B^i_{j+1} \to V^{i+1}_{j+1} \longrightarrow \cdots \qquad (**)$$

Demostración: Consideremos las sucesiones exactas cortas

$$0 \to C^i_j \overset{i_2}{\hookrightarrow} Con(N)^i_j \overset{pr_1}{\twoheadrightarrow} C^{i-1}_{j+1} \to 0$$

donde el primer morfismo es la inclusión en la segunda coordenada y el segundo es la proyección en la primera coordenada.

Observemos que, para todo j fijo, las sucesiones anteriores dan lugar a la siguiente sucesión exacta corta de complejos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & C^{i-1}_j & \overset{i_2}{\hookrightarrow} & Con(N)^{i-1}_j & \overset{pr_1}{\twoheadrightarrow} & C^{i-2}_{j+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow d & & \downarrow \partial & & \downarrow d & & \\
0 & \to & C^i_j & \overset{i_2}{\hookrightarrow} & Con(N)^i_j & \overset{pr_1}{\twoheadrightarrow} & C^{i-1}_{j+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow d & & \downarrow \partial & & \downarrow d & & \\
0 & \to & C^{i+1}_j & \overset{i_2}{\hookrightarrow} & Con(N)^{i+1}_j & \overset{pr_1}{\twoheadrightarrow} & C^i_{j+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow d & & \downarrow \partial & & \downarrow d & &
\end{array}$$

cuya sucesión exacta larga de cohomología es (*).

De manera similar, las inclusiones

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, hook] & Ker(N)^{i-1}_{j+1} \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr] & & Con(N)^{i}_{j} \\
& & C^{i-1}_{j+1} \arrow[ur, "i_1"'] &
\end{tikzcd}$$

y las proyecciones

$$\begin{tikzcd}
Con(N)^{i}_{j} \arrow[rr, two heads, "pr"] \arrow[dr, "pr_1"'] & & Coker(N)^{i-2}_{j+1} \arrow[r] & 0 \\
& C^{i}_{j} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

satisfacen, para todo j fijo, $id + \partial i = 0$ y $pr\partial - dpr = 0$. Observemos que el complejo doble que definen (cuyos renglones no son exactos):

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Ker(N)^{i-3}_{j+1} & \overset{i}{\hookrightarrow} & Con(N)^{i-2}_{j} & \overset{pr}{\twoheadrightarrow} & Coker(N)^{i-4}_{j+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow d & & \downarrow \partial & & \downarrow -d & & \\
0 & \to & Ker(N)^{i-2}_{j+1} & \overset{i}{\hookrightarrow} & Con(N)^{i-1}_{j} & \overset{pr}{\twoheadrightarrow} & Coker(N)^{i-3}_{j+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow d & & \downarrow \partial & & \downarrow -d & & \\
0 & \to & Ker(N)^{i-1}_{j+1} & \overset{i}{\hookrightarrow} & Con(N)^{i}_{j} & \overset{pr}{\twoheadrightarrow} & Coker(N)^{i-2}_{j+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow d & & \downarrow \partial & & \downarrow -d & & \\
0 & \to & Ker(N)^{i}_{j+1} & \overset{i}{\hookrightarrow} & Con(N)^{i+1}_{j} & \overset{pr}{\twoheadrightarrow} & Coker(N)^{i-1}_{j+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow d & & \downarrow \partial & & \downarrow -d & & \\
0 & \to & Ker(N)^{i+1}_{j+1} & \overset{i}{\hookrightarrow} & Con(N)^{i+2}_{j} & \overset{pr}{\twoheadrightarrow} & Coker(N)^{i}_{j+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & &
\end{array}$$

tiene como complejo total asociado el siguiente:

$$\begin{array}{ccccc}
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Ker(N)^{i-2}_{j+1} & \oplus & Con(N)^{i-2}_{j} & \oplus & Coker(N)^{i-5}_{j+1} \\
\downarrow d & \searrow_{i_1} & \downarrow \partial & \searrow_{pr_2} & \downarrow -d \\
Ker(N)^{i-1}_{j+1} & \oplus & Con(N)^{i-1}_{j} & \oplus & Coker(N)^{i-4}_{j+1} \\
\downarrow d & \searrow_{i_1} & \downarrow \partial & \searrow_{pr_2} & \downarrow -d \\
Ker(N)^{i}_{j+1} & \oplus & Con(N)^{i}_{j} & \oplus & Coker(N)^{i-3}_{j+1} \\
\downarrow d & \searrow_{i_1} & \downarrow \partial & \searrow_{pr_2} & \downarrow -d \\
Ker(N)^{i+1}_{j+1} & \oplus & Con(N)^{i+1}_{j} & \oplus & Coker(N)^{i-2}_{j+1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow
\end{array}$$

cuyas diferenciales están dadas por

$$x \oplus (u, v) \oplus [z] \xmapsto{\partial''} d(x) \oplus (x, 0) + (-d(u), N(u) + d(v)) \oplus [v] + [-d(z)]$$

$$= d(x) \oplus (x - d(u), N(u) + d(v)) \oplus [v - d(z)].$$

y es acíclico:

Claramente $Im(\partial'') \subseteq Ker(\partial'')$, ya que

$$\partial''^2(x \oplus (u,v) \oplus [z]) = dd(x) \oplus (d(x) - d(x) + dd(u), N(x) - Nd(u) + dN(u) + dd(v))$$

$$\oplus [N(u) + d(v) - d(v) + dd(z)] = 0 \oplus (0,0) \oplus [0].$$

La inclusión contraria se sigue del hecho de que si $x \oplus (u,v) \oplus [z] \in Ker(\partial'')$, entonces $d(x) = 0$, $x = d(u)$, $N(u) + d(v) = 0$ y $[v - d(z)] = [0]$.

Luego,

$$v = d(z) + N(u')$$

y

$$N(u) = -d(v) = -d(d(z) + N(u')) = -dN(u') = -Nd(u')$$

de donde $u + d(u') = x' \in Ker(N)$ y por lo tanto

$$u = x' - d(u')$$

y

$$x = d(u) = d(x') - d^2(u') = d(x').$$

Ahora, si cogemos $x' \oplus (u', z) \oplus [0]$, se tiene

$$\partial''(x' \oplus (u', z) \oplus [0]) = d(x') \oplus (x' - d(u'), N(u') + d(z)) \oplus [z - 0]$$

$$= x \oplus (u, v) \oplus [z]$$

y por lo tanto $Im(\partial'') = Ker(\partial'')$.

Finalmente, (**) es la sucesión exacta larga de cohomología asociada al complejo doble inicial. ∎

A través de las sucesiones exactas largas (*) y (**) definimos el ***morfismo especialización*** sp_B como la composición

$$sp_B : K^{i-1}_{j+1} \xrightarrow{(**)} B^{i-1}_{j+1} \xrightarrow{(*)} T^{i-1}_{j+1},$$

y el morfismo λ como la composición

$$\lambda : T^{i+1}_{j} \xrightarrow{(*)} B^{i}_{j+1} \xrightarrow{(**)} V^{i+1}_{j+1}.$$

Proposición 3.4.2. *Para todo par $i, j \in \mathbb{Z}$, se tiene el complejo*

$$\cdots \xrightarrow{\lambda} K^{i-1}_{j+1} \xrightarrow{sp_B} T^{i-1}_{j+1} \xrightarrow{N} T^{i+1}_{j} \xrightarrow{\lambda} V^{i+1}_{j+1} \rightarrow$$

$$K^{i+1}_{j+1} \xrightarrow{sp_B} T^{i+1}_{j+1} \xrightarrow{N} T^{i+3}_{j} \xrightarrow{\lambda} V^{i+3}_{j} \xrightarrow{sp_B} \cdots$$

Más aún, si Y satisface las propiedades (i) y (ii) de la def. 3.3.4, al hacer tensor con $\mathbb{Q}$ se obtienen sucesiones exactas largas.

Demostración: La primera afirmación se sigue del teo. 3.4.1 y del diagrama siguiente:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \to & K^{i-1}_{j+1} & \xrightarrow{sp_B} & T^{i-1}_{j+1} & \xrightarrow{N} & T^{i+1}_{j} & \xrightarrow{\lambda} & V^{i+1}_{j+1} & \to \cdots \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & B^{i-1}_{j+1} & & & & B^{i}_{j+1} & & \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
\cdots \to & T^{i}_{j} & \xrightarrow{\lambda} & V^{i}_{j+1} & \longrightarrow & K^{i}_{j+1} & \xrightarrow{sp_B} & T^{i}_{j+1} & \xrightarrow{N} \cdots
\end{array}
$$

La exactitud al hacer tensor con $\mathbb{Q}$ se sigue de ([BGS2], teo. 4) o bien de ([N-A], teo. 7.14). ■

Observación 3.4.3. *En general, el complejo no tiene porque ser exacto (ver teo. 4.1.1 más adelante, donde N no necesariamente es exhaustiva). Esta prop. se puede interpretar como el equivalente del teorema local del ciclo invariante.*

Capítulo 4

Morfismo reducción.

En este capítulo construiremos dos morfismos que (conjeturalmente) deben proporcionar los dos primeros pasos de una filtración sobre los ciclos algebraicos. El primero de tales morfismos está definido en los ciclos de codimensión j de X y tiene imagen dentro de un subgrupo de T_j^0. Este morfismo puede ser visto como una especie de generalización a esquemas estrictamente semiestables del morfismo especialización. El segundo morfismo está asociado de forma natural al primero y está definido del núcleo de éste a un cociente del grupo T_j^{-1}. Este morfismo jugará un papel importante en nuestro posterior estudio de las Jacobianas intermedias (ver sec. 6.8).

4.1. Morfismo especialización.

En este capítulo seguiremos con la notación de los capítulos anteriores y continuaremos asumiendo las **SUPOSICIONES 3.2.5 y 3.3.8**:

Así, sea K un cuerpo completo respecto a una valoración discreta con anillo de valoración R y cuerpo residual k de característica $p \geq 0$.

Sea $S = Spec(R)$. Consideremos X una variedad lisa y proyectiva sobre K. Asumamos que X tiene un modelo $\mathcal{X}$ estrictamente semiestable sobre S que satisface:

$$CH^j(\mathcal{X}/S) \cong CH_{d+1-j}(\mathcal{X}/S)$$

para todo $j \geq 0$.

Lo primero que haremos es especializar los valores de i y j en la prop. 3.4.2:

Teorema 4.1.1. *Para todo $j \geq 0$ se tiene el complejo*

$$\cdots \to CH_{d+1-j}(Y) \xrightarrow{-i^* i_*} CH^j(Y) \xrightarrow{sp_B} T_j^0 \xrightarrow{N} T_{j-1}^2 \to 0$$

Más aún, si Y satisface las propiedades (i) y (ii) de la def. 3.3.4, al hacer tensor con $\mathbb{Q}$ se obtiene una sucesión exacta larga .

Demostración: Haciendo $i = 1$ y $j = j-1$ en la prop. 3.4.2, obtenemos el siguiente complejo que involucra al grupo T_j^0

$$\cdots \to V_j^0 \longrightarrow K_j^0 \xrightarrow{sp_B} T_j^0 \xrightarrow{N} T_{j-1}^2 \xrightarrow{\lambda} V_j^2 \to \cdots$$

Para calcular los grupos que aparecen en este complejo, primero hay que considerar las monodromías correspondientes:

$$C_j^{-2} = CH^{j-2}(Y^{(3)}) \oplus CH^{j-3}(Y^{(5)}) \oplus \cdots \oplus CH^0(Y^{(2j-1)})$$

$$\downarrow N_j^{-2}$$

$$C_{j-1}^0 = CH^{j-1}(Y^{(1)}) \oplus CH^{j-2}(Y^{(3)}) \oplus CH^{j-3}(Y^{(5)}) \oplus \cdots \oplus CH^0(Y^{(2j-1)}),$$

por lo tanto $Ker(N)_j^{-2} = 0$ y $Coker(N)_j^{-2} = CH^{j-1}(Y^{(1)})$.

$$C_j^{-1} = CH^{j-1}(Y^{(2)}) \oplus \cdots \oplus CH^0(Y^{(2j)})$$

$$\downarrow N_j^{-1}$$

$$C_{j-1}^1 = CH^{j-1}(Y^{(2)}) \oplus \cdots \oplus CH^0(Y^{(2j)}),$$

es la identidad, por lo tanto $Ker(N)_j^{-1} = 0$ y $Coker(N)_j^{-1} = 0$.

$$C_j^{-3} = CH^{j-3}(Y^{(4)}) \oplus CH^{j-4}(Y^{(6)}) \oplus \cdots \oplus CH^0(Y^{(2j-2)})$$

$$\downarrow N_j^{-3}$$

$$C_{j-1}^{-1} = CH^{j-2}(Y^{(2)}) \oplus CH^{j-3}(Y^{(4)}) \oplus CH^{j-4}(Y^{(6)}) \oplus \cdots \oplus CH^0(Y^{(2j-2)}),$$

por lo tanto $Ker(N)_j^{-3} = 0$ y $Coker(N)_j^{-3} = CH^{j-2}(Y^{(2)})$.

$$C_j^0 = CH^j(Y^{(1)}) \oplus CH^{j-1}(Y^{(3)}) \oplus \cdots \oplus CH^0(Y^{(2j+1)}),$$

$$\downarrow N_j^0$$

$$C_{j-1}^2 = CH^{j-1}(Y^{(3)}) \oplus \cdots \oplus CH^0(Y^{(2j+1)}),$$

por lo tanto $Ker(N)_j^0 = CH^j(Y^{(1)})$ y $Coker(N)_j^0 = 0$.

$$C_j^1 = CH^j(Y^{(2)}) \oplus CH^{j-1}(Y^{(4)}) \oplus \cdots \oplus CH^0(Y^{(2j+2)}),$$

$$\downarrow N_j^1$$

$$C_{j-1}^3 = CH^{j-1}(Y^{(4)}) \oplus \cdots \oplus CH^0(Y^{(2j+2)}),$$

por lo tanto $Ker(N)^1_j = CH^j(Y^{(2)})$ y $Coker(N)^1_j = 0$.

Luego, tenemos

$$V^0_j = \frac{Ker(d : Coker(N)^{-2}_j \to Coker(N)^{-1}_j)}{Im(d : Coker(N)^{-3}_j \to Coker(N)^{-2}_j)}$$

$$= \frac{Ker(d : CH^{j-1}(Y^{(1)}) \to 0)}{Im(d : CH^{j-2}(Y^{(2)}) \to CH^{j-1}(Y^{(1)}))}$$

$$= \frac{CH^{j-1}(Y^{(1)})}{Im(d : CH^{j-2}(Y^{(2)}) \to CH^{j-1}(Y^{(1)}))}$$

y dado que sobre $CH^{j-2}(Y^{(2)})$, $d = d' + d'' = \delta_{j-2,1}$, se tiene

$$V^0_j = \frac{CH^{j-1}(Y^{(1)})}{Im(\delta_{j-2,1} : CH^{j-2}(Y^{(2)}) \to CH^{j-1}(Y^{(1)}))}$$

$$= Coker(\delta_{j-2,1} : CH^{j-2}(Y^{(2)}) \to CH^{j-1}(Y^{(1)}))$$

$$= CH_{d+1-j}(Y).$$

De manera similar, sobre $CH^j(Y^{(1)})$, $d = d' + d'' = \theta_{j,1}$ y por lo tanto

$$K^0_j = \frac{Ker(d : Ker(N)^0_j \to Ker(N)^1_j)}{Im(d : Ker(N)^{-1}_j \to Ker(N)^0_j)}$$

$$= \frac{Ker(d : CH^j(Y^{(1)}) \to CH^j(Y^{(2)}))}{Im(d : 0 \to CH^j(Y^{(1)}))}$$

$$= Ker(CH^j(Y^{(1)}) \xrightarrow{\theta_{j,1}} CH^j(Y^{(2)}))$$

$$= CH^j(Y).$$

Finalmente,

$$V^2_j = \frac{Ker(d : Coker(N)^0_j \to Coker(N)^1_j)}{Im(d : Coker(N)^{-1}_j \to Coker(N)^0_j)}$$

$$= \frac{Ker(d : 0 \to 0)}{Im(d : 0 \to 0)} = 0$$

y el complejo queda

$$\cdots \to CH_{d+1-j}(Y) \longrightarrow CH^j(Y) \xrightarrow{sp_B} T^0_j \xrightarrow{N} T^2_{j-1} \to 0.$$

Calculemos el morfismo $CH_{d+1-j}(Y) \to CH^j(Y)$ que aparece en este complejo:

Sea $[x] \in CH_{d+1-j}(Y)$ con $x \in CH^{j-1}(Y^{(1)}) \hookrightarrow C^0_{j-1}$. Observemos que $d^0_{j-1}(x) = \theta_{j-1,1}(x) \in CH^{j-1}(Y^{(2)}) \hookrightarrow C^1_{j-1}$. Dado que $N^{-1}_j : C^{-1}_j \to C^1_{j-1}$ es la identidad, tenemos que

$$d^0_{j-1}(x) = N(y) = y$$

para un único $y \in CH^{j-1}(Y^{(2)}) \hookrightarrow C^{-1}_j$.

Notemos que $(-y, x) \in C^{-1}_j \oplus C^0_{j-1} = Con(N)^0_{j-1}$ se mapea bajo la proyección canónica en $x \in CH^{j-1}(Y^{(1)})$ y que

$$N^0_j d^{-1}_j(y) = d^1_{j-1} N^{-1}_j(y) = d^1_{j-1} d^0_{j-1}(x) = 0.$$

Así, $d^{-1}_j(y) \in Ker(N)^0_j = CH^j(Y^{(1)}) \hookrightarrow C^0_j$.

Ahora, como

$$\partial(-y, x) = (d^{-1}_j(y), 0) \in C^0_j \oplus C^1_{j-1} = Con(N)^1_{j-1},$$

se tiene, por construcción de (**), que la imagen de $d^{-1}_j(y)$ en $K^0_j = CH^j(Y)$ es la imagen de $[x]$ buscada. Pero,

$$\begin{aligned} d^{-1}_j(y) &= d'(y) + d''(y) = \theta_{j-1,2}(y) + \delta_{j-1,1}(y) \\ &= \theta_{j-1,2}\theta_{j-1,1}(x) + \delta_{j-1,1}\theta_{j-1,1}(x) \\ &= \delta_{j-1,1}\theta_{j-1,1}(x) \end{aligned}$$

y por lo tanto (ver lema 3.3.10) la imagen de $d^{-1}_j(y)$ en $K^0_j = CH^j(Y)$ coincide con $-i^* i_*[x]$. La prop. 3.4.2 nos asegura la exactitud al hacer tensor con $\mathbb{Q}$. ■

Observación 4.1.2. *Observemos que se obtienen complejos similares si en lugar de considerar ciclos módulo equivalencia racional se consideran módulo equivalencia algebraica, homológica o numérica sobre los estratos de Y y también si se considera el producto tensorial sobre $\mathbb{Z}$ con cualquier otro cuerpo diferente de $\mathbb{Q}$.*

Ahora analicemos más de cerca el morfismo sp_B del complejo obtenido en el teo. 4.1.1:

Proposición 4.1.3. *El morfismo*

$$sp_B : K^0_j = CH^j(Y) \to T^0_j$$

está dado por la proyección natural

$$CH^j(Y) \twoheadrightarrow \frac{CH^j(Y)}{Im(i^* i_*)} \twoheadrightarrow \frac{CH^j(Y)}{CH^j(Y) \cap Im(d^{-1}_j)} \hookrightarrow Ker(T^0_j \xrightarrow{N} T^2_{j-1}).$$

Demostración: Notemos que si hacemos $i=0$ y $j=j-1$ en las sucesiones exactas largas del teo. 3.4.1, se tiene

$$\cdots \to B_j^{-1} \to T_j^{-1} \xrightarrow{N} T_{j-1}^1 \to B_j^0 \to T_j^0 \xrightarrow{N} T_{j-1}^2 \to \cdots$$

y

$$\cdots \to K_j^{-1} \to B_j^{-1} \to V_j^0 \to K_j^0 \to B_j^0 \to V_j^1 \to \cdots$$

Para calcular el grupo B_j^0 recordemos que $N : C_j^{-1} \to C_{j-1}^1$ es la identidad, por lo que

$$K_j^{-1} = \frac{Ker(d : Ker(N)_j^{-1} \to Ker(N)_j^0)}{Im(d : Ker(N)_j^{-2} \to Ker(N)_j^{-1})} = 0$$

y

$$V_j^1 = \frac{Ker(d : Coker(N)_j^{-1} \to Coker(N)_j^0)}{Im(d : Coker(N)_j^{-2} \to Coker(N)_j^{-1})} = 0.$$

Dado que $V_j^0 = CH_{d+1-j}(Y)$ y $K_j^0 = CH^j(Y)$, la segunda sucesión exacta queda

$$0 \to B_j^{-1} \to CH_{d+1-j}(Y) \xrightarrow{-i^*i_*} CH^j(Y) \to B_j^0 \to 0,$$

de donde

$$B_j^0 \cong Coker(CH_{d+1-j}(Y) \xrightarrow{-i^*i_*} CH^j(Y)) = \frac{CH^j(Y)}{Im(i^*i_*)},$$

$$B_j^{-1} \cong Ker(CH_{d+1-j}(Y) \xrightarrow{-i^*i_*} CH^j(Y))$$

y la primera sucesión exacta se convierte en

$$Ker(CH_{d+1-j}(Y) \xrightarrow{-i^*i_*} CH^j(Y)) \to T_j^{-1} \xrightarrow{N} T_{j-1}^1$$

$$\xrightarrow{\varphi} \frac{CH^j(Y)}{Im(i^*i_*)} \xrightarrow{\psi} T_j^0 \xrightarrow{N} T_{j-1}^2 \to \cdots (***)$$

Así, podemos resumir lo anterior en el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, "sp_B"] \arrow[dr] & & T_j^{-1} \arrow[rr, "N"] & & T_{j-1}^1 \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "\varphi"] & & 0 \\
& Ker(-i^*i_*) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \frac{CH^j(Y)}{Im(i^*i_*)} \arrow[ur] \arrow[dr, "\psi"] & \\
\cdots \arrow[ur] \arrow[r] & CH_{d+1-j}(Y) \arrow[rr, "-i^*i_*"] & & CH^j(Y) \arrow[urr, "pr"] \arrow[rr, "sp_B"] & & T_j^0 \arrow[r, "N"] & T_{j-1}^2.
\end{tikzcd}$$

Teniendo en cuenta la construcción de sp_B, se sigue que el morfismo

$$sp_B : K_j^0 = CH^j(Y) \to T_j^0$$

está dado por la composición

$$CH^j(Y) \overset{pr}{\twoheadrightarrow} \frac{CH^j(Y)}{Im(i^*i_*)} \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} Im(\psi)$$

Nuestro siguiente paso será analizar el morfismo ψ:

Dado que $CH^j(Y^{(1)}) = Ker(N : C_j^0 \longrightarrow C_{j-1}^2) \hookrightarrow C_j^0$ y d_j^0 coincide con $\theta_{j,1}$ sobre $CH^j(Y^{(1)})$, se tiene

$$CH^j(Y) = Ker(\theta_{j,1}) = Ker(d_j^0)|_{CH^j(Y^{(1)})} = CH^j(Y^{(1)}) \cap Ker(d_j^0)$$

$$= Ker(N) \cap Ker(d_j^0) \hookrightarrow Ker(d_j^0).$$

Por otro lado, se tiene la inclusión $Im(i^*i_*) \subseteq Im(d_j^{-1}) \cap CH^j(Y)$: ya que si $x \in Im(CH_{d+1-j}(Y) \xrightarrow{i^*i_*} CH^j(Y)) \subseteq CH^j(Y)$, entonces $x = i^*i_*(y)$ para alguna $y \in CH_{d+1-j}(Y)$ y por definición de $CH_{d+1-j}(Y)$ podemos considerar $y \in CH^{j-1}(Y^{(1)})$. Por el lema 3.3.10, se tiene que

$$i^*i_*(y) = -\delta_{j-1,1}\theta_{j-1,1}(y),$$

con $\theta_{j-1,1}(y) \in CH^{j-1}(Y^{(2)}) \subseteq C_j^{-1}$. Luego, dado que

$$d_j^{-1}(\theta_{j-1,1}(y)) = \theta_{j-1,2}\theta_{j-1,1}(y) + \delta_{j-1,1}\theta_{j-1,1}(y) = \delta_{j-1,1}\theta_{j-1,1}(y),$$

se tiene que $x = i^*i_*(y) \in Im(d_j^{-1}) \cap CH^j(Y)$.

Finalmente, si rastreamos la construcción de ψ en el teo. 3.4.1, se sigue que ψ está dado por la proyección natural

$$\frac{CH^j(Y)}{Im(i^*i_*)} \twoheadrightarrow \frac{CH^j(Y)}{CH^j(Y) \cap Im(d_j^{-1})} \hookrightarrow Ker(T_j^0 \overset{N}{\to} T_{j-1}^2). \qquad \blacksquare$$

4.2. Morfismo reducción.

En esta sección definiremos un morfismo que pensamos comparte algunas propiedades con el morfismo ciclo clásico y, en consecuencia, definiremos otro morfismo que de alguna manera está relacionado con el morfismo de Abel-Jacobi. Estos morfismos pueden utilizarse en el estudio de algunas conjeturas y la detección de ciclos algebraicos no nulos (ver apéndice A).

Teniendo en cuenta nuestra noción de dimensión absoluta (ver def. 2.4.1), la sucesión exacta para los grupos (de homología) de Chow de la sec. 2.5 se escribe de la manera siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} CH_{d+1-j}(Y/S) & \xrightarrow{i_*} & CH_{d+1-j}(\mathcal{X}/S) & \xrightarrow{j^*} & CH_{d+1-j}(X/S) & \longrightarrow & 0 \\ \shortparallel & & & & \shortparallel & & \\ CH_{d+1-j}(Y) & & & & CH_{d-j}(X) = CH^j(X) & & \end{array}$$

Observemos que la SUPOSICION 3.3.8 nos permite ralacionarla con el complejo del teo. 4.1.1 de la forma siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccc} CH_{d+1-j}(Y) & \xrightarrow{i_*} & CH_{d+1-j}(\mathcal{X}/S) & \xrightarrow{j^*} & CH^j(X) & \longrightarrow & 0 & & \\ & & \shortparallel & & & & & & \\ & & CH^j(\mathcal{X}/S) & \xrightarrow{i^*} & CH^j(Y) & \xrightarrow{sp_B} & T_j^0 & \xrightarrow{N} & T_{j-1}^2 \end{array}$$

Definición 4.2.1. *Se define el* **morfismo reducción***:*

$$c_X : CH^j(X) \longrightarrow \frac{CH^j(Y)}{CH^j(Y) \cap Im(d_j^{-1})} \hookrightarrow Ker(T_j^0 \xrightarrow{N} T_{j-1}^2)$$

como la composición

$$c_X(\alpha) = sp_B \circ i^*(\beta) = [i^*(\beta)]$$

donde $\beta \in CH^j(\mathcal{X}) = CH_{d+1-j}(\mathcal{X})$ es tal que $j^*(\beta) = \alpha$ y $[i^*(\beta)]$ denota la clase del elemento $i^*(\beta)$ en el cociente $\frac{CH^j(Y)}{CH^j(Y) \cap Im(d_j^{-1})}$.

Observemos que el morfismo c_X está bien definido:
Si $\beta, \beta' \in CH^j(\mathcal{X})$ son tales que $j^*(\beta) = j^*(\beta') = \alpha$, entonces

$$\beta - \beta' \in Ker(j^*) = Im(i_*)$$

y por lo tanto existe $\gamma \in CH_{d+1-j}(Y)$ tal que $i_*(\gamma) = \beta - \beta'$.
Ahora, del teo. 4.1.1, $Im(i^* i_*) \subseteq Ker(sp_B)$ y por lo tanto

$$sp_B \circ i^*(\beta - \beta') = sp_B \circ (i^* i_*)(\gamma) = 0.$$

Observación 4.2.2. *Observemos que no tenemos un morfismo bien definido $CH^j(X) \longrightarrow CH^j(Y)$.*

Denotemos por $\cap[Y]$ la composición

$$\cap[Y] : CH^j(Y) \hookrightarrow CH^j(Y^{(1)}) \twoheadrightarrow CH_{d-j}(Y),$$

es decir, $\cap[Y]$ es el morfismo dado por

$$CH^j(Y) \twoheadrightarrow \frac{CH^j(Y)}{CH^j(Y) \cap Im(\delta_{j-1,1})} \hookrightarrow \frac{CH^j(Y^{(1)})}{Im(\delta_{j-1,1})} =: CH_{d-j}(Y).$$

Luego, de las definiciones correspondientes, se sigue que tenemos complejos

$$\cdots \to CH_{d+1-j}(Y) \xrightarrow{i^*i_*} CH^j(Y) \xrightarrow{\cap[Y]} CH_{d-j}(Y) \xrightarrow{i^*i_*} CH^{j+1}(Y) \to \cdots$$

De ([Ku1], (43)), tenemos el siguiente:

Lema 4.2.3. *Para todo $\beta \in CH^j(\mathcal{X}/\mathcal{S})$, se tiene el diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} CH^j(\mathcal{X}/S) & \xrightarrow{\cap[\mathcal{X}]} & CH_{d+1-j}(\mathcal{X}/S) \\ \downarrow_{i^*} & & \downarrow_{i^!} \\ CH^j(Y) & \xrightarrow{\cap[Y]} & CH_{d+1-j}(Y). \end{array}$$

Dado que estamos suponiendo que $\cap[\mathcal{X}]$ es un isomorfismo (y por abuso de notación) escribiremos la conmutatividad anterior como:

$$i^!(\beta) = i^*(\beta) \cap [Y].$$

El ejemplo siguiente nos dará una idea de quién es el morfismo c_X.

Ejemplo 4.2.4. *(Caso de buena reducción):*

Supongamos que el modelo $\mathcal{X}$ sobre S es liso.

En este caso la fibra especial Y también es lisa y sólo tiene una componente irreducible. Así,

$$Y = Y^{(1)} \quad y \quad Y^{(m)} = \emptyset, \forall m \geqq 2.$$

Luego, $T_j^0 = CH^j(Y)$, $T_{j-2}^1 = 0$ y $N : CH^j(Y) \to 0$ es el operador idénticamente 0 (es decir, no hay monodromía) y por lo tanto $Ker(N) = CH^j(Y)$. Lo mismo se tiene para las aplicaciones

$$\theta_{j-1,1} : CH^{j-1}(Y) \to 0$$

y

$$\delta_{j-1,1} : 0 \to CH^j(Y).$$

Así, del lema 3.3.10, concluímos que $-i^*i_* = 0$ y de la prop. 4.1.3, que el morfismo

$$sp_B : CH^j(Y) \longrightarrow CH^j(Y)$$

es la identidad.

Por otro lado, del lema 4.2.3, se tiene que $i^! = i^*$ (ya que en este caso también $\cap[Y]$ es un isomorfismo) y por lo tanto

$$c_X : CH^j(X) = CH_{d-j}(X) \to CH^j(Y) = CH_{d-j}(Y)$$

$$\begin{aligned} c_X(\alpha) &= sp_B \circ i^*(\beta) = i^*(\beta) \\ &= i^!(\beta) = \sigma \circ j^*(\beta) = \sigma(\alpha) \end{aligned}$$

no es más que el morfismo especialización de la sec. 2.5.

Lema 4.2.5. *Se tiene*

$$CH^j(Y) \cap Im(\delta_{j-1,1}) = CH^j(Y) \cap Im(d_j^{-1}).$$

Demostración: Se sigue del hecho de que

$$\begin{array}{ccccc} C_j^{-1} & = & CH^{j-1}(Y^{(2)}) & \bigoplus CH^{j-2}(Y^{(4)}) & \cdots \\ \downarrow_{d_j^{-1}} & & \downarrow_{\delta_{j-1,1}} & \downarrow_{\delta_{j-2,3}} & \searrow_{\theta_{j-2,4}} \\ C_j^0 & = & CH^j(Y^{(1)}) & \bigoplus CH^{j-1}(Y^{(3)}) & \cdots \end{array}$$

Por tanto

$$Im(\delta_{j-1,1}) = CH^j(Y^{(1)}) \cap Im(d_j^{-1})$$

y así,

$$CH^j(Y) \cap Im(\delta_{j-1,1}) = CH^j(Y) \cap Im(d_j^{-1}). \qquad \blacksquare$$

Teorema 4.2.6. *Sea X variedad lisa y proyectiva sobre K que satisface las Suposiciones 3.2.5 y 3.3.8. Para todo $\alpha \in CH^j(X)$, se tiene*

$$c_X(\alpha) = \sigma(\alpha).$$

Demostración: Primero recordemos que del lema 4.2.3,

$$\sigma(\alpha) = i^!(\beta) = i^*(\beta) \cap [Y]$$

y que por definición de $\cap[Y]$, $i^*(\beta) \cap [Y]$ se obtiene cogiendo la clase de $i^*(\beta) \in CH^j(Y)$ dentro de la imagen del cociente

$$\frac{CH^j(Y)}{CH^j(Y) \cap Im(\delta_{j-1,1})} \hookrightarrow \frac{CH^j(Y^{(1)})}{Im(\delta_{j-1,1})} =: CH_{d-j}(Y).$$

De manera similar, por definición de c_X, el elemento $c_X(\alpha) = [i^*(\beta)]$ se calcula cogiendo la clase de $i^*(\beta) \in CH^j(Y)$ en el cociente

$$\frac{CH^j(Y)}{CH^j(Y) \cap Im(d_j^{-1})} \hookrightarrow Ker(T_j^0 \xrightarrow{N} T_{j-1}^2).$$

Finalmente, la igualdad se sigue del lema 4.2.5. ■

4.3. Independencia del modelo.

De principio, toda la construcción del morfismo c_X depende del modelo $\mathcal{X}$ sobre R escogido. Para examinar más de cerca esta dependencia consideremos la categoría $M(X)$ de modelos regulares de X cuya fibra especial es un divisor con cruzamientos normales. Esta categoría es equivalente a un conjunto parcialmente ordenado ya que, a lo más, existe un morfismo entre cualesquiera dos de tales modelos.

De acuerdo a ([BGS1], lema 1.3.4), dado un morfismo de elementos en $M(X)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{X} \\ & \nwarrow\ \nearrow & \\ & X & \end{array}$$

si en el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{array}{ccc} Y' & \overset{i'}{\hookrightarrow} & \mathcal{X}' \\ \downarrow_{\pi_0} & & \downarrow_{\pi} \\ Y & \overset{i}{\hookrightarrow} & \mathcal{X} \end{array}$$

i, i' denotan las inclusiones de las fibras especiales respectivas, se tienen los diagramas conmutativos (ver [BGS1], lema 1.3.4):

$$\begin{array}{ccc} CH_{d+1-j}(Y') & \xrightarrow{i'^*i'_*} & CH^j(Y') \\ \downarrow_{\pi_{0*}} & & \downarrow_{\pi_{0!}} \\ CH_{d+1-j}(Y) & \xrightarrow{i^*i_*} & CH^j(Y) \\ \downarrow_{\pi_0^!} & & \downarrow_{\pi_0^*} \\ CH_{d+1-j}(Y') & \xrightarrow{i'^*i'_*} & CH^j(Y'). \end{array}$$

Más aún, se tienen los isomorfismos siguientes (ver [BGS1], teo. 2.2.1):

Teorema 4.3.1. *Los morfismos inducidos*

$$\pi_{0*} : Ker(i'^*i'_*) \longrightarrow Ker(i^*i_*)$$

y

$$\pi_0^*: Coker(i^*i_*) \longrightarrow Coker(i'^*i'_*)$$

son isomorfismos con inversos $\pi_0^!$ y $\pi_{0!}$, respectivamente.

Por otro lado, de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccc} CH^j(\mathcal{X}'/S) \cong & CH_{d+1-j}(\mathcal{X}'/S) & \xrightarrow{j'^*} & CH^j(X) \\ \downarrow_{\pi_!} & \downarrow_{\pi_*} & \nearrow_{j^*} & \\ CH^j(\mathcal{X}/S) \cong & CH_{d+1-j}(\mathcal{X}/S) & & \end{array}$$

y con el mismo abuso de notación que en la obs 4.2.3, se tiene que

$$\alpha = j'^*(\beta') = j^*(\pi_!(\beta')).$$

Más aún, del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} CH_{d+1-j}(Y') & \xrightarrow{i'_*} & CH_{d+1-j}(\mathcal{X}'/S) \cong & CH^j(\mathcal{X}'/S) & \xrightarrow{i'^*} & CH^j(Y') & \xrightarrow{[\cdot]'} & Coker(i'^*i'_*) \\ \downarrow_{\pi_{0*}} & & \downarrow_{\pi_*} & \downarrow_{\pi_!} & & \downarrow_{\pi_{0!}} & & \wr\uparrow_{\pi_0^*} \\ CH_{d+1-j}(Y) & \xrightarrow{i_*} & CH_{d+1-j}(\mathcal{X}/S) \cong & CH^j(\mathcal{X}/S) & \xrightarrow{i^*} & CH^j(Y) & \xrightarrow{[\cdot]} & Coker(i^*i_*) \end{array}$$

se sigue que

$$[i'^*(\beta')]' = \pi_0^*[\pi_{0!}i'^*(\beta')] = \pi_0^*[i^*\pi_!(\beta')] = \pi_0^*[i^*\pi_*(\beta')].$$

Luego, cogiendo $\beta = \pi_*(\beta')$ y recordando que nuestro morfismo c_X está definido por la composición:

$$CH^j(X) \longrightarrow \frac{CH^j(Y)}{Im(i^*i_*)} \twoheadrightarrow \frac{CH^j(Y)}{CH^j(Y) \cap Im(\delta_{j-1,1})},$$

vemos que la primera aplicación es independiente del modelo escogido.

De ([BGS2], teo. 5), tenemos la siguiente:

Proposición 4.3.2. *Supongamos que Y satisface las propiedades (i) y (ii) de la def. 3.3.4. Entonces se tienen las sucesiones exactas largas siguientes*

$$\cdots \longrightarrow CH_{d+1-j}(Y)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{i^*i_*\otimes\mathbb{Q}} CH^j(Y)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\cap[Y]\otimes\mathbb{Q}} CH_{d-j}(Y)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{i^*i_*\otimes\mathbb{Q}} CH^{j+1}(Y)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \cdots$$

Así, $\cap[Y]\otimes\mathbb{Q}$ induce isomorfismos:

$$Coker(i^*i_*\otimes\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} Ker(i^*i_*\otimes\mathbb{Q}).$$

Lema 4.3.3. *Si Y satisface las propiedades (i) y (ii) de la def. 3.3.4, entonces*

$$Im(i^*i_* \otimes \mathbb{Q}) = Im(\delta_{j-1,1} \otimes \mathbb{Q}) \cap CH^j(Y)_{\mathbb{Q}}$$

y por lo tanto el morfismo $c_X \otimes \mathbb{Q}$ es independiente del modelo escogido.

Demostración: En la parte final de la demostración de la prop. 4.1.3 se vió que

$$Im(i^*i_*) \subseteq Im(\delta_{j-1,1}) \cap CH^j(Y).$$

Por otro lado, del lema 3.3.10, se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \\
 & CH_{d+1-j}(Y)_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "i^*i_*\otimes\mathbb{Q}"] & CH^j(Y)_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\cap[Y]\otimes\mathbb{Q}"] \arrow[d] & CH_{d-j}(Y)_{\mathbb{Q}} \arrow[ur] & \\
CH^{j-1}(Y^{(1)})_{\mathbb{Q}} \arrow[ur, "pr\otimes\mathbb{Q}"'] \arrow[dr, "\theta_{j-1,1}\otimes\mathbb{Q}"] & & CH^j(Y^{(1)})_{\mathbb{Q}} \arrow[ur, "pr\otimes\mathbb{Q}"'] & & \\
 & CH^{j-1}(Y^{(2)})_{\mathbb{Q}} \arrow[ur, "-\delta_{j-1,1}\otimes\mathbb{Q}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Luego, si $x = (\delta_{j-1,1} \otimes \mathbb{Q})(y) \in Im(\delta_{j-1,1} \otimes \mathbb{Q}) \cap CH^j(Y)_{\mathbb{Q}}$, entonces

$$x(\cap[Y] \otimes \mathbb{Q}) = (pr \otimes \mathbb{Q})(x) = (pr \otimes \mathbb{Q})(\delta_{j-1,1}(y)) = 0$$

y Así, $x \in Ker(\cap[Y] \otimes \mathbb{Q}) = Im(i^*i_* \otimes \mathbb{Q})$ (por la prop. 4.3.2). ■

4.4. Morfismo asociado AJ_X.

En esta sección definiremos un segundo morfismo que nos servirá en nuestro estudio posterior de las Jacobianas intermedias (ver cap. 6, sec. 6.8).

Recordemos que para todo $\alpha \in CH^j(X)$ hemos definido

$$c_X(\alpha) = sp_B \circ i^*(\beta)$$

donde $\beta \in CH_{d+1-j}(\mathcal{X})$ es tal que $j^*(\beta) = \alpha$ y sp_B está dado por la composición $\psi \circ pr$:

$$CH^j(Y) \overset{pr}{\twoheadrightarrow} \frac{CH^j(Y)}{Im(i^*i_*)} \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} \frac{CH^j(Y)}{CH^j(Y) \cap Im(d_j^{-1})}.$$

Luego, si cogemos $\alpha \in Ker(c_X)$, se tiene

$$0 = c_X(\alpha) = \psi \circ pr(i^*(\beta))$$

y por lo tanto

$$pr(i^*(\beta)) \in Ker(\psi) = \frac{CH^j(Y) \cap Im(\delta_{j-1,1})}{Im(i^*i_*)}.$$

Pero de la sucesión exacta (***) (ver demostración prop. 4.1.3):

$$Ker(-i^*i_*) \to T_j^{-1} \xrightarrow{N} T_{j-1}^1 \xrightarrow{\varphi} \frac{CH^j(Y)}{Im(i^*i_*)} \xrightarrow{\psi} T_j^0 \xrightarrow{N} T_{j-1}^2.$$

se sigue que

$$\begin{aligned} Ker(\psi) = Im(\varphi) &\overset{g}{\simeq} T_{j-1}^1 / Ker(\varphi) \\ &= Coker(T_j^{-1} \xrightarrow{N} T_{j-1}^1). \end{aligned}$$

Definición 4.4.1. *Se define el* **morfismo** AJ_X **asociado a** c_X *por la fórmula:*

$$\begin{aligned} AJ_X : Ker(c_X) &\longrightarrow Coker(T_j^{-1} \xrightarrow{N} T_{j-1}^1) \\ \alpha &\longmapsto g(pr(i^*(\beta))). \end{aligned}$$

Observación 4.4.2. *El morfismo AJ_X está bien definido:*

Si existe otro $\beta' \in CH_{d+1-j}(\mathcal{X})$ tal que $j^*\beta' = j^*\beta = \alpha$, se tiene $\beta - \beta' \in Ker(j^*) = Im(i_*)$ y por lo tanto existe $\gamma \in CH_{d+1-j}(Y)$ tal que $i_*(\gamma) = \beta - \beta'$. Así,

$$pr(i^*(\beta)) - pr(i^*(\beta')) = pr(i^*i_*(\gamma)) = 0$$

y por lo tanto $g(pr(i^*(\beta))) = g(pr(i^*(\beta')))$.

4.5. Ciclos homólogos a cero.

Dado que en esta sección utilizaremos la teoría del descenso cohomológico, comenzaremos por recordar brevemente en qué consiste:

Dada una variedad Y que sea singular y completa, la idea de fondo es utilizar la resolución de singularidades para reemplazar Y por un esquema simplicial proyectivo y liso

$$Y_\bullet : \cdots Y_2 \overset{\rightleftarrows}{\rightleftarrows} Y_1 \rightleftarrows Y_0.$$

El descenso cohomológico nos permite encontrar tales esquemas simpliciales $Y_\bullet$ que tienen (en un sentido conveniente) las misma cohomología que Y. Así, uno puede obtener (vía una sucesión espectral) la cohomología de Y en términos de las de los Y_n's. Utilizando la teoría de Hodge clásica sobre cada Y_n se deduce una estructura de Hodge mixta sobre la cohomología de Y.

Ahora seguiremos la exposición de ([Ku1], sec. 5.9).

Definición 4.5.1. *Sea Y un esquema. Un morfismo*

$$\pi : U \to Y$$

se llama una **envolvente** *si es propio y para todo punto $x \in Y$ existe un punto $u \in U$ tal que $\pi(u) = x$ y $\kappa(u) = \kappa(x)$, donde $\kappa(\cdot)$ denota el cuerpo residual.*

Proposición 4.5.2. *Sean $\pi : U \to Y$ y $g : V \to U \times_Y U$ envolventes. Entonces, existen sucesiones exactas*

$$CH_j(V) \stackrel{p_{1*}-p_{2*}}{\longrightarrow} CH_j(U) \stackrel{\pi_*}{\to} CH_j(Y) \to 0$$

y

$$0 \to CH^j(Y) \stackrel{\pi^*}{\to} CH^j(U) \stackrel{p_1^*-p_2^*}{\longrightarrow} CH^j(V)$$

donde las p_i's denotan la composición de g con las proyecciones naturales correspondientes.

Ahora, supongamos que todos nuestros esquemas están definidos sobre un cuerpo fijo k **perfecto**. Sea $\pi : U \to Y$ una envolvente. Los productos fibrados

$$U_m = U \times_Y \cdots \times_Y U \quad (m + 1 - \text{veces}, m \geq 0)$$

forman un *esquema simplicial* $U_\bullet$ y

$$U_\bullet \to Y$$

es un hiperrecubrimiento propio en el sentido de ([De3], sec. 5.3).

La teoría de ***descenso cohomológico*** ([De3], sec. 5.3) nos proporciona una sucesión espectral

$$E_1^{p,q} = H^q(\overline{U}_p, \mathbb{Q}_\ell(j)) \Longrightarrow H^{p+q}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j)),$$

para todo $\ell \neq char(k)$ y todo $j \in \mathbb{Z}$.

Ahora aplicaremos las ideas de la teoría del descenso cohomológico a la estratificación canónica asociada a la fibra especial Y del modelo estrictamente semiestable $\mathcal{X}$ de nuestra variedad X (ver def 3.2.2).

Más en general, si Y es una variedad reducida sobre k tal que todos sus estratos Y_I son lisos sobre k (ver notación de la def. 3.3.4), se tiene que $\pi : Y^{(1)} \to Y$ define una *envolvente* tal que todos los productos fibrados

$$Y_m^{(1)} = Y^{(1)} \times_Y \cdots \times_Y Y^{(1)} \quad (m + 1 - \text{veces}, m \geq 0)$$

son variedades lisas sobre k (ver [Ku1], sec. 5.15).

Así, se tienen sucesiones exactas

$$CH_j(Y_1^{(1)}) \xrightarrow{p_{1*}-p_{2*}} CH_j(Y^{(1)}) \xrightarrow{\pi_*} CH_j(Y) \to 0,$$

$$0 \to CH^j(Y) \xrightarrow{\pi^*} CH^j(Y^{(1)}) \xrightarrow{p_1^*-p_2^*} CH^j(Y_1^{(1)})$$

y la teoría del descenso cohomológico nos proporciona la *sucesión espectral de los pesos*

$$E_1^{p,q} = H^q(\overline{Y}_p^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(j)) \Longrightarrow H^{p+q}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j)),$$

para todo $\ell \neq char(k)$ y todo $j \in \mathbb{Z}$.

La filtración asociada $W_\bullet$ sobre $H^i(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j))$ se llama ***filtración de los pesos geométrica***.

De acuerdo con ([Ito1], sec. 2.2), la noción de **peso** considerada cuando k es un cuerpo finito puede generalizarse al caso en que k es un cuerpo pequeño (ver def. 1.1.5) de forma que, si los $Y_m^{(1)}$ son lisos y proyectivos sobre k (perfecto), los $H^q(\overline{Y}_p^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(j))$ son puros de peso $q-2j$ en el sentido de ([De5], sec. 1.2). Es más, dado que las diferenciales $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ son aplicaciones entre G_k-estructuras de pesos diferentes para $r \geq 2$, se sigue que $d_r = 0$ para todo $r \geq 2$ y por lo tanto que la sucesión espectral degenera en E_2. La filtración es independiente de la envolvente ya que coincide con la dada por el Frobenius (ver [De3])

En el caso que la sucesión espectral degenere en E_2, la filtración sobre $H^{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j))$ tiene pesos $\leqslant 0$ y

$$E_2^{0,q} = Ker(H^q(\overline{Y}^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(j)) \xrightarrow{d^{0,q}} H^q(\overline{Y}_1^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(j))),$$

de donde se obtiene la sucesión exacta

$$0 \to Gr_0^W H^{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j)) \longrightarrow H^{2j}(\overline{Y}^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(j)) \xrightarrow{d^{0,2j}} H^{2j}(\overline{Y}_1^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(j)).$$

Finalmente, la dualidad entre la homología y la cohomología étale respeta la filtración por el peso y por lo tanto (después de dualizar) se tiene la sucesión exacta siguiente

$$H_{2j}(\overline{Y}_1^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(-j)) \to H_{2j}(\overline{Y}^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(-j)) \to Gr_0^W H_{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(-j)) \to 0 \qquad (*)$$

La respectiva filtración $W_\bullet$ sobre $H_{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(-j))$ tiene pesos ≥ 0 y satisface

$$H_{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(-j))^{G_k} \subseteq W_0 H_{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(-j)) \cong Gr_0^W H_{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(-j)).$$

Observación 4.5.3. *Si el cuerpo k no es pequeño, un argumento parecido al de ([Ito1], sec. 2.2) nos permite ver que los resultados anteriores siguen siendo ciertos. En efecto:*

1) Existe un cuerpo pequeño $\widehat{k} \subseteq k$ donde Y e $Y^{(1)}$ están definidas y una variedad $\widehat{Y}_{\widehat{k}}$ cuya envolvente aún está definida sobre $\widehat{k}$ y cuyas componentes satisfacen las mismas propiedades que las de Y, de forma que $\widehat{Y}_{\widehat{k}} \otimes_{\widehat{k}} k = Y$.

2) Si $k' = \{\alpha \in k | \alpha^{p^n} \in \widehat{k}\}$, entonces k' es perfecto y pequeño (ya que $k'|\widehat{k}$ es puramente inseparable).

3) Para $Y' = \widehat{Y}_{\widehat{k}} \otimes_{\widehat{k}} k'$, la respectiva sucesión espectral degenera en E_2. Más aún, dado que se tienen isomorfismos naturales como $\mathbb{Q}_\ell$-espacios vectoriales (pero no como G_k-módulos) que respetan las diferenciales d_r:

$$H^q(\overline{Y'}^{(1)}_p, \mathbb{Q}_\ell(j)) \cong H^q(\overline{Y}^{(1)}_p, \mathbb{Q}_\ell(j))$$

$$H^{p+q}(\overline{Y'}, \mathbb{Q}_\ell(j)) \cong H^{p+q}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j)),$$

se sigue que la sucesión espectral

$$E_1^{p,q} = H^q(\overline{Y}^{(1)}_p, \mathbb{Q}_\ell(j)) \Longrightarrow H^{p+q}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j))$$

también degenera en E_2.

• Diremos que una variedad proyectiva Z sobre k satisface la **propiedad (BT)**, si la acción de G_k sobre $H_{2j}(\overline{Z}, \mathbb{Q}_\ell(-j))$ es semisimple y el morfismo ciclo ℓ-ádico ($\ell \neq char(k)$) induce un isomorfismo:

$$CH_j(Z)_{\mathbb{Q}_\ell} \overset{cl_{\ell,Z}}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} H_{2j}(\overline{Z}, \mathbb{Q}_\ell(-j))^{G_k}.$$

Esta propiedad debería ser cierta en un cuerpo finito para toda variedad lisa y proyectiva (ver obs. 2.7.1(iv)) y será cierta para las variedades que usaremos en el cap. 5.

Proposición 4.5.4. *Sea k cuerpo perfecto y sea Y una variedad proyectiva sobre k. Supongamos que para algún primo $\ell \neq char(k)$, $Y^{(1)}$ y $Y^{(1)}_1$ satisfacen la propiedad (BT). Entonces, Y satisface:*

$$CH_j(Y)_{\mathbb{Q}_\ell} \overset{cl_{\ell,Y}}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} H_{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(-j))^{G_k}.$$

Demostración: Bajo estas condiciones todos los $Y^{(1)}_m$ son lisos y proyectivos sobre k y estamos en la situación de descenso cohomológico descrita anteriormente para el primo $\ell \neq char(k)$. Así, se tiene la sucesión exacta (*):

$$H_{2j}(\overline{Y}^{(1)}_1, \mathbb{Q}_\ell(-j)) \to H_{2j}(\overline{Y}^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(-j)) \to Gr^W_0 H_{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(-j)) \to 0$$

y dado que $Gr_0^W H_{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(-j))$ es un cociente de $H_{2j}(\overline{Y}^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(-j))$, se tiene que la acción de G_k sobre $Gr_0^W H_{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(-j))$ también es semisimple (ver conj. de semisimplicidad, sec. 2.7). Luego, dado que la acción de G_k sobre cada uno de los grupos de (*) es semisimple, al coger fijos por G_k se obtiene la sucesión exacta siguiente

$$H_{2j}(\overline{Y}_1^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(-j))^{G_k} \to H_{2j}(\overline{Y}^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(-j))^{G_k} \xrightarrow{\overline{\pi}_*} H_{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(-j))^{G_k} \to 0.$$

Por otro lado, recordando las propiedades de exactitud del producto tensorial, de la sucesión exacta de grupos de homología de Chow, se tiene

$$CH_j(Y_1^{(1)})_{\mathbb{Q}_\ell} \xrightarrow{p_{1*}-p_{2*}} CH_j(Y^{(1)})_{\mathbb{Q}_\ell} \xrightarrow{\pi_*} CH_j(Y)_{\mathbb{Q}_\ell} \to 0.$$

Finalmente, combinando estas sucesiones exactas y teniendo en cuenta la unicidad del morfismo ciclo, se obtiene el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccccc}
CH_j(Y_1^{(1)})_{\mathbb{Q}_\ell} & \xrightarrow{p_{1*}-p_{2*}} & CH_j(Y^{(1)})_{\mathbb{Q}_\ell} & \xrightarrow{\pi_*} & CH_j(Y)_{\mathbb{Q}_\ell} \to 0 \\
\wr\downarrow cl_{\ell, Y_1^{(1)}} & & \wr\downarrow cl_{\ell, Y^{(1)}} & & \downarrow cl_{\ell, Y} \\
H_{2j}(\overline{Y}_1^{(1)})(-j)^{G_k} & \longrightarrow & H_{2j}(\overline{Y}^{(1)})(-j)^{G_k} & \xrightarrow{\overline{\pi}_*} & H_{2j}(\overline{Y})(-j)^{G_k} \to 0
\end{array}$$

que induce el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
0 \to Ker(\pi_*) & \to & CH_j(Y^{(1)})_{\mathbb{Q}_\ell} & \xrightarrow{\pi_*} & CH_j(Y)_{\mathbb{Q}_\ell} \to 0 \\
\wr\downarrow & & \wr\downarrow cl_{\ell, Y^{(1)}} & & \downarrow cl_{\ell, Y} \\
0 \to Ker(\overline{\pi}_*) & \to & H_{2j}(\overline{Y}^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(-j))^{G_k} & \xrightarrow{\overline{\pi}_*} & H_{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(-j))^{G_k} \to 0
\end{array}$$

a partir del cual se deduce el isomorfismo buscado. ■

Finalizaremos esta sección relacionando los ciclos homólogos a cero con nuestro morfismo reducción c_X.

Sea K un cuerpo de característica cero. Sea X variedad lisa y proyectiva sobre K con un modelo estrictamente semiestable como en la sec. 4.1.

Recordemos que el subgrupo de ***ciclos homólogos a cero*** en $CH^j(X)$ se define como

$$CH^j_{hom}(X) := Ker(CH^j(X) \longrightarrow \prod_\ell H^{2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j)))$$

donde el producto recorre todos los números primos ℓ.

Corolario 4.5.5. *Sea X variedad lisa y proyectiva sobre K con un modelo estrictamente semiestable. Bajo las hipótesis de la prop. 4.5.4 para la fibra especial Y, se tiene la inclusión*

$$CH^j_{hom}(X)_{\mathbb{Q}} \subseteq Ker(c_X \otimes \mathbb{Q}).$$

Demostración: Primero observemos que del hecho de ser X lisa y proyectiva sobre K, se tiene (ver obs. 3.2.6):

$$CH^j(X) \cong CH_{d-j}(X)$$

y

$$H^{2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j)) \cong H_{2d-2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j-d))$$

para todo primo ℓ.

En particular, para el primo $\ell \neq char(k)$ que satisface las hipótesis de la prop. 4.5.4; el teo. 2.6.2 nos da el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} CH^j(X)_{\mathbb{Q}} & = CH_{d-j}(X)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{cl_{\ell,X}} & H_{2d-2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j-d)) & = H^{2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j)) \\ & \downarrow_{\sigma\otimes\mathbb{Q}} & & \downarrow_{sp_H} & \\ & CH_{d-j}(Y)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{cl_{\ell,Y}} & H_{2d-2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j-d)). & \end{array}$$

Ahora, sea $\alpha \in CH^j_{hom}(X)_{\mathbb{Q}}$. Observemos que para este primo $\ell \neq car(k)$, se tiene

$$\alpha \in Ker(CH^j(X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{cl_{\ell,X}} H^{2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j)))$$

y del diagrama conmutativo anterior, se sigue que

$$0 = sp_H \circ cl_{\ell,X}(\alpha) = cl_{\ell,Y} \circ (\sigma \otimes \mathbb{Q})(\alpha).$$

Pero por la demostración del teo. 4.2.6, podemos ver $c_X(\alpha) = \sigma(\alpha)$ como elemento de $CH_{d-j}(Y)$ y Así,

$$cl_{\ell,Y} \circ (\sigma \otimes \mathbb{Q})(\alpha) = cl_{\ell,Y} \circ (c_X \otimes \mathbb{Q})(\alpha),$$

de donde,

$$(c_X \otimes \mathbb{Q})(\alpha) \in Ker(cl_{\ell,Y}).$$

Finalmente, por la prop. 4.5.4, se tiene

$$Ker(cl_{\ell,Y}) \subseteq Ker(CH_{d-j}(Y)_{\mathbb{Q}_\ell} \overset{cl_{\ell,Y}\otimes\mathbb{Q}_\ell}{\widetilde{\longrightarrow}} H_{2d-2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j-d))^{G_k}) = \{0\}. \quad \blacksquare$$

Observación 4.5.6. *(i) En realidad se ha demostrado que para el primo $\ell \neq char(k)$:*

$$Ker(CH^j(X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{cl_{\ell,X}} H^{2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j))) \subseteq Ker(c_X \otimes \mathbb{Q}).$$

(ii) Más adelante (ver cor. 5.4.6) veremos que, bajo ciertas hipótesis más restrictivas, se tiene:

$$Ker(cl_{\ell,X} \otimes \mathbb{Q}_\ell) = Ker(c_X \otimes \mathbb{Q}_\ell).$$

Capítulo 5

Reducción degenerada.

5.1. Variedades lineales.

En esta sección trabajaremos con variedades cuyas componentes (y sus intersecciones) tienen grupos de Chow finitamente generados. También nos interesaremos en variedades que tienen cohomologías lo más sencillas posibles en el sentido de que, por ejemplo, sus cohomologías étales de orden impar son triviales y las de orden par están generadas por ciclos algebraicos. Similarmente para la cohomología cristalina.

Sea k un cuerpo. Denotemos por $\overline{k}$ una clausura algebraica de k.

Definición 5.1.1. *Sea Y una variedad lisa y proyectiva sobre k. Diremos que Y es* **CH-lineal** *si $CH^j(\overline{Y})$ es un grupo abeliano finitamente generado para todo $j \geq 0$.*

Observación 5.1.2. *Observemos que esta definición implica que $CH^j(\overline{Y})_{\mathbb{Q}}$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión finita para todo $j \geq 0$.*

Proposición 5.1.3. *Sea Y una variedad lisa y proyectiva sobre k. Supongamos que $CH^j(\overline{Y})$ es finitamente generado para un cierto $j \geq 0$. Entonces, existe una λ extensión finita de k tal que si $Y_\lambda = Y \times_k Spec(\lambda)$, el homomorfismo (Gysin) natural*

$$CH^j(Y_\lambda)/tors \to CH^j(\overline{Y})/tors$$

es un isomorfismo.

En particular, si Y es CH-lineal, el resultado se cumple para una misma extensión finita λ de k y para todo $j \geq 0$.

Demostración: Primero observemos que si k' es una extensión finita de k, a partir del diagrama fibrado:

$$\begin{array}{ccc} Y_{k'} & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Spec(k') & \rightarrow & Spec(k) \end{array}$$

se tiene que la composición

$$CH^j(Y) \xrightarrow{f^*} CH^j(Y_{k'}) \xrightarrow{f_*} CH^j(Y)$$

coincide con el morfismo multiplicación por n,

$$\cdot[n] : CH^j(Y) \rightarrow CH^j(Y)$$

con $n = [k' : k]$ (ver sec. 2.1). Así, $Ker(f^*) \subseteq Ker(\cdot[n])$ el subgrupo de elementos de n-torsión de $CH^j(Y)$.

Ahora, sean $[\overline{Z}_1], ..., [\overline{Z}_r]$ los generadores de $CH^j(\overline{Y})$. Observemos que cada $\overline{Z}_i$ está definida sobre una extensión finita k_i de k en $\overline{k}$. Sea $\lambda = \prod_{i=1}^{r} k_i$ la composición de los cuerpos k_i $\forall 1 \leq i \leq r$, la cual es una extensión finita de k.

Denotemos por Z_i la variedad $\overline{Z}_i$ vista en $Y_i = Y \times_k Spec(k_i)$.

Del diagrama fibrado

$$\begin{array}{ccccc} \overline{Y} & \xrightarrow{f} & Y_\lambda & \xrightarrow{f_i} & Y_i \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Spec(\overline{k}) & \rightarrow & Spec(\lambda) & \rightarrow & Spec(k_i), \end{array}$$

y del hecho de que $f^*(f_i^*[Z_i]) = [\overline{Z}_i]$, se sigue que el homomorfismo

$$CH^j(Y_\lambda) \xrightarrow{f^*} CH^j(\overline{Y})$$

es exhaustivo. Si denotamos por $\widehat{[\cdot]}$ las clases módulo torsión, tenemos que el morfismo inducido $\widehat{f}^*$ también es exhaustivo:

$$\begin{array}{ccc} CH^j(Y_\lambda) & \xrightarrow{f^*} & CH^j(\overline{Y}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ CH^j(Y_\lambda)/tors & \xrightarrow{\widehat{f}^*} & CH^j(\overline{Y})/tors. \end{array}$$

Ahora, si $\widehat{[W]} \in Ker(\widehat{f}^*)$, entonces $f^*([W])$ es de torsión y por lo tanto existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$f^*(m[W]) = mf^*([W]) = 0.$$

Pero esta última igualdad se cumple en alguna extensión finita de λ, digamos λ', y así (por lo demostrado en la primera parte) $m[W] \in Ker(\cdot[n])$ para $n = [\lambda' : \lambda]$.

De esto se sigue que $[W]$ es de torsión y por lo tanto $\widehat{[W]} = 0$.

La afirmación final se sigue del hecho de que sólo hay un número finito de grupos de Chow que no son cero. ■

Sea k un cuerpo perfecto de característica $p \geq 0$. Denotemos por $\overline{k}$ una clausura algebraica de k.

Si $p > 0$, denotaremos por $W(\overline{k})$ el anillo de vectores de Witt de $\overline{k}$ y por L su cuerpo de cocientes. Recordemos que la acción del Frobenius sobre $L(-j)$ está dada por la acción del Frobenius sobre $W(\overline{k})$ multiplicada por p^j.

Definición 5.1.4. *Sea Y variedad lisa y proyectiva sobre k y ℓ un número primo. Si $\ell \neq p$, diremos que Y es* **ℓ-cohomológicamente lineal** *si para todo $i \geq 0$, se tiene:*

$$H^i(\overline{Y}_{et}, \mathbb{Q}_\ell) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}_\ell^{n_j}(-j), & si\ i = 2j\ par \\ 0, & si\ i\ impar. \end{cases}$$

para algún $n_j \in \mathbb{N}$ con acción de G_k incluída.

Si $\ell = p > 0$, diremos que Y es **p-cohomológicamente lineal** *si para todo $i \geq 0$, se tiene:*

$$H^i_{cris}(\overline{Y}/W(\overline{k})) \otimes_{W(\overline{k})} L \cong \begin{cases} L^{n_j}(-j), & si\ i = 2j\ par \\ 0, & si\ i\ impar. \end{cases}$$

para alguna $n_j \in \mathbb{N}$ con acción del Frobenius incluída.

Ejemplo 5.1.5. *(i) El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_k$ y productos fibrados de $\mathbb{P}^n_k$ satisfacen tanto la CH-linealidad como la linealidad cohomológica.*

(ii) Variedades tóricas lisas y proyectivas sobre k satisfacen CH-linealidad y linealidad cohomológica.

(iii) Sea Y sobre k tal que $dim Y = 1$. Entonces, Y es CH-lineal si, y sólo si, Y es una curva de género cero:

La necesidad se sigue del hecho de que si Y es una curva de género $g \geq 1$, entonces se tiene la sucesión exacta

$$0 \to Jac(\overline{Y})(\overline{k}) \to CH^1(\overline{Y}) \to \mathbb{Z}.$$

Pero, $Jac(\overline{Y})(\overline{k})$ no es finitamente generado, ya que

$$Jac(\overline{Y})(\overline{k})[n] \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$$

para todo n primo con p y por lo tanto $Jac(\overline{Y})(\overline{k})_{tors}$ *tiene infinitos puntos. El recíproco es inmediato.*

(iv) Las variedades lineales de Jannsen (ver [Ja2], 14.6, 14.7) que son proyectivas son ℓ*-cohomológicamente lineales para todo primo* ℓ*.*

Lema 5.1.6. *Sea* k *un cuerpo perfecto. Sea* Y *una variedad lisa y proyectiva sobre* k *que es CH-lineal. Supongamos que para algún número primo* $\ell \neq p$ *y para todo* $j \geq 0$*, se satisface que*

$$H^{2j+1}(Y, \mathbb{Q}_\ell) = 0$$

y que el morfismo ciclo es exhaustivo

$$CH^j(\overline{Y})_{\mathbb{Q}_\ell} \overset{cl_{\ell,\overline{Y}}}{\twoheadrightarrow} H^{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j))$$

y compatible con la acción de G_k*. Entonces,* Y *es* ℓ*-cohomológicamente lineal.*

Demostración: Observemos que la propiedad de ser CH-lineal implica que, para todo $j \geqslant 0$, $CH^j(\overline{Y})_{\mathbb{Q}_\ell}$ es un $\mathbb{Q}_\ell$-espacio vectorial de dimensión finita n_j. Por lo tanto

$$\mathbb{Q}_\ell^{n_j}(-j) \cong CH^j(\overline{Y}) \otimes \mathbb{Q}_\ell(-j) \overset{cl_{\ell,\overline{Y}}}{\twoheadrightarrow} H^{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell)$$

con acción de Galois compatible y así $H^{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell)$ es un cociente de $\mathbb{Q}_\ell^{n_j}(-j)$, de donde se sigue el resultado. ■

Observación 5.1.7. *Se tiene lo mismo para la cohomología cristalina en el caso* $\ell = p > 0$*.*

Sea k un cuerpo perfecto de característica $p > 0$. Denotemos por $W(k)$ el anillo de vectores de Witt de k y por K_0 el cuerpo de cocientes de $W(k)$. Sea $\sigma : W(k) \longrightarrow W(k)$ el Frobenius inducido por el Frobenius sobre k.

Recordemos que si Y es una variedad sobre k, el Frobenius absoluto

$$F : Y \to Y$$

está definido como la identidad sobre el espacio topológico base y por $a \mapsto a^p$ sobre el haz estructural $\mathcal{O}_Y$ (ver [Ch], sec. 2.4). Luego, por funtorialidad, F induce un morfismo σ-lineal

$$F : H^*(Y) \to H^*(Y)$$

sobre toda cohomología de Weil en Y. Ejemplos de tales cohomologías para Y lisa y proyectiva sobre k son la cohomología cristalina $H^i_{cris}(Y/W) \otimes_W K_0$ y la cohomología étale $H^i(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell)$ para todo $\ell \neq p$.

Proposición 5.1.8. *Sea Y variedad lisa y proyectiva sobre $k = \mathbb{F}_q$ con $q = p^s$. Si Y es ℓ-cohomológicamente lineal para algún primo ℓ, entonces lo es para todo número primo.*

Demostración: Observemos que en este caso tenemos un endomorfismo σ-lineal

$$F^s : H^*(Y) \to H^*(Y)$$

sobre las cohomologías cristalina y étale de Y, $\forall \ell' \neq p$. Más aún, de [De4], se tiene que el polinomio

$$P_i(t) = det(I - F^s \cdot t | H^i_{cris}(\overline{Y}/W(\overline{k})) \otimes L)$$

es igual al polinomio característico asociado a la cohomología ℓ'-ádica, para todo $\ell' \neq p$, es decir,

$$P_i(t) = det(I - F^s \cdot t | H^i(\overline{Y}, \mathbb{Q}_{\ell'}))$$

que tiene coeficientes enteros independientes de ℓ', $\forall \ell' \neq p$.

En particular, utilizando el polinomio característico asociado al primo ℓ para el cual Y es ℓ-cohomológicamente lineal, se tiene

$$P_i(t) = \begin{cases} (1 - q^j t)^{n_j}, & \text{si } i = 2j \text{ par} \\ 1, & \text{si } i \text{ impar.} \end{cases}$$

De lo cual se sigue que Y es ℓ'-cohomológicamente lineal para todo número primo ℓ'. ■

Observación 5.1.9. *(i) La prop. 5.1.8 nos dice que si k es finito, podemos hablar de variedades cohomológicamente lineales a secas sin hacer referencia al primo ℓ.*

(ii) De hecho, se tienen las igualdades:

$$b_i = dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell) = dim_L H^i(\overline{Y}/W(\overline{k})) \otimes L$$

independientemente del primo ℓ. Y por lo tanto, si $k = \overline{k}$, que Y sea ℓ-cohomológicamente lineal es equivalente a que $b_{2i+1} = 0, \forall i$ independientemente de ℓ.

5.2. Reducción totalmente degenerada.

Muchas de las suposiciones hechas en los teoremas de secciones anteriores pueden resumirse en el concepto de "reducción totalmente degenerada"(ver

[R-X1]) que nos lleva a interesantes conclusiones sobre las filtraciones en la cohomología.

Sea k cuerpo perfecto de característica $p > 0$, $W(k)$ el anillo de vectores de Witt de k y $K_0 = Frac(W(k))$. Denotemos por $\overline{k}$ una clausura algebraica de k y por $L = Frac(W(\overline{k}))$.

Sea Y variedad proyectiva sobre k de dimensión d que supondremos reducida y sean Y_i, $\forall i \in \Sigma = \{1, ..., t\}$ sus componentes irreducibles. Más aún, supongamos que para cada subconjunto no vacío $I \subseteq \Sigma$, los esquemas teóricos $Y_I = \cap_{j \in I} Y_j$ son lisos sobre k.

Denotamos $\overline{Y}_I = Y_I \times_k Spec(\overline{k})$.

Definición 5.2.1. *(ver [R-X1], def. 1) Diremos que Y es* **totalmente degenerada sobre** *k si para todo $\emptyset \neq I \subseteq \Sigma$ se satisface:*

(a) Los $\overline{Y}_I$'s son CH-lineales e $\overline{Y}$ satisface la propiedad (ii) de la def. 3.3.4.

(b) Dado $\ell \neq p$, los grupos $H^{2j+1}(\overline{Y}_I, \mathbb{Q}_\ell) = 0$ y el morfismo ciclo induce isomorfismos

$$CH^j(\overline{Y}_I) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \overset{cl_{\ell,\overline{Y}_I}}{\simeq} H^{2j}(\overline{Y}_I, \mathbb{Q}_\ell(j))$$

compatibles con la acción de G_k.

(c) Los grupos de cohomología cristalina $H^{2j+1}_{cris}(\overline{Y}_I / W(\overline{k})) \otimes L = 0$ y el morfismo ciclo induce isomorfismos

$$CH^j(\overline{Y}_I) \otimes_{\mathbb{Z}} L(-j) \overset{cl_{\overline{Y}_I}}{\simeq} H^{2j}_{cris}(\overline{Y}_I / W(\overline{k})) \otimes L$$

donde el twist por $-j$ significa la acción del Frobenius multiplicada por p^j.

(d) Y es ordinaria, es decir, $H^r(\overline{Y}, B\omega^s) = 0, \forall r, s$ donde $B\omega$ denota el subcomplejo de formas exactas del complejo logarítmico de De Rham.

Observación 5.2.2. *(i) $\overline{Y}$ satisface la propiedad (i) de la def. 3.3.4. Esto se sigue del correspondiente teorema en cohomología étale ℓ-ádica (ver [De5]) y de la biyectividad del morfismo ciclo en (b) (ver obs. 2.7.1(iii)).*

(ii) La condición (c) implica el isomorfismo (ver [R-X1], obs. 1):

$$CH^j(Y_I) \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(-j) \simeq H^{2j}_{cris}(Y_I / W(k)) \otimes K_0.$$

(iii) Si $\overline{Y}_I$ es ordinario en el sentido usual para todo $I \in \Sigma$ (es decir, si $H^r(\overline{Y}_I, d\Omega^s) = 0, \forall r, s$), entonces Y satisface la propiedad (d) de la def. 5.2.1 (ver [R-X1], def. 1(d)).

Si las aplicaciones naturales

$$CH^j(Y_I) \to CH^j(\overline{Y}_I)$$

son isomorfismos módulo torsión para todo $I \subseteq \Sigma$, diremos que Y es ***totalmente degenerada split***.

Observación 5.2.3. *(i) La prop. 5.1.3 nos asegura que, después de pasar a una extensión finita λ de k, toda variedad totalmente degenerada es totalmente degenerada split.*

(ii) Para los grupos abelianos finitamente generados $T^i_j(\overline{Y})$'s construídos en la sec. 3.3, la obs. anterior nos dice que $T^i_j(\overline{Y})/tors \cong T^i_j(Y_\lambda)/tors$ para todo par $i, j \in \mathbb{Z}$. Es más, se sigue que para esta misma extensión λ de k, G_λ actúa trivialmente sobre todos los $T^i_j(\overline{Y})_{\mathbb{Q}}$'s (ver sec. 2.7).

(iii) Dado que los $T^i_j(\overline{Y})$'s son finitamente generados, existe un subgrupo abierto de índice finito $H \leq G_k$ tal que H actúa trivialmente sobre todos ellos. Por lo tanto, después de pasar a una extensión finita de k, podemos suponer que los $T^i_j(\overline{Y})'s$ son grupos abelianos finitamente generados con una acción trivial de G_k.

Definición 5.2.4. *Sea K un cuerpo completo respecto a una valoración discreta con cuerpo residual k de característica $p > 0$. Sea X una variedad lisa y proyectiva sobre K de dimensión d. Diremos que X tiene* **reducción totalmente degenerada** *si existe un modelo regular $\mathcal{X}$ sobre S que es estrictamente semiestable y tal que su fibra especial Y es totalmente degenerada sobre k.*

Observación 5.2.5. *(i) Lo que pensamos debe reflejar que una variedad tenga "reducción totalmente degenerada" es la propiedad de ser CH-lineal. Sin embargo, hasta el momento no hemos sido capaces de demostrar que esta propiedad implica las otras de la def. 5.2.1. Estas otras propiedades nos sirven para construir redes enteras independientes de ℓ (las T's), relacionarlas con las cohomologías y probar la conjetura de monodromía-peso.*

(ii) Pasar a una extensión finita λ de k como en la obs. 5.2.3, corresponde a hacer una extensión finita y no-ramificada L de K, que a su vez corresponde a hacer una extensión finita étale, R' de R, de anillos locales. Más aún, de ([Ha], obs. 2.2.1 y [dJ], lema 2.13), se tiene que $\mathcal{X}_{R'} = \mathcal{X} \otimes_R R'$ es un modelo estrictamente semiestable de X_L con reducción $Y_\lambda = \mathcal{X} \otimes_R \lambda$ totalmente degenerada split.

(iii) Recordemos que la acción de G_K sobre los $T^i_j(\overline{Y})$'s es a través del cociente $G_K/I_K = G_k$. Luego, después de pasar a una extensión finita y no-ramificada de K, podemos suponer que:

$$T^i_j(\overline{Y})_{\mathbb{Q}} = T^i_j(Y)_{\mathbb{Q}}$$

con acción trivial de G_K para todo par $i, j \in \mathbb{Z}$,

Ejemplo 5.2.6. *(i) Si todos los Y_I's son variedades tóricas lisas y proyectivas, entonces Y es totalmente degenerada sobre k (ver [FMSS], [Ku2], [Il1]).*

(ii) Toda variedad abeliana A sobre K tal que el modelo de Nerón sobre R tiene por fibra especial un toro split es de reducción totalmente degenerada (ver [Ku1]).

(iii) Productos de curvas de Mumford y otras variedades con uniformización p-ádica (como las variedades modulares de Drinfeld y algunas variedades de Shimura unitarias) son de reducción totalmente degenerada (ver [Rap], [Va]).

5.3. Monodromía-peso.

A lo largo de toda esta sección K será un cuerpo completo respecto a una valoración discreta con anillo de valoración R y cuerpo residual k de característica $p \geq 0$. Denotemos por $\overline{K}$ una clausura separable de K y por K^{nr} la máxima extensión no ramificada de K en $\overline{K}$. Observemos que el cuerpo residual $\overline{k}$ de K^{nr} es una clausura separable de k. Sea $G_K = Gal(\overline{K}/K)$ el grupo de Galois absoluto de K y $I_K = Gal(\overline{K}/K^{nr})$ el subgrupo de inercia.

Observemos que si π es un elemento uniformizante de K y $\ell \neq p$ un número primo, la pro-ℓ-parte de I_K se identifica de forma canónica con $\mathbb{Z}_\ell(1) := \underleftarrow{lim}\mu_{\ell^n}(\overline{K})$ a través del morfismo exhaustivo:

$$t_\ell : I_K \to \mathbb{Z}_\ell(1)$$

$$g \longmapsto (\frac{g(\pi^{1/\ell^n})}{\pi^{1/\ell^n}})_n.$$

Consideremos X una variedad lisa y proyectiva sobre K y

$$\rho : G_K \longrightarrow GL(V_\ell)$$

la representación ℓ-ádica asociada a la cohomología étale $V_\ell := H^n(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$. En este caso, el *teorema de monodromía de Grothendieck* ([SGA VII,I]) nos asegura que existe un subgrupo $I_1 \subset I_K$ y una aplicación nilpotente, llamada *operador de monodromía*, (ver sec. 1.5):

$$N : H^n(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)(1) \to H^n(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$

tal que $\rho(g) = exp(N \circ t_\ell(g)), \forall g \in I_1$. El operador N tiene orden de nilpotencia n (ver sec. 1.4 y [Il1], cor. 3.4).

La respectiva filtración asociada, llamada **filtración de monodromía** $M_\bullet$, es la única filtración creciente que satisface (ver prop. 1.4.1.):

i) $NM_iV_\ell(1) \subseteq M_{i-2}V_\ell$.

ii) N^k induce un isomorfismo:

$$N^k : Gr_k^M V_\ell(k) \xrightarrow{\sim} Gr_{-k}^M V_\ell.$$

De su construcción se sigue que I_K actúa trivialmente sobre los cocientes graduados Gr_j^M y que $(V_\ell)^{I_K} \subseteq M_0$ (ver prop. 1.5.1).

Ahora, sean $S = Spec(R)$, $\eta = Spec(K)$, $s = Spec(k)$ y i, j las inclusiones respectivas (ver sec. 2.5).

Asumamos que X tiene reducción estrictamente semiestable (es decir, que cumple la sup. 3.2.5). Consideremos el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccccc}
\overline{Y}_{\overline{s}} & \xrightarrow{\overline{i}} & \overline{\mathcal{X}}_{\overline{S}} & \xleftarrow{\overline{j}} & \overline{X}_{\overline{\eta}} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\widehat{Y}_{\widehat{s}} & \xrightarrow{\widehat{i}} & \widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{S}} & \xleftarrow{\widehat{j}} & \widehat{X}_{\widehat{\eta}} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Y_s & \xrightarrow{i} & \mathcal{X}_S & \xleftarrow{j} & X_\eta
\end{array}$$

donde $\widehat{\eta} = Spec(K^{nr})$, $\widehat{S}$ es la normalización de S en $\widehat{\eta}$ y $\widehat{i}, \widehat{j}$ las inclusiones respectivas. De manera similar, se definen $\overline{\eta}$, $\overline{S}$, $\overline{i}$ y $\overline{j}$ para $\overline{K}$.

Recordemos que el complejo de "*haces evanescentes.*"está definido por:

$$R\Psi\mathbb{Q}_\ell := \overline{i}^* R\overline{j}_*\mathbb{Q}_\ell.$$

Este complejo puede considerarse como un objeto en $D^+(Y \times_s \eta, \mathbb{Q}_\ell)$, la categoría derivada de $\mathbb{Q}_\ell$-módulos sobre $\overline{Y}$ con acción continua de G_K compatible con la de G_k (observemos que también podemos considerar $R\Psi\mathbb{Q}_\ell$ como un objeto en la categoría derivada $D^+(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell[I_K])$ de haces de $\mathbb{Q}_\ell$-módulos con acción continua de I_K). Por definición, tenemos:

$$i^* Rj_*\mathbb{Q}_\ell = R\Gamma(G_K, R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)), \quad \widehat{i}^* R\widehat{j}_*\mathbb{Q}_\ell = R\Gamma(I_K, R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)).$$

Observemos que $H^{i+j}(\overline{Y}, R\Psi\mathbb{Q}_\ell) = H^{i+j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ y que la (segunda) sucesión espectral asociada a este complejo sobre $H^{i+j}(\overline{Y}, R\Psi\mathbb{Q}_\ell)$ (conocida como ***sucesión espectral de los ciclos evanescentes***) se escribe como

$${}'E_2^{i,j} = H^i(\overline{Y}, R^j\Psi(\mathbb{Q}_\ell)) \Rightarrow H^{i+j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell).$$

Un estudio más detallado nos permite ver que I_K actúa trivialmente sobre los haces de cohomología del complejo $R\Psi\mathbb{Q}_\ell$,

$$R^q\Psi(\mathbb{Q}_\ell) = \overline{i}^* R^q\overline{j}_*\mathbb{Q}_\ell$$

que son haces sobre $\overline{Y}$ con una acción continua de G_K que es compatible con la acción del cociente $G_k = G_K/I_K$ sobre $\overline{Y}$.

Más aún, si $T \in I_K$ es tal que $t_\ell(T)$ genera a $\mathbb{Z}_\ell(1)$ y $\widehat{T}$ es el generador de $\mathbb{Z}_\ell(-1)$ dual de T, el homomorfismo definido por

$$N = logT \otimes \widehat{T} : R\Psi\mathbb{Q}_\ell[d] \to R\Psi\mathbb{Q}_\ell(-1)[d],$$

es nilpotente con orden de nilpotencia $d = dimX$, conmuta con la acción de G_K (ver [Il1], sec. 3.7) y es tal que si $\mathcal{W}_\bullet$ es la filtración de monodromía asociada a N, se tiene

$$N\mathcal{W}_i \subseteq \mathcal{W}_{i-2}(-1).$$

Más aún, si

$$a_m : Y^{(m)} \longrightarrow Y, \quad m \geq 1$$

son las proyecciones naturales, se tienen isomorfismos canónicos:

$$\bigoplus_{k \geq max\{0,-i\}} \overline{a}_{2k+i+1*}\mathbb{Q}_\ell(-i-k)[-i-2k] \xrightarrow{\sim} Gr_i^{\mathcal{W}} R\Psi\mathbb{Q}_\ell$$

compatibles con la acción de G_k. La filtración $\mathcal{W}_\bullet$ y los isomorfismos anteriores son independientes de la elección de T (ver [Sa], prop. 2.2.3).

Ahora, dado que $\mathcal{X} \to S$ es propio, estos isomorfismos inducen sobre $H^{i+j}(\overline{Y}, R\Psi\mathbb{Q}_\ell) = H^{i+j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ la sucesión espectral siguiente:

$$E_1^{i,j} = H^{i+j}(\overline{Y}, Gr_{-i}^{\mathcal{W}} R\Psi\mathbb{Q}_\ell) \Rightarrow H^{i+j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell),$$

compatible con la acción de G_K y donde los términos E_1's pueden re-escribirse como (ver [Sa], cor. 2.2.4):

$$\begin{aligned} E_1^{i,j} &= H^{i+j}(\overline{Y}, \bigoplus_{k \geq max\{0,i\}} \overline{a}_{2k-i+1*}\mathbb{Q}_\ell(i-k)[i-2k]) \\ &= \bigoplus_{k \geq max\{0,i\}} H^{j+2i-2k}(\overline{Y}^{(2k-i+1)}, \mathbb{Q}_\ell(i-k)). \end{aligned}$$

Así, la sucesión espectral anterior puede re-escribirse en la forma

$$E_1^{i,j} = \bigoplus_{k \geq max\{0,i\}} H^{j+2i-2k}(\overline{Y}^{(2k-i+1)}, \mathbb{Q}_\ell(i-k)) \Rightarrow H^{i+j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell).$$

Esta sucesión, conocida como la ***sucesión espectral de los pesos*** (ver [R-Z], Satz 2.10, [Il1], 3.8) es G_K-equivariante y relaciona las cohomologías étales de la fibra especial y de la fibra genérica del modelo $\mathcal{X}$. De acuerdo con [Ito1], (ver obs. 5.3.1(iv) más adelante), esta sucesión espectral degenera siempre en E_2 sin imponer restricción alguna sobre el cuerpo residual k.

Llamaremos ***filtración de los pesos aritmética*** a la respectiva filtración obtenida y la denotaremos por $W_\bullet$.

Más aún, las aplicaciones $d_1^i : E_1^{i,j} \to E_1^{i+1,j}$ pueden escribirse explícitamente en términos de morfismos restricción y morfismos Gysin. A saber,

$$d_1^i = \sum_{k \geq max\{0,i\}} (\delta_{2k-i*} + \delta^*_{2k-i+1}),$$

donde

$$\delta_{m*} : H^q(\overline{Y}^{(m+1)}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^{q+2}(\overline{Y}^{(m)}, \mathbb{Q}_\ell(1))$$

es suma alternada de morfismos Gysin y

$$\delta^*_m : H^q(\overline{Y}^{(m)}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^q(\overline{Y}^{(m+1)}, \mathbb{Q}_\ell)$$

es suma alternada de morfismos pull-back (ver [Sa], prop. 2.2.6).

También se tiene que la acción de la monodromía N sobre $H^n(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ es la inducida a partir de la aplicación natural $N : E_1^{i,j}(1) \to E_1^{i+2,j-2}$ que es la identidad en los sumandos iguales y cero en los sumandos diferentes (como la monodromía de la sec. 3.3), y que satisface

$$N^i : E_1^{-i,j}(i) \xrightarrow{\sim} E_1^{i,j-2i}$$

para todo i, j. Finalmente, observemos que

$$N : H^n(\overline{Y}, R\Psi\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^n(\overline{Y}, R\Psi\mathbb{Q}_\ell(-1))$$

y por lo tanto

$$NW_i \subseteq W_{i-2}(-1).$$

Observación 5.3.1. *(i) Observemos que $W_\bullet$ depende de la existencia de un modelo estrictamente semiestable. Sin embargo, en el caso general, hay una forma de definir una "filtración por el peso"sobre V_ℓ donde la palabra "peso"tiene el sentido usual que en cuerpos finitos siempre y cuando impongamos algunas restricciones sobre el cuerpo k. Por ejemplo (ver [Ito1], sec. 2.2), si k es un cuerpo pequeño (ver def. 1.1.5), siempre es posible encontrar una $\mathbb{Z}$-algebra finitamente generada B contenida en k tal que k sea una extensión puramente inseparable del cuerpo de fracciones $Frac(B)$. En este caso, se dice que una representación ℓ-ádica continua ρ de $Gal(\overline{k}/k)$ tiene peso j si ρ proviene (por un cambio de base) de un haz ℓ-ádico liso $\mathcal{F}$ sobre un abierto denso $U \subset Spec(B)$ y $\mathcal{F}$ tiene peso j en el sentido usual (ver [De3]). Recordemos que esto último quiere decir que para todo punto cerrado $s \in U$, los valores propios del Frobenius geométrico en s actuando sobre $\mathcal{F}_{\overline{s}}$ son enteros* *algebraicos tales que todos sus conjugados complejos tienen norma* $|\kappa(s)|^{j/2}$*, donde* $\kappa(s)$ *denota el cuerpo residual en* s*.*

La definición no depende de $B, U, \mathcal{F}$ *y por las conjeturas de Weil (ver [De5]), para una variedad* Y *lisa y propia sobre* k*, la cohomología* $H^j(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell)$ *tiene peso* j *en este sentido.*

(ii) Para X *variedad lisa y proyectiva sobre* K *con cuerpo residual* k *pequeño se define la* ***filtración por el peso*** $W'_\bullet$ *sobre* $H^n(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ *(ver [Ito1], sec. 2.2) como la única filtración creciente tal que la acción de* I_K *sobre los graduados* $Gr_j^{W'}$ *factoriza a través de un cociente finito y, después pasar a una extensión finita de* K*,* G_k *actúa sobre* $Gr_j^{W'}$ *con peso* j*.*

(iii) En el caso en que X *tenga reducción estrictamente semiestable y* k *sea como en (ii), las conjeturas de Weil implican que cada* $E_1^{i,j}$ *tiene peso* $j + 2i - 2k - 2(i-k) = j$ *y por tanto que la filtración* $W_\bullet = W'_\bullet$ *sobre* $H^n(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$*. Lo cual garantiza la existencia de* $W'_\bullet$ *en este caso.*

(iv) De acuerdo con ([Ito1], sec. 4 y prop. 5.1) la sucesión espectral de los pesos degenera siempre en E_2 *para cualquier cuerpo* k*. El argumento consiste en pasar a un esquema* $\mathcal{Z}$ *estrictamente semiestable sobre un anillo* B *de valoración discreta completo con* $Frac(B)$ *cuerpo pequeño de tal forma que* $\mathcal{X}$ *y* $\mathcal{Z}$ *tienen la misma fibra especial geométrica.*

La conjetura de monodromía-peso nos asegura la coincidencia de las respectivas filtraciones salvo un desplazamiento en los índices ([De1], [De2], [Il1], [Il2]):

Conjetura 5.3.2. *(Monodromía-peso): Sea* X *variedad lisa y proyectiva sobre* K *con reducción estrictamente semiestable. Para* $V_\ell = H^n(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ *con* $\ell \neq p$*, se tiene:* $M_i = W_{i+n}$ *para todo* $i \in \mathbb{Z}$*.*

Proposición 5.3.3. *Sea* X *variedad lisa y proyectiva sobre* K *con reducción estrictamente semiestable. Supongamos que la reducción* $\overline{Y}$ *satisface las propiedades (a) y (b) de la def. 5.2.1 para algún número primo* $\ell \neq p$*. Entonces,* X *satisface la conjetura 5.3.2 y para los graduados asociados respectivos, se tiene:*

$$Gr_{-i}^M H^n(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell) \cong \begin{cases} T_j^i(\overline{Y}) \otimes \mathbb{Q}_\ell(-j), & si \quad i \equiv n (mod 2) \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

como G_k*-módulos.*

Demostración: A partir de la obs. 5.2.5(ii), podemos reducirnos al caso de reducción semiestable split y suponer que $C_j^i(\overline{Y}) \otimes \mathbb{Q} = C_j^i(Y) \otimes \mathbb{Q}$.

Luego, los términos de la sucesión espectral de los pesos, como G_k-módulos, se reducen a (ver definiciones de la sec. 3.3):

$$E_1^{i,2j} = \bigoplus_{k \geq max\{0,i\}} H^{2j+2i-2k}(Y^{(2k-i+1)}, \mathbb{Q}_\ell(i-k)) \cong C_j^i(Y) \otimes \mathbb{Q}_\ell(-j)$$

y

$$E_1^{i,2j+1} = 0$$

y por lo tanto,

$$Gr_{2j}^W H^{i+2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell) = E_2^{i,2j} \cong T_j^i(Y) \otimes \mathbb{Q}_\ell(-j)$$

y

$$Gr_{2j+1}^W H^{i+2j+1}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell) = E_2^{i,2j+1} = 0.$$

Dado que nuestra filtración satisface $NW_i \subseteq W_{i-2}(-1)$, para demostrar la conjetura de monodromía-peso basta probar que el operador de monodromía N induce isomorfismos:

$$N^i : E_2^{-i,2j+2i}(i) \xrightarrow{\sim} E_2^{i,j}$$

para todo $i \geq 0$ y todo $j \in \mathbb{Z}$.

Observemos que si $\overline{Y}$ satisface (ii) de la def. 3.3.4, entonces (bajo nuestras hipótesis) Y también la satisface. Luego, de acuerdo con ([R-Z], cap. 2), y teniendo en cuenta los isomorfismos anteriores, se tiene que la aplicación entre los graduados:

$$Gr_{2j}^W H^{i+2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)(1) \xrightarrow{N} Gr_{2j-2}^W H^{i+2+2(j-1)}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$

coincide con el operador $N \otimes \mathbb{Q}_\ell$ definido en la sec. 3.3:

$$T_j^i(Y)_{\mathbb{Q}_\ell} \xrightarrow{N\otimes\mathbb{Q}_\ell} T_{j-1}^{i+2}(Y)_{\mathbb{Q}_\ell}$$

y por lo tanto (ver teo. 3.3.7) se sigue que

$$\begin{array}{ccc} T_{j+i}^{-i}(Y) \otimes \mathbb{Q}_\ell(-j) & \xrightarrow{N^i\otimes\mathbb{Q}_\ell(-j)} & T_j^i(Y) \otimes \mathbb{Q}_\ell(-j) \\ \wr| & & \wr| \\ Gr_{2(j+i)}^W H^{2j+i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)(i) & & Gr_{2j}^W H^{i+2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell) \end{array}$$

es un isomorfismo para todo $i \geq 0$ y todo $j \in \mathbb{Z}$. ■

5.4. Teorema principal.

En esta sección estudiaremos algunas de las consecuencias que este tipo de variedades tienen sobre el morfismo ciclo.

Recordemos que para todo $\ell \neq p$, el morfismo ciclo ℓ-ádico

$$cl_{\ell,X} : CH^j(X) \longrightarrow H^{2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j))$$

induce un morfismo

$$cl_{\ell,X} \otimes \mathbb{Q}_\ell : CH^j(X)_{\mathbb{Q}_\ell} \longrightarrow H^{2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j))$$
$$\alpha \otimes \lambda \mapsto \lambda \cdot cl_{\ell,X}(\alpha)$$

que también tiene imagen en $H^{2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j))^{G_K}$.

El teorema siguiente nos da una descripción más explícita de esta imagen:

Teorema 5.4.1. *Sea K un cuerpo completo respecto a una valoración discreta. Sea X una variedad lisa y proyectiva sobre K con reducción estrictamente semiestable. Supongamos que la reducción $\overline{Y}$ satisface las propiedades (a) y (b) de la def. 5.2.1. Entonces, si es necesario después de pasar a una extensión finita y no-ramificada de K, se tiene una aplicación natural:*

$$Im(cl_{\ell,X} \otimes \mathbb{Q}_\ell) \overset{pr_{Gr_0^M}}{\twoheadrightarrow} pr_{Gr_0^M}(Im(cl_{\ell,X} \otimes \mathbb{Q}_\ell)) \overset{\rho^{-1}}{\hookrightarrow} Ker(T_j^0(Y)_{\mathbb{Q}_\ell} \overset{N\otimes\mathbb{Q}_\ell}{\longrightarrow} T_{j-1}^2(Y)_{\mathbb{Q}_\ell}),$$

para todo $\ell \neq p$, donde ρ es el isomorfismo de la prop. 5.3.3. Más aún, si el cuerpo residual k es pequeño, entonces $pr_{Gr_0^M}$ es un isomorfismo sobre $Im(cl_{\ell,X} \otimes \mathbb{Q}_\ell)$.

Demostración: Primero observemos (ver obs. 5.2.5(iii)) que si pasamos a una extensión finita y no-ramificada de K podemos considerar que todos los T_j^i's son grupos abelianos finitamente generados con acción trivial de G_K y que $T_j^i(\overline{Y})_{\mathbb{Q}} = T_j^i(Y)_{\mathbb{Q}}$.

Para todo $\ell \neq p$, la prop. 5.3.3 nos proporciona la filtración de monodromía en $H^{2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j))$ siguiente:

$$\cdots \subseteq M_i(j) \subseteq M_{i+1}(j) \subseteq \cdots$$

y nos describe sus cocientes graduados.

Más aún, la prop. 1.5.1 nos dice que

$$H^{2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j))^{G_K} = M_0(j)^{G_K} \subseteq KerN \subseteq M_0(j),$$

de donde, al coger graduados, se obtienen las inclusiones siguientes:

$$pr_{Gr_0^M}(Im(cl_{\ell,X} \otimes \mathbb{Q}_\ell)) \subseteq pr_{Gr_0^M}(M_0(j)^{G_K}) \subseteq pr_{Gr_0^M}(KerN) \subseteq Gr_0^M.$$

Ahora, del cor. 1.4.6, se tiene

$$pr_{Gr_0^M}(KerN) \simeq P_{0,\ell} := Ker(Gr_0^M(1) \xrightarrow{N} Gr_{-2}^M)$$

y el isomorfismo de la prop. 5.3.3 nos dice que

$$P_{0,\ell} \overset{\rho^{-1}}{\simeq} Ker(T_j^0(Y)_{\mathbb{Q}_\ell} \xrightarrow{N\otimes\mathbb{Q}_\ell} T_{j-1}^2(Y)_{\mathbb{Q}_\ell}),$$

ya que las aplicaciones entre los graduados coinciden con el operador $N \otimes \mathbb{Q}_\ell$ definido entre los T's en la sec. 3.3 (ver [R-Z], cap.2).

Para la segunda parte, dado que

$$pr_{Gr_0^M}(M_0(j)^{G_K}) = \frac{M_0(j)^{G_K}}{M_0(j)^{G_K} \cap M_{-2}(j)} = \frac{M_0(j)^{G_K}}{M_{-2}(j)^{G_K}},$$

basta demostrar

$$M_{-2}(j)^{G_K} = 0.$$

Pero dado que k es pequeño, se tiene

$$\mathbb{Q}_\ell(i)^{G_K} = \begin{cases} \mathbb{Q}_\ell, & \text{si} \quad i = 0 \\ 0, & \text{si} \quad i \neq 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, si para todo $i \geq 1$ cogemos fijos por G_K en la sucesión exacta que define el graduado Gr_{-2i}^M,

$$0 \to M_{-2i-2}(j) \to M_{-2i}(j) \to Gr_{-2i}^M \cong T_{j-i}^{2i}(Y) \otimes \mathbb{Q}_\ell(i) \to 0,$$

se obtiene $M_{-2i-2}(j)^{G_K} = M_{-2i}(j)^{G_K}$, ya que los T's son grupos abelianos finitamente generados con acción trivial de G_K.

Finalmente, la afirmación se sigue del hecho que $M_{-2i}(j) = 0$ para i suficientemente grande. ■

Observación 5.4.2. *Consideraciones más finas (ver [R-X2], def. 2) nos dicen que si*

$$\widehat{K}^{*(\ell)} := \varprojlim K^*/K^{*\ell^n}$$

es la ℓ-completación del grupo K^* ($\ell \neq p$), entonces debe existir un morfismo

$$T^0_{j\mathbb{Q}_\ell} \xrightarrow{\mathcal{N}_\ell} T^2_{j-1\mathbb{Q}_\ell} \otimes \widehat{K}^{*(\ell)}$$

tal que

$$N \otimes \mathbb{Q}_\ell = \nu_\ell \circ \mathcal{N}_\ell,$$

donde ν_ℓ es la valoración ℓ-ádica sobre $\widehat{K}^{*(\ell)}$ y un isomorfismo

$$M_0(j)^{G_K} \cong Ker(T^0_{j\mathbb{Q}_\ell} \xrightarrow{\mathcal{N}_\ell} T^2_{j-1\mathbb{Q}_\ell} \otimes \widehat{K}^{*(\ell)}).$$

Lema 5.4.3 (Künnemann). *Sea $\mathcal{X} \to Spec(R))$ propio de tipo finito y sean $X = \mathcal{X} \otimes_R K$, $Y = \mathcal{X} \otimes_R k$ las fibras genérica y especial, respectivamente. Se tiene el diagrama conmutativo siguiente:*

$$\begin{array}{ccc} H^j(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell) & \xrightarrow{\cap[\overline{Y}]} & H_{2d-j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell) \\ \downarrow_{coesp_H} & & \uparrow_{sp_H} \\ H^j(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell) & \xrightarrow{\cap[\overline{X}]} & H_{2d-j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell). \end{array}$$

donde sp_H es el morfismo especialización y $cosp_H$ el morfismo coespecialización.

Demostración: Primero observemos que del diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} H^j(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell) & \times & H^{2d-j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell) & \longrightarrow & H^{2d}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell) \\ \downarrow_{coesp_H} & & \downarrow_{coesp_H} & & \downarrow_{coesp_H} \\ H^j(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell) & \times & H^{2d-j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell) & \longrightarrow & H^{2d}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell) \end{array}$$

se deduce

$$coesp_H(\alpha) \cup coesp_H(\beta) = coesp_H(\alpha \cup \beta)$$

para todo $\alpha \in H^j(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell)$ y $\beta \in H^{2d-j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell)$. Ahora, dado que (por definición) el morfismo especialización es el dual del morfismo coespecialización respecto del apareamiento no-degenerado de la propiedad (2), sec. 2.6, se tiene:

$$sp_H \circ (coesp_H(\alpha) \cap [\overline{X}])(\beta) = tr_X(coesp_H(\alpha) \cup coesp_H(\beta))$$

$$= tr_X(coesp_H(\alpha \cup \beta)).$$

Por lo tanto, basta demostrar que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} H^{2d}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell) & \xrightarrow{tr_Y} & \mathbb{Q}_\ell(-d) \\ \downarrow_{coesp_H} & \nearrow_{tr_X} & \\ H^{2d}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell) & & \end{array}$$

es decir, que $tr_X(coesp_H(\gamma)) = tr_Y(\gamma)$ para todo $\gamma \in H^{2d}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell)$. Pero esto último se sigue del hecho de que el morfismo traza

$$tr_X \in Hom(H^{2d}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell), \mathbb{Q}_\ell(-d)) = H_{2d}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(-d))$$

coincide con el elemento $[\overline{X}] \in H_{2d}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(-d))$ y de que (ver [Ku1], teo. 5.8):

$$sp_H([\overline{X}]) = [\overline{Y}]. \qquad \blacksquare$$

Observemos que nuestro morfismo reducción (ver def. 4.2.1)

$$c_X : CH^j(X) \to Ker(N : T_j^0 \to T_{j-1}^2)$$

define de manera natural un morfismo

$$CH^j(X)_{\mathbb{Q}_\ell} \overset{c_X \otimes \mathbb{Q}_\ell}{\longrightarrow} Ker(T_j^0 \otimes \mathbb{Q}_\ell \overset{N \otimes \mathbb{Q}_\ell}{\to} T_{j-1}^2 \otimes \mathbb{Q}_\ell).$$

El siguiente teorema (que es el teorema principal de esta memoria) relaciona el morfismo reducción c_X con el morfismo ciclo ℓ-ádico.

Teorema 5.4.4. *Sea X una variedad lisa y proyectiva sobre K con reducción estrictamente semiestable. Supongamos que la reducción $\overline{Y}$ satisface las propiedades (a) y (b) de la def. 5.2.1. Entonces, para todo $\ell \neq p$, se tiene:*

$$pr_{Gr_0^M}(cl_{\ell,X} \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha) = \rho \circ (c_X \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha), \quad \forall \alpha \in CH^j(X)_{\mathbb{Q}_\ell}$$

donde ρ es el isomorfismo de la prop. 5.3.3. Más aún, si el cuerpo residual k es pequeño, la proyección $pr_{Gr_0^M}$ es un isomorfismo sobre $Im(cl_{\ell,X} \otimes \mathbb{Q}_\ell)$, por el teo. 5.4.1.

Demostración: Primero observemos que basta demostrar el teorema sobre una extensión finita y no-ramificada L de K. Esto es debido al hecho de que X_L también verifica las hipótesis del teorema y a que todos los morfismos involucrados en él son invariantes bajo cambios de base no-ramificados.

Más aún, por la obs. 5.2.5, podemos suponer que todos los T_j^i's son grupos abelianos finitamente generados con acción trivial de G_K y que $T_j^i(\overline{Y})_{\mathbb{Q}} = T_j^i(Y)_{\mathbb{Q}}$.

En segundo lugar, observemos que ambos miembros de la igualdad definen elementos de un mismo conjunto: para el miembro de la izquierda, tenemos que

$$(cl_{\ell,X} \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha) \in Im(cl_{\ell,X} \otimes \mathbb{Q}_\ell) \subseteq M_0(j)^{G_K}$$

y por lo tanto (teo. 5.4.1),

$$pr_{Gr_0^M}(cl_{\ell,X} \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha) \in Gr_0^M.$$

De manera similar, para el miembro de la derecha, se tiene

$$(c_X \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha) \in Ker(T_j^0(Y)_{\mathbb{Q}_\ell} \overset{N \otimes \mathbb{Q}_\ell}{\longrightarrow} T_{j-1}^2(Y)_{\mathbb{Q}_\ell})$$

y por lo tanto $\rho \circ (c_X \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha) \in Gr_0^M$, donde ρ es el isomorfismo de la prop. 5.3.3,

$$T_j^0(Y)_{\mathbb{Q}_\ell} \overset{\rho}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} Gr_0^M H^{2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j)).$$

(I) Comencemos por calcular el miembro derecho de la igualdad, a saber $\rho \circ (c_X \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha)$.

Recordemos que el teo. 4.2.6 nos dice que

$$(\sigma\otimes\mathbb{Q}_\ell)(\alpha) = (c_X\otimes\mathbb{Q}_\ell)(\alpha) \in \frac{CH^j(Y)_{\mathbb{Q}_\ell}}{CH^j(Y)_{\mathbb{Q}_\ell} \cap Im(\delta_{j-1,1} \otimes \mathbb{Q}_\ell)} \hookrightarrow Ker(T^0_{j\mathbb{Q}_\ell} \stackrel{N\otimes\mathbb{Q}_\ell}{\longrightarrow} T^2_{j-1\mathbb{Q}_\ell}),$$

y la prop. 5.3.3, que el isomorfismo

$$T^0_j(Y) \otimes \mathbb{Q}_\ell \stackrel{\rho}{\widetilde{\longrightarrow}} E_2^{0,2j}(j) = Gr_0^M H^{2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j))$$

viene inducido a través de los isomorfismos ciclo del diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccc}
CH^{j-1}(Y^{(2)})_{\mathbb{Q}_\ell} & \stackrel{\delta_{j-1,1}\otimes\mathbb{Q}_\ell}{\longrightarrow} & CH^j(Y^{(1)})_{\mathbb{Q}_\ell} & \stackrel{\theta_{j,1}\otimes\mathbb{Q}_\ell}{\longrightarrow} & CH^j(Y^{(2)})_{\mathbb{Q}_\ell} \\
\wr\downarrow cl_{\ell,Y^{(2)}} & & \wr\downarrow cl_{\ell,Y^{(1)}} & & \wr\downarrow cl_{\ell,Y^{(2)}} \\
H^{2j-2}(\overline{Y}^{(2)}, \mathbb{Q}_\ell(j-1)) & \stackrel{\delta_{1*}}{\longrightarrow} & H^{2j}(\overline{Y}^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(j)) & \stackrel{\delta_1^*}{\longrightarrow} & H^{2j}(\overline{Y}^{(2)}, \mathbb{Q}_\ell(j)).
\end{array}$$

Luego, recordando que $CH^j(Y) = Ker(\theta_{j,1})$, se tiene

$$cl_{\ell,Y^{(1)}}(CH^j(Y)_{\mathbb{Q}_\ell}) = Ker(\delta_1^*) = H^{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j)) \subseteq H^{2j}(\overline{Y}^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(j))$$

y

$$cl_{\ell,Y^{(1)}}(CH^j(Y)_{\mathbb{Q}_\ell} \cap Im(\delta_{j-1,1} \otimes \mathbb{Q}_\ell)) \subseteq Im(\delta_{1*}),$$

de lo cual se sigue que $\rho \circ (\sigma \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha)$ no es más que la clase del elemento $cl_{\ell,Y^{(1)}} \circ (\sigma \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha)$ en el cociente

$$\frac{H^{2j}(\overline{Y}^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(j))}{Im(\delta_{1*})} \subseteq E_2^{0,2j}(j).$$

(II) Ahora calculemos el miembro izquierdo de la igualdad, a saber, el elemento $pr_{Gr_0^M}(cl_{\ell,X} \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha)$.

Recordemos que

$$pr_{Gr_0^M}(cl_{\ell,X} \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha) = pr_{Gr_{2j}^W}(cl_{\ell,X} \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha)$$

donde $W_\bullet$ es la filtración de los pesos aritmética asociada a la sucesión espectral de los pesos

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(\overline{Y}, Gr_{-p}^{\mathcal{W}} R\Psi\mathbb{Q}_\ell) \Rightarrow H^{2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$

que degenera en E_2.

Por otro lado, como consecuencia de la igualdad $M_\bullet = W_{\bullet+2j}$ dada por la prop. 5.3.3, se tiene que la sucesión espectral de los ciclos evanescentes

$$'E_2^{2j,0} = H^{2j}(\overline{Y}, R^0\Psi(\mathbb{Q}_\ell)(j)) \Longrightarrow H^{2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j))$$

degenera en $'E_3$ y que la filtración final inducida sobre $H^{2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j))$ coincide con la filtración por los núcleos $F^{2j-r} = Ker(N^{r+1})$ (ver [Il1], prop. 3.10).

Así, el morfismo coespecialización

$$H^{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j)) \stackrel{coesp_H}{\longrightarrow} H^{2j}(\overline{Y}, R\Psi\mathbb{Q}_\ell(j)) = H^{2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j))$$

(que no es más que el morfismo inducido por la aplicación entre los haces

$$\mathbb{Q}_\ell = R^0\Psi(\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow R\Psi(\mathbb{Q}_\ell),$$

o lo que es lo mismo, por el homomorfismo lateral

$$'E_2^{2j,0} = H^{2j}(\overline{Y}, R^0\Psi(\mathbb{Q}_\ell)(j)) \twoheadrightarrow' E_\infty^{2j,0})$$

factoriza a través de $'E_\infty^{2j,0}(j) =' E_3^{2j,0}(j) = Gr_F^{2j} = Ker(N)$ y por lo tanto

$$H^{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j)) \stackrel{coesp_H}{\twoheadrightarrow} Ker(N) \subseteq H^{2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j)).$$

Más aún, dado que (ver prop. 1.5.1)

$$(cl_{\ell,X} \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha) \in H^{2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j))^{G_K} = M_0(j)^{G_K} \subseteq Ker(N),$$

se sigue que

$$(cl_{\ell,X} \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha) = coesp_H(\gamma)$$

para algún $\gamma \in H^{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j))$ y por lo tanto

$$pr_{Gr_{2j}^W}(cl_{\ell,X} \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha) = pr_{Gr_{2j}^W} \circ coesp_H(\gamma).$$

Observemos que la composición que deseamos calcular

$$H^{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j)) \stackrel{coesp_H}{\twoheadrightarrow} Ker(N) \subseteq M_0(j) = W_{2j}(j) \stackrel{pr_{Gr_{2j}^W}}{\twoheadrightarrow} Gr_{2j}^W$$

se obtiene a nivel de haces de la manera siguiente:

Del complejo de Čech aumentado

$$C^\bullet = (0 \to \mathbb{Q}_{\ell,\overline{Y}} \to \overline{a}_{1*}\mathbb{Q}_\ell \to \overline{a}_{2*}\mathbb{Q}_\ell \to \cdots \to \overline{a}_{q*}\mathbb{Q}_\ell \to \cdots)$$

donde $\mathbb{Q}_{\ell,\overline{Y}}$ está en grado -1 y las aplicaciones (ver pág. 86)

$$\begin{array}{lcccccc}
Gr_1^{\mathcal{W}} R\Psi\mathbb{Q}_\ell = & \overline{a}_{2*}\mathbb{Q}_\ell(-1)[-1] & \bigoplus & \overline{a}_{4*}\mathbb{Q}_\ell(-2)[-3] & \bigoplus & \cdots \\
\quad\downarrow \partial_1 & & \searrow & & \searrow & \\
Gr_0^{\mathcal{W}} R\Psi\mathbb{Q}_\ell = & \overline{a}_{1*}\mathbb{Q}_\ell & \bigoplus & \overline{a}_{3*}\mathbb{Q}_\ell(-1)[-2] & \bigoplus & \cdots \\
\quad\downarrow \partial_0 & \downarrow & & \downarrow & & \\
Gr_{-1}^{\mathcal{W}} R\Psi\mathbb{Q}_\ell = & \overline{a}_{2*}\mathbb{Q}_\ell[-1] & \bigoplus & \overline{a}_{4*}\mathbb{Q}_\ell(-1)[-3] & \bigoplus & \cdots
\end{array}$$

se obtienen las inclusiones de haces

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{Q}_{\ell,\overline{Y}} = Ker(\overline{a}_{1*}\mathbb{Q}_\ell \to \overline{a}_{2*}\mathbb{Q}_\ell) & \hookrightarrow Ker(\partial_0) \hookrightarrow & Gr_0^{\mathcal{W}} R\Psi\mathbb{Q}_\ell \\
 & \downarrow & \\
 & \frac{Ker(\partial_0)}{Im(\partial_1)} &
\end{array}$$

que, a nivel de cohomologías, inducen la composición que deseamos calcular:

$$'E_2^{2j,0}(j) = H^{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j)) \hookrightarrow Ker(E_1^{0,2j}(j) \xrightarrow{d_1^0} E_1^{1,2j}(j)) \twoheadrightarrow E_2^{0,2j}(j) = Gr_{2j}^{W} \quad (a)$$

donde

$$E_2^{0,2j}(j) = \frac{Ker(E_1^{0,2j}(j) \xrightarrow{d_1^0} E_1^{1,2j}(j))}{Im(E_1^{-1,2j}(j) \xrightarrow{d_1^{-1}} E_1^{0,2j}(j))}$$

y

$$E_1^{1,2j}(j) = H^{2j+1}(\overline{Y}, Gr_{-1}^{\mathcal{W}} R\Psi\mathbb{Q}_\ell(j)),$$

$$E_1^{0,2j}(j) = H^{2j}(\overline{Y}, Gr_0^{\mathcal{W}} R\Psi\mathbb{Q}_\ell(j)),$$

$$E_1^{-1,2j}(j) = H^{2j-1}(\overline{Y}, Gr_1^{\mathcal{W}} R\Psi\mathbb{Q}_\ell(j)).$$

Para entender la composición en (a), recordemos que los isomorfismos canónicos de la sec. 5.3 (pág. 86) nos permiten escribir

$$E_1^{-1,2j}(j) = H^{2j-2}(\overline{Y}^{(2)}, \mathbb{Q}_\ell(j-1)) \oplus \cdots,$$

$$E_1^{0,2j}(j) = H^{2j}(\overline{Y}^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(j)) \oplus \cdots,$$

$$E_1^{1,2j}(j) = H^{2j}(\overline{Y}^{(2)}, \mathbb{Q}_\ell(j)) \oplus \cdots$$

donde las diferenciales d_1^i están dadas por sumas alternadas de morfismos restricción y morfismos Gysin (ver sec. 5.3). No es difícil ver que las restricciones de tales diferenciales a $H^{2j}(\overline{Y}^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(j)) \subseteq E_1^{0,2j}(j)$ están dadas por

$$\delta_1^* : H^{2j}(\overline{Y}^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(j)) \to H^{2j}(\overline{Y}^{(2)}, \mathbb{Q}_\ell(j))$$

y

$$\delta_{1*} : H^{2j-2}(\overline{Y}^{(2)}, \mathbb{Q}_\ell(j-1)) \to H^{2j}(\overline{Y}^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(j)).$$

Más aún, dado que

$$H^{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j)) = Ker(\delta_1^*) \hookrightarrow Ker(d_1^0) \hookrightarrow E_1^{0,2j}(j),$$

se deduce que (a) está dada por la composición siguiente:

$$H^{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j)) \hookrightarrow H^{2j}(\overline{Y}^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(j)) \overset{pr}{\twoheadrightarrow} \frac{H^{2j}(\overline{Y}^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(j))}{Im(\delta_{1*})}.$$

Así, se tiene

$$pr_{Gr_{2j}^W} \circ coesp_H(\gamma) = pr(\gamma),$$

para algún $\gamma \in H^{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j))$.

Ahora observemos que los isomorfismos ciclo:

$$CH^j(Y_I)_{\mathbb{Q}_\ell} \overset{cl_{\ell,Y_I}}{\widetilde{\longrightarrow}} H^{2j}(\overline{Y}_I, \mathbb{Q}_\ell(j)), \quad \text{para todo} \quad I \subseteq \Sigma, j \geq 0,$$

nos aseguran que la acción de G_k sobre las cohomologías de $Y^{(1)}$ e $Y^{(2)}$ es trivial y por lo tanto inducen el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccccc}
CH^{j-1}(Y^{(2)})_{\mathbb{Q}_\ell} & \overset{\delta_{j-1,1}\otimes\mathbb{Q}_\ell}{\longrightarrow} & CH^j(Y^{(1)})_{\mathbb{Q}_\ell} \longrightarrow & CH_{d-j}(Y)_{\mathbb{Q}_\ell} \to 0 \\
\wr\downarrow cl_{\ell,Y^{(2)}} & & \wr\downarrow cl_{\ell,Y^{(1)}} & \downarrow cl_{\ell,Y} \\
H^{2j-2}(\overline{Y}^{(2)}, \mathbb{Q}_\ell(j-1)) & \overset{\delta_{1*}}{\longrightarrow} & H^{2j}(\overline{Y}^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(j)) \to & W_0H_{2d-2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j-d)) \to 0
\end{array}$$

donde W_0 hace referencia a la filtración de los pesos geométrica sobre la homología $H_{2d-2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j-d))$ (ver sec. 4.5). Luego, se tiene

$$\frac{H^{2j}(\overline{Y}^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(j))}{Im(\delta_{1*})} = W_0H_{2d-2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j-d))$$

Por otro lado (recordando que en nuestro caso $\cap[\overline{X}]$ es un isomorfismo), del diagrama conmutativo del lema 5.4.3:

$$\begin{array}{ccc}
H^{2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j)) & \overset{coesp_H}{\longrightarrow} & H^{2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j)) \\
\downarrow & \searrow \cap[\overline{Y}] & \downarrow_{sp_H} \\
H^{2j}(\overline{Y}^{(1)}, \mathbb{Q}_\ell(j)) & \overset{pr}{\twoheadrightarrow} & H_{2d-2j}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell(j-d)),
\end{array}$$

se tiene

$$pr(\gamma) = sp_H \circ coesp_H(\gamma) = sp_H \circ (cl_{\ell,X} \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha)$$

y del diagrama conmutativo del teo. 2.6.2:

$$\begin{array}{ccc} CH^j(X)_{\mathbb{Q}_\ell} & \stackrel{cl_{\ell,X}\otimes\mathbb{Q}_\ell}{\longrightarrow} & H^{2j}(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell(j)) \\ \downarrow_{\sigma\otimes\mathbb{Q}_\ell} & & \downarrow_{sp_H} \\ CH_{d-j}(Y)_{\mathbb{Q}_\ell} & \stackrel{cl_{\ell,Y}\otimes\mathbb{Q}_\ell}{\longrightarrow} & H_{2d-2j}(\overline{Y},\mathbb{Q}_\ell(j-d)) \end{array}$$

que

$$sp_H \circ (cl_{\ell,X} \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha) = cl_{\ell,Y} \circ (\sigma \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha)$$

para toda $\alpha \in CH^j(X)$.

Finalmente, observemos que $cl_{\ell,Y} \circ (\sigma \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha)$ no es más que la clase de $cl_{\ell,Y^{(1)}} \circ (\sigma \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha)$ en el cociente

$$\frac{H^{2j}(\overline{Y}^{(1)},\mathbb{Q}_\ell(j))}{Im(\delta_{1*})} = W_0H_{2d-2j}(\overline{Y},\mathbb{Q}_\ell(j-d))$$

y por lo tanto, de (I), se concluye que

$$\rho \circ (c_X \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha) = cl_{\ell,Y} \circ (\sigma \otimes \mathbb{Q}_\ell)(\alpha). \qquad \blacksquare$$

Por último, tenemos los siguientes:

Corolario 5.4.5. *Bajo las hipótesis del teo. 5.4.4, para el morfismo ciclo ℓ-ádico ($\ell \neq p$):*

$$cl_{\ell,X} : CH^j(X) \longrightarrow H^{2j}(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell(j)),$$

se tiene

$$Im(\rho^{-1} \circ pr_{Gr_0^M} \circ cl_{\ell,X}) \subseteq T_j^0,$$

y por lo tanto la aplicación $\rho^{-1} \circ pr_{Gr_0^M} \circ cl_{\ell,X}$ es independiente del primo ℓ.

Corolario 5.4.6. *Bajo las hipótesis del teo. 5.4.4 y k pequeño, se tiene*

$$Ker(cl_{\ell,X} \otimes \mathbb{Q}_\ell) = Ker(c_X \otimes \mathbb{Q}_\ell).$$

5.5. Cohomología de De Rham.

En esta sección usaremos las propiedades (c) y (d) de la def. 5.2.1 para obtener nueva información sobre la monodromía, las filtraciones y los graduados de estas para nuestras variedades.

Empecemos recordando algunos conceptos sobre las formas diferenciales en un esquema.

Dado un esquema S y un S-esquema X, existe sobre X un único complejo de haces $\Omega^*_{X/S}$, llamado ***complejo de De Rham relativo de X sobre S***, de manera que para todo abierto afín $U = Spec(K)$ de S y todo abierto afín $V = Spec(A)$ de X sobre U, se tiene $\Gamma(V,\Omega^*_{X/S}) = \Omega^*_{A/K}$.

Definición 5.5.1. *Sea X un esquema propio y liso sobre K. Se define la* **cohomología de De Rham** *de X como la hipercohomología del complejo de De Rham $\Omega^\bullet_{X/K}$:*

$$H^*_{DR}(X/K) := \mathbb{H}^*(X, \Omega^\bullet_{X/K}).$$

La primera sucesión espectral de hipercohomología

$$E_1^{i,j} = H^j(X, \Omega^i_{X/K}) \Rightarrow H^{i+j}_{DR}(X/K)$$

se llama **sucesión espectral de Hodge** *y la respectiva filtración final obtenida $Fil^\bullet$,* **filtración de Hodge** *sobre $H^n_{DR}(X/K)$.*

Esta filtración es decreciente y está dada por (ver [Il3], cor. 2.6(c)):

$$Fil^i = \mathbb{H}^n(X, \Omega^{\geq i}_{X/K})$$

donde $\Omega^{\geq i}_{X/K}$ denota el complejo:

$$\Omega^{\geq i}_{X/K} : \cdots \to 0 \to 0 \to \underbrace{\Omega^i_{X/K}}_{i} \xrightarrow{d} \Omega^{i+1}_{X/K} \xrightarrow{d} \Omega^{i+2}_{X/K} \xrightarrow{d} \cdots$$

Dado que X es propio sobre K y los $\mathcal{O}_X$-módulos $\Omega^i_{X/K}$ son coherentes, los K-espacios vectoriales $H^j(X, \Omega^i_{X/K})$ son de dimensión finita. Si denotamos por $h^{i,j} = dim_K H^j(X, \Omega^i_{X/K})$, entonces $H^n_{DR}(X/K)$ es un K-espacio vectorial de dimensión finita, digamos b_n y de la sucesión espectral se tiene

$$b_n \leq \sum_{i+j=n} h^{i,j}.$$

Observación 5.5.2. *Recordemos que si K es de característica cero, la sucesión espectral de Hodge degenera en E_1 (ver [Oes]). En este caso, para los graduados asociados se tiene:*

$$Gr^i_{Fil}(H^n_{DR}(X/K)) \cong H^{n-i}(X, \Omega^i_{X/K}).$$

Ahora consideremos el caso en que k es un cuerpo perfecto de característica $p > 0$. Sea $W(k)$ el anillo de vectores de Witt de k, $K_0 = Frac(W)$ y K una extensión finita y totalmente ramificada de K_0. Denotemos por σ el Frobenius absoluto sobre K_0 y sobre k.

Definición 5.5.3. *(ver [Pe-R], sec. 2) un (Φ, N)-módulo filtrado sobre K es un K_0-espacio vectorial D dotado de un isomorfismo σ-lineal Φ, un endomorfismo (nilpotente) N que satisface*

$$N\Phi = p\Phi N$$

y tal que el K-espacio vectorial $D_K = K \otimes_{K_0} D$ tiene una filtración por K-subespacios vectoriales D^i_K que es decreciente, exhaustiva y separada.

Denotaremos por $K_0(i)$ el (Φ, N)-módulo filtrado dado por K_0, $\Phi(1) = p^i \cdot 1$, $K_0(i)^i_K = K_0(i)$, $K_0(i)^{i+1}_K = \{0\}$.

Si D es un (Φ, N)-módulo filtrado, se define $D(i) = D \otimes K_0(i)$ donde el producto tensorial se considera dentro de la categoría de los (Φ, N)-módulos filtrados.

Recordemos que si $\mathcal{X}$ es un modelo (estrictamente) semiestable de X, entonces la ***cohomología log-cristalina*** de la fibra especial, denotada por $H^n(Y^\times/W(k)^\times) \otimes_W K_0$ (ver [H-K]), es un K_0-espacio vectorial que tiene una estructura natural de (F, N)-módulo dada por el Frobenius F (que es un isomorfismo σ-lineal) y la monodromía N (que es un endomorfismo nilpotente) que satisfacen $NF = pFN$. La tercia $(H^n(Y^\times/W(k)^\times) \otimes K_0, F, N)$ sólo depende del esquema $\mathcal{X} \otimes R/\mathcal{M}^2$ sobre $R/\mathcal{M}^2$.

Más aún, para K de característica cero, se tiene un isomorfismo canónico (ver [H-K]):

$$\rho_\pi : H^n(Y^\times/W(k)^\times) \otimes_{K_0} K \xrightarrow{\sim} H^n_{DR}(X/K)$$

que depende de la elección de un uniformizante π de R, de manera que si $u \in R^*$, entonces

$$\rho_{\pi u} = \rho_\pi \circ exp(log(u)N)$$

donde el operador K-lineal inducido por N sobre $H^n(Y^\times/W(k)^\times) \otimes_{K_0} K$ se sigue denotando con la misma letra. Por lo tanto, el isomorfismo ρ_π más que depender de π, depende de log_π (ver prop. 1.2.4 y def. 1.2.5).

Sin embargo, el operador K-lineal $\rho_\pi \circ N \circ \rho_\pi^{-1}$ sobre $H^n_{DR}(X/K)$ es independiente de la elección de π (ver [H-K], teo. 5.1). Así, a través del isomorfismo ρ_π podemos inducir de forma canónica una estructura de (F, N)-módulo filtrado sobre $H^n(Y^\times/W(k)^\times) \otimes_W K_0$, donde la filtración sobre el K-espacio vectorial $H^n(Y^\times/W(k)^\times) \otimes_{K_0} K$ es la dada por $\rho_\pi^{-1}(Fil^\bullet)$.

Observación 5.5.4. *Observemos que en $H^n_{DR}(X/K)$, la filtración $Fil^\bullet$ y la monodromía $\rho_\pi \circ N \circ \rho_\pi^{-1}$ no dependen de π, pero el Frobenius $\rho_\pi \circ F \circ \rho_\pi^{-1}$ sí. Por otro lado, en $H^n(Y^\times/W(k)^\times) \otimes_{K_0} K$, la monodromía y el Frobenius no dependen de π, pero la filtración $\rho_\pi^{-1}(Fil^\bullet)$ sí.*

Respecto a la acción de N sobre la filtración $\rho_\pi^{-1}(Fil^\bullet)$, tenemos la siguiente:

Definición 5.5.5. *Diremos que la filtración $\rho_\pi^{-1}(Fil^\bullet)$ satisface la* **transversalidad de Griffiths** *si:*

$$N(\rho_\pi^{-1}(Fil^i)) \subseteq \rho_\pi^{-1}(Fil^{i-1}), \quad \forall 0 \leq i \leq n.$$

5.6. Reducción Ordinaria.

En esta sección deduciremos algunas consecuencias de las propiedades (c) y (d) de la def. 5.2.1.

Recordemos que si X es una variedad lisa y proyeciva sobre K con un modelo estrictamente semiestable cuya reducción Y es ordinaria (ver def. 5.2.1(d)), entonces se tiene la sucesión espectral de las pendientes:

$$E_1^{i,j} = H^j(Y, W\omega^i)(-i) \Rightarrow H^{i+j}(Y^\times / W(k)^\times),$$

que degenera en E_1 y, por consiguiente, la descomposición canónica como F-módulo:

$$H^n(Y^\times / W(k)^\times) \cong \bigoplus_{i+j=n} H^j(Y, W\omega^i)(-i)$$

donde $H^j(Y, W\omega^i)(-i)$ denota la parte de pendiente i. De esta descomposición obtenemos ***la filtración por las pendientes decrecientes***

$$F^j(H^n(Y^\times / W^\times)) := \bigoplus_{i=j}^{n} H^{n-i}(Y, W\omega^i)(-i)$$

y ***la filtración por las pendientes crecientes***

$$U_j(H^n(Y^\times / W^\times)) := \bigoplus_{i=0}^{j} H^{n-i}(Y, W\omega^i)(-i).$$

que claramente son opuestas (ver def. 1.3.7).

Así, tenemos cuatro filtraciones sobre $H^n(Y^\times / W(k)^\times) \otimes_{K_0} K$:

- La **filtración de Hodge** $\rho_\pi^{-1}(Fil^\bullet)$ dada a través del isomorfismo ρ_π. (ver final sec. 5.5).

- La **filtración por las pendientes decrecientes** $F^\bullet \otimes_{K_0} K$ que es la inducida por la respectiva filtración en $H^n(Y^\times / W^\times)$.

- La **filtración por las pendientes crecientes** $U_\bullet \otimes_{K_0} K$ que es la inducida por la respectiva filtración en $H^n(Y^\times / W^\times)$.

- La **filtración de monodromía** $M_\bullet$ inducida por el operador nilpotente N (ver final sec. 5.5).

Ejemplo 5.6.1. *Sea K una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$. Consideremos una curva elíptica de Tate con reducción totalmente degenerada*

$$E = K^* / q^{\mathbb{Z}}, \quad 0 < |q| < 1.$$

Si denotamos por Y la fibra especial de un modelo estrictamente semiestable de E, se tiene la descomposición:

$$H^1(Y^\times/W^\times) \cong H^1(Y, W\omega^0) \oplus H^0(Y, W\omega^1)(-1).$$

A partir de esta descomposición podemos calcular las filtraciones por las pendientes

$$F^0 = H^1 \supseteq F^1 = H^0(Y, W\omega^1)(-1) \supseteq \{0\}$$

y

$$U_1 = H^1 \supseteq U_0 = H^1(Y, W\omega^0) \supseteq \{0\}.$$

De acuerdo con ([Pe-R], sec. 3.5) podemos escoger una base $\{e_0, e_1\}$ de H^1 donde

$$H^1(Y, W\omega^0) =< e_0 >,$$
$$H^0(Y, W\omega^1)(-1) =< e_1 >$$

y tal que

$$F(e_0) = e_0, \quad F(e_1) = pe_1, \quad N(e_0) = 0, \quad N(e_1) = \nu(q)e_0.$$

En este caso, se tiene:

$$M_1 = H^1 \supseteq M_{-1} = Ker(N) = H^1(Y, W\omega^0) \supseteq \{0\}.$$

Por lo tanto, la filtración de monodromía sólo recupera la información sobre la valoración de q pero no la de su logaritmo. Para ello, hemos de considerar la filtración de Hodge $\rho_\pi^{-1}(Fil^\bullet)$.

De acuerdo con ([Pe-R], sec. 3.5), la extensión definida por

$$0 \longrightarrow K_0(1) \xrightarrow{i} H^1(Y^\times/W^\times) \otimes K_0 \xrightarrow{p} K_0 \longrightarrow 0$$

se corresponde con la pareja $(log_\pi(q), \nu(q))$ bajo el isomorfismo (que depende de la elección de π)

$$Ext_{MF_{st}}(K_0(1), K_0) \xrightarrow{\sim} K \times \mathbb{Q}_p$$

$$x \mapsto (log_\pi(x), \nu(x))$$

y la filtración de Hodge viene dada por:

$$\rho_\pi^{-1}(Fil^0) = H^1 \supseteq \rho_\pi^{-1}(Fil^1) =< e_1 - log_\pi(q)e_0 >\supseteq \{0\}.$$

Luego, es la filtración de Hodge la que recupera $log_\pi(q)$. Finalmente, observemos que

$$Fil^\bullet = F^\bullet \Leftrightarrow log_\pi(q) = 0$$

y si $q = (1+u)\xi\pi^n$ *con* $\pi = \sqrt[m]{p}$, $1+u \in Ker(R^* \to k^*)$ *y* ξ *raíz de la unidad de orden primo con* p*, se tiene*

$$log_\pi(q) = 0 \Leftrightarrow log_\pi(1+u) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \Leftrightarrow q = \xi\pi^n.$$

Dado que la monodromía sobre $H^n_{DR}(X/K)$ es independiente del uniformizante π escogido (ver final sec. 5.5), trabajaremos en $H^n_{DR}(X/K)$ en lugar de $H^n(Y^\times/W(k)^\times) \otimes_{K_0} K$. Seguiremos llamando a la correspondiente filtración inducida sobre $H^n_{DR}(X/K)$ a través del isomorfismo ρ_π,

$$\mathbf{U}_\bullet := \rho_\pi(U_\bullet \otimes K)$$

la *filtración por las pendientes crecientes*, la cual claramente depende de la elección de π.

Lema 5.6.2. *Sea* K *una extensión finita de* $\mathbb{Q}_p$*. Sea* X *variedad lisa y proyectiva sobre* K *con un modelo estrictamente semiestable cuya reducción* Y *satisface la propiedad (d) de la def. 5.2.1. Entonces, las filtraciones* $\mathbf{U}_\bullet$ *y* $Fil^\bullet$ *son opuestas, es decir,*

$$\mathbf{U}_{i-1} \bigoplus Fil^i = H^n_{DR}(X/K), \quad \textit{para todo} \quad 0 \leq i \leq n$$

Demostración: De ([Il3], cor. 2.7 (a)), sabemos que la cohomología étale p-ádica $H^n(\overline{X}, \mathbb{Q}_p)$ es ordinaria en el sentido de ([Pe-R], 1.2) y semiestable. También, por el resultado principal de ([Ts], pág. 235) sobre la conjetura C_{st}, se tiene un isomorfismo de (Φ, N)-módulos filtrados:

$$H^n(Y^\times/W(k)^\times) \cong \underline{D}_{st}(H^n(\overline{X}, \mathbb{Q}_p))$$

donde la filtración sobre $H^n(Y^\times/W(k)^\times)$ es la inducida por ρ_π. Ahora, dado que $K|\mathbb{Q}_p$ es finita, se tiene que $\underline{D}_{st}$ lleva representaciones p-ádicas ordinarias a (Φ, N)-módulos filtrados ordinarios (ver [Pe-R], teo. 1.5) y por lo tanto que $H^n(Y^\times/W(k)^\times)$ es ordinario. Finalmente, (ver [Pe-R], pág. 187), se tiene la descomposición:

$$\begin{aligned} H^n(Y^\times/W(k)^\times) \otimes_{K_0} K &= \rho_\pi^{-1}(Fil^i) \oplus (\bigoplus_{j<i} D_K^{[j]}) \\ &= \rho_\pi^{-1}(Fil^i) \oplus (U_{i-1})_K, \end{aligned}$$

ya que U_{i-1} es la parte de pendiente $\leq i-1$. ■

Observación 5.6.3. *La única parte de la demostración del teo. anterior donde se utiliza la hipótesis* $K|\mathbb{Q}_p$ *finita es en la aplicación del teo. 1.5 de [Pe-R] que nos asegura que* $\underline{D}_{st}$ *lleva representaciones p-ádicas ordinarias a* (Φ, N)*-módulos filtrados ordinarios. Pensamos que éste último resultado es cierto para cualquier cuerpo* K *completo de característica cero con cuerpo residual perfecto de característica* $p > 0$*, pero no lo sabemos demostrar.*

El lema anterior nos permite hacer la siguiente:

Definición 5.6.4. *Sea K una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$. Sea X variedad lisa y proyectiva sobre K con un modelo estrictamente semiestable cuya reducción Y satisface la propiedad (d) de la def. 5.2.1. A partir de las filtraciones opuestas $\mathbf{U}_\bullet$ y $Fil^\bullet$ sobre $H^n_{DR}(X/K)$, definimos los subespacios vectoriales:*

$$T_K^{i,n-i} := \mathbf{U}_i \cap Fil^i$$

para todo $i \in \{0, ..., n\}$.

Observemos que estos subespacios dependen del uniformizante π.

Corolario 5.6.5. *Bajo las condiciones de la def. 5.6.4, para todo $i \in \{0, ..., n\}$, se tienen isomorfismos naturales*

$$Gr_i^{\mathbf{U}}(H^n_{DR}) \xleftarrow{\sim} T_K^{i,n-i} \xrightarrow{\sim} Gr^i_{Fil}(H^n_{DR}) \cong H^{n-i}(X, \Omega^i_{X/K}).$$

Demostración: Para la filtración creciente $\mathbf{U}_\bullet$ (resp. filtración decreciente $Fil^\bullet$), el lema 5.6.2 nos asegura que

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_{i-1} \oplus (\mathbf{U}_i \cap Fil^i), \quad \forall 0 \leq i \leq n$$

$$(\text{resp.} \quad Fil^i = (Fil^i \cap \mathbf{U}_i) \oplus Fil^{i+1}, \quad \forall 0 \leq i \leq n)$$

a partir de lo cual se obtienen los isomorfismos correspondientes. ■

Observación 5.6.6. *Observemos que*

$$\mathbf{U}_i = \bigoplus_{j=0}^{i} T_K^{j,n-j}$$

y

$$Fil^i = \bigoplus_{j=i}^{n} T_K^{j,n-j} = \bigoplus_{j=0}^{n-i} T_K^{n-j,j}.$$

Nuestro siguiente objetivo será comparar la filtración $M_\bullet$ inducida por el operador de monodromía N sobre $H^n_{DR}(X/K)$ y la filtración por las pendientes crecientes $\mathbf{U}_\bullet$. Es aquí donde necesitaremos la prop. (c) de la def. 5.2.1.

Recordemos que por ser Y proyectiva sobre k, se tiene la *sucesión espectral de Mokrane* (ver [Mo], 3.23):

$$E_1^{i,j}(Y) = \bigoplus_{k \geq max\{0,i\}} H_{cris}^{j+2i-2k}(Y^{(2k-i+1)}/W(k))(i-k) \Rightarrow H^{i+j}(Y^\times/W(k)^\times)$$

y que como $W(k)$-módulos con un Frobenius, se tiene un isomorfismo canónico:

$$H^{i+j}(Y^{\times}/W(k)^{\times}) \cong H^{i+j}(\overline{Y}^{\times}/W(\overline{k})^{\times})^{G_k}$$

Es más, la respectiva sucesión espectral de Mokrane para $\overline{Y}$:

$$E_1^{i,j}(\overline{Y}) = \bigoplus_{k \geq max\{0,i\}} H_{cris}^{j+2i-2k}(\overline{Y}^{(2k-i+1)}/W(\overline{k}))(i-k) \Rightarrow H^{i+j}(\overline{Y}^{\times}/W(\overline{k})^{\times})$$

es compatible con la acción de Galois de G_k y la anterior sucesión espectral para Y es canónicamente isomorfa a su parte G_k-invariante (ver [R-X1], pág. 18).

Ahora, si Y también satisface la propiedad (c) de la def. 5.2.1, se tiene que la sucesión espectral de Mokrane degenera en E_2 (ver [R-X1], cor. 3) y que la filtración obtenida induce la filtración de monodromía $M_\bullet$ de forma que

$$Gr_{-i}^M H^{i+2j}(\overline{Y}^{\times}/W(\overline{k})^{\times}) \otimes L \cong T_j^i(\overline{Y}) \otimes L(-j)$$

y $Gr_{-i}^M H^{i+2j+1}(\overline{Y}^{\times}/W(\overline{k})^{\times}) \otimes L = 0$.

Más aún, de ([R-X1], cor. 4, sec. 5) se tiene que las filtraciones $U_\bullet$ y $M_\bullet$ sobre $H^n(Y^{\times}/W(k)^{\times}) \otimes_W K_0$ coinciden salvo un desplazamiento de los índices:

$$U_j(H^n(\overline{Y}^{\times}/W(\overline{k})^{\times})) \otimes L = M_{2j-n}(H^n(\overline{Y}^{\times}/W(\overline{k})^{\times})) \otimes L$$

$$= M_{2j-n+1}(H^n(\overline{Y}^{\times}/W(\overline{k})^{\times})) \otimes L$$

y que lo mismo se cumple si se reemplaza $\overline{Y}$ por Y y se hace tensor con K_0.

Así, lo anterior nos dice que la filtración de monodromía $M_\bullet$ sobre $H_{DR}^n(X/K)$ es reducida (ver def. 1.5.4) y por lo tanto, para la filtración asociada $\widetilde{M}_\bullet$ (ver obs. 1.5.5), se tiene:

$$\mathbf{U}_j = \widetilde{M}_j, \quad \text{para todo} \quad 0 \leq j \leq n.$$

Más aún, comparando los graduados asociados se tiene la siguiente relación con las estructuras enteras construidas en la sec. 3.3:

Corolario 5.6.7. *Sea K una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$. Sea X variedad lisa y proyectiva sobre K con un modelo estrictamente semiestable cuya reducción Y satisface las propiedades (c) y (d) de la def. 5.2.1. Entonces, se tienen isomorfismos naturales:*

$$T_j^{n-2j}(Y) \otimes K \cong Gr_j^{\widetilde{M}}(H_{DR}^n) = Gr_j^{\mathbf{U}}(H_{DR}^n) \cong T_K^{j,n-j}.$$

Proposición 5.6.8. *Sea una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$. Sea X una variedad lisa y proyectiva sobre K con un modelo estrictamente semiestable cuya reducción Y satisface las propiedades (c) y (d) de la def. 5.2.1. Si la filtración inducida por ρ_π sobre la cohomología log-cristalina de Y satisface la transversalidad de Griffiths (ver def. 5.5.5), entonces el operador de monodromía*

$$N : H^n_{DR}(X/K) \longrightarrow H^n_{DR}(X/K)$$

factoriza como

$$N = \bigoplus_{j\geq 0} N_j$$

donde

$$N_j := N_{|T^{j,n-j}} : T_K^{j,n-j} \longrightarrow T_K^{j-1,n-j+1}$$

coincide con el morfismo inducido por la monodromía sobre los graduados correspondientes

$$N : Gr_j^{\widetilde{M}} \to Gr_{j-1}^{\widetilde{M}}$$

bajo los isomorfismos naturales del cor. 5.6.5.

Demostración: De la igualdad $\mathbf{U}_j = \widetilde{M}_j$ y la obs. 5.6.6, se tiene que

$$H^n_{DR}(A/K) = \widetilde{M}_n = \bigoplus_{j=0}^{n} T^{j,n-j}.$$

Luego, basta demostrar que $N(T_K^{j,n-j}) \subseteq T_K^{j-1,n-j+1}$.

Dado que el operador de monodromía satisface (ver obs. 1.5.5):

$$N\widetilde{M}_j \subseteq \widetilde{M}_{j-1},$$

el problema se reduce a probar que $N(Fil^j) \subseteq N(Fil^{j-1})$. Pero esto último se deduce del hecho de que la filtración $\rho_\pi^{-1}(Fil^\bullet)$ satisface la transversalidad de Griffiths sobre la cohomología log-cristalina de Y.

La coincidencia de N_j con la monodromía sobre el graduado $Gr_j^{\widetilde{M}}$ se sigue del cor. 5.6.7 y de la conmutatividad del diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\{0\} & \longrightarrow & \widetilde{M}_{j-1} & \xrightarrow{N} & \widetilde{M}_{j-2} & \longleftarrow & \{0\} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
T_K^{j,n-j} & \longrightarrow & \widetilde{M}_j & \xrightarrow{N} & \widetilde{M}_{j-1} & \longleftarrow & T_K^{j-1,n-j+1} \\
 & \searrow\wr & \downarrow_{pr_1} & & \downarrow_{pr_2} & \wr\swarrow & \\
 & & Gr_j^{\widetilde{M}} & \xrightarrow{N} & Gr_{j-1}^{\widetilde{M}} & &
\end{array}$$

■

Capítulo 6

Toros analíticos y curvas de Mumford.

Toda variedad abeliana A de dimensión g sobre $\mathbb{C}$ es analíticamente isomorfa a un cociente de la forma $(\mathbb{C}^*)^g/M$ donde M es una red de rango $2g$ en $(\mathbb{C}^*)^g$. Inversamente, un cociente de esta forma es una variedad analítica si, y sólo si, M satisface las "relaciones de periodos de Riemman".

De manera similar, en este capítulo recordaremos que tipo de variedades abelianas definidas sobre cuerpos completos presentan una tal parametrización y también cuando un toro analítico rígido define una variedad abeliana. En particular las variedades abelianas que presentan reducción totalmente degenerada nos permitirán ejemplificar la mayor parte de lo que hemos hecho en capítulos anteriores. La ventaja es que toda la construcción cohomológica basada en la existencia de un modelo con reducción estrictamente semiestable puede hacerse a partir de las redes naturales que se obtienen de la uniformización de tales variedades abelianas.

6.1. Toros analíticos.

En esta sección seguiremos la exposición de [Ge].

Sea K un cuerpo completo respecto a una valoración discreta, R su anillo de valoración y k el cuerpo residual. El grupo afín

$$Spec(K[z_1^1, z_1^{-1}, ..., z_n^1, z_n^{-1}]),$$

donde $z_1, ..., z_n$ son algebraicamente independientes sobre K, induce un grupo analítico rígido denotado por $T = (\mathbb{G}_m)^n$ y llamado ***toro algebraico (split)*** de dimensión n.

Sea $\Gamma := Hom_K(T, \mathbb{G}_m)$ el grupo de caracteres de T. Notemos que cada elemento z_i da lugar a un caracter $\gamma_i \in \Gamma$.

Observemos que si $\mathcal{A}^*$ denota el grupo multiplicativo de funciones analíticas rígidas no nulas sobre T, entonces Γ es el subgrupo de $\mathcal{A}^*$ formado por todas las funciones del tipo $\gamma_1^{v_1} \cdots \gamma_n^{v_n}$ con $v_i \in \mathbb{Z}$ y por tanto Γ es un grupo libre de rango n.

Se tiene la siguiente descomposición de $\mathcal{A}^*$ como producto directo

$$\mathcal{A}^* = K^* \times \Gamma.$$

Si $(K^*)^n$ denota el grupo de puntos K-racionales de T, la aplicación canónica

$$l : (K^*)^n \to \mathbb{R}^n$$

dada por

$$l(r_1, ..., r_n) = (-log|r_1|, ..., -log|r_n|)$$

es un homomorfismo continuo de grupos.

Definición 6.1.1. *Un subgrupo Λ de $(K^*)^n$ es discreto respecto a la topología definida por K si, y sólo si, $l(\Lambda)$ es un subgrupo discreto de $\mathbb{R}^n$ y $Ker(l) \cap \Lambda$ es finito.*

Dado un tal subgrupo Λ si $f(z)$ una función analítica rígida sobre T y $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \Lambda$, entonces $f(\lambda z)$ también es una función analítica sobre T.

En particular, si $f = \gamma_1^{v_1} \cdots \gamma_n^{v_n} \in \Gamma$ es un caracter, entonces

$$f(\lambda z) = \lambda_1^{v_1} \cdots \lambda_n^{v_n} f(z).$$

Por tanto, si definimos $< \lambda, \gamma > := \lambda_1^{v_1} \cdots \lambda_n^{v_n} \neq 0$, se tiene un homomorfismo bilineal

$$<, >: \Lambda \times \Gamma \to K^*$$

que determina completamente al subgrupo Λ.

Recordemos que si el subgrupo Λ es discreto y libre de rango n, el espacio cociente T/Λ es de forma canónica un espacio analítico rígido compacto donde la estructura analítica sobre T/Λ está determinada por la aplicación cociente

$$\pi : T \to T/\Lambda$$

que localmente es un isomorfismo analítico (es decir, existe un recubrimiento analítico $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de T/Λ por dominios afinoides U_i tales que π aplica de manera bianalítica cada componente conexa de $\pi^{-1}(U_i)$ en U_i).

La estructura de grupo sobre T induce una estructura de grupo analítico sobre T/Λ y por lo tanto podemos considerar T/Λ como un grupo analítico rígido. Llamamos a T/Λ, ***toro analítico rígido***.

La red Λ también se conoce como ***grupo de periodos***.

6.2. Polarizaciones.

En esta sección seguiremos usando la notación de la sección anterior.

Observemos que podemos considerar Λ como un grupo de transformaciones sobre T y al grupo $\mathcal{A}^*$ como un Λ-módulo con la acción:

$$(\lambda, f(z)) \mapsto c < \lambda, \gamma > \cdot \gamma$$

para $\lambda \in \Lambda$ y $f(z) = c \cdot \gamma \in \mathcal{A}^*$.

Así, el subgrupo K^* de $\mathcal{A}^*$ es un Λ-módulo sobre el cual Λ actúa trivialmente y por lo tanto la acción de Λ sobre el módulo cociente $F = \mathcal{A}^*/K^*$ también es trivial.

Notemos que F es un grupo abeliano libre de rango n que puede ser identificado de manera canónica con Γ como grupo, pero no como Λ-módulo.

Sea T/Λ el toro rígido analítico definido por la red Λ.

Recordemos que si Γ es el grupo de caracteres de T, el homomorfismo bilineal

$$<,>: \Lambda \times \Gamma \to K^*$$

determina completamente la red Λ.

Definición 6.2.1. *([Mu], sec. 1) Una* **polarización** *sobre el grupo de periodos Λ es un homomorfismo*

$$\phi : \Lambda \longrightarrow \Gamma$$

tal que

(i) $< \lambda, \phi(\lambda') > = < \lambda', \phi(\lambda) >, \quad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda.$

(ii) $< \lambda, \phi(\lambda) > \in \pi R, \quad \forall \lambda \neq 0 \in \Lambda.$

Observación 6.2.2. *Notemos que (ii) implica que ϕ es inyectivo con cokernel finito:*

Si $\lambda \neq 0$ es tal que $\phi(\lambda) = 0$, entonces (ii) implica que $< \lambda, 0 > = 1 \in \pi R$! Luego, $\phi(\Lambda)(\simeq \Lambda)$ es un subgrupo de Γ con el mismo rango, de donde se sigue que $Coker(\phi)$ es finito.

6.3. Variedades abelianas.

Sea A una variedad abeliana sobre K que, como grupo rígido analítico, es propio sobre K. Nuestro primer objetivo será recordar cuándo A tiene una parametrización analítica rígida.

Para ello, consideremos $\mathcal{U}$ el ***modelo de Nerón*** de A. Recordemos que $\mathcal{U}$ es un esquema de tipo finito sobre R liso y propio que satisface la propiedad universal siguiente:

Para todo R-esquema Y y todo K-morfismo $u_K : Y_K \to \mathcal{U}_K = A$, existe un único morfismo $u : Y \to \mathcal{U}$ que extiende a u_K.

También recordemos que una variedad abeliana A sobre K tiene reducción semiabeliana si la fibra especial de la componente identidad $\mathcal{U}^0$ del modelo de Nerón de A es extensión de una variedad abeliana B por un toro T_k:

$$0 \to T_k \to \mathcal{U}_k^0 \to B \to 0.$$

Teorema 6.3.1. ***(Reducción Semiestable)**: Toda variedad abeliana A sobre K tiene reducción potencialmente semiabeliana.*

Recordemos que lo anterior significa que existe una extensión finita y separable K' de K tal que, después de extender la valoración de K a K' y reemplazar R por su clausura entera R' en K', la variedad abeliana $A' = A \times_K K'$ tiene reducción semiabeliana.

También recordemos que una variedad abeliana A tiene reducción completamente tórica (split) si la fibra especial de la componente identidad del modelo de Nerón de A es un toro (split) (es decir, $B = 0$).

Observación 6.3.2. *Siempre se puede aplicar un cambio de base étale (es decir, una extensión étale de anillos de valoración) de forma que el toro T sea split.*

El teorema siguiente (ver [B-L], teo. 1.2) nos da la uniformización de A.

Teorema 6.3.3. *Supongamos que A tiene reducción completamente tórica split. El toro split $T_k = \mathcal{U}_k^0$ puede ser levantado al toro afín $T \simeq (\mathbb{G}_m)^n$ de manera que existe un morfismo de grupos analíticos rígidos $p : T \to A$ cuyo núcleo $\Lambda := Ker(p)$ es una red en T de rango n. Más aún, el morfismo de grupos analíticos inducido por p :*

$$T/\Lambda \to A$$

es un isomorfismo.

Observación 6.3.4. *Se sigue que una variedad abeliana A es un toro analítico si, y sólo si, A tiene reducción completamente tórica split (para demostrar la necesidad se utiliza la propiedad universal del modelo de Nerón).*

Finalmente, el teorema siguiente nos asegura que las variedades abelianas con reducción completamente tórica (split) tienen reducción totalmente degenerada (split) (ver [Ku1], teo. 4.6).

Teorema 6.3.5. *Sea A variedad lisa y proyectiva sobre K con reducción completamente tórica (split). Entonces, después de pasar a una extensión finita y plana de R, A admite un modelo P proyectivo y estrictamente semiestable sobre R tal que:*

(i) La fibra especial Y es un divisor reducido con cruzamientos normales estrictos sobre P.

(ii) Y tiene una estratificación natural con estratos T_α's cuyas clausuras en Y están dadas por variedades tóricas lisas y proyectivas $T_\alpha \to Z_\alpha$.

Es más, A tiene reducción totalmente degenerada (ver [R-X1], ej. 1(ii)).

Observación 6.3.6. *De acuerdo con [Ku1] (ver sec. 4.4), $\mathcal{U} \subseteq P^{sm}$, el lugar liso de P. De esto se sigue que A tiene reducción completamente tórica split.*

Inversamente, a partir del toro $T = (\mathbb{G}_m)^n$ y una red Λ en T, existe una forma de construir variedades abelianas conocida como "construcción de Mumford". Observemos que $A := T/\Lambda$ siempre está bien definido como espacio analítico rígido que es propio sobre K. Sin embargo, como en el caso complejo, T/Λ no es una variedad abeliana a menos que Λ satisfaga ciertas condiciones que corresponden a las relaciones de periodos de Riemman. La geometría analítica rígida tiene la ventaja de que las ideas geométricas que están detrás de estas relaciones de periodos de Riemman son más intuitivas. Esto nos proporciona una conexión más cercana con el caso clásico. Sea Γ el grupo de caracteres de T. Observemos que Γ es un grupo constante.

La evaluación de los caracteres sobre T nos da un apareamiento bilineal:

$$<,>: T \times \Gamma \to \mathbb{G}_m$$

$$(t, \gamma) \longmapsto \gamma(t).$$

Observación 6.3.7. *Cuando hablemos de los puntos de Γ (o Λ), nos referiremos a los puntos sobre los grupos abstractos subyacentes los cuales se identifican con los puntos K-racionales del respectivo espacio en grupo constante asociado.*

Sea T' el toro split con grupo de caracteres Λ, es decir, $T' = Hom_K(\Lambda, \mathbb{G}_m)$ donde Hom significa homomorfismos de grupos.

Notemos que, para todo $\gamma \in \Gamma$, la restricción del apareamiento bilineal anterior nos proporciona un homomorfismo

$$<, \gamma>: \Lambda \times \gamma \to \mathbb{G}_m$$

y por lo tanto un punto K-racional de T'. Luego, variando γ sobre Γ, obtenemos de forma canónica un homomorfismo $\Gamma \to T'$.

Observemos que evaluar un caracter λ de T' en un punto γ de Γ es equivalente a evaluar γ (como caracter de T) en un punto λ de Λ, es decir, si

$$<,>' : \Lambda \times T \to \mathbb{G}_m$$

es el apareamiento bilineal obtenido de evaluar los caracteres de T, se tiene

$$< \lambda, \gamma > = < \lambda, \gamma >'$$

para todo $\lambda \in \Lambda, \gamma \in \Gamma$.

De lo anterior se sigue que $\Gamma \hookrightarrow T'$ es una red y que la situación

$$\Lambda \hookrightarrow T, \quad \Gamma \hookrightarrow T'$$

es simétrica.

A continuación formularemos el análogo de las relaciones de periodos de Riemann (ver [B-L], teo. 2.4):

Teorema 6.3.8. *Se tiene que $A = T/\Lambda$ es una variedad abeliana si, y sólo si, existe un homomorfismo*

$$\phi : \Lambda \longrightarrow \Gamma$$

que es una polarización sobre Λ (ver def. 6.2.1).

6.4. Monodromía geométrica.

En esta sección aprovecharemos la uniformización de las variedades abelianas con reducción completamente tórica split para calcular de forma explícita el operador de monodromía sobre las diferentes cohomologías y los cocientes graduados respectivos.

Sea K un cuerpo completo respecto a una valoración discreta con cuerpo residual k de característica $p > 0$. Sea A una variedad abeliana definida sobre K de dimensión d con reducción completamente tórica split.

El teo. 6.3.3 nos dice que A admite una uniformización analítica de la forma

$$A \simeq T/\Lambda \quad \text{(isomorfismo de variedades analíticas rígidas)}$$

donde Λ es una red en $T(K) \simeq (K^*)^d$ conocida como el *grupo de periodos.*

Recordemos que $\Gamma := Hom_K(T, \mathbb{G}_m)$, el grupo de caracteres de T, es un grupo abeliano libre de rango d.

El hecho de que el toro T/Λ sea algebraizable nos asegura que la red Λ admite una *polarización* (ver def. 6.2.1)

$$\phi : \Lambda \longrightarrow \Gamma.$$

La inclusión de la red Λ en el toro T, que define el cociente como un toro rígido analítico, nos proporciona un apareamiento no-degenerado

$$<,>: \Lambda \times \Gamma \longrightarrow K^*$$

que es compatible con la acción de Galois en cada factor, lo cual es equivalente a tener un morfismo inyectivo

$$\mathcal{N} : \Lambda \hookrightarrow Hom(\Gamma, K^*) \cong \Gamma^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} K^*.$$

(el isomorfismo de la parte derecha está dado por $[\gamma \mapsto \alpha^{f(\gamma)}] \longleftarrow f \otimes_{\mathbb{Z}} \alpha$.)

Definición 6.4.1. *(Ver [Ra], sec. 4.3, 4.4) Se define la* **monodromía** *(geométrica):*

$$N_g := \nu \circ \mathcal{N} : \Lambda \longrightarrow \Gamma^\vee$$
$$\lambda \longmapsto [\gamma \longmapsto \nu\circ < \lambda, \gamma >]$$

como la composición del morfismo $\mathcal{N}$ con la valoración $\nu : K^* \to \mathbb{Z}$.

Observación 6.4.2. *(i) N_g es inyectiva:*

Si $N_g(\lambda) \equiv 0$, entonces $\nu\circ < \lambda, \gamma >= 0, \forall\gamma \in \Gamma$. En particular, si $\gamma = \phi(\lambda) \in Im(\phi)$, se tiene $\nu\circ < \lambda, \phi(\lambda) >= 0$. Dado que ϕ es una polarización, debe ser $\lambda = 0$.

Finalmente, como Λ y Γ tienen el mismo rango, se sigue que $Coker(N_g)$ es finito.

(ii) Recordemos que la situación $M \hookrightarrow T$, $\Gamma \hookrightarrow T'$ es simétrica (ver sec. 6.3) y por lo tanto también se tiene un morfismo inyectivo (monodromía geométrica dual)

$$N_g^\vee := \nu \circ \mathcal{N}^\vee : \Gamma \longrightarrow \Lambda^\vee$$

correspondiente al morfismo

$$\mathcal{N}^\vee : \Gamma \hookrightarrow Hom(\Lambda, K^*)$$

$$\gamma \longmapsto [\lambda \longmapsto \nu\circ < \lambda, \gamma >]$$

asociado a la variedad dual $A' = T'/\Gamma$.

6.5. Cohomología de toros analíticos.

Nuestro siguiente objetivo será construir el operador de monodromía sobre las cohomologías a partir de la monodromía geométrica.

Sea A una variedad abeliana que es un toro analítico. Comencemos con el caso $H^1(\overline{A}, \mathbb{Q}_\ell)$ para $\ell \neq p$.

Dado que A es lisa y proyectiva sobre K, tenemos que la acción de la inercia I_K sobre la cohomología étale ℓ-ádica es unipotente para todo $\ell \neq p$ (ver [SGA7], I).

Por otro lado, observemos que a partir de la sucesión exacta de puntos de torsión para todo $\ell \neq p$, se obtiene el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & \longrightarrow & T[\ell^n](\overline{K}) & \longrightarrow & A[\ell^n](\overline{K}) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Lambda & \xrightarrow{i} & T(\overline{K}) & \xrightarrow{\pi} & A(\overline{K}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow_{\bullet \ell^n} & & \downarrow_{\bullet \ell^n} & & \downarrow_{\bullet \ell^n} & & \\
0 & \longrightarrow & \Lambda & \xrightarrow{i} & T(\overline{K}) & \xrightarrow{\pi} & A(\overline{K}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \Lambda/\ell^n\Lambda & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

de donde el Lema de la Serpiente implica que

$$0 \longrightarrow T[\ell^n](\overline{K}) \longrightarrow A[\ell^n](\overline{K}) \longrightarrow \Lambda/\ell^n\Lambda \longrightarrow 0$$

y considerando límites inversos, se tiene

$$0 \longrightarrow \varprojlim T[\ell^n](\overline{K}) \longrightarrow T_\ell(A) \longrightarrow \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow 0.$$

Para calcular el término izquierdo de esta sucesión observemos que a partir de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow T[\ell^n](\overline{K}) \longrightarrow T(\overline{K}) \xrightarrow{\bullet \ell^n} T(\overline{K}) \longrightarrow 0,$$

se tiene

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \rightarrow & Hom(T(\overline{K}), \overline{K}^*) & \xrightarrow{\bullet \ell^n} & Hom(T(\overline{K}), \overline{K}^*) & \rightarrow & Hom(T[\ell^n](\overline{K}), \overline{K}^*) & \rightarrow 0 \\
 & \parallel & & \parallel & & & \\
 & \Gamma & & \Gamma & & &
\end{array}$$

y por lo tanto

$$\begin{array}{rcl}
\Gamma/\ell^n\Gamma & \cong & Hom(T[\ell^n](\overline{K}), \overline{K}^*) \\
 & = & Hom(T[\ell^n](\overline{K}), \mu_{\ell^n}(\overline{K}))
\end{array}$$

de donde

$$T[\ell^n](\overline{K}) \cong Hom(\Gamma/\ell^n\Gamma, \mu_{\ell^n}(\overline{K}))$$

y

$$\begin{array}{rcl}
\varprojlim T[\ell^n](\overline{K}) & \cong & Hom(\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell, \mathbb{Z}_\ell(1)) \\
 & = & \Gamma^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell(1).
\end{array}$$

Así, se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Gamma^{\vee} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell(1) \longrightarrow T_\ell(A) \longrightarrow \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow 0.$$

Ahora, del isomorfismo canónico $H^1(\overline{A}, \mathbb{Z}_\ell) \cong Hom_{\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell(A), \mathbb{Z}_\ell)$, se tiene

$$0 \longrightarrow \Lambda^{\vee} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow H^1(\overline{A}, \mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell(-1) \longrightarrow 0$$

de donde obtenemos la sucesión exacta de G_K-módulos

$$0 \longrightarrow \Lambda^{\vee} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{i} H^1(\overline{A}, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\pi} \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell(-1) \longrightarrow 0.$$

Por otro lado, si denotamos por $\Lambda_\ell^{\vee} = \Lambda^{\vee} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ y $\Gamma_\ell = \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$, la monodromía geométrica dual (ver obs. 6.4.1)

$$N_g^{\vee} : \Gamma \longrightarrow \Lambda^{\vee}$$

induce un $\mathbb{Q}_\ell$-isomorfismo

$$N_{g,\ell}^{\vee} := N_g^{\vee} \otimes \mathbb{Q}_\ell : \Gamma_\ell \longrightarrow \Lambda_\ell^{\vee}.$$

De ([Ra], sec. 4.6), se tiene:

Lema 6.5.1. *El* **operador de monodromía** *sobre $H^1(\overline{A}, \mathbb{Q}_\ell)$ está definido por la composición:*

$$N : H^1(\overline{A}, \mathbb{Q}_\ell)(1) \xrightarrow{\pi} \Gamma_\ell \xrightarrow{N_{g,\ell}^{\vee}} \Lambda_\ell^{\vee} \xrightarrow{i} H^1(\overline{A}, \mathbb{Q}_\ell).$$

Proposición 6.5.2. *La filtración de monodromía sobre $H^1(\overline{A}, \mathbb{Q}_\ell)$ está dada por:*

$$M_1 = H^1(\overline{A}, \mathbb{Q}_\ell) \supseteq M_0 = M_{-1} = \Lambda_\ell^{\vee} \supseteq M_{-2} = \{0\}.$$

Demostración: La demostración se sigue de la prop. 1.4.1 observando que el orden de nilpotencia de N es 1 y que $KerN = ImN = \Lambda_\ell^{\vee}$. Notemos que $Gr_1^M \simeq \Gamma_\ell(-1)$ y $Gr_{-1}^M = \Lambda_\ell^{\vee}$. ■

La filtración sobre $H^1(A, \mathbb{Q}_\ell)$ induce una filtración sobre las cohomologías de orden superior de la manera siguiente:

Recordemos que la monodromía sobre $H^1(A)^{\otimes k}$ y la filtración de monodromía correspondiente (ver prop. 1.4.8(i)) están dadas por

$$\sum_{i=1}^{k} 1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{N}_{i} \otimes \cdots \otimes 1$$

y

$$M_i(H^1(A)^{\otimes k}) = \sum_{i_1+\cdots+i_k=i} M_{i_1}\otimes\cdots\otimes M_{i_k}$$

para $i_s \in \{1,0,-1\}$ y $-k \leq i \leq k$.

Recordando que

$$H^k(\overline{A},\mathbb{Q}_\ell) \cong \wedge^k H^1(\overline{A},\mathbb{Q}_\ell) := H^1(\overline{A},\mathbb{Q}_\ell)^{\otimes k}/L$$

donde L es el subespacio generado por todos los elementos de la forma $a_1 \otimes \cdots \otimes a_k$ con $a_n = a_m$ para algunos $n \neq m$, se tiene que el operador de monodromía sobre $H^k(\overline{A},\mathbb{Q}_\ell)$ está definido por

$$\sum_{i=1}^{k} 1\wedge\cdots\wedge \underbrace{N}_{i} \wedge\cdots\wedge 1$$

y la filtración de monodromía por

$$M_i(H^k(A)) = \frac{M_i(H^1(A)^{\otimes k})}{L\cap M_i(H^1(A)^{\otimes k})} = \sum_{i_1+\cdots+i_k=i} M_{i_1}\wedge\cdots\wedge M_{i_k}.$$

Observación 6.5.3. *Notemos que el operador N es nilpotente con orden de nilpotencia k (es decir, $N^{k+1}=0$) y que está bien definido:*

Si $a_i = a_j$ con $i < j$, entonces todos los sumandos son cero excepto el i-ésimo

$$a_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{N(a_i)}_{i} \wedge\cdots\wedge \underbrace{a_i}_{j} \wedge\cdots\wedge a_k$$

y el j-ésimo

$$a_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{a_i}_{i} \wedge\cdots\wedge \underbrace{N(a_i)}_{j} \wedge\cdots\wedge a_k$$

$$= (-1)^{j-i+j-(i+1)} a_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{N(a_i)}_{i} \wedge\cdots\wedge \underbrace{a_i}_{j} \wedge\cdots\wedge a_k$$

$$= -a_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{N(a_i)}_{i} \wedge\cdots\wedge \underbrace{a_i}_{j} \wedge\cdots\wedge a_k.$$

Proposición 6.5.4. *Para la filtración de monodromía $M_\bullet$ sobre $H^k(\overline{A},\mathbb{Q}_\ell)$, se tiene*

$$Gr_i^M(H^k(A)) := \frac{M_i(H^k(A))}{M_{i-1}(H^k(A))} \cong \begin{cases} (\wedge^{\frac{k+i}{2}}\Gamma_\ell \otimes \wedge^{\frac{k-i}{2}}\Lambda_\ell^\vee)(-\frac{k+i}{2}), & \textit{si} \quad i \equiv k (\textit{mod } 2) \\ 0, & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

para todo $-k \leq i \leq k$.

Demostración: Consideremos el diagrama conmutativo:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & L\cap M_{i-1}(H^{1\otimes k}) & \longrightarrow & L\cap M_i(H^{1\otimes k}) & \longrightarrow & \frac{L\cap M_i(H^{1\otimes k})}{L\cap M_{i-1}(H^{1\otimes k})} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow_{inducido} & & \\
0 & \longrightarrow & M_{i-1}(H^{1\otimes k}) & \longrightarrow & M_i(H^{1\otimes k}) & \longrightarrow & Gr_i^M(H^{1\otimes k}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow_{inducido} & & \\
0 & \longrightarrow & M_{i-1}(\wedge^k H^1) & \longrightarrow & M_i(\wedge^k H^1) & \longrightarrow & Gr_i^M(\wedge^k H^1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}
$$

Luego, por el Lema de la Serpiente, la última fila es exacta y por lo tanto

$$Gr_i^M(\wedge^k H^1) \cong \frac{Gr_i^M(H^{1\otimes k})}{L\cap M_i(H^{1\otimes k})\big/ L\cap M_{i-1}(H^{1\otimes k})}.$$

Observando que

$$Gr_i^M(H^{1\otimes k}) = \frac{M_i(H^{1\otimes k})}{M_{i-1}(H^{1\otimes k})} = \frac{\sum_{i_1+\cdots+i_k=i} M_{i_1}\otimes\cdots\otimes M_{i_k}}{\sum_{j_1+\cdots+j_k=i-1} M_{j_1}\otimes\cdots\otimes M_{j_k}}$$

$$= \sum_{i_1+\cdots+i_k=i} \frac{M_{i_1}\otimes\cdots\otimes M_{i_k}}{\sum_{j_s\le i_s} M_{j_1}\otimes\cdots\otimes M_{j_k}},$$

se tiene que en cada término de la suma $\sum_{j_s\le i_s} M_{j_1}\otimes\cdots\otimes M_{j_k}$ debe existir exactamente un subíndice s, y sólo uno, tal que $j_s < i_s$.

Más aún, $j_s = i_s - 1$, lo cual implica que $i_s = 0, 1$ y por tanto que $j_s = -1, 0$.

Si para todo $c \in \{-1, 0, 1\}$ denotamos por c_r el número de factores con subíndice igual a c en el sumando $M_{i_1}\otimes\cdots\otimes M_{i_k}$, dado que

$$\frac{M_{i_n}}{M_{j_l}} \otimes \frac{M_{i_m}}{M_{j_s}} \cong \frac{M_{i_n}\otimes M_{i_m}}{M_{i_n}\otimes M_{j_s} + M_{j_l}\otimes M_{i_m}},$$

se deduce que de cada término

$$\frac{M_{i_1}\otimes\cdots\otimes M_{i_k}}{\sum_{j_s\le i_s} M_{j_1}\otimes\cdots\otimes M_{j_k}}$$

se obtienen exactamente c_1 factores de la forma $M_1/M_0 \cong \Gamma_\ell(-1)$, c_0 de la forma $M_0/M_{-1} = \{0\}$ y c_{-1} de la forma M_{-1}. Así, estos términos serán diferentes de cero si, y sólo si, $c_0 = 0$.

Por otra parte, las condiciones sobre los subíndices implican que

$$c_1 + c_0 + c_{-1} = k \quad \text{y} \quad c_1 - c_{-1} = i,$$

por tanto, para los términos no cero (es decir, para aquellos con $c_0 = 0$), se tiene $c_1 = \frac{k+i}{2}$ y $c_{-1} = \frac{k-i}{2}$. Pero esto último sólo es posible si i y k tienen la misma paridad.

Finalmente, dado que

$$\frac{L \cap M_i(H^{1\otimes k})}{L \cap M_{i-1}(H^{1\otimes k})} \cong L \cap Gr_i^M(H^{1\otimes k})$$

y notando que al hacer módulo la relación dada por L sólo se identifican entre sí los términos iguales de cada sumando, se tiene

$$Gr_i^M(\wedge^k H^1) \cong \wedge^{\frac{k+i}{2}}\Gamma_\ell(-1)\otimes\wedge^{\frac{k-i}{2}}M_{-1} = (\wedge^{\frac{k+i}{2}}\Gamma_\ell\otimes\wedge^{\frac{k-i}{2}}\Lambda_\ell^\vee)(-\frac{k+i}{2}). \qquad \blacksquare$$

Ahora (de la misma forma que para la cohomología étale) describiremos el operador N sobre la cohomología de De Rham $H^1_{DR}(A/K)$.

De aquí en adelante, por razones técnicas, supondremos que $K|\mathbb{Q}_\ell$ es finita; aunque los resultados deberían ser ciertos en general (ver apéndice A, cuestión 7).

Observemos que a partir de la monodromía geométrica dual

$$N_g^\vee : \Gamma \longrightarrow \Lambda^\vee,$$

al hacer tensor con K, se obtiene un K-isomorfismo

$$N_a^\vee := N_g^\vee \otimes K : \Gamma_K \longrightarrow \Lambda_K^\vee \simeq Hom(\Lambda, K)$$

con $\Gamma_K = \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} K$ y $\Lambda_K^\vee = \Lambda^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} K$ (ver [Co-I]).

Por otro lado, a partir de la uniformización de A,

$$0 \to \Lambda \to T \to A \to 0$$

se tiene la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Hom(\Lambda, K) \xrightarrow{i} H^1_{DR}(A/K) \xrightarrow{\pi} H^1_{DR}(T/K) \longrightarrow 0.$$

Observación 6.5.5. *La identificación de $Hom(\Lambda, K)$ con $Ker(\pi)$ está dada de la manera siguiente:*

Supongamos que $\mathcal{C}$ es un recubrimiento admisible de A y

$$(\{\omega_U : U \in \mathcal{C}\}, \{f_{UV} : U, V \in \mathcal{C}, U \neq V\})$$

es un 1-hipercociclo para $\Omega_A^\bullet$ *el cual determina un elemento de* $Ker(\pi)$*. Esto significa que existen funciones* h_u *sobre* $\pi^{-1}U$ *para* $U \in \mathcal{C}$ *tales que*

$$dh_U = \pi^*\omega_U \quad y \quad h_U - h_V = \pi^* f_{UV}.$$

Ahora, sea $\lambda \in \Lambda$ *y* $g_U = \lambda^* h_U - h_U$ *(lo cual tiene sentido ya que* λ *preserva* $\pi^{-1}U$*). Dado que*

$$dg_U = 0 \quad y \quad g_U - g_V = 0,$$

se sigue que $\{g_U\}$ *corresponde a un elemento* $k_\lambda \in K$*. La correspondencia* $\lambda \to k_\lambda$ *nos da la identificación buscada.*

Finalmente, recordando el isomorfismo $\Gamma \otimes K \cong H^1_{DR}(T/K)$ dado por $\gamma_i \mapsto \gamma_i^*(dz/z)$ donde $\Gamma =< \gamma_1, \cdots, \gamma_d >$, se tiene (ver [Co-I], sec. 2.1):

Lema 6.5.6. *El* **operador de monodromía** *sobre* $H^1_{DR}(A/K)$ *está dado por la composición:*

$$N : H^1_{DR}(A/K) \xrightarrow{\pi} \Gamma_K \xrightarrow{N_a^\vee} Hom(\Lambda, K) \xrightarrow{i} H^1_{DR}(A/K).$$

Observación 6.5.7. N *es nilpotente (a saber* $N^2 = 0$*) y*

$$Ker(N) = Im(N) = Hom(\Lambda, K).$$

Luego, tenemos la siguiente:

Proposición 6.5.8. *La filtración de monodromía sobre* $H^1_{DR}(A/K)$ *está dada por*

$$M_1 = H^1(A/K) \supseteq M_0 = M_{-1} = Hom(\Lambda, K) \supseteq M_{-2} = \{0\}. \qquad \blacksquare$$

De la misma forma que anteriormente, se tiene un operador de monodromía inducida sobre $H^k_{DR}(A/K) \cong \wedge^k(H^1_{DR}(A/K))$

$$\sum_{i=1}^{k} 1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{N}_{i} \wedge \cdots \wedge 1$$

y la filtración de monodromía correspondiente

$$M_i(H^k_{DR}(A/K)) := \frac{M_i(H^1_{DR}(A)^{\otimes k})}{L \cap M_i(H^1_{DR}(A)^{\otimes k})} = \sum_{i_1+\cdots+i_k=i} M_{i_1} \wedge \cdots \wedge M_{i_k}.$$

Proposición 6.5.9. *Para la filtración de monodromía $M_\bullet$ inducida sobre $H^k_{DR}(A/K)$, se tiene*

$$Gr_i^M(H^k_{DR}(A/K)) := \frac{M_i(H^k_{DR}(A/K)}{M_{i-1}H^k_{DR}(A/K)} \cong \begin{cases} \wedge^{\frac{k+i}{2}}\Gamma_K \otimes \wedge^{\frac{k-i}{2}}\Lambda_K^\vee, & si \quad i \equiv k (mod\ 2) \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

para $-k \leq i \leq k$. ■

Finalmente, estudiaremos la filtración $Fil^\bullet$ en $H^k_{DR}(A/K)$. Para ello, observemos que sobre $H^1_{DR}(A/K)$ la filtración $Fil^\bullet$ está dada por:

$$\{0\} = Fil^2 \subseteq Fil^1 \subseteq Fil^0 = H^1_{DR}(A/K)$$

y que trivialmente satisface la transversalidad de Griffiths, ya que

$$N(Fil^1) \subseteq Im(N) \subseteq Fil^0 = H^1_{DR}(A/K).$$

Proposición 6.5.10. *$Fil^\bullet$ en $H^k_{DR}(A/K)$ satisface la transversalidad de Griffiths. Más aún, el operador de monodromía descompone como en la prop. 5.6.7.*

Demostración: Dado que

$$Fil^i(H^n_{DR}(A/K)) := \frac{\sum_{i_1+\cdots+i_n=i} Fil^{i_1} \otimes \cdots \otimes Fil^{i_n}}{L \cap (\sum_{i_1+\cdots+i_n=i} Fil^{i_1} \otimes \cdots \otimes Fil^{i_n})}$$

se sigue que, para todo $0 \leq i_k \leq 2$, $N(Fil^{i_k}) \subseteq Im(N) \subseteq Fil^0 = H^1_{DR}(A/K)$. Así, cada sumando de $N(Fil^i(H^n_{DR}))$ está contenido en $Fil^i(H^n_{DR})$ o en $Fil^{i-1}(H^n_{DR})$. En cualquier caso, dado que la filtración $Fil^\bullet(H^n_{DR}(A/K))$ es decreciente, se tiene

$$N(Fil^i(H^n_{DR}(A/K))) \subseteq F^{i-1}(H^n_{DR}(A/K)). \qquad ■$$

Observación 6.5.11. *Todos los resultados de esta sección y la siguiente son válidos para toros analíticos rígidos tomando cohomología étale rígida y cohomología de De Rham rígida (ver [dJ-VP]).*

6.6. Apareamientos no-degenerados.

A partir de las proposiciones 6.5.4 y 6.5.9 es natural definir (a través de la mismas fórmulas) apareamientos entre las partes enteras de los graduados correspondientes. Partamos de la situación general siguiente:

Sea $\nu : K^* \to \mathbb{Z}$ la valoración sobre K. Supongamos que tenemos un conjunto finito de apareamientos no-degenerados

$$<,>_k : \Lambda_k \times \Gamma_k \longrightarrow K^*, \quad \forall k \in \{1, ..., n\}.$$

Esto nos proporciona morfismos inyectivos

$$\mathcal{N}_k^\vee : \Gamma_k \longrightarrow \Lambda_k^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} K^*$$

$$\gamma_k \mapsto \sum_{r_k} f_{r_k} \otimes \alpha_{r_k},$$

y monodromías geométricas duales

$$N_k^\vee : \Gamma_k \longrightarrow \Lambda_k^\vee$$

$$\gamma_k \mapsto \sum_{r_k} \nu(\alpha_{r_k}) f_{r_k}$$

donde $N_k^\vee = (id_{\Lambda_k^\vee} \otimes_{\mathbb{Z}} \nu) \circ \mathcal{N}_k^\vee$ para todo $k \in \{1, ..., n\}$.

Lo primero que haremos será generalizar la forma de los graduados obtenidos en la monodromía y los morfismos inducidos entre ellos.

Para todo $I \subseteq \{1, ..., n\}$, sea $B_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} B_n$ donde

$$B_k = \begin{cases} \Gamma_k, & k \in I \\ \Lambda_k^\vee, & k \neq I. \end{cases}$$

Definición 6.6.1. *Para todo $I \subseteq \{1, ..., n\}$, definimos por linealidad el morfismo siguiente:*

$$\mathcal{F}_I : B_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} B_n \longrightarrow \sum_{k \in I} B_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} \underbrace{\Lambda_k^\vee}_{k} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} B_n \otimes_{\mathbb{Z}} K^*$$

$$b_1 \otimes \cdots \otimes b_n \longmapsto \sum_{k \in I} (\sum_{r_k} b_1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{f_{r_k}}_{k} \otimes \cdots \otimes b_n \otimes \alpha_{r_k})$$

Observación 6.6.2. *No es difícil ver que el morfismo anterior está bien definido y que la composición:*

$$(id \otimes_{\mathbb{Z}} \nu) \circ \mathcal{F}_I : B_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} B_n \longrightarrow \sum_{k \in I} B_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} \underbrace{\Lambda_k^\vee}_{k} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} B_n$$

$$b_1 \otimes \cdots \otimes b_n \longmapsto \sum_{k \in I} (\sum_{r_k} b_1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{\nu(\alpha_{r_k}) f_{r_k}}_{k} \otimes \cdots \otimes b_n)$$

$$= \sum_{k \in I} b_1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{N_k^\vee(b_k)}_{k} \otimes \cdots \otimes b_n$$

coincide con la definición de la monodromía de la sec. 6.5.

En el caso particular en que todos los apareamientos son el mismo podemos definir, sobre el producto wedge respectivo, el apareamiento siguiente:

Definición 6.6.3. *Para todo $j \in \mathbb{N}$, sean*

$$\gamma = \gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_j \in \wedge^j \Gamma$$

y

$$f = f_1 \wedge \cdots \wedge f_{n-j} \in \wedge^{n-j} \Lambda^\vee.$$

Definimos por linealidad el morfismo siguiente:

$$\widehat{\mathcal{F}}_{j,n-j} : \wedge^j \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^{n-j} \Lambda^\vee \longrightarrow (\wedge^{j-1} \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^{n-j+1} \Lambda^\vee) \otimes_{\mathbb{Z}} K^*$$

$$\gamma \otimes f \mapsto \sum_{k=1}^{j} (-1)^k (\sum_{r_k} (\gamma - \gamma_k) \otimes f_1 \wedge \cdots \wedge f_{n-j} \wedge f_{r_k} \otimes \alpha_{r_k})$$

donde

$$\gamma - \gamma_k = \gamma_1 \wedge ... \wedge \widehat{\gamma}_k \wedge ... \wedge \gamma_j \in \wedge^{j-1} \Gamma.$$

Estos morfismos están bien definidos:

Obviamente, si f tiene dos elementos repetidos (digamos $f_s = f_r$), entonces $\widehat{\mathcal{F}}_{j,n-j}(\gamma \otimes f) = 0$.

Por otro lado, si γ tiene dos elementos repetidos (digamos $\gamma_1 = \gamma_2$, sin perder generalidad), entonces todos los sumandos de $\widehat{\mathcal{F}}_{j,n-j}(\gamma \otimes f)$ diferentes del primero y el segundo serán cero y Así,

$$\widehat{\mathcal{F}}_{j,n-j}(\gamma \otimes f) = (-1)^1 (\sum_{r_1} (\gamma - \gamma_1) \otimes f_1 \wedge \cdots \wedge f_{n-j} \wedge f_{r_1} \otimes \alpha_{r_1})$$

$$+ (-1)^2 (\sum_{r_2} (\gamma - \gamma_2) \otimes f_1 \wedge \cdots \wedge f_{n-j} \wedge f_{r_2} \otimes \alpha_{r_2}) = 0.$$

Observación 6.6.4. *Al componer con la valoración se tiene una aplicación bien definida:*

$$(id \otimes_{\mathbb{Z}} \nu) \circ \widehat{\mathcal{F}}_{j.n-j} : \wedge^j \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^{n-j} \Lambda^\vee \longrightarrow \wedge^{j-1} \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^{n-j+1} \Lambda^\vee$$

$$\gamma \otimes f \longmapsto \sum_{k=1}^{j} (-1)^k (\sum_{r_k} (\gamma - \gamma_k) \otimes f_1 \wedge \cdots \wedge f_{n-j} \wedge \nu(\alpha_{r_k}) f_{r_k})$$

$$= \sum_{k=1}^{j} (-1)^k (\gamma - \gamma_k) \otimes f_1 \wedge \cdots \wedge f_{n-j} \wedge N_k^\vee(\gamma_k).$$

En particular nos interesa estudiar los morfismos anteriores para las parejas (j,j) y $(j,j-1)$.

Lema 6.6.5. *Sea $A = T/\Lambda$ variedad abeliana sobre K. El morfismo*

$$(id \otimes_{\mathbb{Z}} \nu) \circ \widehat{\mathcal{F}}_{j,j} : \wedge^j \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^j \Lambda^{\vee} \longrightarrow \wedge^{j-1} \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^{j+1} \Lambda^{\vee}$$

tiene cokernel finito.

En particular el morfismo $((id \otimes_{\mathbb{Z}} \nu) \circ \mathcal{F}_{j,j}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ es exhaustivo para todo $j \in \mathbb{N}$.

Demostración: De la obs. 1.4.4(b), se tiene que el isomorfismo

$$Gr_2^M(H_{DR}^{2j}(A)) \overset{N^2}{\simeq} Gr_{-2}^M(H_{DR}^{2j}(A))$$

factoriza a través del morfismo inyectivo

$$N : Gr_2^M(H^{2j}(A)) \hookrightarrow Gr_0^M(H^{2j}(A))$$

y del morfismo exhaustivo

$$N : Gr_0^M(H^{2j}(A)) \twoheadrightarrow Gr_{-2}^M(H^{2j}(A)).$$

Luego, de la prop. 6.5.9, se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
\wedge^{j+1}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^{j-1}\Lambda^{\vee} & \overset{\nu\circ\widehat{\mathcal{F}}=\varphi_1}{\longrightarrow} & \wedge^{j}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^{j}\Lambda^{\vee} & \overset{\nu\circ\widehat{\mathcal{F}}=\varphi_2}{\longrightarrow} & \wedge^{j-1}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^{j+1}\Lambda^{\vee} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Gr_2^M(H_{DR}^{2j}) & \overset{N}{\hookrightarrow} & Gr_0^M(H_{DR}^{2j}) & \overset{N}{\twoheadrightarrow} & Gr_{-2}^M(H_{DR}^{2j})
\end{array}$$

donde las flechas verticales son inyectivas por estar en característica cero y ser los grupos Γ y Λ sin torsión. Del diagrama se sigue que φ_1 es inyectivo y por lo tanto que $Ker(\varphi_2) \cap Im(\varphi_1) = \{0\}$.

Así, $\varphi_2(\varphi_1(\wedge^{j+1}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^{j-1}\Lambda^{\vee}))$ es un subgrupo de $\wedge^{j-1}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^{j+1}\Lambda^{\vee}$ con el mismo rango sobre $\mathbb{Z}$, de lo cual se sigue que $Coker(\varphi_2)$ es finito. ■

Notemos que, de acuerdo con la prop. 6.5.9 y el lema 6.6.5, el morfismo reducción (ver def. 4.2.1) debería tener imagen en el núcleo de la aplicación $(id \otimes_{\mathbb{Z}} \nu) \circ \widehat{\mathcal{F}}_{j,j}$, es decir,

$$c_A : CH^j(A) \longrightarrow Ker(\wedge^j \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^j \Lambda^{\vee} \overset{(id\otimes_{\mathbb{Z}}\nu)\circ\widehat{\mathcal{F}}_{j,j}}{\longrightarrow} \wedge^{j-1}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^{j+1}\Lambda^{\vee}).$$

Más aún, se tiene

$$Ker((id \otimes_{\mathbb{Z}} \nu) \circ \widehat{\mathcal{F}}_{j,j}) \neq \{0\},$$

ya que $\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_j \otimes N_g^{\vee}(\gamma_1) \wedge \cdots \wedge N_g^{\vee}(\gamma_j) \in Ker((id \otimes_{\mathbb{Z}} \nu) \circ \widehat{\mathcal{F}}_{j,j})$.

Lema 6.6.6. *Sea $A = T/\Lambda$ variedad abeliana sobre K. El morfismo*

$$\widehat{\mathcal{F}}_{j,j-1} : \wedge^j\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^{j-1}\Lambda^\vee \longrightarrow (\wedge^{j-1}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^j\Lambda^\vee) \otimes_{\mathbb{Z}} K^*$$

es inyectivo para todo $j \in \mathbb{N}$.

Demostración: De la prop. 6.5.9, se tiene el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \wedge^j\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^{j-1}\Lambda^\vee & \xrightarrow{\nu\circ\widehat{\mathcal{F}}} & \wedge^{j-1}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^j\Lambda^\vee \\ \downarrow & & \downarrow \\ \wedge^j\Gamma_K \otimes \wedge^{j-1}\Lambda_K^\vee \cong Gr_1^M(H_{DR}^{2j-1}) & \xrightarrow{\overset{N}{\sim}} & Gr_{-1}^M(H_{DR}^{2j-1}) \cong \wedge^{j-1}\Gamma_K \otimes \wedge^j\Lambda_K^\vee, \end{array}$$

donde las flechas verticales son inyectivas ya que estamos en característica cero y los grupos Γ y Λ son libres. Luego, $(id \otimes \nu) \circ \widehat{\mathcal{F}}_{j,j-1}$ es inyectiva y por lo tanto $\widehat{\mathcal{F}}_{j,j-1}$ también lo es. ■

Del lema anterior se sigue que a partir del morfismo inyectivo

$$\widehat{\mathcal{F}}_{j,j-1} : \wedge^j\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^{j-1}\Lambda^\vee \hookrightarrow Hom((\wedge^{j-1}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^j\Lambda^\vee)^\vee, K^*)$$

podemos definir el toro analítico rígido siguiente:

$$J^j(A) := \frac{Hom((\wedge^{j-1}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^j\Lambda^\vee)^\vee, K^*)}{\wedge^j\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^{j-1}\Lambda^\vee}$$

que llamaremos ***j-ésima Jacobiana intermedia*** de A.

Observación 6.6.7. *(i) Observemos que:*

$$dim J^j(A) = \binom{d}{j-1}\binom{d}{j} = dim_K(H^j(A, \Omega_{A/K}^{j-1})) = h^{j,j-1}.$$

(ii) Es natural preguntarse si existe una aplicación:

$$CH^j(A) \longrightarrow J^j(A)$$

que juegue el papel de la aplicación de Abel-Jacobi (ver sec. 6.8).

Ejemplo 6.6.8. *Sea E_i una curva elíptica de Tate sobre K, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$. Sea*

$$E_i \cong K^*/q_i^{\mathbb{Z}}$$

la correspondiente uniformización analítica donde

$$q_i^{\mathbb{Z}} = \Lambda_i \cong \mathbb{Z}$$

es una red en K^*.

Denotemos por $\Gamma_i = \mathbb{Z}$ *el grupo de caracteres asociado a* E_i, $\forall i \in \{1,2,3\}$.

Consideremos A *la variedad abeliana definida por el producto de las* E_i*'s sobre* K, *es decir,*

$$A = E_1 \times E_2 \times E_3 = T/\Lambda$$

donde $T = (K^*)^3$ *y* $\Lambda =< (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) >\cong \mathbb{Z}^3$ *es una red en* T.

Construyamos la segunda Jacobiana intermedia de A. *Para ello, denotemos por*

$$\Gamma = Hom(T, K^*) \cong \mathbb{Z}^3$$

el grupo de caracteres de T.

Por la prop. 6.5.2, tenemos que la filtración de monodromía sobre $H^1(\overline{A}, \mathbb{Q}_\ell)$ *está dada por*

$$M_1 = H^1(\overline{A}, \mathbb{Q}_\ell) \supset M_0 = M_{-1} = \Lambda_\ell^\vee \supset \{0\}$$

con $M_1/M_0 \cong \Gamma_\ell(-1)$. *Asimismo, la filtración de monodromía en*

$$H^3(\overline{A}, \mathbb{Q}_\ell) \cong \wedge^3 H^1(\overline{A}, \mathbb{Q}_\ell)$$

tiene graduados asociados (ver prop. 6.5.4):

$$Gr_1^M(H^3(\overline{A}, \mathbb{Q}_\ell)) \;\; \cong \;\; (\wedge^2\Gamma_\ell \otimes \Lambda_\ell^\vee)(-2)$$

y

$$Gr_{-1}^M(H^3(\overline{A}, \mathbb{Q}_\ell)) \;\; \cong \;\; (\Gamma_\ell \otimes \wedge^2\Lambda_\ell^\vee)(-1) \; .$$

De acuerdo al lema 6.6.6, el morfismo inyectivo

$$\widehat{\mathcal{F}} : \wedge^2\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^\vee \longrightarrow (\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^2\Lambda^\vee) \otimes_{\mathbb{Z}} K^*$$

nos define la segunda Jacobiana intermedia de A:

$$J^2(A) := \frac{Hom((\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^2\Lambda^\vee)^\vee, K^*)}{\wedge^2\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^\vee} \cong \frac{(K^*)^9}{\mathbb{Z}^9}$$

que tiene dimensión 9.

Para analizar más de cerca este toro analítico, recordemos que la fórmula de Künneth nos da la descomposición siguiente para $A = E_1 \times E_2 \times E_3$:

$$H^3(\overline{A}, \mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{i+j+k=3} H^i(\overline{E}_1, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} H^j(\overline{E}_2, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} H^k(\overline{E}_3, \mathbb{Q}_\ell).$$

Ahora, de la irreducibilidad de E_i, *se tiene*

$$H^0(\overline{E}_i, \mathbb{Q}_\ell) = \mathbb{Q}_\ell$$

y de la Dualidad de Poincaré:

$$H^2(\overline{E}_i, \mathbb{Q}_\ell) \cong \mathbb{Q}_\ell(-1).$$

Luego,

$$\begin{aligned} H^3(\overline{A}, \mathbb{Q}_\ell) \;=\; & (H^1(\overline{E}_1, \mathbb{Q}_\ell) \otimes H^1(\overline{E}_2, \mathbb{Q}_\ell) \otimes H^1(\overline{E}_3, \mathbb{Q}_\ell)) \\ & \bigoplus (H^1(\overline{E}_1, \mathbb{Q}_\ell)(-1))^2 \bigoplus (H^1(\overline{E}_2, \mathbb{Q}_\ell)(-1))^2 \bigoplus (H^1(\overline{E}, \mathbb{Q}_\ell)(-1))^2. \end{aligned}$$

Observemos que $H^1(\overline{E}_i, \mathbb{Q}_\ell)$ nos proporciona el toro dual de E_i

$$E_i^\vee = \frac{Hom(\mathbb{Z}, K^*)}{(1 \mapsto q_i)^{\mathbb{Z}}} \simeq E_i.$$

Así, el respectivo sumando en la descomposición de $H^3(\overline{A}, \mathbb{Q}_\ell)$ nos aporta dos copias de E_i.

Para el primer sumando, recordemos que la filtración de monodromía en $H = H^1(\overline{E}_1, \mathbb{Q}_\ell) \otimes H^1(\overline{E}_2, \mathbb{Q}_\ell) \otimes H^1(\overline{E}_3, \mathbb{Q}_\ell)$ está dada por:

$$M_j(H) = \sum_{j_1+j_2+j_3=j} M_{j_1} \otimes M_{j_2} \otimes M_{j_3}$$

donde M_{j_i} recorre los elementos de la filtración de monodromía en $H^1(\overline{E}_i, \mathbb{Q}_\ell)$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$ (ver sec. 6.5).

Luego, repitiendo los cálculos hechos en la demostración de la prop. 6.5.4, vemos que

$$\begin{aligned} Gr_1^M(H) \cong \; & \Gamma_{1\ell}(-1) \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma_{2\ell}(-1) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda_{3\ell}^\vee + \Gamma_{1\ell}(-1) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda_{2\ell}^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma_{3\ell}(-1) \\ & + \Lambda_{1\ell}^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma_{2\ell}(-1) \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma_{3\ell}(-1) = \mathbb{Q}_\ell(-2)^3 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Gr_{-1}^M(H) \cong \; & \Lambda_{1\ell}^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma_{2\ell}(-1) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda_{3\ell}^\vee(-1) + \Gamma_{1\ell}(-1) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda_{2\ell}^\vee(-1) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda_{3\ell}^\vee(-1) \\ & + \Lambda_{1\ell}^\vee(-1) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda_{2\ell}^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma_{3\ell}(-1) = \mathbb{Q}_\ell(-1)^3. \end{aligned}$$

De acuerdo a la obs. 6.6.2, el morfismo que tenemos que considerar correspondiente a estos graduados es $\mathcal{F} = \sum_{I \subseteq \{1,2,3\}, |I|=2} \mathcal{F}_I$, que está dado por:

$$\mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbb{Z}^3 \otimes_{\mathbb{Z}} K^* = (K^*)^3$$

$$(a, b, c) \longmapsto (q_1^a q_3^c, q_2^a q_3^b, q_1^b q_2^c).$$

Este morfismo es inyectivo: si $(q_1^a q_3^c, q_2^a q_3^b, q_1^b q_2^c) = (1, 1, 1)$, entonces elevando la primera coordenada a la potencia b y la tercera a la potencia a, obtenemos $q_3^{bc} = q_2^{ac}$. Si ahora elevamos la segunda coordenada a la potencia *c y sustituímos en ella la expresión anterior, se tiene* $q_2^{2ac} = 1$*. Dado que* $\nu(q_i) > 0$ *para todo* $i \in \{1,2,3\}$*, se tiene* $a = 0$ *o* $c = 0$*. En cualquiera de los dos casos, se concluye que* $a = b = c = 0$*.*

Finalmente, esta parte de la cohomología contribuye con el toro de dimensión 3 siguiente:

$$B = \frac{(K^*)^3}{<(q_1,1,q_1),(1,q_2,q_2),(q_3,q_3,1))>}$$

y la Jacobiana intermedia de orden 2 esta dada por

$$J^2(A) = A^2 \times B = \frac{(K^*)^9}{L}$$

donde L *es la red dada por la matriz:*

$$\begin{pmatrix} q_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & q_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & q_2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & q_2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & q_3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & q_3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & q_1 & 1 & q_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & q_2 & q_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & q_1 & q_2 & 1 \end{pmatrix} \in M_9(K^*).$$

6.7. Producto de curvas de Mumford.

El objetivo de esta sección es definir las Jacobianas intermedias para el producto de curvas de Mumford. Para ello seguiremos la exposición de ([V-P]).

Sea K un cuerpo completo respecto a un valor absoluto no-arquimediano. Recordemos que si $\Gamma =< \gamma_1, \cdots, \gamma_g >\subseteq PGL(2,K)$ es un grupo de Schottky, entonces el conjunto de puntos ordinarios de Γ, que denotamos por Ω, es un abierto en $\mathbb{P}^1(K)$. El espacio analítico dado por el cociente

$$C = \Omega/\Gamma$$

define una ***curva de Mumford*** sobre K.

Más aún, C es una curva completa, no-singular e irreducible de género g cuya Jacobiana (que es una variedad abeliana) está dada por el toro analítico

$$J_C = \frac{Hom(\Gamma^{ab}, K^*)}{L}$$

donde Γ^{ab} es el abelianizado de Γ y L es la red definida por el núcleo del morfismo exhaustivo (ver [V-P], cap. VI):

$$Hom(\Gamma, K^*) \longrightarrow \overline{D}_0$$

con $\overline{D}_0$ el grupo de clases de divisores de grado cero en C.

Recordemos que la uniformización de la Jacobiana nos da un apareamiento no-degenerado

$$<,>: L \times \Gamma^{ab} \longrightarrow K^*$$

y una monodromía geométrica

$$N_g : L \longrightarrow \Gamma^{ab\vee}.$$

También recordemos que

$$H^1(\overline{C}, \mathbb{Q}_\ell) = V_\ell(J_C) := T_\ell(J_C) \otimes \mathbb{Q}_\ell$$

y que sobre $T_\ell(J_C)$ se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Gamma^{ab\vee} \otimes \mathbb{Z}_\ell(1) \xrightarrow{i} T_\ell(J_C) \xrightarrow{\pi} L \otimes \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow 0.$$

Esta sucesión exacta nos proporciona la monodromía,

$$N : H^1(\overline{C}, \mathbb{Q}_\ell)(1) \xrightarrow{\pi} L_\ell(1) \xrightarrow{N_{g,\ell}} \Gamma_\ell^{ab\vee}(1) \xrightarrow{i} H^1(\overline{C}, \mathbb{Q}_\ell)$$

y la filtración asociada correspondiente:

$$M_1 = H^1(\overline{C}, \mathbb{Q}_\ell) \supset M_0 = M_{-1} = \Gamma_\ell^{ab\vee}(1) \supset \{0\}$$

donde $M_1/M_0 \cong L_\ell$.

Repitiendo los cálculos hechos en la demostración de la prop. 6.5.4, se tiene

Lema 6.7.1. *Los graduados de la monodromía sobre $\otimes^n H^1(\overline{C})$ están dados por:*

$$Gr_i^M(\otimes^n H^1(\overline{C})) \cong \begin{cases} \sum_{I\subseteq\{1,\dots,n\},|I|=\frac{n+i}{2}} V_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} V_n, & si \quad i \equiv n(mod 2) \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

donde para todo $I \subseteq \{1, ..., n\}$, se define

$$V_k = \begin{cases} L_\ell, & k \in I \\ \Gamma_\ell^{ab\vee}, & k \neq I. \end{cases}$$

De la misma forma que en la def. 6.6.1, sobre las partes enteras de estos graduados podemos definir:

$$\mathcal{F}_I : B_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} B_n \longrightarrow \sum_{k\in I} B_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} \underbrace{\Gamma^{ab\vee}}_{k} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} B_n \otimes_{\mathbb{Z}} K^*$$

$$b_1 \otimes \cdots \otimes b_n \longmapsto \sum_{k\in I} (\sum_{r_k} b_1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{f_{r_k}}_{k} \otimes \cdots \otimes b_n \otimes \alpha_{r_k})$$

a través de la aplicación

$$\mathcal{N}_g : L \longrightarrow \Gamma^{ab\vee} \otimes_{\mathbb{Z}} K^*$$

$$\ell_k \mapsto \sum_{r_k} f_{r_k} \otimes \alpha_{r_k},$$

y donde, para $I \subseteq \{1, ..., n\}$,

$$B_k = \begin{cases} L, & k \in I \\ \Gamma^{ab\vee}, & k \neq I. \end{cases}$$

Nos interesan los morfismos correspondientes a $n = 2j - 1$ con $|I| = j$.

Más concretamente, los morfismos correspondientes a los graduados

$$Gr_1^M(\otimes^{2j-1} H^1(\overline{C})) \text{y} Gr_{-1}^M(\otimes^{2j-1} H^1(\overline{C})).$$

Para ello, el mismo razonamiento utilizado en la demostración del lema 6.6.6 nos dice que:

Lema 6.7.2. *Para todo $j \in \mathbb{N}$, el morfismo $\sum_{|I|=j} \mathcal{F}_I$ es inyectivo.*

Ahora consideremos la variedad $C^k = C \times \cdots \times C$ obtenida al hacer el producto de C con ella misma k-veces. De acuerdo a la fórmula de Künneth, para todo $0 \leq n \leq 2k$, se tiene:

$$H^n(\overline{C}^k, \mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=n} H^{i_1}(\overline{C}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \cdots \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} H^{i_k}(\overline{C}, \mathbb{Q}_\ell)$$

con $i_s \in \{0, 1, 2\}$.

Si denotamos por $c_i = \sharp\{i_s = i\}$ para todo $i \in \{0, 1, 2\}$, se tienen las relaciones siguientes: $c_0 + c_1 + c_2 = k$ y $0 \cdot c_0 + 1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 = n$. Así, se tiene $c_2 = \frac{n-c_1}{2}$ y $c_0 = \frac{2k-c_1-n}{2}$.

Más aún, recordando que $H^0(\overline{C}, \mathbb{Q}_\ell) = \mathbb{Q}_\ell$ y $H^2(\overline{C}, \mathbb{Q}_\ell) \cong \mathbb{Q}_\ell(-1)$, se tiene

$$H^n(\overline{C}^k, \mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{c_0+c_1+c_2=k} \otimes^{c_1} H^1(\overline{C}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbb{Q}_\ell(-c_2)$$

$$= \bigoplus_{0\le c\le k} (\otimes^c H^1(\overline{C},\mathbb{Q}_\ell)\otimes_{\mathbb{Q}_\ell}\mathbb{Q}_\ell(-(\frac{(n-c)}{2}))^{\binom{k}{c}\binom{k-c}{\frac{(n-c)}{2}}}$$

la suma sobre los $0\le c\le k$ tales que $\frac{n-c}{2}, \frac{2k-c-n}{2}\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Lo cual sólo es posible si n y c tienen la misma paridad.

Así, en el caso en que $n=2j-1$ es impar, tenemos

$$H^{2j-1}(\overline{C}^k,\mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{1\le c\le k, impar} \otimes^c H^1(\overline{C},\mathbb{Q}_\ell)\otimes_{\mathbb{Q}_\ell}\mathbb{Q}_\ell(-\frac{(n-c)}{2})^{\binom{k}{c}\binom{k-c}{\frac{(n-c)}{2}}}$$

y dado que en cada uno de los sumandos $\otimes^c H^1(\overline{C},\mathbb{Q}_\ell)$ el $c=2j_c-1$ es impar, el lema 6.7.2 nos proporciona un toro analítico, que llamaremos J_c, dado por la correspondiente aplicación $\sum_{|I|=j_c}\mathcal{F}_I$.

Finalmente, se define la j-ésima Jacobiana intermedia de C^k como el producto de estos toros:

$$J^j(C^k) := \Pi_c J_c^{\binom{k}{c}\binom{k-c}{\frac{(n-c)}{2}}}.$$

Observación 6.7.3. *Observemos que la j-ésima Jacobiana intermedia de C^k donde $n=2j-1$ siempre contiene el factor $J_C^{k\binom{k-1}{j-1}}$ correspondiente al valor $c=1$.*

Ejemplo 6.7.4. *Calculemos todas las Jacobianas intermedias de C^5:*

$$J^1(C^5) = J^5(C^5) = J_C^5,$$

$$J^2(C^5) = J^4(C^5) = J_C^{20}\times J_3^{10},$$

$$J^3(C^5) = J_C^{30}\times J_3^{20}\times J_5$$

donde J_3 es el toro dado por

$$J_3 = \frac{(L\otimes\Gamma^{ab\vee}\otimes\Gamma^{ab\vee}+\Gamma^{ab\vee}\otimes L\otimes\Gamma^{ab\vee}+\Gamma^{ab\vee}\otimes\Gamma^{ab\vee}\otimes L)\otimes_{\mathbb{Z}}K^*}{(L\otimes L\otimes\Gamma^{ab\vee}+L\otimes\Gamma^{ab\vee}\otimes L+\Gamma^{ab\vee}\otimes L\otimes L)}$$

y J_5 el dado por

$$J_5 = \frac{(L\otimes L\otimes\Gamma^{ab\vee}\otimes\Gamma^{ab\vee}\otimes\Gamma^{ab\vee}+\cdots+\Gamma^{ab\vee}\otimes\Gamma^{ab\vee}\otimes\Gamma^{ab\vee}\otimes L\otimes L)\otimes_{\mathbb{Z}}K^*}{(L\otimes L\otimes L\otimes\Gamma^{ab\vee}\otimes\Gamma^{ab\vee}+\cdots+\Gamma^{ab\vee}\otimes\Gamma^{ab\vee}\otimes L\otimes L\otimes L)}.$$

6.8. Morfismo de Abel-Jacobi.

En esta sección recordaremos cómo se puede asociar a toda variedad X con reducción totalmente degenerada un toro analítico rígido $J^i(X)$ de dimensión igual al número de Hodge $h^{i,i-1}$, $0 \leq i \leq dim X$ y una aplicación de Abel Jacobi:

$$CH^i(X)_{hom} \longrightarrow J^i(X)_{\mathbb{Q}}$$

con el fin de estudiar los ciclos algebraicos de X.

En esta parte supondremos que K es una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$. Esta suposición es escencial, ya que no sabemos como hacerlo en general.

La idea básica consiste en buscar un subcociente del grupo de cohomología étale $H^{2j-1}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j))$ que sea una extensión de $\mathbb{Q}_\ell$'s por $\mathbb{Q}_\ell(1)$'s tal como el ℓ-módulo de Tate de un toro analítico debe ser.

La prop. 5.3.3 nos dice que es precisamente la filtración de monodromía la que nos da una forma natural de encontrar tales subcocientes.

Más concretamente, después de pasar a una extensión finita y no-ramificada de K, podemos suponer que la acción de G_K sobre $T_j^{-1}(\overline{Y})$ y $T_{j-1}^1(\overline{Y})$ es trivial para todo $j \geq 0$ (ver obs. 5.2.5).

En este caso (ver [R-X2], sec. 2), se pueden construir apareamientos no-degenerados

$$\{,\} : T_j^{-1}(Y)/tors \times T_{j-1}^{1V}(Y)/tors \longrightarrow K^*$$

donde $T(Y)/tors$ denota la parte libre de torsión del grupo $T(Y)$ y $T^V(Y)$ el grupo dual.

Definición 6.8.1. *Se definen las* **Jacobianas intermedias** *p-ádicas de X como los toros analíticos rígidos:*

$$J^j(X) := \frac{Hom(T_{j-1}^{1V}(Y)/tors, \mathbb{G}_m)}{T_j^{-1}(Y)/tors},$$

donde la red $T_j^{-1}(Y)/tors$ es vista dentro del toro algebraico $Hom(T_{j-1}^{1V}(Y)/tors, \mathbb{G}_m)$ vía el apareamiento no-degenerado $\{,\}$ (ver sec. 6.1).

Observación 6.8.2. *(i) La dimensión de $J^j(X)$ es igual a*

$$dim_{\mathbb{Q}_p}(H^j(\overline{Y}, W\omega^{j-1}_{\overline{Y},log}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p) = dim_K(H^j(X, \Omega_X^{j-1})) = h^{j,j-1}.$$

(ii) Notemos que el ℓ-módulo de Tate $V_\ell(J^j(X)) = T_\ell(J^j(X)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ de $J^j(X)$ para todo $\ell \neq p$, se obtiene a partir de la extensión

$$0 \to T_{j-1}^1 \otimes \mathbb{Q}_\ell(1) \to V_\ell(J^j(X)) \to T_j^{-1} \otimes \mathbb{Q}_\ell \to 0$$

correspondiente a la extensión

$$0 \to Gr^M_{-1} \to M_{1,\ell}/M_{-3,\ell} \to Gr^M_1 \to 0$$

que se obtiene de la filtración de monodromía $M_{\bullet,\ell}$ *de* $H^{2j-1}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j))$.

Recordando los grupos $H^1_g(K,-)$ de Bloch-Kato (ver [B-K]), se tiene un isomorfismo

$$J^j(X)(K) \cong \prod_\ell H^1_g(K, (M_{1,\ell}/M_{-3,\ell})/tors)$$

donde la filtración es la de monodromía sobre la cohomología entera $H^{2j-1}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(j))$. Este isomorfismo es compatible con el paso a extensiones finitas de K y con las normas.

Más aún, para $V_\ell = T_\ell \otimes \mathbb{Q}_\ell$, dado que los cocientes $\frac{V_\ell}{M_{1,\ell}}$ son sucesivas extensiones de $\mathbb{Q}_\ell$ por $\mathbb{Q}_\ell(i))$ para $i < 0$, se tiene que el morfismo canónico de Abel-Jacobi étale cl' factoriza a través de una aplicación:

$$cl' : CH^j_{hom}(X) \to H^1(K, M_{1,\ell})$$

para $M_\bullet$ la monodromía sobre $H^{2j-1}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j))$ (ver [R-X2], teo. 2 y cor. 1).

Definición 6.8.3. *Se define el morfismo analítico rígido de Abel-Jacobi:*

$$Ab_X : CH^j_{hom}(X) \to J^j(X)(K)_\mathbb{Q}$$

a través de la composición

$$CH^j_{hom}(X) \to H^1(K, M_{1,\ell}) \to H^1(K, M_{1,\ell}/M_{-3,\ell})$$

para todo número primo ℓ.

Notemos que si componemos el apareamiento

$$\{,\} : T^{-1}_j(Y)/tors \times T^{1V}_{j-1}(Y)/tors \longrightarrow K^*$$

con la valoración ν en K^*, obtenemos un morfismo

$$J^j(X) \longrightarrow Coker(T^{-1}_j(Y)/tors \xrightarrow{N} T^1_{j-1}(Y)/tors)$$

que corresponde al morfismo inducido sobre las partes libres de torsión por la isogenia

$$N : T^{-1}_j(Y) \longrightarrow T^1_{j-1}(Y),$$

ya que $\nu \circ \{,\} = N$ (ver teo. 3.3.7).

Apéndice A

Este apéndice tiene por objeto plantear algunas preguntas que quedan abiertas alrededor de los resultados de esta memoria y que se podrían tratar de demostrar en un futuro. Se escribirán de una manera poco formal.

Cuestión 1. Respecto a la def. 5.1.1, surge una serie de preguntas naturales:

¿CH-lineal implica ℓ-cohomológicamente lineal?

¿CH-lineal implica ordinaridad?

Más aún, ¿CH-lineal implica isomorfismo del morfismo ciclo despúes de hacer tensor con $\mathbb{Q}$?

Inversamente, sobre un cuerpo finito ¿el ser ℓ-cohomológicamente lineal implica ser CH-lineal?

Cuestión 2. Respecto a la def. 5.2.1, una pregunta natural es saber si la propiedad de tener reducción totalmente degenerada es cerrada bajo el producto fibrado y/o cambio de base finito.

Cuestión 3. De acuerdo con ([R-X1], ver teo. 3) sobre la cohomología étale p-ádica $H^{2j-1}(\overline{X}, \mathbb{Q}_p(j))$ tenemos una filtración cuyos cocientes graduados también satisfacen la fórmula de la prop. 5.3.3. La pregunta natural es saber si el teo. 5.4.4 continúa siendo válido en este caso.

Cuestión 4. Respecto al cor. 4.5.5, pensamos que debe existir una inclusión del tipo:

$$CH^j_{hom}(X) \hookrightarrow Ker(c_X).$$

Cuestión 5. Observemos que la def. 6.6.1 y la obs. 6.6.2 nos proporcionan apareamientos no-degenerados $\mathcal{F}$ que al componerlos con la valoración ν coinciden con la monodromía N. Son estos apareamientos los que, en el caso de variedades abelianas, nos permite construir las Jacobianas intermedias de manera explícita.

En general, para toda variedad X lisa y proyectiva sobre K con reducción totalmente degenerada, ¿cómo podemos definir "monodromías enriquecidas":

$$\mathcal{N} : T^i_j \longrightarrow T^{i+2}_{j-1} \otimes K^*$$

tales que $\nu \circ \mathcal{N} = N : T_j^i \to T_{j-1}^{i+2}$?

En particular, estas monodromías enriquecidas podrían refinar nuestros morfismos c_X y AJ_X en el sentido de que harían conmutar los diagramas siguientes:

$$\begin{tikzcd} CH^j(X) \arrow[r, "c_X"] \arrow[dr] & Ker(N) \\ & Ker(\mathcal{N}) \arrow[u, "\nu"'] \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} Ker(c_X) \arrow[r, "AJ_X"] \arrow[dr] & Coker(T_j^{-1} \xrightarrow{N} T_{j-1}^1) \\ & Coker(T_j^{-1} \xrightarrow{\mathcal{N}} T_{j-1}^1 \otimes K^*) \arrow[u, "\nu"'] \end{tikzcd}$$

Cuestión 6. Respecto a la def. 6.8, en el caso en que los T's sean libres de torsión, pensamos que debe existir una aplicación

$$CH^j_{hom}(X) \to J^j(X)(K)$$

que haga conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} CH^j_{hom}(X) \arrow[r] \arrow[dr, "AJ_X"] & J^j(X)(K) \arrow[d, "\nu"] \\ & Coker(T_j^{-1} \xrightarrow{N} T_{j-1}^1). \end{tikzcd}$$

Cuestión 7. Los resultados de las sec. 6.5 para la cohomología de De Rham deben seguir siendo válidos en cualquier cuerpo K de característica 0. La pregunta es si son ciertos en característica $p > 0$.

Cuestión 8. Observemos que la construcción hecha para variedades abelianas en el cap. 6 puede repetirse sin ningún problema sobre $\mathbb{C}$.

Una pregunta natural es saber si existe alguna relación entre nuestra Jacobiana intermedia $J^j(A)$ y la Jacobiana de Griffiths sobre $\mathbb{C}$.

Más concretamente, ¿es $J^j(A)$ un cociente de la Jacobiana de Griffiths?

Cuestión 9. Respecto a la naturaleza de nuestros toros analíticos rígidos, $J^j(A)$, hay ejemplos (ver [R-X2], sec. 4.4, prop. 3) que muestran que no son variedades abelianas para $1 < j < d$.

Esto nos hace pensar que podrían construirse sólo utilizando métodos analíticos rígidos, lo cual nos daría una forma puramente geométrica de definirlos.

Bibliografía

[A] Y. André, *Une introduction aux motifs (Motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et synthésis 17, Société Matématique de France 2004.

[Be] P. Beilinson, *Height pairing between algebraic cycles.* Currents trends in arithm. alg. geometry (Arcata, Calif., 1985), Contemp. Math. 67, 1-24.

[BGS1] S. Bloch, H. Gillet, C. Soulé, *Non-Archimedean Arakelov theory*, J. Algebraic Geometry 4 (1995) 427-485.

[BGS2] S. Bloch, H. Gillet, C. Soulé, *Algebraic cycles on degenerate fibers*, in Arithmetic Aspects of Algebraic Geometry, Cortona 1994, F. Catanese editor, 45-69.

[B-K] S. Bloch, K. Kato, *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, in The Grothendieck Festschrift, Vol. I, Progr. Math. 87, Birkhäuser, Boston, 1990.

[B-L] S. Bosch, W. Lütkebohmert, *Degenerating abelian varieties*, Topology Vol. 30, no.4, (1991), 653-698. Première partie (version provisoire 1991), Prépublication IRMAR 96-03, Université de Rennes (1996).

[Cl] H. Clemens *Homological equivalence, modulo algebraic equivalence, is not finitely generedet*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math no. 58, (1983), 19-38.

[Co-I] R. Coleman, A. Iovita, *The frobenius and monodromy operators for curves and abelian varieties*, Duke Math. J. Vol. 97, no. 1, (1991), 171-215.

[Ch] A. Chambert-Lior, *Cohomologie Cristalline: un Survol*, Expositiones Mathematicae, 333-382.

[De1] P. Deligne, *Théorie de Hodge: I*, Actes du Congrés International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome I, 425-430, Gauthier-Villars, París, 1971.

[De2] P. Deligne, *Théorie de Hodge: II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. no. 40, (1971), 5-57.

[De3] P. Deligne, *Théorie de Hodge: III*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. no. 44, (1990), 5-78.

[De4] P. Deligne, *La conjecture de Weil: I*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math no. 43, (1974), 273-308.

[De5] P. Deligne, *La conjecture de Weil: II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math no. 52, (1981), 313-428.

[dJ] A. J. de Jong, *Smoothness, semi-stability and alterations*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math no. 83, (1996), 52-96.

[dJ-VP] J. de Jong, M. van der Put *étale cohomology of rigid analytic spaces*, Doc. Math. no. 1, (1996), 1-56.

[FMSS] W. Fulton, R. MacPherson, F. Sottile, B. Sturmfels, *Intersection theory on spherical varieties*, J. Algebraic Geom. 4 (1995), 181-193.

[Fo] J-M. Fontaine, *Le corps des périodes p-adiques, Exposé II*, Périodes p-ádiques (Bures-sur-Yvette, 1998), Astèrisque no. 223, (1994), 59-102.

[Fu] W. Fulton, *Intersection Theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) Band 2, Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg, 1984.

[Ge] L. Gerritzen, *On non-archimedean representations of abelian varieties*, Math. Ann. 196 (1972), 323-346.

[G-N] F. Guillén, V. Navarro-Aznar, *Sur le théorème local des cycles invariants*, Duke Math. J. 61 (1990), 133-155.

[Gou] F. Gouvêa, *p-adic Numbers*, Universitext, Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg, 1993.

[Gr] A. Grothendieck, *Standard conjectures on algebraic cycles*, in Alg. Geom. (Bombay, 1968), Oxford Univ. Press, London 1969, 193-199.

[Gri] P. Griffiths, *On the periods of certain rational integrals I, II*, Ann. of Math.(2) 90 (1969), 460-495; ibid.(2) 90 (1969), 496-541.

[Gre] M. L. Green, *Griffiths' infinitesimal invariant and the Abel-Jacobi map*, J. Differential Geom. 29 (1989), no. 3, 545-555.

[Ha] U. T. Hartl, *Semi-stability and base change*, Arch. Math. 77, (2001), 215-221.

[H-K] O. Hyodo, K. Kato, *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logaritmic poles*, Périodes p-ádiques (Bures-sur-Yvette, 1998), Astérisque no. 223, (1994), 221-266.

[Il1] L. Illusie, *Autour du théoreme de monodromie locale*, Périodes p-ádiques (Bures-sur-Yvette, 1998), Astérisque no. 223, (1994), 9-57.

[Il2] L. Illusie, *An overview of the work of K. Fujiwara, K. Kato and C. Nakayawa on logarithmic etale cohomology*, in Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II, Astérisque no. 279 (2002), 271-322.

[Il3] L. Illusie, *Reduction semi-stable ordinaire, cohomologie étale p-adique et cohomologie de De Rham d'aprés Bloch-Kato [BK] et Hyodo [H]*, Appendice, Périodes p-ádiques (Bures-sur-Yvette, 1998), Astérisque no. 223, (1994), 209-220.

[Ito1] T. Ito, *Weight-Monodromy conjecture over equal characteristic local fields*, preprint 2005 (arXiv:math.NT/0308141).

[Ito2] T. Ito, *Weight-Monodromy conjecture for p-adically uniformized varieties*, preprint 2003 (arXiv:math.NT/0301201).

[Ja1] U. Jannsen, *Motivic sheaves and filtrations on Chow groups*, Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part I, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1994), 245-302.

[Ja2] U. Jannsen, *Mixed Motives and Algebraic K-Theory*, Lectures Notes in Mathematics 1400, Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg, 1980.

[Ku1] K. Künnemann, *Projective regular models for abelian varieties, semistable reduction and the height pairing*, Duke Math. J. 95 no.1 (1996), 161-212.

[Ku2] K. Künnemann, *Algebraic cycles on toric fibrations over abelian varieties.*

[K-T] S. Kleiman, A. Thorup, *Intersection theory and enumerative geometry, a decade in review*, Algebraic Geometry (Bowdoin 1985), Proc. Sympos. Pure. Math. vol. 46, Amer. Mat. Soc., Providence, RI, 1987, 321-370.

[Mi] J.S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[Mo] A. Mokrane, *La suite spectrale des poids en cohomologie de Hyodo-Kato*, Duke Math. J. 72 (1993), 301-337.

[Mu] D. Mumford, *An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings*, Compositio Mathematica, vol. 24, Fasc. 3, (1972), 239-272.

[N-A] F. Guillén, V. Navarro-Aznar, F. Puerta, *HyperrÚsolutions cubiques et descente cohomologique*, Lectures Notes in Mathematics 1335, Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg, 1980.

[Oes] J. Oesterlé, *Dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers De Rham,* Séminaire BOURBAKI, 39ème année, 1986-87, no. 673.

[Pe-R] B. Perrin-Riou, *Représentations p-adiques ordinaires*, Astérisque 223 (1994), 185-207.

[Rap] M. Rapoport, *On the bad reduction of Shimura varieties*, in Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol II (Ann Arbor, MI, 1988), 253-321, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[Ra] M. Raynaud,1-*Motifs et monodromie géométrique,* Astérisque no.223 (1994), 295-319.

[Ro] A. Roitman, *Rational equivalence of zero-dimensional cycles*, (Russian) Mat. Zametki 28 (1980), no. 1, 85-90, 169.

[R-Z] M. Rapoport, T. Zink, *Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik*, Invt. Math. 68 (1982), no. 1, 21-101.

[R-X1] W. Raskind, X. Xarles, *On the étale cohomology of algebraic varieties with totally degenerate reduction over p-adic fields*, preprint 2003.

[R-X2] W. Raskind, X. Xarles, *On p-ádic intermediate Jacobians,* preprint 2003.

[Sa] T. Saito, *Weight spectral sequences and independence of ℓ*, internet notes.

[Se] J.-P. Serre, *Locals Fields,* Graduate Texts in Mathematics 67, Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg, 1979.

[SGA7] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique, I*, dirigé par A. Grothendieck, Lectures Notes in Mathematics 288, Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg, 1972.

[St] J. H. Steenbrink, *Limits of Hodge structures*, Invent. Math. 90 (1987), 11-76.

[T] J. Tate, *Conjectures on algebraic cycles in ℓ-adic cohomology,* Motives (Seattle, WA, 1991) Proc. Sympos. Pure Math. 55 (1994), 71-83.

[Ts] T. Tsuji, *p-ádic étale cohomology and crystalline cohomology in the semistable reduction case*, Invent. Math. 137, 233-411 (1999).

[Va] Y. Varshavsky, *p-adic uniformization of unitary Shimura varieties,* Publ. Math. I.H.E.S. 87 (1998), 57-119.

[V-P] L, Gerritzen, M, van der Put, *Schottky groups and Mumford curves,* Lectures Notes in Mathematics 817, Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg, 1980.