Enumeració d'òrbites de n-conjunts d'espais projectius sota l'acció del grup lineal

Ricard Martí i Miras

En aquesta memòria emprenem un estudi enumeratiu dels n-conjunts racionals d'espais projectius sobre un cos finit k. Atenent a la doble naturalesa dels n-conjunts (racionals punt a punt o globalment) i al fet que admetin o no repeticions dels seus punts, l'objectiu de la memòria és el d'obtenir fórmules explícites per a les següents quatre famílies de nombres:

$$T_N(n) := \left|\mathrm{PGL}_{N+1}(k)\backslash\backslash \binom{\mathbb{P}^N(k)}{n}\right|, \quad \overline{T}_N(n) := \left|\mathrm{PGL}_{N+1}(k)\backslash\backslash \left(\!\!\binom{\mathbb{P}^N(k)}{n}\!\!\right)\right|,$$

$$t_N(n) := \left|\mathrm{PGL}_{N+1}(k)\backslash\backslash \binom{\mathbb{P}^N}{n}(k)\right|, \quad \overline{t}_N(n) := \left|\mathrm{PGL}_{N+1}(k)\backslash\backslash \left(\!\!\binom{\mathbb{P}^N}{n}\!\!\right)(k)\right|,$$

on, en general, donat un conjunt finit X i un grup finit Γ que actua sobre X, denotem per $\Gamma\backslash\backslash X$ el conjunt d'òrbites d'aquesta acció, i

$$\binom{\mathbb{P}^N}{n}(k) := \binom{\mathbb{P}^N(\overline{k})}{n}^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}, \quad \left(\!\!\binom{\mathbb{P}^N}{n}\!\!\right)(k) := \left(\!\!\binom{\mathbb{P}^N(\overline{k})}{n}\!\!\right)^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}.$$

En el capítol 1 de la memòria obtenim fórmules per als $T_2(n)$, $\overline{T}_2(n)$ i d'altres nombres relacionats, que compten el nombre de clases d'isometria de codis de dimensió tres amb certes propietats específiques. Les fórmules es basen en un recompte explícit del nombre de classes de conjugació d'elements de $\mathrm{PGL}_3(k)$ que donen lloc a permutacions de $\mathbb{P}^2(k)$ amb la mateixa descomposició en cicles i són prou mal·leables com per permetre obtenir expressions dels nombres $T_2(n)$, $\overline{T}_2(n)$ com a polinomis en q (on $k = \mathbb{F}_q$) amb coeficients racionals.

En el capítol 2 trobem fórmules explícites per al nombre total de n-conjunts racionals i en el capítol 3 estudiem el nombre d'òrbites sota l'acció del grup lineal. El resultat clau és un càlcul de la funció zeta del quocient d'un espai projectiu per un automorfisme. A partir d'aquest resultat es pot imitar el procediment del capítol 1 per obtenir expressions explícites per als $t_2(n)$, $\overline{t}_2(n)$ com a polinomis en q amb coeficients enters.

Al capítol 4 desenvolupem aquestes idees per a un espai projectiu $\mathbb{P}^N$ de dimensió arbitrària. Els mètodes utilitzats en els capítols anteriors se sintetitzen en la classificació dels elements de $\mathrm{PGL}_{N+1}(k)$ en *subtipus* i en la construcció per a cada subtipus α d'un poset $\mathcal{L}(\alpha)$ amb pesos "dimensió" i "exponent" en cada node V, que permeten considerar un *indicador d'exponents*

$$\mathcal{L}(\mathrm{PGL}_{N+1}, \mathbb{P}^N) := \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} N_\alpha \prod_{V\in\mathcal{L}(\alpha)} z_{\alpha,V} \in \mathbb{Q}[\{z_{\alpha,V}\}],$$

on $\mathcal{T}$ és el conjunt de tots els subtipus possibles i N_α compta el nombre de classes de conjugació de $\mathrm{PGL}_{N+1}(k)$ amb subtipus α fixat. Els posets $\mathcal{L}(\alpha)$ es construeixen a partir de subvarietats lineals γ-invariants *pròpies*, on $\gamma \in \mathrm{PGL}_{N+1}(k)$ és qualsevol automorfisme amb subtipus α. A partir d'aquest indicador d'exponents obtenim

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} T_N(n)x^n = \mathcal{L}(\mathrm{PGL}_{N+1},\mathbb{P}^N)_{|_{z_{\alpha,V}=h_{\alpha,V}(x)}},$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{T}_N(n)x^n = \mathcal{L}(\mathrm{PGL}_{N+1},\mathbb{P}^N)_{|_{z_{\alpha,V}=\overline{h}_{\alpha,V}(x)}},$$

per a funcions $h_{\alpha,V}(x)$, $\overline{h}_{\alpha,V}(x)$, que donem explícitament.

Considerem després una distribució anàloga dels elements de $\mathrm{PGL}_{N+1}(k)$ en *G-subtipus* (la G fa referència a Galois), i per a cada G-subtipus α construim un poset $\mathcal{L}_G(\alpha)$ amb pesos "dimensió", "exponent" i "grau" en cada node V, que permeten considerar un *G-indicador d'exponents*

$$\mathcal{L}_G(\mathrm{PGL}_{N+1},\mathbb{P}^N) := \sum_{\alpha\in\mathcal{T}_G} N_{G,\alpha} \prod_{V\in\mathcal{L}_G(\alpha)} z_{\alpha,V} \in \mathbb{Q}[\{z_{\alpha,V}\}],$$

on $\mathcal{T}_G$ és el conjunt de tots els G-subtipus possibles i $N_{G,\alpha}$ compta el nombre de classes de conjugació de $\mathrm{PGL}_{N+1}(k)$ amb G-subtipus α fixat. A partir d'aquest G-indicador d'exponents podem obtenir com en el cas anterior una còmput explícit de la funció generadora dels $t_N(n)$ i $\overline{t}_N(n)$.

Per poder pensar que aquestes fòrmules són plenament satisfactòries des del punt de vista combinatori calen dues coses. En primer lloc cal obtenir una descripció intrínseca dels conjunts $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_G$ i dels posets $\mathcal{L}(\alpha)$, $\mathcal{L}_G(\alpha)$, en termes de dades combinatòries independents de l'estructura de grup de $\mathrm{PGL}_{N+1}(k)$; aquesta tasca s'acompleix al capítol 4. Finalment, cal disposar també de fórmules explícites per als coeficients universals N_α, $N_{G,\alpha}$; aquesta tasca, que s'ha dut a terme en els capítols 1, 2 i 3 en el cas del pla projectiu, adquireix una gran complexitat en dimensions més grans i aquest càlcul ha quedat finalment fora de l'abast d'aquesta memòria.

Enumeration of orbits of n-sets of projective spaces under the action of the linear group

Ricard Martí i Miras

In this memoir we enumerate rational n-sets of projective spaces over a finite field k. According to the n-sets being pointwise or globally rational and to the fact that they admit repetitions or not, the aim of the thesis is to obtain explicit formulas for the following four families of numbers:

$$T_N(n) := \left|\mathrm{PGL}_{N+1}(k)\backslash\backslash \binom{\mathbb{P}^N(k)}{n}\right|, \quad \overline{T}_N(n) := \left|\mathrm{PGL}_{N+1}(k)\backslash\backslash \left(\!\!\binom{\mathbb{P}^N(k)}{n}\!\!\right)\right|,$$

$$t_N(n) := \left|\mathrm{PGL}_{N+1}(k)\backslash\backslash \binom{\mathbb{P}^N}{n}(k)\right|, \quad \bar{t}_N(n) := \left|\mathrm{PGL}_{N+1}(k)\backslash\backslash \left(\!\!\binom{\mathbb{P}^N}{n}\!\!\right)(k)\right|,$$

where, in general, given a finite set X and a finite group Γ acting over X, we denote by $\Gamma\backslash\backslash X$ the set of orbits under this action, and

$$\binom{\mathbb{P}^N}{n}(k) := \binom{\mathbb{P}^N(\bar{k})}{n}^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}, \quad \left(\!\!\binom{\mathbb{P}^N}{n}\!\!\right)(k) := \left(\!\!\binom{\mathbb{P}^N(\bar{k})}{n}\!\!\right)^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}.$$

In chapter 1 we get formulas for $T_2(n)$, $\overline{T}_2(n)$ and other related numbers counting the number of isometry classes of codes of dimension three with certain properties. The formulas are based on an explicit counting of the number of conjugacy classes of elements of $\mathrm{PGL}_3(k)$ providing a permutation of $\mathbb{P}^2(k)$ with the same cycle decomposition and they are malleable enough to provide expressions of the numbers $T_2(n)$, $\overline{T}_2(n)$ as polynomials in q (where $k = \mathbb{F}_q$) with rational coefficients.

In chapter 2 we find explicit formulas for the total number of rational n-sets and in chapter 3 we study the number of orbits under the action of the linear group. The crucial result is a computation of the zeta function of the quotient of a projective space by an automorphism. From this result one cam mimic the procedure of chapter 1 to obtain explicit expressions for $t_2(n)$, $\bar{t}_2(n)$ as polynomials in q with integer coefficients.

In chapter 4 we develop these ideas for a projective space $\mathbb{P}^N$ of arbitrary dimension. The methods of the previous chapters are synthesized in the classification of elements of $\mathrm{PGL}_{N+1}(k)$ in *subtypes* and in the construction for any subtype α of a poset $\mathcal{L}(\alpha)$ with weights "dimension" and "exponent" at each node V, that furnish an *exponent index*

$$\mathcal{L}(\mathrm{PGL}_{N+1}, \mathbb{P}^N) := \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} N_\alpha \prod_{V\in\mathcal{L}(\alpha)} z_{\alpha,V} \in \mathbb{Q}[\{z_{\alpha,V}\}],$$

where $\mathcal{T}$ is the set of all possible subtypes and N_α counts the number of conjugacy classes of $\mathrm{PGL}_{N+1}(k)$ with prefixed subtype α. The posets $\mathcal{L}(\alpha)$ are constructed from *proper* γ-invariants linear subvarieties, where $\gamma \in \mathrm{PGL}_{N+1}(k)$ is an automorphism with subtype α. From this exponent index we obtain

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} T_N(n)x^n = \mathcal{L}(\mathrm{PGL}_{N+1},\mathbb{P}^N)_{|_{z_{\alpha,V}=h_{\alpha,V}(x)}},$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{T}_N(n)x^n = \mathcal{L}(\mathrm{PGL}_{N+1},\mathbb{P}^N)_{|_{z_{\alpha,V}=\overline{h}_{\alpha,V}(x)}},$$

for functions $h_{\alpha,V}(x)$, $\overline{h}_{\alpha,V}(x)$, explicitly given.

We consider then an analogous distribution of elements of $\mathrm{PGL}_{N+1}(k)$ in G-*subtypes* (G stands for Galois), and for each G-subtype α we construct a poset $\mathcal{L}_G(\alpha)$ with weights "dimension", "exponent" and "degree" at each node V, furnishing a G-*exponent index*

$$\mathcal{L}_G(\mathrm{PGL}_{N+1},\mathbb{P}^N) := \sum_{\alpha\in\mathcal{T}_G} N_{G,\alpha} \prod_{V\in\mathcal{L}_G(\alpha)} z_{\alpha,V} \in \mathbb{Q}[\{z_{\alpha,V}\}],$$

where $\mathcal{T}_G$ is the set of all possible G-subtypes and $N_{G,\alpha}$ counts the number of conjugacy classes of $\mathrm{PGL}_{N+1}(k)$ with prefixed G-subtype α. From this G-exponent index we obtain as in the former case an explicit computation of the generating function of $t_N(n)$ and $\overline{t}_N(n)$.

Two things are necessary in order to consider that these formulas are satisfactory from the combinatorial point of view. First, we need an intrinsic description of the sets $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_G$ and the posets $\mathcal{L}(\alpha)$, $\mathcal{L}_G(\alpha)$, in terms of combinatorial data, that are independent of the group structure of $\mathrm{PGL}_{N+1}(k)$; this is accomplished in chapter 4. Finally, we need explicit formulas for the universal coefficients N_α, $N_{G,\alpha}$; this has been carried out in chapters 1, 2 i 3 for the projective plane, but it is very hard to extend these computations to higher dimensions and this has been finally excluded from the aims of the memoir.