Conjuntos focales en variedades Riemann de curvatura acotada

Resumen

El punto de partida de esta tesis es la siguiente desigualdad:
Sea $N = \partial\Omega$ la frontera de un dominio convexo Ω en $\mathbb{R}^2$ de area F. Entonces

$$\int_N \frac{1}{k(s)} ds \geq 2F, \tag{1}$$

donde ds significa la medida de longitud de arco sobre N, y $k = k(s) > 0$ es la curvatura de N en el punto de parámetro s. La igualdad se da si y sólo si N es una circunferencia. Mirar, por ejemplo, [Esc96].

En esta tesis damos una prueba más corta de la fórmula (1), la cual tiene una ventaja que nos da la interpretación geométrica de esta diferencia $2F - \int_N k^{-1} ds$. Precisamente demostramos:

$$\int_N \frac{1}{k} ds = 2(F - F_e), \tag{2}$$

donde $F_e(\leq 0)$ es el área (algebraica) del dominio acotado por la evoluta de N, ([RE]).

La fórmula (1) es el análogo 2-dimensional de la desigualdad de Heintze y Karcher:

$$\int_S \frac{1}{H} dA \geq 3V,$$

donde H es la curvatura media de una superficie S encajada compacta en $\mathbb{R}^3$ que acotada un dominio de volumen V. Asumimos que $H > 0$. La igualdad se da si y sólo si S es una esfera, [Ros88].

En esta tesis también generalizamos la igualdad (2) a una variedad riemanniana 2-dimensional, completa, simplemente conexa y de curvatura constante c que la denotamos por $\mathbb{X}_c^2$. Es decir la esfera $\mathbb{S}_c^2$ de radio $R = \frac{1}{\sqrt{c}}$ para $c > 0$, o el plano hiperbólico $\mathbb{H}_c^2$ para $c < 0$ (la esfera de radio imaginario $Ri = \frac{1}{\sqrt{c}}$). Asumimos que $\mathbb{X}_c^2$ esta orientada.

Usando técnicas como en [GRST05] obtuvimos el siguiente resultado el cual coincide para $c = 0$, con la fórmula (2).

Teorema 0.1 *Sea Ω un conjunto fuertemente convexo en $\mathbb{X}_c^2$, si $c \geq 0$, o fuertemente h-convexo si $c < 0$, con frontera regular suave. $N = \partial\Omega$. Entonces*

$$\int_N \tan_c(\frac{\rho(s)}{2})ds = F - F_e,$$

donde ds significa la medida de longitud de arco de N, F es el área de Ω y F_e es el área (algebraica) encerrada por el conjunto focal $F(N)$ de N.

Por último generalizamos la desigualdad de Heintze y Karcher y su análogo a una variedad riemanniana de curvatura arbitraria acotada por abajo.

Referencias

[Esc96] C.A. Escudero, *Curvatura en un poligono y teorema de Ros para curvas planas*, Universidad del Valle, Colombia (1996), Tesis.

[GRST05] E. Gallego, A. Reventos, G. Solanes, and E. Teufel, *Width of convex bodies in spaces of constant curvature*, Preprint 34 Departament de mathemàtiques, UAB (2005), 1–15.

[RE] A. Reventós and C.A. Escudero, *An interesting property of the evolute*, Accepted for publication,The American Mathematical Monthly.

[Ros88] A. Ros, *Compact hypersufaces with constant scalar curvature and congruence theorem*, J. of Diff. Geom. **27** (1988), 215–220.

Focal sets in manifolds of Riemann of bounded curvature

Abstract

The starting point of this thesis is the following inequality. Let $N = \partial\Omega$ be the boundary of a compact convex domain Ω in $\mathbb{R}^2$ of area F. Then

$$\int_N \frac{1}{k(s)} ds \geq 2F, \tag{1}$$

where ds signifies arclength measure on N, and $k = k(s) > 0$ is the curvature of N at the point of parameter s. Equality holds if and only if N is a circle. See, for instance, [Esc96].

In this thesis we give a very short new proof of (1), which has the advantage of providing a geometric interpretation of the difference $2F - \int_N k^{-1} ds$. To be precise, we prove that

$$\int_N \frac{1}{k} ds = 2(F - F_e), \tag{2}$$

where $F_e(\leq 0)$ is the (algebraic) area of the domain bounded by the evolute of N ([RE]).

Formula (1) is the 2-dimensional analogue of Heintze and Karcher's inequality:

$$\int_S \frac{1}{H} dA \geq 3V,$$

where H is the mean curvature of a compact embedded surface S in $\mathbb{R}^3$ bounding a domain of volume V. It is assumed that $H > 0$. Equality holds if and only if S is a standard sphere, [Ros88].

In this thesis also we generalize the equality (2) to $\mathbb{X}^2_c$ the 2-dimensional complete and simply connected riemannian manifold of constant curvature c, i.e. the sphere $\mathbb{S}^2_c$ of radius $R = \frac{1}{\sqrt{c}}$ for $c > 0$, or the hyperbolic plane $\mathbb{H}^2_c$ for $c < 0$ (the imaginary sphere of radius $Ri = \frac{1}{\sqrt{c}}$). We shall assume $\mathbb{X}^2_c$ oriented.

Using the same techniques as in [GRST05] we obtain the following result, which coincides, for $c = 0$, with formula (2).

Theorem 0.1 *Let Ω be a strongly convex set in $\mathbb{X}_c^2$, if $c \geq 0$, or strongly h-convex set if $c < 0$, with smooth regular boundary $N = \partial\Omega$. Then*

$$\int_N \tan_c(\frac{\rho(s)}{2})ds = F - F_e,$$

where ds signifies arclength measure on N, F is the area of Ω and F_e is the (algebraic) area enclosed by the focal set $F(N)$ of N.

Heintze and Karcher's inequality and his analogue also we generalized to space arbitrary curvature bounded by down.

References

[Esc96] C.A. Escudero, *Curvatura en un poligono y teorema de Ros para curvas planas*, Universidad del Valle, Colombia (1996), Tesis.

[GRST05] E. Gallego, A. Reventos, G. Solanes, and E. Teufel, *Width of convex bodies in spaces of constant curvature*, Preprint 34 Departament de mathemàtiques, UAB (2005), 1–15.

[RE] A. Reventós and C.A. Escudero, *An interesting property of the evolute*, Accepted for publication,The American Mathematical Monthly.

[Ros88] A. Ros, *Compact hypersufaces with constant scalar curvature and congruence theorem*, J. of Diff. Geom. **27** (1988), 215–220.