# Singularitats evitables per a funcions quasiregulars del pla

**Albert Clop**

Sigui $\Omega$ un obert del pla. Un coeficient de Beltrami a $\Omega$ és una funció $\mu \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\|\mu\|_\infty < 1$. Una funció $f : \Omega \to \mathbb{C}$ és $\mu$-quasiregular a $\Omega$ si i només si $f \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ i, a més, satisfà l'equació de Beltrami,

$$\overline{\partial} f(z) = \mu(z)\, \partial f(z)$$

a quasi tot punt $z \in \Omega$. Diem que $f$ és $K$-quasiregular si és $\mu$-quasiregular per alguna $\mu$ amb $\|\mu\|_\infty \leq \frac{K-1}{K+1}$.

En aquest treball, estudiem problemes d'evitabilitat per a funcions quasiregulars, amb respecte diferents normes. Ho fem des de dos punts de vista. Per una banda, fixem la constant de distorsió $K$. Per l'altra, precisem una mica més i enunciem els nostres resultats en termes del coeficient de Beltrami $\mu$. A la vista dels resultats, la situació en els dos casos és diferent.

Comencem estudiant el problema d'evitabilitat per a funcions $K$-quasiregulars i acotades. Propietats bàsiques de les funcions quasiregulars del pla permeten traslladar aquesta qüestió a un problema de distorsió quasiconforme. En aquest sentit, K. Astala demostra que si $\phi$ és $K$-quasiconforme, llavors

$$\dim(E) = t \qquad \Rightarrow \qquad \dim(\phi(E)) \leq \frac{2Kt}{2+(K-1)t}$$

El nostre primer resultat és el següent.

**Teorema 1.** *Si* $\mathcal{H}^{\frac{2}{K+1}}(E) = 0$ *aleshores* $\mathcal{H}^1(\phi(E)) = 0$.

Les conseqüències d'aquest fet a efectes d'evitabilitat, però, ja eren conegudes. Malgrat això, hem pogut demostrar un resultat anàleg per a conjunts de mesura $\sigma$-finita. Aquest fet, juntament amb el coneixement de la distorsió quasiconforme dels conjunts rectificables, ens permet obtenir el resultat següent.

**Teorema 2.** *Si* $K > 1$ *i* $E$ *és un compacte amb mesura de Hausdorff* $\mathcal{H}^{\frac{2}{K+1}}(E)$ $\sigma$*-finita, aleshores* $E$ *és evitable per a les funcions* $K$*-quasiregulars i acotades.*

Cal remarcar que aquest resultat és fals quan $K = 1$. En la direcció contrària, també obtenim resultats significatius.

**Teorema 3.** *Si* $K > 1$*, existeixen conjunts* $E$ *amb dimensió* $\dim(E) = \frac{2}{K+1}$*, no evitables per a les funcions* $K$*-quasiregulars i acotades.*

Amb respecte la norma $\mathrm{Lip}_\alpha$ de les funcions $\alpha$-Hölder contínues, també obtenim resultats d'evitabilitat, que són òptims a efectes de dimensió.

**Teorema 4.** *Siguin* $K > 1$ *i* $0 < \alpha < 1$*, i denotem* $d = \frac{2}{K+1}(1+\alpha K)$*. Si* $\mathcal{H}^d(E) = 0$*, aleshores* $E$ *és evitable per a les funcions* $K$*-quasiregulars i* $\alpha$*-Hölder contínues. Més encara, l'índex* $d$ *és òptim.*

En les dues situacions, la construcció de conjunts no evitables passa per exemples explícits de distorsió $K$-quasiconforme extremal.

Posteriorment, ens plantegem qüestions de distorsió per a aplicacions quasiconformes amb un coeficient de Beltrami concret. Més precisament, ens interessem per saber com afecta la regularitat del coeficient de Beltrami $\mu$ a la manera com les aplicacions $\mu$-quasiconformes distorsionen quantitats, com ara la dimensió de Hausdorff, la longitud o la capacitat analítica. La conclusió principal és que, si $\mu$ és un coeficient de Beltrami amb suport compacte i de l'espai de Sobolev $W^{1,2}$, aleshores els problemes d'evitabilitat i de distorsió corresponents no estan tan lluny del cas analític com hom podria pensar a priori. El principal resultat en aquest sentit és el següent.

**Teorema 5.** *Sigui $\mu$ un coeficient de Beltrami amb suport compacte, i de l'espai de Sobolev $W^{1,2}$. Sigui $E$ un compacte de longitud $\sigma$-finita. Aleshores, $E$ és evitable per a les funcions $\mu$-quasiregulars i acotades si i només si $\gamma(E) = 0$.*

Remarquem que les aplicacions quasiconformes en les hipòtesis del Teorema anterior no són en general bilipschitzianes.

# Removable singularities for planar quasiregular mappings

**Albert Clop**

Let $\Omega$ be an open set on the plane. A Beltrami coefficient in $\Omega$ is a function $\mu \in L^\infty(\Omega)$ such that $\|\mu\|_\infty < 1$. A function $f : \Omega \to \mathbb{C}$ is $\mu$-quasiregular on $\Omega$ if and only if $f \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ and satisfies the Beltrami equation,

$$\overline{\partial} f(z) = \mu(z)\, \partial f(z)$$

at almost every $z \in \Omega$. We say that $f$ is $K$-quasiregular if it is $\mu$-quasiregular for some $\mu$ with $\|\mu\|_\infty \leq \frac{K-1}{K+1}$.

In this work, we study removability problems for quasiregular mappings, with respect to different norms. We do this from two points of view. On one hand, we fix the distortion constant $K$. On the other hand, we are more precise and state our results in terms of the Beltrami coefficient $\mu$. As we will see, the situation in both cases is different.

We start by studying the removability problem for bounded $K$-quasiregular mappings. Basic properties of planar quasiregular mappings allow us to translate this question to a problem on quasiconformal distortion. In this sense, K. Astala proves that if $\phi$ is any $K$-quasiconformal mapping, then

$$\dim(E) = t \qquad \Rightarrow \qquad \dim(\phi(E)) \leq \frac{2Kt}{2 + (K-1)t}$$

Our first result is the following.

**Theorem 1.** *If* $\mathcal{H}^{\frac{2}{K+1}}(E) = 0$ *then* $\mathcal{H}^1(\phi(E)) = 0$.

The consequences of this fact in the bounded removability problem where already known. However, we have been able to prove an analogous result for $\sigma$-finite measure sets. This fact, together with the improved behavior of quasiconformal mappings on rectifiable sets, drive us to the following Theorem.

**Theorem 2.** *If $K > 1$ and $E$ is a compact set with $\sigma$-finite Hausdorff measure $\mathcal{H}^{\frac{2}{K+1}}(E)$, then $E$ is removable for bounded $K$-quasiregular mappings.*

We must remark here that this result is false when $K = 1$. In the converse direction, we have also obtained significant results.

**Theorem 3.** *If $K > 1$, there exist compact sets $E$ with dimension* $\dim(E) = \frac{2}{K+1}$, *non removable for bounded $K$-quasiregular mappings.*

With respect to the $\mathrm{Lip}_\alpha$ norm of $\alpha$-Hölder continuous functions, we also obtain some removability results, which are sharp in terms of dimension.

**Theorem 4.** *Let $K > 1$ and $0 < \alpha < 1$, and put $d = \frac{2}{K+1}(1 + \alpha K)$. If $\mathcal{H}^d(E) = 0$, then $E$ is removable for $\alpha$-Hölder continuous $K$-quasiregular mappings. Furthermore, the index $d$ is sharp.*

In both situations, the construction of non removable sets comes from precise examples of extremal $K$-quasiconformal distortion.

We also think about questions on distortion under quasiconformal mappings with a fixed Beltrami coefficient. More precisely, we investigate if the regularity of the Beltrami coefficient $\mu$ may affect in some way the quasiconformal distortion of quantities as Hausdorff dimension, length or analytic capacity. The main conclusion is that, if $\mu$ is a compactly supported Beltrami coefficient in the Sobolev space $W^{1,2}$, then the corresponding removability and distortion problems are not so far from the analytic setting as could be expected. The principal result in this sense is the following one.

**Theorem 5.** *Let $\mu$ be a compactly supported Beltrami coefficient in the space $W^{1,2}$. Let $E$ be a compact set, with $\sigma$-finite length. Then, $E$ is removable for bounded $\mu$-quasiregular mappings if and only if $\gamma(E) = 0$.*

We wish to remark here that there are quasiconformal mappings in the above hypotheses, being not even Lipschitz continuous.