UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LA MATEMÀTICA
I DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS

Competencias de modelización y argumentación en interpretación de gráficas funcionales: propuesta de un modelo de competencia aplicado a un estudio de caso

Tesis Doctoral

Autor
Horacio Solar Bezmalinovic

Directores
Carmen Azcárate Giménez
Jordi Deulofeu Piquet

Bellaterra, Noviembre 2009

Esta investigación ha sido posible gracias a la Beca Presidente de la República, Gobierno de Chile; y desarrollado en el marco del grupo de investigación consolidado de la Generalitat de Catalunya "Educació i competencia matemática" PREMAT 2009 SGR 364.

A los estudiantes y a la profesora "Valentina",
quienes han sido una gran inspiración.

Agradecimientos

Escribo estas palabras, y van apareciendo aquellas personas que han estado presentes en estos seis años en Barcelona, vínculos, que entre todos, cada uno a su estilo, me apoyaron en esta gran empresa resumida en la memoria de tesis. Quiero agradecer a cada una de estas personas.

A mi hermana Valeria por animarme a iniciar el viaje.

A mi madre Carmen por darme fuerzas de cruzar el charco sobrepasando mis inquietudes.

A Federico, Javi, Fer, Mauricio, Magu y Caty por todos estos años de creciente amistad

A Jaume Aymar por sus enseñanzas, aprendí mucho de ti de cómo visualizar la vida, y a Agustín Viñas por darme esa confianza en un momento crucial.

A Francisco Rojas por ser paciente y apoyarme desde muchos aspectos. Tu sabes también como yo que las coincidencias no son fortuitas. Tantas historias que llevamos juntos, las que se están construyendo, y las que vendrán... esto acaba de comenzar.

A mi directora Carmen Azcárate por jugársela por mí, en estos tres años de tesis me has cultivado tanto en lo académico como en la academia. Además de haber sido una excelente directora de tesis, has sido una gran formadora.

A mi director Jordi Deulofeu por arriesgarse conmigo en este largo camino de indagar en las competencias matemáticas. Paciencia has tenido para llevar mis ideas espontaneas y rústicas en un trabajo de investigación. Además de haber sido un excelente director de tesis, has sido un gran profesor.

A la "saleta" por ser un espacio de trabajo que ha permitido formar muy buenos vínculos: a Natasha y su alegría, Marta y sus consejos, Carlos y su compañía, Carolina por el tiempo compartido, Teresa y su disponibilidad, Cristian por todo este tiempo, y a todos los que están activamente formando equipo; y a los que han pasado: José Omar, Patricia, Luis, Abraham. Con todos ustedes muy buenos recuerdos.

To Michiel Doorman, my adviser in the Freudenthal Intitute, for theoretical contributions, the dedicated time and the patience with my beginner's English.

A Martin Kindt por el cálido recibimiento en el Instituto Freudenthal.

A Lorena Espinoza que además de permitirme desarrollar la investigación en el grupo Felix Klein, ha impulsado el desarrollo de las competencias matemáticas en el currículo de matemáticas en Chile. Y a los demás integrantes del equipo: Kim, Dinko, Enrique, Daniela, Fanny, Ramón, Alfredo, por aceptarme todo ese tiempo en el grupo, aprendí mucho en su compañía

A los profesores de matemáticas en Chile que participaron en la investigación, y especialmente a la profesora "Valentina" -tu seudónimo en la investigación-, tus prácticas han permitido llevar a cabo esta investigación.

A Mario Quintanilla, mi profesor en Chile y colega, quien siempre me ha apoyado en todos estos años.

Y… a Ainoa, mi compañera, por estar ahí siempre. Tú que has pasado horas compartiendo conmigo este proyecto Tú que me entiendes y me apoyas cada día. Gracias por tu entrega.

Barcelona, noviembre 2009

Tabla de contenido

Introducción

El enfoque por competencias en educación, tanto en ámbito de la enseñanza obligatoria como en el universitario representa un verdadero hito referente en la reformulación de los currículos en todos los niveles.

Este vuelco hacia las competencias en la educación ha tenido como efecto la aparición de propuestas de diversa índole, desde publicaciones que presentan un panorama sobre las competencias y su inserción en la educación hasta propuestas que interpretan las competencias desde algún enfoque ya conocido. Pese a ello, aun no hay consenso sobre cuáles son las características de un currículo por competencias, y sobre todo, existe una carencia de experiencias cuyo objetivo sea indagar sobre el desarrollo de las competencias en el aula.

En el ámbito de la educación matemática las competencias también son protagonistas y presentan inquietudes similares; se han descrito estudios cuyo foco ha consistido en el desarrollo de competencias matemáticas; se han elaborado pruebas de competencias básicas uno de cuyos objetivos es evaluar competencias matemáticas en los estudiantes; se han celebrado jornadas de profesores de matemáticas cuyo tema central son las competencias; y se están desarrollando proyectos editoriales que pretenden plasmar en libros de texto de matemáticas el enfoque por competencias. Por contraparte, entre el profesorado existe una sensación de carencia de herramientas para desarrollar competencias en el aula. En España, el marco curricular indica las directrices sobre cómo se desarrollan las competencias matemáticas y son los centros escolares los que tienen que concretar el currículo planificando unidades didácticas para el desarrollo de dichas competencias.

Ante esta realidad, es muy complejo para el profesor de matemáticas dar respuestas a las preguntas que emergen en la planificación: ¿qué competencias matemáticas se desarrollan? ¿cómo relacionarlas con los contenidos? ¿cuál es su relación con las expectativas de aprendizaje… y con los contenidos matemáticos?

Estas preguntas representan un nuevo desafío para los agentes educativos, que además de ser tratadas por los profesores mediante la reflexión sobre sus prácticas, también son importante abordarlas desde la investigación en Didáctica de las Matemáticas.

Sorprende que exista un desequilibrio entre la abundancia de innovaciones sobre competencias matemáticas, y la carencia de investigaciones empíricas que las estudien desde la perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas. Por ejemplo, en el nuevo currículo obligatorio de España basado en las competencias, las orientaciones curriculares sobre las competencias matemáticas reorientan el discurso de la educación escolar obligatoria. El enfoque por competencias proporciona fundamentación a las características esperadas a desarrollar por un estudiante a lo largo de período escolar: ser capaz de poner en práctica los conocimientos matemáticos en una variedad de escenarios, ser un ciudadano que interpreta la información a su alrededor utilizando herramientas matemáticas, ser capaz de tener un juicio crítico ante los datos matemáticos a su alrededor, y de expresarse verbalmente utilizando el lenguaje matemático. Estos aspectos dirigidos al desarrollo de competencias matemáticas se asocian a la perspectiva funcional del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Si bien hay consenso en potenciar una perspectiva funcional del aprendizaje. El problema surge cuando, se plantea la pregunta: ¿cuáles son las competencias matemáticas que nos permiten desarrollar estas características?

En síntesis, el currículo actual en España propone las orientaciones a seguir en la enseñanza de las matemáticas, pero faltan experiencias e investigaciones que muestren la manera de ponerlo en la práctica.

El trabajo de investigación que se presenta elabora una propuesta que intenta responder a ciertas preguntas en torno a las competencias matemáticas y su puesta en escena en el aula de matemáticas. Para tal propósito desarrolla un modelo de competencia matemática sustentado en los resultados de un estudio experimental, que tiene un carácter de innovación y que sirve al profesor de matemáticas tanto en la planificación de una secuencia didáctica como en sus prácticas en el aula de matemáticas.

Podemos decir que hay un “mar de referencias” relacionadas con las competencias, pero las que dieron luz al enfoque por competencias del currículo tienen su origen en el proyecto DeSeCo (OCDE, 2005; Ryche y Salganik, 2006) que concretó las competencias claves, y que sirvieron de sustento para la elaboración de las competencias básicas en el nuevo currículo obligatorio de España (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006).

En particular, destacamos tres proyectos que implementan el enfoque por competencias en la matemática escolar y que para nosotros son significativos y reflejan el camino recorrido: Paulo Abrantes, quien propone una caracterización de competencias matemáticas en Portugal (Abrantes, 2001); el proyecto KOM, conducido por Mogen Niss, en que se incorporan competencias matemáticas al currículum danés (Niss, 2001); y el marco teórico de PISA 2003 que adapta las competencias propuestas por Niss (1999) a un enfoque evaluativo (OCDE, 2003). En nuestra investigación se ha considerando el listado de competencias matemáticas de los tres proyectos, que convergen en la noción de proceso matemático. Por otra parte, tomando como referencia las competencias claves propuestas por DeSeCo y las competencias básicas en España, se aprecia que estas competencias son transversales y se desarrollan a lo largo de la etapa escolar; asimismo, los procesos matemáticos también comparten la característica de ser transversales a los núcleos temáticos y repetirse en cada nivel educativo. Por tanto, un enfoque por competencias es coherente con una estructura curricular que destaque los procesos matemáticos.

El modelo de competencia matemática se ha elaborado a partir del tópico matemático de interpretación de gráficas ya que partimos de la base de que las competencias matemáticas no son independientes de los contenidos matemáticos. En nuestra propuesta los contenidos son formulados en términos de tareas matemáticas, entendidas como los propósitos matemáticos de una actividad y que son parte del contenido a tratar; éstas cambian de una secuencia didáctica a otra y se desarrollan a corto plazo.

Hemos considerado dos organizadores del currículum que destacan en la interpretación de gráficas funcionales, la modelización y la argumentación, que consideraremos como competencias. En la interpretación de gráficas se introduce la noción de función, en la cual se desarrolla el modelo de dependencia de variables y la gráfica como una expresión del modelo, lo cual justifica la importancia de la modelización en este tópico matemático. Por otra parte, la argumentación se destaca como uno de los aspectos más importantes en la interpretación de gráficas; la acción de interpretar implica la generación de argumentaciones por parte del estudiante, y por tanto se ha considerado una competencia relevante.

La modelización y la argumentación son competencias que se caracterizan por procesos que las conforman. Estos procesos no están caracterizados por la literatura: se han definido fases de modelización y estructuras argumentativas pero no en términos de procesos. Por tanto interesa determinar qué procesos conforman cada competencia.

Por otro parte, nos interesa indagar de qué manera se progresa en una competencia matemática y cuáles son las variables que inciden en dicho progreso. En el modelo de competencia matemática el progreso se estudia por el nivel de complejidad de la actividad, sustentado en la pirámide de de Lange (1995). Nuestra propuesta pretende encontrar una manera de determinar el nivel de complejidad en función de las tareas y los procesos.

Para estudiar los procesos es necesario centrarse en el aula de matemática donde se produce la interacción entre profesor y estudiantes, porque en ella se negocian los significados y se comparte la construcción de los mismos. En consecuencia, nos interesa describir la interacción en el aula de matemáticas en relación con el desarrollo de competencias. En particular, caracterizar patrones de interacción en función de los procesos de cada competencia estudiada, así como relacionar los patrones con el nivel de complejidad de las actividades presentadas en el aula.

Esta memoria se ha organizado en cinco capítulos con la siguiente estructura: en el primer capítulo se muestran los antecedentes sobre las competencias matemáticas y la importancia de llevar a cabo un estudio experimental que investigue su desarrollo en el aula de matemáticas, este escenario justifica la elaboración de un modelo de competencia matemática, objetivo principal de la investigación, que se desarrolla en cuatro objetivos específicos: definir un modelo, caracterizar las competencias de modelización y argumentación, caracterizar la relación entre tareas procesos y niveles de complejidad y describir los patrones de interacciones en función de los procesos.

En el segundo capítulo, se presentan las perspectivas teóricas para llevar a cabo la investigación. Se describe cómo se ha originado la noción de competencia en el currículo a partir del proyecto DeSeCO (OCDE, 2005; Ryche y Salganik, 2006). En particular, se describen los tres proyectos más destacados en torno a las competencias matemáticas (Abrantes, 2001; Niss, 1999; OCDE, 2003). A su vez, se identifican diferentes significados del término competencia matemática (Rico, 2007), para justificar que el significado más apropiado es que las competencias se asocian a los procesos matemáticos.

A partir de la revisión bibliográfica, se pone de manifiesto que no hay un modelo consolidado de competencia matemática en un nivel de concreción que permita tanto planificar como estudiar el aula desde la noción de competencia.

A partir de esto, se presenta el modelo de competencia matemática que describe los componentes de una competencia: los procesos que la conforman, las tareas matemáticas y el nivel de complejidad que identifica el progreso de la competencia.

Un vez presentado el modelo teórico, se pasa al estudio de un tópico matemático concreto, la interpretación de gráficas funcionales, centrado en caracterizar las tareas de interpretación, para luego dar paso a estudiar cada uno de los componentes del modelo de competencia matemática: tareas, procesos y niveles de complejidad. Además se hace una propuesta de cuáles son las funciones del contexto en un marco por competencia matemáticas. Finalmente a través de ejemplos de actividades se discute la incorporación de los procesos en la identificación del nivel de complejidad.

Por otra parte, se estudian los patrones de interacción en el aula de matemáticas adaptando los trabajos de Mortimer y Scott (2002), Weed (1995) y Voigt (1998).

Finalmente se ha estudiado la modelización, destacando las fases de modelización de Maaß (2006), los trabajos de de Lange (1987) quien trata la modelización en términos de matematización, y los trabajos de Gravemeijer (1999) sobre modelización emergente. Estos antecedentes han constituido el soporte para caracterizar la competencia de modelización.

Del mismo modo se ha indagado en la argumentación matemática; se describe el modelo de Toulmin (1958) de argumentación y la adaptación de Krummehuer (1995) para las matemáticas, utilizada por la mayoría de autores que han estudiado la argumentación en matemáticas (Stephan y Rasmussen, 2002; Whitneack y Knipping, 2002; Yackel, 2002; Rasmussen et al. 2004; Pedemonte, 2005).

En el tercer capítulo se presenta la metodología de la investigación. Se desarrolló un estudio experimental, en Santiago de Chile. Se estudió el caso de la clase de Valentina, profesora de un curso 8º básico (14 y 15 años) quien aplicó una unidad didáctica denominada “Analizando y construyendo gráficos”. Se siguió el transcurso de la aplicación de la unidad didáctica con una estrategia de observación no participante. La estrategia de análisis consistió en caracterizar los componentes del modelo de competencias, especialmente los procesos matemáticos que surgen de los episodios de clase por medio de una metodología inductiva.

El cuarto capítulo presenta el análisis de datos compuesto por dos tipos de análisis, uno sobre la unidad didáctica y otro sobre el aula de matemáticas. En la unidad didáctica se identificaron las tareas matemáticas y se determinaron *a priori* los niveles de complejidad para cada competencia en las actividades.

El análisis del aula de matemáticas se desarrolló en dos etapas. La primera etapa tuvo como propósito caracterizar los procesos matemáticos. A través de una estrategia de comparación constante, se ha obtenido una listado de procesos para cada competencia. Estos procesos matemáticos han pasado por una fase de validación que ha consistido en aplicar criterios de coherencia y significancia según la competencia. Posteriormente dos jueces externos a la investigación, en calidad de expertos, discutieron la pertinencia y fiabilidad de los procesos elaborados; al terminar la validación se obtuvo un listado definitivo de procesos para cada una de las competencias.

En la segunda etapa del análisis se exponen las competencias de modelización y argumentación. En cada competencia se caracterizan las tareas, procesos, y nivel de complejidad a partir de los episodios seleccionados, y se compara el nivel de complejidad *a priori* con el nivel de complejidad logrado en el aula. Para la competencia de modelización también se caracterizan las fases de modelización.

Finalmente se analizan los patrones de interacción en el aula de matemáticas desde una perspectiva de los procesos que se desarrollan.

El quinto y último capítulo consiste en la discusión de los resultados y la presentación de las conclusiones del estudio. La discusión se organiza en nueve ejes temáticos: sobre la planificación de una unidad didáctica en función de las competencias; la elaboración de instrumentos metodológicos, sobre la caracterización de los niveles de complejidad, respecto a cada competencia y las relaciones entres estas, la noción de proceso y tarea matemática, la función del contexto en las actividades, respecto a los patrones de interacción y la viabilidad de nuestro modelo de competencia matemática. Estos ejes han permitido responder a los objetivos de la investigación y poder concluir que: en primer lugar ha sido posible elaborar un modelo de competencia, compuesto por tareas, procesos y niveles de complejidad, que permita al profesor tanto planificar como desarrollar competencias en el aula. En segundo lugar se han caracterizado las competencias de modelización y argumentación. En tercer lugar se ha determinado la relación entre los tres componentes del modelo y los niveles de complejidad que identifican el nivel cognitivo de una tarea matemática según el proceso. Esta relación puede tener más variables según la competencia, como en el caso de la competencia de modelización, en la que las fases de modelización también son una variable de complejidad. Finalmente, se han identificado cuatro patrones de interacción según los procesos denominados ciclos de proceso.

Como prospectiva de esta investigación, proponemos que el modelo de competencia matemática sirva para estudiar tanto problemas en el aula de matemáticas como problemas curriculares a gran escala. A su vez, esperamos que esta propuesta sirva de antecedente a nuevas investigaciones sobre competencias matemáticas, y que en un futuro cercano, cuando existan una variedad de investigaciones en torno a la línea de competencia matemática, se desarrolle un currículo por competencia fundamentado en la investigación.

1. Antecedentes y planteamiento del problema

1.1 Antecedentes

En el curso académico 2003-2004 comencé el trayecto de lo que sería hasta ahora mis estudios más largos y desafiantes, un doctorado en didáctica de las matemáticas. Al comenzar me entusiasmé con la idea de la modelización. Los trabajos que revisé sobre el tema (Gómez 1998) confirmaban lo que ya intuía: la modelización era tratada como tema en un escenario de primer ciclo de universidad, en cursos de matemática impartidos a alumnos de ingeniería; en contraparte había una ausencia del tema en la enseñanza obligatoria.

Ante mi decepción, me recomendaron los trabajos de Paulo Abrantes en Portugal, y su libro mat_{747} (Abrantes, 1994); fue una gran inspiración. Abrantes promovía una actividad matemática escolar a través de una metodología de proyectos lo que fue un tesoro para mí porque las actividades presentadas en el libro reflejaban una de las condiciones que yo buscaba: actividades en contexto que permiten emerger nociones matemáticas. Comencé a indagar en los proyectos, y sobre todo, con las ideas de Abrantes (2001) quien me llevó a lo que sería "el tema" de seis años de investigación y que a estas alturas sé que apenas comienza: las competencias matemáticas.

Después de un año de intentar concretar un proyecto de investigación con las ideas que giraban a mí alrededor, modelos, proyectos y competencias, llegué a uno de los principios fundamentales de la investigación: las competencias matemáticas se desarrollan desde un contenido matemático. Destaco esta idea porque la literatura sobre el tema trata de cómo desarrollar las competencias en la educación escolar, y en particular, los escasos trabajos que se refieren a las matemáticas, versan sobre la importancia del contexto y la aplicabilidad de las matemáticas, pero sin insistir en el papel de los contenidos matemáticos en el desarrollo de las competencias. Ante esto surgen algunas interrogantes como las siguientes: ¿acaso las competencias matemáticas se pueden desarrollar de forma independiente al contenido matemático a tratar? ¿En la enseñanza de la estadística, las funciones o la geometría se desarrollan las mismas competencias?

Ante esta problemática ideé una ruta de investigación. En primer lugar tenía que escoger un tema matemático interesante tanto para mí como para ser estudiado desde un enfoque por competencias. En trabajos anteriores (Solar y Zamorano, 2006) había estudiado la proporcionalidad de magnitudes, y éste era un contenido relevante a seguir, pero me interesaba más indagar en el comportamiento de variables funcionales y su expresión gráfica; de esta manera se fue definiendo el que sería mi tema de investigación en el máster en didáctica: tareas de interpretación de gráficas funcionales en marcos y materiales curriculares

(Solar, 2006), en cuyo trabajo se analizaron una selección de marcos y materiales curriculares de diversos países para identificar las tareas que se proponían con respecto a la interpretación de gráficas funcionales y su clasificación en cuatro niveles de complejidad. En el transcurso de esta investigación no se incorporó el enfoque por competencias puesto que la intención era profundizar en el contenido matemático escogido, para posteriormente en la tesis doctoral incorporar las competencias. Aunque para la investigación que llevaba en aquel entonces se aparcó el tema de las competencias, paralelamente fui recogiendo información al respecto. En Cataluña se llevaba a cabo el "debat curricular", instancia en que participaron profesionales de la educación quienes debatieron sobre la orientación que tenía que seguir el currículum. Para facilitar el debate se concretaron cinco ámbitos formativos: lenguaje y comunicación; social y cultural; científico; artístico; y desarrollo personal. Cada uno tiene una incidencia más directa en determinadas áreas, pero también un carácter transversal e interdisciplinario. Algunos de estos ámbitos presentaron un apartado de competencias en que se describieron qué son las competencias y de qué manera se pueden adquirir. En particular en el ámbito de ciencias, se insiste en el aspecto funcional de las matemáticas, que estén presentes como una materia instrumental integrada al resto de materias y que se suministren herramientas matemáticas para fomentar el espíritu crítico (Departament d'Educació, 2006, pág. 191). Si bien estas propuestas están relacionadas con la noción de competencia matemática, en el documento no se liga de forma explícita, aunque en sí se traten las nociones de competencia científica y competencia numérica.

Habría que esperar hasta el nuevo marco curricular en España (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006) para que se pusiera en marcha de forma oficial un currículo desde un enfoque por competencias. Siguiendo la propuesta del Parlamento Europeo y Consejo de la Unión Europea (2006), se proponen ocho competencias básicas, entre ellas la competencia matemática. Si bien el currículo describe lo que es la competencia matemática y de qué manera se desarrolla, el trabajo de concreción del currículo queda relegado a las autonomías. En Cataluña (DOGC., 2007), para organizar el currículo de matemáticas se incorporan cuatro procesos matemáticos -resolución de problemas, razonamiento y demostración, comunicación y representación, y contextos- estos procesos son desarrollados por los estudiantes mientras trabajan contenidos concretos. Relacionar los procesos matemáticos al desarrollo de las competencias matemáticas es la idea matriz que genera nuestro proyecto de investigación.

Los resultados de la investigación en el trabajo de máster (Solar, 2006) se utilizaron para proyectar la investigación que hace un tiempo estaba ideando. Estudiar las competencias matemáticas en la interpretación de gráficas funcionales. Desarrollar esta investigación implicaba considerar una serie de aspectos no triviales. Hasta ese momento si bien se estaba poniendo en marcha un currículo por competencias, no solo en España sino que en toda la Unión Europea, había una ausencia de investigaciones provenientes de la Didáctica de las Matemáticas que tuvieran como problema de investigación las competencias matemáticas. En España se formaban foros de debate entre los profesionales de la educación matemática sobre la incorporación de las competencias; en la revista *Uno* aparecieron dos monográficos que tratan las competencias matemáticas (Uno, 2002; Uno, 2007), pero en ninguna de estas instancias se evidenciaba una investigación que tratara el tema de un modelo de competencia matemática en un nivel de concreción curricular similar a una unidad didáctica o libro de texto.

Dado el actual estado de la cuestión, sostuve que todavía no se podía responder a una de las pregunta principales sobre el tema: ¿de qué manera se adquieren las competencias matemáticas?, y como consecuencia las preguntas derivadas: ¿Qué son las competencias matemáticas? ¿Qué componen las competencias matemáticas? ¿Cómo progresan las competencias matemáticas? ¿De qué manera se relacionan los contenidos con las competencias matemáticas?...

Así comenzó formalmente la tesis doctoral, conformado por el doctorando y los dos directores de esta investigación. Por ello, en términos de presentación del estudio, a partir de este momento las valoraciones son expuestas en plural y no en singular como venía haciendo hasta hora.

En relación a las preguntas expuestas, se concretó el primer objetivo de investigación que consistió en elaborar un modelo de competencia matemática que fuera útil tanto para planificar una secuencia didáctica como para analizar su desarrollo en el aula de matemáticas. El propósito era ambicioso y complejo por no contar con trabajos previos en que sustentarnos, y por la responsabilidad de llevar a cabo un trabajo de investigación que intente desarrollar un modelo teórico.

Tener fijado el tópico matemático permitió concretar la pregunta, ¿de qué manera se adquieren las competencias matemáticas en interpretación de gráficas funcionales? Siguiendo a Abrantes (2001) y Niss (1999), quienes identifican las competencias con procesos matemáticos tales como resolver problemas, argumentar, modelizar, calcular, comunicar, tratamos de idear un modelo en el cual las competencias son procesos organizadores del currículo; es decir, se caracteriza el currículo en cada nivel escolar para desarrollar distintas competencias, tales como la resolución de problemas, la argumentación en matemáticas, o la representación. Destacar los procesos matemáticos en el currículo se evidencia en los *Principios y Estándares para la Educación Matemática,* NCTM (2001). Esta propuesta curricular describe para cada nivel escolar cinco estándares de procesos y seis estándares de contenido. La descripción de los estándares de proceso es una contribución innovadora a la educación matemática pues no se tiene constancia de un trabajo curricular de tal envergadura que describa de qué manera se desarrollan los procesos en diferentes niveles de escolaridad en el aula de matemáticas. No obstante, la separación entre estándares de proceso y contenido abre una pregunta crucial: ¿de qué manera se relacionan los procesos con los contenidos? Por ejemplo, ¿en álgebra se pueden establecer cuáles son los procesos predominantes? ¿Estos procesos varían según el nivel escolar?

Si bien hay currículos que han incorporado los procesos matemáticos en su organización, en Canadá (Ministry of Educación, 2005) y en la Comunidad Autónoma de Cataluña (DOGC, 2007), al igual que la propuesta del NCTM, no presentan un modelo curricular en el que se relacionen los procesos con los contenidos.

La competencia matemática comparte con los procesos las características de desarrollarse a largo plazo y de forma transversal a los contenidos. Según nuestro modelo las competencias se desarrollan desde un tópico matemático, que incorpora tanto los procesos que conforman una competencia como los contenidos formulados en términos de tareas matemáticas. Las tareas no son las actividades que se presentan en una secuencia didáctica, sino que caracterizan "las matemáticas” que se encuentran en las actividades. Las tareas son parte del contenido a tratar; éstas cambian de una secuencia didáctica a otra y se desarrollan a corto plazo.

En el tópico de interpretación de gráficas funcionales hemos considerado dos procesos que destacan, la modelización y la argumentación, que pasaremos a denominar competencias. Se ha elegido la modelización como competencia por tres razones: en primer lugar, por la importancia que tiene la modelización en la interpretación de gráficas funcionales, en efecto, se introduce el modelo de dependencia de variables que conduce al concepto de función; asimismo se introduce la gráfica cartesiana como un sistema de referencia y de esta manera se evidencia que trabajar con modelos destaca en este tópico matemático. En segundo lugar la modelización actualmente es un tema de investigación relevante en didáctica de las matemáticas. Finalmente, tal como se ha mencionado anteriormente, es parte del centro de interés personal del investigador.

Asimismo, se ha optado por la competencia de argumentación porque la acción de interpretar gráficas está ligada al desarrollo de argumentos, tanto de forma implícita – para interpretar gráficas el paso siguiente es justificar la interpretación- como explícita -en las actividades pueden aparecer preguntas que pidan respaldar la interpretación-. Asimismo desde una perspectiva sociocultural, cada vez se encuentran más estudios de la argumentación matemática en el aula, conformándose como un tema de interés en didáctica de las matemáticas.

La modelización y la argumentación son competencias que a su vez se caracterizan por procesos que la conforman. Estos procesos no están caracterizados por la literatura, se han definido fases de modelización y estructuras argumentativas pero no en términos de procesos. Así surgía otro problema de investigación: determinar qué procesos conforman cada competencia.

Por otra parte, hay un tercer elemento que aun no se ha mencionado que tiene relación con el progreso de una competencia. A medida que transcurre el período escolar el trabajo con modelos y la argumentación en matemáticas debería progresar, pero a la hora de estudiar este progreso surgen las siguientes preguntas: ¿de qué manera se progresa? ¿Cuáles son las variables a considerar para estudiar el progreso en los estudiantes?

Nos sentamos sobre la base de que por medio de las actividades matemáticas se puede estudiar el desarrollo de las competencias; este mismo principio se aplica al progreso de una competencia, con el propósito de poder identificar el progreso según el tipo de actividades que son capaces de resolver los estudiantes.

Desde una perspectiva de evaluación se han desarrollado marcos que estudian la complejidad de las actividades. Nuestro marco de referencia es el triángulo de de Lange (1995) que luego se reduce a los grupos de competencia propuesto en PISA (OCDE, 2003) para evaluar competencias: reproducción, conexión y reflexión.

Siguiendo a Rico (2007) hemos preferido denominar niveles de complejidad a los grupos de competencia para evitar confusiones con el significado de competencia y porque el término “nivel de complejidad” destaca más su significado. De esta manera se ha incorporado un tercer componente al modelo de competencia cuya función es indicar el progreso en una competencia específica.

Presentados los tres componentes podemos plantear la tercera pregunta de investigación, ¿cómo se relacionan las tareas, los procesos y los niveles de complejidad? Según nuestro modelo, las competencias se estudian a través de las actividades de una secuencia didáctica, tanto en su planificación como en su desarrollo en el aula. Nuestra propuesta pretende encontrar una manera de determinar la complejidad en función de las tareas y los procesos.

Una de las ideas en torno a un enfoque por competencias es la importancia de la contextualización de las actividades. Coloquialmente el término contexto se puede entender de dos maneras: el escenario en que se realiza la actividad -el aula de matemáticas, un grupo, etc.-, o bien el referente de la actividad. En el presente estudio entendemos por contexto la segunda acepción, y denominamos escenario para referirnos a la primera.

La función del contexto en la actividad ha sido tratada principalmente en términos de: su contribución a la adquisición de contenidos, como referente familiar para dotar de significado a la matemática, para mostrar la aplicabilidad de las matemáticas, y también su papel de elemento motivador. (Treffers y Goffree, 1985; de Lange, 1996; Dekker y Querelle, 2002).

Asimismo, de Lange (1987) para determinar la importancia del contexto en una actividad propone una clasificación en cuatro categorías, que van desde contextos sin ninguna importancia en la actividad hasta contextos que permiten la creación de nuevos conceptos matemáticos.

Desde nuestro modelo de competencia, queremos recoger información respecto a la función del contexto en las actividades aunque este no sea uno de los objetivos explícitos de la investigación. De Lange (1999) señala que las actividades de contexto de segundo y tercer orden generalmente están asociadas a un tercer nivel de complejidad (reflexión). Asimismo, se indagará qué relaciones hay entre las funciones del contexto y la complejidad de la actividad.

Hemos mencionado que una de las características de un enfoque por competencias es destacar el valor funcional de los aprendizajes, es decir, que el estudiante, a lo largo de la enseñanza obligatoria, sea capaz de usar los conocimientos adquiridos en matemáticos tanto en otras disciplinares como en contextos de la vida diaria. En particular, se espera que el estudiante sea capaz de usar las herramientas matemáticas, y de saber cuándo usarlas y así como las limitaciones de su uso. Esta visión funcional del conocimiento matemático tiene un componente reflexivo muy importante. ¿Acaso se pueden reconocer las limitaciones del las herramientas matemáticas sin un componente crítico acerca de éstas? ¿Se puede ser matemáticamente competente sin ser reflexivo? En general las descripciones sobre la competencia matemática no destacan la capacidad reflexiva que se necesita desarrollar y se limitan al desarrollo de capacidades y al aspecto funcional de las matemáticas; sin embargo, en el proyecto PISA se considera la capacidad reflexiva en la propia definición de competencia matemática.

> Competencia matemática es una capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. (OCDE, 2006, pág. 74.)

Consideramos que se debe destacar especialmente el desarrollo de actitudes reflexivas en el estudiante en la adquisición de la competencia matemática. Esta característica se ha concretado en nuestra propuesta en asociar el último nivel de complejidad de la actividad con aspectos reflexivos, así como en contemplar el desarrollo de procesos reflexivos, tanto en la competencia de modelización como en la de argumentación.

Hasta el momento se ha descrito qué son las competencias matemáticas, cómo se desarrollan y de qué se componen, apoyándonos en que los procesos matemáticos son el componente sustancial de las competencias matemáticas. A la falta de literatura que caracterice procesos en el aula de matemáticas es necesario que en la puesta a prueba del modelo de competencia se estudien los procesos matemáticos. Para tal propósito la investigación se ha concretado en dos partes; en primer lugar analizar una unidad didáctica en términos de las dos competencias matemáticas a desarrollar, sin ahondar en los procesos; y en segundo lugar estudiar la aplicación de una unidad didáctica en un estudio de caso y es en este escenario en donde se indagan los procesos que conforman a cada competencia.

Siguiendo a Rico y Lupiáñez (2008, pág. 257) los procesos no son variables de la actividad sino variables del sujeto, y por ello no es posible establecer *a priori* a cuál de los procesos corresponde asignar una actividad. Por lo tanto, para caracterizar los procesos es necesario centrarse en los escenarios en que interactúan los sujetos, en nuestro caso el aula de matemática es donde se produce la interacción entre estudiantes, o bien entre profesor y estudiantes. En el estudio de caso nos hemos centrado en la interacción entre profesor y estudiantes porque es donde se negocian los significados y se comparte la construcción de los mismos; en consecuencia entendemos que es el escenario más óptimo para que emerjan la mayor parte de los procesos, tanto por parte de los estudiantes como del profesor.

En este escenario surge una nueva problemática en torno a la interacción y los procesos que conforman cada competencia. En la literatura se han identificado patrones de interacción (Mortimer y Scott 2002; Voigt, 1995; Wood, 1998) que se asocian con secuencias cerradas -profesor incentiva una pregunta, estudiantes responden y profesor evalúa- hasta patrones asociados a secuencias más abiertas en las que no es necesario que comience el profesor o que sea él quien evalúe las respuestas.

A partir del estudio de caso, nos interesa describir la interacción en el aula de matemáticas en relación al desarrollo de competencias. En particular, caracterizar patrones de interacción en función de los procesos de cada competencia estudiada, así como relacionar los patrones con el nivel de complejidad de las actividades presentadas en el aula. Por otra parte, se pretende clasificar los procesos que corresponden más a acciones del profesor y cuáles de éstos a acciones de los estudiantes, con el fin de discutir la importancia del profesor en la aparición de ciertos procesos en el aula.

Presentados los propósitos de la investigación, destacamos que son problemas que son tratados en términos de enseñanza y no de aprendizaje. Al ser éste un estudio innovador en competencias matemáticas nos hemos centrado en el problema curricular presentado, y por limitaciones de investigación no se ha tratado de qué manera aprenden los estudiantes a través de competencias. Nos centramos en caracterizar el aula, esto es, un grupo en interacción con el profesor, y cuando se interprete una situación de aprendizaje será en función de la perspectiva de enseñanza que implica.

Un último tema que queremos tratar es bajo qué paradigma de investigación en didáctica de las matemáticas es más adecuado estudiar las competencias matemáticas.

Para responder a esta compleja pregunta hay que diferenciar el posicionamiento del investigador, las necesidades del estudio y la realidad actual en la investigación. Comenzando por este último aspecto el centro de interés ha pasado desde una preocupación por estudiar problemas en torno a los aprendizajes de los contenidos bajo un enfoque cognitivo, a otro tipo de preocupaciones que son parte de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas pero que no están en función de los contenidos, tales como la diversidad, el discurso o la participación en el aula de matemáticas y la formación profesional del profesor de matemáticas. En estos centros de interés ya no predomina el enfoque cognitivo sino que este comparte terreno con otros enfoques como el sociocultural (Lerman, 2001). En particular en España se han desarrollado otros enfoques como el antropológico (Chevallard, 1999) cuyo centro de interés es estudiar los contenidos matemáticos bajo un punto de vista institucional, sin particularizar en los significados personales sobre los contenidos, y el ontosemiótico (Godino, 2002a) cuyo propósito es desarrollar un marco de referencia para tratar tanto significados institucionales como personales, en que convergen preocupaciones cognitivas y socioculturales que son tratadas bajo una misma estructura teórica.

El problema de las competencias no proviene del interés de alguno de estos enfoques, es un tema que proviene fuera del contexto de la investigación en didáctica de las matemáticas y pertenece a una preocupación curricular desde la comunidad europea en que la OCDE ha tomado un rol protagonista. El proyecto DeSeCo (Definición y Selección de Competencias) que encargó la OCDE, convocó a expertos de diversas áreas para desarrollar desde su propia disciplina la noción de competencia, y de la discusión en conjunto resultó la selección de unas competencias clave (OCDE, 2005; Ryche y Salganik, 2006). Esta selección dio paso al listado de competencias propuesto por el Parlamento Europeo y Consejo de la Unión Europea (2006) y como consecuencia surgió entonces el listado de competencias básicas en España vigentes en el currículum desde la nueva ley de ordenación de educación (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006).

De esta manera el currículo de España cambió desde un paradigma fundamentalmente cognitivo, a un currículo por competencias fundamentado desde diversas áreas y con una visión más sociológica de la enseñanza, dado que se proponen competencias ligadas a una disciplina (ej. Competencia matemática), como a aspectos cognitivos (ej. Competencia de aprender a aprender) y a una visión sociocultural del aprendizaje (ej. competencias social y ciudadana).

Desarrollar la competencia matemática fundamentada desde la investigación tiene que reconocer la procedencia externa tanto del concepto como de los intereses. Las características de las competencias básicas es que son transversales a todas las disciplinas y por tanto desarrollables en cada una de estas, y que son adquiridas a lo largo de la educación obligatoria. Asimismo, las que hemos denominado competencias específicas dentro de la competencia matemática comparten estas mismas características de ser transversales y a largo plazo.

Nuestro posicionamiento es destacar la importancia del contenido matemático en la caracterización de la competencia. Bajo nuestro punto de vista, es necesaria una discusión que provenga desde el contenido para describir el desarrollo de una competencia ya que los procesos y tareas que conforman a la competencia de modelización o argumentación o cualquier otra competencia, serán distintos según el tópico matemático.

Por tanto es necesario un dominio del contenido, que en nuestra investigación se traduce en una revisión de la literatura sobre interpretación de gráficas, la cual contribuye a identificar criterios provenientes de la discusión del contendido para desarrollar el modelo de competencia matemática, tales como: identificar las tareas matemáticas, clasificar la complejidad en dichas tareas o esbozar procesos de modelización y argumentación que se esperan en la aplicación de la unidad didáctica.

Para tal propósito ha sido necesario indagar en la literatura sobre interpretación de gráficas escrita mayormente en la década de los 80 y que culmina a principios de la década de 90. La referencia más importante ha sido la revisión de Lienhardt et al. (1990) quienes proponen una caracterización de las tareas en interpretación de gráficas funcionales. Después de casi 20 años no ha sido posible encontrar nuevos estudios dedicados a caracterizar este tópico matemático con ese dominio de especificidad, y no es precisamente porque la cuestión haya sido resuelta, sino seguramente por el giro de atención que ha dado la investigación en didáctica hacia otros puntos de interés.

En cambio la modelización y la argumentación en matemáticas son dos de los temas más destacables en la investigación. La modelización es un tema que se trata desde distintos enfoques y ámbitos, cuya preocupación comenzó desde la enseñanza en educación superior con una visión centrada en las fases de modelización (Gómez, 1998) y actualmente se pueden encontrar para educación primaria propuestas didácticas centradas en la emergencia de modelos matemáticos (Gravemeijer, 1999). Por otra parte, la mayoría de las investigaciones en relación a la argumentación siguen un paradigma sociocultural, en que el objeto de estudio es el discurso en el aula de matemáticas.

Por tanto, para estudiar las competencias matemáticas ha sido necesario rescatar las investigaciones denominadas “clásicas” en didáctica de las matemáticas, y conectarlas con investigaciones actuales que versan sobre los procesos matemáticos.

Finalmente, destacamos que una característica de lo que es una investigación en competencias es el componente curricular que involucra. Según nuestra perspectiva, investigar por competencias implica que la investigación tiene un componente significativo de innovación. En nuestra investigación centrada en la puesta a prueba de un modelo de competencia matemática, en un estudio de caso, se sigue una metodología cualitativa interpretativa, en que la interpretación de los datos tiene como consecuencia poner a prueba el modelo de competencia que a su vez tiene una implicación didáctica orientada a la planificación curricular.

Se espera que esta investigación sirva de precedente para que otras investigaciones aborden las competencias matemáticas con otros contenidos y cursos, y que incluso se propongan otros modelos de competencia, pero que, en su conjunto, sirvan como apoyo para un currículo por competencias fundamentado en la investigación.

1.2 Preguntas y objetivos de investigación

A medida que se presentaba el problema de investigación se fueron describiendo antecedentes sobre las competencias matemáticas, y surgieron distintas preguntas y propósitos a desarrollar. No obstante, en este apartado se han sistematizado estos propósitos en términos de objetivos de la investigación para que queden claramente identificados.

El objetivo general de esta investigación es elaborar y poner a prueba un modelo de enseñanza por competencias matemáticas en interpretación de gráficas. No se pretende validar el modelo porque eso significa diseñar unos criterios de validez y de fiabilidad que se extienden a un estudio de caso y a un contenido concreto. El objetivo se limita a proponer un modelo de competencia y estudiar cómo se desarrolla en la aplicación de una unidad didáctica de interpretación de gráficas funcionales. Aclarado este punto el objetivo de investigación es:

> **Caracterizar un modelo de enseñanza por competencias matemáticas en interpretación de gráficas funcionales**.

Este objetivo se lleva a cabo proponiendo un modelo de competencia matemática que se estructura en: una competencia específica y tres componentes: tareas, procesos y niveles de complejidad. Las competencias específicas a desarrollar son la modelización y la argumentación. El modelo se pone a prueba en el estudio de caso en que se analiza el desarrollo de las dos competencias en el aula.

Tanto para el diseño como para la puesta a prueba del modelo de competencia matemática es necesario determinar las relaciones que se establecen entre los componentes de una competencia específica, teniendo en cuenta que cada componente –procesos, tareas y nivel de complejidad- proviene de un marco de referencia distinto, lo que dificulta establecer las posibles relaciones entre ellos. Desarrollar esta pregunta es el núcleo de nuestra propuesta, por lo que constituye nuestra pregunta de investigación:

¿De qué manera se relacionan las tareas, los procesos y la complejidad en el desarrollo de una competencia matemática?

Para tratar de responder a la pregunta de investigación se describen cuatro objetivos específicos, que en su conjunto representan los pasos a seguir en la investigación:

1. **Definir un modelo de competencia matemática**

Este objetivo consiste en una propuesta teórica de enseñanza a través de la competencia matemática, aplicable tanto a la planificación de una secuencia didáctica como a su desarrollo en el aula de matemáticas.

2. **Caracterizar las competencias de modelización y argumentación que se desarrollan en el tópico de interpretación de gráficas y tablas.**

En este objetivo se pretende profundizar en la argumentación y modelización en el aula de matemáticas. Y desarrollar una propuesta que las formule como competencias. Asimismo nos planteamos ¿cuál es la naturaleza de la competencia modelización y argumentación en el tópico de interpretación de gráficas?

3. **Caracterizar la relación que existe entre las tareas, procesos y niveles de complejidad en el tópico de interpretación de gráficas y tablas.**

En este tercer objetivo se hace mención a la pregunta central de la investigación, concretada en el tópico matemático, asimismo en su formulación está implícito que esta caracterización es desarrolla en cada competencia.

Como se ha descrito en los antecedentes, el cuarto objetivo proviene del interés de describir la interacción en el aula de matemáticas en relación al desarrollo de competencias.

4. **Describir la interacción en el aula de matemáticas en relación al desarrollo de competencias.**

Bajo el principio que los procesos emergen de la interacción en el aula, se plantean las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los patrones de interacción que caracterizan el desarrollo de los procesos?
- ¿Cuáles de estos procesos corresponden en mayor medida a las acciones del profesor?

La función del contexto en un enfoque por competencias no es tratada como objetivo de investigación porque no es un aspecto explícito del modelo; se ha dejado su análisis para la discusión de los resultados.

2. MARCO TEÓRICO

Introducción

En varios países desarrollados se ha experimentado un notable cambio en las formas de concebir y organizar la enseñanza de las matemáticas, adoptando un enfoque que se denomina "competencias matemáticas". El cambio radica, de manera resumida, en que en el proceso de escolarización de los estudiantes, los contenidos matemáticos deben ser estudiados desde una perspectiva funcional. Con ello se pretende que los estudiantes pongan en práctica sus capacidades para resolver actividades que sean los más cercana posibles a situaciones de la vida real.

Este creciente interés ha provocado varias reformas curriculares; la mayoría de los países europeos han redactado el currículo escolar en términos de competencias. Y en consecuencia, las universidades han empezado a dictar cursos orientados a profesores para que puedan incorporar este nuevo enfoque, poniendo el énfasis en el desarrollo de actividades que permitan activar las competencias matemáticas.

El surgimiento de este enfoque se puede explicar en gran medida por las limitaciones de los marcos precedentes y los cambios que se han llevado a cabo. Zabala y Arnau (2007) exponen que dichos cambios han pasado de una visión centrada en contenidos temáticos hacia una visión centrada en los estudiantes: temas, objetivos más o menos operativos, taxonomía de Blomm, objetivos por capacidades y finalmente competencias.

En particular, al observar los procesos de cambio que ha vivido el currículo de matemáticas en los últimos 50 años, se puede constatar que, de un paradigma a otro, los cambios en general han sido extremos y controvertidos.

Para explicar de qué manera los currículos escolares han llegado hasta una aproximación por competencias, en el apartado 2.1 describiremos la evaluación que ha tenido el currículo de matemáticas a partir de la matemática moderna y su influencia en las matemáticas escolares, para luego identificar el surgimiento de las corrientes estructuralista formalista y constructivista, hasta llegar a lo que actualmente se identifica como competencias.

2.1 Competencias

2.1.1 Evolución del currículo

De la matemática moderna al constructivismo

En la década de los 60 en EEUU se institucionaliza la visión de la matemática moderna; así, por ejemplo, en el artículo de "*The Revolution in Mathematics*" de Marshall, M. publicado en la revista *Mathematical Monthly*, en octubre de 1961, se promueve la modernización de la matemática, defendiendo una concepción estructuralista de la matemática, la independencia de la matemática de las otras áreas y su naturaleza netamente abstracta (Kline, 1976).

La consolidada visión de la matemática moderna incidió directamente en las instituciones escolares, considerando todas las dimensiones del sistema, desde el currículo hasta el profesor. Armendáriz, Azcárate y Deulofeu (1993) señalan que en la década de los 60 dos conferencias, una en 1959 en Woods Hoole –Massachussets- y otra en 1963 en Cambridge, encaminarían la didáctica de las matemáticas a realizar un giro hacia la matemática moderna. Ambas conferencias proponían una enseñanza de las matemáticas como una disciplina estructurada de forma tal que las interrelaciones entre los conceptos quedaran puestas de relieve, así como las estructuras conceptuales que subyacen a los distintos procesos matemáticos. Morris Kline (1976) describe el paso a una currículo basado en la matemática moderna, como una gestión del aula jerárquica, con una priorización que pretendía mostrar una matemática estructurada, abstracta, y fundamentada en la representación conjuntista, en detrimento de una visión intuitiva de la actividad matemática, puesto que ya no se aceptaban demostraciones de índole geométrica, sin la rigurosidad que se estaba promoviendo por parte de la institución matemática.

Así, en EEUU a mediados de los 60s comenzó un proceso gradual de cambio (Howson, Keitel, y Kilpatrick, 1981) donde surgieron nuevas teorías, desde el campo de la psicología principalmente, que tratarían de explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en términos de procesos cognitivos. Howson, Keitel y Kilpatrick distinguen entre el enfoque estructuralista y el formativo. Un destacado defensor del estructuralismo es Bruner con su teoría de las representaciones; de igual modo, Piaget, es el máximo representante de la corriente formativa.

Pero la visión estructuralista no cumplió las expectativas, y se evidenció un fracaso de la matemática moderna en el intento de mejorar la comprensión de la matemática en las aulas (Kline, 1976). Así, se vivió un proceso de cambios en la visión de la educación matemática que se puede resumir en la frase: *Matemáticas, ¿construcción o descubrimiento?*

Con el paso del tiempo se desarrollaron diferentes puntos de vista; surgió el enfoque formalista de Piaget, sustentado en la idea de que el individuo es el elemento central en la construcción de significados. Piaget definió una secuencia de cuatro estadios que todos los seres humanos atravesamos en nuestro desarrollo cognitivo (Sensoriomotor, preoperacional, operaciones concretas y operaciones formales). Posteriormente la teoría formalista incidiría en el surgimiento del constructivismo. *El Constructivismo* (Coll, 1989) es una visión que lleva a concebir el aprendizaje escolar como un proceso de construcción del conocimiento, y la enseñanza como una ayuda a este proceso de construcción. Particularmente, Wood *et al*.

(Wood, Cobb, y Yackel, 1991) señala que las teorías psicológicas de Piaget y von Glasersfeld han influido en la concepción constructivista en didáctica de las matemáticas, al considerar procesos como el conflicto cognitivo, la abstracción reflexiva y la organización conceptual en el aprendizaje de las matemáticas.

Otra teoría que incidió en el constructivismo fue el enfoque social de Vigotsky. El psicólogo ruso desarrolló en los años 30s un enfoque que considera el entorno sociocultural de la persona. A partir de los años 80s esta teoría comienza a tomar fuerza en EEUU para describir los procesos de aprendizaje.

A fines de la década de los 70 el constructivismo empezó a insertarse prácticamente en la mayoría de las áreas sociales del conocimiento, y en particular, en la Educación Matemática. En los años 90s, ya varios países habían adoptado en sus currículos de matemáticas esta visión, siendo los pioneros EEUU e Inglaterra. En Sudamérica la inserción del constructivismo a la educación se produce a principios de los años 90s. Concretamente en Chile la reforma educativa de 1990 (Ministerio de Educación, 2006) tiene como pilar el enfoque constructivista del aprendizaje; esta reforma se ha desarrollado con implantaciones semejantes a la de España.

A finales del los 90s, en varios países donde a nivel oficial prevalecía el constructivismo, aun se manifestaba un descontento con la educación. En particular, en la enseñanza de la matemática existía la sensación de que el conjunto de esfuerzos que se habían promovido no parecían mostrar mejoras significativas. Esto puede ser debido, entre otras razones, a que las teorías psicológicas que daban buenos resultados en edades tempranas, no lograban traspasarlos a secundaria ni a la enseñanza superior.

Actualmente la orientación curricular de varios países ha adoptado otros criterios para organizar el currículo escolar. Bajo una postura general en que la enseñanza tiene como objetivo preparar ciudadanos críticos y reflexivos, para tal efecto, cada área de conocimiento ha considerado como variable la estructuración de los contenidos con una connotación de que los sujetos apliquen tales conocimientos en la vida cotidiana. Un marco que ha respondido a estas preocupaciones es el enfoque por *competencia*. De esta manera se ha incorporado el término competencias a los marcos curriculares de varios países. Por ejemplo en el caso de España, ha aparecido una prueba de evaluación denominada “competencias básicas”, cuyo propósito es evaluar las competencias que son necesarias en estudiantes de 6º primaria, 2º de ESO, y 4º de ESO. Se aplica en Matemáticas, Ciencias y en Lenguaje.

¿Por qué optar por un marco de competencias?, Rico y Lupiáñez (2008) esbozan la idea de que un marco por competencias incentiva a: aprender a hacer, dar significado al aprendizaje, aprendizaje social, aprender a resolver situaciones complejas y cultivar un espíritu crítico. Por otra parte Zabala y Arnau (2007) plantean que la competencia ha de identificar aquello que necesita cualquier persona para dar respuesta a los problemas a los que se enfrentará a lo largo de su vida. Por tanto, competencia consistirá en la intervención eficaz en los diferentes ámbitos de la vida mediante acciones en las que se movilizan, al mismo tiempo y de manera interrelacionada, componentes actitudinales, procedimentales y conceptúales.

Antes de profundizar en el tema de las competencias, se expone en el siguiente apartado un inciso sobre “los objetivos”, dado que históricamente la formulación de objetivos ha relevante en los currículos, y se mantiene en la actualidad en un gran número de ellos que siguen caracterizándose por objetivos de aprendizaje.

El debate de los objetivos

El debate por los objetivos ha ocupado el centro de atención en los debates curriculares de la segunda mitad del siglo recién pasado. Se han discutido y analizado sus fortalezas y debilidades en los currículos que los utilizan para exponer las expectativas de aprendizaje.

La relevancia de los objetivos se originó posteriormente a la segunda guerra mundial, momento en que se comenzó a avanzar en la línea de desarrollar y concretar *objetivos operativos*. Un objetivo operativo define en términos de conductas muy concretas el resultado de un aprendizaje que se quiere alcanzar. En su versión estricta responde a las siguientes tres características (Mager, 1997, extraído de Rico y Lupiáñez 2008):

- Describe las acciones que se estima que el alumno deberá ser capaz de realizar.
- Considera las condiciones (cuando las hay) bajo las cuales al alumno realizará la acción.
- Establece un parámetro que determina el grado de perfección aceptable de esa acción

En el programa curricular de la matemática moderna se pudo apreciar el máximo esplendor de los objetivos operativos. Si bien los currículos han cambiado su filosofía desde aquel entonces, en la práctica, aun existe un grupo del profesorado que en sus propuestas curriculares mantienen las ideas subyacentes provenientes de los objetivos operativos; este hecho ha dificultado, en muchos casos, la entrada de las nuevas propuestas e innovaciones curriculares.

Rico y Lupiáñez (2008) afirman que la operativización de los objetivos proviene de un exceso de confianza en la virtud de análisis exhaustivo de conductas. La expansión analítica en el enunciado de los objetivos conduce a singularizar y atomizar las conductas, a trivializar los aprendizajes. Implica un predominio conductista en la selección de tareas y en la metodología escolar. Asimismo, carece de realismo al no contemplar el modo usual de trabajo de los profesores. La organización del currículo en términos de objetivos operativos implica un predominio del enfoque instrumental del conocimiento matemático, prácticamente centrado en hechos y destrezas. También implica limitaciones para la evaluación que se simplifica por medio de test estandarizados, provoca el abandono de tareas complejas y olvida valorar la madurez de los escolares por su desarrollo de procesos cognitivos.

La reducción de este enfoque curricular no ha sido del todo superada en la educación obligatoria, especialmente en matemáticas, debido a la utilidad e importancia que tiene el método analítico en el conocimiento matemático.

Hay que rescatar también las fortalezas y logros del enfoque por objetivos. Rico y Lupiáñez (2008) rescatan principalmente tres:

- Estructuración y organización continua de la expansión de los objetivos operativos, basados en la categorización y síntesis de los mismos.

- Caracterización cognitiva de los conocimientos. Los contenidos son entendidos tanto como una estructura conceptual como un medio para pensar, razonar y en general desarrollar determinadas actividades cognitivas.

- La discusión sobre la evaluación de los objetivos, que ha derivado en cierto énfasis por establecer las facultades mentales que desarrolla cada disciplina. Esta evaluación se ha concretado en las competencias matemáticas.

Los diversos intentos por controlar el incremento desmesurado de objetivos cristalizaron a mediados de la década de los cincuenta en los trabajos de Blomm, cuyo logro consistió en elaborar una taxonomía útil para el estudio y clasificación de los objetivos. Una taxonomía de objetivos es una clasificación jerárquica de los resultados esperados en un proceso educativo. Se conciben como un marco comparativo que permite intercambiar y compartir ideas y materiales educativos.

En la taxonomía, se establecieron seis categorías principales: Conocimiento, Comprensión, Aplicación, Análisis, Síntesis, Evaluación.

La taxonomía de Bloom se adaptó tempranamente al área de matemáticas, a través del estudio realizado en 1962 por el *School Mathematics Study Group*, de EEUU, denominado *National Longitudinal Study of mathematical habilities* (NLSMA). Se establecieron cuatro categorías principales: Cálculo, Comprensión, Aplicación y Análisis, cada una con sus respectivas subcategorías. (Rico y Lupiáñez, 2008).

A partir de estos antecedentes se tienen más fundamentos para entender la importancia de los objetivos de aprendizaje en el currículo en general, y especialmente en el de matemáticas. En los siguientes apartados se inicia la descripción de las competencias, tema que formará la parte principal del marco teórico. En el apartado 2.2 se realiza una descripción de la historia de las competencias. El apartado 2.3 se centra en la competencia matemática: su caracterización, su desarrollo en los currículos, así como en una descripción detallada de estudio PISA que ha sido una fuente de gran importancia para la extensión y conocimiento de la competencia matemática. A continuación, en el apartado 2.4, se discuten los diversos significados que tiene el término competencia. A partir de esta discusión, en el apartado 2.5 nos posicionamos respecto a cómo se entiende y caracteriza el termino competencia en el presente estudio.

2.1.2 Historia de las competencias

La procedencia del término “competencia” no tiene un único origen, por un lado Cruz (2003) señala que desde el punto de visto de la gestión de recursos humanos se originó el concepto de competencia laboral, apuntando a las claves para una eficiente gestión en el mundo empresarial y organizativo. Por otro lado también se acuñó el término competencias en investigaciones sobre psicología del lenguaje por Chomsky (1970), distinguiendo entre *competencia* y *actuación*, para introducir un orden formal e idealizado en el estudio de los procesos cognitivos que subyacen en el aprendizaje.

En el transcurso del tiempo la noción de competencia se ha ido introduciendo en una multiplicidad de áreas, tales como Medicina, Sociología, Economía y Educación, provocando distintas variaciones del término.

Una de los estudios más extensos para definir las competencias es el Proyecto para la Definición y Selección de Competencias Claves (DeSeCo), impulsado por la OCDE[1]. Dada la importancia y repercusión que ha tenido este estudio, describiremos con detalle sus planteamientos centrales.

2.1.2.1 Proyecto DeSeCo

El proyecto DeSeCo (Definición y Selección de Competencias) de la OCDE fue concebido como una estudio complementario de evaluaciones a gran escala como son TIMSS y PISA. La OCDE encargó a un grupo de expertos de diferentes disciplinas el proyecto de estudiar las competencias claves, con un propósito que va más allá de seleccionar competencias. Se pretendía indagar qué competencias y habilidades conducen a un sujeto a tomar decisiones acertadas, tanto en la sociedad actual como de cara a los cambios que se presentarán en el futuro; a su vez cuáles son los fundamentos teóricos y conceptuales para definir y seleccionar una lista limitada de competencias claves.

Se concluyó que las competencias clave han de ser importantes para todos los individuos, por requerirse para una variedad de contextos. Asimismo, que las competencias clave tienen las siguientes características (Rychen y Salganik, 2006):

- Se estructuran por el cumplimiento de tareas altamente complejas, y están compuestas por componentes cognitivos, motivaciones, éticos y sociales.
- Son transversales a las distintas tareas y campos sociales de participación.
- Suponen una reflexividad y complejidad mental para enfrentarse a las demandas de la vida actual.
- Están compuestas de múltiples dimensiones (saber hacer, habilidades analíticas, críticas y comunicativas)

Otra característica a destacar del proyecto DeSeCo es la intención de situar la discusión de las competencias claves dentro de una dimensión más sociológica que psicológica. En efecto, varios autores del libro enfatizan en la integración social de los sujetos de las respectivas competencias. Es importante para la conceptualización, desarrollo, promoción y evaluación de las competencias comprender la relación entre el sujeto y la sociedad como dialéctica y dinámica. Finalmente, destacar que las competencias claves se pueden implantar sobre la base de cambios éticos y políticos, en el caso contrario no se estaría definiendo las competencia tal como se piden en el proyecto DeSeCo.

En conclusión, el proyecto DeSeCo entiende por competencia la capacidad para responder con éxito a exigencias complejas en un contexto particular; movilizando conocimientos y aptitudes

[1] Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico

cognitivas y prácticas, y componentes sociales y comportamentales como actitudes, emociones, valores y motivaciones (Rychen y Salganik, 2006).

2.1.2.2 Selección de competencias clave

A continuación, se presenta una síntesis del informe original del proyecto DeSeCo (OCDE, 2005), que contribuye a sistematizar las ideas más importantes del proyecto.

Las demandas mencionadas hacen que los individuos en diferentes lugares y situaciones deban enfrentar requerimientos variados. Sin embargo, las competencias clave son aquellas de valor particular, que tienen áreas múltiples de utilidad y son necesarias para todos.

La primera de estas condiciones, sobre las que deben valorarse las competencias, se relaciona con beneficios mesurables para fines tanto económicos como sociales. Actualmente se refuerza la opinión de que el capital humano juega no sólo un papel crítico en el desempeño económico, sino también trae beneficios clave para los individuos y las sociedades como una mejor salud, mayor bienestar, mejores formas de ser buenos padres y mayor participación social y política.

La segunda condición es que las competencias deberían traer beneficios en un amplio espectro de contextos, por eso, deberían ser aplicables a múltiples áreas de la vida. Así, ciertas áreas de competencia son necesarias tanto en el mercado laboral, como en las relaciones privadas, en participación política; estas competencias transversales son las que se definen como clave.

La tercera condición es que las competencias clave deberían reducir el énfasis de aquellas competencias de uso específico para un oficio, ocupación o forma de vida en particular; dando énfasis a las competencias transversales que todos deberían aspirar a desarrollar y mantener.

En base a este marco, se decantó en caracterizar en tres bloques las competencias que se deberían desarrollar en la educación obligatoria: Usar las herramientas de forma interactiva; Interactuar en grupos heterogéneos; Actuar de manera autónoma.

Un vínculo más avanzado entre las competencias específicas, descrito en la figura 2.1.1 que se presenta a continuación, es que en cualquier contexto se puede aprovechar más de una competencia. De hecho, cualquier situación o meta puede demandar una constelación de competencias, configuradas de manera diferente para cada caso particular.

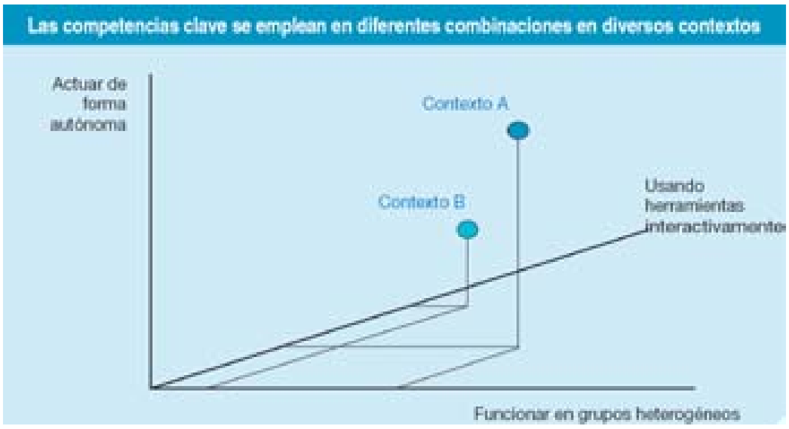


Figura 2.1.1: Combinación entre las competencias claves (OCDE, 2005)

Cada uno de los bloques, se componen de tres competencias claves. El cuadro 2.1.1 muestra cada una de los bloques con sus respectivas competencias.

Cuadro 2.1.1: Bloques de competencias

Usar las herramientas de forma interactiva	Interactuar en grupos heterogéneos	Actuar de manera autónoma
A. La habilidad para usar el lenguaje, los símbolos y el texto de forma interactiva.	A. La habilidad de relacionarse bien con otros.	A. La habilidad de actuar dentro del gran esquema.
B. La capacidad de usar este conocimiento e información de manera interactiva.	B. La habilidad de cooperar.	B. La habilidad de formar y conducir planes de vida y proyectos personales.
C. La habilidad de usar la tecnología de forma interactiva.	C. La habilidad de manejar y resolver conflictos.	C. La habilidad de afirmar derechos, intereses, límites y necesidades.

Cada una de estas competencias se ha descrito y fundamentado dentro del marco teórico del proyecto DeSeCo.

La figura 2.1.2, ilustra el extenso y prolijo proceso que se ha desarrollado para generar las competencias claves.

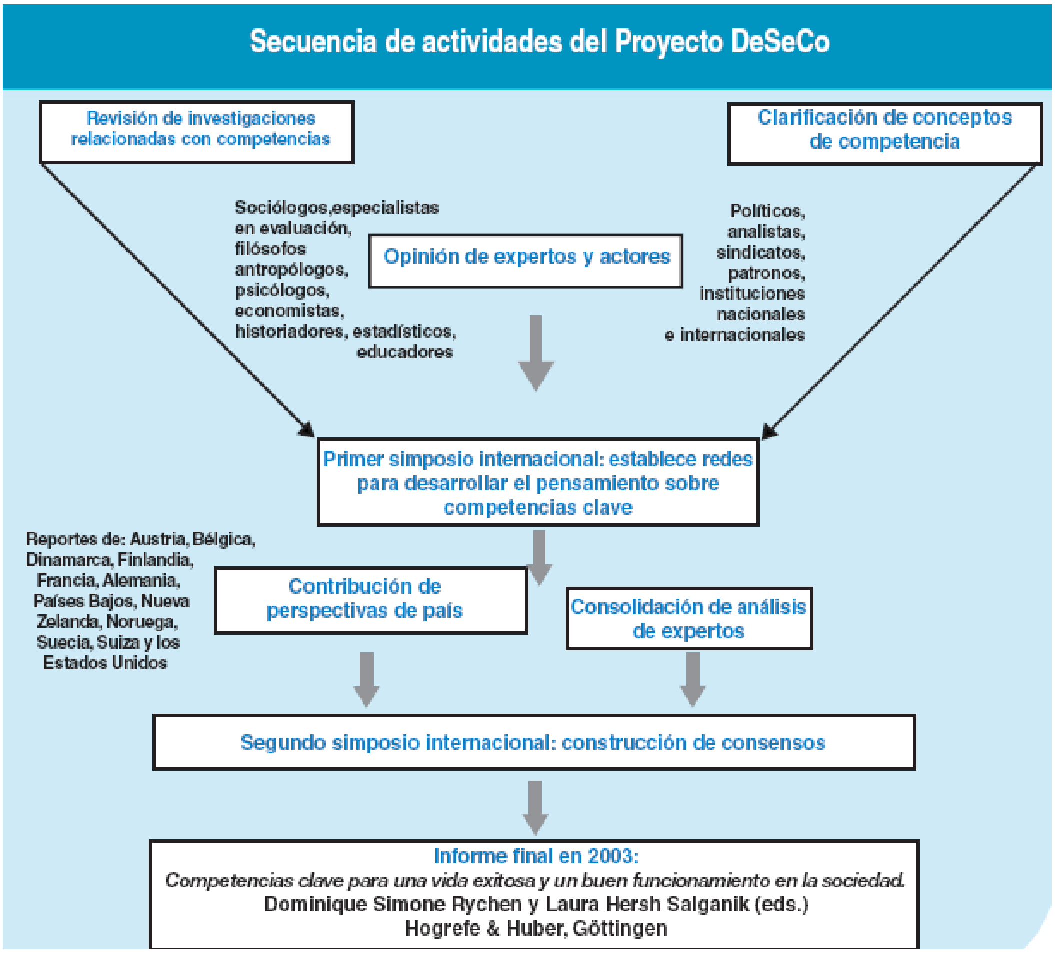


Figura 2.1.2: Secuencia de actividades Proyecto DeSeCo (OCDE, 2005)

Por otra parte, la evaluación internacional PISA (Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes) brinda evidencia empírica de los datos sobresalientes de las competencias clave en términos de la capacidad de interactuar con herramientas como textos escritos.

En el contexto universitario las competencias se han desarrollado en el Proyecto *Tuning Educational Structures in Europe* que tiene por objetivo establecer una estructura curricular base para insertar el modelo de competencias en el contexto universitario, entendidas, de forma general, como los logros de aprendizaje de los estudiantes con un marcado objetivo de formar un perfil profesional (González y Wagenaar, 2003).

El Proyecto Tuning distingue entre *competencia*s *específicas* (vinculadas a áreas de estudio de una titulación) y *competencias genéricas* (comunes a cualquier titulación). A su vez clasifica las competencias en instrumentales, interpersonales y sistémicas.

González y Wagenaar (2003) han organizado en un listado de treinta competencias que detallan las tres competencias genéricas. El cuadro 2.1.2 describe tales competencias.

Cuadro 2.1.2: Listado de 30 competencias para el proyecto Tuning

Competencias instrumentales
Capacidad de análisis y síntesis
Capacidad de organizar y planificar
Conocimientos básicos de la profesión
Comunicación oral y escrita en la propia lengua
Conocimiento de una segunda lengua
Habilidades básicas en el manejo de ordenadores
Habilidades de gestión de información
Resolución de problemas
Toma de decisiones
Competencias interpersonales
Capacidad crítica y autocrítica
Trabajo en equipo
Habilidades interpersonales
Capacidad de trabajar en un equipo interdisciplinar
Capacidad para comunicarse con expertos de otras áreas
Apreciación de la diversidad y multiculturalidad
Habilidad de trabajar en un contexto internacional
Compromiso ético
Competencias sistémicas
Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica
Habilidades de investigación
Capacidad de aprender
Capacidad para adaptarse a nuevas situaciones
Capacidad para generar nuevas ideas (creatividad)
Liderazgo
Conocimiento de culturas y costumbres de otros pueblos
Habilidad para trabajar de forma autónoma
Diseño y gestión de proyectos
Iniciativa y espíritu emprendedor
Preocupación por la calidad
Motivación y logro

Una definición semejante de competencia la aportan Zabala y Arnau (2007). La competencia ha de identificar aquello que necesita cualquier persona para dar una respuesta a los problemas con los que se enfrentará a lo largo de su vida: supondrá una intervención eficaz en los diferentes ámbitos de la vida mediante acciones en las que se movilizan, al mismo tiempo y de manera interrelacionada, componentes actitudinales, procedimentales y conceptuales.

Escamilla (2008) sintetiza en tres focos la fundamentación de las competencias básicas: sociológica, psicológica y epistemológica. Estos tres focos posibilitan una caracterización de la competencia desde una perspectiva pedagógica. La figura 2.1.3 muestra las relaciones entre las distintas perspectivas.

De la variedad de nociones, definiciones y perfiles que puede entenderse el término "competencia", la propuesta del sociólogo francés Perrenoud es, a nuestro parecer, la que más ha repercutido en el campo educativo. Tal como se anunció en la introducción de este capítulo, la mayoría de los países europeos han modificado sus marcos curriculares en términos de competencia. Por tanto se produce un cambio significativo al pasar de un currículo que tiene como base un marco sicológico (Coll, 1989), a un marco de base sociológico (Perrenoud, 1999).

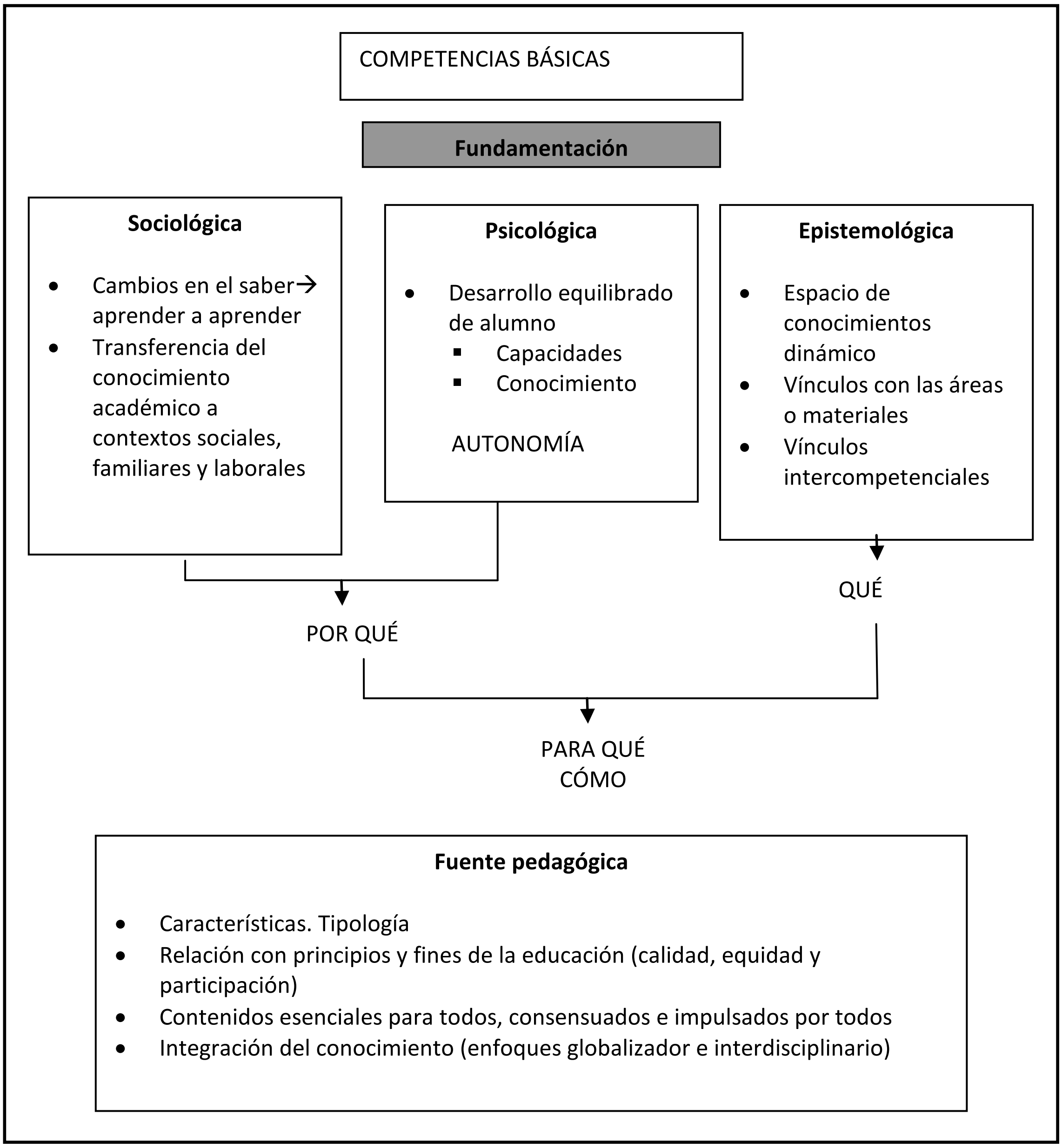


Figura 2.1.3: Fundamentación competencias básicas (Escamilla, 2008, pág 13)

El documento, *Competencias claves*, publicado por la red de educación europea (Eurydice, 2002) describe exhaustivamente de qué manera los currículos de educación, de cada uno de los países de la comunidad europea, se han organizado por medio de la noción de competencia. El cuadro 2.1.3 muestra la caracterización del término competencia y su uso en el currículo de matemáticas de seis países de la Unión Europea: .

Cuadro 2.1.3: Descripción del término competencia en distintos países

FRANCIA	ESPAÑA	PORTUGAL	INGLATERRA	FINLANDIA	ALEMANIA
Durante la enseñanza obligatoria, todas las materiales se enseñan con el fin de desarrollar la capacidad de hablar, leer y escribir. Se adquieren las competencias específicas material por materia. Todas las materiales contribuyen a la adquisición de las competencias	Se identifica el término competencias como el conjunto de capacidades que tiene que desarrollar el estudiante en la educación obligatoria. Se han identificado ocho competencias básicas: Las áreas del currículo incentiva estas competencias, por ejemplo el currículo describe como al área de matemáticas potencian cada una de las ocho competencias	La competencias se refiere al desarrollo integral de destrezas y actitudes que conducen al empleo de conocimientos en situaciones distintas, con las cuales el alumno puede estar familiarizado o no	Se utiliza el término *Skill* para referirse a competencia. Se ha organizado el currículo en 6 competencias, una de las cuales se nombra aplicación al cálculo y hace referencia directa a las matemáticas, y otra resolución de problemas que se potencia en todas las áreas.	Su currículo se estructura en competencias básicas, claves y esenciales. Identifica 6 competencias necesarias, una de las cuales es: "razonamiento matemático y sus aplicaciones". Por ejemplo, la aplicación de los conocimientos.	Competencia se refiere a las competencias que no son específicas de las áreas disciplinarias pero que representan un conjunto lógico de actitudes, valores, conocimientos y destrezas. Considera 6 competencias que no tienen relación con las materias obligatorias (no se relaciona ninguna con las matemáticas). La estructura del currículo consiste en que las competencias claves se potencien transversalmente

De la lectura del cuadro 2.1.3, se aprecia que una idea convergente es que las competencias son más bien transversales a las áreas curriculares. En el desarrollo de cada área se deben fijar criterios para potenciar dichas competencias. No obstante, el documento no aborda un análisis por cada materia que contribuya a identificar cuáles serían dichos criterios.

Garragori (2007) explica que el conjunto de propuestas curriculares que se están realizando en el ámbito europeo, se pueden organizar en tres modalidades:

1. Modelos curriculares en los que se diferencian (y se integran) las competencias generales o transversales y las competencias específicas de las áreas curriculares.

Ejemplo: Reino Unido

1. Comunicación.
2. Aplicación del cálculo.
3. Tecnologías de la información.
4. Trabajar con otros.
5. Mejorar el aprendizaje y el rendimiento propio.
6. Resolución de problemas.

2. Modelos curriculares mixtos en los que se contemplan, indistintamente, como competencias clave tanto competencias transversales como propias de las áreas disciplinares.

Ejemplo: Parlamento europeo (2006)

1. Comunicación en lengua materna
2. Comunicación en lenguas extranjeras
3. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología
4. Competencia digital
5. Aprender a aprender
6. Competencias interpersonales y cívicas
7. Espíritu emprendedor
8. Expresión cultural

Ejemplo: España

1. Competencia en comunicación lingüística.
2. Competencia matemática.
3. Competencia en el conocimiento e interacción con el mundo físico.
4. Tratamiento de la información y competencia digital.
5. Competencia social y ciudadana.
6. Competencia cultural y artística.
7. Competencia para aprender a aprender.
8. Autonomía e iniciativa personal.

3. Modelos curriculares en los que las competencias básicas no se diferencian de las áreas disciplinares

Ejemplo:

1. Lenguas (incluida la lengua materna).
2. Historia, educación cívica y geografía.
3. Matemáticas y ciencias (incluida la educación para la salud y la educación medioambiental).
4. Enseñanza técnica.
5. Enseñanza musical.
6. Educación física.

Según el país, las competencias se interpretan, ya sea insertándose transversalmente (caso 1), o relacionándose con las áreas (caso 2), o ya dentro de cada área (caso 3). El primer modelo es el establecido por el Proyecto DeSeCo y es seguido por una serie de países del Atlántico norte europeo, con el añadido de Grecia. El segundo modelo es el propuesto por la Comisión de las Comunidades Europeas, que siguen un conjunto de países del centro y sur de Europa, entre ellos España (MEC, 2006a, 2006b). El tercer modelo es el menos seguido. Finlandia e Italia siguen este modelo.

Si bien Garragori (2007) identifica Italia como ejemplo de este criterio, del informe Eurodyce (2002) se subraya que el término competencia clave no aparece en los currículos de Italia, y solamente se definen siete áreas de estudio –expuestas arriba-. Pero de ahí a concluir que las competencias sean las áreas curriculares es una interpretación propia de Garragori. Lo que sí podemos decir de forma segura es que las competencias, en el caso de Italia, no se presentan de forma explícita.

Recientemente se han realizado diversos estudios que comparan las directrices curriculares de distintos países, con especial énfasis en la consideración de las competencias como marco orientador. Como ejemplo se encuentra el análisis de San Martín (2004) que desde el contexto de la educación chilena, plantea la inserción de las competencias en la educación superior en Iberoamérica.

Si bien los currículos de los países europeos describen de qué manera se potencian las competencias en cada una de las áreas disciplinares, en el caso de las matemáticas nos parece que no se ha elaborado un análisis detallado de las mismas.

La relación de cada competencia con cada área disciplinar admite distintos grados, dado que esta relación puede ser más o menos estrecha, más o menos sustantiva, más o menos instrumental o más o menos holística; sustancialmente dependerá del dominio epistemológico de la competencia y del grado de afinidad con el área disciplinar (Escamilla, 2008).

Para cerrar la descripción de las competencia clave, exponemos una cita del informe Eurydice que describe las características de las competencias clave.

> Para que una competencia merezca el atributo de "clave", "fundamental", "esencial" o "básica", deber ser necesaria y beneficiosa para cualquier individuo y para la sociedad en su conjunto. Debe permitir que un individuo se integre apropiadamente en un número de redes sociales, al tiempo que permanece independiente y personalmente eficaz tanto en situaciones que le son conocidas como en otras nuevas e imprevisibles. Finalmente, puesto que todas las situaciones están sujetas a cambios, una competencia clave debe permitir a las personas actualizar sus conocimientos y destrezas constantemente con el fin de mantenerse al corriente de los nuevos avances. (Eurydice, 2002, p 14)

2.1.2.3 Características de las competencias

Zabala y Arnau (2007) plantean once ideas fuerza de las características de competencia. Dado que este trabajo ha sido relevante para muchas publicaciones posteriores referidas a las competencias, consideramos oportuno señalarlas (cuadro 2.1.4).

Cuadro 2.1.4: 11 ideas clave (Zabala y Arnau, 2007)

1	El uso del término "competencia" es consecuencia de la necesidad de superar una enseñanza que, en la mayoría de los casos, se ha reducido al aprendizaje memorístico de conocimientos, hecho que conlleva la dificultad para que éstos puedan ser aplicados en la vida real.
2	La competencia consiste en la intervención eficaz en los diferentes ámbitos de la vida, mediante acciones en la que se movilizan, al mismo tiempo y de manera interrelacionada, componentes actitudinales, procedimentales y conceptuales.
3	La competencia y los conocimientos no son antagónicos, ya que cualquier actuación competente siempre implica el uso de conocimientos interrelacionados con *habilidades y actitudes.*
4	Para poder decidir qué competencias son objeto de la educación, el paso previo es definir cuáles deben ser sus finalidades. Existe un acuerdo generalizado en que éstas deben contribuir al pleno desarrollo de la personalidad en todos los ámbitos de la vida.
5	Las competencias escolares deben abarcar el ámbito social, interpersonal, personal y profesional.

6	El aprendizaje de una competencia está muy alejado de lo que es un aprendizaje mecánico; implica el mayor grado de *significancia* y *funcionalidad* posible, ya que para poder ser utilizada deben tener sentido tanto la propia competencia como sus componentes procedimentales, actitudinales y conceptuales.
7	Enseñar competencias implica utilizar formas de enseñanza consistentes en dar respuesta a situaciones, conflictos y problemas cercanos a la vida real, en un complejo proceso de construcción personal con ejercitaciones de progresiva dificultad y ayudas contingentes según las características diferenciales del alumnado.
8	El análisis de las competencias nos permite concluir que su fundamentación no puede reducirse al conocimiento que aportan los distintos saberes científicos, lo que implica llevar a cabo un abordaje educativo que tenga en cuenta al carácter metadisciplinar de una gran parte de sus componentes.
9	Una enseñanza de competencias para la vida exige la creación de un área específica para todos sus componentes de carácter metadisciplinar, que permita la reflexión y el estudio teórico y, al mismo tiempo, su aprendizaje sistémico en todas las otras áreas.
10	No existe una metodología propia para la enseñanza de las competencias, pero sí unas condiciones generales sobre cómo deben ser las estrategias metodológicas, entre las que cabe destacar la de que todas deben tener un enfoque globalizador.
11	Conocer el grado de dominio que el alumnado ha adquirido de una competencia es una tarea bastante compleja, ya que implica partir de situaciones- problema que simulen contextos reales y disponer de los medios de evaluación específicos para cada uno de los componentes de la competencia.

Asimismo, estos autores señalan cuatro características esenciales de las competencias: (1) Su significancia; (2) La complejidad de la situación en la que debe utilizarse; (3) Su carácter procedimental;(4) El estar constituida por una combinación integrada de componentes que se aprenden desde su funcionalidad y de forma distinta.

Por otra parte, Escamilla a partir de trabajos anteriores (Tobón et. al., 2006; Coll, 2007; Pérez y Gómez, 2007; Zabala y Arnau, 2007, extraído de Escamilla, 2008) ha identificado siete características de las competencias básicas: complejidad, reflexión, responsabilidad, educabilidad y evolución, integración, adaptación al contexto, creatividad e innovación (Figura 2.1.4).

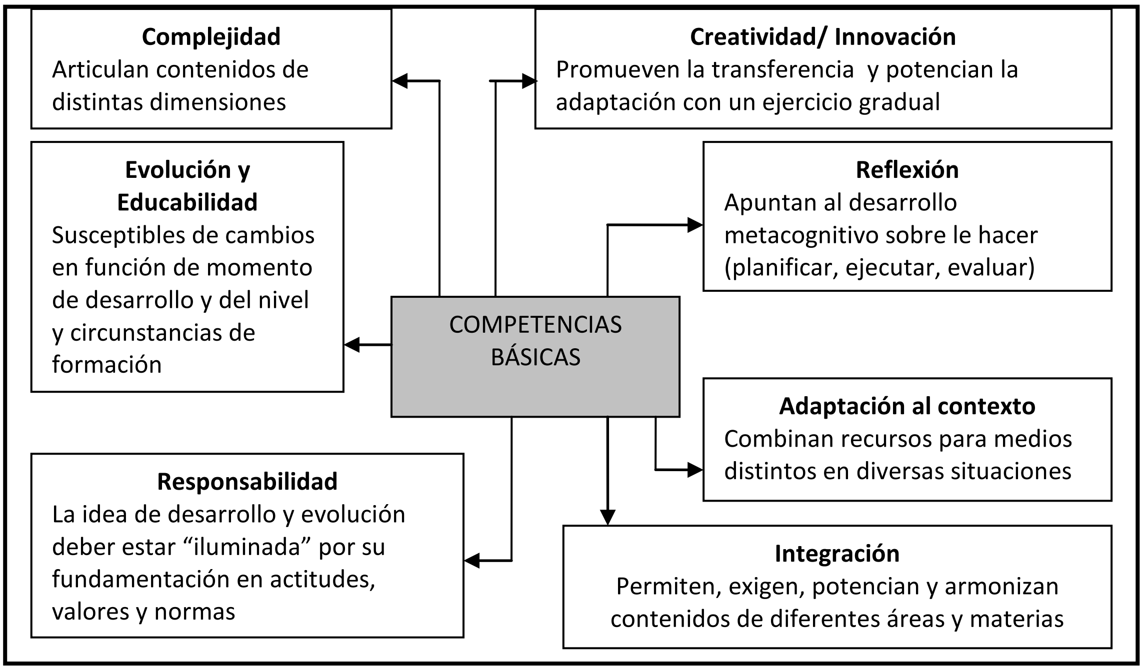


Figura 2.1.4: características de las competencias (Escamilla, 2008)

Esta misma autora (Escamilla, 2008) ha clasificado las competencias en función de su nivel de concreción y generalidad, definiendo cinco tipos de competencias: *esenciales*, *básicas* o claves, *generales*, *específicas*, *operativas*. La Figura 2.1.5 las describe de manera sintética.

DENOMINACIÓN		*CONCEPTUALIZACION*	UBICACIÓN/ÁMBITO DE RESPONSABILIDAD
Esenciales Claves/ básicas		*Núcleos de referencia*	Instituciones y organismos internacionales, continentales, estatales y autonómicos
Generales	*Habilidades*	*Enunciados de referencia común para amplios grupos de áreas/ materias en diferentes cursos*	Currículos oficiales y concreciones en los centros, ciclos y áreas
Específicas		*Enunciados de referencia para un área d/ materia afines*	
Operativas	*Destrezas*	*Enunciados para áreas/ materias con contenidos delimitados y circunstancias definidas*	Programación de aula de las áreas/ materias

Figura 2.1.5: Marco de desarrollo. (Escamilla, 2008)

Finalmente, Rico y Lupiáñez (2008) han elaborado un cuadro resumen (cuadro 2.1.5) de la estructura de las competencias desde el punto de vista de varios investigadores y estudios.

Cuadro 2.1.5: síntesis estructura de las competencias (Rico, Lupiáñez, 2008)

Autor/ año	Componentes	Finalidad	Contexto
CEE/ 2005	Conocimiento, capacidades, actitudes	Actuar	Situación determinada
Perrenoud/ 1997	Capacidades, conocimientos	Actuar	Situaciones definidas
Weinert/ 2001	Capacidades, conocimientos, destrezas	Alcanzar un objetivo	No explícito
Coolahan/ 1996	Conocimientos, experiencias, valores, disposiciones	Desarrollo personal	Práctica educativa
World Education Congrees/ 1990	Contenidos básicos aprendizaje, Conocimientos, destrezas, valores, actitudes	Vivir/trabajar, desarrollar capacidades, mejorar calidad vida, tomar decisiones	Social
DeSeCo/ 2005	Conocimientos, destrezas, actitudes	Enfrentar demandas complejas	Contexto particular
PISA/ 2005	Capacidad para analizar, razonar y comunicar	Interpretar y resolver problemas	Variedad de áreas
Tuning/ 2003	Capacidades, conocimiento, comprensión, valores, aptitudes, destrezas, responsabilidades	Actuar, aplicar conocimientos a la práctica	Ciertas situaciones
MEC/ 2005	Conocimientos, habilidades, actitudes, valores	Afrontar resolución de problemas, intervenir en asuntos	Académico, profesional, social

Del listado sobre finalidad de la competencia (tercera columna), se aprecian dos grupos: la acción, como manifestación y expresión del ser competente, o bien el desarrollo personal y social que el sujeto alcanza por medio de la competencia. Acción y desarrollo, según estas definiciones, son las dos funciones de las competencias. Para su adquisición son necesarios diversos conocimientos y diferentes capacidades, destrezas, actitudes y valores.

Desde un punto de vista evaluativo en un marco de competencias, identificamos cinco características de las competencias (Laurier, 2005; extraído de Rico y Lupiáñez 2008) que se asemejan con la propuesta de Zabala y Arnau: se desarrollan a lo largo del tiempo; se muestran por medio de una acción; combinan conocimientos, habilidades y actitudes, son interdependientes; tienen un carácter contextualizado.

Limitaciones de un currículo por competencias

Hasta ahora se han descrito, en términos generales, las ventajas que aportan las competencias. Pero por otro lado, varios autores (Coll, 1999; Garragori, 2007; Escamilla, 2008) se han preguntado el auténtico valor de las competencias tras su significativa y poderosa entrada al ámbito de educación, sobre todo en los aspectos curriculares. Para Escamilla (2008) el problema no está en el enfoque de competencia, sino en su deficiente interpretación, y en consecuencia, mal empleo. En el cuadro 2.1.6 se sintetizan las principales ventajas y desventajas

Cuadro 2.1.6: Ventajas y desventajas de las competencias (Escamilla, 2008)

COMPETENCIAS BÁSICAS	
Dificultades que hay que prever	Ventajas que pueden aportar
• Polarización hacia prácticas no fundamentadas • Falta de acuerdo sobre prioridades o sobre medios • Prácticas cerradas como eje de atención (desvirtuación del enfoque) • Desestimación del papel de los restantes elementos curriculares	• Superación del pragmatismo e instrumentalización de prácticas cerradas • Integración de tipos de contenidos • Marcos de trabajo consensuados • Convergencia del trabajo educativo • Promoción y exigencia del trabajo en equipo • Impulso al cambio y la innovación • Estímulo de las habilidades metacognitivas

2.2.1.4 Estructura de una unidad didáctica en un marco de competencias

La concreción de la perspectiva de competencias en el currículo pasa, por una parte, por la elaboración de materiales curriculares. En nuestro estudio uno de los propósitos es el análisis de unidades didáctica desde la perspectiva de competencias. Este aspecto de innovación actualmente se ha desarrollado muy poco, pero es un punto que, cada vez más, es de principal interés para la comunidad educativa. A continuación se identifican dos propuestas que abordan el tema.

En una concreción curricular en términos de competencias, Rico y Lupiáñez (2008) diseñan una estructura curricular que se ha resumido en el cuadro 2.1.7.

Cuadro 2.1 7: Estructura curricular de un marco de competencias

Características modelo	Diseño de tareas Enseñar a los alumnos a encontrar y movilizar recursos para aportar respuestas a las tareas Promover la reflexión metacognitiva para el éxito de la acción
Descripción	Los objetivos no se describen en términos de conocimientos sino de actuaciones. Se pasa de una lógica de contenidos a una lógica de acción. Las tareas son medios de aprendizaje
Características	Contribuyen al desarrollo cognitivo de los escolares

tareas	Centran sus expectativas de aprendizaje en el logro de competencias Por lo general son complejas Orientada a la acción El contexto de la tarea y su objetivo movilizan la selección de recursos y orientan su organización
Evaluación competencias	Se contemplan expectativas de aprendizaje. Contenidos y tareas, organizados de modo coherente
Planificación por competencias	Se actúa sobre la resolución de tareas no convencionales Se consideran tres dimensiones: conocimiento, capacidades y tareas Una competencia no está ligada indistintivamente a todas las tareas posibles sino a un grupo destacado que presentan características comunes (familia de tareas) Considerar el nivel de dificultad y grado de complejidad de la tarea

Zabala y Arnau (2007) plantean que será necesario establecer una secuencia de actividades de enseñanza- aprendizaje que cumplan con las pautas siguientes:

- Las actividades deben partir de situaciones significativas y funcionales, a fin de que el procedimiento pueda ser aprendido con la capacidad para utilizarlo cuando sea necesario.
- La secuencia debe contemplar actividades que incluyan los modelos de desarrollo del contenido de aprendizaje.
- Secuencia clara con orden de actividades que siga un proceso gradual
- Actividades con ayuda de diferente grado y práctica guiada
- Actividades de trabajo independiente

2.1.3 Competencia matemática

Hasta el momento se ha descrito el origen de las competencias, su evolución, como se está implantando en varios países y sus características a nivel de estructura curricular. Dado que nuestra investigación se centra en las competencias matemáticas, el foco de atención en este apartado es desarrollar un marco que permita elaborar un modelo de competencia matemática. Para ello en el apartado 2.3.1 se describe la puesta en marcha de diferentes proyectos en educación matemática en torno a las competencias, para luego en el apartado 2.3.2 estructurar cuatro significados diferentes de competencia matemática que sirvan de base para proponer un modelo de competencia matemática acorde con los objetivos de la investigación.

En el cuadro 2.18 se presentan definiciones de competencia matemática. Además se han identificado los aspectos claves que se trabajan en cada una.

Cuadro 2.1.8: Definiciones competencia matemática

Aspectos claves	Definición
Desarrollo de habilidades Aspecto funcional Proceso de matematización	El conjunto de habilidades y destrezas relacionadas con el reconocimiento e interpretación de los problemas que aparecen en los diferentes ámbitos y situaciones (familiares, sociales, académicos o profesionales); su traducción al lenguaje y contextos matemáticos; su resolución, empleando los procedimientos oportunos; la interpretación de los resultados y la formulación y comunicación de tales resultados. (Escamilla, 2008)
Desarrollo de habilidades Alfabetización matemática Aspecto funcional Proceso de matematización	La competencia matemática es la habilidad para utilizar sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y fracciones en el cálculo mental o escrito con el fin de resolver diversos problemas en situaciones cotidianas. El énfasis se sitúa en el proceso de la actividad, aunque también en los conocimientos. (Comisión de las Comunidades Europeas, 2005, pág. 17)
Alfabetización matemática Uso social de las matemáticas	Asegurar que todos los ciudadanos alcanzan el dominio de la lectura, escritura y del cálculo es una condición indispensable para garantizar un aprendizaje de calidad. Son la clave para todas las capacidades de aprendizaje posterior, así como para las posibilidades de empleo. (…) Tanto la lectura y la escritura como el cálculo son también competencias transversales del currículo (Euridyce 2002, p. 15-16)
Desarrollo de las capacidades Aspecto funcional Capacidad reflexiva	Competencia matemática es una capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. (OCDE, 2006, pág. 74)
Aspecto funcional Uso social de las matemáticas. Aplicar el conocimiento matemático de manera espontanea	La competencia matemática consiste en un saber hacer en la práctica mediante herramientas matemáticas. Consiste en utilizar la actividad matemática en contextos tan variados como sea posible. Hace especial énfasis en aspectos sociales como la comunicación y la argumentación. Muestra cómo los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de a vida cotidiana. Se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen de manera espontánea a una amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana. (Rico y Lupiáñez, 2008)

Se aprecia que el aspecto funcional de las matemáticas se destaca de forma transversal en las definiciones, aspecto que también va ligado al uso social de las matemáticas y a aplicar el conocimiento matemático de manera espontanea. Asimismo en tres definiciones se alude a la naturaleza de la competencia, asociándola como una habilidad o capacidad. Luego hay otras interpretaciones que no son transversales pero son significativas, tales como aludir a la alfabetización de las matemáticas y al proceso de matematización. En PISA (OCDE, 2006) además de destacar el aspecto funcional y uso social de las matemáticas, es la única en que se resalta de forma explícita el desarrollo de la capacidad reflexiva. La perspectiva de PISA servirá de base para el modelo de competencia expuesto en el apartado 2.1.5.

En el siguiente sub apartado se muestra cómo se ha puesto en marcha la noción de competencia matemática en tres proyectos educativos en educación matemática. Ellos ilustran cómo se ha desarrollado el enfoque de competencia dentro del área de matemáticas.

2.1.3.1 Puesta en marcha de las competencias matemáticas

Portugal: Proyecto MAT_{747}, de Paulo Abrantes

Paulo Abrantes ha sido uno de los pioneros en reflexionar sobre las competencias y las matemáticas. A mediados de la década del 90' impulsa el proyecto MAT_{789} (Abrantes, 1994), cuyo espíritu se enfocaba en potenciar capacidades a los alumnos en situaciones inherentes a la vida diaria, que se concretó en los denominados "proyectos matemáticos"; este proyecto fue germen de una propuesta curricular en matemáticas (Currículo Nacional do Ensino Básico, 2001), diseñada, entre otros, por el propio Abrantes siendo director del Departamento de Educación de Básica del Ministerio de Educación de Portugal (1999-2002).

A partir de la experiencia curricular en Portugal, Abrantes plantea una caracterización de competencias matemáticas (Abrantes, 2001). Siguiendo a Perrenoud (1999), describe la competencia como la capacidad de improvisar, no como un acto espontáneo sino como resultado del aprendizaje, que tiene componentes tanto cognitivos como sociales y pragmáticos y que supone la utilización de conocimientos, destrezas y estrategias en una variedad de contextos.

Así, en el currículo portugués se adoptó el concepto de competencia poniendo énfasis en la integración de conocimientos, procedimientos y actitudes. Se proponen las siguientes competencias esenciales:

- Conocer, en un adecuado nivel, las ideas fundamentales, los métodos de las matemáticas, así como valorar las matemáticas.
- Desarrollar la capacidad de usar las matemáticas para resolver problemas, razonar y comunicar así como tener confianza para hacerlas.

Los aspectos principales de la competencia matemática fueron expresados así:

La competencia matemática que todos los estudiantes deberían desarrollar en la educación básica integra actitudes, habilidades y conocimiento, e incluye:

- La disposición para pensar matemáticamente, esto es, explorar situaciones problemáticas, buscar patrones, formular y probar conjeturas, generalizar, pensar lógicamente.
- El placer y la seguridad en sí mismo en el desarrollo de actividades intelectuales que implican el razonamiento matemático, y la concepción que la validez de una

afirmación se relaciona con la coherencia de la argumentación lógica más que con alguna autoridad externa.

- La capacidad para discutir con otros y comunicar el pensamiento matemático, empleando tanto el lenguaje escrito como el oral.

- La comprensión de nociones tales como: conjetura, teorema y prueba, así como la comprensión de las consecuencias del empleo de definiciones diferentes.

- La disposición para intentar entender la estructura de un problema y la capacidad para desarrollar procesos de resolución de problemas, analizar errores e intentar estrategias alternativas.

- La capacidad para decidir sobre la plausibilidad de un resultado y usar, según la situación, procesos mentales computacionales, algoritmos escritos o dispositivos tecnológicos.

- La tendencia de ver y apreciar la estructura abstracta base de una situación, de la vida diaria, la naturaleza o el arte, implicando tanto elementos numéricos como geométricos.

(Abrantes, 2001)

Para el desarrollo de estas competencias se ponen en juego situaciones matemáticas que potencien procesos matemáticos tales como el razonamiento, la argumentación, la construcción de modelos, la interpretación, etc. La incorporación de actividades que acentúen el desarrollo de procesos transversales al desarrollo de contenidos, es fundamental en una perspectiva por competencias.

Algunas de las características de las competencias matemáticas son (APM, 2001)

- La importancia de una situación problemática que de pie a generar una serie de razonamientos habilidades y actuaciones en el aula de matemáticas, tanto del los estudiantes como del profesor.
- Buscar que “todos” los alumnos sean capaces de desplegar un conjunto de actitudes, capacidades y de conocimientos relativos a la matemáticas.
- Tipos de estrategias para desarrollar tareas matemáticas en un contexto de competencias tales como un contexto de resolución de problemas; actividades de investigación o trabajo por proyectos

Dinamarca: Proyecto KOM; Niss

El proyecto KOM (KOM: Competencias y Aprendizaje de las Matemáticas) (Niss, 2002), iniciado por el Ministerio de Educación de Dinamarca, tuvo como propósito crear una plataforma que llevara a cabo una reforma en la enseñanza de las matemáticas de la escuela a la universidad. Mogens Niss, director del proyecto, fue quien impulsó una caracterización del currículo de matemáticas en términos de competencia.

El proyecto KOM plantea que ser competente en el aspecto personal, profesional o social es dominar (en condiciones y circunstancias justas) los parámetros esenciales de la vida. *La competencia matemática* es la habilidad de entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de situaciones y contextos intra y extra matemáticos, en los que éstas juegan o podrían jugar un papel.

El proyecto adoptó una propuesta elaborada anteriormente por Niss para identificar las competencias matemáticas (Niss, 1999), y se concretó en ocho competencias, agrupadas en dos partes. (En el siguiente sub-apartado 2. 3.1.3 se describen en detalle).

El primer grupo de competencias tiene que ver con la habilidad de preguntar y contestar preguntas respecto a las matemáticas:

1- Pensar matemáticamente
2- Plantear y resolver problemas matemáticos
3- Modelizar matemáticamente
4- Razonar matemáticamente

El segundo grupo tiene relación con la destreza o habilidad en el manejo del lenguaje matemático y de las herramientas matemáticas:

5- Representar entidades matemáticas
6- Manejar símbolos y formalismos matemáticos
7- Comunicarse en, con, y sobre la matemática
8- Hacer uso de ayudas y herramientas (incluidas las tecnológicas)

Estas ocho competencias tienen que ver con procesos, actividades, y comportamientos mentales o físicos. Es decir el enfoque está en lo que los individuos pueden hacer.

Para Niss, estas competencias están estrechamente relacionadas. Forman un grupo en el que continuamente se solapan. Sin embargo son distintas en el sentido en que sus centros de gravedad están claramente delineados y desunidos. Todas las competencias tienen una naturaleza dual pues tienen un aspecto *analítico* y uno *productivo*. *El aspecto analítico* de una competencia se enfoca hacia la comprensión, interpretación, revisión y evaluación de fenómenos y procesos matemáticos, como, por ejemplo, seguir y controlar una cadena de argumentos matemáticos o comprender la naturaleza y el uso de alguna representación matemática. Mientras que el *aspecto productivo* se enfoca hacia la construcción activa o consecución de procesos, como inventar una cadena de argumentos o la activación y el empleo de alguna representación matemática en una situación dada.

De acuerdo con Niss (2002) una competencia matemática sólo puede desarrollarse y puede ejercerse en el manejo de una disciplina. Esto implica que la relación se puede representar adecuadamente con una matriz cuyas filas son los temas escogidos para el nivel (referido curso escolar) y las columnas sean las ocho competencias. Entonces cada celda especificaría cómo la competencia correspondiente se manifiesta al tratar con el tema correspondiente al nivel educativo dado. Sin embargo, curiosamente la opción de elección de temas a incluir en el currículo, por lo general, no sale del enfoque por competencias. Más bien las competencias y las áreas temáticas matemáticas son vistas como ortogonales.

No obstante, Niss no llega a concretar este razonamiento en un diseño curricular o ejemplo concreto. Esta propuesta aparece reflejada en la propuesta de Lupiáñez y Rico (2006) que luego se presenta en el sub apartado 2.1.3.2 y que será la base del modelo curricular de competencias que se presenta en el apartado 2.1.8.

PISA

En la elaboración del sector de Matemática en PISA, participó un equipo internacional de expertos en didáctica de las matemáticas, entre ellos Jan de Lange y Mogens Niss. El equipo propone un marco teórico para PISA que enlaza el marco del procesos de matematización desarrollado por de Lange (1999) y las competencias de Niss. En este ensamblaje desarrollan la noción de *mathematical literacy*, traducido al castellano como alfabetización matemática; sin embargo, en los documentos de PISA en versión castellana (OCDE, 2003, 2006) se ha traducido como *Competencia Matemática*.

Para el equipo OCDE/PISA, el término "competencia matemática" se ha elegido con el fin de hacer hincapié en el carácter *funcional* del conocimiento matemático y en la posibilidad de aplicarlo de forma variada, reflexiva y perspicaz a una multiplicidad de situaciones de los más diversos tipos. Para que dicho uso sea posible y viable se requiere un considerable volumen de conocimientos y habilidades matemáticas fundamentales y, como es natural, dichas habilidades forman parte de la definición de competencia que considera este equipo.

PISA, al ser un marco con propósitos evaluativos, estructura una serie de elementos necesarios para evaluar la competencia matemática. Desde nuestra perspectiva, considerando el propósito de desarrollar las competencias matemáticas en un marco de enseñanza y no sólo de evaluación, rescatamos su visión sobre los *procesos matemáticos*. Para PISA, un individuo que tenga que emplear de forma satisfactoria la matematización dentro de una gran variedad de situaciones y contextos, intra y extramatemáticos, así como en el ámbito de las ideas clave, necesita poseer una serie de procesos matemáticos que, considerados en su conjunto, y dominados en mayor o menor grado, conforman el concepto de competencia matemática.

Los ocho procesos matemáticos que se caracterizan en PISA, son una adaptación muy fiel de la propuesta de Niss (1999) para la reforma curricular danesa (Niss, 2002). A continuación se presentan las competencias que el marco teórico de PISA utiliza:

- **Pensar y razonar**. Plantear y reconocer preguntas; distinguir entre diferentes tipos de proposiciones matemáticas; entender y manipular el rango y los límites de ciertos conceptos matemáticos.
- **Argumentar**. Saber qué es una prueba matemática y cómo se diferencia de otros tipos de razonamientos; poder seguir y evaluar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; desarrollar procedimientos intuitivos y construir y expresar argumentos matemáticos.
- **Comunicar**. Entender y hacerse entender en forma oral o escrita.
- **Construcción de modelos**. Estudiar los procesos de modelización (identificar, reflexionar, analizar y plantear críticas a un modelo y sus procesos).
- **Plantear y resolver problemas**. Plantear, formular, definir y resolver diferentes tipos de problemas matemáticos utilizando una variedad de métodos.

- **Representar**. Traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones de objetos y situaciones matemáticas, y las interrelaciones entre ellas; escoger entre diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito particular.
- **Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas**. Decodificar, interpretar y manipular el lenguaje formal y simbólico, entender su relación con el lenguaje natural, utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.
- **Empleo de material y herramientas de apoyo**. Conocer, y ser capaz de utilizar diversas ayudas y herramientas (incluyendo las tecnologías de la información y las comunicaciones TICs) que facilitan la actividad matemática, y comprender las limitaciones de estas ayudas y herramientas.

En el ejercicio de caracterizar los ítemes en términos de las competencias que se ponen en juego, PISA sugiere otra organización que resulte más operativa para clasificar los ítems:

> La intención del proyecto OCDE/PISA no consiste en desarrollar preguntas de prueba que evalúen las competencias arriba mencionadas por separado. Dichas competencias se entremezclan y a menudo es necesario, al ejercitar las matemáticas, recurrir al mismo tiempo a muchas competencias, de manera que el intentar evaluar las competencias por separado resultaría por lo general una tarea artificial y una compartimentación innecesaria del área. Las diferentes competencias que presenten los alumnos variarán considerablemente de una persona a otra.
>
> Para describir y transmitir de manera productiva las capacidades de los estudiantes, así como sus puntos fuertes y sus puntos débiles desde una perspectiva internacional, es necesaria cierta estructura. Un modo de ofrecerla de una manera comprensible y manejable es describir grupos de competencias a partir de los tipos de requisitos cognitivos necesarios para resolver diferentes problemas matemáticos.
>
> El proyecto OCDE/PISA ha elegido describir las acciones cognitivas que estas competencias engloban de acuerdo a tres grupos de competencia: el grupo de reproducción, el grupo de conexión y el grupo de reflexión. (OCDE, 2003)

La reflexión citada, que sustenta el marco teórico de PISA, ya se encuentra en un proyecto anterior del propio Lange (de Lange, 1999), y es en dicho proyecto en el que surge la idea de "*Grupos de competencia*". Rico y Lupiáñez (2008) explican que las competencias matemáticas no son variables de tarea sino del sujeto, y por ello, no es posible establecer a priori a cuál de los procesos elegidos corresponde asignar una tarea determinada. Por lo general una tarea puede movilizar diversos procesos, puesto que los sujetos que la resuelven lo pueden hacer por distintas vías. Las respuestas de los sujetos a tareas con distintos niveles de complejidad permiten establecer niveles de competencia entre los estudiantes. En los resultados empíricos de la prueba PISA se confirma la hipótesis de que los estudiantes que resuelven problemas de mayor complejidad también responden a los problemas de complejidad inferior; por tanto, a partir de los resultados de los estudiantes se observa una mayor riqueza de niveles que el planteamiento teórico en tres categorías de complejidad.

Así, los Grupos de Competencia se distinguen por las *demandas cognitivas* implicadas en los procesos requeridos por las tareas que los ejemplifican. En el cuadro 2.1.9 se definen los tres *grupos de competencia* y se tratan las maneras en que se interpretan cada una de las competencias dentro de cada grupo.

Cuadro 2.1.9: Grupos de competencia

Reproducción	Conexión	*Reflexión*
Las competencias de este grupo implican esencialmente la reproducción del conocimiento estudiado. Incluyen aquellos que se emplean más frecuentemente en las pruebas estandarizadas y en los libros de texto: conocimiento de hechos, representaciones de problemas comunes, la identificación de equivalentes, recopilación de propiedades y objetos matemáticos familiares, ejecución de procedimientos rutinarios, aplicación de destrezas técnicas y de algoritmos habituales, el manejo de expresiones con símbolos y fórmulas establecidas y realización de cálculos.	Las competencias del grupo de conexión se apoyan sobre las del grupo de reproducción, conduciendo a situaciones de solución de problemas que ya no son rutinarias, aunque aún incluyen escenarios familiares o casi familiares.	Las competencias de este grupo incluyen un elemento de reflexión por parte del estudiante sobre los procesos necesarios o empleados para resolver un problema. Relacionan las capacidades de los alumnos para planificar estrategias de resolución y aplicarlas en escenarios de problema que contienen más elementos y pueden ser más "originales" (es decir, menos familiares) que los que se dan en el grupo de *conexión.*

Estos grupos de competencia tienen sus orígenes a finales de la década de los 80' en pruebas de evaluación en Holanda. En el diseño de dichas pruebas se consideran dos grupos para clasificar los ítems: reproducción y producción (Kleijne y Schuring, 1993). En el apartado 2.3.3 se trata el desarrollo de los grupos de competencia con detalle.

Para finalizar, se presenta la figura 2.1.6 que resume la estructura curricular de PISA (Rico y Lupiáñez, 2008).

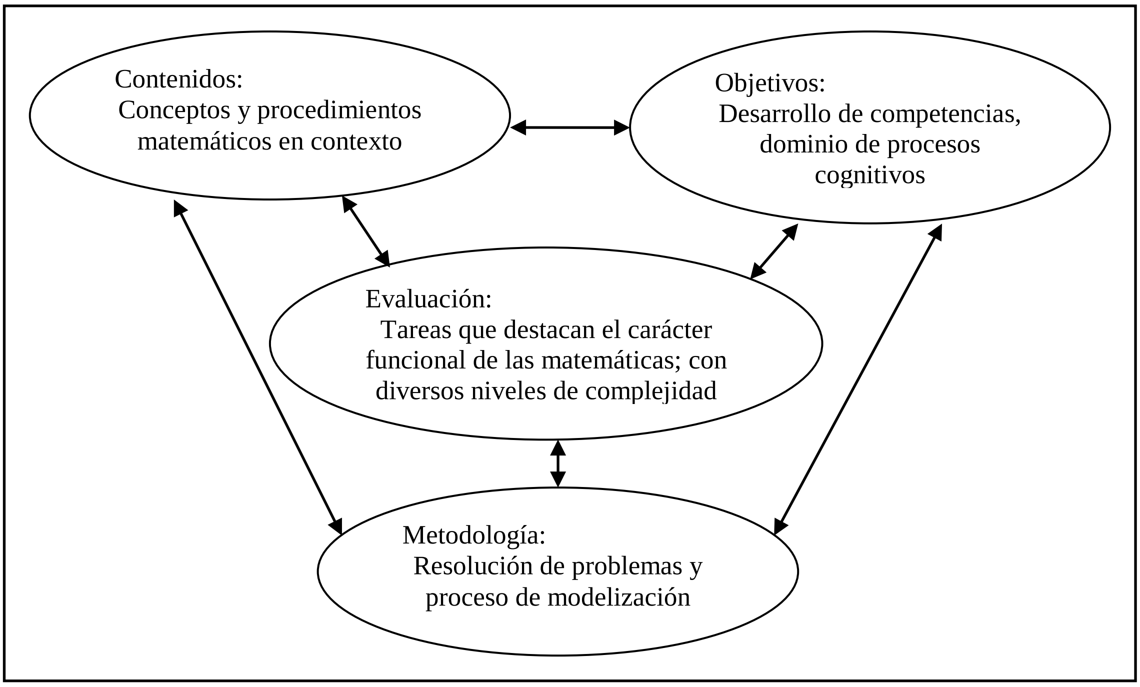


Figura 2.1.6: Estructura curricular de PISA (Rico, Lupiáñez, 2008)

A modo de síntesis de las tres experiencias

Se han presentado tres experiencias, MAT_{747} de Abrantes, proyecto Kom de Niss y el marco teórico de PISA. Proyectos que preferimos denominarlos recorridos de la competencia matemática. Indudablemente hay otros recorridos de la competencia matemática en otros contextos educativos que pueden ser significativos, pero, desde nuestro punto de vista, estos tres recorridos son los iniciales que han dado pie a los demás. En efecto, en cada país de la Unión Europea actualmente se desarrolla una intensa discusión respecto a cómo desarrollar la competencia matemática. En particular en España, se reunió la federación de profesores de matemática FESPM en octubre del 2008 en un seminario para tratar las competencias matemáticas, una de sus conclusiones es seguir como competencias las propuestas por PISA (FESPM, 2009). Por tanto, se aprecia que el enfoque por competencias de PISA está muy presente en España.

2.1.3.2 Significados de competencia matemática.

Desde los orígenes de la primera definición de competencia matemática hasta el presente, han ido apareciendo una serie de definiciones y significados de la misma. En este apartado se presentan las diferentes nociones de competencia matemática en cuatro subapartados.

Comprensión y competencia

Una de las discusiones que se ha desarrollado en la literatura para definir el significado de competencia se centra en establecer su relación o incluso su contraposición con la noción de “comprensión”. Para Godino (2002b) la competencia atiende a un componente práctico -saber hacer-, mientras que la comprensión, a un componente teórico -saber qué hacer y por qué-. Tanto la competencia como la comprensión ponen en juego conocimientos. En el primer caso se trata de conocimientos de tipo procedimental, en el segundo, de tipo conceptual y argumentativo. Para este autor concebir un modelo de competencia matemática es un proceso semejante a caracterizar un modelo de comprensión. Si bien se han planteado modelos para la comprensión como el de Skemp (1976; extraído de Godino, 2002b), éstos no son válidos para explicar un modelo que considera tanto la comprensión como la competencia.

Por otra parte, Font (2001) plantea una dicotomía distinta al argumentar que la comprensión se puede entender como una *competencia* o como un *proceso mental*. En el primer caso, la comprensión se ve desde un punto de vista pragmático y se entiende el significado como el uso que se le atribuye en diferentes contextos. El “saber” un objeto matemático consiste en ser capaz de reconocer las propiedades y representaciones características, relacionarlas con el resto de objetos matemáticos y usarlas en toda una variedad de situaciones problemáticas prototípicas que son propuestas en el aula de matemáticas. Este punto de vista pragmático se basa en la suposición que los sistemas matemáticos de signos que se manipulan en el aula adquieren significado para los alumnos cuando son usados en el aula. Optar por esta visión del significado implica focalizar el interés en las prácticas públicas y dejar en un segundo plano el interés por los procesos mentales de los alumnos.

En cambio, según Font, entender la comprensión como proceso mental, tiene como consecuencia que el significado objetivo se entiende como una mayor o menor correspondencia con una estado de cosas dadas previamente, mientras que el significado personal que atribuye un alumno se entiende como la integración de un nuevo contenido en los esquemas previos.

Esta manera de entender el significado postula unas entidades mentales que las personas traen con ellas, y que son la causa del uso correcto que hace el alumno. Mientras que el primer punto de vista entiende la "comprensión" y el "saber" en términos de "competencia", el segundo punto de vista los entiende en términos de "procesos y entidades mentales". Para este último punto de vista, que es el que ha inspirado las bases psicopedagógicas del actual sistema educativo – Constructivismo (Coll, 1989)- el concepto clave es el de "aprendizaje significativo". En síntesis, si se hace hincapié en el uso competente, la enseñanza y el aprendizaje se entienden en términos de competencias, mientras que si se hace hincapié en la integración del nuevo contenido en los esquemas del alumno de manera significativa, la enseñanza y el aprendizaje se entienden fundamentalmente en términos de objetivos que se han de lograr.

Capacidades y competencia

Argumentar, resolver problemas y representar, por citar algunas, son consideradas como competencias matemáticas. Dichas competencias son caracterizaciones, en términos de procesos, de la actividad matemática. Pero ¿cómo desarrollar estas competencias? Para varios autores (Vergnaud, 2007; Lemke, 2007; Lupiáñez y Rico, 2006; Gómez y Lupiáñez, 2007; Rico y Lupiáñez, 2008) el desarrollo de las *capacidades* en el estudiante contribuye a la adquisición de competencias.

Lupiáñez y Rico (2006) describen la diferencia entre capacidad y competencia. Las competencias se conciben como desarrollables a largo plazo en la actividad matemática escolar (un semestre, un curso, un ciclo educativo), mientras que las capacidades es aquello que hay que adquirir en una actividad matemática concreta. De esta manera se utiliza el término capacidades para referirse a la actuación de un estudiante con respecto a cierto tipo de tarea.

La figura 2.1.7 ilustra la relación entre capacidad, contenido y tarea.

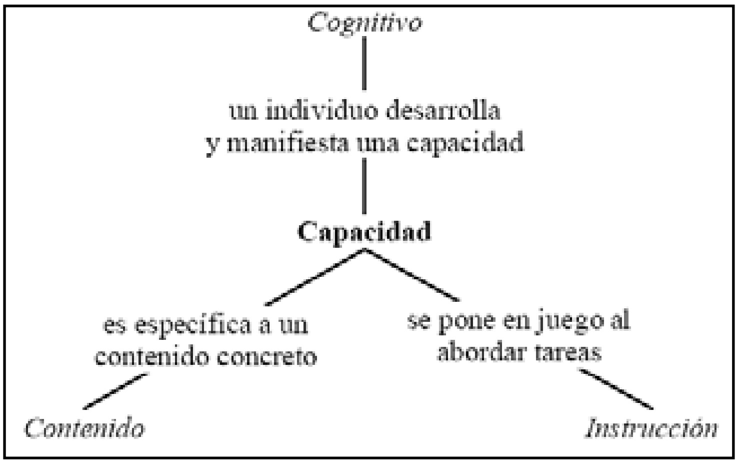


Figura 2.1.7: Relaciones de la noción de capacidad (Gómez y Lupiáñez, 2007)

Para Lupiáñez y Rico (2006), la descripción de PISA respecto a las competencias se asemeja a lo que son las capacidades, con la diferencia que ser competente en matemáticas es un objetivo a largo plazo.

> *Por tanto, las capacidades que desarrollan los escolares en los distintos temas de matemáticas contribuyen, en mayor o menor medida, a la evolución de sus competencias intelectuales y personales, con especial incidencia en aquellas vinculadas con las matemáticas, y esas capacidades se muestran al afrontar tareas.* (Lupiáñez y Rico, 2006)

Esta relación entre competencias, capacidades y tareas se describe en la Figura 2.1.8

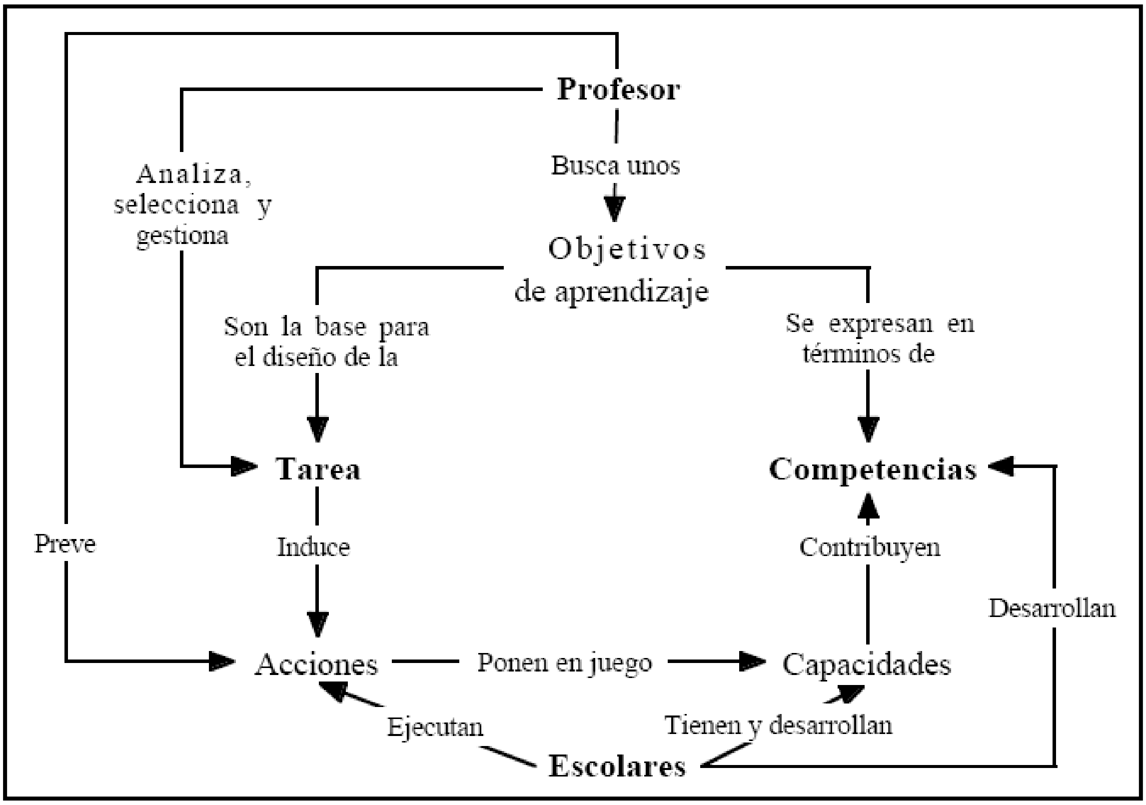


Figura 2.1.8: Relación entre competencias, capacidades y tareas (Lupiáñez y Rico, 2006)

Lupiáñez y sus colaboradores han desarrollado un procedimiento para organizar una descripción del modo en el que unas capacidades específicas relacionadas con un tópico matemático, contribuyen al desarrollo de las competencias. De esta manera es posible establecer un vínculo entre la planificación a nivel local –de unas actividades específicas en un tema concreto– y el diseño curricular global –de una asignatura– (Lupiáñez y Rico, 2006).

El procedimiento en cuestión consiste en organizar las capacidades en las filas de una tabla e identificar a qué competencias contribuyen (columnas de la tabla). Por lo tanto, este procedimiento permite organizar la información sobre el desarrollo matemático de los escolares con respecto a un tema específico antes y después de la instrucción. El cuadro 2.1.9 recoge un ejemplo de capacidades relativas al tema de los números decimales para escolares de 4º de E.S.O.

Cuadro 2.1.9: Capacidades sobre números decimales y su contribución al desarrollo de competencias matemáticas (Lupiáñez y Rico, 2006)

CAPACIDADES		PR	AJ	C	M	RP	R	LS
1	Expresar un número decimal en potencia de 10	X		X		X		X
2	Leer y escribir los números decimales	X		X				X
3	Reconocer y clasificar distintos tipos de números decimales				X	X		
4	Realizar operaciones básicas con números decimales					X	X	
5	Ordenar distintos números decimales y representarlos en la recta real	X				X		
6	Aproximar y redondear números decimales	X	X			X		
7	Saber aplicar los algoritmos de transformación: 1. Pasar de fracción a decimal 2. Pasar de decimal a fracción 3. Utilizar porcentajes tanto en forma decimal como fracción				X		X	X
8	Manejar la notación científica							X
9	Utilizar y reconocer números decimales en situaciones reales	X		X	X	X		

Lupiáñez y Rico plantean que este instrumento brinda importante información sobre el tipo de aprendizaje que se persigue con las capacidades enunciadas, pues pone de manifiesto unas prioridades y énfasis acerca de lo que se pretende que los estudiantes aprendan. Al mismo tiempo, sienta las bases para el posterior diseño de las tareas que formarán parte de la instrucción.

En Rico y Lupiáñez (2008) se han especificado cuatro criterios que relacionan las capacidades y las competencias matemáticas.

- La definición y caracterización de cada una de las competencias matemáticas.
- El diseño curricular global de la asignatura, en incluso el nivel educativo en que se enmarca la planificación que se está realizando.
- La información que suministra el análisis del contenido matemático (que se ha realizado previamente).
- Las decisiones que el profesor toma a la hora de planificar sus actividades de clase.

A partir de esta modelo han elaborador varias propuestas curriculares en temas matemáticos concretos: números naturales, la función de segundo grado, el teorema de Pitágoras, y la probabilidad.

Otras perspectivas curriculares plantean experiencias en que se discute la relación entre las competencias y las capacidades. Moreno (2007), en el contexto de la reforma currícular española, arguye que la competencia matemática global se desglosa en un conjunto de procesos o competencias matemáticas que las define como “unidades de competencia”, formuladas en términos de capacidades. El desarrollo de dichas capacidades se destina a la adquisición de la competencia matemática al final de la etapa secundaria obligatoria.

Otro punto que resalta Moreno, relevante para nuestra investigación, es que la propuesta curricular no debería incluir un conjunto de procesos o competencias matemáticas generales (identificadas como unidades de competencia), para poner en práctica cuando se realizan tareas matemáticas situadas en contextos reales; como tampoco los elementos de diseño e implantación. Se espera que sea el propio establecimiento educacional quien haga el paso del marco curricular a un modelo en términos de competencia.

Alfabetización matemática y competencia

En el subapartado 2.1.2.2 se ha descrito como se implantado la noción de competencia en los currículos europeos. Consideramos como estudio de caso, el currículum de primaria de España, en el cual se presentan ocho competencias básicas. Cada una de las áreas del conocimiento contribuye al desarrollo de diferentes competencias y, a su vez, cada una de las competencias básicas se alcanzará como consecuencia del trabajo en varias áreas disciplinarias

La Competencia matemática es una ellas. El currículo describe la competencia en los siguientes términos:

> Consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral….El desarrollo de la competencia matemática al final de la educación obligatoria, conlleva utilizar espontáneamente -en los ámbitos personal y social- los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas provenientes de situaciones cotidianas y para tomar decisiones. En definitiva, supone aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas de apoyo adecuadas, e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad. (Ministerio de educación y Ciencia, 2006a).

Esta apreciación de la competencia matemática, significa situarla como un objetivo a desarrollar a largo plazo y que se esperan al finalizar la actividad escolar. Dicho significado difiere al del apartado anterior (competente, en resolver problemas, representar, argumentar, calcular, etc.) puesto que si bien son a largo plazo, están pensados para ser evaluados al finalizar una unidad didáctica.

En definitiva, “La Competencia Matemática”, descrita en el currículo de primaria de España se asocia a la idea de Alfabetización Matemática (Mathematical literacy), término que se utiliza en PISA para definir la evaluación en Matemáticas. En PISA se considera la competencia como dominio de estudio, equivalente a la noción de alfabetización matemática, y supone un modo global de entender y hacer matemática, como a su vez comprender la naturaleza del conocimiento matemático. Desarrollar la competencia matemática se convierte en la finalidad principal de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (OCDE, 2003).

Ser competente matemáticamente implica estas nociones que impulsan varios currículos, PISA y diversos proyectos. El discurso que gira en torno a Alfabetización Matemática es de una índole diferente a los significados de competencia descritos en los dos apartados anteriores. La Competencia Matemática, aquí entendida, se preocupa de dar orientaciones generales para la actividad matemática escolar, pero no está presente en lo que sería el diseño y puesta en marcha de un currículo por competencias, ya que eso depende, tal como sugiere Moreno (2007), directamente de los centros educativos. Considerar solamente la visión de Alfabetización Matemática de competencia, puede llevar a profesores y agentes educativos a discutir de qué manera poner en práctica dichas orientaciones sin tener herramientas y argumentos sólidos.

En el Proyecto MAT_{747} de Paulo Abrantes, aunque la noción de competencia matemática que se utilizó tuvo principalmente un componente de alfabetización matemática, también tiene otra interpretación que se ilustra en el siguiente apartado.

Procesos y competencia

En el subapartado 2.1.3.1 se describen siete aspectos que apuntan a lo que es competencia matemática en la reforma curricular de la educación básica en Portugal (Abrantes, 2001). Estos siete aspectos se sintetizan en siete ideas clave: *Pensar matemáticamente; Razonamiento y argumentación matemática; Comunicar matemáticamente; Demostrar; Resolver problemas; Uso de Tic y herramientas de apoyo; Abstracción.*

Esta lista sintetizada sugiere la idea de que potenciar los aspectos de la competencia matemática significa, en definitiva, potenciar *procesos matemáticos*. Estos procesos, identificados por Abrantes (2001) como competencias matemáticas, expresan los modos en que los estudiantes deben actuar cuando hacen matemáticas, es decir, los procesos a cuyo dominio debe estar orientada la formación. Estas competencias matemáticas enuncian expectativas de aprendizaje a largo plazo.

Desarrollar procesos no es una idea nueva; existen numerosos currículos y proyectos que, de alguna manera, han insertado los procesos, incluso en otros términos (habilidades, capacidades). En este apartado se ha preferido describir solamente cuatro casos que reflejen la idea de proceso que nos interesa ilustrar.

1. Niss (1999) elabora una propuesta de “ocho competencias matemáticas” que se deben considerar en la educación matemática escolar. Esas ocho competencias fueron adaptadas por el estudio PISA y calificadas como procesos matemáticos. (OCDE, 2003; 2006). En el apartado anterior se explicó que en el marco teórico de PISA (OCDE, 2003) se asocia Competencia Matemática a Alfabetización Matemática, en el informe final (OCDE, 2005) se denomina a las competencias como *procesos*. Así, las ocho competencias adoptadas de NISS (2002), pasan a ser consideradas como procesos matemáticos

2. Las ocho competencias han servido de inspiración tanto para reformas curriculares (Niss, 2002) como para formación de profesores (Lupiáñez y Rico, 2008).

3. Varios marcos curriculares han incorporado procesos matemáticos en sus estructura curricular, dos ejemplos son: Canadá (Ministry of Education, 2005), Comunidad Autónoma de Catalunya (DOGC, 2007).

4. *Los Estándares*: Una propuesta curricular de gran envergadura y que ha sido muy significativo para nuestro estudio, son los *Principios y Estándares para la Educación Matemática*[2], propuestos por la NCTM (2000).

La estructura de los *Estándares* se organiza en tres apartados: *Principios, Estándares de Contenido* y *Estándares de proceso*.

Principios: Describen las características particulares de una educación matemática de gran calidad. Estos son: Igualdad; Currículo; Enseñanza; Aprendizaje; Evaluación; y Tecnología.

Estándares de contenido: Describen explícitamente los contenidos que se deberían aprender. Éstos aparecen organizados por ejes: Números; Álgebra; Geometría; Medida; Análisis de datos y probabilidad.

Estándares de proceso: Ponen en relieve las formas de adquisición y uso de dichos contenidos. Estos son: Resolución de problemas; Razonamiento y prueba; Comunicación; Conexiones; y Representación.

En Martin y Berk (2001) se realiza un estudio de cómo han influido los *Estándares* en varias agendas de investigación en didáctica de las matemáticas.

La lectura y discusión del documento, junto con los anteriores antecedentes, nos sirvió para comenzar a elaborar un modelo de competencia matemática compatible con los objetivos del estudio.

2.1.4 Una aproximación a las competencias matemáticas: propuesta de un modelo

Como se ha descrito, el camino para desarrollar y consolidar un modelo de competencia matemática se ha conducido en varias direcciones. Antes de proponer un modelo de competencia matemática que nos satisfaga, expondremos una discusión en torno a varios significados que ha tomado PISA del término competencia. Para ello se presentan dos interpretaciones de los usos de competencia matemática en PISA.

2.1.4.1 Primera interpretación

Rico (2007) en la versión castellana de PISA (OCDE, 2003) ha encontrado cuatro significados distintos para competencia en el documento Pisa: *Alfabetización matemática*, *Procesos*, *Grupos de procesos*, *Niveles de complejidad.*

El primer significado -*Alfabetización matemática*-, y segundo significado-*Procesos*-, están descritos en los sub-apartados 2.3.2.3, y 2.3.2.4 respectivamente. El tercer significado -*Grupos de procesos*-, se describe en el subapartado 2.3.1.3; y el cuarto significado -*Niveles de complejidad*- se detalla a continuación.

El cuarto significado corresponde a la clasificación teórica de las tareas por el nivel de complejidad requerido para los procesos implicados. La clasificación de los procesos descrita

[2] Nos referimos a la propuesta con el término *Estándares*

en el cuadro 8 (sub -apartado 2.3.1.3) es genérica y algo imprecisa por su amplitud. En cambio las respuestas de los sujetos a tareas con distintos niveles de complejidad permiten establecer niveles de competencia entre los estudiantes. En los resultados empíricos de la prueba PISA se confirma la hipótesis de que los estudiantes que resuelven problemas de mayor complejidad también responden a los problemas de complejidad inferior, por tanto a partir de los resultados de los estudiantes se observa una mayor riqueza de niveles que el planteamiento teórico en tres categorías de complejidad. En consecuencia para determinar el nivel de competencia matemática alcanzada por un estudiante se ha tomado referencia de los resultados de los mejores alumnos, los que han mostrado en su actividad distintos niveles de dominio en la realización de las tareas. La clasificación de las tareas se ha organizado en seis niveles de competencia, que admiten una descripción general y también una descripción detallada para cada uno de los campos de contenido. Cada nivel se describe en relación al tipo de competencia matemática que el alumno es capaz de realizar y el grado de complejidad con que las aborda.

2.1.4.2 Segunda interpretación

Puig (2008) sugiere una lectura distinta a la diversidad de significados que tiene el término competencia en PISA, y afirma que hay una confusión en las diversas traducciones del documento original inglés a otros idiomas. Puig argumenta que hay un abuso del término competencia en la versión en castellano del documento PISA, ya que en la versión original inglesa se usan diferentes términos. Si bien se homologa en la versión castellana el término Alfabetización matemática por Competencia Matemática, en la versión inglesa se mantiene el término *mathematical literacy*, más aun en la versión francesa se traduce por el término *culture mathematique*, recogiendo mejor en esta versión que en la castellana el significado que se atribuye a *mathematical literacy*.

Puig (2008, pág. 94) afirma que en la versión inglesa el término competencia se atribuye tanto a los procesos matemáticos que se ponen en práctica al resolver problemas matemáticos, los ochos procesos acuñados por Niss (2002), como a los grupos de competencia: reproducción, conexión y reflexión.

El cuarto significado propuesto por Rico (2007) corresponde a los seis niveles de competencia. En la versión inglesa el término que se usa para describir el nivel es *"proficiency*", muy distinto a competencia. Según Puig esta diferencia proviene de una confusión lingüística, si bien el diccionario admite como traducción competencia de "proficiency", la versión inglesa de PISA ha tomado cuidado de distinguir conceptualmente entre *competence* y *proficiency*. Puig (2008, pág. 96) interpreta como "pericia" a proficiency, y plantea que originalmente en el texto en inglés se describe como: "la agrupación de las actuaciones (perfomance) en niveles de pericia (proficiency) se hace sobre la base de las competencias (competentes) subyacentes. Esta interpretación se contrasta positivamente en libros como *Assessing Mathematical Proficiency* (Schoenfeld, 2007), compilado de artículos sobre la determinación de la pericia matemática.

2.1.4.3 Aproximación hacia el modelo

La opción de identificar la noción original de alfabetización matemática como competencia matemática no creemos que sea algo casual. La definición responde en gran medida a lo que se entiende en términos generales por competencia. Señalemos nuevamente la definición de PISA

> Competencia matemática es una capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. (OCDE, 2006)

Esta definición, que rescata el espíritu esencial de competencia, es amplia y general y, además, no alude a cómo se podría desarrollar la competencia. Hemos acordado utilizarla para referirnos a una noción general de "la competencia matemática", y que en nuestro estudio usaremos como sinónimo de Alfabetización Matemática.

En definitiva el significado que se atribuye en la versión inglesa de Pisa a las competencias, es la que nosotros adoptamos. Las ocho competencias presentadas las interpretamos como *procesos matemáticos*.

Nos parece más acertado identificar esta noción de *proceso* con *competencia matemática específica.* Es el dominio de los procesos el que permite que la persona se desarrolle competentemente. De esta forma, la alfabetización matemática se logra mediante el desarrollo de competencias matemáticas. Algunos de estos procesos, que se asemejan a las competencias propuestas por Niss, son:

- *Resolver problemas* (aplicar conocimientos matemáticos, utilizar diversas destrezas y estrategias, o crear procedimientos no conocidos de antemano)
- R*epresentar* (evocar representaciones, traducir entre ellas, elegir entre varias según la situación)
- M*odelizar* (identificar un modelo, construir, reflexionar sobre el proceso)
- *Razonar y Argumentar* (formular conjeturas matemáticas, desarrollar y evaluar argumentos, elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y demostración
- *Comunicar* (organizar el pensamientos comunicando, comunicar el pensamiento con coherencia, evaluar el pensamiento de los demás, usar el lenguaje matemático para expresar ideas matemáticas con precisión)

Algunas descripciones de los cinco procesos mencionados son extraídas de *Los Estándares* de la NCTM (2003). Esta propuesta de describir un currículo en términos de proceso, representa algo nuevo, no hay indicios de propuestas curriculares de esta magnitud que describan el aula en términos de procesos. Para cada una de las cuatro etapas educativas (Pre-K-2; 3-5; 6-8; 9-12) se describe como debería darse y cuál es el papel del profesor en el desarrollo del proceso. No obstante los apartados de descripción de estándares de contenido y procesos son diferentes, y no hay un apartado que los relacione. Para nosotros no cruzar los dos tipos de estándar, representa una carencia puesto que una planificación de una unidad didáctica que considere incorporar los procesos, lo más probable es que tienda a incorporarlos implícitamente a partir de los contenidos y no de manera explícita.

Retornando a PISA, su enfoque funcional considera prioritario el desarrollo de ciertos procesos cognitivos y capacidades en las fases de matematización. Las expectativas de aprendizaje se centran en delimitar esos procesos para enfrentarse con problemas matemáticos en contextos variados.

Finalmente recordemos la caracterización de Rico y Lupiáñez (2008) que representa una visión más global de competencia matemática:

> La competencia matemática consiste en un saber hacer en la práctica mediante herramientas matemáticas. Consiste en utilizar la actividad matemática en contextos tan variados como sea posible. Hace especial énfasis en aspectos sociales como la comunicación y la argumentación. Muestra cómo los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de a vida cotidiana. Se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen de manera espontánea a una amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana. *(*Rico y Lupiáñez, 2008)

Para nosotros, aunque estos elementos son importantes, constituyen solamente una parte de la filosofía por competencias. En nuestro modelo, destacar los procesos matemáticos permiten desarrollar las características de la competencia matemática, tales como poner en práctica las herramientas matemáticas, usarlas en variedad de contextos y situaciones reales, etc. Es por ello que aspectos como resolución de problemas, modelización, representación, argumentación y comunicación se consideran en nuestro modelo.

2.1.5 Modelo de competencia

2.1.5.1 Componentes del modelo

Siguiendo las ideas de Rico y Lupiáñez (2008), de que tanto PISA como lo Estándares de la NCTM aportan aproximaciones significativas sobre el enfoque funcional, y sobre todo, un papel explícito de los procesos matemáticos o competencias matemáticas. Consideramos que los procesos matemáticos, deben tener un papel más destacado, y si queremos que resalten entre las expectativas sobre el aprendizaje, hay que establecer conexiones entre los objetivos específicos y las competencias matemáticas. Por tanto hay que disponer de una estructura o estrategia articuladora entre las expectativas de aprendizaje- objetivos específicos- y las competencias.

A partir de los antecedentes, rescatamos algunas ideas ya explicadas, que sirven para detallar los principios que sustentan la noción de competencia matemática.

1. *Cultura Matemática:* Proponemos como punto de partida del modelo la noción de "mathematical literacy" (OCDE, 2003) que traducimos literalmente del término francés "culture mathématique", como "cultura matemática", término que a nuestro entender es mejor que "alfabetización matemática"
2. *Competencia matemática*: Las competencias matemáticas son procesos que articulan y organizan el currículo a distintos niveles. Para que las competencias sean articuladoras tienen que cumplir tres criterios:

- Integrar una serie de procesos matemáticos específicos vinculados a una competencia matemática.

- No ser totalmente transversales, es decir, no estar siempre presentes en toda actividad, lo cual permite discriminar y organizar las actividades matemáticas en función de las competencias que desarrollan.

- Ser significativas para la actividad matemática escolar.

3. *Procesos matemáticos*: Cada competencia matemática se compone de procesos matemáticos

El interés por desarrollar procesos matemáticos en la enseñanza de las matemáticas no es nuevo; en efecto, se puede hacer una extensa lista de procesos definidos como propios de las matemáticas (representar, argumentar, demostrar, clasificar, analizar, resolver, conjeturar, razonar, visualizar, calcular, etc.). Si bien los procesos han estado presentes en los currículos de matemáticas, no han tenido un papel destacado en comparación con los contenidos. En efecto el grueso de los currículos tienen como punto de partida los contenidos matemáticos, y los procesos se pueden evidenciar de manera implícita en las orientaciones didácticas del contenido a tratar.

Se conoce una extensa lista de publicaciones que han abordado un camino similar de caracterizar competencias entendido como procesos. Algunas, ya nombradas, son:

- El trabajo del grupo *Pensamiento numérico* de Granada, dirigido por Luis Rico, en que aparecen una serie de publicaciones que muestran de qué manera el marco de competencias de PISA puede ser aplicado al currículo, incluso a la formación de profesores de matemáticas (Lupiáñez y Rico, 2006; Rico 2007).

- PISA/OCDE (2003, 2006) que ha mantenido la utilización de las ocho competencias como parte de su marco teórico.

- Marcos curriculares que han adoptado *procesos matemáticos* para estructurar el currículo: Canadá (Ministry of Education, 2005), Comunidad Autónoma de Catalunya (DOGC, 2007).

- Principios y Estándares para la Educación Matemática propuestos por la NCTM (2000).

4. *Tareas matemáticas*: planteamos que los contenidos matemáticos se estructuren en términos de tareas matemáticas. En este sentido una actividad matemática se puede definir como un conjunto de tareas matemáticas con una finalidad común. Las tareas cambian y progresan, su alcance es a corto plazo y se van haciendo más complejas a lo largo del período escolar.

5. *Niveles de complejidad*: La complejidad de una actividad depende tanto de la complejidad de las tareas como de los procesos que la conforman. En nuestro planteamiento se adoptan los grupos de competencia de PISA (reproducción, conexión, y reflexión) basados en la pirámide de de Lange (1995).

La figura 2.1.9 esboza el modelo con estos 5 aspectos.

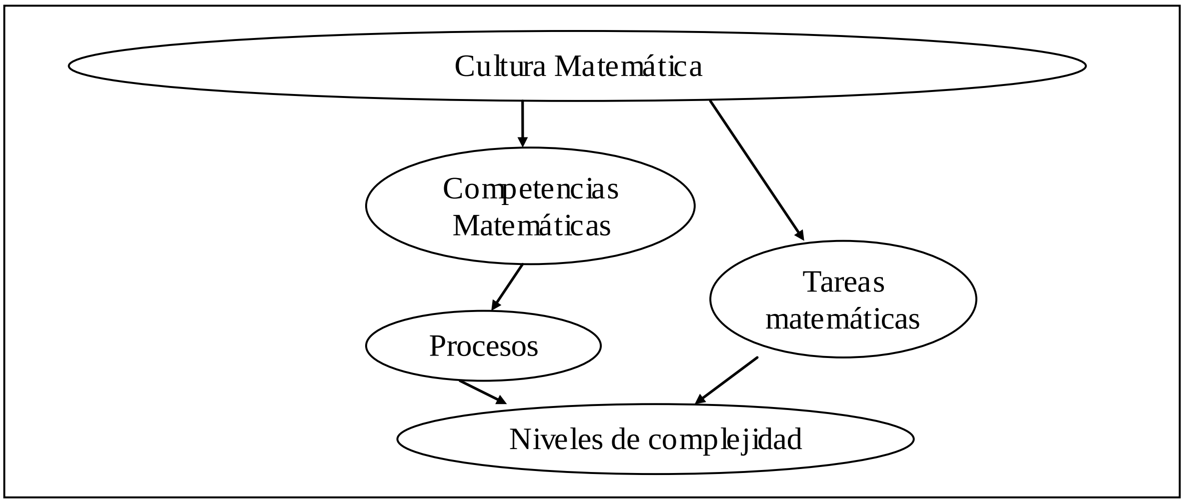


Figura 2.1.9: Modelo de competencia matemática

2.1.5.2 Relación entre tareas matemáticas y procesos

Nuestro marco se estructura en base a tareas matemáticas y procesos matemáticos. Adaptando las ideas de Rico y Lupiáñez (2008), las tareas y procesos poseen características comunes en el sentido de que ambos expresan lo que espera que logren, desarrollen y utilicen los estudiantes. Expresan una petición de mejora y desarrollo, reclaman un incremento de la riqueza cognitiva de los estudiantes. Tareas y procesos se basan en conocimientos y actuaciones.

Por otra parte, están las características que los distinguen:

- Las tareas tienen tanto un carácter específico relativo a un contenido como unas actuaciones del estudiante sobre un contenido matemático concreto; los procesos, en cambio, integran y aplican diversos conocimientos, movilizan una mayor riqueza cognitiva del estudiante, incluyendo actitudes, y se pone en juego abordar tareas complejas en situaciones complejas.

- Las tareas matemáticas tienen un ámbito de verificación a corto plazo, mientras que las competencias expresan expectativas de aprendizaje a largo plazo, a desarrollar a lo largo de todo un periodo de formación.

La relación entre tareas y competencias tiene una implicación de cara a la actuación del profesor cuando planifica sus clases. Nuevamente adaptamos la propuesta de Rico y Lupiáñez (2008) para señalar de qué manera implica al profesorado planificar por competencias:

- Permite establecer una relación entre el currículo global de todo nivel educativo con el nivel local relativo a un tema específico. Partiendo de directrices generales sobre las competencias que se expresan en el currículo general, su compresión se pone de manifiesto en el aprendizaje de temas concretos.

- Se seleccionan cuales tareas nucleares deben desarrollar los estudiantes de un nivel para el alcance de una tema concreto. Con la descripción de tareas específicas. Los temas matemáticos se concretan en una serie de actuaciones que se espera que los estudiantes dominen al finalizar el aprendizaje de una unidad didáctica. Asimismo, se describe en qué medida cada una de estas tareas contribuye a cada una de las competencias matemáticas.

- Por último, los profesores disponen de criterios para estudiar, seleccionar y diseñar tareas sobre las que trabajarán los estudiantes relativos al tema concreto que se planifica.

Otro punto a resaltar es que las competencias orientan el diseño y selección de nuevas tareas, dado que expresan prioridades y expectativas de aprendizaje para las matemáticas. El desarrollo de competencias como Argumentar y Representar necesita de tareas que movilicen en los estudiantes determinadas capacidades, como por ejemplo, justificar la utilidad de los procedimientos empleados para alcanzar unos determinados resultados o relacionar diferentes representaciones.

Estos cinco aspectos son lo que desarrollan la competencia matemática, o cultura matemática como preferimos llamarle en castellano. Nuestro estudio en el tópico de interpretación de gráficas desarrolla dos competencias: modelización y argumentación.

Antes de presentar estas competencias, en los siguientes apartados se desarrolla ampliamente cada una de las elementos que la componen. En el apartado 2.2 se presenta el tópico de interpretación de gráficas. Y en el apartado 2.3 se presentan los componentes de las competencia: tareas, procesos, niveles de complejidad y, además, se trata el tema del contexto ligado íntimamente a un perspectiva de competencias. Finalmente en el apartado 2.4 se presenta el rol del profesor en el desarrollo de las competencias. En algunos apartados se señala una discusión del tema tratado que tiene como objetivo ligar el tema tratado con las competencias, y a su vez, extender las preguntas de investigación que se tratarán en el estudio.

2.2. Interpretación de gráficas

Monk (2003) narra que a inicios de la década de los 70, el uso de las gráficas en el aula de matemáticas fue una de las primeras discusiones en la literatura sobre la comprensión del concepto de función. Los trabajos consistieron principalmente en reportar las dificultades que los estudiantes tenían en cuestiones relativas a gráficas en situaciones familiares. Por el contrario, solo algunos artículos se enfocaron a reportar las acciones de los estudiantes usando gráficas. El efecto acumulativo de esta literatura se centró en la complejidad cognitiva de la interpretación y la construcción gráficas de situaciones reales. Esta complejidad se reflejó en el reporte de Lienhardt et al. (1990) quienes, en un extenso artículo, dan una clasificación de tareas de gráficas y describen las dificultades de los estudiantes en comprender las gráficas de funciones.

El enfoque de nuestro estudio se centra en el aspecto menos estudiado, las acciones con las gráficas. En cambio las dificultades que tienen los estudiantes en relación a las gráficas no de nuestro interés y por tanto no se exponen en este apartado.

El propósito de este apartado es exponer los usos de las gráficas tanto en general como en el currículo. Para luego centrarse en las gráficas funcionales y en las características de las tareas relacionadas con la interpretación de gráficas. La clasificación de acciones utilizando las gráficas propuesta por Lienhardt et al. (1990) sirve como base para elaborar una clasificación de tareas propia.

2.2.1 El uso de las gráficas

En un entorno extraescolar las gráficas se utilizan ampliamente en diversos ámbitos; en los medios de comunicación (diarios, revistas) las gráficas son utilizadas usualmente acompañando un texto y su función es sistematizar datos para entregar información de una manera visual. Asimismo, las gráficas se pueden apreciar en una presentación de una conferencia, las que además de entregar información, atribuyen significado a datos que visualmente son más fácil comprender.

En el aula de matemáticas, el uso más común de las gráficas es atribuir significado a los datos. Monk (2003) identifica cinco funciones de las gráficas en relación al significado:

1. Usar gráficas permite a los estudiantes explorar aspectos de un contexto que no son siempre aparentes.
2. El proceso de representar gráficamente en un contexto puede abrir interrogantes sobre el propio contexto.
3. Usar gráficas para analizar o entender el contexto permite profundizar en la comprensión de las gráficas.
4. Los estudiantes pueden elaborar la comprensión tanto de las gráficas como del contexto a través de un proceso de interacción y de exploración entre ambos.
5. Un grupo construye una comprensión compartida de un gráfico.

Además, Nemirovsky (1994) muestra que la información visual en un gráfico puede ser un buen recurso para dar significado a un fenómeno.

Las gráficas se pueden clasificar en dos grandes grupos. Las que describan relaciones de cambio, denominadas gráficas funcionales; y las que organizan la información sin que exista necesariamente una relación funcional entre las variables, denominadas gráficas estadísticas.

Nuestro estudio se centra en las gráficas funcionales. Aprender a usar su información visual y coordinarla con otro tipo de información, es un vía directa hacia ideas centrales de función tales como la noción de dependencia entre variables y de pendiente.

2.2.2 Gráficas y currículo

Cantoral y Montiel (2001) señalan que existen dos formas de entender la enseñanza para graficar; una asume que graficar es una técnica o conjunto de técnicas que permite bosquejar la gráfica de una función. Y otra menos difundida, entiende graficar como una forma de interpretar el significado de sus propiedades desde una perspectiva cognoscitiva.

Asimismo Cordero y Flores (2007) convienen que la comprensión de la gráfica se desarrolla en el discurso matemático escolar y no solamente como representación del concepto de función. Estos autores dan una descripción de cómo aparecen las gráficas a lo largo del currículo de matemáticas mexicano, señalando que emergen con diferentes intenciones:

- En los tres primeros grados de educación primaria se abordan pictogramas sencillos como ilustraciones para problemas, en que se requiere la recolección, organización e interpretación de la información contenida en los registros. En cuarto grado se plantea la recolección y el registro de datos provenientes de la observación o de pequeñas encuestas, representadas en tablas de frecuencias y en gráficas de barras para proceder a su análisis. En quinto y sexto grado se recopila y organiza la información de diversas fuentes mediante tablas, diagramas, gráficas de barras o pictogramas para analizar las tendencias: promedios, valor más frecuente y la mediana. También se introducen problemas de elaboración de tablas y gráficas de variación proporcional y no proporcional. En estos últimos grados aparecen los ejes de coordenadas.

- En educación secundaria, en primer grado se plantea la lectura y elaboración de tablas y gráficas construidas a partir de un enunciado con temáticas que pueden provenir del bloque de presentación y tratamiento de la información, o situaciones de la geometría, de la física y de datos recolectados por los estudiantes. En segundo grado, en álgebra, se aborda la localización de puntos en el plano cartesiano, la representación de regiones, los conjuntos de puntos que satisfacen ciertas condiciones y la representación de ecuaciones de primer grado y cuadráticas. En el bloque de tratamiento de la información, se aborda la organización y representación de datos en las tablas, en las gráficas de frecuencias absolutas y relativas, y en las denominadas gráficas estadísticas (diagrama de barras, de sectores, etc.). También se introduce la noción de función como una relación entre dos cantidades por medio de tablas, gráficas y fórmulas pasando de un contexto a otro.

Según Cordero y Flores (2007), las gráficas deberían ser abordadas, desde cierto grado de nivel básico, como una representación del concepto de función. Sin embargo, este concepto no aparece en el currículo mexicano hasta la educación secundaria.

En el currículo chileno de matemáticas ocurre algo similar. En un estudio anterior (Solar, 2006) se observó que el concepto de función es tratado a los 14 y 15 años a través del concepto de proporcionalidad, y que el uso de las gráficas se limitaba a ello. En los cursos inferiores solamente hay presencia de gráficas estadísticas.

En la década de los 80 en la gran mayoría de los libros de texto no se pretendía enseñar a graficar funciones (Leinhardt et al., 1990). Actualmente hay una mayor presencia en los programas curriculares y libros de texto, tanto de gráficas estadísticas para temas de tratamiento de información, como gráficas funcionales para introducir las nociones funcionales.

Desde la secundaria hasta el bachillerato, las funciones y gráficas constituyen la última parte del álgebra para luego consolidarse en el cálculo. Por otro lado, las gráficas sin un modelo funcional explícito están presentes continuamente en los libros de texto de Ciencias Experimentales y Ciencias Sociales.

2.2.3 Acciones

Dolores y Cuevas (2007) sostienen que las acciones con gráficas funcionales se puede resumir en cinco preguntas: 1) ¿Qué cambia? 2) ¿Cuánto cambia; 3) ¿Cómo cambia?; 4) ¿Qué tan rápido cambia? 5) ¿Cómo se comporta globalmente la gráfica?.

Las tareas vinculadas a cada interrogante son:

1) Identificar variables, ubicar puntos en el plano, y determinar los intervalos de variación.
2) Comparaciones y operaciones de resta entre estados finales e iniciales tanto para la variable dependiente como para la independiente, y atender a la correlación entre los cambios.
3) Determinar el crecimiento o decrecimiento de la gráfica (dirección de cambio)
4) Determinar la razón promedio de cambio de la variable dependiente en relación con la independiente.
5) El comportamiento global y preciso de la gráfica implica el uso de la razón de cambio instantánea (derivada). Este último tema ya se reserva para estudios superiores de bachillerato y universidad.

Por otra parte, Leinhardt et al. (1990) exponen que las acciones en relación a las gráficas pueden ser clasificadas en 3 tipos: *lectura interpretación* y *construcción.*

Por *lectura* hace referencia a identificar y examinar los elementos de una gráfica: reconocer las magnitudes o variables, su graduación en los ejes y señalar los puntos en una gráfica. En cambio la *interpretación* es la asignación de un significado a una gráfica; bajo este enfoque la lectura es un paso previo a la interpretación. Finalmente la *construcción* es la elaboración de una gráfica a partir de un conjunto de datos.

En base a los objetivos del la investigación, en este apartado se desarrolla fundamentalmente la interpretación de gráficas, y no se expone la fase de construcción. En particular se centra en la caracterización de las tareas y sus representaciones.

La tesis doctoral de Janvier (1978) marca un gran paso teórico y metodológico en el análisis didáctico de las tareas con gráficas. Janvier experimentó con estudiantes de secundaria diferentes situaciones de interpretación de gráficas. En sus resultados destaca la interpretación de las características globales y locales de una gráfica; las dificultades de los estudiantes en la interpretación gráfica de ciertas situaciones; y en general que la interpretación de una gráfica depende sustancialmente de la situación dada. Por otra parte, existen determinados estudios sobre la consideración de la traducción entre lenguajes y su interpretación (Janvier, 1981,1987; Duval 1988).

En Azcárate y Deulofeu (1990) se muestra el cuadro 2.2.1 inspirado en Janvier, el cual considera cinco expresiones distintas para expresar fenómenos de cambio: 1) modelo físico o simulación; 2) descripción verbal; 3) tabla de valores. 4) gráfica; 5) fórmula o ecuación.

En el cuadro 2.2.1 no se desarrolla el modelo físico o su simulación, que aparece al realizar un experimento o al simularlo con un ordenador. Los números del (2) al (5) marcan el orden ascendente de abstracción de cada uno de los lenguajes. La tabla muestra la variedad de todas las posibles traducciones entre descripciones verbales, tabla, gráfica y fórmula.

Cuadro 2.2.1: Acciones desde expresiones de fenómenos de cambio

DESDE/HACIA	Descripción Verbal (2)	Tabla (3)	Gráfica (4)	Fórmula (5)
Descripción Verbal (2)	---	Medida	Boceto	Modelo
Tabla (3)	Lectura	---	Trazado	Ajuste
Gráfica (4)	Interpretación	Lectura	---	Ajuste
Fórmula (5)	Interpretación	Cómputo	Gráfica	---

Las traducciones de una expresión a otra han sido descritas por Even (1998) en actividades de paso desde la expresión simbólica a la gráfica; Hitt (1998) estudia a profesores que, en un proceso de instrucción, transitan desde la gráfica a la representación pictórica de la situación. Mevaraceh y Kramarsky (1997) se enfocan en el paso del registro verbal a la gráfica.

Desde un punto de vista de complexidad, Wainer (1992) identificó tres niveles de procesamiento de la información relacionados con la interpretación de gráficas:

- Nivel elemental: implica la extracción de datos o la lectura de puntos aislados.

- Nivel intermedio: Concierne a la detección de las tendencias observadas en intervalos determinados de las gráficas.

- Nivel alto: Es una comprensión profunda sobre la estructura de los datos y de su comportamiento.

Entre los años 1980 y 1990 fueron realizados varios estudios sobre las representaciones gráficas. Leinhardt et al. (1990) reportan una revisión de las investigaciones sobre gráfica de funciones, con relación a tareas, aprendizaje y enseñanza. La caracterización de las tareas de interpretación de gráficas que se presenta a continuación recoge como base esta revisión.

2.2.4 Tareas de interpretación de gráficas

Leinhardt et al. (1990) han descrito un análisis detallado de las tareas en relación es las gráficas funcionales, una tarea matemática se analiza en base a cuatro aspectos: *Acción, situación, variable y enfoque.*

Acción: La mayoría de las *acciones* relacionadas con las gráficas pueden ser clasificadas en interpretación y construcción; estas categorías no son mutuamente excluyentes, ya que existen tareas que son simultáneamente de interpretación y construcción. La construcción es sustancialmente diferente a la interpretación, esta acción necesita generar nuevas partes que no están dadas de antemano, en cambio la interpretación consiste en dar significado a distintos elementos: datos, una gráfica, una ecuación o tabla,

La interpretación puede ser *local* o *global*. Se entiende por *local* el estudio de acciones específicas en la gráfica; por ejemplo responder a cuestiones del tipo: ¿En qué punto el coche gira en una curva? Representan tareas de interpretación local. En cambio, por *global* se refiere a la interpretación que contemple un estudio íntegro de la gráfica; por ejemplo, en una gráfica que represente el cultivo de arroz con relación a un fertilizante aplicado en una temporada, se pregunta ¿El fertilizante ha mejorado la producción? Además, es posible encontrar otro tipo de tareas de interpretación en qué la gráfica describa una situación específica; y en general, tareas de interpretación que tiendan a estudiar gráficas que representen situaciones. Janvier (1981) explica que en un proceso de interpretación se puede pasar gradualmente de local a global, y en este último paso se puede leer y entender la gráfica íntegramente.

Existen muchas características *globales* de una gráfica que pueden ser interpretadas: la forma general de la gráfica, intervalos de crecimiento o decrecimiento, intervalos de mayor crecimiento o decrecimiento. Se puede hacer una interpretación global de una gráfica si se representa una situación en particular. O en otro caso, si se representa una relación funcional abstracta.

Otra dimensión a estudiar de una gráfica es la progresión desde una interpretación cualitativa a cuantitativa. Una interpretación cuantitativa se focaliza solamente en los aspectos cuantificables de la gráfica, generalmente se asocia a puntos aislados de la misma –interpretación local-, y a un contexto intramatemático. Una interpretación cualitativa de una gráfica en cambio se focaliza en la gráfica entera -o parte de ella- y en asignar un significado a las relaciones entre las variables, y en particular, la dependencia entre ellas -o patrón de covarianza-. Una interpretación cualitativa de una gráfica en su sentido total necesita mirar la gráfica entera (o parte de ella) y alcanzar un significado acerca de las relaciones entre las variables. Notemos que la interpretación cualitativa generalmente está asociada a características globales; aunque estas pueden ser interpretadas tanto cuantitativamente como cualitativamente, es menos común interpretar características locales cualitativamente, excepto para cambios bruscos de forma, proporción o dirección. Del mismo modo, se han elaborado un conjunto de experiencias que consideran ambos movimientos, un cambio de interpretación de tareas cualitativas hacia la construcción de tareas cuantitativas (Leinhardt et al., 1990). Asimismo una de las primeras propuestas didácticas que destacó el uso de las gráficas, se enfocó a la interpretación de situaciones en contextos extramatemáticos, en que se privilegiaba la interpretación cualitativa de gráficas y tareas de traducción entre las expresiones verbales y gráficas (Shell Centre for Mathematical Education, 1990).

Po otra parte Leinhardt et al. (1990) describen tres tareas que implican interpretación de mayor a menor grado.

1) *Clasificación de tareas*: es una acción que implica.

    (a) Decidir si una relación es una función, la cual puede estar representada por medio de una gráfica, algebraicamente o un tabla de valores.

    (b) Identificar una función entre otras relaciones.

    (c) Identificar una clase especial de función entre otras funciones.

2) *Traducción de tareas*: Se refiere al acto de reconocer una función en diferentes representaciones (datos expresados verbalmente, gráfica, tabla numérica, ecuación), y elaborar una representación de una función a partir de otra. La idea de traducción entre diferentes expresiones de fenómenos de cambio -verbal, gráfica y algebraica- surge de los trabajos de Janvier (1978, 1987).

3) *Escalas*: Las tareas de escalas se centran esencialmente en la graduación de los ejes y la variación de los parámetros. Por ejemplo, un estudiante podría querer saber el número de unidades por cada intervalo (uno, dos, tres y así sucesivamente), o si las variables deberían usar la misma escala. Por otra parte, la escala es un punto relevante cuando se usan las gráficas en el análisis de datos científicos y en las instrucciones basadas en el ordenador, pero generalmente no es un punto importante cuando se introducen gráficas en el aula de matemáticas; ello podría ser porque la escala está con frecuencia asumida o dada en las instrucciones de la actividad. Una completa comprensión de las gráficas significa dar cuenta que las características visuales de las gráficas no cambia bajo un cambio de escalas (por ejemplo las intercepciones entre los ejes *x* e *y*), y que las característica cambian cuando las escalas son alteradas (por ejemplo los ángulos que las líneas crean con cada uno de los ejes). De esta manera los cambios de escala son una de las principales fuentes que influyen en las ilusiones gráficas visuales, las cuales pueden convertirse en obstáculo en el proceso de abstracción desde las gráficas como representaciones visuales concretas a las gráficas como representaciones simbólicas.

Situación: La situación contempla dos aspectos: el *escenario* donde se realiza la tarea y el *contexto* de la tarea.

El *escenario* en el que se presenta la tarea puede ser por ejemplo, un aula de matemáticas, un aula de sociales o el laboratorio de ciencias. De la elección de un escenario u otro, depende el significado que se pueda atribuir a las gráficas. Por ejemplo en el aula de matemáticas, tradicionalmente la noción de función y de gráficas se ha relacionado con la comprensión de los aspectos matemáticos formales. Actualmente las propuestas curriculares hacen hincapié a la incorporación de situaciones contextualizadas. Otro ejemplo de escenario es un laboratorio de ciencias; las gráficas sirven tanto como representaciones de observaciones reales como herramientas analíticas para detectar modelos fundamentales, las cuales devuelven la información al observador sobre el fenómeno que se analiza. De este modo los tipos más comunes de tareas asociadas a graficar son los de interpretación cualitativa, predicción (principalmente cualitativa), y tareas de escala que necesitan construcción.

El *contexto* se refiere al referente real del problema, el cual puede ser en mayor o menor grado abstracto o contextualizado. Los estudios que incorporan tareas de contextualización con frecuencia están basados en la presunción de que es más fácil para los estudiantes tratar con problemas que estarían basados en situaciones familiares, situaciones que ellos han experimentado o son capaces de relacionar de manera significativa.[1] No obstante, aun no es claro que un referente real de los problemas siempre ayude al proceso de aprendizaje (Leinhardt et al., 1990); por ejemplo algunas situaciones tienen vinculaciones pictóricas que pueden dificultar a los estudiantes. La actividad del coche de carreras propuesta por Janvier (1981) es un ejemplo de la clase de influencia (positiva o negativa) que puede tener un contexto familiar para el estudiante. Los estudiantes algunas veces interpretan una gráfica de una situación como una imagen literal de esta situación (Janvier, 1978; Leinhardt et al., 1990). De Bock et al. (2003) muestran que el contexto no asegura un camino hacia el significado de las gráficas, sino que se deben controlar otros aspectos que no son evidentes.

Variable: La noción de *variable* es fundamental para dar un significado a las relaciones funcionales y a las gráficas. Su significado se puede interpretar desde un punto de vista *estático* o *dinámico.* Por variable estática se entiende una herramienta de generalización o de descripción de modelos y está asociada, generalmente, a símbolos algebraicos. En cambio, en un sentido más dinámico, señala la variabilidad o cambios simultáneos de una variable con relación a otra y puede ser representada de varias maneras, generalmente en una notación funcional o gráfica (Leinhardt et al., 1990). La naturaleza del dominio[2] de una variable depende de la situación, e indica el tipo de la misma; por tipo de variable se entiende a la propiedad de la unidad: si es categórica, ordinal, intervalo o razón. Los tres primeros tipos se refieren a variables discretas, mientras que razón se refiere a variables continuas.

Las variables juegan un rol relevante en la interpretación y su significado matemático está a menudo determinado más bien por su contexto que por las reglas que lo determinan (Shoenfeld y Arcavi, 1988). Las variables pueden contextualizadas o abstractas. Las variables abstractas -que pueden ser discretas o continuas- son por lo general numéricas con un contexto único. En cambio las variables contextualizadas son normalmente más continuas que discretas. El tiempo, la longitud, la distancia, el peso, la temperatura y la velocidad son las más

[1] El estudio del contexto será estudiado en el apartado 2.3.4
[2] Conjunto de valores que pueden ser asignados a una variable

frecuentes. En contraposición, las variables discretas son escasas y son básicamente contables, como por ejemplo el número de personas.

Enfoque. Se entiende por enfoque, al centro de atención en una tarea específica, por ejemplo identificar unos puntos en la gráfica o interpretarlos en los ejes. El enfoque es un aspecto crítico en el aprendizaje de gráficas y funciones porque existe una gran variedad de aspectos en donde el estudiante se puede centrar. La focalización depende en gran parte de la propia tarea. Por ejemplo, cuando se interpreta cualitativamente una gráfica, el enfoque está puesto principalmente en la totalidad de la gráfica más que en la especificidad de los ejes. En cambio en una interpretación cuantitativa de una gráfica suele necesitarse un enfoque más detallado en los ejes y en las cantidades que se visualizan en la gráfica. Aunque examinar las características locales restringe los límites dentro de las cuales enfocar, las características globales necesitan definir extensa y dificultosamente el espacio del enfoque. De este modo se distingue entre el enfoque del estudiante al resolver la tarea (centro de atención) y el enfoque de la tarea (por ejemplo si la interpretación es cualitativa o cuantitativa), la denominación de enfoque es para el centro de atención en cambio la segunda acepción del términos se refiere a la acción propuesta para la tarea.

Las tres clases de tareas -clasificación, traducción y escalas- pueden ser asociadas a diferentes focalizaciones, las tareas de clasificación requerirían focalizar sobre la ecuación o la gráfica como un todo con respecto a un criterio definido. Las tareas de traducción se focalizan en una característica particular de la representación original de una función, en la misma característica de la otra representación. Las tareas de escalas están conectadas directamente con los ejes, y el foco se dirige directamente al sistema de coordenadas.

Por otra parte, Deulofeu (1993) estudia las respuestas de los estudiantes en tareas de interpretación de gráficas cartesianas. En los resultados se destaca que existe una tendencia entre los estudiantes a focalizar en los puntos relevantes de la gráfica y se restringe la dependencia funcional entre variables a las coordenadas de estos puntos; esta tendencia está condicionada por diversos factores que dependen de la actividad, el contexto, su formulación y la función que relaciona los puntos relevantes.

2.2.5. Hacia una comprensión de las gráficas

Con posterioridad a la revisión de Leinhardt et al. (1990) hay una clara disminución en el número de investigaciones centradas en la interpretación de gráficas. No obstante, de las referencias que se han localizado, se destaca una intencionalidad de integrar otras disciplinas además de la sicología cognitiva, para situar la interpretación de gráficas, como la sicología social, la sociología y la semiótica. La revisión de Friel, Cursio y Bright (2001), se centra en gráficas utilizadas en estadística, y no considera como marco de delimitación la relación funcional. En todo caso es relevante el avance conceptual que proponen los autores hacia la noción de *comprensión* de las gráficas, entendido como un concepto integrador, en lugar de la consideración de acciones separadas como lectura, interpretación y construcción.

La comprensión de gráficas se entiende como *las habilidades de l*ectura para dotar de significado a gráficas creadas por otros o por nosotros mismos; además estos autores han caracterizado cuatro factores que influyen en *la comprensión* de las gráficas:

1) El propósito del uso de la gráfica, generalmente para analizar datos y para comunicar.
2) Las características de las tareas.
3) Característica de la disciplina, que predispone la naturaleza de los datos a analizar.
4) Características de la lectura de gráficas.

Desde una perspectiva semiótica, Roth y Bowen (2001) han investigado de qué manera, profesionales y científicos interpretan y utilizan las gráficas en sus actividades. Radford (2009) se focaliza en analizar los signos matemáticos señales, palabras y en general todas las acciones que utiliza un estudiante para interpretar la gráfica.

A partir de estos antecedentes, en el apartado 2.3.5 se caracterizarán las tareas de interpretación de gráficas que se usan como referencia en el estudio empírico.

2.3 Componentes de la competencia matemática

Una competencia matemática se constituye de tareas matemáticas, procesos matemáticos y niveles de complejidad. En este capítulo se desarrollan estos aspectos y en el apartado 2.3.1 se expone el significado de tarea matemática. En el apartado 2.3.2 se trata la noción de proceso con una discusión final sobre la perspectiva de proceso que se recoge para vincularla al modelo de competencia. En el apartado 2.3.3 se exponen las principales referencias sobre lo que se ha denominado niveles de complejidad. En el siguiente apartado 2.3.4 se trata un tema vinculado directamente a la competencia, el contexto. En los dos siguientes apartados se relacionan estos componentes con el tópico de interpretación de gráficas: en el apartado 2.5.5 se caracterizan las tareas en interpretación de gráficas, y finalmente, en el apartado 2.5.6 a través de algunos ejemplos de actividades, se trata la relación entre los componentes según la complejidad de la actividad.

2.3.1 Tareas matemáticas

El término "tarea matemática" es usado frecuentemente de manera coloquial en el campo de la educación matemática; dentro de todas las atribuciones que se le dan, podemos encontrar dos significados distintos. Un primer significado hace referencia a cada término por separado: 'tareas' se refiere al propósito o pasos a seguir en una actividad, y 'matemática' a la disciplina que pertenece la actividad. En esta atribución el término tarea matemática no tiene una importancia como tal y es usado como sinónimo de ejercicio, problema, o actividad matemática.

Un segundo significado se refiere a tarea matemática como las nociones matemáticas que se tratan en una actividad. Es decir las tareas matemáticas son los propósitos matemáticos que se encuentran en una situación a resolver, problema, o actividad matemática. Una colección de tareas matemáticas puede caracterizar un tópico matemático, o visto inversamente, un tópico matemático se puede caracterizar como un conjunto de tareas matemáticas.

Nosotros utilizamos este segundo significado de tarea matemática. En efecto uno de los objetivos de la investigación es caracterizar las tareas matemáticas en el tópico de interpretación de gráficas.

Rico y Lupiáñez (2008) señalan que las tareas se asocian a un contenido matemático, y tienen un ámbito de verificación a corto plazo. En nuestro modelo de competencia estas son las características principales de las tareas matemáticas.

La teoría antropológica de lo didáctico, en adelante TAD, (Chevallard, 1999) adopta un punto de vista institucional de la problemática didáctica, situándola dentro del marco más general de las prácticas humanas. Para modelizar la actividad matemática utiliza la noción de organización o praxeología matemática. Una organización matemática nace como respuesta a un tipo de cuestiones problemáticas y está constituida por cuatro categorías de elementos: tipos de tareas, elementos técnicos, tecnológicos y teóricos. Bajo esta aproximación el grupo de investigación Felix Klein en los últimos años ha realizado una serie de estudios para caracterizar las tareas y técnicas en el currículo de Chile, y como resultado de innovación, ha propuesto una serie de unidades didácticas que tienen como base las tareas y técnicas.

Recientemente en su último estudio curricular propone un diseño curricular en base a tareas y competencias matemáticas para primero y segundo de primaria. (Espinoza et al., 2008).

Una relación similar establecen Lupiáñez y Rico (2006) que relacionan los objetivos y tareas, expresando que los objetivos son la base para el diseño de las tareas.

El currículo de matemática de Chile se estructura por objetivos verticales y transversales, contenidos, aprendizajes esperados, y orientaciones didácticas En Espinoza et al. (2008) se caracterizaron las tareas matemáticas principalmente de los objetivos verticales, contenidos y aprendizajes esperados, pero también se caracterizaron tareas de las orientaciones didácticas que no estaban explicitas.

El currículo de Chile sigue una estructura similar a la mayoría de currículos en matemáticas de hace unos años. Actualmente los currículos se están redactando en términos de competencias, pero de todos modos al igual que en un currículo redactado en términos de objetivos, se pueden caracterizar las tareas matemáticas.

En el apartado 2.1.3 se han desarrollado extensamente las competencias, y la relación que se establecen con los procesos. A continuación se establece la relación entre procesos y tareas a partir de las actividades matemáticas de aprendizaje (en adelante actividades matemáticas).

Las actividades matemáticas son los problemas que se presentan en un material curricular (propuesta didáctica, libros de texto, unidad didáctica), redactados en términos de objetivos o actualmente por competencias.

Las actividades matemáticas se pueden secuenciar de varias maneras, una opción muy frecuente es que recorran un listado de tareas matemáticas, desde actividades simples que abarquen una tarea, a actividades más amplias que abarquen un conjunto de contenidos. Los libros de texto usualmente optan por este tipo de secuencia didáctica

Otro criterio para secuenciar actividades matemáticas es según su nivel de dificultad; el paso de una actividad matemática a otra no pasa necesariamente por cambiar la tarea matemática en juego, si no por dificultar la tarea haciéndola más difícil para el estudiante. Este criterio es el que se utiliza usualmente en la evaluación de aprendizajes.

Un último criterio que trataremos para secuenciar actividades matemáticas es su nivel de complejidad. El paso de una actividad matemática se define por una serie de criterios en relación a las tareas, estrategias y contexto de la actividad. En el apartado 2.3.5 se tratará con detenimiento.

Según la TAD (Chevallard 1999; Barbé et al., 2005) la diferencia de complejidad entre una tarea matemática3 y otra se define por las *condiciones* o *variables didácticas* de la tarea. Es decir los términos de realización de una tarea matemática. Por ejemplo en la tarea de interpretar una gráfica, si la gráfica tiene graduados sus ejes o no, condiciona la dificultad en la interpretación.

En el tópico de interpretación de gráficas, en Solar (2006) se han establecido cuatro clasificaciones para tareas matemáticas en interpretación de gráficas. Se han caracterizado

[3] Nótese que se ha cambiado a complejidad en la tarea matemática en vez de la actividad matemática. La diferencia radica en que en estas investigaciones se trata la complejidad en términos de tarea. Pero en nuestra investigación se trata la complejidad en términos de la actividad matemática, en que uno de sus componentes son las tareas matemáticas.

diferentes materiales curriculares de distintos países y con diferentes niveles de concreción respecto al currículo. Se ha obtenido como resultado que generalmente los diseños curriculares tienen orientaciones didácticas que apoyan y avalan un nivel de complejidad alto en las tareas matemáticas, pero que es incoherente con el bajo nivel de complejidad que se presentan en sus propuestas de actividades.

El proyecto de evaluación PISA de la OCDE (2003) propone un marco innovador sobre la complejidad de una actividad matemática, este ya se ha mencionado en el apartado 2.1.3.1 que se trató PISA y las competencias. Los niveles de complejidad se tratan como grupos de competencia (reproducción, conexión, reflexión).

En el siguiente apartado se trata otro componente del modelo de competencia matemática, los procesos matemáticos.

2.3.2 Procesos matemáticos

En *Cognitive Process Instruction* (Lochhead y Clement, 1979), libro que recopila las comunicaciones de una conferencia en junio de 1978 en la universidad de Massachusetts, se trata el tema de los procesos cognitivos entre las diferentes disciplinas, y en particular en las matemáticas. El proceso cognitivo de instrucción se identifica como un acercamiento que hace énfasis en la comprensión, aprendizaje y las habilidades de razonamiento, como oposición a hacer hincapié en la memorización y conocimiento de hechos.

Entre las comunicaciones, se aprecian propuestas para que los profesores puedan tener más control sobre el desarrollo de habilidades en los estudiantes (Herbert, 1979); Arons (1979) sistematiza una lista de procesos que denomina lingüísticos y racionales, que se espera que los estudiantes desarrollen en la etapa escolar. En mención a las matemáticas, se destaca el proceso del razonamiento proporcional (Karplus et al., 1979), y se menciona también la teoría de la resolución de problemas (Schoenfeld, 1979) destacando las lista de heurísticas, análisis-exploración–verificación, que también pueden ser entendidas como procesos.

Como se puede apreciar, el interés por desarrollar procesos en el currículum escolar no es nuevo; y en el caso de las matemáticas está muy ligado a la escuela de Piaget.

En los procesos que se tratan en esta conferencia hay una combinación de procesos asociados a una noción matemática (procesos en el razonamiento proporcional), y procesos asociados a heurísticas en la resolución de problemas. Esta diferencia se sigue encontrando en trabajos posteriores. En Sfard (1991) y Dubinsky (1991) se consideran los procesos como asociados a un concepto matemático; en cambio, en la propuesta de estándares de la NCTM (2000), los estándares de proceso son transversales a los estándares de contenido, en otras palabras, no se asocian a un concepto matemático concreto. Otro trabajo en el que se aprecia una visión de procesos transversales, es el de Niss (1999) en que se caracterizan ocho procesos en la actividad matemática escolar. Posteriormente PISA (OCDE, 2003, 2006) recoge el trabajo de Niss como un elemento más para exponer su marco teórico sobre evaluación de las matemáticas.

En nuestra investigación se comparte la segunda visón de los procesos, los que se definen como una tipología, a través de caracterizaciones tales como: representar, argumentar, demostrar, clasificar, analizar, resolver, conjeturar, razonar, visualizar, calcular, etc. Estos procesos se pueden desarrollan transversalmente, tanto en los diferentes tópicos matemáticos (números, geometría, álgebra, estadística, etc.) como en el nivel de abstracción o complejidad.

La ambigüedad existente en torno a los procesos, hace necesario que desarrollemos una sistematización de los principales estudios que se han interesado por éstos. Bajo la visión de proceso asociado con objeto, en el siguiente apartado, se expone el trabajo antes mencionado de Sfard (1991), y de una forma más extensa la teoría APOE desarrollada por Dubinsky (1991) que considera los procesos como parte de su teoría En el apartado de discusión se retoma la visión del NCTM que se muestra en los principios y estándares para la matemática (NCTM, 2000).

2.3.2.1. Dualidad objeto/ proceso

Sfard (1991) describe la dualidad entre *objeto* y *proceso* en la noción de número y de función. El *objeto* hace mención a las estructuras, y los *procesos* a los procedimientos. Por ejemplo, la noción de función se puede definir bajo una visión estructuralista como un conjunto ordenado de pares; o bien con una visión operacional como un proceso computacional. Para Sfard (1991) la dualidad objeto/proceso se da en que si bien son ostensiblemente incompatibles, son complementarios, "no se puede realizar un proceso, a no ser que haya un objeto sobre el cual este proceso es realizado, y hay otro objeto, que este proceso produce". Y extiende la visión que los objetos son el producto de los procesos, destacando más a los conceptos como la base de los procesos.

Sfard propone tres pasos en el desarrollo del concepto de función, correspondientes a tres grados de estructuración que relacionan teóricamente procesos y objetos: *interiorización*, *condensación* y *cosificación*. La *interiorización* corresponde a un proceso realizado sobre los objetos ya familiares, la *condensación* actúa cuando este proceso se convierte en una entidad autónoma, y, finalmente, la *cosificación* es la capacidad de ver esta nueva entidad como un todo integrado.

Desde otro punto de vista, los procesos son uno de los componentes de la teoría APOE, marco que ha sido utilizado inicialmente para analizar cuestiones sobre la noción de función (Breidenbach et al., 1992) y posteriormente conceptos como la derivada (Sánchez-Matamoros et al., 2006) y de infinito (Dubinsky et al., 2005a, 2005b).

Las siglas APOE significan: *acciones*, *procesos*, *objetos* y *esquemas*. Esta teoría trata de describir el camino hacia la construcción de un concepto matemático en la mente de un sujeto. Breidenbach et al. (1992) y Dubinsky (1991) en un principio no denominan APOE a esta teoría. Con una idea más primitiva, se refieren a esta estructura como 'abstracciones reflexivas', y las describen como los caminos según los cuales se construyen esquemas, objetos y procesos. El propósito es determinar la naturaleza de los procesos específicos y de los objetos que son construidos y cómo son organizados cuando se estudian las matemáticas. Por tanto, entendemos que la teoría APOE se construye a partir de una discusión entre la dualidad de los procesos y los objetos.

Una *acción* es una manipulación física o mental repetible que transforma objetos (Breidenbach et al., 1992). Posteriormente se ha definido como una transformación de objetos que el sujeto percibe como algo externo (Dubinsky, 1996).

Un *proceso* se puede definir a partir de la acción: cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, ésta puede interiorizarse en un proceso (Dubinsky, 1996). Particularmente, respecto al concepto de función, Breidenbach et al. (1992) plantean que "una concepción de proceso de función involucra una transformación dinámica de objetos según algún medio repetible que, dado el mismo objeto original, siempre producirá el mismo objeto transformado".

El individuo realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero no dirigida por un estímulo externo (Badillo, 2003). Un sujeto que exhiba una concepción de proceso de un concepto matemático, puede reflexionar sobre ella, describirla, o incluso invertir los pasos de la transformación sin tener la necesidad de volver a realizar los pasos (Dubinsky, 1996).

Un *objeto* se define en términos de: cuando un sujeto reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construirlas. Bajo esta perspectiva, está pensando en este proceso como un objeto; en este caso, se dice que el proceso se ha encapsulados en un objeto (Dubinsky, 1996).

Finalmente *los esquemas* se definen como una organización de estructuras entre objetos y procesos. Los esquemas se distancian de nuestro problema inicial de tratar los procesos, y por tanto no se seguirá detallando sobre ellos.

Bajo la perspectiva APOE, un concepto matemático puede caracterizarse como una acción, proceso u objeto. Breidenbach et al. (1992) caracterizan las concepciones de los estudiantes que se asocian a la función como acción, como procesos, o la transición de una concepción de acción a proceso.

Badillo (2003) da algunos ejemplos para el concepto de función con estas tres visiones (cuadro 2.3.1).

Cuadro 2.3.1: Ejemplo de diferentes concepciones de función

Acción	Proceso	Objeto
Necesitar fuertemente encontrar o construir una ecuación o expresión algebraica o fórmula para poder evaluar el valor de la función en un punto del dominio.	Las funciones son entendidas como reglas de asignación que conectan a cada valor de la variable independiente *x* del dominio un valor de la variable dependiente *y*. Comprender la notación *f (a)* donde *a* es un número real.	Trabajar con una notación funcional sin referencia de una expresión de la función. Hacer traducciones entre diferentes representaciones de la función. Dibujar un gráfico de la función con la información específica de los valores y propiedades de la función y su derivada.

La perspectiva APOE se enmarca en la línea de investigación del Pensamiento Matemático Avanzado, cuyo objeto de estudio es el aprendizaje de nociones relacionadas con el análisis tales como las funciones y la derivada. Azcárate (1995) señala que esta línea de investigación está enriqueciendo los modelos que describen los procesos cognitivos tales como representar, visualizar, generalizar, clasificar, conjeturar, inducir, analizar, sintetizar, abstraer y formalizar.

2.3.2.2 Discusión

En los trabajos de Sfard y Dubinsky se ha indagado acerca de la naturaleza de las matemáticas en términos de objeto/proceso. Los procesos [sobre objetos] generan objetos, los que a su vez generan nuevos procesos. En términos de la teoría APOE, el proceso encapsula un objeto, y se acaba generando una estructura, como por ejemplo el concepto de función.

Desde esta perspectiva, Sfard destaca que las estructuras, como el concepto de función, se sustentan en definiciones pero que no se ha destacado históricamente el papel de los procesos. Esta preocupación también se refleja en el trabajo de Breidenbach et al. (1992) de mostrar la concepción de función como objeto o proceso. Asimismo Azcárate (1995), destaca una lista de procesos enmarcada en la línea del Pensamiento Matemático Avanzado, que comparte las características de procesos que en nuestro modelo de competencia se señala.

Sin embargo insistimos en el hecho de que dentro de la teoría APOE, la noción de proceso está ligada a una noción matemática concreta (ej. el proceso de función). Desde otras perspectivas los procesos no son solo parte de un concepto matemático sino más bien son transversales a ellos.

En el apartado 2.1.3.2 se ha descrito el libro *Principios y Estándares para la Educación Matemática (2000),* el cual se organiza en tres apartados: Principios, Estándares de contenido y Estándares de proceso. Estos últimos ponen en relieve las formas de adquisición y uso de los contenidos matemáticos, organizándose en cinco grandes procesos: Resolución de problemas; Razonamiento y prueba; Comunicación; Conexiones; y Representación.

Los Estándares de proceso describen los objetivos que se esperan desarrollar. Para cada estándar se describen tres objetivos que se asocian con las habilidades básicas que se espera para un estudiante en el siglo XXI. Los objetivos son descritos en términos de ejemplos que demuestran lo que los estándares deberían tener en cuenta en cada curso y lo que el rol del profesor debería ser para el logro de estos estándares. Aunque cada uno de estos estándares se aplica a todos los cursos, el énfasis sobre un estándar particular varía según el curso.

Esta “otra visión”, de proceso, transversal a los objetos, no se evidencia en las propuestas de Sfard y Dubinsky sino más bien son parte de un trabajo de innovación curricular, como la NCTM, que se escapa de un propósito netamente investigativo. Hiebert (2003) en un compendio de investigaciones, editado por la NCTM, que explican la propuesta curricular de los Principios y Estándares, arguye que una propuesta curricular no puede ser fruto netamente de la investigación, que la investigación no puede seleccionar estándares ya que éstos son objetivos de la educación que se deciden a través de un complejo proceso donde intervienen las expectativas de una sociedad, la experiencias anteriores, la investigación y la visión de los profesionales en el campo.

De forma similar las ocho competencias, tratadas como procesos, que identifica Niss (1999), se enmarcan en el proyecto curricular danés KOM (Niss, 2002). Si bien ignoramos en qué medida estas competencias provienen de la investigación, al ser un proyecto curricular planteamos el argumento de Hierbert como hipótesis para estas ocho competencias, que surgen de una serie de criterios curriculares más amplios que la investigación.

Si bien los procesos han estado presentes en los currículos de matemáticas, no han tenido un papel destacado en comparación con los contenidos. El grueso de los currículos tiene como punto de partida los contenidos matemáticos, y los procesos se pueden evidenciar de manera implícita en las orientaciones didácticas del contenido a tratar. Actualmente vemos que este desequilibrio se disminuye dado que, además de la NCTM, aparecen propuestas curriculares que dan un papel destacado a los procesos: tales como Canadá (Ministry of Education, 2005) y Cataluña (DOGC, 2007). Sin embargo se sostiene la lógica planteada por Hierbert, dado que desconocemos la influencia de la investigación en la formulación de los procesos.

La problemática en torno a los procesos se hará latente en el estudio empírico. En el modelo expuesto de competencia matemática, los procesos son el componente principal, puesto que tienen la característica de ser transversales a los contenidos y se desarrollan a largo plazo. Reconocemos que esta visión de procesos carece de investigaciones que la sustenten, sin embargo se ha visto que existen propuestas curriculares sólidas que la respaldan.

Por contraparte desde la década de los 70 hasta mediados de los 90, desde una visión cognitiva, se dio un fuerte impulso a los procesos. Si bien esta visión predominó en los 90 con la teoría APOE, ya en el nuevo siglo XXI las teorías cognitivas han sido discutidas por las visiones antropológicas (Chevallard, 1999; Godino et al., 2007) y socioculturales (Lerman 2006). El acercamiento neopiagetiano APOE ya no destaca como el único enfoque para el estudio de procesos. Los procesos de comunicación y argumentación actualmente están siendo ampliamente estudiados, ya no desde una visión cognitiva, si no discursiva en un enfoque sociocultural. Pero estos dos procesos son estudiados por el interés que han tomado los aspectos discursivos del aula de matemáticas, y no por el hecho de ser procesos matemáticos. En contraparte, en la actualidad no ha sido tan destacable el estudio de procesos tales como clasificar, analizar, calcular, y con ello, ha disminuido drásticamente el interés por los procesos matemáticos como campo de investigación.

Desde un acercamiento de competencias, es necesario que vuelva a tomar importancia la investigación sobre los procesos matemáticos con un enfoque distinto al cognitivo de Sfard y Dubinsky, interesados por las estructuras matemáticas. El enfoque por competencias tiene un fuerte componente sociológico en sus bases, al promover que las competencias se desarrollan, además de actuar de forma autónoma, en interacción con grupos heterogéneos, y usar las herramientas de forma interactiva (OCDE, 2005).

En base a estos principios, los procesos que se indagan en el estudio empírico no provienen del estudiante si no del aula de matemáticas, es decir, de la interacción que se generen en el aula tanto entre los propios estudiantes como entre profesor y estudiantes.

2.3.3 Niveles de complejidad

La discusión sobre niveles de complejidad en los problemas matemáticos se ha desarrollado principalmente bajo un punto de vista evaluativo. Dekker y Querelle (2002) aplican la Pirámide de de Lange (1995) para exponer criterios en la clasificación de actividades matemáticas en tres niveles de complejidad.

El modelo originalmente fue diseñado como un triángulo (figura 2.3.1) para adaptar el diseño de la prueba TIMSS en Holanda (Boertien y de Lange, 1994).

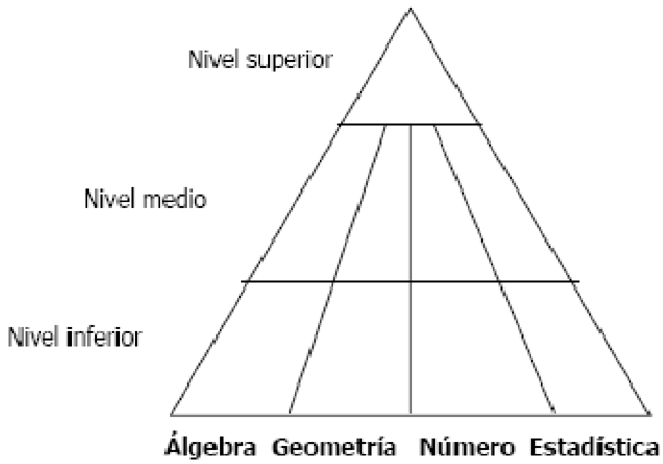


Figura 2.3.1: Modelo original pirámide de de Lange

Horizontalmente se indican los distintos ejes curriculares de la matemática y verticalmente se indican los niveles de complejidad, o niveles de competencia como denomina de Lange, que un alumno debe poseer para resolver correctamente el problema en cuestión (del nivel 1 para el más bajo al nivel 3 para el más alto).

La forma triangular indica la cantidad de problemas y preguntas para cada uno de los tres niveles que deben incluirse en una prueba equilibrada. También representa la distribución de la ponderación en los distintos niveles. Como se puede apreciar en el modelo, la mayor cantidad de tiempo así como el mayor número de puntos deberán darse para las preguntas del nivel 1 (la base del triángulo). En la punta del triángulo están las preguntas del nivel 3, éstas deben aparecer en toda prueba que pretenda ser equilibrada pero en menor cantidad que los otros. Los problemas del nivel 3 son más difíciles de resolver y llevan más tiempo que aquellos en los que se evalúan habilidades básicas.

En la discusión del modelo surgió el debate de que un problema de nivel superior no necesariamente tenía que ser difícil para el estudiante. Inversamente un problema de bajo nivel en complejidad podía ser difícil para los estudiantes. Por tanto se incorporó una tercera dimensión en el modelo. El grado de dificultad del problema, que permite hacer una distinción entre problemas simples y más difíciles dentro de un mismo nivel. El triángulo se convirtió en una pirámide (figura 2.3.2).

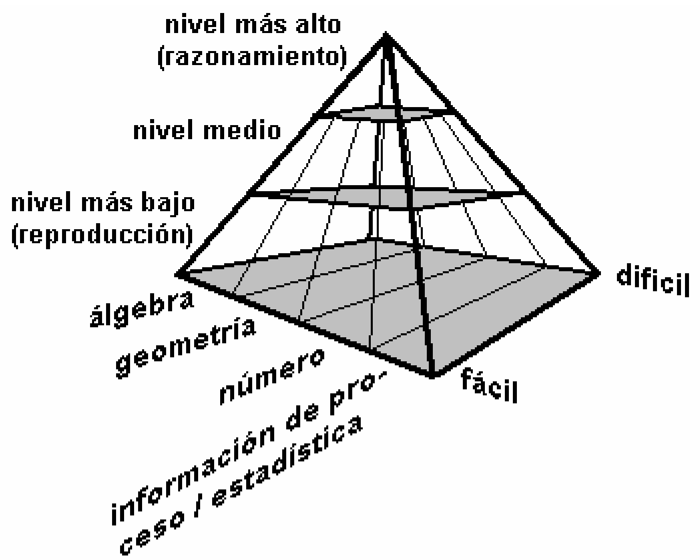


Figura 2.3.2: Pirámide de de Lange (de Lange, 1995)

A continuación se exponen los criterios para distinguir los tres niveles de complejidad.

Nivel 1: reproducción, procedimientos, conceptos y definiciones

Las respuestas a problemas de N1 a menudo requieren conocimiento de datos y definiciones, procedimientos rutinarios y algoritmos estandarizados, que por lo general se han memorizado y practicados en clases anteriores. Un problema en N1 puede ser más simple o difícil.

A menudo, una parte considerable de la prueba consistirá en problemas de N1 para determinar si los estudiantes dominan los hechos o habilidades básicas enseñadas.

N2: Conexiones e integración para resolver problemas

En un nivel 2 de complejidad, se dan los siguientes criterios:

a) Los problemas en un N2 muy a menudo pueden resolverse correctamente de varias maneras diferentes.

b) Los alumnos elijan sus propias estrategias y herramientas matemáticas.

c) Para resolver los problemas frecuentemente es necesario hacer conexiones entre los diferentes tópicos de la matemática. Las conexiones requieren que los alumnos distingan y relacionen definiciones, ejemplos, suposiciones y pruebas.

d) En la formulación del problema se incluye información redundante para que el alumno tenga que decidir qué datos son relevantes para resolverlo.

e) Se espera que los alumnos manejen diferentes representaciones de acuerdo a la situación específica y el propósito a mano, por ejemplo: texto, diagrama, fórmulas, tablas, etc.

f) Los alumnos necesitarán saber la diferencia entre una situación realista y el modelo matemático y ser capaces de traducir de uno al otro. En este nivel no se espera que ellos mismos modelen la situación (Este criterio se comenta más adelante).

Con problemas de N2, se limita la cantidad de información presentada para que el texto o el material visual no guíen al alumno en una dirección particular al resolver el problema. Para lograr este nivel de razonamiento, se espera que los alumnos infieran el conocimiento, las herramientas y/o procedimientos que necesitarán usar para dar una respuesta aceptable a partir del contexto del problema.

Siguiendo el punto f) en este nivel no se espera que los alumnos hagan sus propios modelos matemáticos, pero sí deberán ser capaces de criticarlos. A partir de un modelo matemático dado de una situación, se espera que los alumnos resuelvan el problema dentro de este modelo, regresar a la situación realista y ajustar la respuesta de acuerdo a esta situación.

Como en el N1, un problema puede ser relativamente simple o más complejo.

Un problema que está clasificado como N1 para un determinado grupo de edad, podría ser de N2 para otro grupo, o para el mismo grupo en otro momento del año lectivo. En qué nivel de complejidad es etiquetado un problema no sólo depende del formato y del contenido sino también de si este tipo de problema ya fue practicado en la clase. En otras palabras, depende de lo que se ha enseñado previamente.

N3: Matematización, pensamiento, razonamiento matemático, generalización.

En este nivel los estudiantes tendrán que:

a) Matematizar situaciones, ser capaz de desarrollar nuevas estrategias y crear modelos propios.

b) Reconocer y extraer la matemática implícita en una situación; y hacer suposiciones respecto a la información que falta.

c) Elegir herramientas matemáticas para resolver problemas más complicados.

d) Ser capaces de comparar el contenido matemático del problema dado con el de otros problemas contextuales y de generalizar.

e) Dar argumentos matemáticos, pruebas y comunicar el proceso de resolución.

f) Plantear sus propias preguntas en vez de solamente responder a las de otros.

En general se trata de problemas poco familiares para los alumnos, pero en que ellos deben ser capaces de manejar las ideas y herramientas matemáticas necesarias para su resolución.

En un N3, los problemas evalúan la actitud crítica del alumno frente a la respuesta y su capacidad para reflexionar acerca del proceso de resolución. No sólo deberán ser capaces de resolver problemas, si no también plantear preguntas, comunicar procesos y resultados. Este tipo de problema requiere un correcto razonamiento matemático y los alumnos deben ser capaces de criticar un modelo matemático y volver a modelizar si es necesario. Ellos pueden usar un modelo matemático para organizar una situación realista, tratar de resolver el problema, re-modelizar, resolver el problema, hacer una transición hacia la situación realista y decidir si la solución es útil o no dentro de esta situación.

Para muchos problemas de N3 no siempre es fácil identificar el contenido como álgebra, geometría, número, etc. Como se aprecia en la pirámide de de Lange (figura 2.3.3), en el nivel más alto de complejidad la diferencia entre los ejes matemáticos desaparece, algunas veces el mismo problema puede resolverse tanto geométrica como algebraicamente. Una vez más el alumno elegirá su propia estrategia o inventará otras nuevas. Estos problemas por lo general son difíciles de resolver y diseñar.

La expresión 'matematización,' usada para problemas en N3, se explica de dos formas: matematización horizontal y vertical. Términos que se explican en el apartado 2.5.

Se podría argumentar que la matematización se da en todos los problemas contextualizados, donde los alumnos tienen que encontrar la matemática relevante en todos los niveles. Sin embargo, en un N3 esto va más allá del simple reconocimiento de problemas ya que requiere de la integración de muchas de las habilidades necesarias en los niveles más bajos.

La pirámide de de Lange, como se ha mencionado en apartados anteriores, se ha utilizado principalmente en pruebas de evaluación internacionales como PISA para diseñar los problemas. Dekker (2007) ha impulsado el uso de la Pirámide en el profesorado. Asimismo Shafer y Foster (1997) utilizan la Pirámide para analizar las respuestas de los estudiantes, proponiendo cambiar la dimensión de dificultad del problema (fácil- difícil) por una dimensión de razonamiento en la respuesta (informal- formal). Por otra parte, Moreno, M.; Mesa, G. y Azcárate, C. (2008) han utilizado los niveles de complejidad como instrumento para caracterizar el nivel cognitivo que desarrollan las actividades en libros de texto universitarios en el tópico de derivada.

En PISA se clasifican las actividades a evaluar en tres elementos:

- Las *situaciones o contextos* en que se sitúan los problemas.
- El *contenido matemático* del que hay que valerse para resolver los problemas, que se organiza de acuerdo con ciertas ideas clave.
- Los *grupos de complejidad* que deben activarse para establecer un nexo entre el mundo real donde se generan los problemas y las matemáticas.

De Lange (1999) establece una conexión entre el contexto y la complejidad de la actividad. Por tanto, una de los propósitos del estudio es crear un modelo de competencia en que la relación entre el contexto y los niveles de complejidad queden bien delimitados.

Además, desde una aproximación de competencias, en que se destaca el aspecto funcional de las matemáticas, el rol del contexto en las actividades matemáticas es un pilar fundamental. Efectivamente desde las tres trayectorias de las competencias matemáticas descritas en el apartado 2.1.3.1, las actividades que se sugieren están fuertemente ligadas al contexto.

Por tanto, el siguiente apartado trata sobre contexto, para finalmente en la discusión final (apartado 2.3.6), relacionar los tres apartados según el modelo de competencia.

2.3.4 Contexto en actividades matemáticas

Si bien en el entorno educativo el término *contexto* puede tener diferentes significados, se pueden resumir en dos aspectos (Wedege, 1999; Van den Heuvel- Panhuizen, 2005):

- *El entorno en que aprende*: esto incluye tanto las situaciones diferentes en las cuales el estudio ocurre como las dimensiones interpersonales del aprendizaje. El informe PISA (OCDE, 2006) le denomina *situación.*
- *Una característica de una tarea presentada a los estudiantes*: hace referencia a las palabras y cuadros que ayudan a los estudiantes a entender la tarea, el concerniente de la situación, o el acontecimiento en que la tarea es situada. La descripción de un contexto, dado por Borasi (1986, extraído de Van den Heuvel- Panhuizen, 2005), es sobre la interpretación de un contexto como una característica de la tarea. El informe PISA (OCDE, 2006) le denomina *contexto.*

Nuestro foco de estudio se dirige al segundo aspecto *tareas en contexto;* en el resto de este apartado se le atribuye este significado al término 'contexto'.

Para Jurdak (2006) 'Problemas contextualizados', 'problemas del mundo real', 'problemas relacionados con el trabajo', 'problemas situados' son sólo algunos de los diferentes nombres que se atribuye a las tareas escolares que simulan situaciones del mundo real. Asimismo Dapueto y Parenti (1999) identifican que el término 'contexto' se utiliza para indicar una situación o actividad en la cual estos conceptos son introducidos y aplicados de una manera significativa (es decir significativo en cuanto a la situación o la actividad en sí misma).

Una perspectiva que ha destacado el rol del contexto en la actividad matemática escolar es la *educación matemática realista* (EMR).

La educación matemática realista (EMR)

En las década de los 60 emergió la matemática moderna y con ello un impulso a la abstracción, en detrimento del rol del contexto en la instrucción de la matemática. Si bien la concepción conjuntista de la matemática moderna se extendió prácticamente a todo el mundo occidental, la educación matemática holandesa prácticamente no fue afectada, gracias a la visión que, en aquel entonces, tuvo Hans Freudenthal y sus colegas del antiguo "iowo", en colocar los pilares para que se formara lo que hoy se conoce como *educación matemática realista* (EMR), y que hoy en día el instituto Freudenthal es el principal promotor de esta aproximación.

La forma actual de la EMR ha sido determinada, en su mayor parte, por el punto de vista de Freudenthal (1977) respecto a las matemáticas. Freudenthal sostenía que las matemáticas deben tener conexión con la realidad, mantenerse apegadas a la experiencia de los niños y ser pertinentes a la sociedad para que tengan valor humano, en vez de ver las matemáticas como una asignatura por transmitir; Freudenthal insistió en la idea de las matemáticas como actividad humana. El punto de partida en EMR es que los problemas en contexto pueden funcionar como guía para los estudiantes para *re-inventar* las matemáticas (Gravemeijer y Doorman, 1999). Esto significa que, en la educación matemática, el foco de atención no deben ser las matemáticas como un sistema cerrado, si no la actividad, el proceso de matematización (Freudenthal, 1968, extraído de Van den Heuvel- Panhuizen, 2008).

Más tarde, Treffers (1987) formuló explícitamente la idea de dos tipos de matematización en un contexto educativo: distinguió entre la matematización *horizontal* y la *vertical*. Estos aspectos se desarrollan en el apartado 2.5.

Pese a esta clara afirmación respecto a la matematización horizontal y vertical, la EMR llegó a conocerse como "educación matemática del mundo real". Esto se dió especialmente fuera de los Países Bajos, pero hubo la misma interpretación dentro de ellos. Hay que aceptar, entonces, que el nombre de *educación matemática realista* origina cierta confusión a este respecto.

Van den Heuvel- Panhuizen (2005, 2008) explica que el motivo por el que se llamó *realista* a la reforma holandesa de la educación matemática no es sólo por su conexión con el mundo real, si no que guarda relación con la insistencia de la EMR en ofrecer a los estudiantes situaciones problema que ellos pueden imaginar. El término holandés "*zich realiseren"* se traduce como i*maginar*. Esta insistencia en hacer que algo sea real en la propia mente dio a la EMR su nombre. En cuanto a los problemas que se presentan a los estudiantes, esto significa que el contexto puede provenir del mundo real, pero ello no es siempre necesario. El mundo de fantasía de los cuentos de hadas, o incluso el mundo formal de las matemáticas, aportan contextos idóneos para un problema en tanto éstos sean reales en la mente del estudiante.

De acuerdo a Treffers y Goffree (1985) Los problemas en contexto cumplen una serie de funciones:

- Forman conceptos: En la primera fase de un curso los problemas en contexto permiten a los estudiantes un natural y motivado acceso a las matemáticas.
- Forman modelos: Los problemas en contexto subministran una base para aprender las operaciones formales, procedimientos, notaciones, reglas y ellos hacen esto junto con otros modelos, los cuales tienen una importante función como soporte para el pensamiento.
- Aplicabilidad: destapan la realidad como la fuente y el dominio de uso.
- Ejercitan habilidades específicas en situaciones aplicadas.

Asimismo, de Lange (1996) sintetiza en cuatro aspectos la función del contexto:

- Facilitan el aprendizaje de las matemáticas.
- Desarrollan las competencias de los ciudadanos.
- Desarrollan las competencias y actitudes generales asociadas a la resolución de problemas.
- Permiten ver a los estudiantes la utilidad de las matemáticas para resolver tanto situaciones de otras áreas como situaciones de la vida cotidiana.

Dekker y Querelle (2002) con más detalle, resumen las razones para usar problemas en contexto.

- Para introducir un nuevo tema o un nuevo concepto en matemática. Usando ejemplos dentro de un contexto, el contenido matemático incluido se torna claro.
- Para practicar un nuevo concepto o procedimiento. Haciendo muchos problemas en contextos diferentes con el mismo contenido matemático, los alumnos aprenden cómo usar y aplicar este contenido.

- Para mostrar el poder de la matemática, comprendiendo que distintos problemas en contexto están basados en el mismo contenido matemático.
- Para demostrar que el alumno domina el contenido matemático, usando un contexto no familiar en una prueba que está basada en el mismo contenido matemático usado en clases anteriores.
- Para involucrar a los alumnos en el problema, usando problemas de la vida real, los alumnos pueden demostrar que son alfabetizados matemáticamente y saben cómo se usa la matemática para resolver problemas prácticos que surgen de situaciones de la vida diaria.

El rol del contexto puede también ser diferente en distintas situaciones de clase o evaluación. En el siguiente apartado se describe un panorama de estas diferentes situaciones.

Relevancia del contexto

El rol del contexto en el problema puede ser determinado por varios criterios. De Lange (1987, 1999) clasifica el rol de contexto según la función que cumpla.

Contexto de orden cero: el contexto es irrelevante, es usado para disfrazar el problema matemático.

Contexto de primer orden: se encuentra cuando el contexto es relevante y necesario para resolver el problema y hacer juicios sobre la respuesta.

Contexto de segundo orden: aparece cuando es realmente necesario matematizar el problema para la corrección de la respuesta, y es necesario reflexionar la respuesta dentro del contexto. La diferencia entre el primer y segundo orden se refleja en el papel del proceso de matematización. En el primer orden se tiene pre-matematizado el problema, mientras que en el segundo orden hay un énfasis en la matematización (de Lange, 1987).

Contexto de tercer orden: este tipo de contexto son los más significativos, sirven como ejemplo para la construcción- reinvención de nuevos modelos o conceptos matemáticos.

Se puede establecer cierta correspondencia entre los niveles de complejidad con el rol del contexto. De Lange (1999) señala que los problemas de contexto de segundo y tercer orden generalmente están asociados a un tercer nivel de complejidad (reflexión).

También de Lange (1987) hace la distinción entre un *contexto real, artificial y virtual:*

Contexto virtual: un contexto virtual contiene elementos que no son reales en sí mismos pero que idealizan una realidad. Los problemas reales a menudo son demasiado complicados para usarlos en un contexto matemático, entonces se simplifican, idealizan o generalizan.

Contexto artificial: cuando se usa un contexto artificial, la situación para el problema en contexto, es el mundo de la fantasía.

Contexto matemático: el contenido del problema es tomado de la matemática misma.

Según estas distinciones, de Lange (1987) recomienda tener en cuenta algunos criterios sobre el uso del contexto:

- Evitar, especialmente en la fase de matematización conceptual, contextos que pueden ser emocionalmente perturbadores (defensa, guerra, enfermedades, asuntos éticos).
- Evitar contextos artificiales.
- Evitar contextos neutros, los cuales pueden fallar en la función motivadora.
- No esperar que los estudiantes puedan obtener demasiada información del entorno, la mayoría, si no toda, debería estar contenida en el texto.
- Se podría escoger el contexto y editar el ejercicio para estimular acciones interindividuales (promover conflictos socio cognitivos).

En un entorno de primaria, Van den Heuvel- Panhuizen (2005) extiende la clasificación propuesta por Lange (1987) a *problemas pictóricos* y *problemas verbales:*

Problemas pictóricos: para tareas cortas las representaciones pictóricas son a menudo utilizadas para presentar un problema en contexto a los estudiantes. Estos problemas tienen las funciones de: ser motivadores, describen una situación sin usar palabras, la información la proporciona la ilustración, indican la acción o estrategia a seguir para enfrentar el problema, potencian un modelo para resolver el problema y la ilustración es un referente para comunicar el proceso de resolución. No siempre se cumplen cada una de estas funciones.

Problemas verbales: usualmente se confunden los problemas verbales o escritos con los problemas en contexto. Se encuentran a menudo en los libros de texto y para mucho de estos problemas el contexto no es esencial. Freudenthal (1991) sugiere que enseñar problemas verbales puede causar una actitud antimatemática en los niños. Desde esta perspectiva la investigación de Vershaffel et al. (2000, extraído de Van den Heuvel- Panhuizen, 2005) muestra que a menudo no se adopta en los estudiantes una genuina disposición a tratar los problemas verbales como una descripción de una situación del mundo real para ser modelada matemáticamente.

Otra clasificación de los problemas en contexto es según el momento en que se propone en el proceso de instrucción (Font y Ramos, 2005).

Problemas de contexto evocado introductorios: proponer problemas contextualizados al inicio del proceso de instrucción para construir los objetos matemáticos.

P*roblemas contextualizados evocados de aplicación:* proponer problemas contextualizados *de resolución sencilla* a continuación de un proceso de instrucción en el que se han enseñado objetos matemáticos, con el propósito de aplicar en el mundo real los conocimientos adquiridos en el proceso de instrucción.

Problemas contextualizados evocados de consolidación: Del mismo modo al anterior se proponen problemas contextualizados a continuación de un proceso de instrucción en el que se han enseñado objetos matemáticos, pero en este caso *son de resolución más compleja,* con el propósito de consolidar los conocimientos adquiridos en situaciones de mundo real.

Un último criterio a señalar es desde un punto de vista evaluativo. Van den Heuvel-Panhuizen (2005) propone tres roles que pueden cumplir los problemas en contexto: realzan la accesibilidad a los problemas; contribuyen a la transparencia y elasticidad de los problemas; y sugieren estrategias.

Discusión

Como se ha planteado anteriormente, por contexto nos referimos a la situación en que la actividad matemática es situada. En el estudio se pueden describir tres motivos de por qué es necesario abordar el contexto en la investigación.

Contexto ligado a la competencia matemática: Una de las características principales desde una perspectiva por competencias, es el énfasis en el carácter funcional del conocimiento matemático, y en la posibilidad de aplicarlo de forma variada, reflexiva y perspicaz a una multiplicidad de situaciones de los más diversos tipos. Hay un riesgo en pragmatizar en exceso la noción de competencia considerándola como la sola aplicación de conocimientos en contextos, sin necesariamente una comprensión profunda de los mismos. Para evitar este riesgo y destacar una buena perspectiva del aspecto funcional, es necesario discutir cual es el función del contexto en las actividades matemáticas.

El contexto atribuye significado: desarrollar actividades en contexto permiten a los estudiantes atribuir significado a las nociones matemáticas en juego. Desde una perspectiva de la EMR, que los estudiantes estén cercanos a la realidad y que puedan resolver problemas en que puedan imaginar; es decir, atribuir significado es capacitarlos para desarrollar ideas, conceptos o situaciones a trabajar en un referente conocido. Por tanto la función de las actividades en contexto consiste en servir como referente. En este sentido el contexto tiene una función de ser motivador para el aprendizaje.

El contexto es parte de las relaciones y cambio. En el tópico de interpretación de gráficas el rol del contexto destaca. En efecto, en la naturaleza hay un variedad de fenómenos extramatemáticos (sociales, físicos, biológicos, etc.) en que se presentan fenómenos de cambio y necesitan ser matematizados.

De estas tres razones y a partir de los antecedentes sobre la función del contexto, desde la perspectiva de competencias que estamos desarrollando, se han ideado cinco funciones del contexto:

1. **Desarrollar conceptos matemáticos en término de tareas**: se introduce o práctica una tarea matemática por medio de un contexto (Treffers y Goffree, 1985; Dekker y Querelle, 2002).
2. **Desarrollar procesos de modelización**: de Lange (1987) identifica cuatro órdenes en el contexto, los más altos destacan por qué es necesario matematizar la actividad en contexto y crear nuevos modelos (Treffers y Goffree, 1985).
3. **Mostrar la aplicabilidad de las matemáticas**: permiten ver a los estudiantes la utilidad de las matemáticas para resolver tanto situaciones de otras áreas como situaciones de la vida cotidiana (de Lange, 1996; Treffers y Goffree, 1985).
4. **Desarrollar procesos matemáticos**: desarrollar competencias o habilidades significa desarrollar aspectos matemáticos a largo plazo (Treffers y Goffree, 1985; de Lange, 1996). Los procesos matemáticos cambian según el contexto. Dos actividades pueden compartir una tarea matemática, pero se diferencian en los procesos implicados (Dekker y Querelle, 2002).

5. **Desarrollar procesos reflexivos**: tiene que ver con desarrollar actitudes críticas en los estudiantes (Lange, 1996; Dekker y Querelle, 2002).

Destacamos que la función del contexto de ser motivador se entiende como facilitar la atribución de significado, y es esta la visión que se concibe en la investigación. En cambio la motivación entendida como una función cognitiva - afectiva no es parte de este trabajo, dado que la motivación así entendida depende de los intereses propios de cada sujeto o una comunidad, y por tanto depende de una serie de variables que se desligan del contexto.

2.3.5 Clasificación de tareas de matemáticas en interpretación de gráficas.

En este apartado, se caracterizan las tareas de interpretación de gráficas que usualmente se **trabajan** en marcos y materiales curriculares, a partir de los antecedentes expuestos en el apartado 2.2 sobre interpretación de gráfica; esta caracterización servirá como criterio para identificar las tareas matemáticas en el estudio empírico.

Tareas en interpretación de gráficas

Siguiendo a Leinhardt et al. (1990) se clasifican las acciones de gráficas en:

Lectura: identificar puntos de una gráfica.

Interpretación: atribuir de significado a una gráfica.

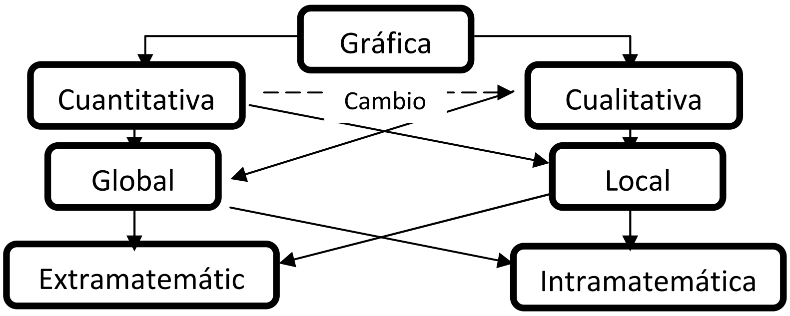
Construcción: elaboración de una gráfica o tabla a partir de un conjunto de datos.

La tarea de interpretar una gráfica depende de una serie de condiciones que presente la gráfica. En Leinhardt et al. (1990) se determinan los criterios según si la interpretación es cualitativa, cuantitativa o progresión cuantitativa a cualitativa, además si se focaliza en los aspectos globales o locales de la gráfica.

En una investigación nuestra anterior, (Solar, 2006) se extienden estos criterios considerando además el rol del contexto en términos de las variables, obteniendo tres parámetros en juego:

- Interpretación *cuantitativa o cualitativa*: Interpretar cuantitativamente significa obtener respuestas numéricas de las gráficas; difiere de la lectura en el hecho de interpretar el desarrollo numérico. En cambio la interpretación cualitativa consiste en dar un significado a las relaciones entre las variables. También puede suceder que en una misma actividad se pase de una interpretación cuantitativa a una cualitativa.
- Focalización *local* o *global*: focalización local significa fijarse en una o varias partes de la gráfica, en cambio focalización global es fijarse desde una perspectiva general a toda la gráfica.
- Identificación de variables *intramatemáticas* o *extramatemáticos*: variables intramatemáticas corresponden a variables tales como *x* e *y* cuyo significado es matemático, en cambio variables extramatemáticas pueden ser *velocidad* y *tiempo* cuyo significado depende del contexto de la actividad.

El conjunto de los tres parámetros determinan una tarea de interpretación. Para ilustrar las posibles tareas, el cuadro 2.3.2 ilustra las combinaciones posibles entre los parámetros[4].



Cuadro 2.3.2: Combinaciones parámetros en tareas de interpretación de gráficas (Solar, 2006).

Leinhardt et al. (1990) también identifica las aspectos de *escala* y *clasificación*, como acciones de interpretación. También se usa el criterio de *traducción* entre representaciones como una acción que también se vincula con la interpretación (Janvier, 1987).

- *Clasificación*: acción que implica decidir si una relación es una función, y de qué tipo
- *Escalas*: las tareas de escalas se centran esencialmente en escoger graduación de los ejes, la variación de los parámetros, y escoger un origen.
- *Traducción:* se refiere al acto de reconocer una función en diferentes representaciones.

Variables:

Se pueden identificar una serie de tareas en torno a la noción de variable, ¿cuáles son? ¿Qué tipo de relación hay entre ellas? Estas preguntas redactadas en término de tareas matemáticas son:

- Identificar variables en situaciones expresadas en forma verbal o pictórica.
- Identificar el valor de una variable (lectura).
- Estudiar la dependencia de variables.
- Describir relaciones de cambio, haciendo referencia a la variación de la pendiente.
- Predecir el valor de una variable que está en la curva de una gráfica.

Por tanto, a partir de estas acciones se puede elaborar un extenso listado en relación a la interpretación de gráficas.

En el último apartado que comprende este capítulo de componentes de la competencia matemática, se exponen algunas actividades que ejemplifican la relación entre los componentes.

[4] La descripción de estos criterios se presenta en el apartado siguiente a través de ejemplos de actividades.

2.3.6 Tareas, procesos, contexto y complejidad en la competencia matemática.

Se han desarrollado cuatro aspectos que son sustanciales para la competencia matemática: tareas, procesos, nivel de complejidad y el rol del contexto. Según nuestro modelo, al relacionar tareas y procesos matemáticos se puede determinar el nivel de complejidad de la actividad matemática en juego. Del mismo modo en los antecedentes se ha mencionado que el rol del contexto se relaciona con los niveles de complejidad. En este apartado se desarrolla la relación entre los elementos expuestos.

Una primera relación se establece con la definición de *actividad matemátic*a. En el primer apartado 2.3.1 se describe qué se entiende por una actividad matemática en una estructura curricular (sinónimos de problemas matemáticos), pero no se definió puesto que era necesario describir el resto de los aspectos de la competencia.

Desde nuestra perspectiva, cualquier actividad matemática se compone de tareas y procesos matemáticos. En efecto, desde cualquier tópico matemático y a cualquier nivel, son éstos los dos componentes sustanciales. En al apartado anterior se han descritos criterios para identificar tareas en el tópico de interpretación de gráficas pero aun falta exponer cuáles son los criterios para caracterizar los procesos. Este es uno de los problemas de la investigación que se aborda en el estudio empírico.

Para explicar la vinculación entre tareas, procesos, niveles de complejidad y contexto, se exponen algunas actividades relacionadas con la interpretación de gráficas, en las que, se identifican las tareas y el nivel de complejidad según los criterios expuestos en los apartados anteriores; también se identifican qué funciones del contexto se presentan en las actividades. Además, este ejercicio tiene el propósito de mostrar que los criterios para determinar un nivel de complejidad que se conocen- pirámide de Lange- son en ocasiones ambiguos y difícilmente operativos y que en ocasiones lo que hace cambiar una actividad de un nivel a otro no es la tarea matemática en juego, ni la función del contexto, si no los procesos matemáticos asociados a la actividad.

Actividades de interpretación de gráficas.

Actividad 1

Representa las funciones afines siguientes sabiendo que:

a) Pasa por la los puntos (-3, 1), (0,1), (2, 1), (5, 1).
b) La pendiente es 0 y la función corta el eje de las ordenadas en el punto (0,3)
c) Coincide con el eje de las absisas
d) Es una función constante de ordenada en el origen 4
e) Pasa por los puntos (0, 4) y (5, 4).

En la actividad 1 se aprecia visiblemente las tareas matemáticas que se espera trabajar: *traducir de una expresión verbal a una gráfica e interpretación cuantitativa local*.

El contexto es intramatemático y se enfoca principalmente en la primera función del contexto: desarrollar conceptos matemáticos a través de tareas. Las otras funciones no es evidente que se trabajen en esta actividad.

El nivel de complejidad se determina para cada pregunta. Las preguntas a) y d) son estándar para graficar y pueden ser catalogadas como reproducción. Las preguntas b) c) y d) en cambio depende de la familiaridad que tenga el estudiante con este tipo de preguntas.

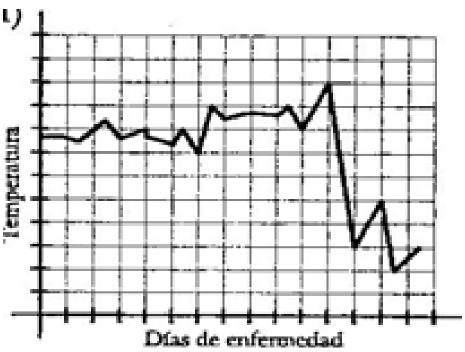
Este tipo de análisis es del estilo encontrado en PISA (OCDE, 2003), y en otros trabajos que utilizan la pirámide de Lange para determinar el nivel de complejidad. Si bien se identifica el nivel de complejidad, el criterio para diferenciar las preguntas es solamente por la familiaridad de las preguntas que tengan los estudiantes. ¿Pero qué es lo que se produce en el estudiante? ¿Qué proceso cognitivo es el que desarrolla el estudiante con una u otra pregunta? Las tareas son las mismas, pero desde nuestra perspectiva, son los procesos esperados en el estudiante lo que hace que cambie la complejidad de la pregunta.

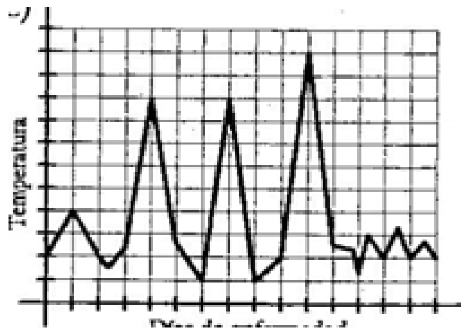
Actividad 2

Las gráficas de temperatura:

Cuando los médicos han de diagnosticar una enfermedad, uno de los factores que tienen en cuenta es la temperatura, y sobre todo, la forma en que evoluciona la temperatura de los pacientes.

Sabemos que tres enfermos sufren: uno de la malaria, otro de pulmonía y un tercero de sarampión; las gráficas de temperatura se han mezclado y no se sabe de quién es cada una; son las siguientes.





Además, en un libro de patología se encuentra la siguiente información:

1º La temperatura de los enfermos de malaria baja cada noche

2º La temperatura de los enfermos de pulmonía sube muy rápidamente y se mantiene alta durante varios días; después baja de repente.

Con estas informaciones determina a qué enfermo corresponde cada gráfica. Explica tu razonamiento.

En la actividad 2 se presentan los datos en expresión verbal y gráfica. Las tareas vinculadas son*: interpretación de información verbal; interpretación cualitativa local y global de gráficas; y descripción de las relaciones de cambio haciendo referencia a la variación de la pendiente*.

A diferencia de la actividad anterior, el contexto es relevante para la resolución de la actividad en el significado de las variables. Para interpretar las gráficas es necesario darle significado al momento del día (día, noche) e identificar variaciones bruscas de temperatura (pendientes elevadas).

Las funciones del contexto más evidentes son desarrollar conceptos matemáticos, y mostrar la aplicabilidad de las matemáticas. Además se desarrolla el proceso de interpretación que está latente en la actividad, y por tanto se hace mención a la funciones de desarrollar procesos.

El nivel de complejidad en esta actividad sería catalogada de conexión. En la actividad la acción de interpretar es a partir de dos representaciones, y la estrategia para relacionar la expresión verbal con los gráficos no es estándar ni única. Además, se pide describir los razonamientos. Las condiciones que hacen que sea determinada de conexión es la vinculación entre el lenguaje verbal y gráfico, así como la necesidad de una estrategia no estándar.

Las tareas para esta actividad si bien son diferentes que en la actividad 1 -interpretación global y describir relaciones de cambio- no tenemos criterios para decidir que son más complejas que las anteriores. Según nuestro modelo de competencia, faltaría determinar los procesos que se asocian a la actividad, y que no están presentes en la actividad anterior, o qué combinación de tareas y procesos son las que determinan un nivel de conexión. Además habría que establecer si con solo tareas y procesos se determina el nivel de complejidad, o son necesarios otros elementos.

Actividad 3

En un diario hemos encontrado el grafico siguiente, que hace referencia a los resultados económicos de la compañía de aviación IBERIA, durante el periodo 1985-1994

a) Qué significan las barras con valores positivos y con valores negativos

b) ¿Qué año tuvo más ganancias la compañía? ¿y más pérdidas?

c) ¿Qué significa que el valor del 1994?

d) ¿Puedes predecir que pasará año 1995?

e) Supón que eres un gerente comercial de la compañía. Estás en una reunión de accionistas y tienes que explicarles la evolución de la compañía desde 1985, y las posibles previsiones. Redacta en no menos de 5 líneas lo que dirías.

La actividad 3, a partir de un gráfico de un diario, trata la relación entre variables (año y ganancias). Se adapta un contexto real para hacer preguntas dirigidas a una interpretación cuantitativa a cualitativa global, y a predecir la tendencia de la variable. La última pregunta se dirige a una interpretación que necesita argumentos sustentados en el contexto de la actividad. La predicción del año 1995 y supuestos siguientes años no dependerá tan solo de datos presentes en la gráfica, si no de la comprensión del contexto que tenga el estudiante.

Las tareas matemáticas son: *interpretación de gráficas y predecir la tendencia de una variable (extrapolar).*

La función del contexto se refleja en la última pregunta, que invita a potenciar acciones que no se puede caracterizar solamente con las tareas matemáticas, si no que más bien está ligada a desarrollar un proceso ligado a la argumentación, y de manera indirecta, desarrollar una actitud crítica. Por tanto, las funciones del contexto son: desarrollar conceptos, mostrar la aplicabilidad de de las matemáticas, desarrollar procesos matemáticos y reflexivos.

El nivel de complejidad va cambiando desde reproducción hasta reflexión. La pregunta a) hasta la c) pueden ser calificadas de reproducción- son de lectura e interpretación cuantitativa local-, la pregunta d) vinculada a la tarea de predecir es de conexión porque es necesario elegir los datos para hacer una predicción (de hecho la predicción no es única, depende como se interprete la variación de los años cercanos a 1994). La última pregunta reúne a las dos tareas vinculadas, y con la condición de describir a partir del contexto, corresponde a un nivel de reflexión.

El progreso en los niveles de complejidad se acompaña con un cambio en las tareas matemáticas. Que la pregunta d) cambie a conexión se pude explicar por el cambio de las tareas, pero que la pregunta e) sea de reflexión no se explica solamente por las tareas, hay una serie de procesos acompañados en esta pregunta diferentes de las anteriores, que son los que dan la complejidad de reflexión de la actividad. Y en consecuencia es necesario indagarlos.

Actividad 4

La noticia informa sobre los comicios de la constitución que se celebrarán próximamente en Francia. La noticia se apoya en la información gráfica que resume los sondeos de las encuestas realizadas.

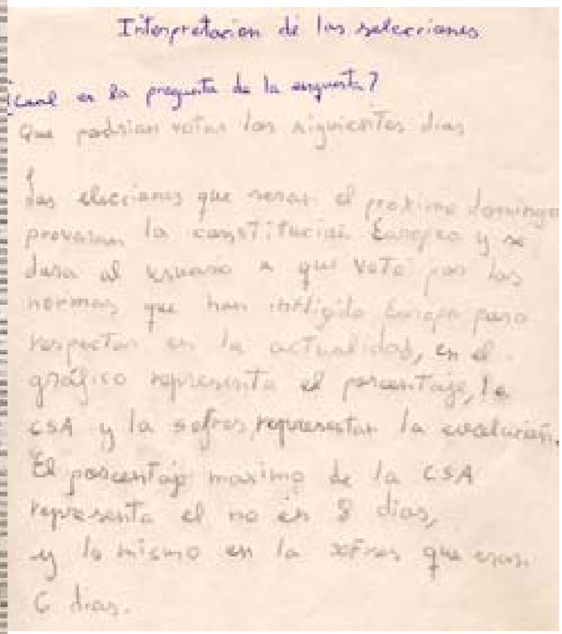
Luego de leer la noticia y comentarla con tus compañeros. Responde las siguientes preguntas:

(1) ¿Cuál es la pregunta de la encuesta?
(2) Imagínate que tú tienes que escribir la noticia, y tienes al gráfico de apoyo. Redacta en 5 líneas como mínimo la información pensando en un periódico.

Pase lo que pase, gana Sarkozy

La derecha gubernamental francesa paga la escasa credibilidad política de Chirac

Evolución de los sondeos

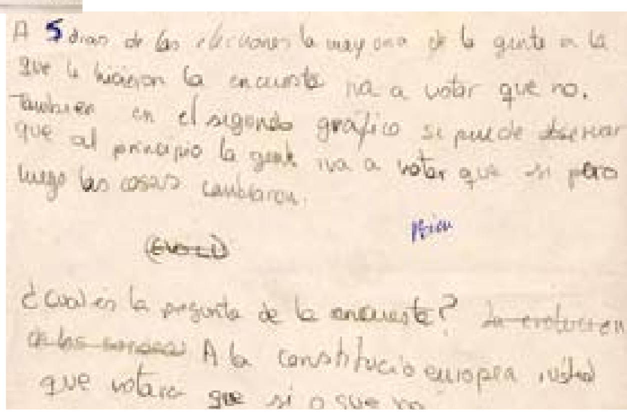


Interpretación de las selecciones

¿Cuál es la pregunta de la encuesta?

Que podrían votar los siguientes días

Las elecciones que serán el próximo domingo provarán la constitución Europea y se dará al usuario a que vote por las normas que han infligido Europa para respectar en la actualidad, en el gráfico representa el porcentaje, la CSA y la sofres representan la evaluación. El porcentaje máximo de la CSA representa el no en 8 días, y lo mismo en la sofres que eran 6 días.



A 5 días de las elecciones la mayoría de la gente a la que le hacían la encuesta iba a votar que no. También en el segundo gráfico se puede observar que al principio la gente iba a votar que sí pero luego las cosas cambiaron.

¿Cuál es la pregunta de la encuesta? ~~La evolución de los sondeos~~ A la constitución europea usted que votaría que sí o que no

En la actividad 4, a diferencia de las anteriores, el contexto no se ha adoptado con fines didácticos, si no que se presenta de forma real. Tiene que ser el propio estudiante quien selecciona los datos necesarios para poder responder a las pregunta.

Las tareas ligadas son: *identificar las variables; interpretar la gráfica; y predecir el comportamiento de las variables*.

El contexto de interpretar la noticia de un diario está muy ligado a desarrollar actitudes críticas de un ciudadano, que según nuestra lista, significa que se potencian procesos ligados a la reflexión.

Además, los procesos que se desarrollan están muy ligados a la argumentación. Según los intervalos que se escojan del gráfico, se pueden dar interpretaciones y predicciones diferentes. En efecto, se han incorporado dos respuestas de estudiantes, se observa que han respondido globalmente, comparando las gráficas y realizando juicios de valor en las interpretaciones. También se observa que la interpretación es distinta en cada caso.

Las tareas de esta actividad no son muy distintas de la actividad tres, pero claramente la actividad 4 desarrolla otros aspectos. La función del contexto en esta actividad es desarrollar procesos de argumentación que en las anteriores no se desarrollan.

El nivel es de reflexión principalmente por poder llevar a cabo una matematización completa y la posibilidad de realizar diferentes interpretaciones. ¿Qué procesos permitirían explicar un nivel de reflexión?

2.3.7 Sumario

Complejidad de la actividad y contexto

Hasta ahora, se ha dejado fuera la discusión sobre la complejidad de la actividad y la matematización. Tal como está construido el marco teórico sobre complejidad se tiene que un mayor nivel de complejidad implica un mayor nivel de matematización. En efecto, en la descripción del rol del contexto de Lange (1987) desde orden cero hasta tercer orden, el cambio de contexto de uno más simple a más complejo implica un mayor nivel de matematización. Esta relación sugiere la siguiente hipótesis: mientras el contexto sea más importante, habrá más complejidad en la actividad. En nuestros términos, mientras más funciones cumpla el contexto, mayor nivel de complejidad tendrá la actividad.

Las fases de matematización actúan como el regulador de los niveles de complejidad de la actividad. La manera en que regula la modelización la complejidad, forma parte de las interrogantes de la investigación. Asimismo desarrollar la hipótesis que conecta la complejidad y el contexto también es parte de la investigación.

En las cuatro actividades se ha puesto de manifiesto las funciones del contexto que se quieren destacar. Pensamos que es necesario establecer una caracterización de estas funciones más profunda, y relacionada con el tópico de interpretación de gráficas. Para tal efecto, el modelo de competencia que se ha diseñado permitirá ser el vehiculo para este propósito.

Tareas y procesos y nivel de complejidad

En la propuesta teórica, tareas y procesos determinan un nivel de complejidad. En el tópico de interpretación de gráficas las tareas se han definido desde la literatura. Pero en el caso de los procesos es diferente. Se pueden aventurar algunos procesos tales como la lectura, la interpretación y la construcción que son acciones que se pueden definir tanto como tareas o procesos puesto que se desarrollan en cualquier curso y son transversales. Pero la organización de los procesos que conforman una competencia como modelización y argumentación es una caracterización que no puede idearse, y es necesario que emerja del estudio empírico.

El cuarto problema de la investigación trata sobre los patrones de interacción entre profesor y estudiantes. En términos de nuestro modelo y del tipo de estudio que se pretende realizar, la pregunta se puede enfocar a cuáles son los patrones de interacción que caracterizan el desarrollo de procesos y cuáles de estos procesos corresponden en mayor medida a las acciones del profesor, y por ende, cuáles de éstos corresponden más bien a las acciones de los estudiantes. Para profundizar en estas preguntas en el siguiente apartado se tratan los patrones de interacción.

2.4 Patrones de interacción

En este apartado se desarrolla el marco de referencia para tratar el cuarto objetivo de nuestra investigación que trata sobre la interacción en el aula en relación a las competencias matemáticas. Para este propósito nos hemos centrado en los patrones de interacción en el aula de matemáticas, éstos se definen como regularidades que se constituyen entre el profesor y los estudiantes en el transcurso del diálogo que el profesor no necesariamente implanta de forma intencionada (Voigt, 1995).

En un proceso interactivo hay un riesgo permanente de un colapso debido a que la ambigüedad y las diferentes interpretaciones posibles hacen que la negociación de significado de una actividad sea frágil. Según Voigt (1995) los patrones de interacción contribuyen a minimizar estos riesgos.

El patrón de interacción más conocido en la literatura es el "diálogo triádico" (Lemke, 1997) que se asocia a una iniciación del profesor, normalmente en forma de pregunta, una respuesta del estudiante y un seguimiento en que el profesor proporciona una retroalimentación al estudiante.

La tercera acción de seguimiento ha sido interpretada de distintas maneras. El seguimiento es considerado como una evaluación, constituyendo así el patrón de interacción más tradicional: I-R-E (iniciación, respuesta y evaluación) atribuido a Mehan (1979). Según Cazden (1991) este patrón de interacción es el recurrente, es el que se da en las aulas a menos que de forma intencionada se emprenda otra acción para generar un patrón alternativo. Scott et al. (2006) sostienen que el patrón I-R-E se asocia a un rol de autoridad por parte del profesor.

Por otra parte el seguimiento ha sido asociado a un *Follow–up* (Sinclair y Coulthard, 1975; Wells, 1993), que consiste en una retroalimentación diferente a la valoración del profesor. Es el patrón I-R-F, en que F actúa como un *Follow–up* para extender las respuestas de los estudiantes. Mortimer y Scott (2002) han interpretado este patrón I-R-F como cadenas de interacciones triádicas del tipo I-R-P-I-R-P... o I-R-F-I-R-F... en que P es una acción discursiva para seguir la continuación de la acción del estudiante y F un feedback para que el estudiante elabore más su discurso. Scott et al. (2006) identifican estos patrones como cadenas abiertas por no tener condicionado el término del diálogo, lo que permite que el profesor puede explorar las ideas de los estudiantes dando soporte a la interacción dialógica. En cambio las cadenas de patrones I-R-P-I-R-P-E, en que E es la evaluación del profesor, estos mismos autores las identifican como una cadena cerrada porque la evaluación da término a la cadena.

Por otra parte, hay cadenas que no se asocian a un patrón triádico, en que es el estudiante quien inicia una acción o pregunta. Otra posibilidad es que diferentes estudiantes pueden responder a una pregunta del profesor, generando un I-R_1- R_2-R_3 en que R_n indica una respuesta de un estudiante particular.

El patrón I-R-E promueve las siguientes normas comunicativas: el profesor y el texto son las autoridades intelectuales, el profesor regula los giros en la conversación, y los estudiantes pocas veces se dirigen entre ellos durante las conversaciones formales en el aula (Yackel y Cobb, 1996).

Indagar alternativas al modo tradicional de interacción entre profesor y estudiante es uno de los intereses de las investigaciones en el tema. McClain (2000) analizó el rol del profesor cuando emerge la notación y simbolización en un curso de primer grado. Los resultados mostraron que los esquemas de notación surgen de las explicaciones y justificaciones de los propios estudiantes, y no eran esquemas predeterminados impuestos por la secuencia de instrucción de la profesora. Mientras los estudiantes compartieron sus significados, la profesora jugó un rol central en la iniciación de su desarrollo con la introducción de esquemas. El uso de la simbolización ofreció un modo a los estudiantes para organizar y reflexionar sobre su actividad y los modos de simbolizar que surgieron no fueron impuestos por el profesor. Un estudio con similares intenciones fue el llevado a cabo por Forman y Ansell (2002) quienes observaron como el discurso en el aula de matemáticas cambió de un modelo I-R-E a lo que ellos denominan “orquestación”, en el cual tanto profesores como estudiantes se replicaban unos a otros, y, se centraban en escuchar, reflexionar, aclarar, ampliar, traducir, evaluar e integrar las explicaciones de cada uno. Tanto profesores como estudiantes legitimaron las explicaciones en el aula. Se encontró que profesores y estudiantes jugaron papeles complementarios así como similares: los profesores tendieron a solicitar argumentos a los estudiantes, mientras que éstos proporcionaron explicaciones y evaluaciones de las explicaciones de sus compañeros de clase.

Por otra parte, Sherin (2002) estudia los patrones de interacción centrándose en el discurso en el aula. Esta autora describe la discusión que se genera entre estudiantes y profesor en términos de la tensión entre los procesos y el contenido del discurso matemático. Por *procesos* se refiere a cómo el profesor y los estudiantes interactúan en la discusión, y destaca como aspecto importante la participación en el aula. En cambio el *contenido* se refiere a las nociones matemáticas que son desarrolladas. Sherin muestra que en diferentes momentos del curso académico resaltan los procesos por sobre los contenidos, o viceversa, en el discurso de aula. Esta autora destaca un patrón de interacción de aula en que el profesor, a través de la noción de *filtro,* encuentra maneras de estructurar la discusión de clase para apoyar tanto el proceso como el contenido del discurso de aula. La secuencia en que el filtro por parte del profesor regula el discurso de aula se puede describir de la siguiente manera: en la fase inicial múltiples ideas son solicitadas a los estudiantes, luego se comparan y evalúan las ideas que se han sugerido. Comienza la filtración por parte de profesor, quien fija la atención de los estudiantes en un subconjunto de las ideas que han sido seleccionadas; y además puede introducir nuevas ideas matemáticas. Finalmente, al terminar la filtración, se sigue la generación de ideas adicionales por parte de los estudiantes. Esta secuencia que caracteriza la discusión de clase puede repetirse varias veces. La noción de filtro puede servir tanto en el proceso, los estudiantes comparten su pensamientos, como en el contenido, el profesor ejercer algún control de la dirección matemática de la lección.

Asimismo, Voigt (1995) y Wood (1998) plantean patrones de interacción en el aula de matemática. Wood describe el *patrón del embudo* (*Funnel Pattern)* (Bauersfeld, 1980) como una de las formas características en que se comunican profesor y estudiantes en el aula. Este patrón se caracteriza de forma que el profesor plantea una problema o pregunta a los estudiantes y, si éstos son incapaces de resolverlo, el profesor propone una secuencia de preguntas más simples que fragmentan el contenido de la cuestión inicial en partes de menor complejidad. En este patrón, los estudiantes no tienen las condiciones para desarrollar una actividad cognitiva reflexiva porque se limitan a responder adecuadamente a las preguntas del profesor, quien les guía a la respuesta correcta mediante preguntas que no son equivalentes a la complejidad de la pregunta inicial.

Otro patrón que Wood identifica en las aulas *es el patrón de focalización (focusing pattern),* en que también hay una guía por parte del profesor del razonamiento de los estudiantes, pero se diferencia en que el profesor crea las condiciones para estimular a los estudiantes a expresar su razonamiento de forma reflexiva. El profesor valora la diversidad de soluciones para la misma tarea, resaltando la que le parece más interesante para los estudiantes, y no la que desea introducir.

Por otra parte Voigt (1995) describe el *patrón extractivo (elicitation patten)* en que el profesor guía a los estudiantes hacia un método o solución de un modelo similar al *funnel pattern*, pero realizando una reflexión conjunta sobre lo acontecido después de realizar preguntas más sencillas para resolver la cuestión planteada inicialmente. El profesor propone una tarea ambigua, y los estudiantes ofrecen diferentes respuestas y soluciones que el profesor evalúa previamente. Si las contribuciones de los estudiantes son demasiado divergentes, el profesor les guía hacia un argumento, una solución, etc., definida. Finalmente, el profesor y los estudiantes reflexionan y evalúan lo obtenido.

Según Voigt (1995) el profesor, creyendo que ayuda a los estudiantes, plantea pequeñas preguntas y extrae pequeñas dosis de conocimiento. En este ciclo, los estudiantes pueden sentirse obligados a seguir al profesor, paso a paso, en la consecución de las respuestas que éste busca. Si sus contribuciones no satisfacen las expectativas del profesor, éste los guiaría de una forma más directa y explícita, corriendo el riesgo de perder lo ganado inicialmente, las contribuciones de los estudiantes con argumentos divergentes.

En contraposición Voigt identifica el *patrón de discusión* (*discussion pattern*), en el que, en un escenario de trabajo en pequeños grupos, los estudiantes presentan el desarrollo de la actividad y explican la solución, el profesor contribuye a la explicación del estudiante a través de preguntas adicionales, aclaraciones, reformulaciones, o juicios, de manera que una explicación o solución conjunta emerge y se tome como válida. Finalmente el profesor incentiva a que otros estudiantes informen de soluciones alternativas y se comienza de nuevo la secuencia.

Según Voigt, hay notorias diferencias entre los dos patrones de interacción. En el patrón extractivo la solución es el fin principal y las contribuciones de los estudiantes se dirigen a satisfacer las condiciones del profesor; mientras que en el patrón de discusión la solución es el punto de partida para una construcción de significado y la argumentación matemática se beneficia de las contribuciones originales de los estudiantes.

Rojas (2009) considera que si bien no se puede establecer una correspondencia inmediata entre los patrones presentados tanto por Wood (1998) como por Voigt (1995), estos patrones describen dos tipos de situaciones discursivas opuestas:

> “a) Situaciones dirigidas por el profesor para llegar al conocimiento matemático que se encuentra detrás de las actividades y tareas planteadas en clase (*funnel pattern* y *elicitation pattern*).

b) Situaciones abiertas donde el significado se construye colectivamente por medio de las contribuciones de alumnos y profesor (*focusing pattern* y *discussion pattern*).”

(Rojas, 2009, p. 93, cursiva en original)

Discusión

En el trabajo de Sherin (2002) se separan los elementos ligados al conocimiento matemático, ella destaca tanto los procesos, bajo su visión del término, y los contenidos. Asimismo, la identificación de la noción de filtro resulta ser un modelo que caracteriza las actuaciones del profesor respecto a las ideas de los estudiantes.

El trabajo de Sherin (2002) se asemeja al propósito de nuestro estudio, en un escenario de interacción de aula, el de separar contenidos de procesos, aunque su visión de proceso sea diferente a la de nuestro trabajo.

En nuestra investigación los contenidos son las tareas matemáticas y las competencias se componen de un conjunto de procesos que son desarrollables a largo plazo. Por tanto, nuestro propósito es indagar en los patrones de interacción en el aula de matemáticas que permitan el desarrollo de las competencias. Este propósito se concreta en estudiar los patrones de interacción en función de los procesos matemáticos. Siguiendo los trabajos sobre patrones de interacción presentados (Voigt, 1995; Wood, 1998; McClain, 2000; Sherin, 2002; Forman y Ansell, 2002; Mortimer y Scott, 2003) se estudiará qué patrones de interacción se presentan en una secuencia caracterizada en función de los procesos. En concreto, se enfoca el estudio en los patrones de interacción desde el punto de vista en que los procesos son los articuladores para estudiar el discurso de aula.

Finalmente, mencionar que los modelos de interacción identificados son transversales al tópico matemático. En cambio, en nuestro estudio los patrones de interacción se estudian desde un tópico de interpretación de gráficas, y tanto los procesos que emerjan en la tensión de aula como los ciclos entre los procesos dependen de este tópico. En consecuencia, se trabaja bajo la hipótesis de que los resultados no serán los mismos si se extiende esta pregunta a otro tópico. Lo que sí se espera extender son las estrategias para estudiar los patrones de interacción respecto a los procesos matemáticos.

2.5 Modelización

La modelización en el aula de matemáticas es uno de los tópicos que actualmente destaca en Didáctica de las Matemáticas. A su vez, se vincula cada vez más con la noción de competencia. En efecto, en una gran parte de las comunicaciones del estudio 14 ICMI (Blum et al., 2007) se vincula la competencia con la modelización, o más aun, se trata directamente la competencia de modelización.

En general, la modelización es tratada como el proceso de resolver un problema proveniente de una situación real por medio de un modelo matemático; el esquema de la figura 2.5.1 (Maaß, 2006) muestra la secuencia en las fases de modelización.

La relación entre las competencias y la modelización ha sido interpretada principalmente de dos maneras:

- Conjunto de acciones a llevar a cabo en la fases de modelización (Kaiser, 2007). Maaß (2006) amplía lista de competencias a otras que no son parte de las fases de modelización, tales como competencias del tipo metacognitivo, argumentativo y actitudinal.
- Las competencias entendidas como niveles de complejidad (Henning y Keune, 2007; Greer y Verschaffel, 2007). En el primer nivel se reproducen conocimientos. El segundo nivel se asocia a la traducción del problema real al problema matemático; es decir, a las diferentes fases de modelización. El tercer nivel se asocia a competencias de reflexión, abordando la modelización con un sentido crítico.

En nuestro estudio, la modelización tiene el propósito de ser desarrolladora de competencias, y por tanto, incorpora las dos visiones sobre las competencias antes mencionadas.

Para caracterizar la competencia modelización en el tópico de interpretación de gráficas, de acuerdo con nuestra propuesta, la modelización tiene que estructurarse a partir de procesos, niveles de complejidad y tareas matemáticas. Por otra parte, si se estudia la competencia que emerge en el aula de matemáticas, ésta se caracteriza en un escenario de interacción entre profesor y estudiantes. Es decir que no solo se consideran los datos sobre el trabajo de los estudiantes, sino que también el rol del profesor. Este foco es innovador en comparación con otros estudios empíricos sobre modelización en los cuales generalmente se recogen datos ya sea de las producciones de los estudiantes o de sus intervenciones en el aula, pero en los que el rol del profesor no es considerado como un criterio en la modelización.

Considerando estos intereses, en este apartado se describen en primer lugar algunas corrientes que han potenciado la modelización en la educación de las matemática (apartado 2.5.1), luego se desarrollan dos corrientes de modelización provenientes de la educación matemática realista (EMR) que proporcionan herramientas para desarrollar la competencia de modelización: matematización (apartado 2.5.2) y modelización emergente (apartado 2.5.3). Al final de cada apartado se desarrolla una discusión sobre las ventajas y limitaciones de cada una de las corrientes expuestas.

2.5.1 Modelización en la educación de las matemáticas

Existe una variedad de descripciones sobre el término modelización. La propuesta de Penrose (1978; extraído de Houston 2007) es una de las pioneras que describe los pasos en el proceso de modelización. Posteriormente han seguido propuestas con la misma base pero que destacan otros aspectos tales como el modelo de la situación real (Maaß, 2006), y la relación entre la teoría y los datos en el proceso de modelización (Blomhøj y Højgaard, 2003). Desde un enfoque evaluativo Houston (2007) caracteriza criterios para evaluar las fases de la modelización en los estudiantes.

De acuerdo con (Maaß, 2006), para modelizar un problema real hay que moverse entre la realidad y la matemática. El proceso de modelización comienza en el mundo real; simplificando, estructurando e idealizando este problema se obtiene un modelo real. La matematización del modelo real conduce a un modelo matemático. Trabajando dentro de las matemáticas se obtiene una solución matemática; esta solución tiene que ser primero interpretada y luego validada. Si la solución o el proceso elegido no resulta ser adecuado a la realidad, los pasos o quizás incluso la totalidad del proceso de modelización necesita ser revisado. En la figura 2.5.1, se ilustra la propuesta de Maaß (2006).

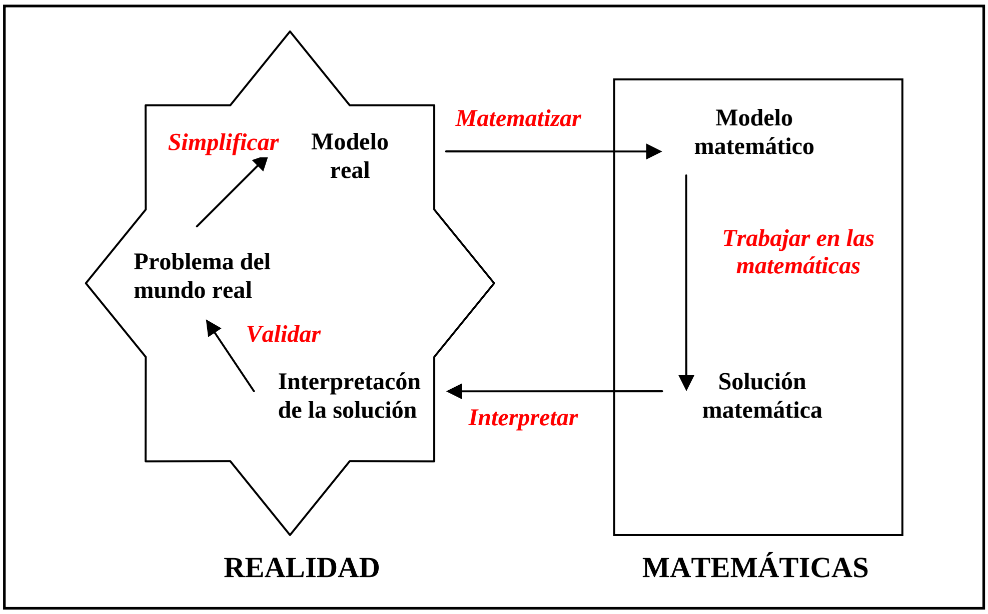


Figura 2.5.1: fases de modelización (Maaß, 2006)

En nuestra investigación, entenderemos por *fases de modelización* la cinco etapas de la propuesta de Maaß (2006).

A continuación se exponen las nociones de competencias de modelización que se tratan en la literatura.

Competencias de modelización

Los trabajos sobre competencias de modelización que se señalan corresponden principalmente a Kaiser (2007) y Maaß (2006) cuyas propuestas son similares.

En un trabajo previo, Kaiser y Schearz (2006) describen la controversia entre las habilidades de modelización y las competencias de modelización. Para ellos las competencias de modelización incluyen no solo a las habilidades, sino también la voluntad de resolver problemas con aspectos matemáticos tomados de la realidad a través de la modelización matemática.

Kaiser (2007) da una caracterización de competencia arraigada a las fases de modelización:

- Competencias para entender los problemas del mundo real y para construir un modelo de la realidad.
- Competencias para crear modelos matemáticos desde un modelo de la realidad.
- Competencias para resolver problemas matemáticos con un modelo matemático.
- Competencias para interpretar los resultados matemáticos en un modelo de la realidad o en una situación real.
- Competencias para confrontar soluciones y, si es necesario, realizar otra secuencia de modelización.

Por otra parte, Maaß (2006) a partir de un estudio empírico obtiene una lista de competencias que incluyen además de las correspondientes a las fases de la modelización (indicadas como A); otras como: competencias metacognitivas (B), competencias resolutivas (C), competencias argumentativas (D), y finalmente competencias actitudinales (E).

A. Competencias relacionadas con las fases de modelización.
    - Competencias para entender el problema real y establecer un modelo basado en la realidad.
    - Competencias para establecer un modelo matemático del modelo real.
    - Competencias para solucionar preguntas matemáticas dentro de este modelo matemático.
    - Competencias para interpretar resultados matemáticos en una situación real.
    - Competencias para validar la solución.

B. Competencias de modelización metacognitivas.

C. Competencias para estructurar problemas del mundo real y orientar el trabajo hacia la solución

D. Competencias argumentativas en relación al proceso de modelización y la redacción de los argumentos.

E. Competencias para evidenciar las posibilidades matemáticas que se ofrecen en la solución de problemas del mundo real.

Por otra parte, Sol et al. (2007) han indagado las competencias que se desarrollan desde un proyecto matemático realista (PMR). Una actividad se considera un PMR si es abierta, auténtica, productiva y colaborativa; si la situación inicial se relaciona con el entorno social de los estudiantes; si se resuelve con herramientas matemáticas; y si se desarrolla comunicativamente considerado su visión integradora y su complejidad. Los PMR son un tipo de actividad que enfatiza la modelización más allá de la resolución de problemas. Estos autores, al observar el trabajo de los estudiantes con los PMR, han identificado seis competencias, cada una formulada en términos de “ser capaz de”: comprender situaciones problemáticas; adoptar un modelo asociado a una situación propuesta; hacer formulaciones matemáticas dentro del modelo; encontrar soluciones matemáticas dentro del modelo; interpretar resultados asociados a la situación propuesta; y comparar el resultado obtenido con el resultado original. Estas competencias se corresponden con las fases de modelización.

Otros autores han desarrollado la competencia modelización, caracterizándola en tres niveles. Henning y Keune (2007) si bien plantean que la competencia no puede observarse directamente, se pueden observar las acciones y el comportamiento de los estudiantes cuando aplican tareas de modelización.

Estos autores clasifican la competencia modelización en tres niveles. En el cuadro 2.5.1 se exponen las características de cada nivel.

Cuadro 2.5.1: Niveles de competencia modelización (Henning y Keune, 2007)

Nivel 1: Reconocer el modelo	Nivel 2: Modelizar	Nivel 3: Meta- reflexionar sobre el modelo
- Reconocer - Describir los procesos de modelización - Caracterizar, distinguir y localizar las fases del proceso de modelización	- Analizar y estructurar problemas y abstraer cantidades. - Adoptar diferentes perspectivas - Construir modelos matemáticos - Trabajar sobre modelos - Interpretar resultados y declaraciones del modelos - Validar el modelo	- Críticamente analizar la modelización -Caracterizar los criterios de la evaluación de modelo - Reflexionar sobre las causas de la modelización - reflexionar respecto a la aplicación de las matemáticas

Greer y Verschaffel (2007) describen tres niveles para la modelización distintos a los anteriores, e identifican las competencias asociadas a cada nivel:

Modelización implícita: Consiste en resolver los problemas tradicionales y estándar del currículo, en los cuales el estudiante modela sin que necesariamente sea consciente del proceso. Las competencias que se esperan en este nivel corresponden básicamente a ser capaz de resolver problemas reproduciendo estrategias sin necesariamente comprender las fases de modelizción.

Modelización explícita: consiste en introducir ejemplos de modelos, en los que se aplican conceptos y terminología de modelización como un proceso genérico. El estudiante es consciente de realizar las fases de modelización. Estos autores se apoyan en el trabajo de Houston (2007) para caracterizar las competencias en este nivel.

Modelización critica: El rol de la modelización en la matemática, en la ciencia y en la sociedad es examinado críticamente.

En este nivel, las competencias que se desarrollan destacan la importancia de desarrollar una actitud crítica sobre las fases de modelización, además de juzgar las concepciones de la aplicación de las matemáticas, su desarrollo histórico y la naturaleza de la matemática como una disciplina.

Discusión

En los autores que se han expuesto, la modelización es tratada como el proceso de resolver un problema que proviene de una situación real por medio de un modelo matemático. Consideramos que la propuesta de Maaß (2006) -figura 2.5.1- es la que mejor expresa la relación entre las fases de modelización, puesto que diferencia el problema original, el modelo real y el modelo matemático. Además, entre estos autores se observa que hay una diferencia de planteamientos al tratar los aspectos didácticos de la modelización, tales como: los criterios a seguir en el estudio de la comprensión de los estudiantes al llevar a cabo las fases de modelización; los ejemplos de actividades para que emerjan modelos matemáticos; y el rol de profesor.

Por otra parte, se observa una intensa indagación en la caracterización de las competencias de modelización en los trabajos de Maaß (2006) y Keitel (2007), quienes se apoyan en las fases de la modelización para caracterizar las competencias en los estudiantes.

Asimismo, el interés por caracterizar niveles en la modelización se observa en diversas investigaciones. Tanto los trabajo de Henning y Keune (2007) y Greer y Verschaffel (2007) coinciden en algunos aspectos en cada nivel. En el primer nivel, aunque se refieran a aspectos diferentes (los primeros se refieran a reconocimiento del modelo, los segundos a problemas rutinarios) ambos coinciden en que el estudiante reproduce conocimientos. El segundo nivel en ambos casos se asocia a la traducción del problema real al problema matemático y a desarrollar las diferentes fases de modelización. En el tercer nivel coinciden totalmente ya que ambos postulan estudiar la modelización con un sentido crítico.

En este tratamiento de la modelización, se aprecia una ausencia de interés curricular sobre la modelización. La discusión curricular sobre la modelización en estos trabajos se reduce a un micro nivel, en que se discute en torno a ejemplos de actividades para modelizar.

En el siguiente apartado se expone la *matematización*. Corriente proveniente de le EMR, que ha desarrollado una discusión curricular sobre la modelización.

2.5.2 Matematización

La noción de matematización se ha utilizado para estructurar el proceso que se lleva a cabo en la transformación de una situación real a un modelo matemático. Los principales impulsores de esta aproximación son los seguidores de Freduenthal (1973, 1991) y de las líneas de investigación en la educación matemática realista (EMR) (Treffers, 1985; de Lange, 1987), quienes han reforzado la noción de matematización en la educación de las matemáticas.

La *Matematización* es una organización de la realidad que usa el conocimiento matemático. Esta es una actividad de organización según la cual los estudiantes usan los conocimientos y habilidades adquiridas para descubrir regularidades desconocidas, relaciones y estructuras. (Treffers y Goffree, 1985).

Se distinguen dos componentes, la matematización horizontal y vertical (Treffers y Goffree, 1985; Treffers, 1987; Freduenthal 1991).

La transferencia del problema del mundo real al mundo matemático se *denomina matematización horizontal*. En cambio el proceso que se lleva a cabo al trabajar dentro del mundo matemático se denomina *matematización vertical.*

La matematización horizontal consisten de actividades tales como: identificar las matemáticas específicas en un contexto general; esquematizar; formular y visualizar el problema; descubrir relaciones y regularidades; reconocer semejanzas en problemas diferentes (de Lange, 1987).

En el proceso de matematización vertical se pueden reconocer las siguientes actividades: representar una relación en una fórmula; probar las regularidades; refinar y ajustar los modelos; combinar e integrar modelos; generalizar.

En informe PISA (OCDE, 2006), los cinco pasos fundamentales para resolver un problema que se plantea desde la vida real se denomina matematización. Esta caracterización proviene de la descripción de matematización horizontal (de Lange, 1987). Se resalta que los últimos pasos que han de darse para resolver el problema implican una reflexión sobre el proceso en su conjunto y sobre los resultados obtenidos. Llegados a este punto, los estudiantes deben interpretar los resultados con espíritu crítico y validar la totalidad del proceso. Esta reflexión si bien da en todas las fases de modelización tiene especial importancia en esta fase final. Algunos de los aspectos de este proceso de reflexión y validación son: la comprensión del alcance y los límites de los conceptos matemáticos; la reflexión sobre las argumentaciones matemáticas, la explicación y justificación de los resultados obtenidos; la comunicación del proceso y la solución; la crítica del modelo y de sus límites.

Además, PISA establece que las competencias se presentan en las diferentes fases de modelización: "Las distintas fases del proceso de matematización recurren a estas *capacidades*[5] de un modo diferente, tanto en lo que respecta a las *capacidades* específicas que han de usarse como al nivel de dominio requerido. Para identificar y analizar estas competencias, PISA ha optado por recurrir a ocho competencias matemáticas características que, en su forma actual, se basan en la obra de Niss (1999) y sus colegas daneses" (OCDE, 2006, pag. 101).

Como se menciona en el apartado 2.1.3.1, PISA no recurre a las ocho competencias matemáticas como criterio de evaluación en la preguntas. Utiliza lo que han denominado *grupos de competencia*, que corresponde a una versión actualizada de la pirámide de Lange

[5].El cursivo en la cita es nuestro, por capacidad se le atribuye el significado de competencia puesto que en la versión original en inglés el término es "competency", que hace referencia a las ocho competencias de Niss (1999)

(1995) para evaluación y que previamente se utilizó en la versión holandesa de TIMSS (de Lange y Boertien, 1994). En la caracterización inicial de estos niveles, el tercer nivel de complejidad (reflexión) se denominó: matematización, pensamiento matemático, generalización. De manera implícita hay una correlación entre este nivel y la matematización vertical.

De Lange (1987) arguye que se pueden esperar diferentes recorridos y niveles en el proceso de matematización, dependiendo de cómo se enfrenta el estudiante a la situación inicial, y su habilidad para resolver problemas matemáticos. La figura 2.5.2 muestra tres posibles recorridos.

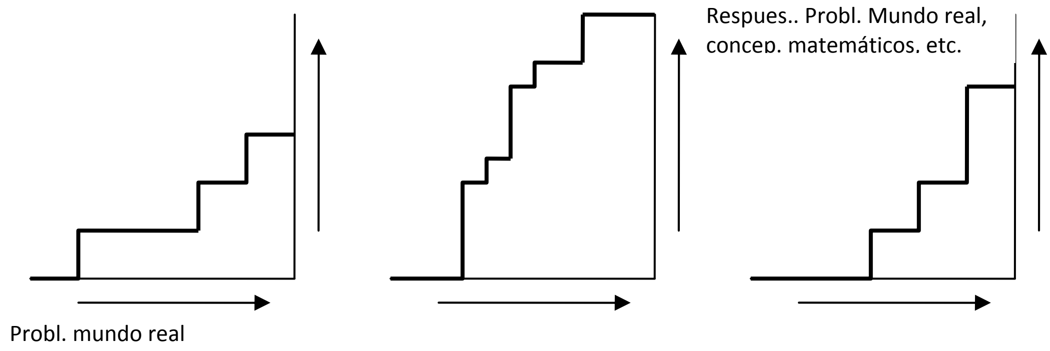


Figura 2.5.2: Ilustración de recorridos en la matematización (de Lange, 2007)

El tercer nivel de complejidad (reflexión) es semejante al recorrido ilustrado en el gráfico central de la figura 2.5.2.

Discusión

Desde la perspectiva de la EMR el marco sobre matematización tal como reflejan las referencias utilizadas, ha sido desarrollado principalmente por Treffers y de Lange, consolidándose finalmente en proyectos de evaluación como PISA. La pirámide de Lange es un instrumento que ha sido utilizado en proyectos curriculares para discutir criterios sobre el nivel de matematización en una actividad matemática, y usada desde un punto de vista evaluativo, es decir en un macronivel, pero en contraste, no hemos encontrado literatura en la matematización sea una aproximación operativa en un micronivel para estudiar el aula de matemáticas.

El enfoque de la matematización en la actividad matemática escolar se ha extendido a un alcance mucho mayor que promover la modelización ya que la estructura de matematización horizontal y vertical se enfoca a toda la enseñanza de la matemática y no solo a los aspectos de modelización. Esta visión se pone de manifiesto en el enfoque de PISA en el apartado de procesos matemáticos. Se describe la matematización como el proceso que se desarrolla en toda la actividad matemática, para luego enunciar las ocho competencias matemáticas, en que una de estas hace mención a la construcción de modelos. Si bien en nuestra propuesta destacamos el rol de la modelización en la actividad matemática escolar, no pensamos que esté por sobre todos los demás aspectos de la matemática, ni que organice el resto de competencias. Por tanto, para nuestra propuesta, se rescatan algunos elementos que se han destacado desde este enfoque, tales como identificar los aspectos en la fase final de modelización ligados a la reflexión y validación, y que éstos se pueden relacionar con un nivel de complejidad de reflexión.

Por otra parte, siguiendo una perspectiva desde la EMR, Gravemeijer (1999) propone una reorganización de la modelización enfocada hacia los procesos de aprendizaje de los modelos denominada *modelización emergente.*

2.5.3 Modelización emergente

En el contexto de la escuela primaria, algunas investigaciones han mostrado que el concepto de modelos emergentes puede funcionar como un diseño heurístico poderoso (Gravemeijer, 1999; Doorman y Gravemeijer, 2009). El diseño heurístico de *la modelización emergente* asigna un papel a los modelos que se diferencia del papel didáctico que se ha asignado tradicionalmente. En vez de intentar concretizar el conocimiento matemático abstracto, el objetivo es tratar de ayudar a los estudiantes a modelizar su propia actividad matemática informal, para que gradualmente se desarrolle en un modelo más formal.

Como un primer paso, los estudiantes se implican en un contexto de problemas que pueden ser modelizados de una manera informal. Luego los estudiantes son apoyados en el desarrollo tanto del modelo, como del conocimiento matemático asociado para su comprensión. El modelo se desarrolla en el sentido de que tanto la representación, como su significado cambian incluso si el modelo no es creado por los estudiantes, dado que se focaliza en las invenciones de los estudiantes para escoger modelos. Otro aspecto importante está en el potencial de los modelos para apoyar la matematización de los conceptos. La idea es buscar aquellos modelos que puedan convertirse en entidades propias, es decir, en modelos del razonamiento matemático. (Gravemeijer y Doorman, 1999; Gravemeijer, 2004; Rasmussen y Blumenfeld, 2007).

Gravemeijer (2007) señala que en la modelización emergente el modelo se entiende más como un concepto que como un modelo propiamente dicho. En la práctica, *el modelo* se forma como una serie de modelos consecutivos locales que pueden ser descritos como una cadena de significaciones. Desde una perspectiva más global, estos modelos locales pueden ser vistos como varias manifestaciones del mismo modelo. Por tanto cuando se habla de un cambio del modelo a uno siguiente, se hace referencia al mismo *modelo* sobre un nivel más general. Sobre un nivel más detallado, esta transición puede abarcar varios modelos locales que gradualmente toman roles diferentes.

El término *emergente* se refiere tanto al carácter del proceso por el cual los modelos surgen en la EMR, como al proceso por el cual estos modelos apoyan la emergencia del conocimiento matemático formal. De acuerdo al diseño heurístico de modelización emergente, el modelo comienza a destacar como un *modelo de* las estrategias informales de los estudiantes. Con el tiempo, el modelo gradualmente se convierte en una entidad propia y empieza a servir como un *modelo para* un razonamiento matemático más formal (Gravemeijer, 1999).

En el desarrollo de la modelización emergente, se puede distinguir cuatro niveles en la actividad (figura 2.5.3) (Gravemeijer, 1999):

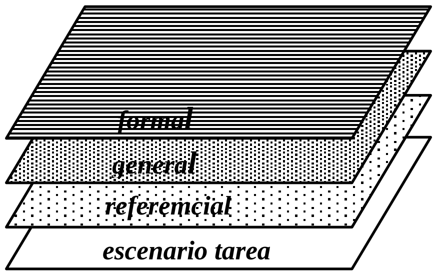


Figura 2.5.3: Niveles en la actividad

(1) La actividad *en el escenario de la tarea*, en la cual las interpretaciones y soluciones dependen de la comprensión de cómo actuar en el escenario (a menudo fuera de la escuela).

(2) La actividad de *referencia,* en que los *modelos de* se refieren a la actividad en el escenario descrito en las actividades de enseñanza (planteado sobre todo en la escuela).

(3) la actividad *general*, en donde los '*modelos para',* obtienen su significado desde un marco de relaciones matemáticas.

(4) El razonamiento matemático *formal*, el que se sostiene de '*modelos para'* en la actividad matemática.

Estos cuatro niveles de actividad ilustran que los modelos inicialmente están ligados a la actividad en un escenario específico e implican imágenes de la situación específica; en el *nivel de referencia*, los modelos se basan en la comprensión de los estudiantes y escenarios empíricamente reales. La *actividad general* empieza a surgir cuando los estudiantes comienzan a decidir sobre las relaciones matemáticas que están implicadas. Como consecuencia, el modelo se libera de su dependencia de imágenes específicas de la situación, y gradualmente se desarrolla en un modelo que obtiene su significado de relaciones matemáticas que están siendo interpretadas en el proceso. La transición desde *modelo de/modelo para,* coincide con una progresión desde un razonamiento matemático informal a uno más formal que se entrelaza con la creación de una nueva realidad. Por consiguiente, la transición *modelo de/modelo para* no está ligada a las manifestaciones específicas del modelo, sino al pensamiento del estudiante, mientras que el término *modelo de* se refiere a una actividad en un escenario específico, el término *modelo para* se refiere a un marco de relaciones matemáticas. (Gravemeijer, 1999, 2007).

La modelización emergente destaca la modelización en la enseñanza de las matemáticas. Por medio de su proceso de abstracción, los estudiantes desarrollan el conocimiento abstracto matemático que les permite construir modelos matemáticos. La modelización emergente tiene la doble función de desarrollar el conocimiento matemático, y concretar una experiencia con las fases de modelización.

Discusión

Desde un punto de vista de la implantación de la modelización en el aula de matemáticas, la aproximación de modelización emergente representa un avance en comparación a la modelización y matematización, dado que se ha elaborado con un propósito didáctico que puede utilizarse como base para un diseño curricular. La estrategia heurística *modelo de/ modelo para* es un poderosa herramienta para caracterizar el proceso de instrucción, y por tanto es significativo incorporarla como un criterio en las fases de modelización de la competencia modelización.

Por otra parte, se observa una ausencia de una discusión en torno a niveles de complejidad en la actividad matemática, por ejemplo sobre complejidad en los modelos, o sobre las diferencias en cuanto a la complejidad que se pueden dar en el cambio de *modelo de* a *modelo para.* En la aproximación de la matematización si bien hay una ausencia en el planteamiento didáctico en los modelos, hay un desarrollo de la complejidad en la modelización.

2.5.4 Competencia de modelización

Uno de los cuatro objetivos de la investigación es caracterizar la competencia de modelización en el tópico de interpretación de gráficas. Estos es, caracterizar cada uno de los componentes que tiene una competencia matemática: tareas matemáticas, procesos matemáticos, y niveles de complejidad desde la perspectiva de la modelización.

Hay dos principales diferencias en como caracterizar tareas y procesos. En primer lugar, las tareas matemáticas en interpretación de gráficas se caracterizan a partir de los contenidos y son las mismas para cualquier competencia. En cambio los procesos, que son el componente principal de una competencia matemática, varían de una competencia a otra, los procesos que conforman la competencia modelización son distintos a los procesos que conforman la competencia de argumentación. En segundo lugar, la caracterización de tareas proviene de la literatura sobre gráficas, en el apartado 2.3.5 se han establecidos los criterios para su caracterización. En cambio la literatura no trata de la misma manera el desarrollo de procesos, y en el caso concreto del interés de caracterizar los procesos de modelización en interpretación de gráficas, deberán emerger del estudio empírico.

Hasta el momento se tiene como hipótesis que la complejidad se determina a partir de las tareas y procesos. Sin embargo de los antecedentes expuestos sobre la modelización se aprecia que las fases de modelización también son un indicador de complejidad. Se ha descrito que de Lange (1995) caracteriza el nivel de reflexión en términos de la matematización vertical. Por tanto se pueden apreciar una relación similar entre los niveles de complejidad y las fases de modelización. Otro trabajos que relacionan estos dos aspectos, se aprecian en la perspectiva de la competencia de modelización como complejidad (Henning y Keune, 2007; Greer y Verschaffel, 2007), en que hay una relación entre los tres niveles y las fases de modelización.

En consecuencia para esta competencia, se agrega un cuarto componente, las fases de modelización. Si bien las fases han sido ampliamente estudiados en la literatura, no se ha encontrando referencias que las caractericen en el noción de función, y menos en el tópico de interpretación de gráficas. Por tanto, al igual que lo estipulado con los procesos matemáticos, se caracterizarán las fases de modelización en el estudio empírico.

Finalmente, destacar que estas cuatro características de la competencia de modelización, hace que tenga una función didáctica. Se ha mostrado que el propósito de la competencia modelización va más allá de potenciar la modelización y construcción de modelos en los estudiantes. También incorpora el progreso en las actividades, el rol del profesor y la idea de modelización emergente.

2.6 Argumentación

En este apartado se describen los antecedentes teóricos sobre el tópico "argumentación" que serán la base de nuestra investigación acerca de la competencia de argumentación.

El primer apartado introduce las visiones predominantes sobre argumentación, y de qué manera se han interpretado el papel que tiene en la argumentación de las matemáticas. En el apartado 2.6.2 se presenta la perspectiva de "argumentación colectiva" que predomina en las investigaciones sobre argumentación en las matemáticas. En el apartado 2.6.3 se introduce el modelo de Toulmin (1958) y en el apartado 2.6.4 se presenta la reducción de Krummehuer del modelo de Toulmin para el ámbito de las matemáticas. Finalmente en el apartado 2.6.5 se discuten estos aspectos según nuestro modelo de competencia

2.6.1 Argumentación matemática

El estudio de *la argumentación* se ha desarrollado desde varias perspectivas, principalmente desde la lingüística con una aproximación cognitiva. Plantin (1990) ha caracterizado las diferentes visiones a través de tres autores, los cuales son significativos por sus contrastantes posiciones respecto a la argumentación y contundente investigación sobre el tema: Perelman, Toulmin y Ducrot.

Perelman considera que el objetivo de la argumentación es conseguir la adhesión del público, por lo cual, no es propósito atribuir validez a un enunciado. En esta concepción sobre la argumentación, un enunciado tiene un valor de razón, hasta de verdad, tan pronto como un individuo lo acepta.

En oposición a Pereman, Toulmin atribuye validez a un enunciado por medio de la estructura racional que tenga el discurso, es decir, por la estructura del enunciado.

Ducrot en cambio, parte de la base que la argumentación se centra en la actividad de "hablar". La estructura de la sucesión de argumentos juega un rol determinante: la fuerza de un argumento no vendrá ni de sus características "naturales" ni de sus características racionales, sino de su lugar en el enunciado.

En particular en la enseñanza de las matemáticas, para Balacaheff (1999) adoptar una u otra concepción de la argumentación, implica tener un posicionamiento en lo que atañe a las prácticas matemáticas, y en particular si se tiene como objeto la enseñanza de la argumentación, y su relación con la demostración. Para Balacheff, la propuesta de Toulmin implica una continuidad entra la argumentación y la demostración, la cual puede ser considerada como parte de la argumentación. La propuesta de Perelman o Ducrot en cambio no muestra una continuidad sino más bien una oposición entre la argumentación y la demostración.

Krummeheuer (1995), sobre la base que la argumentación es un fenómeno colectivo que contempla a varios participantes, destaca la *argumentación colectiva*. Yackel (2002) recalca que la argumentación colectiva es un logro interaccional y, como tal, no puede ser analizada considerando de manera aislada una sola secuencia de las declaraciones que aparecen en el discurso, sino que son las interacciones de los individuos que participan las que dan sentido a la argumentación. Las evidencias, explicaciones y los fundamentos son negociados por los participantes, actuando de forma recíproca. Por consiguiente, la argumentación colectiva es particularmente útil para analizar la naturaleza de la actividad matemática en el aula.

Dadas estas características es necesario una estructura argumentativa que considere las cadenas de argumentos que se desarrollan en el aula, y a su vez que identifique los diferentes momentos de la argumentación. Se ha adaptado el modelo de Toulmin (1958) porque su estructura es la que mejor responde a la argumentación colectiva en el aula de matemáticas.

2.6.2 Modelo de Toulmin

El filósofo y epistemólogo Toulmin elabora una estructura formal de la argumentación. Sigue un proceso lineal desde los datos hasta las conclusiones en que intervienen elementos constitutivos de la argumentación; la figura 2.6.1 muestra la relación entre sus componentes:

- Datos: hechos, evidencias que se invocan para justificar y validar; son de orden empírico o factual, y permiten la emergencia de una conclusión.
- Conclusión: son las demandas o alegatos que se buscan; la conclusión del argumento.
- Justificaciones: son el principio general, la premisa mayor, la norma tácita, o bien, los enunciados generales, de naturaleza formal, que permiten el paso de los datos a las conclusiones.
- Fundamentos: corresponden al cuerpo de contenidos desde donde emanan las garantías, que pueden ser investigaciones, textos, códigos o supuestos sociales que nos permiten afirmar una garantía.
- Calificadores modales: son construcciones lingüísticas que permiten atenuar una demanda.
- Refutadores: excepciones a la reclamación; descripción y refutación de contraejemplos y contraargumentos.

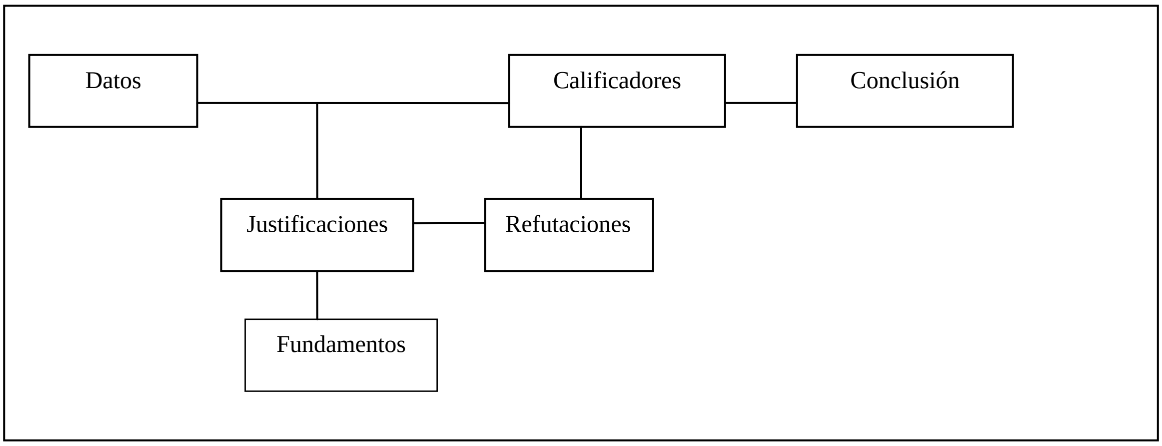


Figura 2.6.1: Modelo de Toulmin (1958)

Modelo de argumentación de Krummheuer

Krummheuer (1995) propone un modelo de argumentación en matemáticas basado en Toulmin. Sin embargo, reduce el sistema original a los datos, justificación, fundamentos y conclusión; y omite el uso de la refutación y los calificadores modales, posiblemente porque son irrelevantes para los argumentos matemáticos que Krummheuer analizó. Según Inglis (2007) no está claro cómo la omisión de refutadores y calificadores modales puede justificarse en un marco conceptual destinado a la reconstrucción de la argumentación. La figura 2.6.2 ilustra la relación entre los componentes del modelo usado por Krummheuer.

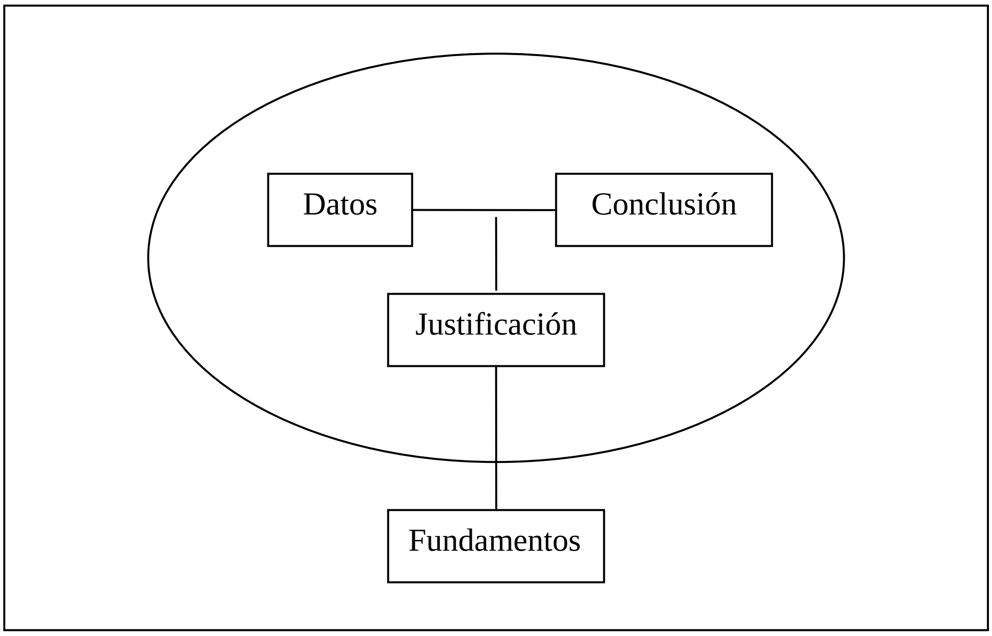


Figura 2.6.2: modelo de Krummheuer de argumentación

Según la figura 2.6.2, la *conclusión* es una declaración sostenida que representa una afirmación. En cualquier argumento, una afirmación tiene que estar basada en algo: hechos, evidencias, información, u otras declaraciones. La base dada para la afirmación son los *datos*. Los datos pueden ser sostenidos sobre varias razones y su validez puede ser cuestionada. Un nuevo y diferente desafío resulta cuando se cuestiona la importancia explicativa de los datos, en este caso una *justificación* es necesaria. Una justificación esclarece la legitimidad de los datos, es decir por qué los datos son considerados como apoyo a la conclusión. El *fundamento* proporciona más apoyo a la justificación, es decir el apoyo indica por qué la afirmación debería ser aceptada. El fundamento se refiere a teorías generales, creencias, y estrategias primarias, siendo satisfactorias en la medida que estas son "tomadas como compartidas", es decir que se comparten los significados entre los participantes en el debate (Krummheuer, 1995; Yackel, 2002).

La mayoría de las investigaciones posteriores sobre argumentación parecen haber seguido la reducción de Krummheuer en el uso del modelo de Toulmin (Inglish, 2007). Diversos autores (Stephan y Rasmussen, 2002; Whitneack y Knipping, 2002; Yackel, 2002; Rasmussen et al., 2004; Pedemonte, 2005) han usado esta estructura argumentativa en diversos tópicos matemáticos tanto en primaria como en secundaria, mostrando que es útil transversalmente al nivel escolar y al contenido. De hecho, esta posición parece haber llegado a ser tan arraigada que, en su reciente revisión de la prueba, Mariotti (2006) se refiere al sistema de Toulmin como un "modelo ternario".

Particularmente Yackel (2002) pone en evidencia que la propuesta de Krummheuer también es satisfactoria como una herramienta para analizar al profesor. En efecto, utiliza la misma estrategia de análisis para caracterizar el rol del profesor en la argumentación colectiva. Actualmente Krummhuer (2007) ha conectado la argumentación con la participación en el aula de matemáticas.

Autores de otras disciplinas que han investigado la argumentación en la actividad matemática, han adoptado el modelo de Toulmin conservando todos sus elementos (Aberdein, 2005; Alcolea Benegas, 2008**).** En estos casos, sin embargo, se calificaron las argumentaciones con características poco significativas (Inglish, 2007).

Inglish et al., (2007) muestran la importancia de utilizar el sistema de Toulmin en su forma completa. En su estudio caracterizan la argumentación de talentos matemáticos destacando la integración de los calificadores modales y la refutación.

2.6.3 Competencia de argumentación

Tal como desarrollamos en la competencia de modelización, la competencia de argumentación se compone de tareas y procesos. Las tareas matemáticas son las mismas que en la competencia de modelización y provienen de la caracterización expuesta en el apartado 2.3.5. En cambio los procesos que conforman esta competencia emergerán del estudio empírico.

A diferencia de la competencia de modelización, para caracterizar los procesos de argumentación en interpretación de gráficas, los componentes de la secuencia argumentativa de Toulmin (1958) se pueden interpretar como procesos matemáticos. En efecto, pensamos que el tipo de análisis de Krummheuer (1995), seguido por varios autores (Stephan y Rasmussen, 2002; Whitneack y Knipping; Yackel, 2002; Rasmussen, Stephan y Allen 2004; Pedemonte, 2005) se podría enfocar a un análisis de los procesos que aparecen en la argumentación, y de hecho es uno de los propósitos del estudio empírico. Pero a diferencia de los autores citados y de acuerdo con Inglish (2007) se considera como base la secuencia argumentativa de Toulmin completa, y no la reducción de Krummheuer (1995), para así poder discutir en nuestra propia investigación qué papel juegan los calificadores modales y la refutación como procesos en la argumentación matemática.

Por otra parte, destacamos que los procesos de argumentación que se identifiquen no esperamos que se correlacionen directamente con la estructura de Toulmin. Uno de los principios de la investigación es que los procesos que emerjan de una competencia están ligados a un contenido. Y si bien se considera como base a Toulmin para que emerjan los procesos, la caracterización final puede resultar diferente a dicha estructura. En particular en el tópico de interpretación de gráficas, en el estudio empírico se indaga qué procesos ligados a la argumentación emergen en tareas tales como interpretar o construir una gráfica, o determinar la dependencia de variables; dichos procesos ligados a la acción de interpretar, pueden ser muy distintos a lo que emergerían en otros tópicos matemáticos.

3. Metodología

En el capítulo 2 se ha desarrollado el marco teórico, que sustenta el modelo de competencia matemática que se ha propuesto. En este capítulo se describe la organización del estudio empírico –un estudio de caso- que pone a prueba el modelo de competencia: el escenario en donde se realiza el estudio, los instrumentos de recogida de datos y las estrategias de análisis.

En el apartado 3.1 se justifica la perspectiva metodológica que consideramos para el estudio. En el apartado 3.2 se describe el diseño de la investigación. En el siguiente apartado 3.3 se detallan los instrumentos de recogida de datos, y finalmente, en el apartado 3.4 se describen las estrategias para analizar los datos.

3.1 Perspectiva metodológica

En la investigación educativa se ha consolidado el predomino del enfoque cualitativo –interpretativo frente al enfoque cuantitativo –positivista, en esta década han aparecido cada vez más manuales dedicados exclusivamente a la investigación cualitativa (Bodgan y Knopp, 2003; Lichtman, 2006).

Hay diferentes tradiciones en la metodología cualitativa, que difieren según los fines de la investigación y los instrumentos utilizados desde cada perspectiva. En nuestra investigación se utiliza como método el estudio de caso, que consiste en analizar un caso en detalle a través del tiempo, empleando múltiples fuentes de datos que se encuentran en el entorno. El estudio de caso es un investigación descriptiva, exhaustiva y en profundidad de un caso, tratando de descubrir e identificar los problemas y las causas que pueden subyacer en el origen de los mismos (Tójar, 2006).

Hay cierta discrepancia en considerar el estudio de caso como un método de investigación, o como una estrategia de diseño de investigación (Yin, 1993). Algunos autores sostienen que se caracteriza por la elección del objeto de estudio, el caso en sí mismo (Merriam, 1998; Stake, 1994). No obstante, hay un consenso en reconocer una forma característica de realizar la investigación: un diseño de investigación, un trabajo de campo en el que se emplean técnicas concretas, un análisis y una narración del caso que permite un estudio en profundidad (Tójar, 2006).

Nuestra investigación se enmarca en una corriente interpretativa orientada a describir, interpretar y comprender las relaciones y el significado de los fenómenos sociales, intentando darles sentido desde el significado que las propias personas les atribuyen a dichos fenómenos (Merriam, 1998).

El caso lo conforma un aula de matemáticas: es decir, la terna estudiantes, profesor y actividad matemática considerada como un todo; el propósito de la investigación es poner a prueba el modelo de competencia por medio de la aplicación de una unidad didáctica, centrada en un tópico concreto.

Según Merriam (1998), todo estudio de caso tiene las siguientes características: es *particular* ya que se enfoca en situaciones concretas, siendo importante por lo que revela sobre el fenómeno y lo que puede representar; es *descriptivo*, ya que el producto final es contundente, denso en la descripción del fenómeno estudiado; y es *heurístico*, pues el caso de estudio ilumina la comprensión que el lector tiene del fenómeno estudiado (pp. 29-30).

Siguiendo la clasificación que presenta Latorre et al. (1996), nuestro caso se enmarca en uno de tipo *interpretativo* ya que pretendemos usar la información obtenida para teorizar acerca del caso y encontrar elementos que caractericen los procesos en el aula y poner a prueba el modelo teórico.

Desde la orientación disciplinar, el caso se enmarca como *educativo* porque el foco se centra básicamente en temas que, tienen que ver con la enseñanza y el aprendizaje (Merriam, 1998).

Finalmente, utilizamos la tipología de Coller (2000) a través de seis parámetros:

- Objeto de estudio: el caso es un proceso social porque se estudia el desarrollo de una clase de matemáticas.
- Alcance: el caso es *genérico* e *instrumental* porque a través del caso se pretende poner a prueba el modelo de competencia matemática.
- Naturaleza: es un caso *ejemplar* por ilustrar un aula de matemáticas, aunque los resultados otenidos no son generalizables.
- Época de desarrollo: es un *caso contemporáneo.*
- Uso: es un caso *analítico* porque se estudian las relaciones entre diferentes componentes (tareas, competencias, procesos, complejidad); y con una *directriz inicial*: los componentes están relacionados de manera que, tareas y procesos determinan la complejidad de una competencia.
- Número de casos: caso único y observación no participante.

Por otro lado, previo al estudio de caso se analiza la unidad didáctica que se aplica en el caso. El análisis de la unidad didáctica que se implanta en el estudio de caso, es de carácter descriptivo ya que su propósito es caracterizar la unidad didáctica en función de las competencias.

3.2 Diseño de la investigación

Como muestra la figura 3.1 existen dos tipos de datos: la unidad didáctica y la observación del aula de matemáticas donde se aplica la unidad. Cada uno de los tipos de datos tiene su propia estrategia de análisis. Para la unidad didáctica se ha elaborado el instrumento *matriz de competencia* que caracteriza las competencias, tareas y nivel de complejidad *a priori*. Mientras que para sistematizar los datos recogidos en aula se han elaborado instrumentos que pretenden caracterizar los procesos matemáticos en el aula, para describir tanto de qué manera se desarrollan estos procesos como para explicar las interacciones entre profesor y estudiante. Este análisis se basa en una reducción de datos en dos etapas que tiene como propósito validar la caracterización de procesos. En la primera etapa se caracterizan los procesos de cada competencia, en la segunda etapa se consolidan y aplican para caracterizar las competencias de modelización y argumentación. La figura 3.1 ilustra el proceso de recogida de datos.

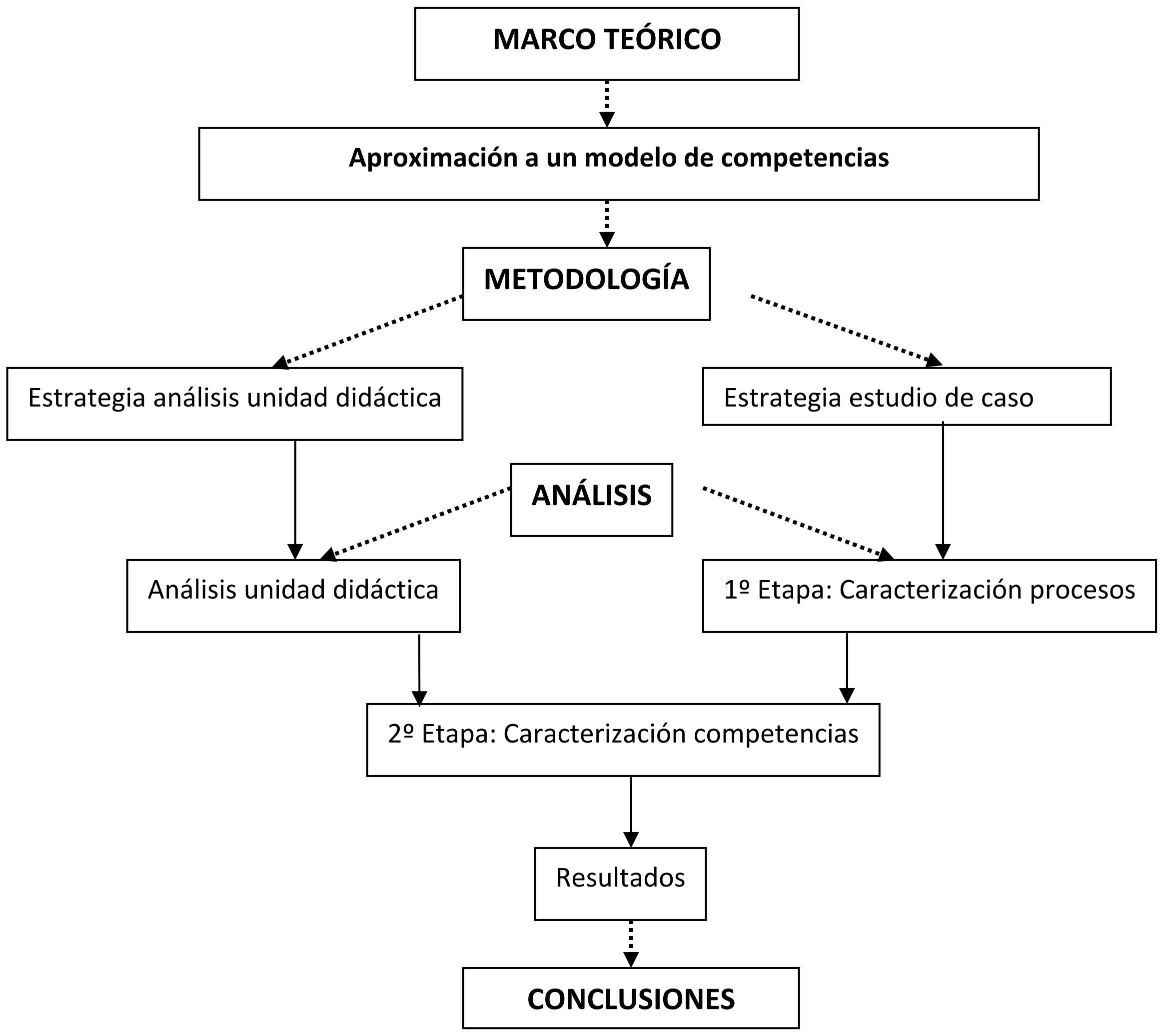


Figura 3.1: Secuencia de la investigación.

La experiencia de la cual se obtuvieron los datos de esta investigación, se realizó en Santiago de Chile, en un marco en que el investigador participó en la formación permanente de profesores realizada por el grupo Felix Klein[1], dentro del marco de proyecto LEM (Lectura, escritura y matemáticas). Se trabajó con un conjunto de cuatro profesoras, quienes aplicaron la unidad didáctica "analizando y construyendo gráficos" diseñada por el equipo LEM para un curso de 8º básico (2º de E.S.O). La unidad didáctica se adjunta en el Anexo 1.

3.3 Instrumentos de recogida de datos

Una primera etapa fue analizar la unidad didáctica por medio de un instrumento denominado *matriz de competencias* (cuadro 3.4.4), cuyo propósito es analizar de qué manera las actividades cubren un conjunto de tareas, que, para el tópico de interpretación de gráficas se habían caracterizado en una investigación anterior (Solar, 2006); además este instrumento caracteriza el nivel de complejidad de las actividades según las competencias de modelización y argumentación. Este análisis implicó la modificación de algunas actividades de la unidad didáctica. El detalle del análisis se encuentra en el apartado 3.4.1 desarrollado previamente a la observación de clases.

La segunda etapa se desarrolló durante la recogida de datos en el contexto de la formación permanente del grupo Felix Klein. Se eligieron cuatro profesoras que pudieran aplicar la unidad didáctica en el período de recogida de datos, entre agosto y diciembre del 2007.

Se programaron tres observaciones para cada profesora mientras aplicaran la unidad didáctica, aproximadamente un tercio del tiempo contemplado para desarrollar la unidad, distribuidas de un modo que permitieran cubrir su desarrollo: la primera observación al inicio, otra en el intermedio, y la última al final de su aplicación. Otro criterio fue que de las 12 observaciones contempladas en total, se recubriera la observación de toda la unidad didáctica, con especial énfasis en la observación de las actividades que se agregaron a la unidad didáctica por parte del investigador.

Dada la magnitud de información que se esperaba recoger, la observación se centró en dos aspectos: (1) analizar la aplicación de la unidad didáctica, (2) en las interacciones entre estudiantes y profesoras. Estos objetivos se materializaron en recoger grabaciones enfocadas en las interacciones entre estudiantes y profesoras: trabajo en pequeño grupo en que participaron las profesoras y puesta en común del desarrollo de las actividades. Estas grabaciones también permitían analizar la aplicación de la unidad didáctica.

Un tercer espacio para recoger datos fue un seminario de período quincenal con las cuatro profesoras, con los objetivos de estudiar la unidad didáctica a través de la idea de los procesos matemáticos, y discutir qué acciones del profesor son las que se relacionan (potencian, disminuyen) con el desarrollo de los procesos en los estudiantes. Se evitó usar el término competencias con las profesoras para evitar valoraciones sobre el significado del término y se cambió a procesos para así centrarnos en exclusivamente en este significado. La estrategia que se utilizó fue mostrar en cada sesión grabaciones en video de episodios seleccionados sobre la

[1] El grupo Félix Klein, Centro de Investigación y Experimentación en Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias está adscrito a la Universidad de Santiago de Chile (USACH).

aplicación de la unidad didáctica de alguna de estas profesoras, con el propósito de que surgieran discusiones sobre sus prácticas.

En el período de observación de clases, se tomó la decisión de centrarse en la profesora Valentina en vez de comparar distintos posibles casos entre las cuatro profesoras. La decisión se justifica porque los datos recogidos en las observaciones de clases de Valentina permitían profundizar en los propósitos de la investigación en un solo caso, mientras que si se hubieran comparado varios casos no se hubiera podido ahondar de la misma manera en los datos recogidos. Por esta razón se extendió la cantidad de clases observadas a Valentina de tres a cinco para tener un proceso más completo en el desarrollo de la unidad didáctica. En consecuencia la recogida de datos nos condujo a un *estudio de caso*.

La dinámica de clase de Valentina es una combinación entre una gestión tanto expositiva como de pregunta y respuesta a los estudiantes. Había espacios para el trabajo por pares, y prácticamente no existió el trabajo individual. Por tanto los datos respondieron al propósito del estudio de centrarse en la interacción entre Valentina y los estudiantes; asimismo el análisis de la aplicación de la unidad didáctica se supeditó a las observaciones de interacción entre Valentina y los estudiantes.

3.4 Estrategia para el análisis de datos

En este apartado se exponen las estrategias propuestas para analizar la unidad didáctica y el estudio de caso con la profesora Valentina. En el apartado 3.4.1 se describe el instrumento utilizado para analizar la unidad didáctica. De este análisis se decidió modificar actividades cuyas tareas matemáticas ya estuvieran contempladas en otras actividades, de modo que se agregaran tareas matemáticas y a su vez que respondieran de mejor manera a desarrollar competencias en los estudiantes. Este análisis se desarrolló previamente al estudio de caso.

Por el carácter del instrumento se ha decidido exponer en este apartado tanto los criterios como este primer análisis de la unidad didáctica. Dicho análisis dará pie al análisis final de la unidad didáctica que se desarrolla en el siguiente capítulo de análisis.

Este primer análisis tiene como propósito modificar las actividades en que se repitieran tareas por otras nuevas, más significativas para el desarrollo de las competencias de argumentación y modelización, así como para aumentar el nivel de complejidad de las actividades.

En el análisis de la unidad didáctica, la noción de procesos no se considera como componente de una competencia, y se utilizará la caracterización de competencias que sigue los niveles de competencia empíricos expuestos en el informe PISA (OCDE, 2003), y queda reflejada en un instrumento previo (Mesa, Solar y Azcárate, 2007), construido a partir de una triangulación de las competencias de Niss (2002), los niveles de complejidad de PISA (OCDE, 2003) y la interpretación de Lupiáñez (Rico, 2007). Bajo esta concepción una competencia se describe en términos de descriptores que determinan un nivel en la competencia.

En el modelo de competencia, el nivel de complejidad se determina por los procesos y tareas. Si bien las tareas matemáticas en gráficas funcionales se han podido caracterizar desde la literatura -apartado 2.3.5-, en el caso de los procesos matemáticos que conforman una competencia de modelización y argumentación, no se tienen suficientes antecedentes teóricos que permitan caracterizar estos procesos. Por tanto, uno de los propósitos del estudio empírico es caracterizar los procesos matemáticos que emergen en la interacción entre Valentina y los estudiantes.

En el apartado 3.4.2 se describen las estrategias para analizar los datos del estudio de caso. Este análisis es de un enfoque distinto al anterior pues tiene por finalidad indagar los procesos matemáticos que se desarrollan en el aula de matemáticas.

3.4.1 Estrategia para el análisis de la unidad didáctica

Introducción:

Para un análisis de las tareas matemáticas adscritas a la unidad didáctica “Analizando y construyendo gráficos”, el instrumento elaborado para tal efecto, considera las descripciones de Leinhardt et al. (1990) respecto a la caracterización de las tareas en cuatro aspectos: acción, situación, variable y enfoque, resumidas en el apartado 2.3.4. Del mismo modo se tiene como referencia el instrumento elaborado en un trabajo de investigación anterior, “Análisis de diseño”, elaborado en Solar (2006) cuya función es organizar indicadores que permiten caracterizar los lenguajes funcionales.

La elaboración del instrumento contempla la organización de las tareas matemáticas en relación a cada una de las competencias. En este sentido, la idea es que las características de las tareas matemáticas en el estudio de las gráficas permitan describir los niveles de complejidad en la relación entre una tarea y la competencia. En la medida que el nivel de dificultad aumenta en la tarea, influye en el nivel de la competencia respectiva.

Para la clasificación de tareas de la unidad didáctica, se ha seguido de la caracterización de tareas de interpretación de gráficas expuesta en el marco teórico -apartado 2.3.5-, con algunas modificaciones:

- El *enfoque* no es un elemento clasificatorio independiente tal como está descrito en el marco teórico, si no que se ha insertado en la acción de *interpretar,* particularmente en los descriptores *local* y *global*; en otras palabras, se hace referencia al enfoque en términos de “acción de focalizar local o globalmente en una gráfica”.

- Se han agregado dos descriptores para una tarea: la primera *Lenguaje* y la segunda *Estrategia*, que se caracterizan en el siguiente subapartado.

Características de una tarea

Acciones:

Lectura: Identificar puntos de una gráfica.

Interpretación: atribuir significado a una gráfica.

El cuadro 3.4.1 describe las características de la interpretación que interesan para analizar la unidad didáctica. En la primera columna se describe cada acción, en la segunda columna se da una definición adaptada del marco teórico y en la tercera columna se ejemplifica cada acción.

Cuadro 3.4.1: Características de la interpretación

Acción	Definición	Tarea que se observa en la Unidad didáctica.
Local	Acción de focalizar a una, o ciertas partes de la gráfica.	En la ubicación de un punto en el sistema cartesiano.
Global	Acción de focalizar a los aspectos generales de una gráfica.	En el estudio de la inclinación de la pendiente de una gráfica.
Cuantitativa	Son aquellas en que la interpretación es numérica y sin observarse necesariamente una relación entre las variables.	Se da generalmente en la interpretación de gráficas graduadas o en la elaboración de una gráfica a partir de una tabla.
Cualitativa	Se focaliza en la gráfica entera -o parte de ella- se asigna un significado a las relaciones entre las variables, y en particular, a la dependencia entre ellas.	Se da en la elaboración de una gráfica a partir de una expresión verbal o representación pictórica.
Clasificación	Es una acción que implica decidir si una relación es una función, y de qué tipo.	Por ejemplo la tarea de determinar si hay dependencia entre variables.
Traducción de tareas	Se refiere al acto de reconocer una función en diferentes representaciones.	Situación expresada en forma verbal o pictórica, gráfica, tabla, numérica.
Escalas	Las tareas de escalas se centran esencialmente en la escoger graduación de los ejes, la variación de los parámetros, y escoger un origen.	Construcción del sistema cartesiano.

Variables:

El estudio de las *variables* se hace a lo largo de la unidad didáctica. En el cuadro 3.4.2 se han clasificado las tareas respecto a las variables en tres categorías.

Cuadro 3.4.2: Clasificación de tareas según etapas de la unidad didáctica

Etapa	*TAREAS*
1º	Identificar las condiciones que tiene que cumplir un sistema de referencia.
	Optar y utilizar un sistema de referencia.
2º	Identificar variables en situaciones expresadas en forma verbal o pictórica.
	Identificar el valor de una variable (lectura).

	Estudiar la dependencia de variables.
3º	Describir relaciones de cambio, haciendo referencia a la variación de la pendiente.
	Predecir el valor de una variable que está en la curva.

Las variables por lo general toman valores numéricos, y se alternan entre ser discretas y continuas.

La situación:

Adoptaremos dos términos para referirnos a la *situación*: el escenario y el contexto.

Por “escenario” se hace referencia a las condiciones de enseñanza en que se realiza la actividad (en el aula, en grupo, fuera del aula, experimentación, etc.).

En la unidad didáctica prácticamente todas las actividades han sido diseñadas para ejecutarse en clase, desarrollando una ficha (que puede pegarse en el cuaderno). Solamente una actividad (El material 1) concierne a un escenario diferente pues consiste en un experimento; no obstante tal cambio no es significativo ya que no se diferencia significativamente con el resto de actividades, por tal razón el escenario no es una variable que se considere en el instrumento, sino que es una referencia para al análisis de los datos.

En el marco teórico se hace referencia al *contexto* como al referente real de la actividad. Se adopta el término *contexto* para referirse a la situación de la actividad matemática en cuestión. En el instrumento de análisis se opera a través del grado de familiaridad de la actividad para el estudiante. Si éste puede atribuir significado a la actividad y comprender la tarea matemática sin la necesidad de nuevos datos, la situación se identifica como *familiar.* En cambio si la actividad es poco conocida, la tarea matemática ambigua, y le es difícil asociarla con referentes conocidos, en este caso se identifica como *no familiar.*

En segundo lugar, nos referimos al grado de estrategias rutinarias para desarrollar la tarea. *Situación rutinaria* se refiere a tareas que el estudiante identifica claramente los pasos a seguir. En cambio, *situación no rutinaria* se refiere a una tarea que no es de resolución directa, y que, por ejemplo, requiere de estrategias heurísticas.

Estrategia: Para una tarea matemática existen procedimientos para su realización, estos pueden ser identificados como estándares, tradicionales o en nuestras palabras *rutinarios*, es decir un conjunto de instrucciones a seguir que un sujeto reconoce claramente, Este conjunto de pasos por lo general son aprendidos para todos los sujetos por igual. A partir de esta caracterización podemos decir que una tarea sencilla es cuando un sujeto reconoce que puede aplicarse una estrategia rutinaria. Por el contrario si no se reconoce una técnica para una tarea, el sujeto tiene que valerse de estrategias que serán espontáneas y personales, éstas se identifican como *estrategias no rutinarias.*

Caracterizar qué procedimientos se corresponden con estrategias rutinarias y no rutinarias es complejo; No obstante, podemos plantear algunas para el caso de la interpretación de gráficas. El cuadro 3.4.3 muestra algunos ejemplos para mostrar la distinción entre estrategias rutinarias y no rutinarias.

Cuadro 3.4.3: Cuadro comparativo entre estrategias rutinarias y no rutinarias

Estrategias rutinarias	*Estrategias no rutinarias*
Identificar un punto en una representación (gráfica, tabla, pictórica)	Construir un sistema de referencia
Elaborar una gráfica a partir de una tabla, (situar los puntos con una escala determinada y unir los puntos)	Interpretar una gráfica cualitativamente
Interpretar cuantitativamente una gráfica o tabla	Elaborar una gráfica a partir de una expresión verbal o representación pictórica
Interpolar	Extrapolar
	Interpretar la información de una gráfica que proviene de un diario o revista, formular una descripción a partir de los datos.

Lenguaje: Se hace referencia a dos elementos:

De qué manera se expresan los estudiantes:

- Lenguaje natural: uso de expresiones coloquiales y cotidianas que no se diferencia de la manera de expresarse de otros contextos.
- Lenguaje formal: uso de expresiones con significado matemático.

Cuáles son los objetos, hechos, o acciones que se sostiene la argumentación:

- Autoridad (libro de texto, profesor).
- Material manipulables (objetos, experimentación).
- Datos: representación gráfica, numérica, pictórica.
- Abstracción: propiedades matemáticas, regularidades, deducción.

Matriz de competencias La construcción de la matriz se ha basado en la que se denomina "*pirámide de Lange"* (de Lange, 1995), inicialmente se elaboró para estructurar la construcción de preguntas en pruebas de evaluación en matemáticas. La pirámide cruza tres parámetros a considerar:

(1) los bloques curriculares de las matemáticas (estadística, álgebra, número, geometría);

(2) los tres niveles de competencia (reproducción, conexión, reflexión);

(3) el grado de dificultad que le representa a un estudiantes (fácil- difícil).

El cuadro 3.4.4 considera dos de estos parámetros: *las tareas matemáticas* representan el contenido curricular, y los *niveles de complejidad (*de 1 al 5) corresponden a una concreción más detallada de los tres niveles de competencia. El grado de dificultad de la tarea (fácil-difícil) no se ha considerado en la matriz de competencia y se deja abierta la posibilidad de que una actividad matemática de cierto nivel pueda tener más o menos dificultad en su resolución.

El cuadro 3.4.4 *matriz de competencias* organiza las características de las tareas antes descritas, según niveles de complejidad para cada competencia. Los criterios para situar las tareas matemáticas, en un nivel entre 1 y 5, se determinan por los descriptores expuestos en la segunda columna, que muestran los cambios en las características de la tarea (acciones, escalas, variables, situación, estrategia y lenguaje). En la cuarta y quinta columna se caracterizan las competencias modelización y argumentación. Los criterios para esta caracterización de las competencias según la complejidad se apoyan en el instrumento de Lupiáñez (Rico, 2007) y en Mesa et al. (2007) que clasifican actividades en un nivel de complejidad de 1 a 6 para las ocho competencias de Niss. Dos de estas competencias hacen referencia a la modelización y a la argumentación.

Este instrumento permite caracterizar la unidad didáctica en términos de tareas y competencia, y determinar el nivel de complejidad en cada actividad. La elaboración del cuadro 3.4.4 se ha completado con el tipo de tareas que se pueden encontrar en la unidad didáctica (tercera columna). En el capítulo 4 se aplica este instrumento a la unidad didáctica.

Cuadro 3.4.4: Matriz de competencias

Nivel	***Descriptor***	***Tareas matemáticas***	***Modelización***	***Argumentación***
1	*Acción:* - Lectura, interpretación cuantitativa - Escalas: ubicación de puntos *Variables:* identificar variables en diferentes contextos *Situación:* familiar *Estrategia*: Rutinaria *Lenguaje:*, expresarse en lenguaje natural. Sostenerse en material concreto, (datos) una gráfica o tabla	- Describir la posición de puntos en el plano - Ubicar puntos en un sistema de coordenadas cartesiano - Establecer un sistema de coordenadas cartesiano como referencia - Reconocer y aislar variables en un lenguaje verbal o gráfico - Realizar una conexión sencilla entre el texto y una característica específica del gráfica - Localizar e interpretar un valor específico a partir de un gráfica - Localizar e interpretar un valor específico en una tabla sencilla - Identificar un contexto en que pueden aparecen gráficas y tablas	Comprender situaciones problemáticas que puede ser abordables a través de: - un sistema de referencia - utilizando una gráfica o tabla	- Instrucciones simples y claras - Interpretación sencilla y limitada
	Acción:	- Describir un objeto en el	- Enunciar	- Describir un

2	- Interpretación cuantitativa, cualitativa local y global - Escalas: Elegir un sistema de referencia para describir un punto *Variable:* - Identificar variables en diversas representaciones (tabla, gráfica, expresión verbal, representaciones pictóricas) -Estudiar la dependencia de variables - Predecir el valor de una variable entre valores conocidos (interpolar) *Situación:* Familiar - *Estrategia:* Rutinaria o no rutinaria Lenguaje: expresarse en lenguaje natural con referencia a elementos del modelo. Sostenerse en gráficas sencillos, tablas numéricas o representaciones pictóricas	plano utilizando al menos un sistema de referencia - Interpretar un texto sencillo y relacionarlo correctamente con elementos gráficos - Interpretar un modelo sencillo - Interpretar y utilizar el razonamiento en un contexto práctico que incluya la aplicación sencilla y conocida de las relaciones de movimiento, velocidad y tiempo - Localizar la información pertinente en una gráfica e interpretar directamente sus valores - Identificar si existe o no relación de dependencia entre dos variables - Leer una gráfica en contextos conocidos	(adoptar) un modelo asociado a una situación - Explorar las propiedades de un sistema de referencia - Seleccionar variables de una situación - Explorar las relaciones relevantes entre variables en una situación (relaciones de dependencia) -Interpretar cuantitativamente o cualitativamente el modelo (gráfica o tabla)	objeto en el plano - En tablas o gráficas graduadas interpretar cuantitativamente y localmente para determinar el significado de un punto específico - En gráficas sencillas, interpretar cualitativamente para determinar una relación de dependencia entre variables (interpretación cualitativa global)
3	*Acción*: - Interpretación cualitativa y global - Escalas: Construir sistema cartesiano - Traducción: de una tabla a gráfica *Variable:* -Estudiar la dependencia de variables. - Describir las relaciones de cambio con referencia a la variación de la pendiente - Predecir el valor de una	- Construir un sistema de referencias - Comprender que el sistema cartesiano es uno los modelos más eficaces para identificar puntos en el plano - Enlazar y conectar múltiples representaciones relacionadas (por ejemplo, dos gráficas relacionadas, un texto y una tabla, una fórmula y una gráfica) - Predecir el valor de una variable que está en la curva	- Ser capaz de hacer formulaciones matemáticas de la situación problemática dentro del modelo - Construir un sistema de referencia - Construir y/o Interpretar una gráfica o tabla. - Explorar el modelo	- Evidenciar propiedades de un sistema de referencia - Evidenciar si el sistema cartesiano es un modelo eficiente para identificar puntos en el plano - Interpretar cualitativamente para determinar características generales del

	variable entre valores conocidos (interpolar) - Predecir el valor de una variable a partir de valores conocidos (extrapolar) *Situación:* Familiar *Estrategia:* no rutinaria *Lenguaje*: expresarse en lenguaje natural con referencia a elementos del modelo. Sostenerse en gráficas sencillas o ambiguas, tablas numéricas o representaciones pictóricas	- Discutir si tiene sentido unir los puntos de una gráfica - Construir una gráfica mediante una tabla. - Identificar adecuadamente las unidades en cada uno de los ejes de coordenadas para graficar una función de un fenómeno estudiado. (construcción)	- Propiedades - Campo de problemas a abordar tales como estudiar la dependencia de variables; predecir el valor de una variable (interpolar, extrapolar)	modelo (gráfica, tabla) - En gráficas ambiguas, interpretación cualitativa para determinar una relación de dependencia entre variables (interpretación cualitativa global)
4	*Acción*: - Interpretación cualitativa y global - Traducción: Elaborar de una gráfica a partir de una expresión verbal o representación pictórica *Variable:* -Estudiar la dependencia de variables. - Describir las relaciones de cambio con referencia a la variación de la pendiente - Predecir el valor de una variable a partir de valores conocidos (extrapolar) *Situación:* Familiar *Estrategia:* no rutinaria *Lenguaje*: expresarse en un lenguaje estructurado con referencia a elementos del modelo. Sostenerse en representaciones ambiguas. (Representaciones pictóricas, sistema cartesiano con más de una graficas, etc.)	- Interpretar gráficas complejas y leer uno o múltiples valores de los gráficas – Interpretar representaciones complejas y desconocidas de situaciones del mundo real – Utilizar representaciones múltiples para resolver un problema práctico – Relacionar información basada en textos con una representación gráfica y comunicar las explicaciones - Construir una gráfica para una tarea específica - Elaborar argumentos en base a la interpretación de la gráfica - Construir una gráfica mediante expresión verbal - Interpretar más de un gráfica en un mismo sistema - Interpretar el lenguaje gráfico relacionando con los otros lenguajes	- Modelar a partir de representaciones ambiguas (gráficas de una representación pictórica) - Interpretar por medio de varias estrategias, preferentemente usar la técnica de focalizar en la variación de la pendiente (interpretación cualitativa)	- En tareas con representación ambigua (pictóricas o más de un gráfica en un sistema) interpretar cualitativamente para predecir una variable - Interpretación por medio de varias estrategias, preferentemente usar la técnica de focalizarse en la variación de la pendiente (interpretación cualitativa)

5	*Acción*: - Interpretación cualitativa y global intencionada: se opta entre posibles interpretaciones - Traducción: cambiar de representación con fluidez *Variable:* -Estudiar la dependencia de variables - Describir las relaciones de cambio con referencia a la variación de la pendiente - Predecir el valor de una variable a partir de valores conocidos (extrapolar) *Situación:* Familiar o no familiar *Estrategia:* no rutinaria *Lenguaje*: expresarse en lenguaje formal y estructurado con referencia a elementos del modelo. Sostenerse tanto en una información que modeliza una situación real como en razonamientos lógicos	– Interpretar y relacionar información compleja – Comunicar los razonamientos y argumentos - Argumentar características globales de las gráficas - Predecir el valor de la variable que no está en la curva, en donde no hay dependencia de variables pero por el comportamiento de la curva se puede predecir. - A partir de una gráfica, relaciona y traduce con fluidez a otros lenguajes (tabla numérica, expresión verbal, expresión algebraica) - Utilizar tablas y gráficas para la interpretación de fenómenos sociales.	- A partir de una situación real, con condicionantes complejas. Optar por un modelo (gráfica o tabla). Argumentar en base a la interpretación que más convenga. - Monitorear y controlar, revisando continuamente el modelo	- Representaciones complejas el propósito de la interpretación es dar una opinión - La tarea admite más de una interpretación - Hay una intencionalidad en la interpretación, por ejemplo en la Interpretación de la información de una noticia
6	*Acción*: - Interpretación cualitativa y global intencionada: se opta entre posibles interpretaciones - Traducción: cambiar de representación con fluidez *Variable:* -Estudiar la dependencia de variables - Describir las relaciones de cambio con referencia a la variación de la pendiente - Predecir el valor de una	– Interpretar información matemática compleja en el contexto de una situación real desconocida – Interpretar información compleja oculta en el contexto de una situación real desconocida – Interpretar textos complejos y utilizar el razonamiento abstracto (basado en la comprensión de las relaciones) para resolver problemas – Solución de problemas basada en el razonamiento	- Comunicar las interpretaciones y razonamientos, por medio del modelo construido en tareas que provienen de fenómenos sociales o medios de comunicación: noticias, revistas, etc. - Reconocer el significado y el	- Interpretar la información de un modelo con el fin de dar una opinión - Interpretar sosteniéndose en razonamientos lógicos a partir de un razonamiento abstracto

variable a partir de valores conocidos (extrapolar) *Situación:* Familiar o no familiar *Estrategia:* no rutinaria *Lenguaje*: expresarse en lenguaje formal y estructurado. Sostenerse principalmente en razonamientos lógicos derivados de una abstracción	proporcional complejo –Comunicar de forma coherente el razonamiento y los argumentos lógicos –Utiliza las gráficas y sus otros lenguajes para organizar e intervenir en diversas situaciones de la realidad - Identificar e interpretar información de gráficas, tablas y expresiones verbales de medios de comunicación	alcance que tienen las soluciones y conclusiones - Validar el modelo contrastando la validez y coherencia de las soluciones matemáticas y de las predicciones en el contexto de la situación real inicial - Monitorear y controlar el modelo, revisando continuamente el modelo

3.4.1.1 Adaptación de la unidad didáctica

Previamente a su aplicación, se analizó la unidad didáctica elaborada por el grupo Felix Klein con la matriz de competencias con el propósito de, tal como se había señalado anteriormente, modificar las actividades en que repitieran tareas y se agregaran nuevas tareas más significativas para el desarrollo de las competencias de argumentación y modelización. En el cuadro 3.4.5 se determina el nivel de cada actividad, en la columna *actividad* se clasifican los tres tipos de actividades de la unidad didáctica.

Fichas (F#): actividades impresas que se entregan a cada alumno para desarrollarlas. Hay doce fichas en la unidad.

Actividades (A#): actividades que gestiona el profesor, no están impresas.

El Material 1 (M1) consiste en una actividad impresa que tiene el carácter de experimental.

Según la competencia se identifica el nivel de complejidad de la actividad, siguiendo los criterios expuestos en la matriz de competencia. Para cada etapa se aprecia un orden ascendente en el nivel de complejidad; en las dos etapas iniciales no se supera el nivel 3 en las competencias. En la tercera etapa las competencias alcanzan un nivel 4 en una actividad (ficha 11), en el resto se sitúan en un nivel 3. En este cuadro las tareas no se exponen y se han dejado implícitas en la actividad, para considerarlas posteriormente en el análisis.

Cuadro 3.4.5: Nivel de complejidad de la actividad según la competencia

			Argumentación						Modelización					
Etapa	Clase	Actividad	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
I: Ubicando puntos en el espacio	1	F1	x						x					
		F2		x						x				
		F3			x						x			
	2	A4			x					x				
		M1			x					x				
		A.6			x					x				
II.1 Reconociendo variables en un problema	3	A7	x											
		A8	x											
		A9	x											
	4	F4		x							x			
		A11		x										
		F5.1		x						x				
		F5.2		x						x				
		F5.3		x						x				
II.2 Existencia de relación de dependencia entre variables	5	F6.1		x							x			
		F6.2		x							x			
		F6.3		x					x					
		F7			x						x			
III.1 Construcción de gráficos	6	F8.			x						x			
		F9			x						x			
III.2 Profundización en el análisis de gráficos	7	F10			x						x			
		F11			x							x		
		F12.1			x					x				
		F12.2				x					x			
		F12.3				x				x				
		F12.4				x				x				
Prueba final	8	P1			x						x			
		P2			x					x				
		P3			x					x				
		P4			x					x				
		Nº niveles	**4**	**9**	**15**	**3**			**2**	**13**	**10**	**1**		
		Totales	31						26					

A partir de la información obtenida del cuadro 3.4.5 se substituyeron actividades de la unidad didáctica en que bajaran o se mantuvieran los niveles, por otras actividades que elevaran el nivel de complejidad (actividades ennegrecidas). Las nuevas actividades se presentaban en forma de fichas, pero se denominaron materiales para diferenciarles de las fichas originales de la unidad, aunque no tuvieran el carácter experimental del material 1.

En el cuadro 3.4.6 se ilustra la nueva secuencia de la unidad, y los cambios de nivel según el caso (para determinar el nivel de la actividad, se escogió por el más alto entre las dos competencias). Las actividades remplazadas se han ennegrecido: A4, A6, A9, y F12. Otras actividades se han mantenido pero se han modificado algunas preguntas para aumentar su nivel de complejidad. Tal es el caso de F5.3, F6.3 y dos preguntas de la prueba final de la unidad didáctica.

Cuadro 3.4.6: Modificaciones a la unidad didáctica

Etapa	Clase	Actividad	observaciones	nivel
I: Ubicando puntos en el espacio	1	Act1(F1)	Mantener	1
		Act2(F2)	Mantener	2
		Act3(F3)	Mantener	3
	2	Act. 4,6	Eliminar	
		F4	Se mantiene	3
II.1 Reconociendo variables en un problema	3	Act 7, 8	Mantener	1
		Act. 9	Remplazada por material 2	de 1 a 3
	4	Act 10 (M1)	Mantener	3
		Act 11	Eliminar	
		F5	Modificar 5.3	de 2 a 3
II.2 Existencia de relación de dependencia entre variables	5	Act 12(F6)	Modificar 6.3	de 2 a 3.
		Act 13(F7)	Mantener	3
III.1 Construcción de gráficos	6	F8	Mantener	3
		F9	Mantener	3
		M3	Agregar	4
III.2 Profundización en el análisis de gráficos	7	F10	Mantener	3
		F11	Se mantiene	4
		F12	Remplazada por Material 4	de 4 a 5
Prueba final	8	Prueba final	P3 y P4 se remplazan	De 3 a 4

En el siguiente apartado se describen las actividades de la unidad didáctica. En el anexo 1 se expone las fichas y materiales de dicha unidad didáctica.

3.4.1.2 Descripción de la unidad didáctica

En este apartado se describe la unidad didáctica con las actividades agregadas. Esta descripción es necesaria por varios motivos: para entender los criterios con que se analizó la unidad didáctica y también para tener el desarrollo de las actividades que forman parte de los datos recogidos sobre Valentina.

La unidad didáctica se conforma de tres etapas (cuadro 3.4.7).

Cuadro 3.4.7: Descripción unidad didáctica

<table>
<tr><th colspan="2">La Etapa 1: ubicando puntos en el espacio</th></tr>
<tr><td colspan="2">Es su desarrollo se ha generado una serie de actividades que pretenden ubicar puntos en un plano, en que surja la necesidad de un sistema de referencia. Paulatinamente al ir aumentando las restricciones para ubicar un punto en plano, se llegue a la conclusión que lo más óptimo es que el sistema de referencia sea común.</td></tr>
<tr><td>ficha 1</td><td>Se espera que los estudiantes discutan la necesidad de establecer un sistema de referencia, para tal cometido, se propone inicialmente una actividad que consiste identificar en qué ventana hay fuego en una edifico dibujado con 14 niveles con 10 ventanas cada nivel.</td></tr>
<tr><td>ficha 2</td><td>Consiste en dar las instrucciones por medio de un mapa para dar con el tesoro enterrado en una isla. El propósito es que se negocie la necesidad de establecer un sistema de referencia, pero que no necesariamente sea único.</td></tr>
<tr><td>ficha 3</td><td>Los estudiantes se reúnen en parejas. La actividad consiste en un juego, en que cada participante ubique dos tesoros en el sector cuadriculado que inicialmente han construido cada uno en su cuaderno, y que no puede ser visto por su compañero. Por turnos se debe tratar de adivinar la ubicación en que el otro jugador situó el tesoro. Es solamente un intento por turno y gana el primer jugador que encuentra los dos tesoros.</td></tr>
<tr><td>ficha 4</td><td>Los participantes tienen que situar dos puntos en una cuadriculado de 20x26, y a través de un mensaje escrito dar las coordenadas al compañero para que dibuje los puntos en las mismas coordenadas.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Etapa II: estudiando tipos de variables y dependencia entre ellas</th></tr>
<tr><td colspan="2">En esta etapa se estudian las variables y la noción de dependencia de variables. Las actividades dan énfasis al hecho de que dos variables que se puedan asociar no necesariamente implican una dependencia entre ellas, la dependencia se da cuando los cambios que se da en una variable implican cambios en la otra.</td></tr>
<tr><td>material 1</td><td>Corresponde a una situación experimental para identificar la relación de dependencia entre variables. Se fija un resorte de forma vertical en cuyo extremo inferior cuelga un soporte para colocar distintos pesos (monedas), se pide medir las</td></tr>
</table>

	longitudes del resorte según los pesos.
material 2,	Tareas de manipulación de variables e interpretación de gráficas. El problema 1 consiste en identificar las variables de cinco situaciones que describen una relación, para luego identificar entre una serie de graficas, cual corresponde con cada una de las cinco situaciones. En el problema 2 hay que correlacionar las gráficas según la situación. En el problema 3 se pide elaborar una historia para cada gráfica. En el problema 4 hay que identificar las variables en dos situaciones expresadas de forma pictórica. Finalmente en el problema 5 se pide interpretar una tabla numérica.
ficha 5	Su propósito es profundizar y consolidar tareas de relación de dependencia entre variables que se han visto anteriormente.
ficha 6,	Se da el paso a interpretar gráficas de diversas situaciones para determinar si existe o no relación de dependencia entre las variables asociadas.
ficha 7	Profundiza en la dependencia de variables. Consiste en interpretar dos gráficas cuyas variables son *ciudades costeras de Chile* y *temperatura promedio diaria*. En la primera gráfica se ha seguido un criterio alfabético para situar los valores dados a la variable independiente de ciudades, en cambio en la segunda gráfica el criterio para situar los valores dados para la variable es por la ubicación geográfica de las ciudades, de norte a sur.
Etapa III: profundizando el trabajo con gráficos: Esta etapa tiene como propósito que los estudiantes construyan gráficas, que aprendan procedimientos que ayuden a la interpretación, particularmente focalizarse en la inclinación de la curva (pendiente). Es importante señalar que el objetivo que espera en esta etapa es aprender que dos variables que se puedan asociar no necesariamente corresponden a una dependencia entre ellas, la dependencia se da cuando los cambios que se da en una variable implican cambios en la otra.	
ficha 8	La actividad consiste en determinar la evolución de un paciente con fiebre en tres días de hospitalización, cuyos datos se han organizado en una tabla de datos. La tarea matemática es interpretar los datos, por ejemplo si es posible predecir y así describir la evolución del paciente; para ello se traduce los datos a una gráfica en que al unir los puntos con una línea, se puede tener una visión de la evolución del paciente.
ficha 9	A partir de dos representaciones (tabla y gráfica) que describen las precipitaciones a lo largo del año de tres ciudades en diferente situación geográfica, hay que describir el comportamiento de las precipitaciones.
material 3	Consiste en construir gráficas por medio de las características de una situación. Las situaciones son similares al material 2 con la diferencia de que en esta actividad se elaboran gráficas. La tarea de elaborar una gráfica a partir de una situación para interpretar la relación entre sus variables es un proceso que permite la aparición de varias estrategias. Por ejemplo en la actividad 1, a partir de las características de la

	piscina, hay que modelar como crece la profundidad del agua respecto al tiempo. Una opción es darse posibles valores de la altura de agua respecto al tiempo, situar los puntos en una gráfica y unirlos con una línea gráfica. Una segunda opción es esbozar la curva de la gráfica por la característica de la piscina, observado que el agua crece constantemente en cada intervalo de tiempo, por lo tanto la gráfica es una línea recta. En la primera opción la gráfica se construye cuantitativamente, dando valores. En la segunda opción la estrategia es cualitativa, se construye la gráfica por medio de la observación del comportamiento de las variables, identificando su relación sin necesidad de situar puntos.
ficha 10	Se presenta una gráfica con tres curvas, en que se describe el trayecto recorrido por tres corredores. Gana aquel corredor que recorre una mayor distancia en una hora. Por primera vez se presenta una tarea de interpretar cualitativamente una gráfica cuyo propósito es que los estudiantes aprendan que la variación de la variable dependiente responde a la variación de la inclinación de la curva.
ficha 11	Consiste en relacionar graficas, que modelan la velocidad de un coche de carreras, con tipos de circuitos. La tarea equivale a traducir de una representación pictórica y una gráfica. El procedimiento esperado es que los estudiantes apliquen la estrategia de focalizarse en la inclinación de la curva para determinar la gráfica que corresponde a la representación pictórica.
material 4	Se desarrolla una actividad cuyo perfil es el de producir un proceso de reflexión en los estudiantes. Las manera de presentar la actividad no es un contexto usual (no familiar) además incentiva la interpretación de una manera global (generalizar). El problema “accidentes automovilísticos” trata la dependencia entre la velocidad y la cantidad de accidentes (heridos y muertes). Se observan varias tareas de interpretación. La pregunta a) se corresponde con una lectura e interpretación cuantitativa local; en la pregunta b) la interpretación es global; y posteriormente, en la pregunta c) deben realizar un comentario crítico, puesto que la noticia no interpreta correctamente la gráfica.

3.4.2. Estrategia para el análisis del estudio de caso

El estudio de caso de la profesora Valentina –en adelante Valentina- consistió de la observación no participante de cinco clases en diferentes etapas de la aplicación de la unidad didáctica. El primer propósito del estudio fue caracterizar los procesos del aula de matemáticas, es decir de la interacción entre Valentina y los estudiantes, e incorporar estos procesos a las competencias de argumentación y modelización. De forma similar se caracterizan las fases de modelización que se incorporan a la competencia de modelización. Este paso significa el último procedimiento para completar los componentes de las competencias; este propósito responde al segundo objetivo de la investigación de caracterizar cada competencia.

El segundo propósito del estudio de caso es poder explicar el aula de matemáticas desde la perspectiva de las competencias matemáticas. En el estudio, esto se enfoca en determinar los niveles de complejidad que se desarrollan en las diferentes actividades de la unidad didáctica que se han analizan, para luego, comparar con el nivel de complejidad que se le atribuyó *a priori* a estas mismas actividades de la unidad didáctica. Este propósito responde al tercer objetivo. Por último, para desarrollar el cuarto objetivo, se estudiará el rol de profesor para el desarrollo de las competencias, que se concretiza en indagar patrones de interacciones en base a los procesos matemáticos.

La estrategia de análisis corresponde al primer propósito del estudio de caso, dado que los otros son parte del análisis de datos.

Caracterización de procesos

Para la identificación de los procesos que conforman a cada competencia, se siguió una estrategia de teoría emergente (Strauss, Corbin, 1990), que consistió en las siguientes fases:

- Se transcribieron las cinco clases grabadas y se escogieron episodios de cada clase utilizando el programa de análisis cualitativo de datos *Transana*.
- Se escogieron episodios de cada clase, elegidos siguiendo dos criterios:
    - riqueza de contenido, es decir los episodios que mostraron una mayor riqueza en los procesos que lo conforman;
    - un equilibrio entre mostrar la totalidad de la clase y una continuidad entre los episodios para cubrir la secuencia de clases.
- Los episodios muy largos se han separado en sub-episodios.
- El inicio y final de un episodio se marca o bien cuando finalizaba una pregunta o ítem de una ficha, o cuando se pasa a un tema distinto. Para la separación entre sub-episodios se usó un criterio similar, cuando termina un tema y comienza otro.
- La unidad de análisis corresponde a cada una de las acciones que conforman el episodio, tanto de Valentina como de los estudiantes. Una acción es generalmente una expresión oral de una participante, o también una expresión gestual ligada a la interpretación de gráficas- por ejemplo indicar un movimiento en la gráfica-. La acción se correspondió con un término que indicara el proceso según la competencia respectiva, a este término se le denominó *indicador*. Es decir, a cada acción podían corresponderle hasta dos indicadores diferentes, uno para cada competencia.
- Las acciones tanto de Valentina como de los estudiantes que no tuvieran una relación con los procesos, no se codificaron. Bajo este criterio, acciones de Valentina que eran relevantes en términos de gestión del aula, no fueron codificadas.

La caracterización de procesos tiene dos etapas. La primera etapa consistió en elaborar indicadores de procesos de cada competencia. Por comparación constante de los indicadores se caracterizaron los procesos que integran cada una de las dos competencias. Para esta etapa se escogieron dos de las cinco clases, la primera y última. Se eligieron estas dos y no otras porque tienen un buen número de episodios importantes, y además para analizar una clase del inicio de la unidad didáctica y otra del final. A su vez, esta primera caracterización de procesos se utilizó para describir la secuencia de estas dos clases en términos de las competencias.

La comparación constante entre indicadores de procesos se fundamentó en ciertos referentes para las competencias implicadas y desde la perspectiva del contenido. Se idearon procesos *a priori* que se usaron como base para elaborar el indicador, que se fueron eliminando o complementando con otros indicadores en la medida que se analizaban los episodios.

Para la argumentación se uso como base la estructura de Toulmin (1958) y Krummheuer (1995). Para los procesos de modelización se consideró las fases de modelización de Maaß (2006) y los descriptores de competencia interpretada como complejidad propuesta por Henning y Keune (2007). A su vez para procesos ligados al contenido se tuvo en cuenta las tres acciones de Lienhardt et al. (1990) en interpretación de gráficas (lectura, interpretación y construcción).

La segunda etapa consistió en consolidar la caracterización de los procesos. Con los resultados del primer análisis se revisaron los procesos de cada competencia a la luz de los referentes teóricos expuestos, y se modificaron algunos procesos. En el capítulo de análisis se explican los respectivos cambios. Este análisis se aplicó a las clases mencionadas anteriormente y a la tercera y cuarta clase, siguiendo los mismos criterios mencionados anteriormente.

Otro propósito en esta segunda etapa fue indagar patrones de interacción entre la profesora Valentina y los estudiantes desde el punto de vista de los procesos. Para tal intención se caracterizó la secuencia entre los procesos de cada competencia. La secuencia que mostraron los procesos se denominó *ciclos*. En el apartado de análisis 4.6 en que se analizan los patrones de interacción, se describen los diferentes ciclos que se daban en el aula de matemáticas.

Caracterización de las fases de modelización

También se han caracterizado las fases de modelización en interpretación de gráficas. Si bien las fases de modelización tienen respaldo en la literatura, éstas son generales y no están enfocadas a un contenido. Y por tanto, desde una perspectiva de teoría emergente, se ha repetido la estrategia de comparación constante para identificar las fases de modelización en los episodios. Pero esta vez la unidad de análisis correspondió a un conjunto de acciones consecutivas que apuntaban a la misma fase.

Elección de episodios

Se han elegido 12 episodios que corresponden a cuatro de las cinco clases. El cuadro 3.4.8 además de mostrar los episodios elegidos, ilustra la división en sub-episodios, identificados como secuencias en el cuadro.

Cuadro 3.4.8: Episodios seleccionados

Clases	Episodios
Clase 1: Ficha 3	**7 secuencias:** 1 - 2.1, 2.2 - 3.1, 3.2, 3.3, 3.4.
Clase 3: Material 3	**7 secuencias:** 1 - 2.1, 2.2 - 3.1, 3.2, 3.3, 3.4
Clase 4: Ficha 11	**3 secuencias:** 1 - 2- 3
Clase 5: Material 4	**7 secuencias:** 1.1,1.2,1.3,1.4 - 2.1, 2.2, 2.3

Estos 12 episodios corresponden a solo una selección de la totalidad de cada clase, y se han elegido siguiendo el criterio descrito anteriormente.

Los episodios de la clase 2 no han sido seleccionados porque no cumplen los criterios mencionados, solamente habían dos episodios ricos en contenido pero estaban muy distanciados uno del otro. No obstante, se han mantenido la estructura de las cincos clases porque la clase 2 se utilizó en el procesos de selección de episodios.

4. Análisis de datos y resultados

El análisis de datos se compone de dos tipos de análisis, uno sobre la unidad didáctica y otro sobre el estudio de caso. En el apartado 4.1 se analiza la unidad didáctica, se establecen las características de las tareas matemáticas, para luego aplicar el instrumento matriz de competencias a la unidad didáctica cuya función es determinar los niveles de complejidad en cada actividad según la competencia. Este análisis *a priori* se realiza antes de aplicar la unidad didáctica en el aula.

La segunda parte el análisis estudia el caso del aula de matemáticas para caracterizar los procesos, y consta de dos etapas. La primera etapa se desarrolla en el apartado 4.2 de análisis y el apartado 4.3 de validación. En el apartado 4.2.1 se describe la primera caracterización de los procesos. En el apartado 4.2.2 se aplican estos procesos para describir la primera clase observada desde el punto de vista de las competencias de modelización y argumentación; también se contrasta este análisis con el análisis *a priori* de la unidad didáctica respecto a la caracterización de tareas, competencias y niveles de complejidad. En el apartado 4.2.3 se repite el análisis para última clase observada (clase 5). El apartado 4.3 consiste en la validación de esta primera caracterización de procesos que dará pie a la caracterización definitiva de procesos que conforman cada competencia. En la segunda etapa se ponen en práctica los procesos establecidos en el apartado 4.3 de validación. En el apartado 4.4 se expondrá la competencia de modelización, y en el apartado 4.5 la competencia de argumentación. En cada competencia se caracterizan las tareas, procesos, y nivel de complejidad a partir de los episodios seleccionados, y se compara el nivel de complejidad *a priori* con el nivel de complejidad logrado en el aula. Para la competencia de modelización también se caracterizan las fases de modelización.

Finalmente en el apartado 4. 6 se analizan los patrones de interacción en el aula de matemáticas desde una perspectiva de los procesos que se desarrollan.

4.1 Análisis de la unidad didáctica

Para analizar la unidad didáctica se han utilizado los criterios expuestos en el apartado 3.4.1 *estrategia de análisis unidad didáctica*. El cuadro 4.1.1 muestra las características de las tareas para cada una de las actividades de la unidad didáctica. En la primera columna se identifican las tareas matemáticas según la actividad, en el resto de columnas se describen las respectivas características de las tareas.

Cuadro 4.1.1: Caracterización de tareas matemáticas en la unidad didáctica

Tarea	Acción	Variable	Estrategia	Lenguaje
Ficha 1 Identificar y describir la posición de puntos en el plano.	Lectura: identificar puntos Escalas: ubicación de puntos	Describir de una variable implícitamente (piso y ventana), no se identifican las variables.	Leer es un procedimiento *rutinario*	Natural. Se sostiene en la representación
Ficha 2 Describir un objeto en el plano utilizando al menos un sistema de referencia	Lectura: Identificar puntos en el plano Escalas: utilizar un sistema de referencia	Utilizar los puntos cardinales como sistema de referencia. No se identifican las variables	<u>No rutinario:</u> Utilizar los puntos cardinales para describir movimiento	Expresarse de manera precisa Se sostiene en la representación (mapa y sus símbolos) y en los puntos cardinales
Ficha 3 Construir un sistema de referencia Comprender que el sistema cartesiano es uno los modelos más eficaces para identificar puntos en el plano	Lectura: descripción de los tesoros equivale a un identificar un punto en el plano	Construir un sistema de referencia, elegir variables, implícitamente. No se identifican las variables	<u>No rutinario:</u> Construir un sistema de referencia	Los estudiantes deberían ponerse de acuerdo para utilizar un sistema común, con unas reglas definidas. Por lo tanto se expresan con el lenguaje propio del sistema construido. Se sostiene en el sistema construido
Material 2 Reconocer y aislar variables en un lenguaje verbal o gráfico Construir una gráfica mediante expresión verbal Interpretar el lenguaje gráfico relacionando con los otros lenguajes	Interpretación de gráficas cualitativa, global Traducción de una expresión verbal a una gráfica	Identificar variables en una expresión verbal	<u>No rutinario:</u> Interpretación cualitativa.	Expresarse de manera natural. La interpretación se sostiene en la variables que se han identificado
Ficha 4. Elaborar e interpretar una tabla de valores	Interpretar una tabla de valores	Identificar si existe dependencia de variables	<u>Rutinario:</u> Elaborar una tabla	Natural. La interpretación se sostiene en el

Identificar si existe relación de dependencia entre dos variables.				experimento
Ficha 5 Identificar si existe relación de dependencia entre dos variables. Construir tabla de valores Interpretar tabla de valores	Construir tabla de valores Interpretar tabla de valores	Identificar si existe dependencia de variables	<u>Rutinario:</u> Elaborar una tabla <u>No rutinario:</u> Interpretar tabla de valores Determinar existencia de dependencia	Natural Se sostiene en los datos (tabla).
Ficha 6 Identificar lasvariables. Identificar si existe o no relación de dependencia entre dos variables. Interpolar	Interpretación de tablas y gráficas, cuantitativo, local y global	Identificar si existe o no dependencia de variables Identificar el valor de una variable (lectura) Interpolar	<u>Rutinario:</u> Lectura Interpretación cuantitativa Elaborar una gráfica a partir de una tabla. Interpolar	Natural Se sostiene en los datos (gráfica y tabla).
Ficha 7 Construir una gráfica. Identificar si existe o no relación de dependencia entre dos variables.	Interpretación de tablas y gráficas, cuantitativo, local y global	Identificar si existe o no dependencia de variables Identificar el valor de una variable (lectura) Interpolar	<u>Rutinario:</u> Lectura Interpretación cuantitativa Elaborar una gráfica a partir de una tabla. Interpolar	Natural Se sostiene en los datos (gráfica)
Ficha 8 Construir una gráfica a partir de una tabla Interpolar Extrapolar	Construir una gráfica a partir de una tabla interpretación cuantitativa, local y global	Identificar el valor de una variable (lectura) Extrapolar	<u>Rutinario:</u> Lectura Interpretación cuantitativa Elaborar una gráfica a partir	Natural Se sostiene en los datos.

			de una tabla. Interpolar No rutinario: Extrapolar	
Ficha 9 Interpretar más de un gráfico para un mismo sistema. Interpolar Extrapolar Discutir si tiene sentido unir los puntos de una gráfica	Construir una gráfica a partir de una tabla Interpretación cuantitativa, cualitativa, local y global	Extrapolar Identificar el valor de una variable (lectura)	Rutinario: Lectura Interpretación cuantitativa Elaborar una gráfica a partir de una tabla. No rutinario: Extrapolar	El lenguaje es natural y se estructura a partir de la interpretación cualitativa y global de los datos, estudiar la predicción.
Material 3 Elaborar una gráficas a partir de una situación pictórica	Elaborar una gráficas a partir de una situación pictórica Interpretación cualitativa, global	Identificar variables en situaciones expresadas en forma o pictórica.	No rutinario: Interpretación de representación pictórica	El lenguaje es natural, y se sostiene en los datos.
Ficha 10 Describir relaciones de cambio, haciendo referencia a la variación de la pendiente	Interpretación cualitativa, local y global	Describir relaciones de cambio, haciendo referencia a la variación de la pendiente	Rutinario: Lectura de puntos No rutinario: Interpretación cualitativa Variación de la pendiente Extrapolación	Natural Se sostiene en los datos (gráfica)
Ficha 11 Elaborar una gráfica a partir de una situación pictórica	Interpretación cualitativa, local y global	Describir relaciones de cambio, haciendo referencia a la variación de la	No rutinario: Interpretación cualitativa Variación de la	El lenguaje es natural, se sostiene en los datos (representación

Describir relaciones de cambio, haciendo referencia a la variación de la pendiente		pendiente	pendiente Extrapolación Elaborar una gráfica a partir de una representación pictórica	pictórica y gráfica)
Material 4 Interpretar y relaciona información compleja Comunicar los razonamientos y argumentos Relacionar y traducir con fluidez a otros lenguajes a partir de una gráfica Identificar e interpretar información de gráficas, tablas y expresiones verbales de medios de comunicación.	Lectura. Interpretación cuantitativa, cualitativa. Local, global Interpretación crítica. (Más de una interpretación)	Identificar las variables Extrapolar	<u>No rutinario</u> Interpretar la información de un gráfico que proviene de un diario. Extrapolar	Lenguaje formal (critica a una noticia). Se sostiene en un razonamiento abstracto (hay un criterio o juicio de valor respecto a los datos)

El cuadro 4.1.1 es un paso intermedio necesario para construir el cuadro 4.1.2 que caracteriza los niveles de complejidad para las competencias de modelización y argumentación. Estos dos cuadros servirán para estudiar las clases 1 y 5.

Los niveles de complejidad se han determinado para cada ficha, pero en algunas fichas hay más de una actividad y la complejidad puede cambiar. Como este es un análisis *a priori* se ha decidido tomar como criterio general la ficha, y se ha dejado para el análisis de los episodios, cuando sea el caso, determinar el nivel de complejidad por pregunta.

En el cuadro 4.1.2 se han determinado los niveles de complejidad para cada competencia; si bien se aprecia un aumento en el nivel, éste no es constante puesto que en la parte central de la unidad didáctica predomina un nivel 3 para modelización y un nivel 2 para argumentación, cuyo nivel sube a partir de la ficha 7. En las últimas clases se eleva el nivel hasta llegar a un nivel 5 para las dos competencias.

Cuadro 4.1.2: Caracterización niveles de complejidad en unidad didáctica

Tarea	Modelización	Argumentación

Ficha 1 Identificar y describir la posición de un punto en el plano.	**Nivel 1**: la tarea es que los estudiantes describan la posición del punto (en el edificio) por medio de un sistema de pisos y ventanas, con el propósito de comprender como usar un sistema de referencia.	**Nivel 1**: Se espera que los estudiantes argumenten la manera más indicada para identificar el piso. La acción es una lectura, por lo cual debería desarrollarse con una descripción clara y sencilla.
Ficha 2 Describir un objeto en el plano utilizando al menos un sistema de referencia	**Nivel 2**: Para la tarea de describir un objeto, se espera que los estudiantes adopten los puntos cardinales para describir el recorrido hacia el tesoro	**Nivel 2:** Uno de los propósitos de la tarea es que se pueda generar un proceso de interacción de aula, donde el profesor negocie las explicaciones de los estudiantes en términos de las instrucciones más pertinentes para usar un sistema de referencia, y que puedan argumentar cuales es la instrucción más optima entre todas las descritos.
Ficha 3 Construir un sistema de referencia Comprender que el sistema cartesiano es uno los modelos más eficaces para identificar puntos en el plano	**Nivel 3:** Se espera que los estudiantes construyan un sistema óptimo de referencia, que identifique sus propiedades, y lo utilicen para abordar la situación (búsqueda del tesoro)	**Nivel 3:** Uno de los propósitos es que a partir del escenario de juego, en la interacción en parejas surja un sistema de referencia común, probablemente un sistema similar al cartesiano, en que los estudiantes logren *evidenciar* cuales son las propiedades de un sistema de referencia, y en particular que el sistema cartesiano es uno de los modelos más eficaces para identificar puntos en el plano.
Material 2 Reconocer y aislar variables en un lenguaje verbal o gráfico Construir una gráfica mediante expresión verbal Interpretar el lenguaje gráfico relacionando con los otros lenguajes.	**Nivel 2:** Se espera en primer lugar que los estudiantes identifiquen las variables en las situaciones descritas para luego reconocer y comprender una gráfica como una representación que permita modelar la situación.	**Nivel 3**: Se espera que los estudiantes argumenten como establecer una estrategia para interpretar cualitativamente las gráficas.
Ficha 4 Elaborar e Interpretar una tabla de valores Identificar si existe relación de dependencia entre dos variables.	**Nivel 3:** Uno de los propósitos es que los estudiantes adopten un modelo y lo exploren, para identificar si existe dependencia de variables.	**Nivel 2**: Se espera que los estudiantes argumenten en base a identificar si hay dependencia de variables. La interpretación es cuantitativa, estrategia rutinaria, lenguaje natural.
Ficha 5 Identificar si existe relación de dependencia entre dos	**Nivel 3**: Se espera que de las tres situaciones puedan decidir si hay un patrón (modelo), y predecir valores de variables en	**Nivel 2:**Se espera identifiquen los criterios para determinar si hay dependencia de variables y usarlos para argumentar.

variables. Construir tabla de valores Interpretar tabla de valores	caso afirmativo	
Ficha 6 Identificar si existe o no relación de dependencia entre dos variables. Conectar tablas y gráficas Interpolar	**Nivel 3:** Se espera que los estudiantes puedan comprender que significa la dependencia de variables, a partir de una estudio del modelo (gráfica)	**Nivel 2**: Se espera que los estudiantes argumenten en base a identificar las propiedades del modelo: identificar las variables, interpolar, determinan la dependencia entre variables.
Ficha 7 Construir una gráfica a partir de una tabla Identificar si existe o no relación de dependencia entre dos variables.	**Nivel 3:** Se espera que los estudiantes puedan comprender que significa la dependencia de variables, a partir de una estudio del modelo (tabla y gráfica)	**Nivel 3**: Se espera que la argumentación se centra en identificar las propiedades, a través del gráfico y la tabla, que determinan la dependencia entre variables. En este caso, se debe evidenciar cuales son las propiedades que determinan la dependencia entre variables.
Ficha 8 Construir una gráfica a partir de una tabla Interpolar Extrapolar	**Nivel 3:** Se espera que los estudiantes puedan comprender que significa la dependencia de variables, a partir de una estudio del modelo (tabla y gráfica)	**Nivel 3**: Se espera que los estudiantes evidencien y argumenten que un gráfico es una representación eficiente para estudiar la dependencia entre variables. La interpretación progresa de cuantitativa local a cualitativa y global.
Ficha 9 Interpretar más de un gráfico para un mismo sistema. Interpolar Extrapolar Discute si tiene sentido unir los puntos de una gráfica	**Nivel 3:** Se espera que los estudiantes puedan explotar el modelo: interpretar cualitativamente, interpolar y extrapolar.	**Nivel 3:** Uno de los propósitos de la tarea es que se pueda generar un proceso de interacción de aula. La interpretación es cualitativa y global, para estudiar el comportamiento de las variables.
Material 3 Elaborar una gráfica a partir de una situación pictórica	**Nivel 4:** Se espera que los estudiantes puedan pasar del de la expresión pictórica a un expresión gráfica del modelo matemático para estudiar la dependencia entre varibeles	**Nivel 3:** La interacción en el aula gira en torno a indagar una estrategia para elaborar una gráfica a partir de la representación pictórica, para así interpretar cualitativamente y examinar las estructuras, determinar las regularidades. Así como formular conjeturas acerca de lo observado en las representaciones pictóricas. Por tanto se sitúa en un nivel 3

Ficha 10 Describir relaciones de cambio, con referencia a la variación de la pendiente	**Nivel 3:** Se espera interpetar la expresión gráfica del modelo para describir las relaciones e cambio.	**Nivel 3**: La interacción en el aula tiene como propósito encontrar el procedimiento adecuado para interpretar este tipo de situaciones, el cual es focalizarse en la pendiente de la gráfica. La justificación de esta "técnica" depende en que medida se discute y evidencia por medio de un proceso inductivo de casos. Este procedimiento se aplica a la interpretación de gráficas, especialmente en un análisis cualitativo.
Ficha 11 Relacionar una representación pictórica con una representación gráfica Elaborar una gráfica a partir de una situación pictórica Describir relaciones de cambio, haciendo referencia a la variación de la pendiente	**Nivel 4:** Interpretar por medio de varias estrategias, preferentemente usar la técnica de focalizar en la variación de la pendiente (interpretación cualitativa)	**Nivel 3**: Se continúa con una interacción semejante a la ficha anterior (10), similares características.
Material 4 Identificar si existe o no relación de dependencia entre dos variables. Interpretar y relacionar información compleja Comunicar los razonamientos y argumentos Relacionar y traducir con fluidez a otros lenguajes a partir de una gráfica Identificar e interpretar información de gráficas, tablas y expresiones verbales de medios de comunicación.	**Nivel 5:** Se espera que los estudiantes desarrollen un proceso de modelización completo. La situación es real, con condiciones complejas (contrastar gráfica con una noticia). Él énfasis se puntualice en las dos opciones diferentes de interpretación, argumentando en base a la interpretación que se adopta, lo que da paso a reflexionar sobre el modelo de una manera crítica	**Nivel 5** Al realizar un comentario crítico sobre cada situación, se espera que los estudiantes sean capaces de comprender que se pueden hacer más de una interpretación de un mismo caso, dependiendo en que aspectos se focalice. La interpretación tiene una intencionalidad. Este nivel de argumentación, que no se ha mencionado anteriormente, es la acción de convencer al otro, mediante una interpretación con datos, que no es única, depende del propósito a comunicar, en este caso si la velocidad excesiva influye en los accidentes automovilísticos.

4.2 Análisis del estudio de caso

4.2.1 caracterización de procesos

En esta primera etapa se obtuvo una extensa lista de procesos para cada competencia; en el cuadro 4.2.1 se muestra la primera caracterización de procesos para las competencias de modelización y de argumentación que se obtuvo del análisis de dos clases. En la segunda etapa esta lista se reduce.

Asimismo, los indicadores se han clasificado en tres grupos

- El primer grupo corresponde a las acciones del profesor que induce las acciones del estudiante en relación a la competencia. En este grupo aparecen una serie de indicadores que describen las acciones del profesor.

- El segundo grupo son las acciones del estudiante en relación a la competencia. De igual modo que en el primer grupo, se han caracterizado una serie de indicadores que tienen relación con estas acciones.

- El tercer grupo corresponde a las acciones del profesor en relación a la competencia modelización. Y son los mismos indicadores que se utilizan en el segundo grupo.

Las descripciones de los indicadores del grupo 1 con los otros grupos son similares, pero se ha preferido separar en el cuadro 4.2.1 para evitar confusiones; además hay indicadores que están en el grupo 2 y 3 y no el uno. Los indicadores del grupo 2 y 3 son los mismos por lo que se han expuesto juntos.

Cuadro 4.2.1: Caracterización de procesos

Modelización		**Argumentación**	
Grupo 1: acciones profesor induce a competencia			
Indicadores	Descripción	Indicadores	Descripción
Inducir a identificar Características modelo	Inducir a identificar las características de un modelo, indica las variables pero sin llega a describirlas	Inducir a identificar un problema	Inducir a identificar la cuestión problemática
Inducir a describir Características modelo	Inducir a describir las características de un modelo, indicando las variables, cualidades, pero sin usar el modelo	Inducir a identificar un datos	Inducir a identificar datos (generalmente una gráfica o tabla)
Inducir a establecer	Inducir a que se establezcan variables	Inducir lectura de datos	Inducir a leer datos en una gráfica o tabla

variables didácticas para modelar	didácticas para elaborar un modelo. Condiciones que se establecen para modelizar		
Inducir a determinar validez características del modelo	Inducir a determinar la validez de las variables, parámetros, o características en general del modelo	Inducir interpretación de datos	Inducir a interpretar (grafica, tablas, de un sistema de referencia)
Inducir Interpretar modelo	Inducir a interpretar un modelo o su expresión (gráfica, tabla, expresión verbal o algebraica)	Inducir interpretación interna	Inducir a que la interpretación sea focalizada a los datos.
Inducir a describir interpretación modelo	Inducir a describir interpretación modelo	Inducir interpretación externa a interna	Inducir a cambiar la focalización de la interpretación d externa a interna.
Inducir a contruir expresión del modelo	Inducir a construir las expresiones del modelo (gráfica, numérica, verbal)	Inducir a identificar justificación	Inducir a identificar una justificación de un compañero o del profesor
Inducir a identificar (construir) el modelo	Inducir a determinar o construir el modelo que responde a la situación problema (sistema de referencia, gráfico, tabla, etc)	Inducir a justificar	Inducir a justificar los enunciados.
Inducir a aplicar el modelo	Inducir a ºplicar el modelo y la expresión correspondiente	Inducir reflexión	Inducir a reflexionar en relación al proceso de argumentación
Inducir a validar el modelo	Inducir a validar o refutar la representación y propiedades del modelo	Inducir a concluir	Inducir a establecer respuestas a enunciados cuya validez se pretende establecer
Inducir a analizar críticamente el modelo	Inducir a reflexionar sobre el modelo, el proceso, y su aplicación como solución a la situación problemática		
Grupo 2 y 3: acciones del estudiante y profesor			
Características modelo	Señalar o describir las características de un modelo	Situación problema	Introducir una cuestión problemática

Describir el uso del modelo	Describir como se usa el modelo. Puede ser una síntesis o un resumen.	Acotación	En la situación problemática se focaliza en algún aspecto
Variables didácticas del modelo	Describir las condiciones que se establecen para modelizar	Calificadores modales	condiciones que regulan la hipótesis o conclusión
Validar características modelo	Hacer aseveraciones para validar las descripciones de las características de un modelo	Identificar datos	Identificar los datos (eneralmente en una gráfica o tabla)
Interpreta modelo	Interpretar un modelo (gráfica, tabla, expresión verbal o algebraica)	Leer datos	Lectura de los datos
Refutar interpretación modelo	Refutar interpretación modelo	Interpretar datos	Interpretación de los datos
Construir expesión del modelo	Construir la expresión de modelo (sistema de referencia, gráfica, tabla, etc.)	interpretar externamente	Interpretar a partir de información externa a la que aparece en los datos
Identificar o construir el modelo	Elaborar o identificar una modelo (sistema de referencia, gráfica, tabla, etc.)	iInterpretar internamente	Interpretar a partir de los datos
Modificar modelo	Cambiar de modelo a uno más eficiente	Identificar una justificación	Identificar cuando se ha justificado
Aplicar el modelo	Aplicar el modelo que se ha construido	Justificar	Justificar las conclusiones o hipótesis
Validar el modelo	Validar o refutar la representación y propiedades del modelo	No justificar	No justificar un enunciado
Analizar críticamente el modelo	Reflexionar sobre el modelo, el proceso, y su aplicación como solución a la situación problemática	Refutar	Refutar las hipótesis o conclusión de un compañero
Reflexión aplicación de la matemática	Reflexionar sobre la aplicación de los gráficos, tablas, y	Justificar internamente	Justificar una conclusión o hipótesis focalizando en los los datos

	modelos en general en diversas situaciones es de la vida real		
		Justificar externamente	Justificar una conclusión o hipótesis por medio de una fuente externa a los datos
		Reflexionar	Reflexionar en relación al proceso de argumentación
		Concluir	Establecer respuestas a enunciados cuya validez se pretende establecer

En el apartado 4.3 de validación, se discute cada uno de estos indicadores, con el propósito de determinar cuales serán parte de los procesos definitivos de cada competencia.

En los siguientes apartados 4.2.2 y 4.2.3, se analizan la primera y quinta clase con esta caracterización de procesos.

4.2.2 Análisis clase 1

En este apartado se analiza la primera clase observada de Valentina; la sesión forma parte de la etapa 1 de la unidad, “ubicando puntos en el espacio”, la cual tiene como objetivo desarrollar la noción de sistema de referencia y las ventajas de que sea un referente común.

Anteriormente se dictaron dos clases; en la primera se discutió la necesidad de establecer un sistema de referencia (ficha 1). El propósito de la segunda clase fue negociar la necesidad de establecer un sistema de referencia, pero que no necesariamente sea único (ficha 2). Las descripciones de cada una de estas actividades se señalan en el cuadro 3.4.7 del capítulo de metodología.

En esta tercera clase, denominada clase 1, se aplica la ficha 3 (figura 4.1). La actividad consiste en un juego de parejas, en que cada participante sitúe dos tesoros en el sector cuadriculado de su ficha, y que no puede ser visto por su compañero. Luego, por turnos se debe adivinar la ubicación en que el otro jugador situó el tesoro. Es un intento por turno y gana el primer jugador que encuentra los dos tesoros.

De esta clase se han elegido tres extensos episodios, que representan la mayor parte de la clase, y contienen suficientes características para analizar los procesos que se desarrollan entre Valentina y los estudiantes.

En el apartado 4.2.2.1, cada uno de los episodios se analiza considerando las acciones del aula, es decir de Valentina y los estudiantes, respecto a las tres competencias. Finalmente se hace un análisis conjunto de los episodios, describiendo las características principales de cada competencia.

Posteriormente, en el apartado 4.2.2.2, se elabora un segundo análisis de las acciones del aula, considerando los episodios en su conjunto, respecto a las características de la tarea.

En el apartado 4.2.2.3, se describe un tercer análisis: a partir de la matriz de competencia (cuadro 4.4.4, capítulo de metodología) se consideran las acciones en el aula respecto a los niveles de complejidad.

Encuentra los Tesoros

Jugadores: 2

Instrucciones:

- Ubicar dos tesoros en el sector cuadriculado de juego, **sin que los vea tu compañero(a).**
- Los tesoros **no** pueden estar ubicados en dos cuadrados contiguos.
- Trata de adivinar la ubicación en que el otro jugador ubicó los tesoros.
- Por turnos, para cada intento, el jugador a quien le están adivinando debe indicar si es que ha sido descubierto o no alguno de sus tesoros.
- Es solamente un intento por turno.
- Gana aquel jugador que encuentra todos los tesoros de su pareja.

Figura 4.2: Actividad ficha 3

4.2.2.1. Acciones del aula respecto a las competencias

Episodio 1

Previamente al episodio 1, los alumnos jugaron en parejas e idearon sistemas de referencia para poder comunicarse. Los diferentes sistemas elaborados se han organizado en el cuadro 4.2.2.

Cuadro 4.2.2: Sistemas de referencia utilizados por los estudiantes

Sistema de referencia	Características Sistema	Contexto de referencia	Limitaciones
Señalar físicamente	No se fija orientación, señalar "físicamente" el punto en un modelo semejante al cuadriculado original.	Modelo semejante al expuesto en la actividad	No funciona en el contexto del problema. En un sistema de mensaje no es válido

Arriba abajo **Pasos**	Vertical: una celda se define por el nivel, (ejem: 3 arriba, 2 abajo), el calificativo orienta el sentido. Horizontal: no se define (ejem: "tres hacia el lado de acá")	Orientación de la hoja	Dificultad en establecer un punto de origen. No funciona en un mensaje, es necesario definir demasiados significados de términos.
Piso- ventana	Vertical: niveles usando como metáfora los pisos, sentido de abajo hacia arriba. Ventana: dirección horizontal, se debe definir sentido.	Niveles de piso	Dificultad en establecer un punto de origen.
Filas, columnas	Vertical: columnas, sentido de abajo hacia arriba Horizontal: filas, definir sentido	Sistema cuadriculado	Dificultad en establecer un punto de origen.
Coordenadas, número, letra	Vertical: Números Horizontal: letras Se define punto de origen (ejem: D 3). La coordenada (1, A) representan punto de origen y determina el sentido.	Sistema de coordenadas	Letras son finitas. Cuadriculado muy extenso no alcanzan las letras.
Sistema cartesiano	(a,b) par ordenado, Primer número horizontal. Segundo número: vertical. El punto (0, 0) representa el punto de origen y determina el sentido.	Sistema cartesiano	Es el más abstracto, el más completo en comparación al resto.

Valentina ha elaborado una cartulina con un tablero de tamaño grande de 6x6 semejante al que aparece en la ficha, lo fija en la pizarra, para que los estudiantes se apoyen en él para explicar sus formas de jugar. En la descripción Valentina induce a que señalen cómo describen los tesoros.

El episodio 1 comienza con la intervención de Oscar; él y su compañero hacen un uso muy distinto de la tabla 6x6 de la ficha respecto a sus compañeros: la primera vez que juegan se muestran la tabla mutuamente modificando las reglas del juego que había establecido Valentina; en cambio la segunda vez juegan correctamente y utilizan un sistema de piso-ventana. Oscar, en su puesta en común, reconoce que la primera vez se han equivocado en las instrucciones del juego. Valentina aprovecha el error e induce a advertir las propiedades que tiene que cumplir un sistema de referencia, propone la analogía de comunicarse a distancia y en el diálogo recoge un comentario de un alumno para agregar un nuevo sistema que no se había mencionado en la puesta en común (letras y números) pero que sí había visto que algunos alumnos habían utilizado al jugar a adivinar el tesoro. Luego incita a que utilicen este sistema para identificar los tesoros en la tabla.

A continuación se describe e interpreta la clase según los procesos matemáticos. Para tal efecto, el episodio 1 se ha caracterizado según los indicadores de proceso de cada una de las competencias.

Episodio 1

Línea	Diálogo	Modelización	Argumentación
240	Oscar: la primera vez yo lo hice nada que ver con lo que Uds. hicieron de (…)		
241	**Valentina: de los pisos y todo eso.**		**Acotar problema**
242	[Alumno se dirige a la pizarra a explicar]		
243	Oscar: yo agarré un cuaderno y los cuadrados con Víctor. Y empezamos, hicimos una X acá (señala una celda del cuadriculado de la pizarra). Esta aquí, (respondiendo) Y hizo otra X acá (en otra celda del cuadriculado), esta ahí, No. Esta ahí, No (mostrando otra celda)	Describir uso del modelo	Situación problema
244	**Valentina: es decir que si hubieras estado por teléfono o telégrafo.**	**Inducir a establecer variables didácticas para modelar**	**Calificadores modales**
245	Oscar [no sigue a Valentina]. La segunda vez me pegué la escurría, y empezamos a …		
246	[risas]		
247	**Valentina: que te pegaste,**		
248	Oscar: (…)		
249	**Valentina: pensaste relacionaste**		
250	Oscar: eso pensé, y dije, tercer piso y cuarta ventana		
251	**Valentina: ya utilizaste el sistema de pisos y ventanas**	**Identificar características del modelo**	**Identificar datos**
252	Oscar: si		
253	**Valentina: ¿cuál fue el más efectivo para ti?**	**Inducir a determinar validez modelo**	**Inducir a justificar**
254	[risas]		

255	Oscar: la segunda	Identificar modelo	
256	**Valentina: ¿el primer sistema tuyo, cuando no hubiera funcionado jamás?**	**Inducir a determinar validez modelo**	**Inducir interpretación interna**
257	Oscar: nunca		
258	**Valentina: no, porque si hubiera estado sentado uno al lado del otro funcionaba**	**Validar características modelo** **Induce a establecer variables didácticas del modelo**	**interpretar**
259	Oscar: si pero		
260	**Valentina: pero si yo hubiera dicho, imagínate que tuvieras que hablar por teléfono. Te hubiera funcionado el sistema.**	**Variables didácticas del modelo**	**Calificadores modales** **Interpretar**
261	no…[varios]		
262	**Valentina: claro, habría estado con el teléfono aquí, y la otra persona al otro lado del teléfono, a ver qué hago.**	**interpretar modelo**	**Calificadores modales** **Interpretar**
263	Alumno: pude haber enviado mensaje de texto		responder sin argumentar
264	[mofas de los compañeros]		
265	**Valentina: mensaje de texto, podría haber enviado mensaje de texto pero tuviere que esperar una devolución, pero si en el mensaje de texto le digo que…**		**Calificadores modales**
266	Estudiante: está ahí		
267	**Valentina: [haciendo caso omiso] le digo que.. está en el 3A**	**Modificar modelo** **Caracteristicas modelo**	**Identificar datos**
268	Estudiantes: no va a entender		

269	**Valentina: ah! pero escuchen, si yo tengo esto, A, B, C, D, E, F [escribe las letras en la pizarra de formal vertical] y acá esta la persona [al lado de la pizarra] y le dice que el anillo está en el C3 y miren acá, no voy hacer todo el recuadro [dibuja un recuadro], pero la persona que está al otro lado del teléfono dice.....he , la otra persona del teléfono, miren tiene esto[Valentina escribe las letras de forma horizontal y letras en vertical, intercambiado a cuadriculado de cartulina del pizarrón]: A-B-C-D-E-F, y 1--3-4-5-6. Miren es lo mismo**	**Describir uso del modelo**	**Interpretar internamente**
270	Estudiantes: (…)		
271	**Valentina. Ya, la persona me va decir, cuales son las coordenadas del anillo.**	**Inducir aplicar el modelo**	**Inducir interpretación interna**
272	Estudiantes: C3 (…)	Aplicar el modelo	interpretar internamente
273	**Valentina: C3 [repite], ahí está en anillo.**	**Validar características modelo**	**D, valida los datos**

Análisis interpretativo de los procesos

Modelización: La actividad es una introducción al sistema cartesiano entendido como un sistema de referencia, su desarrollo se identifica con un proceso de matematización según de Lange (1987), dado que:

- Hay un problema inicial: describir un tesoro en una tabla de 6x6.
- Se elabora un modelo asociado a la situación: cada uno de los sistemas de la tabla 1 corresponde a un modelo.
- Se estudian las características de los modelos y se determinan sus limitaciones; se sigue este proceso hasta encontrar el modelo más óptimo (proceso deductivo).
- Se interpreta el modelo en la situación inicial.

Este proceso coincide con un segundo nivel, "construcción de un modelo" (Henning y Keune, 2007), y en términos de competencia, con los seis pasos expuestos por Sol et al. (2006).

En la puesta en común, Valentina tiene como propósito caracterizar el modelo óptimo, por tanto induce a que describan el modelo que cada pareja utilizó las dos veces que jugaron, y si difieren los modelos, induce a que establezcan cual es el mejor. La equivocación de Oscar al jugar la primera vez, Valentina la aprovecha para comenzar a estudiar las propiedades que tiene que tener el modelo; este proceso se identifica con la noción de variable didáctica (Brosseau,1982); la referencia a la distancia (teléfono, mensaje de texto) permite identificar cuales son las limitaciones del primer sistema utilizado por Oscar y en general las limitaciones de los modelos usados por los alumnos (piso-ventana, pasos, etc.), puesto que estos modelos no son eficientes si se envía la descripción, por ejemplo, en un mensaje de texto. En consecuencia, Valentina propone un nuevo modelo que sí cumple con estas condiciones, un sistema descrito por letras y números. Este modelo es descrito por Valentina e induce a los estudiantes a que lo prueben y validen.

Argumentación: La estructura argumentativa que sigue Valentina gira en torno a justificar la validez de los sistemas. En la puesta en común Valentina al inducir la descripción del sistema que se utilizó, y comparar los sistemas, está proponiendo que justifiquen las razones de su uso. Oscar es el sexto alumno que expone su estrategia, pero es el primero en reconocer los errores que cometió. Valentina utiliza la justificación de Oscar para promover que se determine un modelo válido bajo las condiciones modales que ahora se reconocen (distancia, teléfono, mensaje de texto). A su vez, estas analogías se identifican con interpretaciones externas puesto que evocan conceptos que son externos a la situación. Valentina a partir de estas analogías se dirige hacia una interpretación interna al proponer un sistema de número y letras, para luego inducirles a que interpreten el sistema y validarlo.

Episodio 2

Valentina incentiva a que los estudiantes apliquen el modelo que ella ha propuesto, y una vez que comprobaran con distintos puntos que el modelo funciona (cambiando de casilla los tesoros), Valentina modifica el orden de las letras y números con el propósito de estudiar otra de las características de un sistema de referencia: fijar un punto de partida.

Por medio del incentivo de Valentina, Ignacio señala la necesidad de fijar un origen (línea 304). Valentina a partir del aporte de Ignacio incita a atribuir un nombre con significado a las propiedades destacadas de un sistema; Luis nombra las coordenadas y luego Valentina incentiva a que mencionen sus características; como no hay respuestas de los alumnos, Valentina propone una modificación del modelo anterior, pasando de un sistema con una variable de letras a un sistema con dos variables numéricas. Luego hay una negociación de este nuevo modelo entre Valentina y los estudiantes.

Finalmente Valentina compara el sistema numérico con el sistema letras-números, para justificar que el sistema numérico es más eficiente. Sofía argumenta las limitaciones del sistema con letras: “el abecedario es muy corto”, razón que Valentina aprovecha para inducir a que argumenten la ventaja de un sistema numérico: “los números son infinitos”. A partir de esto Valentina incentiva una reflexión respecto al sentido de las actividades que se han desarrollado en las clases. Pedro menciona los gráficos y Valentina, si bien considera su intervención, es ella misma quien escribe en la pizarra la respuesta que esperaba (sistema de referencia). Luego Carla hace una pregunta sobre las propiedades del sistema anterior, cuyo significado se reduce a poner en un mismo eje las letras y números. Valentina devuelve la pregunta al curso y los estudiantes argumentan que no se puede.

Como el episodio es extenso se ha preferido dividir el episodio en dos subepisodios, que a continuación se describen en términos de los procesos:

Episodio 2.1

Línea	Diálogo	Modelizar	Argumentar
302	Ignacio: (…)		
303	**Valentina: qué Ignacio**		
304	Ignacio: hay que ponerse de acuerdo donde van a ponerse los números en función de las letras.	Características modelo	Interpretar datos
305	**Valentina. hay que ponerse de acuerdo**	**Validar características modelo**	**Validar interpretación**
306	Estudiantes: (…)		
307	**Valentina: ya, pero yo me puse de acuerdo también, me dijo arriba y al lado, y yo lo puse arriba y al lado.**	**Inducir a describir características modelo**	**Inducir a justificar**
308	Ignacio: no, pero por parte de las letras (…)	Características modelo	Justificar
309	Pedro: de derecha a izquierda	Características modelo	Justificar
310	**Valentina: ¿qué es lo que necesitamos entonces?**	**Inducir a describir características modelo**	**Inducir a identificar datos**
311	Estudiantes: ponerse de acuerdo,		Responder sin argumentar
312	Luis: las coordenadas	Características modelo	Identificar datos
313	**Valentina: las coordenadas ¿qué serían las coordenadas?**	**Inducir a determinar validez** **Características del modelo**	**Inducir a interpretar datos**
314	Pedro: la rosa de los vientos.		Interpretar
315	**Valentina: [no se alcanza a distinguir respecto a lo que dijo Pedro, pone como ejemplo norte y sur]**		
316	Alejandra: de donde parte la A y de donde parte el uno.	Características modelo	

317	**Valentina: de donde parte la A y de donde parte el uno. Eso es importante lo que acaba de decir. Y, entonces si yo quiero entregar una información como esta a una persona que no esta cerca mío, ¿qué tengo que establecer primero?**	**Validar características modelo** **Induce a describir características modelo**	**A, induce a identificar datos**
318	Sebastian: unas coordenadas	Características modelo	Identificar datos
319	**Valentina: unas coordenadas ¿cuáles serían las coordenadas?[señala la tabla]**		**Validar datos**
320	Estudiantes: heee		
321	**Valentina: en este caso, ¿cuáles serían las coordenadas?**	**Induce a describir características del modelo**	**Inducir a identificar datos**
322	Estudiantes: (…)		
323	**Valentina: y si yo hubiera dicho este, miren [borra las letras y escribe números] por ejemplo pongo los números [en el horizontal], y pongo acá [números en el vertical], sin tomar en cuenta lo de allá [refiriéndose al recuadro dibujado] ¿dónde está el anillo?**	**Inducir a interpretar el modelo** **Construir un modelo**	**Inducir a interpretar datos**
324	Estudiantes: en 3-4, en el 4-3.	Aplicar el modelo	Interpretar datos
325	**Valentina: a ver, en el 4-3, marca con el dedo 4 [eje vertical] y 3 [horizontal] O si yo voy de aquí [pone el dedo en el 3 del horizontal]**	**Inducir a validar características modelo**	**D, induce a interpretar datos**
326	Estudiantes: 3-4	Aplicar el modelo	Interpretar
327	**Valentina: en el 4-3, yo estaría aquí [otro sitio al anterior]**	**Inducir a validar características modelo**	**Inducir a interpretar datos**
328	Eric: no se puede de la otra manera, tiene que ser de una del lado hacia abajo.	Refutar el modelo	Refutar
329	Eric: (…) [no se escucha bien]		
330	**Valentina: ¿por qué, Eric?**		**Inducir a justificar**
331	Eric: por que el uno empieza por acá, y el (…)		justificar

332	**Valentina: pero yo establecí, el Sebastian dijo que tengo que establecer un punto de partida cierto, yo establecí éste (marca el extremos de la cartulina, que representa el 0-0) como punto de partida.**	**Características modelo**	**Interpretar datos**
333	Pedro: pero Ud., puse el uno primero abajo y después lo puso arriba, el otro	Interpretar modelo	

Análisis interpretativo de los procesos

Modelización: Ignacio caracteriza el modelo al proponer la necesidad de un punto de partida; Valentina valida la sugerencia e induce a que profundicen en esta idea, lo que lleva a que Luis sugiera llamarlas coordenadas; Valentina esta vez induce a negociar un significado de coordenadas (línea 316-37). Luego Valentina induce a que formalicen el modelo (línea 321) pero al no obtener respuesta, elabora un nuevo modelo con variables numéricas (sistema cartesiano), e induce nuevamente a que validen su aplicación a la situación.

Argumentación: Ignacio interpreta los datos al proponer un punto de partida y Valentina si bien lo valida, le induce a justificar su argumentación. Si bien Ignacio y Pedro intervienen, no es una justificación de la argumentación, por tanto Valentina propone identificar nuevos datos (línea 310), luego Luis propone las coordenadas y Valentina induce a dar un significado de las coordenadas; al no tener respuesta suficiente (línea 320) Valentina propone un nuevo sistema de referencia. Con esta acción Valentina induce a identificar, interpretar datos y justificar las argumentaciones de los estudiantes. Por tanto, Valentina usa la argumentación con el propósito de que los estudiantes evidencien que el sistema cartesiano es un sistema de referencia óptimo. A la secuencia de acciones que comienza al identificar datos (línea 310) la reconocemos como una estructura argumentativa cíclica, puesto que se cumple un proceso completo de argumentación

Episodio 2.2

Línea	Diálogo	Modelización	Argumentación
340	**Valentina: pero por qué cambié de letras a números.**	**Inducir a interpretar el modelo**	**Situación problema** **Inducir a justificar**
341	Estudiantes: porque o si no se confunde		Justificar externamente
342	**Valentina: ¿Por que yo no pude haber seguido utilizando letras? [Borra arriba la letras del recuadro], a alguien se le ocurre, yo pude haber puesto aquí [escribe las letras abajo de recuadro] A-B-C-D-E-F. porque yo me cambié abruptamente las letras y puse los números**	**Inducir a validar características modelo**	**Inducir a justificar**

343	alumnos para ocupar; porque a lo mejor es más fácil		Justificar externamente
344	**Valentina: ya, y qué pasaría por ejemplo si yo en vez de tener cuatro cuadraditos, tuviera [camina hacia atrás indicando con el dedo una extensión larga de cuadraditos]**	**Inducir a establecer validez modelo**	**Inducir a justificar** **Justificar**
345	Luis: 30		Interpretar
346	**Valentina: 30, ¿qué habría pasado con las letras?**	**Inducir a establecer validez modelo**	**Inducir a justificar**
347	Estudiantes: confusión		
348	**Valentina: ¿qué habría pasado?**	**Inducir a establecer validez modelo**	**Inducir a justificar**
349	Sofía: no se puede, porque el abecedario no es tan largo	Validar modelo	Justificar internamente
350	Valentina: que pasa con el abecedario		**A, induce a justificar**
351	Sofía: es muy corto	Validar modelo	Justificar internamente
352	**Valentina: no nos sirve para todos, habría que usar A prima, A segunda prima (...) y si resulta que si yo al escribir no soy tan ordenado y la persona no entiende que esa comita era una prima.**	**Validar modelo**	**Validar justificación**
353	Alejandra: la persona que (...)		
354	**Valentina: pero lo que dijo la Sofía es muy cierto, dijo el abecedario**		**Validar justificación**
355	Estudiantes: es muy corto		Identificar justificación
356	**Valentina: es muy corto, ¿en cambio los números?**	**Modificar modelo**	**Validar justificación** **Inducir a justificar**
357	Estudiantes: son infinitos		Justificar internamente
358	**Valentina: son infinitos, ha pero si yo me enredo, necesito establecer un sistema. Ha alguien se le ocurre para que hicimos el trabajo del lunes y a lo de hoy día. A que quiero que lleguemos**	**Inducir a identificar un modelo**	**Situación problema** **Inducir a reflexionar**
359	Pedro: gráficos	Identificar modelo	Responder sin argumentar

360	**Valentina: gráficos, ¿si?. Y ha ubicarse en**	**Inducir a identificar modelo**	**Inducir a identificar datos**
361	Estudiantes: a establecer	Identificar modelo	Identificar datos
362	**Valentina: a establecer un (...)**	**Inducir a identificar un modelo**	**Inducir a identificar datos**
363	Sofía: un punto.	Identificar modelo	Identificar datos
364	**Valentina: (escribe en la pizarra) un sistema**	**Describir características modelo**	**Identificar datos**
365	Luis: de instrucción	Identificar modelo	Identificar datos
366	Mario: coordenadas	Identificar modelo	Identificar datos
367	**Valentina: de coordenadas, donde yo pueda ubicarme, pero yo para ubicarme necesito un punto de referencia. Cuando yo tenía las letras y los números, estaba pero súper bien**	**Describir características modelo**	**Interpretar datos**
368	Estudiantes: clarísimo		
369	**Valentina: porque era más fácil encontrar**		
370	Carla: ¿qué hubiera pasado si hubiéramos encontrado los números de arriba y las letras abajo?	Variables didácticas modelos	Calificadores modales
371	**Valentina: ¿qué hubiera pasado si los números hubieran estado arriba y las letras abajo?**	**Inducir a establecer variables didácticas para modelar** **Interpretar modelo**	**Situación. problema** **Calificadores modales**
372	Estudiantes: [algunos] no se habría podido..	Interpretar modelo	Responder sin argumentar
373	**Valentina: mira, borro los números (en el recuadro) y los pongo arriba 1-2-3-4-5-6. y ahí pongo el tesoro (dibuja un punto)**	**Inducir a interpretar el modelo**	**Inducir a interpretar datos**
374	Alumnos: no se habría podido	Interpretar modelo	Interpretar datos
375	**Valentina: ¿por qué no se puede?**	**Validar características modelo**	**Inducir a justificar**
376	Alumnos: porque están en la misma línea.	Interpretar modelo	Justificar
377	**Valentina: porque están en la misma línea, están en la misma ubicación, no me sirve ahí**	**Validar características modelo**	**Validar justificación**

Análisis interpretativo de los procesos

Modelización: Si bien se ha expuesto el modelo numérico, éste aun no está validado; por tanto Valentina al comparar el sistema de letras con el numérico, en términos de modelización, induce a interpretar los dos modelos para luego inducir una validación del modelo numérico en detrimento del modelo con letras (línea 342-352). Este proceso culmina con la descripción de Valentina de las características de un sistema de referencia. La interrogante de Carla representa un paso en los niveles de modelización puesto que es esta alumna la que incentiva una reflexión sobre las propiedades de un sistema de referencia. Valentina aprovecha la iniciativa para que el resto del curso reflexione en torno a la pregunta y responda~~.~~

Argumentación: Valentina induce al grupo a que justifique el cambio a un sistema numérico; los razonamientos de los estudiantes no se respaldan en los datos, y Valentina inicia por su parte una justificación que logra que Sofía justifique en términos del sistema, es decir, utilizando los datos. Valentina valida y completa la justificación de Sofía argumentando que los números son infinitos. La reflexión que Valentina incentiva (línea 358), en términos de la estructura argumentativa, induce a una reflexión que se deriva a plantear una situación problema. Pero, al no obtener una respuesta satisfactoria, Valentina induce a identificar datos; nuevamente no obtiene una respuesta satisfactoria e introduce ella misma los datos al escribir en la pizarra "sistema", palabra que sirve de apoyo para que Mario complete la frase al decir "coordenadas". A continuación, Valentina interpreta los datos al describir las características de un sistema (línea 367). La interrogante de Carla, en términos de la estructura argumentativa, corresponde a un calificador modal, es decir una condición que regula cómo seguir con el proceso argumentativo. Valentina transforma esta condición en una situación problema y, si bien los alumnos responden satisfactoriamente (línea 372), no justifican la afirmación, por lo que Valentina induce a interpretar los datos para que ahora sí justifiquen, y lo consigue al obtener como respuesta de varios alumnos una justificación (línea 376).

Episodio 3

A partir de la propuesta de Pedro, situar cuatro ejes de coordenadas, Valentina induce a los estudiantes a que respondan ellos mismos; para tal efecto, Valentina ubica los cuatro ejes e incita a que intenten identificar un punto, incentivo que produce confusión y ambigüedad en el alumnado. Valentina induce a que establezcan que un sistema de coordenadas se fija con dos ejes, y no cuatro. Sofía desvía la discusión sugiriendo un sistema parecido al sistema "arriba -abajo", señalado en el cuadro 4.2.2; Valentina en conjunto con el grupo negocia que el sistema propuesto por Sofía tiene el inconveniente de no contar con un punto de partida. Valentina no solo identifica esta desventaja, sino que también aporta criterios para caracterizar un sistema de referencia; como respuesta se produce la intervención de Ignacio que sugiere establecer una regla, y con aprobación de Valentina, Ignacio describe la regla para definir un sistema con números, (que vendría a ser un sistema cartesiano). Valentina propone a Carolina que valide este sistema, pero a continuación surge una nueva intervención de Oscar que pregunta si los números romanos son infinitos; la interrogante incentiva una nueva discusión ya que el sistema numérico romano cumple con las propiedades que hasta ahora se habían identificado en la clase: punto de partida, y poder escribir cualquier número. Luego Valentina reflexiona un instante y negocia con el curso que los números romanos tienen el inconveniente que en números grandes se usa una extensión larga de letras, en cambio el sistema de numeración decimal (al ser posicional) utiliza una menor cantidad de símbolos (línea 412). Esta comparación permite justificar la predominancia de un sistema de coordenadas con numeración decimal en comparación con otros sistemas. Valentina continúa induciendo al curso a que valide el sistema propuesto por Ignacio, pero es ella quien finalmente termina validándolo (línea 423). Luego María agrega una nueva regla, "poner nombre a la fila, L1, o L2", Valentina promueve probar esta nueva regla proponiendo al curso que construya un sistema con números y negocia con ellos la manera de situar las variables en los ejes, L1 corresponde al eje horizontal y L2 al vertical. La clase prosigue con Valentina induciendo a que apliquen el sistema numérico, por medio de una corta actividad en que los alumnos tienen que leer los puntos usando el sistema establecido.

Análogamente a los otros episodios, este episodio se ha subdivido en cuatro subepisodios, los que se describirán en términos de las dos competencias.

Subepisodio 3.1

Línea	Diálogo	Modelización	Argumentación
378	Pedro: tía, tía, ¿qué hubiera pasado si por ejemplo si en las cuatro lados se ponen letras o números?	Establecer variables didáctica para modelar Interpretar modelo	Calificadores modales
379	**Valentina: que hubiera pasado si pongo en todos lo lados**	**Induce a establecer variables didáctica para modelar** **Interpretar modelo**	**Calificadores modales**
380	[Se discute como poner las letras y números, proponiendo las letras y números contiguos, una de cada lado, total cuatro]	Interpretar el modelo	Identificar datos
381	**Valentina: a ver díganme ese punto en cual está**	**Induce a aplicar el modelo**	**Inducir a interpretación interna**
382	Estudiantes: [confusión por que se puede decir de muchas maneras distintas]. D4; C4 (…)	Validar (refutar) características del modelo	Interpretar internamente
383	Alejandra: hay muchas maneras, tía (4-4), nombran varias	Validar (refutar) características del modelo	Interpreter internamente
384	**Valentina: entonces, me sirve tener cuatro referencias.**	**Inducir a validar características modelo**	**Inducir a justificar**

385	Estudiantes: No!!!!!	Validar (refuta) características del modelo	responder sin argumentar
386	Sofía: por ejemplo, si yo no pusiera todas estas letras y números, si no que pusiera una punto de referencia como lo hicimos la otra vez. Que hicimos como palmeras, cosas así, y si le decía que empezara de la casa, y que diera pasos.	Interpretar modelo	justificar externamente
387	**Valentina: Ya, cual es el problema con ese sistema? ¿A ver a quien se le ocurre?**	**Inducir a validar características modelo**	**Inducir a justificar (refutar)**
388	Estudiantes: no hay punto de referencia.	validar (refutar) características modelo	Refutar
389	**Valentina: claro, porque resulta que si yo tengo las mismas hojas al lado, pudiera hacerlo, pero si yo por ejemplo me quisiera comunicar con alguien de otro lado, por teléfono, digo yo. Dibuja un cuadriculado que haya 10 cuadritos y 10 cuadritos. ¿Lo podría hacer la otra persona?**	**Validar (refutar) características del modelo**	**Justificar (refutar)**
390	Estudiantes: si, no [confusion]		
391	**Valentina: en una hoja de cuaderno**		
392	Pedro: si tiene papel y lápiz si.		
393	**Valentina: si tiene papel y lápiz lo puede hacer, y que es más fácil, en vez de decir, sabes encuentra el cuadradito para dibujar una palmera. ¿qué sería más fácil decirle?**	**Validar (refutar) características del modelo**	**Validar (refutar) justificación**
394	Arturo: la rosa de los vientos	Identificar modelo	Responder sin argumentar

Análisis interpretativo de los procesos

Modelización: Existen dos ciclos de modelización en el subepisodio. El primer ciclo se desarrolla a partir de la intervención de Pedro: su pregunta sobre la posición de las variables, en términos del modelo, significa establecer variables didácticas para modelar; Valentina expone estas variables didácticas y en conjunto con el curso describe las características del modelo e induce a aplicarlo. Como resultado hay una confusión en la lectura de un punto en el modelo, por tanto se refuta las características de este modelo.

Un segundo ciclo comienza con la intervención de Sofía al proponer un sistema alternativo (sistema arriba-abajo**);** Valentina induce a refutar las características de su propuesta, varios alumnos lo refutan al indicar que no hay punto de referencia, argumento que Valentina completa, y es ella quien finalmente termina refutando las características del modelo.

Argumentación: Pedro plantea una situación problema al sugerir indagar la posición de las variables en los sistemas de referencia; Valentina recoge la propuesta y la expone al curso, para luego en conjunto con el grupo identificar los datos (situar los ejes). Luego induce a interpretar los datos, los alumnos al interpretar se confunden y Valentina les induce a justificar la razón de la confusión. Sofía responde con una justificación externa que Valentina induce a refutar, algunos alumnos refutan con el argumento de que el sistema de arriba- abajo sugerido por Sofía no cuenta con punto de referencia. A continuación Valentina completa la refutación en conjunto con el curso. Es importante destacar que es ella, con ayuda de los alumnos, la que finalmente refuta el sistema de Sofía, ya que en este caso no induce a los alumnos a que sean ellos mismos los que terminan refutando el sistema.

Subepisodio 3.2

Línea	Diálogo	Modelización	Argumentación
395	**Valentina: dejen que el Ignacio va hablar.**	**Validar (refutar) el modelo**	
396	Ignacio: podríamos establecer una regla así por ejemplo.	Características del modelo	Identificar datos
397	**Valentina: a ver escuchen esto que está diciendo su compañero es súper importante, ya vamos a usar los números; y, si usamos los números que vamos hacer.**	**Validar características del modelo**	**Validar datos**
398	Ignacio: establecer una regla	Características del modelo	Identificar datos
399	**Valentina: establecer una regla. [Valentina escribe en la pizarra]**	**Validar características del modelo**	**Validar datos**
400	Ignacio: por ejemplo, si nosotros decimos que el tesoro está en el (4,3) (…) Si partimos para abajo, el primer numero va a ser el de abajo, decimos tres y cuatro. Entones tomamos el número de abajo que va a ser el primero y tomamos el de arriba que va hacer el segundo.	Describir Características del modelo	Justificar
401	**Valentina: yo lo podría tomar así, (escribe en la pizarra (3,4), ¿así?**	**Características del modelo**	**Inducir a justificar**
402	Ignacio: y el primero va a ser el de la línea de abajo.	Describir Características del modelo	Justificar
403	**Valentina: y el primero va a ser el de la**	**Características del**	**Inducir a justificar**

	línea de abajo.	**modelo**	
404	Ignacio: siempre, el primero va a tener que ser el de la línea de abajo.	Describir Características del modelo	Justificar
405	**Valentina: Carolina, que opinas tú de esa regla que dice el Ignacio.**	**Inducir a validar características modelo**	**Inducir a validar**
406	CORTE		
407	**Valentina: [escribe puntos de referencia] y, los puntos de referencia que establecimos aquí (...)**	**Inducir a validar características modelo**	
408	Oscar: tía, los números romanos también son infinito, cierto	Identificar características de un modelo	Identificar datos
409	**Valentina: No tienen [duda]. Se podrían escribir hasta el infinito, ¿pero tu has visto números romanos muy largos? [escribe un número extenso en notación de números romanos, 388]**	**Validar (refutar) características modelo**	**Inducir a identificar datos**
410	Alumnos: 380... 388, 389!	Interpretar el modelo	Identificar datos
411	**Valentina: si utilizamos un sistemas de referencia como lo ponemos [no se escucha bien, pero ella indica con el dedo que por la cantidad de letras que conforma un número romano, no es pertinente ponerlas en un eje]**	**Validar (refutar) características modelo**	**Validar datos (Refutar)**
412	**Valentina: la gracia del sistema decimal es que utiliza poquitos símbolos.**	**Validar características modelo**	**Validar datos**
413	Estudiantes: (…) [no es escucha bien]		
414	**Valentina: ¿cuáles son los símbolos que utiliza el sistema decimal, a ver que dígitos utiliza? ¿Qué dígitos utiliza? el 0, el 1...9.**	**Inducir a describir características modelo**	**Identificar datos**
415	Estudiantes: 0,1…9	Características modelo	Identificar datos
416	**Valentina: con estos dígitos yo puedo armar.**	**Inducir a describir características modelo**	**Inducir a identifcar datos**
417	Ignacio: cualquier número.	Características modelo	Identificar datos

418	**Valentina: cualquier número, y acá en los números romanos después tengo que establecer otro símbolo que, vieron en séptimo [curso anterior], cuando voy a escribir los miles que escribo una rayita arriba, entonces en realidad, este sistema utiliza, el sistema decimal, perdón el romano para nosotros no es muy apropiado porque el sistema nuestro decimal utiliza poquitos dígitos. Con eso puedo armar todos los números y es conocido por todos.**	**Validar (refutar) características modelo**	**Validar datos (Refutar)**

Análisis interpretativo de los procesos

Modelización: Un primer ciclo surge de la discusión que genera la refutación del modelo anterior propuesto por Sofía. Ignacio sugiere definir unas características para modelar (establecer una regla), Valentina le incentiva a definirlas e Ignacio describe las características de un modelo numérico. Valentina sigue la descripción y una vez completada induce a Carolina a validar las características de este modelo. Pero a continuación surge una nueva intervención de Oscar, refiriéndose a los números romanos.

Un segundo ciclo se desarrolla en la discusión de un modelo con números romanos. Ignacio identifica las características del modelo numérico-romano y Valentina desarrolla una refutación de estas características comparando con el modelo numérico-decimal, como consecuencia induce a describir y a validar las características de un modelo numérico- decimal.

Argumentación: A partir de la discusión del episodio anterior Ignacio identifica datos que Valentina valida inmediatamente; y sin que ella lo sugiera, Ignacio justifica sus argumentación. Valentina le incentiva a que siga con su razonamiento mediante ejemplos. Una vez que Ignacio expusiera la justificación completa, Valentina induce a Carolina a que valide el argumento de Ignacio, pero es interrumpida por la intervención de Oscar sobre la infinitud del sistema romano, lo que da lugar a una nueva estructura argumentativa.

Oscar con su pregunta identifica nuevos datos para el estudio del problema; Valentina induce a identificar estos datos -sistema romano- y luego da las razones de no ser un sistema eficiente y se apoya en esta argumentación para inducir la validez de un sistema decimal, pero es ella finalmente la que termina refutando el sistema porque el sistema decimal es eficaz en la tarea de situar, leer e interpretar un punto en un plano.

Subepisodio 3.3

Línea	Diálogo	Modelización	Argumentación

419	**Valentina: volviendo al sistema de coordenadas, tengo puntos de referencia y lo que me faltaba era (…)**	**Inducir a describir características modelo**	**Inducir a identificar datos**
420	Estudiantes: establecer una regla	Características del modelo	Identificar datos
421	**Valentina: ¿a quien se le ocurrió esta idea de establecer una regla**	**Inducir a validar características modelo**	**Validar datos**
422	Arturo: al Ignacio		Identificar datos
423	**Valentina: y algunos creen que es una buena idea, yo creo que es una muy buena idea. ¿Y cuál es la regla que quería establecer el Ignacio?**	**Validar características modelo**	**Validar datos**
424	Alfredo: también se le puede poner nombre a la fila, L1 o el L2.	Características del modelo	Identificar datos
425	**Valentina: también puede ser, lo podría poner, ha, ¿cómo en geometría?,**	**Validar características modelo**	**Validar datos**
426	Alfredo: si		Responder sin argumentar
427	**Valentina: podría ser que ésta es L1 y que ésta es L2 (indica nombre en cada eje).**	**Características del modelo**	**Interpretar internamente**
428	Estudiantes: ha, °		
429	**Valentina: mira que buena idea puedo decir L1 3.**	**Características del modelo**	**Interpretar internamente**
430	alumnos:°		
431	**Valentina: vamos a ver si son capaces de llevarla a la práctica.**	**Inducir a construir el modelo**	**Inducir a interpretar**
432	Estudinates (...) [no se escucha bien]		
433	**Valentina: en una hoja de cuaderno cuadriculado cualquiera (…) [se ponen de acuerdo en el tamaño de la hoja] voy a establecer números, [hace un esbozo de un cuaderno) pero ahí, donde se unen, no al medio. Voy a poner 0-1-2.**	**Inducir a construir el modelo**	**Inducir a interpretar**
434	**Valentina: [repite instrucciones generales]**	**Inducir a construir el modelo**	**Inducir a interpretar**
435	**Valentina: donde tú quieras dibujas una línea...**	**Inducir a construir el modelo**	**Calificadores modales**

436	[Omisión, parte en que el observador habla con los alumnos, transcripción sigue con Valentina]		
437	**Valentina: Miren acá, si este fuera mi cuaderno de matemáticas, yo les pedí que ahí pongan 0, justo ahí en ese puntito 1, acá 2, 3, 4, y van a seguir al (…) no más. y para arriba este puntito ya es 0, por lo tanto**	**Inducir a construir el modelo**	**Inducir a interpretar**
438	Estudiantes: 1, 2, 3, 4, 5..	Características del modelo	Interpretar
439	**Valentina: miren, ¿cuál es la regla que vamos a establecer?**	**Inducir a aplicar el modelo**	**Inducir a interpretar**
440	Estudiantes; L1 y L2	Características del modelo	Interpretar internamente
441	**Valentina: L1, ¿cual es L1?**	**Inducir a construir el modelo**	**Inducir a interpretar internamente in**
442	Estudiantes: la de abajo	Características del modelo	Interpretar internamente
443	**Valentina: ya escúchenme, yo les voy a decir, quiero que en L1 vayan al punto 10 y L2 vayan al punto 5, y donde se junte quiero que (...)**	**Inducir a aplicar el modelo**	**Inducir a interpretar internamente**

Análisis interpretativo de los procesos

Modelización: Este ciclo comienza con la acción de Valentina que induce a describir las características del modelo, que en el episodio 2.2 se señaló como sistema de coordenadas. Ella retoma la sugerencia de establecer una regla e induce a validar las características del modelo, pero es ella misma que termina validándola. María propone desarrollar más las características del modelo al sugerir nombre para las variables, Valentina valida la propuesta**,** las desarrolla y una vez definidas induce a construir el modelo. El proceso de construcción requiere su tiempo ya que los alumnos elaboran un sistema de coordenadas situando las variables L1 y L2, y una vez elaborado, Valentina induce aplicarlo proponiendo ubicar puntos en el modelo.

Argumentación: En términos de la estructura argumentativa, la acción de Valentina de retomar la sugerencia de Ignacio se interpreta como inducir a identificar datos; los alumnos identifican estos datos (línea 420), para luego Valentina validarlos e inducir a que describan las reglas propuestas. A partir de esta acción, María propone más datos, (nombrar las variables), Valentina valida agregar estos datos y hasta que termina el episodio, Valentina induce a interpretar el uso de las variables.

Subepisodio 3.4

Línea	Diálogo	Modelización	Argumentación
444	**[Valentina se pasea por la clase evaluando como los alumnos dibujan el punto]**	**Inducir a construir el modelo**	**Identificar datos**
445	Estudiantes: ¿tia está bien?	Validar el modelo	
446	**Valentina: está listo, ahora vayan al punto L1 17**	**Valida modelo** **Induce a aplicar el modelo**	**Validar datos**
447	**Valentina: ya ahora voy a esconder el tesoro y uds tienen que encontrarlo**	**Inducir a aplicar el modelo**	**Inducir a interpretar internamente**
448	**[Tocan el timbre para salir de clase]**		
449	**Valentina: ah! lo perdieron**		
450	Estudiantes: haaaa, [quejas]		
451	**Valentina: [incentiva a jugar, pese a que ya se acabó la clase] cada persona tiene una oportunidad**	**Inducir a aplicar el modelo**	**Inducir a interpretar internamente**
452	**[Juegan y los alumnos van diciendo las coordenadas L1 11, L2 10; Valentina responde si ha encontrado el tesoro]**	**Inducir a aplicar el modelo**	**Inducir a interpretación interna**
	TÉRMINO DE CLASE		

Análisis interpretativo de los procesos

Modelización: En este subepisodio ya no se dan los ciclos de modelización evidenciados en los subepisodios anteriores, puesto que en el subepisodio 3.3 se validó el modelo numérico. Por tanto en este subepisodio, Valentina se enfoca a inducir a los alumnos a construir el modelo y aplicarlo.

Argumentación: La estructura argumentativa continúa del subepisodio anterior y se fija en la interpretación de los datos, pero no pasa a la siguiente fase de justificar, ya que Valentina no induce a justificar la construcción del sistema. La razón es que en el subepiodio anterior los estudiantes ya habían justificado la aplicación de este modelo. Y por tanto ahora quedaba aplicar el sistema, que requiere fijarse en los datos e interpretarlos.

Síntesis del análisis de los episodios 1, 2, 3.

Del análisis descriptivo interpretativo de cada uno de los tres episodios, han surgido aspectos que son relevantes en las competencias; en este subapartado se sistem**atizan** estos aspectos en cada competencia.

Modelización: Antes de haber iniciado el análisis del primer episodio, señalamos que la actividad de la ficha potenciaba un proceso de modelización, focalizado en identificar un modelo y construirlo. Efectivamente se ha estimulado y desarrollado este proceso en la clase ; si se observa la clase como un gran ciclo, el episodio 1 se focaliza en identificar un modelo, en el episodio 2 y parte del 3, se estudian varios modelos para validar o refutar sus características, hasta que en el subepisodio 3.3 y 3.4, se construye y aplica el modelo. Por tanto, según Henning y Keune (2007) la actividad se constata en un nivel 2.

Argumentación: La estructura argumentativa que se da en la clase de Valentina corresponde a una estructura argumentativa de Toulmin. En cada discusión de un sistema, se identifican los datos (variables), luego se interpreta el sistema para determinar si es válido, y en esa secuencia, Valentina induce tanto a justificar un modelo escogido, como a refutarlo.

El proceso de discusión y construcción del sistema numérico no completa el ciclo de estructura argumentativa que se dio en la discusión de los otros sistemas. Valentina valida el sistema e inmediatamente lo construye y aplica, sin dar pie a justificar si funciona. Pero por otra parte, hay que agregar que en el transcurso de la construcción del modelo, ya se habían justificado las propiedades que debe tener un sistema de referencia, y por tanto, el sistema numérico ya se había negociado como el más eficiente. En consecuencia, si bien no se siguió el ciclo de manera lineal, se desarrollaron las partes fundamentales de la estructura argumentativa: identificar, interpretar y justificar.

4.2.2.2. Análisis de tareas en la clase.

En este subapartado se caracteriza el desarrollo de la clase respecto a la clasificación de tarea matemática que se ha descrito anteriormente en el apartado 4.1.1.

En el cuadro 4.2.3, extracto del cuadro 4.1.1. se organizan las características de las tareas que se espera desarrollar, se expone, además de la ficha 3, las fichas 1 y 2 para ilustrar las tareas que se han desarrollado de antemano, y así dar más continuidad a las tareas de la ficha 3.

Cuadro 4.2.3: Análisis de tarea matemática (ficha 1- 3)

Tarea matemática	Acción	Variable	Estrategia	Lenguaje
Ficha 1 Describir la posición de puntos en el plano.	Lectura: Identificar puntos Escalas: ubicación de puntos	Descripción de una variable implícitamente (piso y ventana) No se identifican las variables.	<u>Rutinario</u> Lectura	Natural. Se sostiene en la representación
Ficha 2 Describir un objeto	Lectura: Identificar puntos	Utilizar los puntos cardinales como	<u>No rutinario</u> Utilizar los puntos	Expresarse de manera precisa

en el plano utilizando al menos un sistema de referencia	en el plano Escalas: Utilizar un sistema de referencia	sistema de referencia. No se identifican las variables	cardinales para describir movimiento	Se sostiene en la representación (mapa y sus símbolos) y en los puntos cardinales
Ficha 3 Construir un sistema de referencia Comprender que el sistema cartesiano es uno los modelos más eficaces para identificar puntos en el plano	Lectura: Descripción de los tesoros equivale a un identificar un punto en el plano	Construir un sistema de referencia, elegir variables, implícitamente. No se identifican las variables	No rutinario Construir un sistema de referencia	Natural: Los estudiantes deberían ponerse de acuerdo para utilizar un sistema común, con unas reglas definidas. Por lo tanto se expresan con el lenguaje propio del sistema construido. Se sostiene en el sistema construido

Considerando como base la ficha 3, describiremos de qué manera se desarrolla cada uno estos indicadores en los tres episodios descritos.

Tarea matemática: Antes del primer episodio se desarrolla la tarea “construir un sistema de referencia”, los alumnos exponen los sistemas que utilizaron para encontrar el tesoro y Valentina induce a discutir las ventajas y desventajas. El episodio 1 comienza con la presentación de Oscar: de la discusión de su sistema se profundiza en las propiedades que tiene que tener un sistema de referencia, discusión que da pie para ir desarrollando la segunda tarea.

El episodio 2 se focaliza en discutir las ventajas y limitaciones de un sistema de referencia. Se propone y discute la validez de algunos sistemas; estas propuestas se van asemejando al sistema cartesiano. Por tanto la segunda tarea, comprender el sistema cartesiano, se está desarrollando.

El episodio 3 se centra en discutir la validez de un sistema numérico. Una vez negociado que un sistema numérico-decimal es el más indicado, se procede a construirlo y aplicarlo. Valentina en ningún momento lo nombra como sistema cartesiano (considerada tarea para la siguiente clase), pero logra que surjan sus características a partir de una situación; por tanto se logra desarrollar y cumplir con la segunda tarea, comprender que el sistema cartesiano es uno de los modelos más eficientes para identificar puntos en el plano.

En definitiva las dos tareas esperadas se desarrollan en la clase.

Acciones: Las acciones que Valentina induce en la clase son:

- Lectura: identificar puntos en el plano (descripción de los tesoros equivale a un identificar un punto en el plano)
- Escalas: utilizar un sistema de referencia

Las acciones son una síntesis de las que se desarrollaban en las dos clases anteriores. Tanto el trabajo con la *Lectura* como con la *Escala* se desarrolló según lo propuesta.

Variables: En el comienzo de la clase en la discusión de los sistemas de referencia, Valentina hace que los estudiantes describan los sistemas que han creado, e identifica de una manera implícita las variables implicadas: Piso-ventana, columnas-filas, pasos. Del mismo modo, en la propuesta de un alumno de nombrar con L1 y L2 a los ejes, se pone de manifiesto que los alumnos le están atribuyendo un significado a la noción de variable, aunque aun formalmente no lo conozcan. Por tanto se desarrollan las variables tal como se esperaba.

Estrategia: Prácticamente en toda la clase, las estrategias que se desarrollan en la actividad son *no rutinarias*: en la descripción de los sistemas, en su discusión y validación del sistema numérico. Solamente al final de la clase cuando Valentina propone construir el sistema numérico, se procede de una manera rutinaria. Por tanto se logra lo esperado.

Lenguaje: Respecto al uso del lenguaje se produce un constante cambio de un lenguaje natural hacia uno formal. En un comienzo las parejas se pusieron de acuerdo para utilizar un sistema común, con unas reglas definidas propias y eran ellos los que definían el lenguaje. Pero luego se negocia un sistema común para todo el curso, el lenguaje es consensuado con unas reglas establecidas, y por tanto los estudiantes comienzan a expresarse de una manera más formal.

Respecto a la segunda característica del lenguaje (ver apartado 3.4.1. de metodología), las características de los sistemas de referencia se nombran con términos que surgen de la manipulación y discusión de los sistemas (punto de partida, coordenadas, decimales), por tanto el lenguaje se sostiene a partir de los sistemas construidos.

4.2.2.3. Relación entre las acciones de aula y los niveles de complejidad.

En este apartado se relaciona el análisis de la clase 1 con los niveles de complejidad de la ficha 3. El cuadro 4.2.4 es el extracto del cuadro 4.1.2 de la ficha 3.

Cuadro 4.2.4: Nivel de competencias matemáticos en Ficha 3

Tarea matemática	Modelización	Argumentación
Ficha 3 Construir un sistema de referencia Comprender que el sistema cartesiano es uno los modelos más eficaces para identificar puntos en el plano	**Nivel 3:** Se espera que los estudiantes construyan un sistema óptimo de referencia, que identifique sus propiedades, y lo utilicen para abordar la situación (búsqueda del tesoro)	**Nivel 3:** Uno de los propósitos es que a partir del escenario de juego, en la interacción en parejas surja un sistema de referencia común, probablemente un sistema similar al cartesiano, en que los estudiantes logren *evidenciar* cuales son las propiedades de un sistema de referencia, y en particular que el sistema cartesiano es uno de los modelos más eficaces para identificar puntos en el plano.

El cuadro 4.2.4 ilustra lo que se puede esperar en un nivel 3 de complejidad de cada competencia. En cada celda se justifican las razones de que cada competencia se sitúa en el nivel 3, resumidas en los siguientes puntos.

- La modelización se clasifica en el nivel 3 porque se espera que sean capaces de abordar la situación problemática de tal manera que construyan un sistema de referencia.
- La argumentación se clasifica en un nivel 3 porque se espera que los estudiantes evidencien las propiedades que tiene un sistema de referencia. A su vez evidenciar que el sistema cartesiano es el modelo óptimo para identificar puntos en el plano

Acciones de aula

Este subapartado describe de qué manera se han descrito los niveles de complejidad luego de la aplicación de la unidad didáctica.

Se ha organizado a partir de cinco preguntas que son desarrolladas.

a) ¿Existe una relación de inclusión entre los niveles de complejidad?

b) ¿Los niveles de complejidad que se esperan en los estudiantes se han logrado?

c) ¿Cuáles son las acciones de la profesora que fomentan estos niveles? ¿Qué otros factores inciden?

d) En el caso de no alcanzar los niveles esperados, ¿hay acciones de Valentina que no incentiven potenciar estos niveles? ¿qué otros factores inciden?

e) ¿Qué relación hay entre las características de las tareas con los niveles de complejidad?

A continuación se responde a cada una de las preguntas.

a) En la matriz de competencia se ha caracterizado la unidad didáctica en términos de los niveles de complejidad. La construcción de la tabla se ha basado en la pirámide de de Lange (1995), (posteriormente adaptado en Pisa 2003) que permite estructurar la construcción de ítems. La pirámide cruza tres parámetros a considerar: (1) las áreas curriculares de la matemática (estadística, álgebra, número, geometría); (2) tres niveles de complejidad (reproducción, conexión, reflexión); y (3), el grado de dificultad que le representa a un estudiante (fácil-difícil). La matriz de competencia considera los dos primeros parámetros, las tareas matemáticas representan el contenido curricular, y los niveles de 1 al 5 corresponden a una adaptación más detallada de los niveles de complejidad. El grado de dificultad de la tarea no está considerado y se deja abierta la posibilidad de que una tarea de cierto nivel pueda tener más o menos dificultad en su resolución.

Una vez recordada la manera en que se ha construido la matriz de competencia se puede abordar con mayor claridad la relación de inclusión entre los niveles. Estos se han construido sobre niveles de complejidad que no son inclusivos. En el estudio PISA, las tareas de un nivel de complejidad de conexión no implican que se sepa resolver las tareas de un nivel inferior de reproducción, ya que esto depende del grado de dificultad (ya se ha explicado que no entra en este parámetro). En la unidad didáctica, la ficha 3 se sitúa en un nivel 3, y por tanto esto no significa que si un alumno es capaz de resolver todas las tareas de este nivel, pueda resolver todas las tareas de un nivel anterior. Pero este argumento no se valida en esta ficha, puesto que en los tres procesos sí hay inclusión desde la ficha 1 hasta la 3, puesto de manifiesto en las tareas en relación al sistema de referencia. Por ejemplo en modelización, el primer nivel es identificar sistemas (ficha 1), el segundo nivel ya es explorar las propiedades en un sistema (ficha 2), y el nivel tres y último es construir el sistema (ficha 3). Más adelante veremos en el análisis de otros episodios que esta inclusión no se evidencia.

b) Para determinar hasta qué punto se lograron los niveles de complejidad, se describe el nivel de logro respecto a cada una de las dos competencias.

Respecto a la competencia de modelización, por las acciones de Valentina descritas de antemano, se logra negociar un modelo único y eficaz, el cual se valida, en el cierre de la clase[1]. En algunos episodios se describen las fases de modelización en términos de "ciclos de modelización", y es a través de estos ciclos en que se observa cómo va emergiendo un modelo eficiente y único que responde íntegramente a la tarea matemática. En el apartado 4.6 donde se estudia el rol del profesor, se analizan en profundidad los ciclos. En consecuencia, se logra el nivel 3 esperado.

Respecto a la competencia de argumentación, también se logra el nivel 3, dado que los estudiantes consiguen evidenciar un sistema de referencia óptimo. En el análisis de los episodios se observa que los estudiantes establecen reglas para un sistema, tales como: determinar un punto de origen, dos variables cuyo dominio sea infinito (números) y sea comunicable mediante símbolos o verbalmente

Por tanto, podemos afirmar que la actividad se ha desarrollado tal como se esperaba, lo que permite obtener dos implicaciones. Por una parte que lo esperado en el cuadro 4.2.3 se cumple, y por otra parte que lo esperado *a priori* efectivamente se desarrolla en el aula. Estas dos implicaciones son contribuciones para la validez del cuadro 4.2.3, y también significa un aspecto de la validez del modelo de competencia.

c) Para desarrollar esta pregunta, señalamos acciones de Valentina observadas en los episodios que de alguna manera promueven las competencias. No es propósito de este apartado profundizar en estas acciones puesto que significaría centrarse en la gestión de Valentina y por tanto solamente nos limitamos a indicarlas.

- La gestión de aula de Valentina en relación a las normas del aula de matemáticas son idóneas: los estudiantes desarrollan el papel de aprendices, Valentina ejerce de profesora y por lo general la respetan; por tanto en la clase no se observan conductas que interfieran en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Si bien hay alumnos inquietos, forman parte de la normalidad de aula y Valentina los conduce con tranquilidad.

- Valentina potencia dos estrategias: en una primera instancia hace que los alumnos realicen la actividad y luego la compartan con el curso; ella en ese momento juega un rol de acompañante del proceso de aprendizaje; pero una vez que ya varios grupos han presentado, ella da pie para una segunda instancia en que conduce la clase, utiliza una estrategia de

[1] **Cierre de clase**: se utiliza **el** término de las Teoría de Situaciones Didácticas impulsada por Brousseau, en ocasiones se hacer referencias a ellas dado que es un marco que permite describir a qué "momento" de la clase se hace referencia. No obstante, no es propósito de la investigación indagar en la teoría de situaciones.

"pregunta respuesta" y eso en gran medida influye en controlar la clase y conducir la problemática a los puntos que a ella le interesa.

- Valentina generalmente profundiza en las respuestas de los estudiantes, incluso las incorrectas, lo que permite profundizar en las concepciones de los estudiantes; esto se observa claramente en el comienzo del episodio 1, en que a partir del error de Oscar se negocian algunas reglas de un sistema de referencia.
- Valentina continuamente les dice a los estudiantes que justifiquen cuando exponen sus apreciaciones sobre un sistema. Si bien es una práctica que en los episodios se ha descrito que cuesta a los estudiantes, Valentina logra que justifiquen sus argumentaciones, implicando que o bien refuten o validen un sistema de referencia, o que cambien de un sistema a otro más óptimo.

Otro factor que incide en el desarrollo de competencias es el alto grado de participación de los estudiantes. Creemos que las normas de la clase que ya anteriormente estaban establecidas, incitan a que los estudiantes expresen sus ideas espontáneas, incluso siendo incorrectas.

d) Los niveles han sido todos alcanzados, en consecuencia no se desarrolla esta pregunta.

La pregunta e) es las más compleja de las cinco porque requiere un análisis más en profundidad, por tanto se ha optado por desarrollarla como un subapartado.

Características de las tareas

En el apartado 4.2.2.2 se ha descrito qué características de las tareas matemáticas se han desarrollado y las que no. En este subapartado se arguye de qué manera se relacionan las características de una tarea con los niveles de complejidad.

Para tal propósito, se rescata el extracto de la matriz de competencia (cuadro 3.4.4) relacionado con las tareas que se desarrollan en la ficha 3 y las respectivas competencias para el nivel 3. Éstas se han sistematizado en el cuadro 4.2.5; dicho instrumento aun no se ha aplicado a la unidad didáctica y por tanto las características de la tarea y las competencias son descritas en términos generales.

Cuadro 4.2.5: características de las tareas matemáticas y las competencias (nivel 3)

Características	Tareas	Modelización	Argumentación
Acción: Escalas: Construir sistema cartesiano *Situación:* Familiar *Estrategia:* no rutinaria *Lenguaje*: expresarse en lenguaje natural con referencia a elementos del modelo.	Construir un sistema de referencias Comprender que el sistema cartesiano es uno los modelos más eficaces para identificar puntos en el plano en comparación a otros. Identificar las unidades en cada uno de los ejes de coordenadas para graficar el fenómeno estudiado. (construcción)	Ser capaz de hacer formulaciones matemáticas de la situación problemática dentro del modelo Construir un sistema de referencia Explorar el modelo: Propiedades	Evidenciar propiedades de un sistema de referencia Evidenciar si el sistema cartesiano es un modelo eficiente para identificar puntos

En el cuadro 4.2.5, las características de las tareas directamente relacionadas están identificadas en términos de *escalas* (construir un sistema cartesiano), hay dos tareas directamente implicadas -construir un sistema de referencias, comprender que el sistema cartesiano es el más eficaz- y una tercera tarea implicada indirectamente que hace referencia a la lectura de puntos.

La situación, si bien resulta familiar para los estudiantes, la estrategia para construir el sistema cartesiano no es rutinaria. En efecto se han señalado en el cuadro 4.2.2 seis sistemas distintos que han emergido de la diversidad de estrategias que aparecen en la actividad. Dichas características de las tareas - construcción de sistema cartesiano, por medio de una situación familiar con estrategias no rutinarias- son la base para postular un nivel 3, que como se ha visto en este apartado se ha alcanzado.

4.2.3 Análisis Clase 5

En este apartado se analiza la quinta y última clase observada de Valentina; en las clases anteriores se ha ido profundizando en el trabajo con gráficos. En esta clase se aplica el *material 4*. Las características principales de la ficha es que el contexto de la actividad no es familiar y la interpretación no es única ya que depende de la intencionalidad que se pretenda atribuir a los datos, con el propósito de desarrollar un proceso de reflexión en los estudiantes

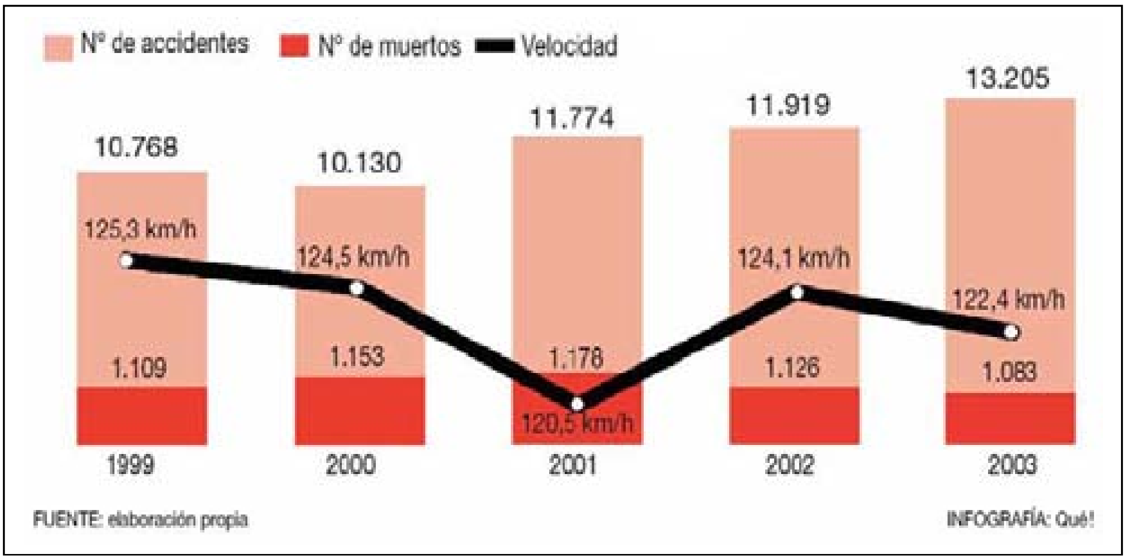
El problema de la ficha “accidentes automovilísticos” trata la dependencia entre la velocidad y la cantidad de accidentes (heridos y muertes). Se observan varias tareas de interpretación: la pregunta a) se corresponde con una lectura e interpretación cuantitativa local; en la pregunta b) la interpretación es global; y posteriormente, en la pregunta c) deben realizar un comentario crítico de una afirmación sobre la gráfica; en la pregunta d) hay que situarse en la posición de un personaje argumentando que la velocidad excesiva no es un factor de riesgo en los accidentes; por el contrario en la pregunta e) se debe argumentar que la velocidad sí es un factor decisivo en los accidentes.

De esta clase se han elegido dos extensos episodios que representan una muestra con suficientes características como para poder analizar los procesos que se desarrollan entre Valentina y los estudiantes que se explica con detalle en el siguiente subapartado 4.2.3.1. Además cada uno de los episodios se analiza considerando las acciones de Valentina respecto a la competencia de modelización y argumentación. A partir de este análisis, se identifican las características principales sobre el desarrollo de las competencias de los episodios.

En el apartado 4.2.3.2 se elabora un segundo análisis de las acciones de Valentina, considerando los episodios en su conjunto, respecto a las características de la tarea.

Finalmente, en el apartado 4.2.3.3 se describe un tercer análisis que considera las acciones de Valentina respecto a los niveles de competencias matemáticas.

Actividad 2: Accidentes automovilísticos



El gráfico muestra la velocidad promedio de un auto en el momento que tiene un accidente en el transcurso de cinco años.

a) ¿En qué año hay más número de accidentes? ¿En qué año es más alta la velocidad promedio de un auto en el momento que tiene un accidente? ¿En qué año hay más número de muertos?

b) Discute si hay una dependencia entre la velocidad y el número de víctimas (accidentes) ¿Y velocidad con el número de muertos?

A continuación se presenta un párrafo extraído de una noticia real del periódico que tiene anexado al gráfico. Se pide hacer un comentario sobre la interpretación que se hace del gráfico, valorando si se esta de acuerdo con la interpretación del periodista.

La velocidad indebida es más peligrosa que la excesiva

Como se muestra en el gráfico “a menos velocidad, más accidentes”. Y tal como afirma automovilistas Europeos Asociados (AEA), el peligro de la carretera reside en realidad en la velocidad inadecuada que mantienen los vehículos. Para Francisco Huerta, presidente de esta asociación. “es tan peligroso ir muy deprisa como viajar excesivamente lento. Por este hecho los radares no son la solución real a los problemas de los accidentes”. Esta apreciación ha sido defendida por la asociación ya que se ha probado que ha bajado la velocidad media de los conductores. No así los accidentes.

c) Haz un comentario sobre la interpretación que se hace del gráfico en la noticia. ¿Estas de acuerdo?

d) Supón que eres Francisco Huerta, Presidente de la asociación AEA. Basándote en el gráfico intenta explicar que la velocidad excesiva no es un factor decisivo en los accidentes automovilísticos. Explica cómo lo harías.

e) Supón que eres un agente de seguridad vial. Basándote en el gráfico intenta explicar como la velocidad es un factor decisivo en los accidentes automovilísticos. Explica como lo harías.

Figura 4.2.2: Actividad material 4

4.2.3.1. Acciones del aula respecto a las competencias

Se han clasificado las acciones de Valentina y los estudiantes respecto a cada competencia. Luego de hacer un primer análisis a toda la clase en términos de los indicadores, se ha decidido que los episodios que ilustran mayor *riqueza* de indicadores de proceso (se entiende riqueza como cantidad, claridad y diversidad de indicadores), son los que se han seleccionado para elaborar una descripción interpretativa de la acción de Valentina en términos de cada una de las competencias.

Episodio 1

En la pregunta a) Valentina indujo a que leyeran la gráfica que aparece en la guía, los estudiantes no presentan ambigüedades en la lectura. En cambio la pregunta b) trata de una interpretación de la gráfica, la discusión gira en torno a si hay dependencia entre la velocidad y los accidentes o número de muertos. Valentina, si bien induce a los estudiantes reiteradamente a que interpreten la gráfica, se encuentra con dos resultados. Por un lado logra que algunos alumnos a partir de la interpretación de la gráfica determinen que las variables son independientes. Pero por otro lado varios alumnos responden a la pregunta en base a ideas previas o espontáneas emergentes, relativas al contexto de la tarea, en detrimento de focalizarse en los datos para determinar si hay dependencia. Por tanto Valentina no logra negociar con el curso una solución consensuada.

En el extracto que se analiza de la clase (episodio 1), Valentina cambia la estrategia que utilizaba anteriormente para interpretar los datos. Elabora una tabla para organizar los datos situados en el gráfico del material 4, luego esboza dos gráficas para estudiar la relación entre variables, velocidad y nº de accidentes. A estas representaciones las denominamos como *gráficas cualitativas* dado que los ejes no están cuantificados. Valentina retoma la pregunta respecto a la dependencia de variables, y a diferencia de antes, logra negociar con los estudiantes que hay independencia. La discusión gira en torno a cómo justificar esta afirmación, y es en este punto donde Valentina observa que a los estudiantes les es difícil sostenerse en los datos para justificar que no hay dependencia entre las variables.

A continuación se describe e interpreta la clase según los indicadores de procesos matemáticos; para tal efecto, el episodio 1 se ha caracterizado según los indicadores de cada una de las competencias. Como el episodio es extenso se ha preferido dividir el episodio en subepisodios.

Subepisodio 1.1

Línea	Diálogo	Modelización	Argumentación
328	**Valentina: poquitos, a ver miren acá. [Valentina escribe en la pizarra], voy a poner año., voy a poner accidentes, voy a poner muertos, y aquí voy a poner velocidad. ¿Qué es lo que voy hacer yo acá?**	**Inducir a identificar expresión numérica del modelo**	**Inducir a identificar datos**
329	Pedro: un recuadro	Identificar características modelo	Identificar datos

330	**Valentina: un recuadro [repite], voy hacer una tabla.**	**Características expresión numérica modelo**	**Identificar datos**
331	Diego: las variables.	Identificar características modelo	Identificar datos
332	**Valentina: las variables [repite], excelente estas variables las voy hacer para mí, o para que lo entendamos entre todos.**	**Características expresión numérica del modelo**	**Validar datos**
333	Estudiantes: para que lo entendamos entre todos.		Identificar datos
334	**Valentina: [Valentina traza la tabla con las cuatro variables]**	**Construir expresión numérica del modelo**	**Validar datos**
335	**Valentina: empecemos, 1999, cuantos accidentes.**	**Construir expresión numérica del modelo**	**Inducir lectura de datos**
336	**Valentina: [Valentina a partir de la respuesta de los alumnos, completa la tabla. en las filas se sitúan los años y en las columnas, Nº de accidente, Nº de muertos y velocidad respectivamente].**	**Construir expresión numérica del modelo**	**Inducir lectura de datos**

Análisis interpretativo de los procesos

Foto 4.2.1: Tabla construida por Valentina

Modelización: El modelo que se estudia en el episodio es la dependencia de variables. Valentina observa que la expresión gráfica dada del modelo no es eficiente para determinar si hay dependencia de variables, por tanto Valentina prevé la necesidad de determinar una nueva expresión del modelo, en consecuencia Valentina induce a los alumnos a identificar la expresión numérica del modelo (la tabla), y una vez que hayan descrito sus características (las variables), inicia la construcción de la tabla numérica en la pizarra en interacción con los estudiantes (foto 4.2.1).

Argumentación: Valentina induce a que se identifiquen las variables y a leer y organizar los datos. El hecho de que los datos se organicen en una tabla facilita a los estudiantes justificar sus interpretaciones.

El sub-episodio 1.2 es la continuación del párrafo anterior. Valentina repite la pregunta respecto a la dependencia de las variables, ahora en la pizarra con la tabla numérica. Valentina antes de comenzar con el diálogo, escribe dos líneas: *Velocidad y Número de accidentes* y en una segunda línea *Velocidad y Número de muertos,* identificando las variables que se están estudiando.

Sub-episodio 1.2

Linea	Diálogo	Modelización	Argumentación
337	**Valentina: [Una vez terminada la tabla dice:] a ver, la pregunta es: ¿existe dependencia entre la velocidad y el número de accidentes.**	**Inducir a interpretar el modelo**	**Inducir interpretación**
338	Estudiantes: no	Interpretar el modelo	Responder sin argumentar
339	**Valentina: ¿qué quiere decir que exista dependencia?, si yo lo veo con un gráfico.**	**Inducir a interpretar el modelo**	**Inducir interpretación interna**
340	Arturo: que una depende de la otra.	Interpreta el modelo	Interpretar
341	**Valentina: que una dependa de la otra, ¿cierto?, Yo podría tener de dos formas**	**Inducir a interpretar el modelo**	**Inducir interpretación interna**
342	Diego dependiente e independiente.	Interpretar el modelo	Interpretar
343	**Valentina: yo podría decir, a más velocidad mas accidentes**	**Inducir a interpretar el modelo**	**Inducir interpretación interna**
344	Diego: pero o es eso,	Interpretar el modelo	
345	**Valentina: yo lo podría decir, ¿cierto?**		
346	**[Valentina comienza a trazar una gráfica]**	**Construir expresión del modelo**	**Interpretar internamente**
347	**Valentina: tengo menos velocidad y tengo menos accidentes. más velocidad, más accidentes**	**Construir la expresión del modelo**	**Interprear internamente**
348	**Valentina: [traza una grafica de proporcionalidad directa, línea recta creciente]**	**Construir la expresión del modelo**	**Interpretar internamente**
349	Ignacio: pero el gráfico no es así.	Interpretar el modelo	Refutar

350	**Valentina: o yo podría decir, [interrupción], a menos velocidad más accidentes. o menos velocidad, más accidentes. Y quedar algo como así.**	**Construir la gráfica del modelo**	**Interpretar internamente**
351	**Valentina: [Valentina traza una gráfica de proporcionalidad inversa]**	**Construir la gráfica del modelo**	**Interpretar internamente**
352	Oscar: ¿por qué así?		Interpretar internamente
353	**Valentina: porque a medida que va aumentando la velocidad, va bajando más o menos así, ya.**	**Construir la gráfica del modelo**	**Justificar**
354	Oscar pero tampoco es así.		Refutar

Análisis interpretativo de los procesos

Fotos 4.2.2: gráficas cualitativas elaboradas por Valentina

Modelización: Valentina induce a los estudiantes a interpretar el modelo de dependencia de variables, para ello elabora las gráficas cualitativas (foto 4.2.2). Esta nueva expresión gráfica del modelo enriquece la competencia de modelización: por un lado se agrega la gráfica cualitativa a la tabla y a la gráfica estadística, y por otro lado se utiliza la estrategia cualitativa para graficar, técnica estudiada en tres clases anteriores. En definitiva, las diferentes expresiones del modelo en su conjunto contribuyen a interpretar el modelo de dependencia de variables.

Argumentación: Valentina induce a que los estudiantes interpreten “internamente”, es decir que sus explicaciones sobre el comportamiento de las variables sean justificadas por medio de los datos que aparecen en la tabla y no por explicaciones elaboradas a partir de ideas previas y externas a los datos. Para Valentina la elaboración de las gráficas da pie a una nueva discusión sobre el significado de dependencia de variables, los gráficos son una medio para argumentar el significado de dependencia, pero los estudiantes no cambian de discusión y se confunden con las gráficas porque creen que responden a la situación planteada anteriormente, aludiendo a que ninguna de la dos gráficas corresponden a la relación que hay entre velocidad y número de accidente que se refleja en la tabla. Si bien el proceso argumentativo que pretendía Valentina no se logra como esperaba, la aparición de la tabla y la gráfica cualitativa son representaciones útiles para el al proceso de argumentación.

El tercer diálogo es la continuación del sub-episodio anterior, Valentina vuelve a focalizarse en la tabla.

Sub-episodio 1.3

Línea	Diálogo	Modelización	Argumentación
355	**Valentina: a ver, miremos aquí. ¿Nicolás? queremos saber la velocidad respecto al número de accidentes. ¿Dónde tengo la mayor velocidad?**	**Inducir a interpretar expresión numérica del modelo**	**Inducir interpretación interna**
356	Nicolás: en el 125,3. Km./h	Interpretar la expresión numérica del modelo	Interpretar
357	**Valentina: aquí (subraya en la tabla) tengo ¿cuántos accidentes?**	**Inducir a interpretar expresión numérica del modelo**	**Inducir lectura**
358	Alumnos: 1768.	Interpretar la expresión numérica del modelo	Leer datos
359	**Valentina: ya, si la relación fuera, más velocidad más accidentes, cuando yo encontrara la menor velocidad, cuantos accidentes tendría que tener.**	**Inducir a interpretar expresión numérica del modelo**	**Inducir interpretación interna**
360	Estudiantes: más!, menos ! confusión, (no repuesta clara, al parecer Valentina omite)	Interpretar la expresión numérica del modelo	Interpretar internamente
361	**Valentina: ya, busquemos la menor velocidad**	**Inducir a interpretar expresión numérica del modelo**	**Inducir interpretación**

362	Estudiantes: 120,5 Km./h	Interpretar la expresión numérica del modelo	Leer datos
363	**Valentina: [Valentina subraya en tabla]**	**Interpretar expresión numérica del modelo**	**Inducir interpretación**
364	**Valentina: y voy a ver los accidentes, ¿son menos accidentes?**	**Induce a interpretar expresión numérica del modelo**	**Inducir interpretación i**
365	Estudiantes: más!	Interpretar la expresión numérica del modelo	Iinterpretar
366	CORTE		

Análisis interpretativo de los procesos

Modelización: Valentina induce a interpretar la expresión numérica del modelo, las interacciones entre Valentina y los estudiantes muestran que la interpretación se consensuará prontamente, es decir que se llegará a un acuerdo respecto al modelo. En términos de la competencia de modelización, este paso representa interpretar los resultados asociados a la situación original.

Argumentación: Valentina induce a que los estudiantes se familiaricen con los datos, con el propósito de que puedan justificar la interpretación de los datos.

Sub-episodio 1.4

Línea	Diálogo	Modelización	Argumentación
367	Gonzalo: Yo ceo que no porque ahí no sale la variación de una forma uniforme.	Interpretar la expresión numérica del modelo	Interpretar internamente
368	**Valentina: ya, no hay movimiento uniforme. Si yo veo la velocidad y la comparo con el número de accidentes me doy cuenta, que ocurre.**	**Inducir a interpretar expresión numérica del modelo**	**Inducir a reflexionar**
369	Joan: están ordenadas, pero lo que pasa es que no se da.	Analizar críticamente el modelo	Reflexionar
370	**Valentina: están ordenadas pero no se da (repite), es decir (…)**	**Analizar críticamente el modelo**	**Inducir a reflexionar**
371	Joan: son independientes	Interpretar el modelo	Reflexionar
372	**Valentina: ¿hay dependencia?**	**Inducir a aplicar modelo**	**Acotar problema**
373	Estudiantes: ¡No!.	Aplicar el modelo	Responder sin argumentar
374	**Valentina: Según lo planteado acá, después me dicen, hay dependencia entre la**	**Inducir a aplicar modelo**	**Acotar problema**

	velocidad y el número de muertos.		
375	Estudiantes: ¡No!	Aplicar el modelo	Responder sin argumentar
376	**Valentina: si yo veo a mayor velocidad, tendría que pensar que hay.**	**Inducir a aplicar modelo**	**Interpretar internamente**
377	Estudiantes: menos muertos, o más muertos.	Aplicar el modelo	Interpretar internamente
378	**Valentina: o más muertos, ahí tengo 1109.**	**Aplicar el modelo**	**Interpretar internamente**
379	**Valentina: [respecto a otro punto] menor velocidad aquí y ¿tengo la menor cantidad de muertos?(...)[sigue describiendo]**	**Inducir a aplicar modelo**	**Interpretar internamente**
380	Alex: mayor respecto a la velocidad.	Interpretar el modelo	Interpretar internamente
381	**Valentina: entonces la pregunta es, hay dependencia entre estas variables.**	**Inducir a aplicar modelo**	**Acotar el problema**
382	Estudiantes: ¡noooo!	Aplicar el modelo	Responder sin argumentar
383	**Valentina: Pero además que me digan que no, ¡me interesa el por qué!**	**Inducir a aplicar modelo**	**Inducir a justificar**
384	Diego: porque (…)		No justificar
385	Alex. Hay que fundamentar esa respuesta.		No justificar
386	**Valentina: hay que fundamentar esa respuesta. ¿Quien me la puede fundamentar?, Joan es el único que está aquí en la sala, los demás no pasa nada. [Otros pocos levantan la mano] Dime [a Joan].**	**Inducir a aplicar modelo**	**Inducir a justificar**
387	Joan: porque si fuera así, tendría que considerarlo con más velocidad o sea con más velocidad tendría que ver más accidentes, o más muertos, o menos. Y no sale, porque aquí en uno que hay menos, hay más muertos, pero aquí entre el 2002 y el 2003, tiene que variar todo.	Analizar críticamente el modelo	Justificar internamente

Modelización: Valentina comienza con una discusión sobre el significado de dependencia entre la velocidad y el número de accidentes. Joan, a través de la tabla numérica, hace notar que el número de accidentes no sigue un patrón con las velocidades, lo que significa que son independientes las dos variables. En términos de la competencia de modelización, Valentina induce a aplicar el modelo de dependencia establecido, es decir interpretar la expresión numérica del modelo (tabla numérica) para obtener un resultado. Valentina sigue con la acción de inducir a aplicar el modelo en el resto del diálogo (línea 372-386). Si bien los alumnos responden acertadamente a que las variables no son dependientes, Valentina tiene que pedir de manera explícita que justifiquen sus respuestas. En términos de modelo, Valentina espera que apliquen la gráfica estadística o la tabla numérica para respaldar la interpretación.

Argumentación: Valentina sigue induciendo la interpretación de los datos, para luego pedir que respondan al problema de dependencia. Al ver que los alumnos no argumentan sus respuestas, ella pide, aunque no induce, que justifiquen sus resultados; su petición es correspondida por pocos alumnos, siendo Joan uno de ellos, el cual elabora una justificación focalizada en los datos (línea 387). Esa estructura argumentativa significa un indicio de que si bien los alumnos pueden argumentar, no se ven en la necesidad de hacerlo, o mejor dicho el hacerlo no está dentro de las normas de la clase, aunque Valentina en clases anteriores reiteradamente proponga a los estudiantes que argumenten sus respuestas.

Episodio 2

El episodio 2 corresponde a gran parte del desarrollo de las preguntad d) y e) del material 4. Previamente ya se ha dado inicio a la pregunta, pero dado que los estudiantes muestran ambigüedad en entenderla, Valentina acota y explica nuevamente el sentido de la tarea.

En el episodio 2 Valentina mantiene en la pizarra las dos frases escritas anteriormente: a "menos velocidad más accidentes", y a "más velocidad menos accidentes". A partir del comentario de Francisco Huerta que aparece en la noticia del diario, Valentina plantea que los estudiantes expliquen su afirmación "la velocidad excesiva no es un factor de riesgo en los accidentes". Hay confusión entre los estudiantes en entender la tarea, por lo que Valentina acota la pregunta a que expliquen por qué Francisco interpreta a "menos velocidad más accidentes" y a "más velocidad menos accidentes". Teo y otros alumnos dicen que eso es falso y no puede ser, porque "eso no dice el gráfico", la confusión sigue unos segundos hasta que Valentina pide repetir un comentario a Leo sobre cómo se explica la interpretación de Francisco Huerta. Leo identifica que seleccionando tres años se cumple la relación menos velocidad más accidentes, del mismo modo considerando los años 1999 y 2001 se interpreta la relación, a más velocidad menos accidentes. Una vez que Valentina valida las argumentaciones, pone en pie la discusión de si la afirmación de Francisco Huerta es cierta. El grupo clase argumenta que es falsa la afirmación, con razones ajustadas a los datos y otras por ocurrencias propias; estas discrepancias entre las argumentaciones dan pie a Valentina para manifestar que tienen que pensar mejor sus razones.

A partir de esta descripción del episodio 2, a continuación se describe e interpreta la clase respecto a los indicadores de procesos matemáticos. Se ha dividido el episodio en tres sub-episodios, el primero es el más extenso y completo, y los restantes son más pequeños.

Sub-episodio 2.1

Línea	Diálogo	Modelización	Argumentación
501	**Valentina: ¿cómo lo podrían explicar?**	**Inducir a elaborar un modelo**	**Inducir a justificar**

502	José: ¿cómo tía?		
503	**Valentina: ¿cómo podría explicar eso?**	**Inducir elaborar un modelo**	**Inducir a justificar**
504	José: Es necesario ocupar el gráfico.	Construir expresión del modelo	Identificar datos
505	Luis: eso hay que escribir, eso.	Identificar expresión gráfica del modelo	
506	[Hay confusión entre los estudiantes, no entienden bien la pregunta]		
507	**Valentina: a ver, vuelvo a explicar. Vamos a imaginar que Uds. son este caballero Don Francisco, es decir que Uds. tienen que dar razones, Don Francisco dijo [señala frase en la pizarra] "a menos velocidad más accidentes". Aaah, según este gráfico [señala tabla] a menos velocidad más accidentes, ahora pido, Cristian [tono de atención], que Uds. me expliquen, me den las razones de, a más velocidad**	**Inducir a elaborar un modelo**	**Situación problema inducir justificación**
508	Estudiantes: menos accidentes	Identificar características modelo	Acotar problema
509	**Valentina: va a ver menos accidentes**	**Validar características modelo**	**Acotar problema**
510	Diego: tía, yo creo que eso es falso.	Analizar críticamente el modelo	Interpretar datos
511	**Valentina: pero pónganse en el caso de don Francisco Uds. Lean el gráfico [señala tabla]**	**Inducir a interpretar el modelo**	**Inducir a reflexionar**
512	Teo: tía ¿pero cómo nos vamos a basar en el gráfico, si el gráfico no muestra eso?	Analizar críticamente el modelo	Calificadores modales
513	Estudiantes no muestra eso	Analizar críticamente el modelo	Calificadores modales
514	[varios alumnas están en desacuerdo con lo que se propone, hay confusión en comprender la pregunta]		Calificadores modales
515	**Valentina: Miren aquí lo que dice el Leo. ¿Podrían salir a explicarlo?**	**Inducir a interpretar el modelo**	**Inducir a justificar**
516	Leo: allí arriba, el caballero tomó los tres primeros [confusión]	Analizar críticamente el modelo	Reflexiónar

517	**Valentina: el caballero tomó los tres datos de arriba para explicar esto (a menos velocidad más accidentes)**	**Analiza críticamente el modelo**	**Reflexionar**
518	Leo: y para los dos últimos, esto otro	Analizar críticamente el modelo	Interpretar internamente
519	**Valentina: y para estos dos últimos lo explicaría así.**	**Analizar críticamente el modelo**	**Interpretar internamente**
520	Alfredo: si tía, pero tía ahí está mal porque a menos velocidad más accidentes.	Analizar críticamente el modelo	Interpretar datos Justificar
521	**Valentina: ¿más velocidad?**	**Inducir a interpretar el modelo**	**Inducir a interpretar**
522	Alfredo: ¡así!		
523	**Valentina: esa es la explicación que está dando tu compañero.**		**identificar justificación**
524	Estudiantes: tía está mal.		Responder sin argumentar
525	Lorenzo: hay muchos más accidentes.	Analizar críticamente el modelo	Interpretar datos
526	Diego: [no se escucha bien, argumenta por qué está errado]		Justificar
527	**Valentina: Si pero como el señor dijo: que el viaje decía a menos velocidad mas accidentes, entonces como Ud. me dijo que con poca velocidad hay muchos accidentes, explíqueme ahora cómo es posible que a muchas velocidad a menos accidentes. ¿Cómo podríamos argumentarlo?**	**Inducir a elaborar el modelo**	**Inducir a justificar**
528	Alfredo: a no ser que fuéramos en una carretera.		Justificar externamente
529	Leo: fijándose en los últimos años	Analizar críticamente el modelo	Justificar internamente
530	**Valentina: Leo dice que fijándose en lo últimos se podría dar una razón.**	**nducir a elaborar el modelo**	**Inducir a justificar**
531	Estudiantes: °		
532	**Valentina: Alonso tiene otra idea**		
533	Alonso: en el año 1999 y en el año 2001, eso sería todo.	Analiza críticamente el modelo	Justificar

534	**Valentina: escucharon lo que dijo**		**Validar justificación**
535	Estudiantes: No!		
536	**Valentina: el daría el año 99, diría: más velocidad más accidentes, lo justificaría con el año 99 y**	**Analizar criticamente el modelo**	**Validar justificación**
537	Alonso. 2001.	Analizar críticamente el modelo	Identificar justificación
538	**Valentina: con el 2001 que hubo 120 (km/h) y ahí hubo más, es decir el diría.**	**Inducir a interpretar el modelo**	**Induce a justificar**
539	Marco: ya pero hay que fijarse en el gráfico	Variables didácticas del modelo	Calificador modal
540	**Valentina: ya pero escucha**		
541	**Observador: eso, escribe la respuesta [dirigiéndose a un alumno]**		
542	**Valentina: a eso, porque habría dos años no más, 1999 y 2001, y con esos dos años explico. Esa es una razón que está dando él y que es correcta y está bien. Porque diría en 1999 es: a más velocidad.**	**Analizar criticamente el modelo**	**Validar justificación**
543	Leo: menos accidentes	Analiza críticamente el modelo	Identificar justificación
544	**Valentina: menos accidentes, y en el 2001 menos velocidad más accidentes. [señala afirmaciones en la pizarra]**	**Interpretar la expresión numérica del modelo**	**Validar justificación**
545	Leo: pero ahí no hay menos accidentes porque...•	Refutar interpretación modelo	Interpretar internamente
546	**Valentina: por eso el para poder explicar, ocupa dos años no mas, los demás no los tomaria en cuenta.**	**Analizar críticamente el modelo**	**Justificar**
547	**Estudiantes: [no se escucha bien) igual se puede tomar.**		
548	**Valentina: pero esa respuesta que tomaría este señor estaría bien o mal.**	**Inducir a analizar críticamente el modelo**	**Inducir a reflexión**
549	Estudiantes: mal	Analizar críticamente el modelo	
550	**Valentina: ¿por qué?**	**Inducir a analizar críticamente el modelo**	**Inducir a reflexionar int**
551	Estudiantes: porque no está explicando todo el gráfico, está tomando lo que él quiere no más, lo que a él le conviene.	Analizar críticamente el modelo	Reflexionar
552	Arturo: no porque no le conviene.	Analizar críticamente el modelo	Reflexionar

553	Cristian: en todo caso si él lo hace así, lo hace como, para complicarnos más. Si lo hace desordenado se puede hacer cualquier cosa.	Analizar críticamente el modelo	Reflexionar
554	**Valentina: pero es que la idea es que Uds. piensen.**	**Inducir a analizar críticamente el modelo**	**Induceir a reflexión**

Análisis interpretativo de los procesos

Modelización: Valentina induce a elaborar un modelo respecto a la dependencia de variables que justifique la afirmación, es decir se ha de elaborar un modelo que justifique una relación de dependencia inversa entre la velocidad y el nº de accidentes. En definitiva, lo que se pretende es construir un modelo que respalde un resultado que ya viene dado.

Leo, al interpretar la tabla, identifica los datos necesarios para construir el modelo de dependencia y Valentina acompaña a Leo a justificar el modelo con que se supone que Francisco Huerta se respalda para pronunciar la afirmación estudiada. A partir de la línea 513 y hasta el final del sub-episodio los estudiantes analizan críticamente el modelo, lo que da pie a reflexionar sobre las diferentes maneras de modelar utilizando un conjunto de datos. Paralelamente Valentina sigue induciendo a que se elabore un modelo de dependencia que justifique la afirmación a "más velocidad menos accidentes", semejantemente a la secuencia anterior; Leo opta por elegir dos datos, los dos últimos años, para argumentar la afirmación señalada.

La acción de Valentina de inducir una reflexión del modelo genera un análisis crítico de algunos estudiantes que efectivamente argumentan lo que espera Valentina "porque no está explicando todo el gráfico, está tomando lo que él quiere no más, lo que a él le conviene" (línea 551). En detrimento, Cristian y otros estudiantes, si bien analizan críticamente el proceso de modelización, sus argumentos carecen de una justificación en los datos, y se sostienen en argumentaciones externas. Por tanto Valentina sigue induciendo a que razonen sobre el modelo, con el fin de negociar con Cristian y el resto de alumnos un razonamiento basado en los datos.

Argumentación: Desde el punto de vista de la argumentación, el problema de justificar que la velocidad excesiva no es un factor decisivo en los accidentes, se concreta en reconocer que existe una dependencia inversa entre las variables. Valentina establece calificadores modales para estructurar la argumentación respecto a la afirmación de Francisco Huerta de la gráfica, la cual se basa en una interpretación de los datos que es contraria a la que ya se había establecido de antemano. De este modo comienza una negociación en torno a la interpretación de los datos entre algunos alumnos y Valentina, que no acaba de llegar a una acuerdo dado que hay ambigüedad en la situación problemática; Valentina induce a que se justifique la afirmación de Francisco Huerta en relación a los datos, pero Alfredo (línea 529) representa el grupo de estudiantes que aun siguen aludiendo a elementos externos, y justifica en base a sus concepciones, acción que hemos denominado como justificación externa. En cambio, Alonso y Leo sí justifican en referencia a los datos, lo que hemos denominado como "justificación interna", (línea 533). La acción de Leo y Alonso justifica y reflexiona sobre la interpretación de Francisco Huerta al identificar en que datos se focaliza. Valentina valida la justificación de Leo y Alonso en base a los datos. Esta secuencia refleja un proceso completo de argumentación y negociación entre los estudiantes y Valentina.

Una vez que Valentina valida las argumentaciones, pone en pie la discusión de si la afirmación de Francisco Huerta es cierta. El grupo curso argumenta que es falsa la afirmación, con razones ajustadas a los datos y otras por ocurrencias propias; Valentina para contrarrestar, incentiva a que utilicen una estructura argumentativa en base a los datos.

Los sub-episodios 2.2, 2.3 representan el cierre de la situación problema, que se analizan desde el punto de vista de la argumentación.

Sub-episodio 2.2

Línea	Diálogo	Argumentación
592	**Valentina: a ver, ahora quiero preguntar. [Se dirige a un estudiante] si tu fueras este personaje, el presidente de esta asociación, como explicarías que la velocidad excesiva no es un factor decisivo en los accidentes? léeme tu respuesta.**	**Inducir conclusión**
593	[estudiante no responde, pero otro comienza a responder]	
594	Marco: Mire es que esta pregunta no la entendí bien	
595	**Valentina: explícamela con tus palabras. ¿Cómo tu explicarías que el exceso de velocidad, que la gran velocidad, no es un factor que influya en los accidentes?**	**Inducir conclusión**
596	Luisa: sí porque, por ejemplo la persona se perdió y no habían persona ahí, y na.	Interpretación externa Justificar
597	[Matías levanta la mano]	
598	**Valentina: Matías**	
599	Matías: ese caballero hubiera pescado los años ideal, por ejemplo el 99 hasta el 2001, y hubiera ocupado esos años para decir lo que dijo.	Interpretar internamente Justificar
600	**Valentina: escuchaste la explicación de Matías?, él dijo que si él fuera este caballero hubiera buscado la información que me servía, ya, escuchen ahora la explicación de Gustavo.**	**Validar justificación**
601	Gustavo: [no responde]	
602	**Valentina: la letra d) si tu fueras este señor Francisco Huerta como explicarías.**	**Acotar el problema**
603	Gustavo: que (…) aunque haya dicho (...) haya dicho, menor velocidad más accidentes, se (…).[termina la frase, al parecer está tupido]	

Análisis interpretativo de los procesos

Argumentación: Valentina vuelve a la situación problema original, esperando a que los estudiantes den una respuesta como conclusión. Si bien la argumentación de Matías es un ejemplo de justificar las conclusiones, por otra parte la interpretación externa de los datos de Luisa, y la confusión en las respuestas de Gustavo, son acciones que representan a un grupo de estudiantes que aun no le dan el significado a los datos que espera Valentina.

En síntesis, comparando los dos sub-episodios, se han caracterizado dos grupos de estudiantes. Si bien Valentina incentiva un razonamiento que induce a argumentar a partir de los datos, un grupo efectivamente logra interpretar y reflexionar a partir de los datos, y en conjunto con Valentina completan un proceso argumentativo (línea 534, 599). Por otra parte, otro grupo no logra completar una estructura argumentativa centrados en lo datos puesto que continuamente interpretan y justifican afirmaciones sin mencionar los datos (línea 554, 596).

Sub- episodio 2.3

Línea	Diálogo	Argumentación
611	**Valentina: ya la letra e), Marco puedes leer la respuesta, si tú fueras un agente de seguridad, es decir un carabinero, basándote en el gráfico como explicarías que la velocidad es un factor decisivo en los accidentes.**	**Inducir justificación**
612	Marco: a ver, no podría explicarlo porque no es un factor	Interpretar
613	**Valentina: ¿no es un factor que influya en los accidentes?**	**Inducir interpretación**
614	Marco: sí es un factor .[no se escucha bien].pero no es un factor de accidentes	Interpretar
615	**Valentina: no es un factor dices tu**	**Inducir interpretación**
616	Marco: no es un factor de accidentes porque a máxima velocidad o a mínima velocidad igual va a haber.	Interpretar
617	Joan: Tía, aquí pregunta que la velocidad va hacer un factor de los accidentes.	Acotar problema
618	**Valentina: ¿Qué le pusiste tu?**	**Inducir justificación**
619	Joan: Yo le puse que sí porque no puede haber accidentes si andas con cuidado.	Justificar externamente
620	**Valentina: ya no puede haber accidentes si andas con cuidado... siempre y cuando no venga otro y te choque.**	Validar justificación
621	**Valentina: a ver para terminar, yo voy a leer las respuestas de esta guía porque la voy a retirar,**	Concluir

	es sumamente importante que cuando hay una información de un diario una revista hay que fijarse muy bien , porque a veces la interpretación que hace abajo el periodista	Reflexiónar
622	Estudiantes: está mal.	Concluir
623	**Valentina: no corresponde al gráfico,**	**Reflexionar**
624	Joan: [no se escucha bien su aporte]	
625	**Valentina: [Respondiendo] ahí hay otra información anexa. No sé si quedo muy claro esta guía**	
626	Estudiantes ¡sí!	
628	**Valentina: poquitos, levanten la mano (…) 15.**	
629	TERMINA LA CLASE	

En el episodio 2.3 (línea 611-621) se plantea que los estudiantes argumenten por qué la velocidad es un factor decisivo en los accidentes, la tarea matemática tiene como propósito que interpreten el gráfico desde un punto de vista opuesto a la pregunta d). Del mismo modo que en el episodio anterior, se analiza desde el punto de vista de la argumentación.

Análisis interpretativo de los procesos

Argumentación: Valentina, al plantear el problema, nuevamente se encuentra con una incomprensión de las normas. Marcos afirma que la velocidad no es un factor decisivo, argumenta que tanto la velocidad baja como alta incide en los accidentes; si bien su razonamiento es correcto no se sitúa en el contexto del problema de tomar el rol de un agente de seguridad. En términos de estructura argumentativa, las condiciones modales que entiende Marcos son distintas a las condiciones modales que induce Valentina. Joan representa el grupo descrito anteriormente que argumenta en base a concepciones previas o espontáneas identificadas con el indicador de "justificar externamente" (línea 619). Valentina no continúa negociando las argumentaciones de Marcos y Joan, y cierra la clase con la reflexión que se esperaba inducir en los estudiantes.

Valentina da las conclusiones y con ello cierra la clase. Esta decisión de apresurar las conclusiones pudo ser tomada por varios factores, principalmente porque el tiempo de la clase ya había terminado, por la presencia de un observador externo grabando las clases, o para poder empezar un nueva tema en la próxima clase. En síntesis no se completó una estructura argumentativa en este problema.

Síntesis del análisis de los episodios 1, 2.

Del análisis descriptivo interpretativo de los dos episodios, hay ciertos aspectos que nos parecen relevantes de rescatar sobre el desarrollo de los procesos.

Modelización

- En el transcurso de la clase, surge el modelo de dependencia de variables cuyo estudio considera gran parte del tiempo de la clase, y en el que fue necesario varias expresiones del modelo para su comprensión.
- En las preguntas c), d) y e), se pide identificar modelos que sostengan las afirmaciones que se dictan en las respectivas preguntas. Valentina induce a los alumnos a reconocer los datos necesarios para elaborar el modelo, pero no logra que lo apliquen para desarrollar las preguntas, sobre todo en las preguntas d) y e) en que los estudiantes no le dan el significado a la pregunta que Valentina intenta que le atribuyan.
- En términos de los niveles de Henning y Keune (2007), los estudiantes completan un nivel 2 (construcción del modelo) ya que identifican, construyen, interpretar y validan el modelo, pero no logran meta-reflexionar sobre el modelo (nivel 3); reflexionar y analizar críticamente un modelo son tareas a las que no están acostumbrados.

Argumentación

- La manera en que Valentina induce la argumentación en los estudiantes se asemeja bastante a una estructura argumentativa de Toulmin. En la pregunta b), para responder a la situación problema de dependencia de variables es necesario identificar los datos e interpretarlos, para luego justificar por medio de estos. Los procesos de identificar e interpretar se negocian claramente con el curso, pero el proceso de justificar a través de los datos (justificación interna) cuesta negociar ya que los estudiantes justifican espontáneamente o por ideas previas (justificación externa). Este proceso se repite de forma similar en el resto de las preguntas.
- Valentina logra que los estudiantes pasen de una justificación externa a una interna e incluso hay varios momentos en que ellos mismos reconocen que tienen que utilizar los datos para argumentar.
- El intento de argumentar desde dos puntos de vista no es una tarea a la cual los estudiantes lograran darle sentido. A Valentina le cuesta que comprendan el sentido de las preguntas. En definitiva no se logra lo que se tenía previsto.

4.2.3.2 Análisis de tareas en la clase

En este subapartado se caracteriza el desarrollo de la clase respecto a la clasificación de tarea matemática (explicada y elaborada en el apartado 4.1.1).

El cuadro 4.2.6 organiza las características de las tareas que se espera desarrollar en la clase. A partir del cuadro se describe de qué manera se han desarrollado estas tareas.

Cuadro 4.2.6: Análisis de tarea matemática (material 4)

Tarea matemática	Acción	Variable	Estrategia	Lenguaje
Identificar si existe o no relación de dependencia entre dos variables. Relacionar y traducir con fluidez a otros lenguajes a partir de una gráfica Interpretar y relacionar información compleja Identificar e interpretar información de gráficas, tablas y expresiones verbales de medios de comunicación.	Lectura Interpretación cuantitativa, cualitativa. Local, global Interpretación crítica (más de una interpretación)	Identificar las variables Relación entre la variables (dependencia) extrapolar	No rutinaria - interpretar la información de un gráfico que proviene de un diario. - extrapolar	Lenguaje formal (critica a una noticia). Se sostiene en un razonamiento abstracto (hay un criterio o juicio de valor respecto a los datos)

Describamos de qué manera se desarrolla cada uno estos indicadores en el episodio:

Tarea matemática: La tarea de "identificar si existe dependencia matemática entre las variables" se desarrolla transversalmente en esta clase. En el episodio 1 se suma a la tarea de "relacionar y traducir con fluidez con otros lenguajes a partir de una gráfica". Valentina, para estudiar la dependencia de variables, induce una secuencia de traducciones (gráfica estadística-tabla numérica- gráfica cualitativa- gráfica estadística) para potenciar la interpretación de los datos.

En el episodio 2 se observa que, por medio de las preguntas c), d), y e) cuyo propósito es potenciar más de una interpretación, se desarrolla la tarea "interpretar y relacionar información compleja".

La tarea general que se desarrolla en toda la actividad es "Identificar e interpretar información de gráficas, tablas y expresiones verbales de medios de comunicación". Esto se refleja en la acción de Valentina en que finaliza la clase indicando la importancia de leer e interpretar los gráficos de diarios o revistas (línea 621).

Por tanto, las tareas esperadas sí se desarrollan en la clase.

Acciones: Las acciones que Valentina induce en la clase son.

- Lectura de los datos, en la construcción de la tabla;
- interpretación cuantitativa en la tabla, interpretación cualitativa en la construcción de la gráfica cualitativa, interpretación cualitativa global a partir de la tabla y la gráfica cualitativa;
- interpretación crítica, incentiva que interpreten desde dos puntos de vista (suponiendo dependencia o no).

Si bien se pone de manifiesto que Valentina realiza las acciones esperadas, ello no significa que los estudiantes comprendieran todas las acciones. Los estudiantes le atribuyen el significado esperado a la lectura e interpretación, pero no logran comprender la interpretación crítica.

Variables:

- Valentina induce a que se identifiquen las variables para construir la tabla.
- Valentina, para inducir a los estudiantes a interpretar de manera interna, apunta constantemente a la relación entre las variables, a través de las relaciones "más velocidad más accidentes", o "menos velocidad más accidentes".

En consecuencia, se realiza gran parte del trabajo esperado con las variables, pero queda sin trabajarse en detalle la extrapolación de variables; en los dos episodios (y en la transcripción de toda la clase) no se encuentran acciones de Valentina que induzcan, por ejemplo, a determinar los accidentes o fallecidos en los próximos años.

Estrategia: Debido al conjunto de acciones de Valentina, la estrategia que induce no es rutinaria. Si bien la construcción de la tabla numérica es un procedimiento rutinario, en cambio la elaboración de la gráfica cualitativa es un procedimiento que se considera no rutinario (explicación cuadro 3.4.3, apartado 3.4.1 del capítulo de metodología). Además, determinar la dependencia de variables a partir de una gráfica estadística es una tarea compleja que promueve la aparición de estrategias alternativas y espontáneas; este hecho se manifiesta sobre todo en el episodio 1 cuando Valentina induce estrategias. Por otra parte, Valentina no trató procedimientos para extrapolar variables.

Lenguaje: Valentina incentiva la utilización de un lenguaje formal. La acción constante de Valentina de inducir una interpretación interna, en términos de lenguaje, significa pasar de un lenguaje natural a un lenguaje formal. A su vez, cuando induce a justificar la no dependencia de variables a partir de los datos, significa una petición de un uso formal del lenguaje. Respecto a la segunda característica del lenguaje (ver apartado 3.4.1 del capítulo de metodología), Valentina si bien induce a que argumenten por medio de los datos, no da el siguiente paso de inducir a elaborar argumentaciones por medio de un razonamiento abstracto.

Relación entre acciones de aula y los niveles de competencias matemáticas

En este apartado se relaciona el análisis descrito en el apartado 4.2.3.1 con los niveles de competencia del material 4. El cuadro 4.2.7, un extracto del cuadro 4.1.2, es el resultado de aplicar el instrumento matriz de competencia que caracteriza los niveles de competencia matemática al material 4 de la unidad didáctica.

Cuadro 4.2.7: Nivel de competencias matemáticos en material 4

Tarea matemática	Modelización	Argumentación
Identificar si existe o no relación de dependencia entre dos variables. Interpretar y relacionar información compleja Relacionar y traducir con fluidez a otros lenguajes a partir de una gráfica Identificar e interpretar información de gráficas, tablas y expresiones verbales de medios de comunicación.	**Nivel 5:** Se espera que los estudiantes desarrollen un proceso de modelización completo. La situación es real, con condiciones complejas (contrastar gráfica con una noticia). Él énfasis se puntualiza en las dos opciones diferentes de interpretación, argumentando en base a la interpretación que se adopta, lo que da paso a reflexionar sobre el modelo de una manera crítica	**Nivel 5** Al realizar un comentario crítico sobre cada afirmación que aparece en las pregunta c, d), y e), se espera que los estudiantes sean capaces de comprender que la interpretación de los datos no es única, ya que depende en qué aspectos se focalice. Se tiene como propósito que los estudiantes comprendan que la interpretación tiene una intencionalidad. Este nivel de argumentación que no se ha mencionado anteriormente, es la acción de convencer al otro mediante una interpretación con datos que no es única y que depende del propósito a comunicar.

El cuadro 4.2.7 ilustra lo que se puede esperar en un nivel 5 de complejidad de cada competencia (niveles descritos en el cuadro 3.4.4, matriz de competencia, capítulo de metodología). Para cada competencia se justifican porque se situan en un nivel 5, resumidas en los siguientes puntos:

- La modelización se clasifica en este nivel por el hecho de que una vez que se ha establecido un modelo, la tarea incentiva a que se analice críticamente y se reflexione. Estas características son principales en un nivel 5 y 6 de modelización.
- En la argumentación se espera un nivel 5 porque la estructura de la actividad da pie para completar una estructura argumentativa en que los estudiantes puedan argumentar desde más de un punto de vista.

Acciones de aula

Este subapartado describe de qué manera se han descrito los niveles de competencias y se ha organizado a partir de las siguientes preguntas.

a) ¿Existe una relación de inclusión entre niveles?

b) ¿Los niveles de competencias que se esperan en los estudiantes se han logrado?

c) ¿Cuáles son las acciones de la profesora que fomentan estos niveles? ¿Qué otros factores inciden?

d) En el caso de no alcanzar los niveles esperados, ¿hay acciones de Valentina que no incentiven potenciar estos niveles? ¿Qué otros factores inciden?

e) ¿Qué relación hay entre las características de las tareas con los niveles de competencia?

A continuación se desarrolla cada una de las cinco preguntas:

a) Tal como se recordó en el mismo análisis correspondiente a la clase 1 (apartado 4.2.2.3.1), los niveles de complejidad se han construido sobre niveles de competencia que no son inclusivos. En el estudio PISA, las tareas de un nivel de complejidad de conexión no significan necesariamente que se sepa resolver las tareas de un nivel inferior de reproducción, ya que esto depende del grado de dificultad (ya se ha explicado que no entra en este parámetro). En la unidad didáctica, el material 4 se sitúa en un nivel 5, esto no significa que un estudiante que es capaz de resolver todas las tareas de este nivel, también pueda resolver todas las tareas de un nivel anterior. Indudablemente, hay casos en que se cumple la inclusión, como ser capaz de relacionar y traducir con fluidez distintas representaciones, puesto que esta tarea se ha venido trabajando en las fichas anteriores, y si un alumno no había logrado comprender que de una tabla o datos se puede traducir a una gráfica cualitativa, difícilmente podrá entender las acciones de Valentina, reflejados en el episodio 1, al estudiar la dependencia de variables. Por otra parte, tareas como "Identificar e interpretar información de gráficas, tablas y expresiones verbales de medios de comunicación", no se habían trabajado anteriormente, y no requieren un mayor grado de dificultad en comparación con tareas anteriores, pero sí requieren capacidades y actitudes que no se habían trabajado anteriormente como interpretar una gráfica en un contexto complejo o contrarrestar la interpretación que pueda hacer el periodista al redacatar una noticia sobre datos organizados en un gráfico, capacidades que no necesariamente son cognitivamente más complejas que tareas anteriores

b) Determinar hasta qué punto se lograron los niveles de competencia, se estudia para cada competencia.

Respecto a la competencia modelización, las acciones de Valentina promueven un proceso de matematización según Pisa (OCDE, 2003), puesto que transporta el problema real a la tarea matemática de estudiar la dependencia de variables. Además, induce a elaborar otras representaciones que permiten modelar la tarea más eficientemente, es decir se tienen más herramientas para interpretar los datos. Valentina induce acciones en los estudiantes como elaborar, describir e interpretar el modelo, que permiten negociar con todo el grupo que hay una independencia entre las variables, y con ello responde a una parte de la actividad. Sin embargo, la tarea de analizar críticamente el modelo y reflexionar sobre él no se cumple como era de esperar. Si bien se refleja que Valentina en la pregunta d) (episodio 2) constantemente induce a que los estudiantes critiquen el modelo, son escasas las intervenciones de alumnos que efectivamente logran lo esperado por Valentina. Por ejemplo un grupo de alumnos analiza críticamente el modelo (línea 551), Cristian y Arturo (línea 553-554) analizan críticamente el proceso de modelización, pero sus argumentos carecen de una justificación en los datos y se sostienen en argumentaciones externas. En la pregunta e) el esquema es similar. Y por tanto argüimos que los estudiantes no han logrado atribuir el significado esperado al análisis crítico del modelo. En definitiva no se logra el nivel 5 de modelización esperado.

En el análisis del episodio 3 se argüía una seria de factores que no permitieron a Valentina que los estudiantes analizaran el modelo con un sentido crítico. Si bien la falta de tiempo era un factor relevante, desde un punto de vista de las normas matemáticas (Yackel y Cobb, 1996), de qué manera inciden éstas puede explicar la razón de que Valentina no alcanzara a negociar la reflexión sobre el modelo. Los estudiantes no están acostumbrados a desarrollar tareas que impliquen reflexionar sobre el modelo, por tanto no es de extrañar que solo unos cuantos estudiantes levantaran la mano indicando que comprendieron el problema (línea 628).

Respecto a la argumentación, ocurre algo similar que en la modelización. Para lograr un nivel 5, la tarea promueve que los estudiantes comprendan que los datos no tienen una interpretación única ya que depende de la intencionalidad y finalidad de la interpretación. Valentina, en las actividades c), d) y e), induce a que se justifiquen ciertas afirmaciones; si bien en c) se negocia una justificación, en d) y en e) los estudiantes no comprenden el sentido de las preguntas. Desde el punto de vista de las normas, no están acostumbrados a clases de este tipo de actividades de interpretar desde varios puntos de vista una gráfica, por tanto no logran atribuir el sentido a la actividad que se esperaba. En consecuencia, los estudiantes no logran completar el nivel 5 esperado.

c) Para desarrollar esta pregunta, señalamos acciones de Valentina observadas en los episodios que de alguna manera promueven las competencias. No es propósito de este apartado profundizar en estas acciones puesto que significaría centrarse en la gestión de Valentina, por tanto solamente nos limitamos a indicarlas.

- La gestión de aula de Valentina en relación a las normas del aula de matemáticas son idóneas: los estudiantes desarrollan el papel de aprendices, Valentina ejerce de profesora y por lo general la respetan; por tanto en la clase no se observan conductas que interfieran en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Si bien hay alumnos inquietos, forman parte de la normalidad de aula, Valentina los conduce con tranquilidad.
- Valentina conduce la clase en todo momento, utiliza una estrategia de “pregunta respuesta” y eso en gran medida influye en controlar la clase y conducir la problemática a los puntos que a ella le interesa.
- Valentina generalmente profundiza en las respuestas de los estudiantes, incluso incorrectas, lo que permite profundizar en las concepciones de los estudiantes.
- Valentina continuamente le dice al curso que justifique las respuestas, lo que se concreta en que varios alumnos se focalizan en los datos para argumentar. Esta norma potencia el razonamiento de los estudiantes.
- En la pregunta b), Valentina cambia de estrategia para interpretar los datos, dado que únicamente con la gráfica no se logra un consenso respecto a la independencia de las variables.
- Valentina focaliza cada una de las preguntas en tareas matemáticas; por ejemplo en la pregunta b) logra problematizar la actividad hacia un estudio de dependencia de variables, cuyo desarrollo implicó profundizar en el significado de las variables.

Otro factor que incide en el desarrollo de competencias es el alto grado de participación de los estudiantes. Posiblemente las normas de la clase que ya anteriormente estaban establecidas, incitan a que los estudiantes expresen sus ideas espontáneas, incluso siendo incorrectas.

d) A continuación, se describen algunos aspectos de Valentina que no potencian el desarrollo de competencias.

- Establecer la estrategia de enseñanza, “pregunta respuesta” o un patrón de interacción I-R-E (iniciación- respuesta- evaluación) como único, ya que no hay espacios para que los propios alumnos sean los que conduzcan la clase.
- Las acciones de Valentina de elaborar ella misma la tabla numérica y luego la gráfica cualitativa disminuye el desarrollo del proceso construir la expresión del modelo en la competencias de modelización.
- Si bien Valentina pide que escriban las repuestas en la ficha que cada estudiante había recibido, en las preguntas c), d), y e) no hay un discurso que potencie una escritura extensa y justificada como se espera. Valentina incentiva más el desarrollo oral que escrito; el problema de ello es que los estudiantes que no tienden a hablar, participan de una manera más disminuida que los estudiantes que están acostumbrados a intervenir.

La pregunta e) es las más compleja de las cinco porque requiere un análisis más en profundidad, por tanto se ha optado por desarrollarla como un apartado.

Características de la tarea

En el apartado 4.2.3.2 se ha descrito qué características de la tareas matemáticas se han desarrollado y las que no. En este subapartado se arguye de qué manera se relacionan las características de una tarea con los niveles de competencia.

Para tal propósito, se ha rescatado el extracto la matriz de competencia (cuadro 3.4.4), sistematizado en el cuadro 4.2.8, que corresponde a las características de una tarea en el nivel 5 relacionados con las competencias. Dicho instrumento aun no se ha aplicado a la unidad didáctica y por tanto las características de la tarea y las competencias son descritas en términos generales.

Cuadro 4.2.8: Características de las tareas matemáticas y las competencias (nivel 5)

Características	Tareas matemáticas	Modelización	Argumentación
Acción: - Interpretación cualitativa y global intencionada: se opta entre posibles interpretaciones. - Traducción: cambiar de representación con fluidez *Variable:* -Estudiar la dependencia de variables. - Describir las relaciones de cambio con referencia a la variación de la pendiente - Predecir el valor de una variable a partir de valores conocidos (extrapolar) *Situación:* Familiar o no familiar *Estrategia:* no rutinaria *Lenguaje*: expresarse en lenguaje formal y estructurado con referencia a elementos del modelo. Sostenerse tanto en una información que modeliza una situación real como en razonamientos lógicos	– Interpretar y relacionar información compleja – Comunicar los razonamientos y argumentos - Argumentar características globales de las gráficas - Predecir el valor de la variable que no está en la curva, en donde no hay dependencia de variables pero por el comportamiento de la curva se puede predecir. - A partir de una gráfica, relaciona y traduce con fluidez a otros lenguajes (tabla numérica, expresión verbal, expresión algebraica) - Utilizar tablas y gráficas para la interpretación de fenómenos sociales.	- A partir de una situación real, con condicionantes complejas. Optar por un modelo (gráfica o tabla). Argumentar en base a la interpretación que más convenga. - Monitorear y controlar, revisando continuamente el modelo.	-Representaciones complejas: el propósito de la interpretación es dar una opinión - La tarea admite más de una interpretación - Hay una intencionalidad en la interpretación, por ejemplo en la Interpretación de la información de una noticia.

En el apartado 4.2.3.2 se arguye que las tareas se han desarrollado en la clase, pero que no se han logrado completamente algunas características (*acciones*: interpretación crítica; *variables y estrategia*: extrapolación; *lenguaje:* argumentación en base a un razonamiento abstracto).

Por otra parte, en el subapartado 4.2.3.3.1 anterior, se señala que no se logran los niveles esperados en las competencias de modelización y argumentación (los estudiantes no comprenden la interpretación desde dos puntos de vista, ni tampoco la argumentación bajo estas condiciones; problemas de normas respecto a tareas que reflexionen sobre el modelo).

Por tanto, se observa un patrón común en estos dos razonamientos, *la interpretación crítica*, una característica de la tarea, incide directamente en los niveles de competencia. Valentina, si bien ha inducido al grupo curso a una interpretación crítica, en el análisis de los episodios se ha puesto de manifiesto que no ha podido negociar con los estudiantes el significado de interpretación crítica que se esperaba. Lo cual ha sido una pieza clave en desarrollar la competencia al nivel esperado.

4.3 Validación del análisis

En el apartado 4.2 se han caracterizado los indicadores de los procesos matemáticos que conforman cada competencia. En este apartado se lleva a cabo la validación de dichos indicadores de procesos, mediante una validación denominada interna que consiste en determinar la fiabilidad de cada proceso , y una validez denominada externa que consiste en una evaluación por parte de dos expertos en Didáctica de las Matemáticas, sobre la fiabilidad de los procesos que conforman cada competencia.

Por otro lado, se presentan indicadores de las fases de modelización para el tópico de interpretación de gráficas. Para la competencia de modelización, se ha identificado que, además de las tareas y procesos, las fases de modelización también son un variable que determina la complejidad.

Las fases de modelización se han caracterizado siguiendo el mismo procedimiento aplicado a caracterizar los procesos matemáticos, a través de comparación constante, pero para este componente la unidad de análisis es un conjunto de acciones establecidas entre estudiantes y profesora; en cambio, en los procesos la unidad de análisis es cada acción.

4.3.1 Validación interna de los procesos

En este apartado se validan con criterios internos, los procesos que han aparecido de la competencia de argumentación y modelización[2]

Indicadores de los procesos de la competencia de argumentación

En los apartados anteriores se analizaron las clases 1 y 5 para determinar un primer listado de procesos. A partir de este listado, se utilizaron una serie de criterios para decidir qué indicadores pasan a formar parte del listado de procesos. Los criterios son:

- Frecuencia con que aparece cada indicador de procesos: una frecuencia baja es un criterio para su descarte.
- Significado del proceso en la estructura argumentativa: acciones que se han asociado a un proceso se pueden descartar por no ser coherentes o no tener lugar en una secuencia argumentativa
- Pertinencia en la estructura argumentativa: si las acciones de un indicador de proceso pueden ser incluidas en otro indicador de proceso más amplio, es un criterio para descartar el indicador

[2] Usualmente el orden es modelización y argumentación, aquí se ha invertido porque han aparecido más indicadores de procesos de argumentación que de modelización, por lo que el análisis de validación en argumentación es más nutrido que en modelización.

A partir de estos tres criterios se analizó cada indicador de proceso. En el cuadro 4.3.1 se han sistematizado las decisiones sobre qué indicadores de procesos son descartados.

Cuadro 4.3.1: Eliminación indicadores de procesos en la competencia de argumentación

Indicador	Observaciones
Situación problema	Pocas acciones que puedan codificarse como identificar datos
Identificar problema,	Las acciones aparece en escasas ocasiones; no es parte de la estructura argumentativa
Acotar problema	Pocas acciones que si bien no se pueden codificar en otro indicador, no constituyen un proceso significativo en la estructura argumentativa.
Lectura	La acciones de lectura son escasas y se han supeditado a las acciones de interpretación; no es significativo para la estructura argumentativa
Interpretación interna	Si bien hay varias acciones que responden a este indicador, para dar coherencia a la secuencia de procesos se ha optado por incorporar las acciones al proceso de interpretar datos
Interpretación externa	Las acciones aparece en escasas ocasiones: para dar coherencia a la secuencia de procesos se ha optado por incorporarlas al proceso de interpretar datos
Pasar interpretación interna a externa	Aparece en escasas acciones que se pueden codificar como interpretar, por tanto no es significativo que sea un procesos distinto a la interpretación
Identificar justificación de otro	Solo aparece una acción en todos los episodios; no es significativo,
Justificación interna	Hay pocas acciones: para dar coherencia a la secuencia de procesos se ha optado por incorporar estas acciones al proceso de justificar
Justificación externa	Hay pocas acciones: para dar coherencia a la secuencia de procesos se ha optado por incorporar estas acciones al proceso de justificar
Identificar justificación	Aunque pueda ser parte de la estructura argumentativa, al presentarse en solo dos acciones es un proceso poco significativo
No justificar	Las acciones también se pueden codificar como responder sin argumentar
Refutar	Las acciones de refutar se han agregado a los indicadores de validar datos o validar la justificación. De este modo los procesos de validación incorporan tanto las valoraciones positivas como negativas

En el cuadro, 4.3.2 se presentan los indicadores de procesos que han sido validados con estos criterios internos.

Cuadro 4.3.2: Listado de procesos de argumentación validados con criterios internos

Indicadores	Descripción
Identificar datos	Identificar los datos o enunciados que sirven para argumentar. Los datos generalmente se presentan en una gráfica o una tabla.
Interpretar datos	Interpretar los datos y las representaciones asociadas
Validar datos	Validar la identificación de lectura o interpretación de datos
Justificar	Justificar las declaraciones e interpretaciones
Validar la justificación	Validar o refutar la justificación
Reflexionar sobre la argumentación	Reflexionar en relación a los datos o sobre el proceso de argumentación
Concluir	Establecer respuestas o enunciados de término en un contexto de cierre de la situación problemática, tema o unidad

Indicadores procesos de la competencia de modelización

Los criterios que se siguen para determinar qué indicadores de proceso se descartan son similares a los descritos en la competencia de argumentación: frecuencia del indicador de proceso; significado del indicador en la modelización; y pertinencia del indicador de proceso en la modelización.

Cuadro 4.4.3. Eliminación indicadores de procesos en la competencia de modelización

Indicadores	Observaciones
Describir características del modelo	Si bien hay varias acciones de describir, éstas se han supeditado a características del modelo para atribuirle más significancia a este último proceso
Variables didácticas del modelo	Si bien hay acciones que responden a este indicador, no es parte de las fases de modelización
Describir interpretación modelo	Hay pocas acciones de describir la interpretación y se han supeditado a interpretar el modelo
Refutar interpretación modelo	Las valoraciones tanto negativas como positivas se han adherido al proceso de validar las características del modelo

Identificar el modelo	Las escasas acciones que se han indicado con identificar se han supeditado a caracterizar el modelo, interpretar el modelo o construir la expresión del modelo
Modificar el modelo	Hay escasas acciones y no es significativo en las fases de modelización
Analizar críticamente el modelo Reflexión aplicación de la matemática	Estos dos indicadores se han unido para elaborar el nuevo indicador "reflexionar sobre la modelización"

En el cuadro, 4.3.4 se presentan los indicadores de procesos que han sido validados con estos criterios internos.

Cuadro 4.3.4: Listado de procesos de modelización validados con criterios internos

Indicadores	Descripción
Caracterizar el modelo	Caracterizar un modelo: identificar o describir las características de un modelo,
Interpretar el modelo	Interpretar un modelo o su expresión (gráfica, tabla, expresión verbal o algebraica)
Validar características del modelo	Aseveraciones que validan o refutan las descripciones de las características o la interpretación del modelo
Construir expresión del modelo	Construir la expresión del modelo (sistema de referencia, gráfica, tabla, etc.)
Aplicar el modelo	Utilizar el modelo y la expresión correspondiente a la situación problemática
Validar el modelo	Validar o refutar la representación y/o propiedades del modelo
Reflexionar sobre la modelización	Reflexionar sobre el modelo, las fases de modelización y su aplicación como solución a la situación problemática

4.3.2 Validación externa de los procesos

Desarrollar una estrategia para caracterizar los procesos que conforman la modelización y argumentación en torno a un tópico matemático tiene un carácter innovador ya que no hemos encontrado antecedentes de una estrategia con una finalidad similar. Los procesos matemáticos que han emergido de los datos no se sostienen de la literatura, estos procesos se han establecido con los criterios del investigador. Si bien se ha seguido un proceso de validez interna, es también necesaria una validación externa para la caracterización de los procesos matemáticos.

Por tanto se ha pensado en dos jueces externos, no vinculados al estudio, que desarrollen la validez externa de los procesos. El objetivo del juez es valorar los procesos: cómo han emergido, las definiciones de cada uno, su significado, discutir si en conjunto son coherentes, decidir si algún proceso es innecesario o la carencia de alguno.

La elección del primer juez coincidió con una estadía del investigador en el instituto Freudenthal en Utrecht (Holanda), por tanto uno de los miembros de instituto ejerció de juez del trabajo.

La participación del primer juez se llevó a cabo en varias sesiones, su colaboración no se limitó solo a validar los procesos, si no que además contribuyó a solventar los marcos teóricos tanto de modelización como de argumentación.

En particular respecto a la modelización, este juez presentó la aproximación de modelización emergente al investigador; este marco contribuyó a consolidar el cuarto componente de la competencia de modelización, las fases de modelización. Respecto a la argumentación el juez aportó literatura sobre las herramientas utilizadas para analizar la argumentación en el aula de matemáticas. Gracias a estas lecturas el investigador evidenció que la mayoría de las investigaciones en torno a argumentación en matemáticas se basan en la reducción de Krummheuer (1995) del modelo de Toulmin (1958), lo cual confirmó la decisión tomada al inicio del análisis, de basarse en Toulmin.

Respecto a la valoración de los procesos, las aportaciones del juez se centraron en los procesos de argumentación. Estimó positivamente la decisión de reunir en un solo indicador las valoraciones positivas (validación) y negativas (refutación), y que en la discusión de los episodios se distinguieran las dos valoraciones. Una de las contribuciones fundamentales fue insistir en agregar como proceso las fundamentaciones, indicador que aparece en la adaptación de Krummheuer. El investigador inicialmente no había incorporado este indicador de proceso debido a que no apareció en ninguno de los episodios de clase, pero finalmente siguió la sugerencia del juez al reconocer que la ausencia de un proceso permitía explicar el desarrollo de la competencia de argumentación.

La participación del segundo juez fue posterior al primer juez y siguió un procedimiento distinto. Se le entregó un documento que presenta el modelo de competencia, en particular los procesos que conforman cada competencia, y donde se analiza un episodio de aula con el fin de mostrar el alcance de estas competencias.

Posteriormente el investigador se reunió con el juez. La discusión del documento se guió a través de algunas preguntas para luego centrarse en el listado de procesos. En el cuadro 4.3 5 se presenta el resumen de sus respuestas (revisadas por el juez).

En síntesis de la discusión con los dos jueces, se incorporó en la competencia de argumentación el procesos de fundamentar que se asocia a datos o hechos aceptados por todos y que apoyan la justificación, y para la competencia de modelización se incorporó el procesos de identificar las propiedades del modelo que, tal como indica su denominación, se asocia a acciones que identifiquen propiedades del modelo.

Cuadro 4.3.5: Resumen entrevista 2º juez

1) ¿Es comprensible la descripción de la estrategia de análisis para caracterizar los procesos matemáticas que conforman a cada competencia?

A partir de la lectura del documento entregado previamente, el juez consideró que si bien es comprensible y clara su lectura, al explicarse cada paso de la estrategia, considera que no queda bien claro en la redacción que los llamados indicadores son en sí mismo los procesos. Este es el motivo por el que los denominaremos: "indicadores de los procesos". No obstante, un aspecto que resalta es que quede bien explicado que los llamados "indicadores", término utilizado en la metodología para caracterizar los procesos, son los procesos en sí. Bajo este punto de vista se ha tomado la decisión de denominarlos "indicadores de proceso" en el transcurso de la caracterización de procesos, y cuando ya se halla validado estos indicadores pasar a denominarse "proceso".

2) ¿Se comprende la diferencia entre procesos matemáticos y tareas matemáticas?

En general se reconocen las diferencias, puesto que la definición que enmarca a cada uno son de por sí distintas. Las tareas conciernen a un contenido concreto y se desarrollan localmente, en cambio los procesos son transversales a los contenidos y son desarrollables a largo plazo. Pero en la concreción de estas diferencias, también se aprecian similitudes que son difíciles de separar. En esta investigación la acción de "interpretar" se asocia tanto a una tarea como a un proceso. En efecto, se identifica la tarea de interpretar una gráfica; asimismo, se identifica el proceso de interpretar el modelo de la competencia de modelización, e interpretar los datos de la competencia de argumentación. El juez argumenta que esta dualidad debería, si no abordarse porque puede exceder incluso el objeto de la investigación, sí evidenciarla y hacer consciente al lector que a veces no es tan clara esa línea divisoria. En este sentido, el juez establece una similitud con la teoría de la dualidad del objeto-proceso de Sfard (1991). A sabiendas de que nos podemos estar moviendo en modelos teóricos diferentes, es importante ser consciente de ello para evitar introducir, como nuevas, realidades que con otras denominaciones han sido abordadas anteriormente. Desde el punto de vista del juez sería interesante que tal dualidad, siempre que se diera, quedara reflejada en la discusión de los resultados.

3) ¿Los procesos que conforman cada competencia son plausibles en el contenido matemático desarrollado?

En primer lugar el juez defendió que sí son plausibles, pero con las limitaciones que suponen los datos en sí mismos. Por ejemplo, una primera limitación es el contenido; es decir, los procesos que emergen en el contenido de interpretación de gráficas no tienen por qué ser los mismos que aparezcan en otro contenido. Asimismo, el proceso de "resolver el problema matemático" cuando abordamos la competencia de modelización, no se presenta porque en la interpretación de gráficas no hay cálculo. La resolución del problema se da cuando se interpreta y elabora la gráfica.

La otra limitación, que aun no se había explicitado en el estudio, es que los datos provienen solamente de la interacción entre la profesora y los estudiantes. Aquí intervienen dos factores: la profesora y los estudiantes. La primera, en función de su formación, características, etc. puede condicionar bastante las respuestas; y por otro lado, no se han contemplado las interacciones entre los estudiantes. El análisis de estas interacciones podría haber producido otro tipo de caracterización de los procesos.

En segundo lugar se dio paso a revisar los procesos que conforman cada competencia. Para la competencia de modelización en primer lugar se trató el significado del término modelo, llegando a la misma noción del estudio: el término modelo se refiere a las representaciones y al conjunto de propiedades matemáticas asociadas que permiten estudiar una situación. Luego se contrastaron los procesos con las fases de modelización (Maaß, 2006). Se discutió la necesidad de identificar el proceso "construir un modelo", se llegó al consensó de que no es necesario puesto que construir el modelo significa caracterizar el modelo (características, propiedades, representaciones), estos elementos ya se identifican en los procesos presentes, y por tanto no se agregó. No obstante el juez destacó que identificar las propiedades del modelo es un paso posterior a caracterizar el modelo y en la estructura presente no se alcanza a diferenciar, lo cual es muy claro en la primera clase analizada. En la tarea de construir un sistema de referencia, en un principio se identifican las variables, que corresponde a caracterizar el modelo, para luego identificar las propiedades de un sistema de referencia eficiente (dos variables, punto de origen, establecer reglas entre las variables), este proceso es diferente al anterior y de una abstracción mayor; por tanto se consensuó denominarlo "identificar las propiedades del modelo". El resto de los procesos fueron validados por el juez.

En la competencia de argumentación, la discusión se centró en la necesidad de separar las acciones de validar y refutar, se llegó a la conclusión de mantenerlos como se presenta en que el proceso de validar considera la refutación. El juez destacó que la refutación no es independiente porque esta acción implica otro proceso (una interpretación, justificación, etc.). Asimismo, el juez resaltó la importancia de explicar el hecho de que la caracterización de procesos consiste en un modelo mixto, proveniente desde una perspectiva teórica de Toulimin, que se contrasta y se completa con el estudio de caso. Si bien los procesos no se pueden generalizar a otras cuestiones, por las limitaciones de ser un estudio de caso, un contenido concreto, y datos que emergen de la interacción de aula. El alcance de sus resultados tiene un componente teórico dado que sí se puede discutir qué elementos pueden ser considerados en otros contextos. Esta discusión es igualmente válida para la competencia de modelización.

4.3.3 Validación de las fases de modelización

Una vez obtenida una lista de procesos para cada competencia, se tuvo como propósito identificar los componentes de cada proceso. De manera reveladora, los componentes que encontramos en cada proceso se fueron repitiendo hasta evidenciar que eran los mismos cinco para cualquier proceso. Sin embargo no eran componentes, sino centro de interés que se pasaron a denominar focos: modelo real, variables, valores de las variables, modelo matemático, y expresión del modelo matemático.

Para caracterizar estos focos en los episodios, se ha repetido la estrategia de comparación constante utilizada en los procesos. Pero en vez que la unidad de análisis fuera cada acción en el aula, ésta correspondió a un conjunto de acciones consecutivas que apuntaban a uno de los cinco focos.

Los cinco focos se corresponden con las fases de modelización de Maaß (2006): simplificación, matematización, trabajar matemáticamente, interpretación, validación. La correlación entre las fases y los focos de modelización se da de la siguiente manera: en la fase de simplificación se analiza el modelo real, en la fase de matematización se pasa hacia el mundo matemático dado que entran en juego las variables; la fase de trabajo con el modelo se focaliza en el modelo matemático y en sus expresiones; la fase de interpretar el modelo matemático también se focaliza en la interpretación de su expresión y de las variables; finalmente, en la fase de validación las acciones se centran en validar el modelo matemático que a su vez significa validar todos sus aspectos (expresión del modelo, variables y sus valores). Si se refutan alguno de estos aspectos se vuelve a algún paso anterior. Dada esta correspondencia entre las fases de modelización y los cinco focos, al componente que agrupa estos aspectos se le ha atribuido el nombre de *fases de modelización* en interpretación de gráficas funcionales.

Dada la relación con el modelo, se optó porque las denominadas fases de modelización sea un componente más de la competencia de modelización, que junto a las tareas y procesos, constituya una variable que determina la complejidad de la actividad. En efecto, este componente se enfoca en el progreso del modelo y el paso del modelo real al modelo matemático, aspecto que las tareas y procesos no enfocan y que incide en el nivel de complejidad.

De esta manera, se han validado tanto los procesos matemáticos como las fases de modelización, lo que permite dar paso a la segunda etapa del análisis en donde se ponen en práctica los componentes de las competencias de modelización y argumentación.

4.4. Competencia de modelización

En este apartado se presenta la competencia de modelización que caracterizamos a partir de sus componentes; su desarrollado se ha organizado en cuatro apartados.

En el apartado 4.4.1 se describen los cuatro componentes:, procesos matemáticos, fases de la modelización, tareas matemáticas y niveles de complejidad. La caracterización de cada componente se ha realizado desde el tópico de interpretación de gráficas. Esto nos permite conocer las relaciones entre la competencia de modelización y el tópico elegido, pero no es posible asegurar que los procesos identificados emerjan de igual forma en otros tópicos matemáticos. Nuestra propuesta apunta a mostrar las bondades y aplicaciones que tiene la caracterización de las competencias de modelización por medio de los cuatro componentes citados y su posible extensión a otros tópicos matemáticos.

En los siguientes apartados se desarrollan los componentes de la competencia de modelización en diferentes sesiones de clases. En el apartado 4.4.2 respecto a la clase 3, en el apartado 4.4.3 respecto a la clase 4, y el apartado 4.4.4 se analiza en conjunto la clase 1 y la clase 5.

Se muestra una de las principales aplicaciones de la competencia que es estudiar el nivel de complejidad de una actividad. Para ello se determina el nivel de complejidad que se espera de la actividad antes de su aplicación, para luego contrastarlos con el nivel realmente desarrollado. También se destaca la función didáctica del modelo utilizando las nociones de la modelización emergente.

4.4.1 Componentes de la competencia de modelización

La competencia de modelización se ha caracterizado a partir de la noción de modelo, por tanto, antes de definir los componentes es necesario señalar qué se entiende por esta noción.

El término *modelo* se refiere al conjunto de representaciones y de propiedades matemáticas asociadas que permiten estudiar una situación. En la unidad didáctica se desarrollan principalmente dos modelos: *sistema de referencia* y *dependencia de variables*. Mientras que para el primer modelo se asocia una sola representación, para el segundo modelo se asocian tres representaciones que se identifican como “expresiones del modelo”:

(1) Expresión verbal del modelo: descripción verbal de una relación entre variables
(2) Expresión numérica del modelo: tabla numérica.
(3) Expresión gráfica del modelo: gráfica cartesiana que puede ser cualitativa (solo variables en ejes) o cuantitativa (ejes graduados).

Procesos matemáticos:

De acuerdo con el apartado 4.3, los procesos forman parte de la competencia de modelización. En concreto, el cuadro 4.4.1 muestra la caracterización de procesos que conforman la competencia de modelización.

Cuadro 4.4.1: Procesos de la competencia de modelización.

Procesos	Descripción
Caracterizar el modelo	Caracterizar un modelo: identificar o describir las características de un modelo,
Interpretar el modelo	Interpretar un modelo o su expresión (gráfica, tabla, expresión verbal o algebraica)
Validar características del modelo	Aseveraciones que validan o refutan las descripciones de las características o la interpretación del modelo
Identificar propiedades del modelo	Identificar las propiedades del modelo
Construir expresión del modelo	Construir la expresión de modelo (sistema de referencia, gráfica, tabla, etc.)
Aplicar el modelo	Utilizar el modelo y la expresión correspondiente a la situación problemática
Validar el modelo	Validar o refutar la representación y/o propiedades del modelo
Reflexionar sobre la modelización	Reflexionar sobre el modelo, las fases de modelización y su aplicación como solución a la situación problemática

Fases de modelización:

De acuerdo con el apartado 4.4, para el tópico de interpretación de gráficas se han identificado cinco focos: modelo real; variables; valores de las variables; modelo matemático; expresión del modelo matemático

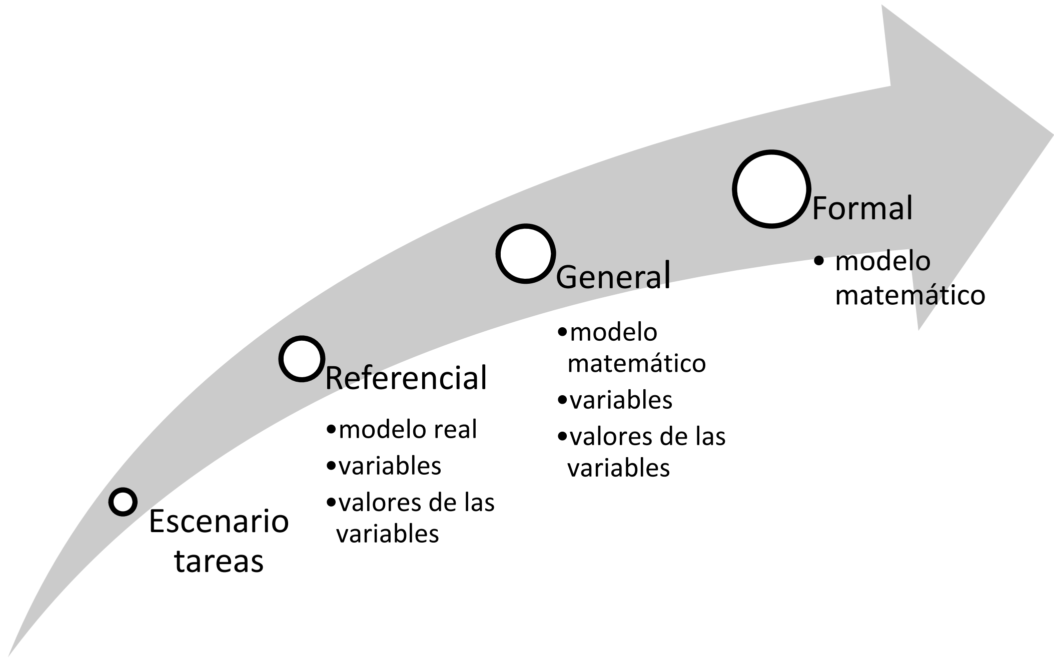
Estos cinco focos se corresponden con las fases de modelización de Maaß (2006) (ver cuadro 4.4.2):

Cuadro 4.4.2: Relación entre fases de modelización y focos de modelización

1.Simplificación • **modelo real**	4.Interpretación • modelo matemático
2.Matematización • **variables** • **valores de las variables**	5.Validación • modelo matemático
3.Trabajo matemático • modelo matemático • expresión del modelo	

En la fase de simplificación se trabaja con el modelo real. La fase de matematización constituye el paso a las matemáticas en la interpretación de gráficas dado que entra en juego el estudio de las variables. En la fase del trabajo matemático se comienza a trabajar con el modelo matemático y sus expresiones. La fase de interpretación significa interpretar las representaciones asociadas al modelo y las variables. De igual modo la fase de validación significa validar todos sus aspectos (expresión del modelo, variables y sus valores).

En los episodios de clases se evidencian continuos pasos de un foco a otro, cambios que fundamentan la naturaleza cíclica de la modelización. Aun así, se evidencia la presencia de un foco u otro dependiendo de la secuencia de la unidad didáctica; en la primera etapa de análisis se aprecia que en la clase 1 hay una mayor presencia del modelo real. En cambio en la clase 5 y última se focaliza en la expresión del modelo y en el modelo matemático. Para interpretar las características didácticas de estos aspectos, se adopta la perspectiva de modelización emergente de Gravemeijer (1999). En la figura 4.4.1 se asocian los niveles de la actividad con los focos de la modelización. Se aprecia que focalizar en la expresión del modelo corresponde a un nivel referencial, en cambio focalizar en el modelo matemático es un nivel formal.



.

Figura 4.4.1: Relación entre focos de la modelización y niveles de la actividad

Volviendo a los procesos matemáticos, si bien éstos pueden emerger en cualquier momento de la actividad y por tanto no se corresponden con las fases de la modelización (Maaß, 2006)**,** sí se puede dar una cierta correspondencia. El proceso de *caracterizar el modelo* se da frecuentemente en la simplificación, en el paso de problema real al modelo real. Los procesos *de interpretar el modelo*, *construir expresión del model*o, *identificar propiedades del modelo* y *aplicar el modelo* pueden darse desde la matematización hasta la interpretación de la solución; desde una perspectiva de la modelización emergente, depende de si el modelo se asocia a un *modelo de* o a un *modelo para*. En particular el proceso de *aplicar el modelo* se da en la fase de interpretar la solución.

Los dos procesos de validación se dan en momentos distintos en la modelización. *Validar características del modelo* se da en el comienzo de las fases, antes de la matematización; en cambio el proceso de *validar el modelo* coincide con la fase de validación. El proceso final de *reflexionar sobre la modelización* no se corresponde con ninguna fase en particular. En términos de Maaß (2006), se corresponde con las acciones metacognitivas y actitudinales que difieren de las fases de modelización.

Tareas matemáticas

El listado de tareas matemáticas de las cinco clases, proviene tanto de las indicadas en la unidad didáctica como de las determinadas a partir de los criterios expuestos en el apartado 2.3.5. Estas son:

- Clase 1: identificar variables, identificar y construir sistemas de referencia
- Clase 2: traducir de una expresión verbal a una gráfica, interpretar gráficas
- Clase 3: identificar variables, interpretar gráficas, construir una gráfica a partir de una situación pictórica
- Clase 4: identificar variables, estudiar dependencia entre variables, construir una gráfica a partir de una situación pictórica
- Clase 5: identificar variables, estudiar dependencia entre variables, traducir entre representaciones.

Nivel de complejidad

El cuarto componente permite estudiar el progreso en la competencia de modelización, los niveles de complejidad se determinan en la actividad según la relación entre las tareas, procesos y fases de modelización. En la figura 4.4.2 se concreta la competencia de modelización, mostrando las relaciones entre los cuatro componentes. Los procesos están inscritos en celdas circulares, las tareas en cursiva y las fases de modelización se visualizan en la figura cilíndrica. La relación que hay entre estos tres componentes determina un nivel de complejidad. En la figura 4.4.2 se aprecia que en un nivel de reproducción, las tareas se asocian a acciones de identificar (variables, sistemas de referencia), los procesos a caracterizar el modelo, y en las fases de modelización hay un predominio de modelos reales o ligados al contexto (*modelos de).* En cambio en un nivel de reflexión, las tareas son más generales y complejas, se desarrolla el proceso de reflexionar sobre la modelización, y en la fases de modelización hay un predominio de modelos matemáticos abstractos *(modelos para*), desligados de un contexto en el proceso de modelización.

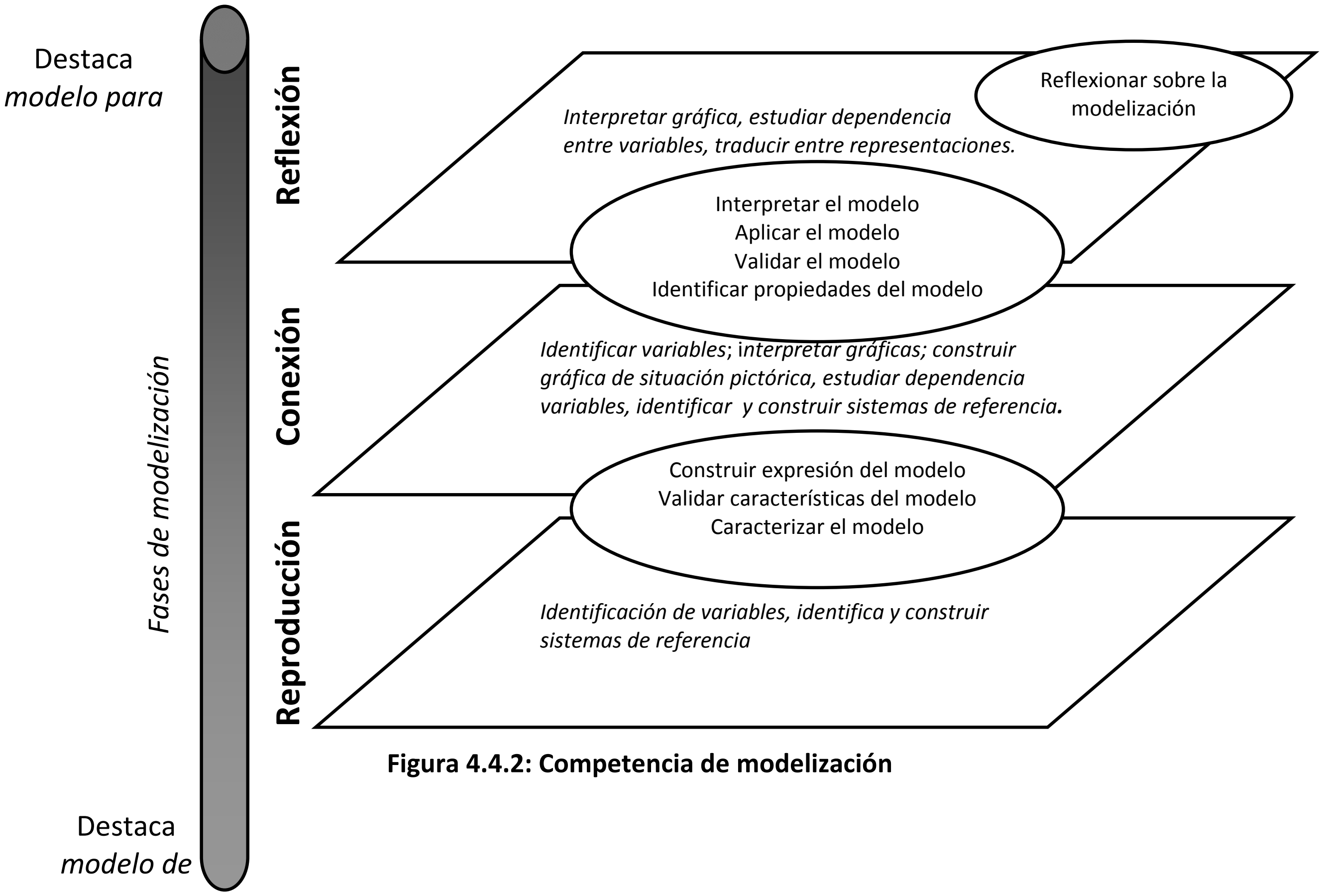


Figura 4.4.2: Competencia de modelización

4.4.2 Competencia de modelización, clase 3

En este apartado se aprecia cómo actúa la competencia de modelización en algunos episodios de la clase 3. A través de la caracterización de los procesos, tareas y fases de modelización se podrá caracterizar el nivel de complejidad que se desarrolla.

En el subapartado 4.4.2.1 se determina el nivel de complejidad de la actividad previamente a la aplicación de la unidad didáctica. Para cada pregunta de la actividad se asocia un conjunto de tareas y procesos según la competencia. Los procesos identificados son *a priori* dado que en el aula de matemáticas pueden emerger más procesos, pero no deberían variar demasiado puesto que los procesos de la competencia de modelización dependen en gran medida del diseño de la actividad. Por otra parte, los procesos de validación generalmente dependen de la gestión de la actividad y en consecuencia no se han identificado *a priori*; sin embargo cuando la validación del modelo es una acción que se destaca en la actividad sí se caracteriza a priori. Asimismo, las fases de modelización también dependen en gran medida del desarrollo de la actividad en el aula y por tanto no se caracterizan a priori.

En el subapartado 4.4.2.2 se identifican los procesos, tareas y niveles y fases de modelización de la competencia de modelización de la clase 3. El análisis de procesos es el más extenso puesto que se elabora un *mapa de procesos* para cada episodio. El mapa de proceso es la secuencia de acciones en el aula de matemáticas en que se desarrollan procesos. La figura 4.4.3 explica su diseño en base a un ejemplo real del episodio 2.

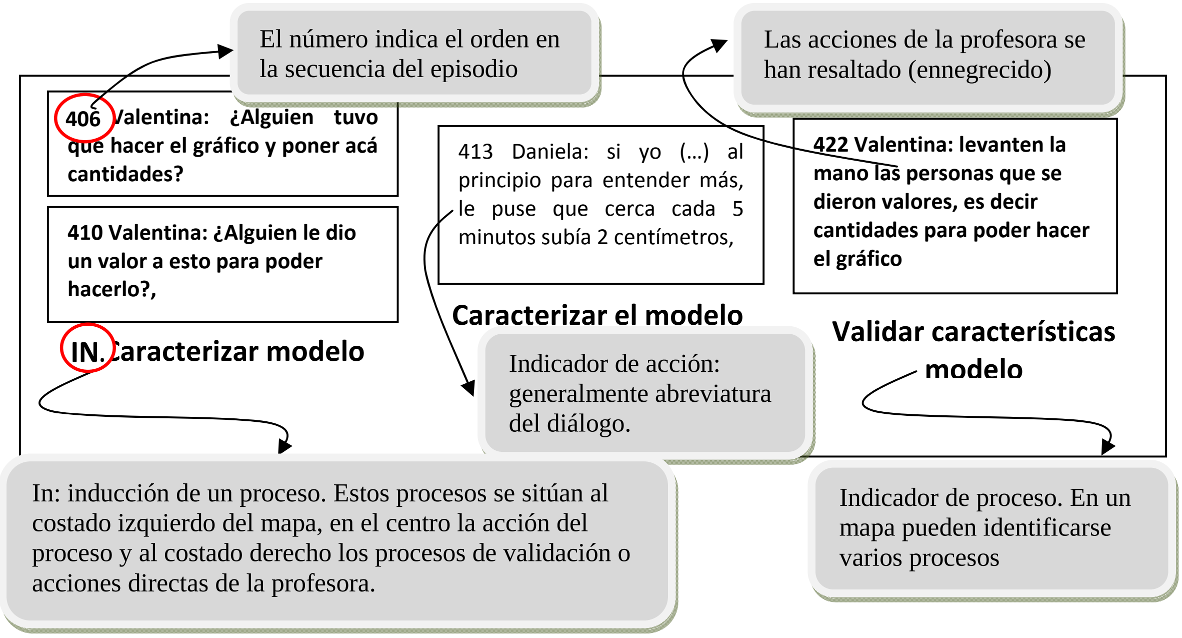


Figura 4.4.3: Mapa de proceso

Una vez que se han elaborado los mapas de proceso de cada episodio, se contrastan los procesos esperados con los que se han dado. Asimismo, se discute de qué manera se han desarrollado las tareas y posteriormente se analizan las fases de modelización.

Finalmente, se determina el nivel de complejidad esperado por la relación entre las tareas, procesos y fases de modelización.

4.4.2.1 Nivel de complejidad a priori

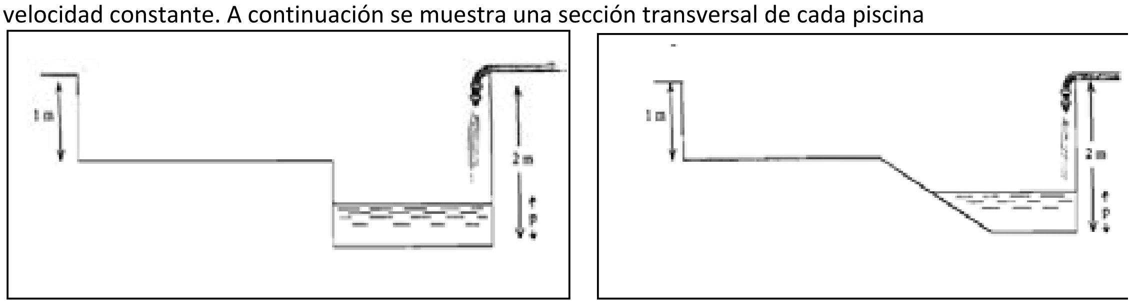
Las actividades desarrolladas en la clase 3 consisten en construir gráficas por medio de las características de una situación.

En la actividad (figura 4.4.4), se están rellenando dos piscinas, una rectangular y otra diagonal, con una manguera que vierte agua a una velocidad constante y se muestra las secciones transversales de cada piscina. Se pide modelar como crece la profundidad del agua respecto al tiempo.

La tarea de elaborar una gráfica a partir de una situación pictórica para interpretar la relación entre sus variables es un proceso que permite la aparición de varias estrategias. Una opción es dar posibles valores de la altura de agua respecto al tiempo, situar los puntos en una gráfica y unirlos con una línea. Una segunda opción es esbozar la curva de la gráfica de acuerdo con las características de la piscina. En la primera opción la gráfica se construye cuantitativamente dando valores. En la segunda opción la estrategia es cualitativa, se construye la gráfica por medio de la observación del comportamiento de las variables, identificando su relación sin necesidad de situar puntos.

Rellenando una piscina

Se están rellenando dos piscinas, una rectangular y otra diagonal, con una manguera que vierte agua a una velocidad constante. A continuación se muestra una sección transversal de cada piscina



a) Cuáles son las variables asociadas a la situación
b) ¿Cómo varía la profundidad del agua con el tiempo en el extremo más profundo en cada una de las piscinas?
c) Haz una gráfica que muestre como varía la profundidad del agua con el tiempo en el extremo más profundo de la piscina, a partir del momento en que la piscina vacía comienza a ser rellenada
d) Describe completamente, con palabras, cómo varía con el tiempo la profundidad del agua en el extremo más profundo de la piscina, a partir del momento en que comienza a rellenarse la piscina vacía.
e) ¿Qué piscina tarda más tiempo en llenarse? Justifica tu respuesta

Figura 4.4.4: Actividad clase 3

A continuación se identifican las tareas y procesos en cada pregunta y el nivel de complejidad esperado. El cuadro 4.4.3 caracteriza las tareas, competencias y nivel de complejidad presentes en la actividad.

Cuadro 4.4.3: Componentes de la competencia de modelización, clase 3.

Pre.	Tareas	Procesos	Complejidad
a)	Identificar variables	Caracterizar el modelo	Reproducción
b)	Estudiar dependencia entre variables	Caracterizar el modelo	Conexión
c)	Construir una gráficas a partir de una situación pictórica Interpretar gráficas	Construir expresión del modelo	Conexión
d)	Interpretar gráficas	Interpretar el modelo	Conexión
e)	Interpretar gráficas	Interpretar el modelo Reflexión sobre la modelización	Conexión/reflexión

La actividad se secuencia en cinco preguntas diseñadas a partir de las tareas matemáticas. Se puede observar que la secuencia de las preguntas muestra cierta complejidad, lo que se podría justificar al observar la columna de las tareas, sin embargo éste no es un criterio robusto dado que no es exhaustivo. En particular, la pregunta d) y e) se determinan por la misma tarea y tienen una complejidad diferente. Con la incorporación de los procesos se obtiene un criterio más fiable para identificar el progreso en la actividad. Siguiendo las relaciones entre proceso y tareas de la figura 4.4.3 se determina los niveles de complejidad en cada pregunta. En la última pregunta la complejidad no es fija dado que, al comparar la modelización de cada piscina, depende de si emerge el proceso de reflexión sobre la modelización.

4.4.2.2 Nivel de complejidad en el aula

A continuación se desarrolla la competencia de modelización en cinco episodios, se caracterizan los procesos, tareas y fases de modelización en cada episodio para finalmente determinar el nivel de complejidad. Asimismo se discute la función didáctica relacionando las fases de modelización con los niveles de la actividad (ver figura 4.4.2).

Procesos matemáticos

Previamente, se han identificado las variables de tiempo y profundidad de agua en cm. -pregunta *a)-.* Luego se desarrolla la pregunta *b)* que trata de describir la relación entre las variables. Varios estudiantes describen las relaciones sin mencionar la dependencia entre éstas. En el episodio 1 Valentina insiste en pedir más contribuciones, hasta que interviene Camila quien afirma que las variables son dependientes, pero justifica con un dato que no es cierto, "porque depende la velocidad del agua". Valentina reconduce la argumentación identificando el dato de que la velocidad es constante, Camila confirma el dato.

Episodio 1

133 Valentina: ¿Quién podría decir algo de esas personas que no contestaron antes y que ahora piensa qué? ¿Camila?
134 Camila: Yo creo que, no son las dos variables independientes porque depende de la velocidad del agua para poder saber si es, mientras más tiempo más pasa más rápido se llena.
135 Valentina: Ya.
136 Camila: entonces aquí no se.
137 Valentina: Sí, arriba decía que se está rellenando una piscina rectangular con una manguera que vierte agua a una velocidad constante. Eso tienen que tomar en cuenta, la velocidad del agua siempre va a ser constante.
138 Camila: Siempre va a ser la misma.
139 Valentina: Siempre va a ser la misma.
140 Camila: No va a cambiar.

Mapa de proceso 4.4.1

Interpretar modelo	Caracterizar el modelo
134 Camila: (…) no son las dos variables independientes porque depende de la velocidad del agua para poder saber si es, mientras más tiempo más pasa más rápido se llena.	**137 Valentina: la velocidad del agua siempre va a ser constante.** 138 Camila: Siempre va a ser la misma.

En el mapa de proceso 4.4.1 se aprecia que Camila en vez de describir las características del modelo, interpreta el modelo para afirmar la dependencia, pero no acierta con la interpretación. Valentina para reconducir la interpretación, identifica la característica del modelo "velocidad constante del agua", y Camila se apropia de esta característica. El proceso de caracterizar el modelo contribuye a reconducir la interpretación de Camila

Luego los estudiantes elaboran la primera gráfica -pregunta *c)*- y ponen en común la estrategia de elaboración. De los estudiantes que han intervenido, todos han elaborado la gráfica de forma cualitativa, es decir sin cuantificar los ejes y con la idea ya discutida de variación constante entre las variables, resultando una línea recta. En el episodio 2 Valentina pregunta quienes han elaborado la gráfica con una estrategia cuantitativa.

Episodio 2

406 Valentina: un minuto, dos minutos, tres minutos [los sitúa en la gráfica]. ¿Alguien tuvo que hacer el gráfico y poner acá cantidades?
407 Estudiantes: No!
408 Patricio: yo lo hice así [indica sin cantidades]
409 Valentina: tu lo hiciste así, pero no lo digas así.
410 Valentina: ¿Alguien le dio un valor a esto para poder hacerlo?, es decir no llegó a hacer la línea solo.
411 Estudiantes: [comentarios de estudiantes]
412 Valentina: a ver Daniela, ¿tú le diste valores?
413 Daniela: si yo (…) o sea, al principio para entender más, le puse que cada 5 minutos subía 2 metros, o sea 2 centímetros, y así sucesivamente. Cada 5 minutos subía más.
414 Valentina: Ya, y cada 5 minutos, iba la misma cantidad subiendo
415 Daniela: Claro.
416 Valentina: y ahí va sumando. Su compañera le dio valores. ¿Alguien más tuvo que darse valores?
417 Arturo: yo hice así mismo como ella.
418 Valentina: ya, le diste valores y te salió una línea más o menos como esta.
419 Arturo: sí.
420 Valentina: ¿quién también se dio valores?
421 Estudiantes: (...) [murmullos].
422 Valentina: y te dio exactamente igual. La Vanessa, a ver, levanten la mano las personas que se dieron valores, es decir cantidades para poder hacer el gráfico. Uno dos, tres. [Cuenta nueve manos levantadas] Muy bien. Esto también está excelente porque lo importante es entender la relación. Vamos a la hoja siguiente.

Mapa de proceso 4.4.2

406 Valentina: ¿Alguien tuvo que hacer el gráfico y poner acá cantidades?

410 Valentina: ¿Alguien le dio un valor a esto para poder hacerlo?

In. Caracterizar el modelo

413 Daniela: si yo (…) al principio para entender más, le puse que cerca cada 5 minutos subía 2 centímetros,

Caracterizar el modelo

422 Valentina: levanten la mano las personas que se dieron valores, es decir cantidades para poder hacer el gráfico

Validar características modelo

En la secuencia de mapa de proceso 4.4.2 se pregunta por una estrategia alternativa a la presentada anteriormente, lo cual implica que emerja una secuencia en torno al proceso de caracterizar el modelo. En efecto, en las intervenciones de Valentina -406, 410- se induce a cuantificar las variables. Daniela responde dando valores a las variables, que en términos de la competencia de modelización corresponde a caracterizar el modelo. Finalmente Valentina valida esta manera de caracterizar. A esta estructura la denominamos ciclo en torno al proceso respectivo, en este caso ciclo en torno a las características del modelo.

En esta actividad en que se desarrolla tanto la tarea de interpretar como de construir la gráfica, se aprecia que el proceso de caracterizar el modelo es necesario para la tarea de interpretar.

Después de elaborar la gráfica se inicia la tarea de interpretar la gráfica. Las primeras interpretaciones se centran en aspectos cualitativos, hasta que surge la intervención de Iván que propone una estrategia cuantitativa para interpretar la gráfica. Valentina destaca esta intervención pidiendo a Iván que interprete cuantitativamente para luego inducir a indicar las diferencias entre las interpretaciones. Valentina, a partir de los valores dados a las variables, elabora la gráfica situando estos valores y une los puntos.

Episodio 3

15 Iván: al principio se puede haber marcado la cantidad (…)
16 Valentina: a ver, aquí su compañero va a hablar de cantidades, escuchemos.
17 Iván: por ejemplo, cada un minuto la (…) del agua aumenta por ejemplo 10 cm. es decir que en 10 minutos ya va estar relleno completo el metro de profundidad.
18 Valentina: y que, ¿cuál es la diferencia que hizo el Iván con las anteriores?
19 Estudiantes: cantidad.
20 Valentina: cantidad, él dijo por ejemplo, si en un minuto, ¿dijiste? [Dirigiéndose a Iván], si en un minuto se llena 10 cm.
21 Luis: en 10 minutos llena el metro.
22 Valentina: es decir cada un minuto ¿cuánto se iría llenando?
23 Estudiantes: 10 cm.
24 Valentina: 10 cm., 10 cm., 10., sería constante.
25 Bernardita: (…) [ilegible, comentario de que la velocidad del agua es constante]
26 Valentina: ya, a una velocidad constante.
27 Valentina: [Valentina comienza a construir el gráfico en la pizarra] fíjense si yo digo, un minuto 10 cm. un minuto 10 cm, ¿a los dos minutos cuánto tendría que ser?
28 Estudiantes: 20 (…)
29 Valentina: 20 cm. [sitúa los valores en la gráfica como puntos], los 3 minutos tendrían que ser.
30 Estudiantes, 40... 30 (...) [confusión]
31 Valentina: ¿perdón?
32 Estudiantes: 30.

Para apreciar los procesos que se dan en este episodio se ha separado en dos mapas de proceso.

Mapa de proceso 4.4.3

16 Valentina: (…) su compañero va a hablar de cantidades, escuchemos.

18 Valentina: Y que, ¿cuál es la diferencia que hizo el Iván con las anteriores?

In. Caracterizar el modelo

15 Iván: al principio se puede haber marcado la cantidad.

17 Iván: cada un minuto (…) el agua aumenta por ejemplo 10 cm.

19 Estudiantes: cantidad.

Caracterizar el modelo

20 Valentina: cantidad, él dijo por ejemplo, si en un minuto se llena 10 cm.

Validar características modelo

En el mapa de proceso 4.4.3 se aprecia que incorporar las cantidades para interpretar cuantitativamente, en términos de la competencia de modelización, significa una nueva característica del modelo. Como se aprecia en el mapa de proceso 4.4.2 y 4.4.3, las acciones aparecen secuenciadas en forma de ciclo.

Mapa de proceso 4.4.4

20 Valentina: cantidad, él dijo por ejemplo, si en un minuto se llena 10 cm.

In. Caracte. modelo

22 Valentina: es decir cada un minuto ¿cuánto se iría llenando?

In. Interpretar modelo

21 Luis: en 10 minutos llena el metro.

23 Estudiantes: 10 cm.

24 Valentina: 10 cm., 10 cm., 10., sería constante.

28 Estudiantes: 20

Interpretar modelo

27 Valentina: [construir el gráfico en la pizarra].

29 Valentina: [sitúa los valores en el grafico como puntos]

Construir expresión del modelo

En el mapa de proceso 4.4.4 aparece la interpretación del modelo. Valentina en vez de validar la interpretación, usa los valores de la variable para dar pie a un nuevo proceso, *construir la expresión gráfica del modelo*.

Posteriormente, los estudiantes elaboran la gráfica de la segunda situación; la mayoría la elabora de forma similar a la primera situación mediante una línea recta. Valentina en vez de corregirles, permite que pongan en común las interpretaciones de las gráficas de forma similar a la primera situación, de forma tal que se enfoquen en el tipo de variación entre las variables. Una vez que se ha establecido que la variación de profundidad de agua es cada vez menor en un mismo intervalo de tiempo, Valentina elabora la gráfica de la situación 2 expresada en una curva.

El episodio 4 comienza con Valentina elaborando la gráfica, para luego comparar las dos situaciones en que la primera corresponde a una línea recta -variación constante- y la segunda se expresa como una curva.

Episodio 4

121 Valentina: ¿por qué va disminuyendo más? miren [Valentina dibuja varios puntos más, siguiendo el patrón encontrado, lo que da una forma curva].
122 Arturo: tía, pero al ir agregando puntos (…)
123 Valentina: se va agregando puntos (...) entonces qué pasa con la curva, ¿cómo es? [une los puntos, y se da la forma de la curva].
124 Pedro: es una curva.
125 Valentina: y después. Lo vamos a hacer hasta ahí no más ¿qué pasó con la relación de tiempo y profundidad en esta parte de la piscina? por qué era distinta a esta otra parte de acá [señala el dibujo de la situación anterior].
126 Iván: se expandía más el agua.
127 Valentina: ¿dónde se expandía más el agua?, que pasó con el caso dos y el caso uno
(…)
130 Pilar: es que en realidad en el caso dos y uno son como lo mismo porque el uno va así pero va más empinado, en el primero es más angosto entonces si comparamos el tiempo de cada uno, va a ser más o menos lo mismo, pero no va llenando la misma cantidad.
131 Valentina: ya, el tiempo es el mismo ¿pero cuál es la diferencia entre los dos?
132 Estudiantes: la cantidad.
133 Valentina: la cantidad de agua, en el primer ejercicio ¿qué pasaba con la cantidad de cada minuto?
134 Estudiantes: queda igual.
135 Valentina: quedan iguales, es decir si no llenaba cuatro dedos, quedada cuatro dedos, cuatro, cuatro, es decir ¿qué pasaba con la capacidad de llenado, cómo era?
136 Estudiantes: más rápido, parejo.
137 Iván: constante.
138 Valentina: parejo, constante. Es decir, siempre era igual por eso en este gráfico [señala de la pizarra la gráfica anterior de la situación uno] se fijan, por qué una línea recta. Por qué.
139 Luis: porque llegaba a lo mismo.
(…)
141 Arturo: es constante
142 Valentina: es constante, no se altera la relación que hay entre tiempo y, un minuto, 10 cm, dos

Mapa de proceso 4.4.5

In. Interpretar modelo	Interpretar modelo	Construir expresión del modelo
123 Valentina: (…) ¿qué pasa con la curva, cómo es?	124 Pedro: es una curva	**121 Valentina: [dibuja varios puntos más, siguiendo el patrón encontrado]**
125 Valentina: ¿qué pasó con la relación de tiempo y profundidad en esta parte de la piscina?	126 Iván: se expandía más el agua.	**123 Valentina: [une los puntos, y se da la forma de la curva]**
127 Valentina: ¿dónde se expandía más el agua?	130 Pilar: si comparamos el tiempo de cada uno, va a ser más o menos lo mismo, pero no va llenando la misma cantidad	
131 Valentina: ¿pero cuál es la diferencia entre los dos?	132 Estudiantes: la cantidad.	
133 Valentina: ¿qué pasaba con la cantidad de cada minuto?	134 Estudiantes: queda igual.	
135 Valentina: quedan iguales (...) ¿qué pasaba con la capacidad de llenado, cómo era?	137 Iván: constante.	
	142 Valentina: es constante, no se altera la relación que hay entre tiempo y, un minuto.	

En el mapa de proceso 4.4.5, desde el punto de vista de los procesos, el episodio comienza con la expresión gráfica del modelo, que sirve de apoyo o evidencia para que se dé una secuencia del proceso de interpretar entre Valentina y los estudiantes. No alcanza a darse un ciclo porque Valentina no valida las interpretaciones.

Este episodio está en el contexto de la última pregunta de la actividad, en la cual se espera un nivel de reflexión pero que aun no se aprecia en las acciones de los estudiantes.

El episodio 5, y final, es continuación del episodio anterior. Se trata de describir la diferencia entre las dos situaciones.

Episodio 5

144 Valentina: Pero ¿qué ocurrió en la situación dos?
145 Alfonso: era distinto.
146 Valentina: es distinto, por qué es distinto.
147 Estudiantes: porque no era constante.
148 Valentina: no era constante.
149 Pablo: era constante [referido a la situación dos] pero ese relieve hace que se demore más.
150 Valentina: entonces, vuelvo a preguntar ¿cuál es la diferencia entre este [situación uno] y este [situación dos] si yo tengo la mismas variables. Tengo de variables tiempo y profundidad.
151 Luis: el espacio.
152 Pablo: la medida.
153 Valentina: la medida es igual, esta mide un metro y esta otra también mide un metro.
154 Iván: se va llenando con minutos
155 Valentina: ¿cuál era la diferencia?
156 Jorge: el tiempo
157 Valentina: el volumen de aquí [de la situación uno] está distribuida, en cambio aquí [situación dos]
158 Luis: en el segundo le falta.
159 Valentina: ¿Qué pasa en el segundo?
160 Luis: le falta un cuarto.

161 Valentina: ya, entonces ¿por qué son diferentes los dos gráficos?
162 Pablo: por la relación.
163 Valentina: ¿por qué?
164 Pablo: por la relación de tiempo y profundidad.
165 Valentina: por la relación que hay entre tiempo y profundidad. La relación aquí era: [gráfica uno] aumenta el tiempo, aumenta. Aumenta el tiempo y aumenta... en la misma.
166 Estudiantes: unidad
167 Valentina: en la misma (…)
168 Estudiantes: constante, frecuencia.
169 Valentina: en la misma frecuencia. Pero que pasa aquí, [gráfica dos] aumenta el tiempo, aumenta la profundidad, ¿pero?
170 Iván en distintas cantidades, va bajando.
171 Valentina: en distintas cantidades, es decir que la altura que va subiendo, la profundidad que va subiendo el agua no.
172 Estudiantes: no es la misma
173 Valentina: no es la misma.

Mapa de proceso 4.4.6

150 Valentina: ¿cuál es la diferencia entre este [situación uno] y este [situación dos]?

159 Valentina: ¿Qué pasa en el segundo?

161 Valentina: ya, entonces ¿por qué son diferentes los dos gráficos?

164 Pablo: por la relación de tiempo y profundidad.

169 Valentina: ¿Qué pasa aquí, (gráfico dos) aumenta el tiempo, aumenta la profundidad, ¿pero?

In. caracterizar el modelo

156 Jorge: el tiempo

157 Valentina: el volumen de aquí [de la situación uno] está distribuida, en cambio aquí [situación dos]

160 Luis: le falta un cuarto

170 Iván: en distintas cantidades. va bajando

Caracterizar el modelo

165 Valentina: por la relación que hay entre tiempo y profundidad.

171 Valentina: en distintas cantidades, es decir que la altura que va subiendo, la profundidad que va subiendo el agua no

Validar características modelo

El desarrollo de la última pregunta destaca el proceso de construcción del modelo. Si bien la tarea que acompaña el proceso es interpretar las gráficas, el proceso de interpretar el modelo se ha supeditado a identificar las características del modelo.

Por otra parte, no se alcanza a llegar a un nivel de reflexión sobre la modelización. La reflexión se ausenta posiblemente porque no hay criterio por parte de los estudiantes de comparar los dos modelos, aunque Valentina insistió a lo largo de la clase en discutir en el aula cuales son las diferencias, en los episodios finales se aprecia que son escasas las intervenciones que contribuyen a esta intención. Valentina más bien se limita a validar estas aportaciones.

También se puede explicar el hecho de no lograr un nivel de reflexión por una cuestión de normas en el aula; en efecto, siguiendo la terminología de normas sociomatemáticas (Yackel y Cobb, 1996; Planas y Gorgorió, 2001) se aprecia que las normas sociomatemáticas de los estudiantes no contemplan comparar la matematización que fundamenta las dos situaciones. Si bien Valentina pregunta en varios momentos la diferencia entre las dos situaciones, los estudiantes se limitan a apuntar en algunas características de las variables, pero en ningún momento se centran en la noción central de variación que anteriormente ya había surgido. Si bien Valentina valida las características que ellos nombran, la profesora busca respuestas más globales en que la noción de variación era fundamental. Sin ello era difícil desarrollar un proceso de reflexión.

Los cinco episodios analizados muestran los procesos que se dan en el desarrollo de esta actividad que principalmente son: *caracterizar el modelo*, *interpretar el modelo* y *construir expresión del modelo*. A continuación se trata de qué manera se han desarrollado las tareas matemáticas y las fases de modelización, para finalmente determinar el nivel de complejidad logrado en la actividad.

Tareas desarrolladas:

En primer lugar recordemos las cuatro tareas a lo largo de la actividad: Identificar variables; Estudiar dependencia entre variables; Construir una gráfica a partir de una situación pictórica; Interpretar gráficas.

Las tareas esperadas han sido desarrolladas en las preguntas respectivas. En efecto se ha discutido en el aula ampliamente sobre las variables profundidad de agua y tiempo. La tarea de estudiar la dependencia de variables se ha reflejado en el episodio 1, obteniendo argumentos para afirmar la dependencia entre variables. La construcción de gráficas es una de las tareas que más discusión a traído, dado que prácticamente la totalidad de los estudiantes dibujan las dos gráficas con una forma de proporcionalidad directa, la primera situación es correctamente interpretada y graficada, pero la segunda no. Valentina en vez de rebatir la interpretación del modelo de la segunda situación pide a los diferentes alumnos que muestren y expliquen sus interpretaciones. Finalmente en vez de decir que se han equivocado, comienza ella a interpretar la situación y dibuja la expresión del modelo, acción que muestra al inicio del episodio 4.

Finalmente la tarea de interpretar el modelo se aprecia sobre todo en el episodio 4, pero a su vez se da transversalmente en el desarrollo de la actividad. Aunque por como se desarrolla la última pregunta en que no se perciben del todo las diferencias entre los modelos, pensamos que no se alcanza a interpretar el modelo de dependencia de forma comprensible en el aula.

Fases de modelización

El desarrollo de la actividad en los episodios 1, 2 y 3 se focaliza en la expresión real del modelo y en identificar y dar valores a la variables (nivel referencial). En el episodio 4 se pasa a focalizar en la expresión del modelo y finalmente en el episodio 5 se focaliza en el modelo matemático.

Se aprecia que la expresión gráfica del modelo aun no surge espontáneamente para analizar la situación dado que es una tarea explícita dentro de la actividad. Esto se pone de manifiesto en que la discusión en torno a la dependencia de las variables se desarrolla de manera extensa sin que los estudiantes tuvieran la necesidad de construir la gráfica; es Valentina quien comienza a estudiar la situación representándola gráficamente. El modelo matemático de dependencia de variables aún está en una faceta emergente, y aún es un modelo que emerge de la actividad. La actividad llega a aproximarse a un nivel general pero no podemos decir que se consolide en este nivel.

Nivel de complejidad

En la competencia de modelización, para determinar el nivel de complejidad se debe relacionar las tareas, procesos y fases de modelización. En la figura 4.4.2 se han relacionado los componentes de la competencia de modelización, que aparecen en los cinco episodios analizados, para determinar los niveles de complejidad. La primera tarea de identificar variables se trata antes del episodio 1 y no se ha relacionado con los procesos, por tanto no se ha identificado en la figura 4.4.5.

Las tareas se han relacionado con los procesos que se desarrollan. En las tareas de construir la expresión del modelo e interpretar la gráfica se identifican los mismos procesos, la diferencia radica en que las fases de modelización progresan de un nivel referencial a uno general. Estas relaciones determinan un nivel de conexión en la actividad.

En consecuencia no se ha alcanzado el nivel de reflexión que idealmente se puede estar esperando. Seguramente el modelo aun es emergente en los estudiantes y por ello no permite todavía reflexionar sobre él.

Han emergido otros procesos en el aula para cada tarea que los esperados *a priori*. Se esperaba que en la tarea de dependencia entre variables se diera solamente el proceso de caracterizar el modelo, pero se aprecia también el proceso de interpretar el modelo. De igual modo para las tareas de construir la gráfica e interpretar la gráfica solo se esperan las procesos directamente relacionados para cada tarea, pero además surgen dos procesos más en cada tarea (ver figura 4.4.5). El proceso esperado de reflexionar sobre la modelización no emerge y es el único ausente de los previstos. Estas relaciones encontradas contribuyen a mejorar los criterios para determinar *a priori* los procesos implicados para cada tarea. En consecuencia, por las relaciones que se dan entre las tareas, procesos y fases de modelización se converge a un nivel de conexión.

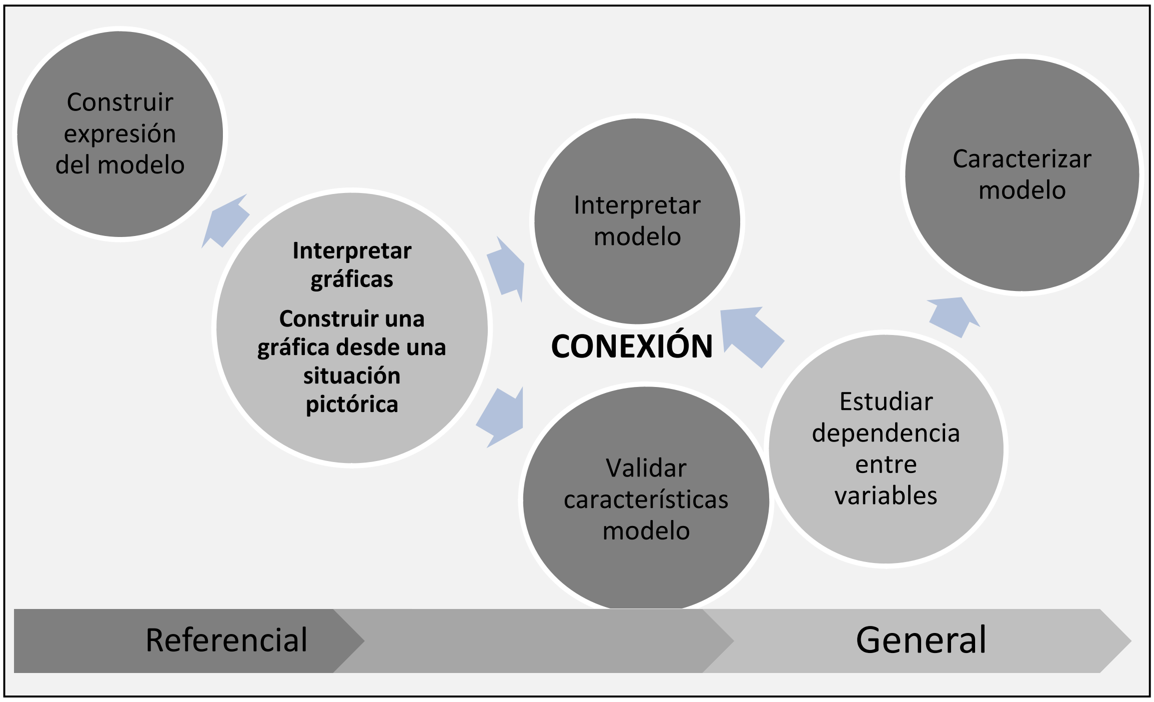


Figura 4.4.5: Desarrollo de la competencia de modelización, clase 3

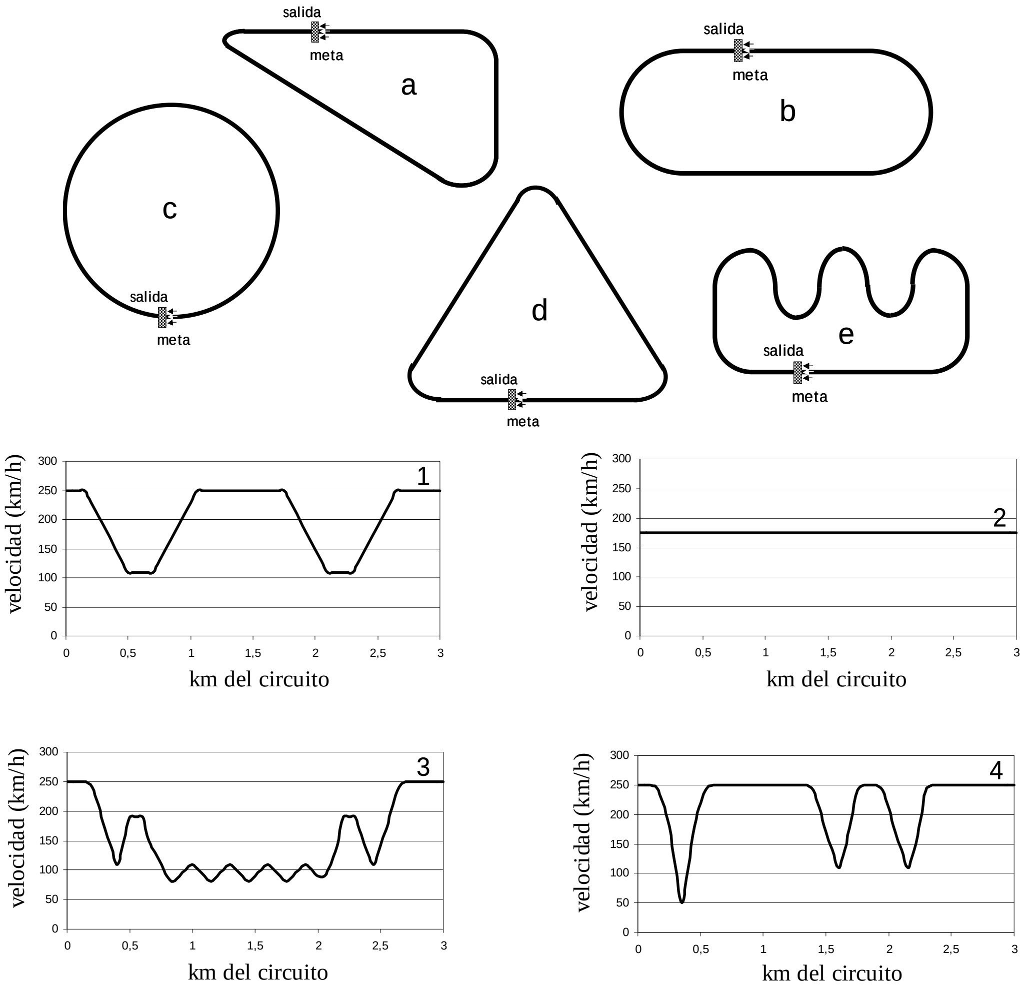
En la figura 4.4.5 los círculos más ennegrecidos son los procesos y las tareas los círculos más claros. En la parte inferior en forma de flechas se ilustra que el nivel referencial de la actividad predomina (más ennegrecido).

4.4.3 Competencia de modelización, clase 4

Se repite el procedimiento seguido en la clase 3 para la ficha 11 de la clase 4. La actividad (figura 4.4.6) consiste en corresponder cinco circuitos diferentes con sus respectivas gráficas que representan la velocidad de un coche según el circuito. La tarea equivale a traducir de una representación pictórica a una gráfica. El procedimiento esperado es que los estudiantes apliquen la estrategia de focalizarse en la inclinación de la curva para determinar la gráfica que corresponde a la representación pictórica.

Carrera de

A continuación aparecen esquematizados cinco circuitos de carreras de 3 km, en los que se señala el punto de partida y llegada del automóvil. Además, encontrarás cuatro gráficos en los que se representa la velocidad de un automóvil al ir recorriendo uno de los circuitos.



Indica qué circuito corresponde a cada uno de los distintos gráficos

Figura 4.4.6: Actividad clase 4

4.4.3.1 Nivel de complejidad a priori

El cuadro 4.4.4 caracteriza las tareas, procesos y los niveles de complejidad esperados en la actividad, desarrollada en la clase 4.

Cuadro 4.4.4: Componentes de la competencia de modelización, clase 4.

Tareas	Procesos	Complejidad
Identificar variables	Caracterizar el modelo	Reproducción
Estudiar dependencia de variables	<u>Caracterizar el modelo</u> Interpretar el modelo	Conexión
Relacionar una representación pictórica con una representación gráfica	Interpretar el modelo	Conexión

La actividad consiste de una sola pregunta “Indica qué circuito corresponde a cada uno de los distintos gráficos”, pregunta que se asocia a tres tareas matemáticas. La tarea de identificar las variables, tal como en la clase 3, en términos de modelización, corresponde a caracterizar el modelo y se espera un nivel de reproducción.

En la tarea siguiente se pudo haber seguido el mismo criterio que en la clase 3, y proponer a priori que se desarrollen los procesos directamente relacionados a la tarea, pero se han contemplado los resultados de la clase 3 y se ha agregado un proceso más (subrayado). En la tarea de relacionar o traducir de una representación pictórica a la gráfica se espera una interpretación del modelo, pero pueden emerger más procesos.

La relación entre tareas y procesos determina que se espera un nivel de conexión para la actividad. En el siguiente subapartado se describe cómo se desarrolla esta actividad en el aula.

4.4.3.2 Nivel de complejidad en el aula

A continuación se estudia la competencia de modelización a partir de tres episodios de la clase 4. Se caracterizan los procesos, tareas y fases de modelización para finalmente determinar el nivel de complejidad. Asimismo se relacionan las fases de modelización con los niveles de la actividad.

Procesos

El episodio 1 corresponde a una interacción entre la profesora Valentina y un grupo de estudiantes. Valentina se acerca al grupo para explicarles la actividad con mayor detención dado que con la explicación introductoria los integrantes del grupo no entendieron bien lo que tenían que hacer. Por medio de una estrategia de pregunta respuesta Valentina logra que el grupo entienda la actividad, comiencen a interpretar los circuitos y traten de establecer una correspondencia con las gráficas.

Episodio 1

21 Valentina: ¿tú estás viendo la forma o estás relacionando la velocidad?
22 Mario: la forma y la velocidad.
23 Valentina: sí porque yo no puedo llegar y decir. Porque, a ver, si esto va así y cae [señala una sección de una gráfica de la ficha], puedo decir, ¿cómo es la velocidad ahí? (mueve el dedo sobre la sección de la curva) ¿y qué pasó con la velocidad ahora? [Pasan dos segundos] ¿Pero, qué pasó con la velocidad?
24 Alfonso y Marcelo: bajó, disminuyó.
25 Valentina: bajó la velocidad, disminuyó la velocidad. ¿Y después qué pasó?
26 Mario: se mantuvo la velocidad.
27 Valentina: se mantuvo la velocidad. ¿Y después qué pasó?
28 Alfonso y Marcelo: ¡aumenta!.
29 Valentina: ya, entonces yo, ¿qué tengo que hacer? ¿Qué tengo que investigar?. [Ahora señala el circuito a)] Salida, salgo de aquí. ¿Qué pasa con la velocidad?
30 Marcelo: aumenta.
31 Valentina: Ya, y ahora al entrar en la curva que tiene que pasar.
32 Marcelo: disminuye.
33 Valentina: Ya disminuye, después que hago [en el diálogo mueve el dedo por el circuito].
34 Alfonso: (…) [indica con los dedos que tiene que relacionar las dos representaciones. El circuito y el gráfico].
35 Marcelo: aaaaaaaaaaah.
36 Valentina: qué tengo que ir viendo yo, imagínate un vehículo, un auto.
37 Mario: (…) [comienza a interpretar una gráfica].
38 Valentina: ya entonces, lo que tu [Mario] me acabas de decir.
39 Mario: va a una velocidad, disminuye, después aumenta la velocidad.
40 Valentina: ¿qué es lo que estamos buscando en todo esto?
41 Mario: la velocidad y…
42 Valentina: ya po, ¿y tienes que mirar esto no? [Señala un circuito].
43 (…) [interpretan la pista Mario con la ayuda de Valentina].
44 Alfonso: es ésta [indica la grafica que corresponde a la pista señalada].
45 [Alfonso relaciona los máximos y mínimos de la gráfica, con las curvas de la pista].
46 Valentina: ah, ¿entendiste lo que estamos haciendo?
47 Alfonso: sí.
48 Valentina: ahora sí entiendes lo que hay que hacer, ya.
49 Marcelo: ah, y este [señala el circuito circular] va con este gráfico [señala gráfica constante]
50 Valentina: está bien, sigan adelante.

Mapa de proceso 4.4.7

21 Valentina: ¿tú estás viendo la forma o estás relacionando la velocidad?	22 Mario: la forma y la velocidad	**23 Valentina: sí porque yo no puedo llegar y decir. Porque, a ver, si esto va así y cae [señala una sección de una gráfica de la ficha]**
In. Caracterizar modelo	**Caracterizar el modelo**	**Validar Características modelo**

En el mapa de proceso 4.4.7 se observa que la discusión entre el grupo de estudiantes y Valentina comienza con la identificación de las características de las variables -forma y velocidad- diálogo que se desarrolla en un ciclo en torno a la caracterización del modelo. Este proceso, en este caso, es necesario para las acciones siguientes de interpretar y traducir del circuito a la gráfica.

Mapa de proceso 4.4.8

23 Valentina: ¿y qué pasó con la velocidad ahora?	24 Alfonso y Marcelo: bajó, disminuyó.
25 Valentina: ¿y después qué pasó?	26 Mario: se mantuvo la velocidad.
27 Valentina: ¿y después qué pasó?	28 Alfonso y Marcelo: ¡aumenta!.
29 Valentina: [Ahora señala el circuito a)] Salida ¿Qué pasa con la velocidad?	30 Marcelo: aumenta.
31 Valentina: al entrar en la curva que tiene que pasar	32 Marcelo: disminuye
33 Valentina: después que hago [en el diálogo mueve el dedo por el circuito].	34 Alfonso: (…) [indica con los dedos que tiene que relacionar las dos representaciones. El circuito y el gráfico
36 Valentina: qué tengo que ir viendo yo, imagínate un vehículo, un auto.	37 Mario:[comienza a interpretar una gráfica].
In. Interpretar modelo	**Interpretar modelo**

En el mapa de proceso 4.4.8 se aprecia que el episodio continúa con una acción constante en torno a la interpretación del modelo, es decir sobre la relación entre las variables en la expresión pictórica del modelo (circuito). La acción de Alfonso significa que ha comprendido de qué manera relacionar y traducir entre las representaciones. Valentina en vez de validar la interpretación de Alfonso sigue con el rol de inducir y Mario interpreta la gráfica.

Mapa de proceso 4.4.9

43 (…) [interpretan la pista Mario con la ayuda de Valentina].	
45 [Alfonso relaciona los máximos y mínimos de la gráfica, con las curvas del circuito].	49 Marcelo: ah, y este [señala el circuito circular] va con este gráfico [señala gráfica constante]
Interpretar modelo	**Aplicar modelo**

En el mapa de proceso 4.4.9 y final de episodio, los estudiantes han adquirido una estrategia para traducir de una representación a otra. Esta acción se refleja en dos procesos: *interpretar el modelo*, y *aplicar el modelo;* el uso del modelo se evidencia en el desarrollo de una estrategia para relacionar las variables con la forma del circuito.

El episodio 2 se desarrolla mientras se ponen en común los resultados: en el subepisodio 2.1 se discute sobre la representación gráfica del circuito circular, una línea horizontal constante. En el subepisodio 2.2 los estudiantes argumentan por qué el circuito b) corresponde al gráfico 1.

Episodio 2.1

74 Valentina: Pero ¿cómo es posible que este circuito está en este gráfico que es una línea?, pero como si este circuito es circular y este [gráfico] es una línea recta.
75 Gustavo: se puede doblar, se puede hacer un círculo.
76 Pedro: tía, pero el gráfico son los km. Recorridos.
77 Valentina: ya, eso quiero que me expliquen, ¿esa línea recta que es lo que quiere decir?
78 Arturo: los km. Recorridos.
79 Valentina: los Km. recorridos ¿y?
80 Estudiantes: la velocidad.
81 Valentina: ¿Por qué en este circuito la velocidad es constante, ¿cuánto es la velocidad a propósito?
82 Luis: 375 km.
83 Valentina: ¿de cuánto es la velocidad?.
84 Estudiantes: de 180 km.
85 Valentina: ya aproximadamente de 180 km. ¿qué quiere decir? Gustavo en este gráfico [señala en la pizarra la gráfica 2] va siempre a la misma a la velocidad.
86 Luis: va a 180.
87 Valentina: va a 180. ¿Por qué no tienen que cambiar nunca la velocidad?
88 Iván: porque es circular.
89 Valentina: Porque es circular [dibuja con el dedo en el aire el circuito circular]. Y si hubiera sido en forma así, por ejemplo así [dibuja un rectángulo] ¿si hubiera sido de esta forma el circuito que hubiera pasado?
90 Estudiantes: [murmullos]
91 Valentina: ¿hubiera podido ser una línea recta?
92 Estudiantes: ¡No!

Mapa de proceso 4.4.10

74 Valentina: Pero ¿cómo es posible que este circuito está en este gráfico que es una línea?, pero como si este circuito es circular y este [gráfico] es una línea recta.

75 Gustavo: se puede doblar, se puede hacer un círculo.

76 Pedro: tía, pero el gráfico son los km. Recorridos.

77 Valentina: ¿esa línea recta que es lo que quiere decir?

78 Arturo: los km. Recorridos.

79 Valentina: los Km. recorridos ¿y?

80 Estudiantes: la velocidad.

81 Valentina: ¿Por qué en este circuito la velocidad es constante, ¿cuánto es la velocidad a propósito?

83 Valentina: ¿de cuánto es la velocidad?.

84 Estudiantes: de 180 km.

87 Valentina: va a 180. ¿Por qué no tienen que cambiar nunca la velocidad?

88 Iván: porque es circular

89 Valentina: Porque es circular [dibuja con el dedo en el aire el circuito circular]

In. Interpretar modelo

Interpretar modelo

Validar características modelo

El mapa de proceso 4.4.10 del subepisodio 2.1 significa un ciclo en torno a la interpretación del modelo. Valentina en la pregunta de cómo se relaciona la forma con la gráfica está induciendo a interpretar el modelo. Gustavo responde interpretando, y Valentina responde con otra pregunta que también induce a interpretar. Este patrón se repite varias veces hasta que Valentina valida la interpretación de Iván que, al ser una consecuencia de las intervenciones anteriores, en realidad significa que Valentina valida las interpretaciones de los estudiantes. En el ciclo de interpretación si bien la interpretación es cualitativa -se destaca que la velocidad es constante porque la forma es circular- Valentina incorpora aspectos cuantitativos -¿de cuánto es la velocidad?- en la interpretación. La cuantificación es una estrategia que atribuye significado a las variables.

Episodio 2.2

98 Valentina: ya los que no levantan la mano, creen que es otro. Ya bajen la mano, de los que levantaron la mano, quien podría explicar que es el b) me dicen que es el b) y el b) es [esboza la gráfica] Daniela escucho.
99 Daniela: primero empezó con una velocidad media constante y después dio una vuelta, entonces bajó su velocidad y después volvió con una velocidad constante más acá.
100 Valentina: es decir que esta línea cuando baja, ¿qué quiere decir?
101 Estudiantes: qué da una curva [en tono de pregunta]
102 Valentina: que da una curva, ¿disminuye la velocidad?
103 Estudiantes: ¡sí!
104 Valentina: después en esta parte de aquí, se mantiene un poquito, ¿después?
105 Arturo: se eleva y se sigue manteniendo, y después tiene que bajar de nuevo.
…
110. Valentina: por qué pusiste el a).
111 Osvaldo: porque como que el gráfico es un triángulo me fui guiando por las dobladas, tía como que lo fui formando (…)
112 Valentina: a ver, pero el triángulo [profesora esboza el circuito] mira aquí parte a toda velocidad, luego que tiene que hacer aquí [en la primera curva cerrada].
113 Estudiantes: disminuir.
114 Valentina: Disminuir ¿y después que es lo que hace aquí? [Señala ese tramo del circuito].
115 [discusión de cómo seguir]
116 Osvaldo: el gráfico 1 baja así po'!
117 Valentina: pero mira, [señala tramos del circuito] subió por harto tiempo, después la bajo de nuevo y después la subió ¿esta distancia que bajó aquí, es la misma que subió aquí?
118 Estudiantes: ¡No!

Mapa de proceso 4.4.11

98 Valentina: quien podría explicar que es el b)

104 Valentina: después en esta parte de aquí, se mantiene un poquito.

110. Valentina: por qué pusiste el a).

In. Validar modelo

In. Interpretar modelo

99 Daniela: primero empezó con una velocidad media constante y después dio una vuelta, entonces bajó su velocidad y después volvió con una velocidad constante más acá.

105 Arturo: se eleva y se sigue manteniendo, y después tiene que bajar de nuevo.

112 Valentina: a ver, pero el triángulo [profesora esboza el circuito] mira aquí parte a toda velocidad, luego que tiene que hacer aquí [en la primera curva cerrada].

Interpretar modelo

En el mapa de proceso 4.4.11 del subepisodio 2.2 se pide a los estudiantes que argumenten por qué la gráfica 1 es el circuito b). Si bien las acciones son semejantes al subepisodio anterior - Valentina pregunta y los estudiantes responden- el proceso que representan es distinto. Valentina busca validar el modelo, a través de destacar la estrategia que se utiliza en todos los casos, que consiste en relacionar los cambios de la formas del circuito con la variación de la pendiente en la gráfica. Las acciones de los estudiantes corresponden al proceso de interpretar el modelo, y no de aplicar el modelo puesto que todavía están desarrollando la estrategia y no son conscientes de ésta.

El episodio 3 y último ilustra el cierre de la clase. En el subepisodio 3.1 se discute sobre la gráfica 4. En el subepisodio 3.2 Valentina cierra la actividad preguntando a los estudiantes que aprendieron en la actividad.

Episodio 3.1

144 Arturo: por la curva que cierra, después sale subiendo la velocidad, y manteniéndola, después tiene que bajarla y manteniéndola un poco, y vuelve a bajar hasta la meta.
145 Valentina: Devuelvo la pregunta para todos, este gráfico [señala gráfica 4] me dice a mí, cómo el vehículo va; ganó altura, subió, bajó, y luego cayó en un hoyo
146 Estudiantes: ¡no!
147 Valentina: entonces que es lo que me dice el gráfico aquí
148 Estudiantes: que bajó la velocidad
149 Valentina: que bajó la velocidad, tengo que leer. ¿En qué tengo que fijarme primero?
150 Estudiantes: en las variables
151 Valentina: en las variables
152 Estudiantes: y saber ver los gráficos
153 Valentina: Y saber ver los gráficos

Mapa de proceso 4.4.12

144 Arturo: por la curva que cierra, después sale subiendo la velocidad, y manteniéndola, después tiene que bajarla y manteniéndola un poco, y vuelve a bajar hasta la meta

145 Valentina: Devuelvo la pregunta para todos, este gráfico [señala gráfica 4] me dice a mí, cómo el vehículo va; ganó altura, subió, bajó, y luego cayó en un hoyo

Interpretar modelo

149 Valentina: ¿en qué tengo que fijarme primero?

In. Identificar propiedades modelo

150 Estudiantes: en las variables

152 Estudiantes: y saber ver los gráficos

Identificar propiedades modelo

En el mapa de proceso 4.4.12 ante la interpretación de Arturo, Valentina interpreta intencionalmente de manera errónea para tratar la estrategia de interpretación, que en términos de la competencia de modelización es reconocer el modelo. Valentina al preguntar por lo primero que hay que fijarse, de forma implícita, induce a que identifiquen las propiedades del modelo, proceso que efectivamente se desarrolla porque se reconocen dos propiedades del mismo: identificar las variables e interpretar las gráficas.

Episodio 3.2

155 Valentina: a ver alguien aprendió algo hoy.
156 Estudiantes si (…) no (…)
157 Valentina: quien más aprendió aparte de Ignacio
158 Gustavo: tía, es que (…) [Ilegible lo que se dice]
159 Valentina: ya, acá el Alex me dice que esa no es: [señala gráfica 1 y deja una pausa]
160 [Valentina sigue preguntando]
161 [Juan explica lo que aprendió, ilegible lo que dice]
162 Valentina: No puedo juzgar el gráfico me dice su compañero, y como que en el gráfico se está cayendo algo, no puedo juzgar.
163 Pablo: depende de las variables.
164 Valentina: ya, depende de las variables.
165 Valentina: ¿qué dices tú?
166 Francisco: depende de las cosas, de las variables de la figura, porque si no hay variables no va poder ser la figura, lo importante son las dos.

Mapa de proceso 4.4.13

155 Valentina: a ver alguien aprendió algo hoy **In. Reflexionar sobre la modelización**	**162 Valentina: No puedo juzgar el gráfico me dice su compañero, y como que en el gráfico se está cayendo algo, no puedo juzgar.** 163 Pablo: depende de las variables. 166 Francisco: depende de las cosas, de las variables de la figura, porque si no hay variables no va poder ser la figura, lo importante son las dos. **Reflexionar sobre la modelización**

El mapa de proceso 4.4.13 corresponde al momento de cierre de la clase; Valentina con la pregunta sobre qué se aprendió hoy, invita a que los estudiantes reflexionen sobre la actividad. En efecto Valentina rescata la aportación de Juan: “no juzgar el gráfico”, Pablo indica que depende de las variables y Francisco agrega la relación entre “figuras”- refiriéndose a la forma del circuito- y variables. Cada una de estas aportaciones, desde un punto de vista de la competencia de modelización, implican una reflexión sobre la modelización: estrategia para interpretar la gráfica, destacar la importancia de las variables u otros elementos. Este proceso emerge escasamente y se vincula generalmente al cierre de una actividad, pero asimismo tiene un componente metacognitivo muy importante puesto que en este proceso se sistematizan los aprendizajes. Este proceso no estaba previsto que apareciera, dado que dependía sustancialmente de la gestión de Valentina en el cierre de la actividad. Si bien los estudiantes pudieron haber dado más elementos en esta reflexión final, es un progreso en relación con los niveles de complejidad.

Los tres episodios analizados evidencian los procesos que emergen en desarrollo de esta actividad: en el inicio se dio *caracterizar el modelo*, en la puesta en común el proceso que destaca es *interpretar el modelo*, y en el cierre de la actividad aparece el proceso de *identificar propiedades del modelo*, y *reflexionar sobre la modelización*.

A continuación se trata de qué manera se han desarrollado las tareas matemáticas y las fases de modelización, para finalmente determinar el nivel de complejidad logrado en la actividad.

Tareas desarrolladas

Las tres tareas que se desarrollan en la actividad son: identificar variables; estudiar dependencia entre variables; y relacionar una representación pictórica con una representación gráfica.

La tarea de identificar las variables se ha ido trabajando en las clases anteriores de forma explícita, y en esa clase se mantuvo la misma lógica. En esta actividad existía una particularidad, las relación entre variables en las gráficas -distancia y velocidad- no son la misma relación de variables que se focalizó en la representación pictórica, ya que es la forma del circuito la que hace variar la velocidad y no la distancia. No obstante no se aprecia que esta ambigüedad afecte a la discusión de aula puesto que se centran en las variables que efectivamente emergen de la interpretación del circuito, “forma” y “velocidad”.

La tarea de dependencia entre variables se desarrolló de forma implícita, es decir, se trató como afectaba una variable a la otra, y en base a dicha relación se relacionó con una gráfica respectiva. Pero no se alude al término dependencia de variables. Este hecho es coherente con la propuesta de la actividad dado que en una sola pregunta se espera desarrollar tres tareas, y no hay condiciones suficientes para que surja una discusión enfocada a la dependencia entre las variables. En otras actividades se ha potenciado el trabajo sobre el concepto de dependencia, y en efecto se ha discutido explícitamente, en cambio en esta actividad se aplica el concepto a otra tarea: relacionar una representación pictórica con una representación gráfica. Esta tercera tarea se desarrolla de forma explícita, ya que a lo largo de la clase se desarrolla una estrategia para relacionar el circuito con la gráfica.

A partir de los resultados, se ha puesto de manifiesto que se han desarrollado de forma satisfactoria las tres tareas presentes en la actividad.

Fases de modelización

En el desarrollo de la actividad se aprecia de qué manera se pasa del estudio del modelo real al estudio del modelo matemático, es decir, de un nivel referencial a uno general. En el episodio 1 y subepisodio 2.1 se estudia el modelo real -el circuito-, las variables con sus valores y la expresión del modelo -gráfico-, pero aun no se estudia el modelo matemático. Estos focos representan un nivel referencial de la actividad. Pero en el subepisodio 2.2 las estrategias para relacionar el circuito con la gráfica se sistematiza, apreciando que hay una transición del estudio del modelo real hacia el estudio del modelo matemático. Finalmente en el episodio 3 se estudian la expresión del modelo y las variables enfocadas hacia el estudio del modelo matemático. Estos focos muestran que se está pasando a un nivel general de la actividad. No obstante, aun falta un estudio del modelo matemático de forma explícita para que se desarrolle este nivel de forma plena. Se hubiera alcanzado un nivel general si en el desarrollo de la actividad la estrategia se hubiese caracterizado de forma explícita de manera que hubiera emergido el significado de pendiente y se relacionara la inclinación de la pendiente con las formas del circuito.

Nivel de complejidad

Se seguirá el mismo procedimiento desarrollado en la clase 3 para determinar el nivel de complejidad. En la figura 4.4.7 se han relacionado los componentes de la competencia de modelización para determinar los niveles de complejidad.

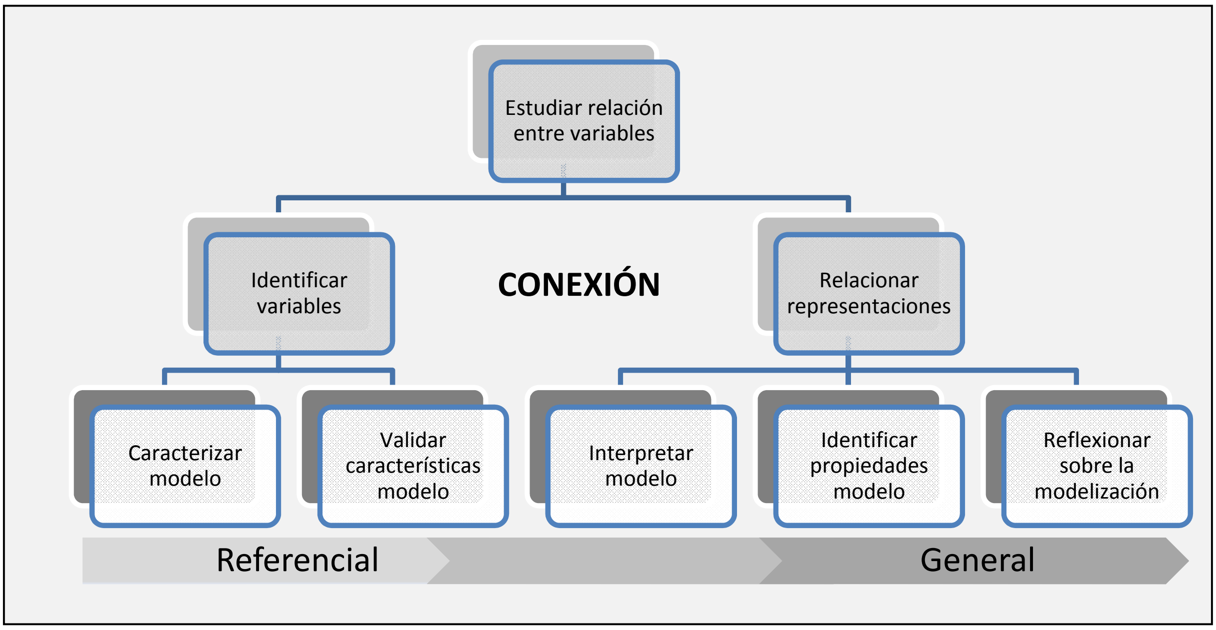


Figura 4.4.7: Desarrollo de la competencia de modelización, clase 4

En este caso han emergido varios procesos para las tres tareas. La tarea de identificar las variables se corresponde con el *proceso caracterizar el modelo* y su validación, ciclo que se da al inicio del episodio 1. Para la tarea de relacionar representaciones emergen otros tres procesos. El conjunto de los cinco procesos se desarrollan en la tarea de dependencia de variables. Algunos procesos se esperaban *a priori* tal como *caracterizar el modelo* e *interpretar el modelo*, y dependiendo de la gestión de la clase, también se esperaban los procesos de validación de los respectivos procesos anteriores. Sin embargo, no se esperaban dos procesos más que se dieron en el episodio 3 en el momento de ir cerrado la clase: *identificar propiedades del modelo* y *reflexionar sobre la modelización*.

Respecto a las fases de modelización, si bien el progreso desde un nivel referencial a uno general se repite en comparación a la clase anterior, en esta clase el nivel general tiene mayor presencia, dado que el modelo está cambiando desde un modelo que emerge desde las estrategias de cada estudiante, a un modelo para relacionar el circuito con la gráfica, cambio que se manifiesta en el subepisodio 2.2 y se plasma en el episodio 3 en que se focaliza en el modelo matemático.

Siguiendo los criterios expuestos en la presentación de la competencia de modelización, ilustrados en la figura 4.4.2, la combinación entre tareas, procesos y fases de modelización indica un nivel de complejidad de conexión.

Si bien el proceso de reflexionar sobre la modelización indica un nivel de reflexión, este proceso recién emerge al final de la clase y por parte de la profesora, no siendo un proceso desarrollado por los estudiantes. Además en un contexto de cierre de una actividad es más factible que se pueda dar un proceso de reflexionar sobre la modelización, y depende en gran parte de la gestión de la profesora y la participación de los estudiantes.

Ahora bien, las dos clases analizadas con el nuevo modelo de competencia resultan ser de una complejidad de conexión, y asimismo se aprecian diferencias entre las dos, ya sea por la cantidad de procesos que emergen como por las fases de modelización que recorren. Posiblemente ocurre de forma similar con el resto de las clases que se analicen. Ante estos resultados se aprecia que el nivel de conexión abarca muchas actividades y es mejor organizarlo de otra manera. En la propuesta inicial descrita en el apartado 4.1 en donde se analiza la unidad didáctica, la *matriz de competencias* caracteriza seis niveles de complejidad, pero para el análisis de aula se consideró que era demasiado detallista y compleja, optando por una estructura de menos niveles que fuera más robusta. De esta manera se siguió los tres niveles de complejidad que acuñó PISA. El nivel de reproducción y reflexión se corresponden bien con los datos, pero el nivel de conexión queda demasiado amplio. En consecuencia se plantea una nueva propuesta de cuatro niveles, dos niveles que corresponderían a "conexión" y el primer y último nivel corresponde a reproducción y reflexión respectivamente.

El segundo nivel se denominará conexión y el tercer nivel generalización. En la figura 4.4.8 se presenta la nueva relación entre los componentes de la competencia de modelización, estos son:

- El nivel de reproducción se logra con acciones de identificación, asociados tanto a tareas de identificar variables y sistemas de referencias, como a los procesos en torno a caracterizar el modelo. En las fases de modelización no se ha registrado ningún foco.
- El nivel de conexión se logra con acciones de interpretar, traducir y construir, que se asocian a tareas de interpretar, traducir y construir gráficas, construir sistemas de referencias, así como estudiar la dependencia entre variables; asimismo, estas acciones se asocian a procesos en torno a caracterizar interpretar el modelo, y construir la expresión del modelo. En las fases de modelización predomina el nivel de referencia. Es decir surge el *modelo de* las estrategias de los estudiantes.
- El nivel de generalización también se asocia con acciones de interpretar y traducir, en que desarrollan las mismas tareas, pero los procesos cambian a identificar las propiedades del modelo y aplicar el modelo. En las fases de modelización predomina el nivel general, es decir, se usa un *modelo para* abordar una situación.
- En el nivel de reflexión las tareas no cambian, pero se desarrolla el proceso de reflexionar sobre la modelización. En Las fases de modelización predomina un nivel formal del modelo.

Estos mismos niveles se utilizarán en la competencia de argumentación. Bajo esta nueva perspectiva la actividad de la clase 3 se desarrolla en un nivel de conexión, y la clase 4 es de un nivel de generalización.

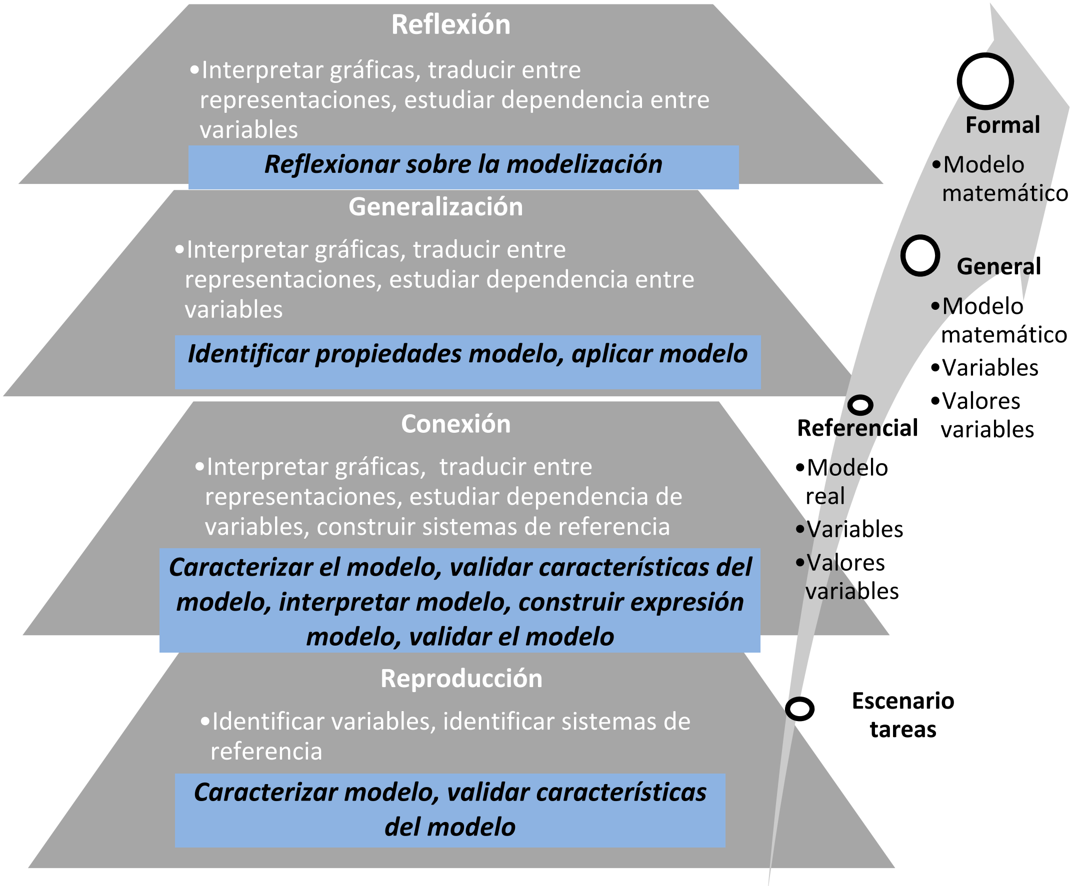


Figura 4.4.8: Adaptación componentes de la competencias de modelización

4.4.4 Análisis competencia de modelización, clase 1 y clase 5.

Hasta este momento, en la parte presentada del apartado 4.4 se ha desarrollado la competencia de modelización en las clases 3 y 4. En el apartado 4.2 si bien se caracterizaron los procesos en la clase 1 y clase 5 y se determinaron los niveles de complejidad, aun no se habían validado los procesos, y no se había incorporado las fases de modelización. Como para estas clases es relevante presentar de qué manera se desarrolla la competencia de modelización, de acuerdo con las modificaciones hechas en los apartados 4.4.2 y 4.4.3. El desarrollo de la competencia se ejemplifica en el análisis de un episodio para cada clase y no de todos los episodios ya analizados anteriormente de la clase 1 y 5, ya que con un solo episodio es posible mostrar el desarrollo de la competencia de modelización y en particular determinar el nivel de complejidad.

Por otra parte se caracteriza para toda la clase las fases de modelización puesto que el primer análisis aun no se consideraba. Finalmente se caracterizar la competencia de modelización siguiendo los mismos criterios mostrados en las figuras 4.4.7 y 4.4.7.

Clase 1 subepisodio 3.2

Se ha elegido el episodio 3.2 para ejemplificar la competencia de modelización.

Se produce la intervención de Ignacio que sugiere establecer una regla como criterio, y con aprobación de Valentina, Ignacio describe la regla para definir un sistema con números, (que vendría a ser un sistema cartesiano). Valentina propone a Carolina que valide este sistema, pero a continuación surge una nueva intervención de Oscar que pregunta si los números romanos son infinitos; la interrogante incentiva una nueva discusión ya que el sistema numérico romano cumple con las propiedades que hasta ahora se habían identificado en la clase: origen, y poder escribir cualquier número. Luego Valentina reflexiona un instante y negocia con los estudiantes el hecho de que los números romanos tienen el inconveniente que en números grandes se usa una extensión larga de letras, en cambio el sistema de numeración decimal, al ser posicional, utiliza una menor cantidad de símbolos. Esta comparación permite justificar la predominancia de un sistema de coordenadas con numeración decimal en comparación con otros sistemas.

Subepisodio 3.2

395 Valentina: dejen que el Ignacio va a hablar.
396 Ignacio: podríamos establecer una regla, así por ejemplo.
397 Valentina: a ver escuchen esto que está diciendo su compañero es súper importante, ya vamos a usar los números; y, si usamos los números que vamos a hacer.
398 Ignacio: establecer una regla.
399 Valentina: ¡establecer una regla!. [Valentina escribe en la pizarra]
400 Ignacio: por ejemplo, si nosotros decimos que el tesoro está en el (4,3) (…). Si partimos para abajo, el primer número va a ser el de abajo, decimos tres y cuatro. Entones tomamos el número de abajo que va a ser el primero y tomamos el de arriba que va a ser el segundo.
401 Valentina: yo lo podría tomar así, [escribe en la pizarra (3,4)] tres, rayita o una coma, cuatro. ¿Así?
402 Ignacio: y el primero va a ser el de la línea de abajo.
403 Valentina: y el primero va a ser el de la línea de abajo.
404 Ignacio siempre, el primero va a tener que ser el de la línea de abajo.
(…)
407 Valentina: [escribe puntos de referencia] y, los puntos de referencia que establecimos aquí (…)
408 Oscar: tía, los números romanos también son infinitos, cierto.
409 Valentina: hee, No tienen [duda]. Se podrían escribir hasta el infinito, ¿pero tú has visto números romanos muy largos? [Escribe un número extenso en notación de números romanos, 388]
410 Estudiantes: 380… 388, 389!
411 Valentina: si utilizamos un sistemas de referencia como lo ponemos [no se escucha bien, pero ella indica con el dedo que por la cantidad de letras que conforma un número romano, no es pertinente ponerlas en un eje]
412 Valentina: la gracia del sistema decimal es que utiliza poquitos símbolos.
413 Estudiantes: (…) [no es escucha bien]
414 Valentina: ¿cuáles son los símbolos que utiliza el sistema decimal, a ver qué dígitos utiliza? ¿Qué dígitos utiliza? el 0, el 1...9.
415 Estudiantes: 0,1…9.
416 Valentina: con estos dígitos yo puedo armar.
417 Oscar: cualquier número.
418 Valentina: cualquier número, y acá en los números romanos después tengo que establecer otro símbolo que, vieron en séptimo [curso anterior], cuando voy a escribir los miles que escribo una rayita arriba, entonces en realidad, este sistema utiliza, el sistema decimal, perdón el romano para nosotros no es muy apropiado porque el sistema nuestro decimal utiliza poquitos dígitos. Con eso puedo armar todos los números y es conocido por todos.

Procesos

Se han caracterizado dos mapas de proceso para diferenciar la secuencia de procesos que emergen.

Mapa de proceso 4.4.14

396 Ignacio: podríamos establecer una regla

399 Valentina: ¡establecer una regla!. [Valentina escribe en la pizarra]

400 Ignacio: por ejemplo, si nosotros decimos que el tesoro está en el (4,3) … Si partimos para abajo, el primer número va a ser el de abajo, decimos tres y cuatro. Entonces tomamos el número de abajo que va a ser el primero y tomamos el de arriba que va a ser el segundo.

401 Valentina: yo lo podría tomar así, [escribe en la pizarra (3,4)], tres, rayita o una coma, cuatro. ¿Así?

402 Ignacio: y el primero va a ser el de la línea de abajo.

403 Valentina: y el primero va a ser el de la línea de abajo.

404 Ignacio: siempre, el primero va a tener que ser el de la línea de abajo.

Validar características modelo

Caracterízar modelo

Se puede apreciar que en el mapa de proceso 4.4.14 se desarrolla un ciclo en torno al proceso *caracterizar el modelo*. En efecto, cuando Ignacio propone la regla, Valentina valida su intervención que también sirve para que Ignacio siga describiendo el sistema de referencia.

Mapa de proceso 4.4.15

408 Oscar: tía, los números romanos también son infinitos, cierto.

409 Valentina: ¿Tú has visto números romanos muy largos? [Escribe 388 en número romano](...)[Indica con el dedo que por la cantidad de letras que conforma un número romano, no es pertinente ponerlas en un eje]

Características modelo

414 Valentina: ¿cuáles son los símbolos que utiliza el sistema decimal? 0, 1, 2, 9…

412 Valentina: la gracia del sistema decimal es que utiliza poquitos símbolos.

Validar características modelo

416 Valentina: con estos dígitos yo puedo armar

417 Oscar: cualquier número.

418 Valentina: cualquier número, el sistema romano no es muy apropiado porque el sistema nuestro decimal utiliza poquitos dígitos. Con eso puedo armar todos los números y es conocido por todos.

In. Caracterizar modelo

Caracterizar modelo

Validar características modelo

En el mapa de proceso 4.4.15 hay dos secuencias del mismo proceso. En la primera, Valentina refuta las características del sistema romano comparando con un modelo sistema numérico decimal; como consecuencia en la segunda secuencia se induce a describir y a validar las características de un modelo numérico-decimal. En ambos casos es la profesora quien finaliza las secuencias, ya que Ignacio, en el diálogo, tiene un rol de acompañante

Fases de modelización

En la actividad de la clase 1 el propósito es reconocer al sistema cartesiano como un sistema de referencia eficaz. Desde la competencia de modelización, el propósito es caracterizar el modelo del sistema cartesiano: esto es identificar las propiedades del sistema cartesiano. En la figura 4.4.9 se ha identificado cuatro sistemas de referencia, si bien cada uno representa un modelo distinto dado que cada uno tiene propiedades y limitaciones distintas. También se puede apreciar como la evolución de un mismo modelo desde un modelo real a un modelo matemático. Las propiedades del sistema cartesiano -punto de partida, posición de las variables, los números son infinitos- han emergido de la discusión de las limitaciones que presentan los anteriores modelos. El sistema cartesiano se ha caracterizado como un *modelo de* la actividad, el cual aparece en las siguientes etapas de la unidad didáctica como un *modelo para* abordar una situación. En el ejemplo del subepisodio 3.2 estamos ante un modelo emergente de las gráficas cartesianas. Se analiza por primera vez en la actividad el modelo matemático, el sistema cartesiano, el cual ha emergido del contexto de la actividad y por tanto es un *modelo de*. Para luego estudiar la propuesta de un sistema numérico romano analizando las variables y sus valores. Esta expresión del modelo es refutada, pero permite da paso a validar las características del sistema cartesiano. El trabajo con el modelo cartesiano es el eje transversal en la clase, el cual finalmente es validado y aplicado al cierre de la clase. El *modelo* sistema cartesiano emerge en la discusión entre Valentina y los estudiantes, en consecuencia el nivel de la actividad es de referencia.

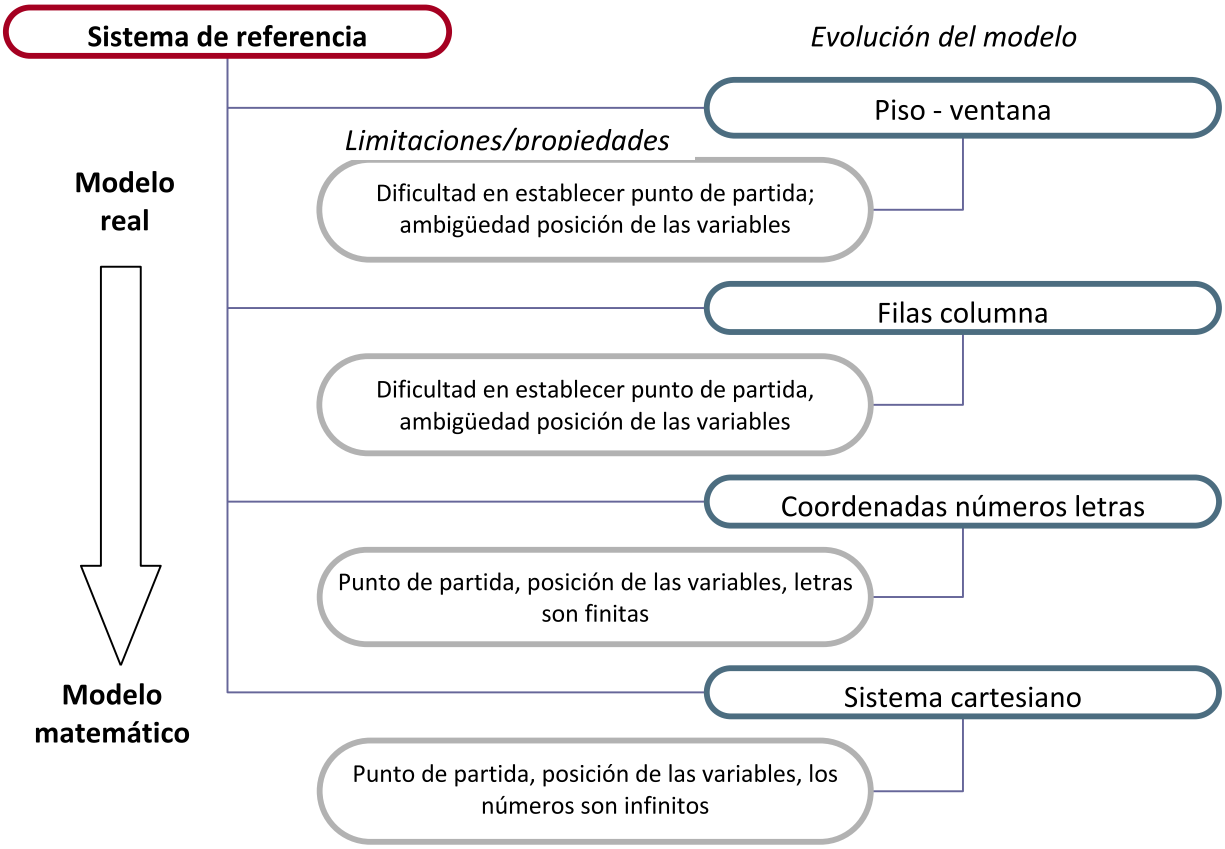


Figura 4.4.9: Modelación emergente del sistema cartesiano

Nivel de complejidad

- *Nivel de complejidad a priori*

La actividad se centra en la tarea matemática de comprender que el sistema cartesiano es uno de los más eficaces para identificar puntos en el plano. Tal como se ha hecho en las anteriores clases, en el cuadro 4.4.5 se caracterizan los procesos esperados para las tareas de la actividad y el nivel de complejidad, que es de conexión.

Cuadro 4.4.5: Componentes de la competencia de modelización, clase 1

Tarea	Procesos	Complejidad
Comprender que el sistema cartesiano es uno de los más eficaces para identificar puntos en el plano	Caracterizar el modelo Interpretar el modelo Validar el modelo	Conexión
Construir un sistema de referencia	Caracterizar el modelo Interpretar el modelo Construir expresión del modelo	

- *Nivel de complejidad en el aula*

La tarea de "comprender que el sistema cartesiano es uno de los más eficaces para identificar puntos en el plano" se desarrolla transversalmente a los largo de la actividad, y por eso la tarea de "construir un sistema cartesiano" está supeditada a la tarea ya mencionada. Si bien esta segunda tarea desarrolla algunos de los procesos ya mencionados, de cara a determinar el nivel de complejidad en la actividad basta con centrarse en la primera tarea. Por lo tanto el análisis en el aula se centra en esta tarea.

En el aula, en torno a esta tarea emergen prácticamente todos los procesos de la competencia de modelización, excepto el proceso de reflexionar sobre la modelización.

En este caso, el nivel de la actividad de referencia es el indicador que permite determinar que la actividad es de conexión. La gran cantidad de procesos que se desarrollan no significan un nivel de complejidad mayor, puesto que el modelo recién ha emergido y aun falta trabajar en otras actividades con el modelo. La figura 4.4.10 ilustra el desarrollo de la competencia de modelización en la clase 1.

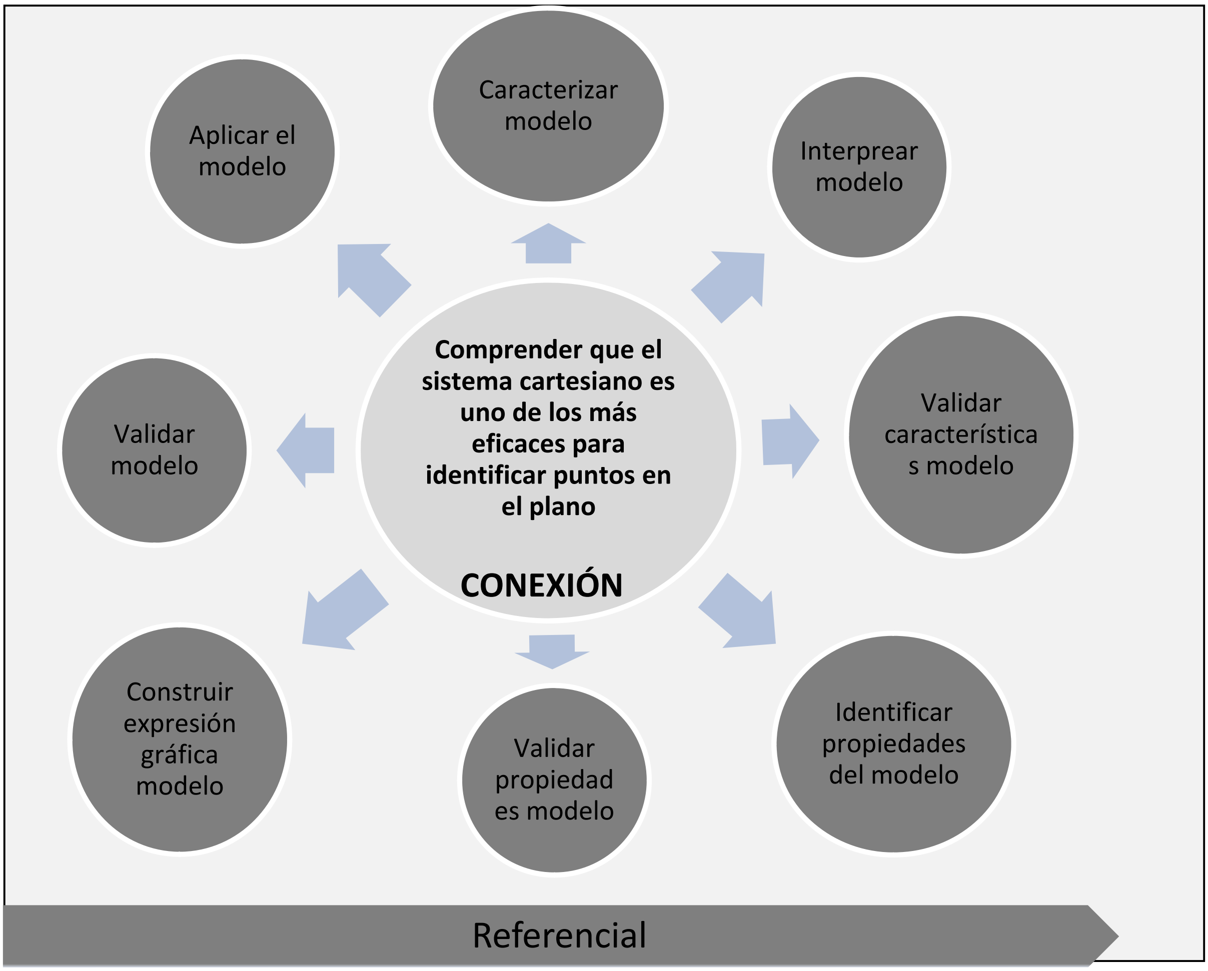


Figura 4.4.10: Procesos que conforman la competencia de modelización, clase 1

Clase 5 subepisodio 2.1

Procesos

El subepisodio que se analiza corresponde a gran parte del desarrollo de las preguntas d) y e). Previamente ya se ha dado inicio a la pregunta, pero los estudiantes no las entienden y muestran confusión. Valentina acota y explica nuevamente el sentido de la tarea. En la pizarra se mantienen dos frases que se han escrito previamente: “menos velocidad más accidentes”, y “a más velocidad menos accidentes”, y una tabla en que se han organizado los datos expuestos en la gráfica.

En el episodio a partir de la noticia del diario, Valentina plantea que los alumnos expliquen la afirmación de Francisco Huerta, “la velocidad excesiva no es un factor de riesgo en los accidentes”. Hay confusión entre los estudiantes en entender la tarea, por lo que Valentina acota la pregunta a que expliquen porque Francisco interpreta a “menos velocidad más accidentes” y a “más velocidad menos accidentes”. Teo y otros alumnos dicen que eso es falso: “’no puede ser, porque eso no dice el gráfico”, la confusión sigue unos segundos hasta que Valentina pide repetir un comentario a Leo sobre cómo se explica la interpretación de Francisco Huerta. Leo, leyendo la tabla expuesta en la pizarra, identifica que seleccionando tres años se cumple la relación menos velocidad más accidentes, del mismo modo considerando los años 1999 y 2001 se interpreta la relación, a más velocidad menos accidentes. Una vez que Valentina valida las argumentaciones, pone en pie la discusión de si la afirmación de Francisco Huerta es cierta. El grupo clase argumenta que es falsa la afirmación, con razones ajustadas a los datos y otras por ocurrencias propias; estas discrepancias entre las argumentaciones dan pie a Valentina para decirles a los estudiantes que tienen que pensar mejor sus razones.

Subepisodio 2.1

507 Valentina: a ver, vuelvo a explicar. Vamos a imaginar que Uds. son este caballero Don Francisco, es decir que Uds. tienen que dar razones, Don Francisco dijo [señala frase en la pizarra] “a menos velocidad más accidentes”. Aaah, según este gráfico [señala tabla] a menos velocidad más accidentes, ahora pido, Cristian [tono de atención], que Uds. me expliquen, me den las razones de, a más velocidad
508 Estudiantes: menos accidentes
509 Valentina: va a ver menos accidentes
510 Diego: Profesora, yo creo que eso es falso.
511 Valentina: pero pónganse en el caso de don Francisco Uds. leen el gráfico [señala tabla]
512 Teo: Profesora, ¿pero cómo nos vamos a basar en el gráfico, si el gráfico no muestra eso?
513 Estudiantes: no muestra eso
514 [Varios alumnas están en desacuerdo con lo que se propone, hay confusión en comprender la pregunta]
515 Valentina: Miren aquí lo que dice el Leo. ¿Podrías salir a explicarlo?
516 Leo: allí arriba, el caballero tomo los tres primeros [confusión]
517 Valentina: el caballero tomó las tres datos de arriba para explicar esto (a menos velocidad más accidentes)
518 Leo: y para los dos últimos, esto otro
519 Valentina: y para estos dos últimos lo explicaría así.
520 Alfredo: si profesora, pero profesora ahí está mal porque a menos velocidad más accidentes. [Alfredo se confunde y quería decir a más velocidad más accidentes]

521 Valentina: ¿más velocidad? [Corrige a Alfredo]
522 Alfredo: ¡así!
523 Valentina: esa es la explicación que está dando tu compañero.
524 Estudiantes: profesora está mal.
525 Lorenzo: hay muchos más accidentes.
526 Diego: [no se escucha bien, argumenta por qué está errado]
527 Valentina: Si pero como el señor dijo: que el viaje decía a menos velocidad más accidentes, entonces como Ud. me dijo que con poca velocidad hay muchos accidentes, explíqueme ahora cómo es posible que a muchas velocidad hay menos accidentes. ¿Cómo podríamos argumentarlo?
528 Alfredo: a no ser que fuéramos en una carretera.
529 Leo: fijándose en los últimos años
530 Valentina: Leo dice que fijándose en lo últimos se podría dar una razón.
531 Alumnos: °
532 Valentina: Alonso tiene otra idea
533 Alonso: en el año 1999 y en el año 2001, eso sería todo.
534 Valentina: escucharon lo que dijo
535 Alumnos: No!
536 Valentina: el daría el año 99, diría: más velocidad menos accidentes, lo justificaría con el año 99 y
537 Alonso. 2001.
538 Valentina: con el 2001 que hubo 120 (km/h) y ahí hubo más, es decir el diría.
539 Marco: ya pero hay que fijarse en el gráfico
540 Valentina: ya pero escucha
541 Valentina: a eso, porque habría dos años no más, 1999 y 2001, y con esos dos años explico. Esa es una razón que está dando él y que es correcta y está bien. Porque diría en 1999 es: a más velocidad.
542 Leo: menos accidentes
543 Valentina: menos accidentes, y en el 2001 menos velocidad más accidentes. (Señala afirmaciones en la pizarra
544 Leo: pero ahí no hay menos accidentes porque...•
545 Valentina: por eso el para poder explicar, ocupa dos años no más, los demás no los tomaría en cuenta.
546 Estudiantes: (ilegible) igual se puede tomar.
547 Valentina: pero esa respuesta que tomaría este señor estaría bien o mal.
548 Estudiantes: mal
549 Valentina: ¿porque?
550 Estudiantes: porque no está explicando todo el gráfico, está tomando lo que él quiere no más, lo que a él le conviene.
551 Valentina: está tomando lo que el quiere, lo que a él le conviene
552 Arturo: no porque no le conviene.
553 Cristian: en todo caso si él lo hace así, lo hace como, para complicarnos más. Si lo hace desordenado se puede hacer cualquier cosa.
554 Valentina: pero es que la idea es que Uds. piensen.

El subepisodio 2.1 se estudia en dos mapas de proceso. El mapa de proceso 4.4.16 analiza hasta la secuencia 520, debido a que las acciones entre la secuencia 521-526 no se asocian a ningún procesos; y el mapa de proceso 4.4.17 desde la secuencia 527 hasta que termina el subepisodio.

Mapa de proceso 4.4.16

511 Valentina: pero pónganse en el caso de don Francisco Uds. leen el gráfico [señala tabla]

515 Valentina: Miren aquí lo que dice el Leo. ¿Podrías salir a explicarlo?

517 Valentina: el caballero tomo las tres datos de arriba para explicar esto (a menos velocidad más accidentes)

In. Reflexionar sobre la modelización

510 Diego: Profesora, yo creo que eso es falso.

512 Teo: Profesora, ¿pero cómo nos vamos a basar en el gráfico, si el gráfico no muestra eso?

516 Leo: allí arriba, el caballero tomo los tres primeros [confusión]

518 Leo: y para los dos últimos**,** esto otro

520 Alfredo: si profesora, pero profesora ahí está mal porque a menos velocidad más accidentes.

Reflexionar sobre la modelización

A lo largo del mapa de proceso 4.4.16 se destaca el proceso *reflexionar sobre la modelización*. En esta primera parte del subepisodio este proceso se inicia con la intervención de Diego al mencionar que la interpretación del modelo es falsa. Valentina les induce a que analicen las peculiaridades del modelo, y es Leo con Alfredo quienes focalizan sus reflexiones hacia donde propone la actividad.

Mapa de proceso 4.4.17

527 Valentina: Si pero como el señor dijo: que el viaje decía a menos velocidad más accidentes, entonces como Ud. me dijo que con poca velocidad hay muchos accidentes, explíqueme ahora cómo es posible que a muchas velocidad hay menos accidentes. ¿Cómo podríamos argumentarlo?

In. Reflexionar sobre la modelización

529 Leo: fijándose en los últimos años

533 Alonso: en el año 1999 y en el año 2001, eso sería todo.

536 Valentina: el daría el año 99, diría: más velocidad menos accidentes, lo justificaría con el año 99 y (…)

541 Valentina: a eso, porque habría dos años no más, 1999 y 2001, y con esos dos años explico. Esa es una razón que está dando él y que es correcta y está bien.

544 Leo: pero ahí no hay menos accidentes porque...•

545 Valentina: por eso el para poder explicar, ocupa dos años no más, los demás no los tomaría en cuenta.

547 Valentina: pero esa respuesta que tomaría este señor estaría bien o mal.

550 Estudiantes: no está explicando todo el gráfico, está tomando lo que él quiere no más, lo que a él le conviene.

554 Valentina: pero es que la idea es que Uds. piensen.

553 Cristian: en todo caso si él lo hace así, lo hace como, para complicarnos más. Si lo hace desordenado se puede hacer cualquier cosa.

In. Reflexionar sobre la modelización

Reflexionar sobre la modelización

En el mapa de proceso 4.4.17 se continúa con un proceso *reflexionar sobre la modelización*, Valentina solamente induce al comienzo para luego generarse una discusión entre los estudiantes y Valentina en que el proceso de reflexionar sobre la modelización está presente. Si bien emerge este proceso a lo largo del episodio, no significa que se desarrolle como se espera. En el primer análisis sostuvimos que si bien se genera un análisis crítico de algunos estudiantes sobre el modelo en que efectivamente argumentan en base a lo esperado "porque no está explicando todo el gráfico, está tomando lo que él quiere no más, lo que a él le conviene" (línea 550). En detrimento, Cristian y otros estudiantes, si bien analizan críticamente el proceso de modelización, sus argumentos carecen de una justificación en los datos, y se sostienen en argumentaciones externas. Por tanto Valentina sigue induciendo a que razonen sobre el modelo, con el fin de negociar con Cristian y el resto de alumnos un razonamiento basado en los datos.

Eso indica que el nivel de reflexión no depende de solo si se destaca el proceso asociado, sino de qué manera se desarrolla.

Al igual que en la clase 1, se caracterizan las fases de modelización para luego mostrar el desarrollo de la competencia de modelización.

Fases de modelización

La actividad se inicia centrándose en el modelo real, que viene siendo la interpretación de la gráfica de barras. Ésta se traduce a una expresión numérica (tabla) y para responder a las preguntas se utiliza el modelo de dependencia entre variables para determinar si la velocidad afecta a los accidentes o muertos. Se conjetura que no hay dependencia porque la relación visual entre los números en la tabla no muestra una relación; a continuación se construye la expresión grafica del modelo para comprobar visualmente que no hay ningún tipo de relación. En las preguntas finales de la actividad se aplican los resultados del modelo para contrastar las declaraciones en la noticia del diario.

En esta actividad, última ficha de la unidad didáctica, se aprecia que el modelo de dependencia es conocido por los estudiantes. Si bien es Valentina quien construye la tabla y luego la gráfica, los estudiantes interpretan de forma fluida las dos expresiones para determinar si hay dependencia, hecho que indica la no ambigüedad sobre el uso de estas expresiones del modelo ya que en clases anteriores se había negociado el modelo de dependencia. En consecuencia podemos afirmar que el modelo de dependencia entre variables actúa como un *modelo para* la actividad. Bajo estos antecedentes nos encontramos ante un nivel general de la actividad. No es un nivel formal puesto que en esta unidad didáctica aun no se estudia formalmente la noción de función y en consecuencia tampoco la expresión algebraica.

Nivel de complejidad

- *Nivel de complejidad a priori*

Para determinar el nivel de complejidad en la actividad, se repite el procedimiento de las otras clases de caracterizar las tareas y procesos de manera previa a la aplicación de la unidad, para así determinar el nivel de complejidad a priori. El cuadro 4.4.6 muestra para cada pregunta las tareas, procesos esperados y el nivel de complejidad. Nótese que algunas tareas se han redactado de una manera más sintética que en el primer análisis a la clase 5 (subapartado 4.2.3.2).

Cuadro 4.4.6: Componentes de la competencia de modelización, clase 5

Preguntas	Tareas	Procesos	Complejidad
a) ¿En qué año hay más número de accidentes? ¿En qué año es más alta la velocidad promedio de un auto en el momento que tiene un accidente? ¿En qué año hay más número de muertos?	Lectura de gráficas	Caracterizar el modelo	Reproducción
b) Discute si hay una dependencia entre la velocidad y el número de víctimas (accidentes) ¿Y velocidad con el número de muertos?	Interpretar gráficas Traducir entre representaciones Estudiar dependencia entre variables	Interpretar el modelo	Conexión
c) Haz un comentario sobre la interpretación que se hace del gráfico en la noticia. ¿Estás de acuerdo?	Interpretar gráficas Estudiar dependencia entre variables	Aplicar el modelo	Generalización
d) Supón que eres Francisco Huerta, Presidente de la asociación AEA. Basándote en el gráfico intenta explicar que la velocidad excesiva no es un factor decisivo en los accidentes automovilísticos. Explica como lo harías.	Interpretar gráficas Estudiar dependencia entre variables	Reflexionar sobre la modelización	Reflexión
e) Supón que eres un agente de seguridad vial. Basándote en el gráfico intenta explicar como la velocidad es un factor decisivo en los accidentes automovilísticos. Explica como lo harías.			

Los niveles de complejidad de la pregunta a) y b) se determinan con la relación entre las tareas y los procesos. A simple vista la pregunta a) se puede clasificar como una pregunta sencilla, esta apreciación se caracteriza por las tareas y procesos implicados: la lectura se asocia al proceso *caracterizar el modelo* que determina un nivel de reproducción, en cambio la interpretación de gráficas se asocia al proceso *interpretar el modelo* que corresponde a un nivel de conexión. En la pregunta c) las tareas se mantienen pero se aplica el modelo de dependencia, relación que promueve un nivel de generalización. Finalmente las preguntas d) y e) se espera que se desarrolle el proceso *reflexionar sobre la modelización*, que se asocia a un nivel de reflexión.

- *Nivel de complejidad en el aula*

En el primer análisis, subapartado 4.2.3.2 se argumenta que las tareas matemáticas se desarrollan en el aula de matemáticas tal como se tenía previsto. Las tareas de interpretar gráficas y estudiar la dependencia entre variables, tal como se aprecia el cuadro 4.4.5, se desarrollan transversalmente en la actividad, y por tanto se organiza a través de estas tareas los procesos que han emergido en el aula de matemáticas. En la figura 4.4.11 se caracteriza los elementos de la competencia de modelización en la clase 5.

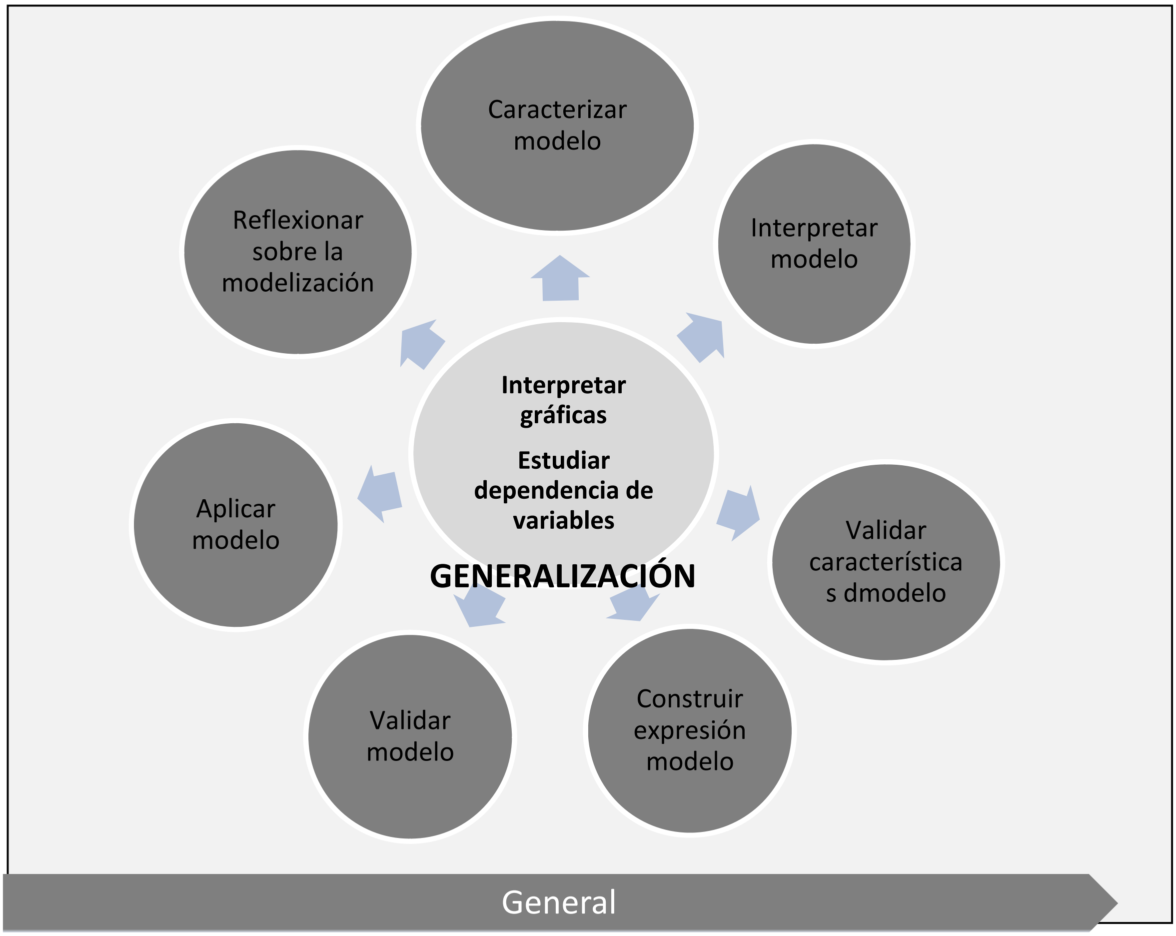


Figura 4.4.11: Procesos que conforman la competencia de modelización, clase 5

Los procesos esperados efectivamente emergen en el aula, pero como se ha mencionado anteriormente el proceso *reflexionar sobre la modelización* solamente emerge de forma inicial y no se desarrolla tal como se esperaba. Por tanto el nivel de complejidad esperados de reflexión no se cumple en las preguntas d) y e), alcanzando solo un nivel de generalización.

4.5 Competencia de argumentación

En este apartado se presenta la competencia de argumentación. Se caracteriza por tres componentes: tareas matemáticas, procesos matemáticos y niveles de complejidad, un componente menos que la competencia de modelización puesto que las fases de modelización no caracterizan esta competencia. En el apartado 4.5.1 se describen los tres componentes de esta competencia,

En los siguientes apartados se desarrollan los componentes de la competencia de argumentación para los mismos episodios de clases que se presentaron en la competencia de modelización. En el apartado 4.5.2 respecto a la clase 3, en el apartado 4.5.3 respecto a la clase 4, y el apartado 4.5.4 se analiza en conjunto la clase 1 y la clase 5.

Por tanto se han elaborado los mapas de procesos haciendo referencia a los episodios transcritos en la competencia de argumentación. Asimismo, se determina el nivel de complejidad que se espera de la actividad antes de su aplicación, para luego contrastarlos con el nivel desarrollado en el aula.

Del mismo modo que en el caso de la competencia de modelización, la caracterización de cada componente se ha elaborado desde el tópico de interpretación de gráficas. Su campo de delimitación, al ser este mismo tópico, impide tener evidencia sobre el grado de semejanza de lo que serían las características de la competencia de argumentación en otros tópicos. Nuestra propuesta apunta más bien a mostrar las ventajas y aplicaciones que puede tener la caracterización de la competencias por medio de estos tres componentes y que, idealmente, puedan extenderse a otros temas matemáticos.

4.5.1 Componentes de la competencia de argumentación

Procesos matemáticos

El cuadro 4.5.1 muestra la caracterización de procesos que conforman la competencia de argumentación.

Cuadro 4.5.1: Procesos de la competencia de argumentación

Indicadores	Descripción
Identificar datos	Identificar los datos (generalmente en una gráfica o tabla) o enunciados que sirven para argumentar
Interpretar datos	Interpretación de los datos y las representaciones asociadas
Validar datos	Validar la identificación de lectura o interpretación de datos
Justificar	Justificar las declaraciones e interpretaciones
Validar la justificación	Validar o refutar la justificación
Fundamentar	Datos, hechos, contenidos que apoyan la justificación
Reflexionar sobre la argumentación	Reflexionar en relación a los datos o sobre el proceso de argumentación
Concluir	Establecer respuestas o enunciados de término en un contexto de cierre de la situación problemática, tema o unidad

Los tres primeros procesos- identificar interpretar y validar- se sustentan en los datos. Estos no se refieren únicamente a los enunciados a probar, tal como en el modelo de Toulmin (1958), sino que son datos matemáticos con que se cuenta para desarrollar la argumentación.

Ahora bien, caracterizar los datos en el tópico de interpretar gráficas significa caracterizar los aspectos en que se enfocan los procesos de i*dentificar datos* e *interpretar datos*. Estos aspectos son los mismos, con la diferencia en la acción. En cuadro 4.5.2 se ilustran estos aspectos según el proceso, y son semejantes a las fases de la modelización descritas en la competencia de modelización.

Cuadro 4.5.2: Aspectos de los procesos de identificar e interpretar

Identificar	Interpretar
1. Identificar modelo real	1. Interpretar modelo real
2. Identificar las variables	2. Interpretar las variables
3. Identificar los valores de las variables	3. Interpretar los valores de las variables
4. Identificar la expresión del modelo: gráfico, tabla numérica.	4. Interpretar el modelo matemático
5. Identificar el modelo	5. Interpretar la expresión del modelo: gráfico, tabla numérica.

El *proceso de validación* se refiere a confirmar la identificación o interpretación de los datos. Si bien son acciones diferentes, se ha optado por agruparlos en el mismo indicador para destacar su función de validar. Generalmente la validación responde a la segunda acción de confirmar la interpretación, la validez de identificar datos se da con baja frecuencia.

No obstante se ha optado en que *validar la justificación sea* un indicador diferente dado que se enfoca en aspectos diferentes de los anteriores procesos. En efecto el proceso de *justificar* no se enfoca en los cinco aspectos descritos en el cuadro 4.5.2, sino que corresponde a explicar el razonamiento que se llevó a cabo para identificar o interpretar. Según el modelo de Toulmin (1958) este indicador cumple la función de *justificar,* y bajo nuestro modelo la validez de las justificaciones contempla tanto las valoraciones positivas como negativas o refutación. El criterio para esta unión es porque primordialmente interesa optar por un solo indicador que recoja las intenciones de valoración por parte de los estudiantes, independientemente de si se valida o refuta. De esta manera también se considera el aspecto de *refutación* del modelo de Toulmin. En todo caso, cuando aparezca este proceso se explicitará en el caso que trate de una refutación. En el análisis de los episodios, las acciones de validación generalmente conciernen a la profesora, y no se han encontrado validaciones entre estudiantes. Pese a ello, idealmente la validación también se puede dar entre estudiantes, y en este modelo de argumentación así queda reflejado.

El proceso de *fundamentar* se parece a justificar, pero con la diferencia que este es socialmente aceptado y no requiere una validez; más aun son los datos que apoyan la justificación. Idealmente los fundamentos deberían emerger en una secuencia argumentativa.

Se ha agregado un indicador que tiene la función de caracterizar las acciones de *reflexión sobre la argumentación.* Este proceso contempla tanto reflexionar sobre la información que es tratada, como reflexionar sobre la secuencia de argumentación. La presencia de este proceso muestra que el desarrollo de una tarea matemática puede alcanzar un nivel de complejidad elevado. El modelo termina con el proceso de *concluir*, que cumple la misma función que en el modelo de Toulmin de cerrar una argumentación.

Por tanto, este nuevo modelo considera aspectos tales como:

- Los datos no son las declaraciones a argumentar, sino que dependen de la intención de la afirmación para argumentar que generalmente viene determinada por la actividad matemática en juego;
- los indicadores de argumentación son procesos;
- las acciones del profesor, clasificando cuando este induce una acción o cuando el mismo la realiza;
- destaca la validación como un proceso;
- la identificación e interpretación de datos: son procesos diferentes, pero se enfocan a las fases de la modelización en interpretación de gráficas;
- considera los aspectos de reflexión en un indicador.

Tareas matemáticas

Las tareas matemáticas son las mismas que se han identificado en el apartado 4.4.1. Clase 1: identificar variables, identificar y construir sistemas de referencia; Clase 2: traducir de una expresión verbal a una gráfica, interpretar gráficas; Clase 3: identificar variables, interpretar gráficas, construir una gráfica a partir de una situación pictórica; Clase 4: identificar variables, estudiar dependencia entre variables, construir una gráfica a partir de una situación pictórica; Clase 5: identificar variables, estudiar dependencia entre variables, traducir entre representaciones.

Niveles de complejidad

Ya descritos los procesos y las tareas, se puede caracterizar la competencia de argumentación. En la figura 4.5.1 aparecen los cuatro niveles de complejidad que se determinan por la relación entre tareas y procesos (subrayado en amarillo y cursiva), que en conjunto caracterizan la competencia de argumentación. Muchas tareas se repiten en los niveles, tales como interpretar gráficas, traducir y estudiar la dependencia entre variables, y lo que cambia son los procesos en cada nivel.

El proceso de concluir se da en toda estructura argumentativa, y no es un proceso que permita discernir en la complejidad de la actividad. En consecuencia no se relaciona con las tareas para determinar un nivel de complejidad. El proceso de *fundamentar* se ha situado en los dos niveles superiores porque depende de qué manera se desarrolle y si acompaña, aunque sea de una manera incipiente, al proceso de *reflexionar sobre la argumentación*. Si un proceso se desarrolla de forma incipiente no implica que se logre el nivel de complejidad asociado. Esto pasa frecuentemente con los procesos de justificar y reflexionar sobre la argumentación, que muchas veces se presentan de forma inicial, pero no se alcanzan a desarrollar en el aula.

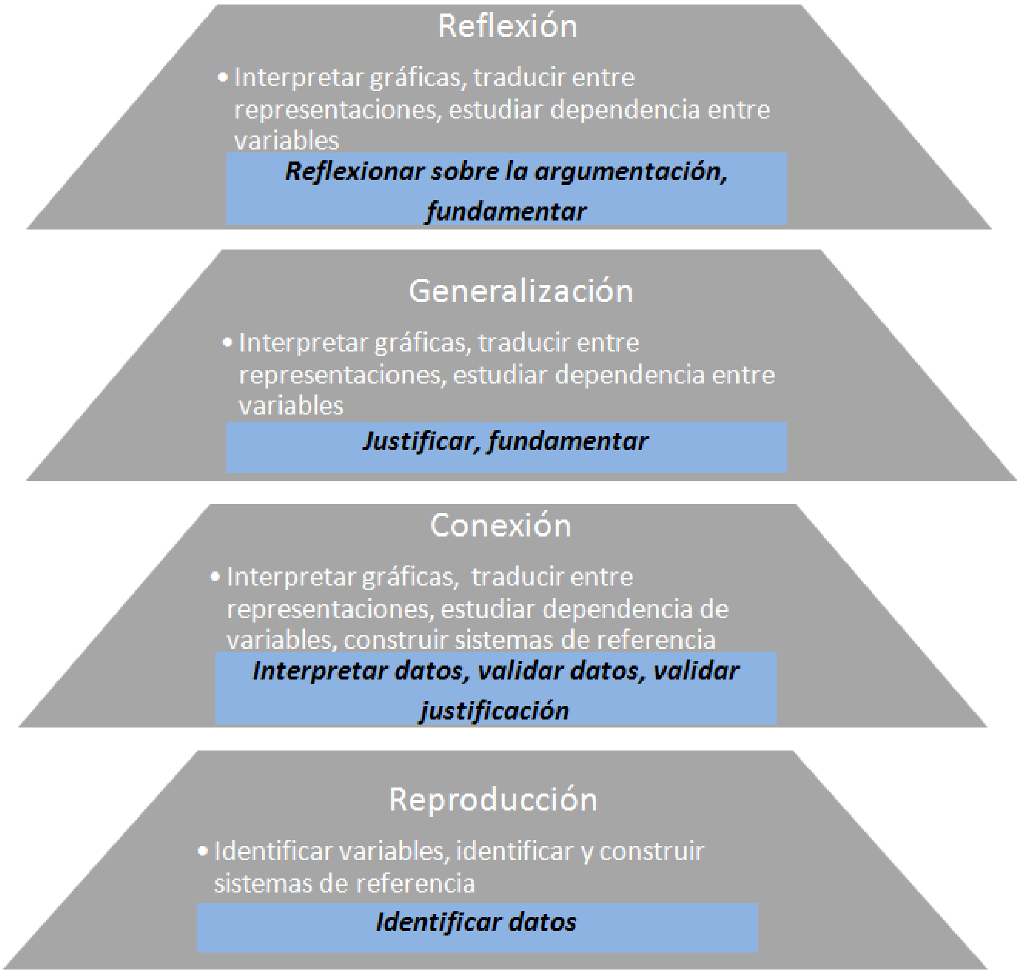


Figura 4.5.1: Competencia de argumentación

La secuencia de los procesos en la competencia de argumentación, sigue una estructura con una lógica argumentativa de inicio- desarrollo- conclusión. El inicio generalmente corresponde a inducir un proceso, el desarrollo al proceso en sí. Y la conclusión se asocia a la validez de un proceso, pero además está el proceso de "concluir" que tiene como finalidad cerrar la declaración inicial.

En el siguiente apartado se aprecia cómo actúa la competencia de argumentación en los episodios de aula. A través de la caracterización de los procesos y tareas se podrá caracterizar el nivel de complejidad que se desarrolla. Se sigue el mismo orden dado en la competencia de modelización: se analiza extensamente la clase 3 y clase 4 y se muestra la caracterización de toda la sesión para las clases 1 y clase 5.

4.5.2 Competencia de argumentación, clase 3

En este apartado se caracterizan los procesos que conforman la competencia de argumentación y tareas de la clase 3, que permitirán determinar el nivel de complejidad esperado para cada actividad. Se determina el nivel de complejidad a priori, para luego contrastar con el nivel desarrollado en el aula.

4.5.2.1 Nivel de complejidad a priori

El cuadro 4.4.2 caracteriza las tareas, competencias y nivel de complejidad presentes en la actividad.

Cuadro 4.5.3: Componentes de la competencia de argumentación, clase 3.

Pre.	Tareas	Procesos	Complejidad
a)	Identificar variables	Identificar datos	Reproducción
b)	Estudiar dependencia de variables	Interpretar datos	Conexión
c)	Construir una gráficas a partir de una situación pictórica Interpretar gráficas	Interpretar datos	Conexión
d)	Interpretar gráficas	Interpretar datos	Conexión
e)	Interpretar gráficas	Justificar	Generalización

La actividad se secuencia por cinco preguntas diseñadas a partir de las tareas matemáticas. La secuencia de las preguntas muestra una complejidad que se aprecia relacionando las tareas y los procesos. La primera pregunta es de reproducción, las preguntas centrales son de conexión y en la última pregunta se espera un nivel de generalización.

En la competencia de modelización, cuando se determinaron *a priori* los niveles de complejidad aun se contaba con tres niveles, y en la pregunta e) había dificultad para situarla en conexión o reflexión. En cambio al agregar un cuarto nivel, se tienen criterios más claros para asociar esta pregunta a un solo nivel, denominado generalización.

4.5.2.2 Nivel de complejidad en el aula

A continuación se presentan los mapas de procesos que emergen en cada uno de los cinco episodios de la clase 3. No se han transcrito nuevamente los episodios (verlos en el apartado 4.4.2), por lo que el episodio se describe directamente en el mapa de proceso.

Procesos matemáticos

Episodio 1: Mapa de proceso 4.5.1

133 Valentina: ¿Quién podría decir algo de esas personas que no contestaron antes y que ahora piensa

In. interpretar datos

134 Camila: (…) no son las dos variables independientes porque depende de la velocidad del agua para poder saber si es, mientras más tiempo más pasa más rápido se llena.

Justificar

137 Valentina: la velocidad del agua siempre va a ser constante.

Validar justificación (refutar)

138 Camila: Siempre va a ser la misma.

139 Valentina: Siempre va a ser la misma.

140 Camila No va a cambiar.

Concluir

En el mapa de proceso 4.5.1 del episodio 1, Valentina pide más intervenciones para interpretar si hay dependencia entre el tiempo y la caída de agua a la piscina. Camila interpreta que son dependientes pero justifica de forma errónea. Valentina refuta la justificación de Camila con el argumento que la velocidad siempre es la misma. Finalmente Camila y Valentina concluyen que la velocidad de agua es siempre la misma.

Episodio 2: Mapa de proceso 4.5.2

406 Valentina: ¿Alguien tuvo que hacer el gráfico y poner acá cantidades?

410 Valentina: ¿Alguien le dio un valor a esto para poder hacerlo?

In. Interpretar datos

413 Daniela: si yo (…) al principio para entender más, le puse que cada 5 minutos subía 2 centímetros.

418 Valentina: ya, le diste valores y te salió una línea más o menos como esta.

Interpretar datos

422a Valentina: levanten la mano las personas que se dieron valores, (…) nueve manos. Muy bien.

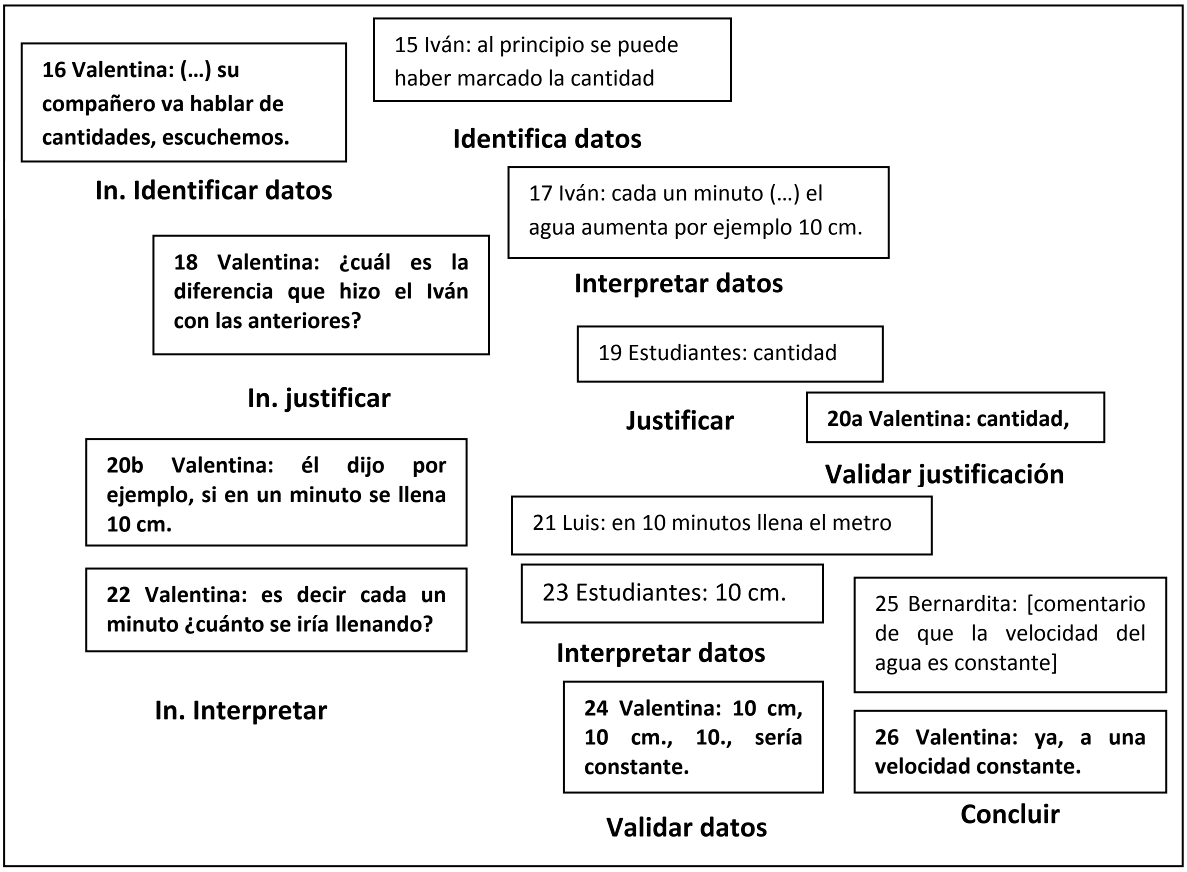
Validar datos

422b Valentina: Esto también está excelente porque lo importante es entender la relación

Concluir

En el mapa de proceso 4.5.2 del episodio 2 se da un ciclo en torno a la interpretación. Antes los estudiantes han descrito la estrategia que han utilizado para elaborar la gráfica de la piscina, todos los que han explicado han utilizado una estrategia cualitativa, por lo que Valentina pregunta si alguien interpretó de forma cuantitativa. Daniela responde afirmativamente explicando su interpretación, la cual Valentina complementa. Finalmente Valentina valida la interpretación cuantitativa de Daniela y se concluye que esta interpretación también es una manera óptima de interpretar.

Episodio 3: Mapa de proceso 4.5.3



En el episodio 3 Iván describe su manera de interpretar cuantitativamente, marcando la cantidad. En el mapa de proceso 4.5.3 se ha caracterizado su descripción y se aprecia una estructura argumentativa muy completa. En efecto, Valentina induce los tres procesos: identificar, interpretar y justificar, los cuales se dan en diferentes momentos. Se da un ciclo en torno a justificar la diferencia entre la interpretación de Iván con las anteriores, y al final un ciclo en torno a la interpretación cuantitativa, dando un valor hipotético de crecer 10 cm. por minuto la altura del agua en la piscina. La conclusión consiste en reafirmar que la velocidad del agua es constante.

Episodio 4:

En este episodio se discute la diferencia entra las caída de agua en las dos piscinas – ver mapa de proceso 4.5.4-. En un comienzo se induce a justificar el tipo de relación entre la profundidad de agua y tiempo en la segunda piscina. Pedro repite que los puntos esbozan una curva, Valentina especifica que justifiquen sobre el tipo de relación. Las intervenciones de Iván y Pilar no responden exitosamente y Valentina cambia la estrategia volviendo atrás, induciendo a la interpretación. Lo cual da resultado porque los estudiantes se centran en la cantidad, consensuando que en la primera situación la varianza entre las dos variables es constante. La acción 141 se ha ensombrecido porque corresponde tanto a un proceso de interpretar como de justificar.

En el episodio 5 se trata la interpretación de la segunda situación (ver mapa de proceso 4.5.5).

Mapa de proceso 4.5.4

121 Valentina: ¿por qué va disminuyendo más? miren [dibuja varios puntos más, siguiendo el patrón encontrado]

123 Valentina: se va agregando puntos (...). Entonces qué pasa con la curva, ¿cómo es? [Une los puntos, y se da la forma de la curva]

124 Pedro: es una curva.

Interpretar datos

125 Valentina: ¿qué pasó con la relación de tiempo y profundidad en esta parte de la piscina? por qué era distinta a esta otra parte de acá [señala el dibujo de la situación anterior]

126 Iván: se expandía más el agua.

127 Valentina: ¿dónde se expandía más el agua?

130 Pilar: si comparamos el tiempo de cada uno, va a ser más o menos lo mismo, pero no va llenando la misma cantidad.

In. Justificar

131 Valentina: ¿pero cuál es la diferencia entre los dos?

132 Estudiantes: la cantidad.

133 Valentina: ¿qué pasaba con la cantidad de cada minuto?

134 Estudiantes: queda igual.

135a Valentina: quedan iguales, es decir si no llenaba cuatro dedos, quedada cuatro dedos, cuatro, cuatro.

135b valentina: quedan iguales (...) ¿qué pasaba con la capacidad de llenado, cómo era?

137 Iván: constante.

Interpretar datos

Justificar

In. Interpretar datos

138b Valentina: gráfico [señala de la pizarra el gráfico anterior de la situación uno] se fijan, por qué una línea recta. Por qué.

138a Valentina: parejo, constante. Es decir, siempre era igual

Validar datos

141 Arturo: es constante.

142 Valentina: es constante, no se altera la relación que hay entre tiempo y, un minuto.

In. Justificar

Interpretar datos

Justificar

Concluir

Episodio 5: Mapa de proceso 4.5.5

In. Justificar	Justificar	Validar justificación
150 Valentina: ¿cuál es la diferencia entre este [situación uno] y este [situación dos]?	152 Pablo: la medida.	**153 Valentina: la medida es igual, esta mide un metro y esta otra también mide un metro.** (Validar justificación (Refutación))
	156 Jorge: el tiempo.	
	157 Valentina: el volumen de aquí [de la situación uno] está distribuida.	
159 Valentina: ¿Qué pasa en el segundo?	160 Luis: le falta un cuarto.	
161 Valentina: ya, entonces ¿por qué son diferentes los dos gráficos?	164 Pablo: por la relación de tiempo y profundidad.	**165 Valentina: por la relación que hay entre tiempo y profundidad.**
169 Valentina: ¿Qué pasa aquí, (gráfico dos) aumenta el tiempo, aumenta la profundidad, ¿pero?	170 Iván: en distintas cantidades, va bajando.	**171 Valentina: en distintas cantidades, es decir que la altura que va subiendo, la profundidad que va subiendo el agua no.**
		172 Estudiantes: no es la misma. (Concluir)

En el mapa de proceso 4.5.5 se aprecia que Valentina repite la pregunta respecto a la diferencia entre las dos situaciones, induciendo a que justifiquen. Pablo menciona la medida pero Valentina la refuta y vuelve a repetir la pregunta- se repite el proceso de inducir a que justifiquen- hasta que Pablo se focaliza de forma correcta en la relación entre tiempo y profundidad, respuesta que Valentina valida, con lo que se completa un ciclo en torno a la justificación. Valentina profundizar en esta dirección con una nueva pregunta, esta vez es Iván el que da un indicio de justificación con su intervención "va bajando", Valentina valida complementando la idea, con lo cual se completa una segunda justificación y al responderse la pregunta inicial los estudiante concluyen que no se llena de la misma manera.

Nivel de complejidad

Se han identificado los procesos que han emergido en los cinco episodios de la clase 3, que junto a las tareas de la actividad, determinan los niveles de complejidad en cada pregunta. La primera pregunta no aparece explícita en los episodios, así que se comienza a analizar el nivel de complejidad desde la pregunta b). Asimismo, el proceso de concluir es parte de toda la estructura argumentativa, y al no ser un criterio en los niveles de complejidad no se menciona a continuación.

En La figura 4.5.2 se aprecia que, además del proceso esperado *interpretar datos*, han emergido los procesos de *justificar* y *validar la justificación*. En todo caso se corrobora el nivel de complejidad estipulado de conexión.

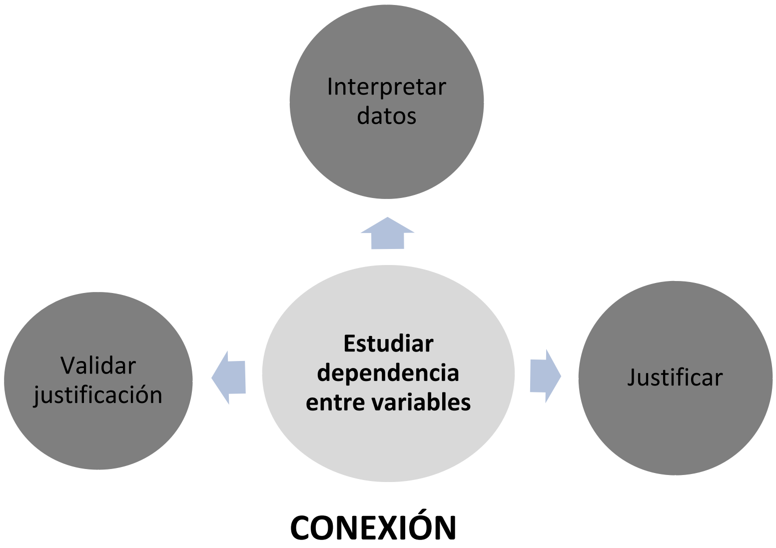


Figura 4.5.2: Nivel de complejidad pregunta b)

En la pregunta c) el análisis se centra en la tarea de interpretar la gráfica, puesto que desde el punto de vista de la competencia de argumentación los procesos de esta tarea contienen a los procesos que emergen en la tarea de construir la gráfica.

En la figura 4.5.3 se presentan más procesos que los esperados, emergen prácticamente todos los procesos. No obstante el proceso de *justificar* solamente aparece de forma incipiente, los estudiantes no desarrollan una justificación rica y completa, y por tanto no se puede afirmar un logro de este proceso. En consecuencia el nivel de complejidad que se desarrolla es el esperado de conexión.

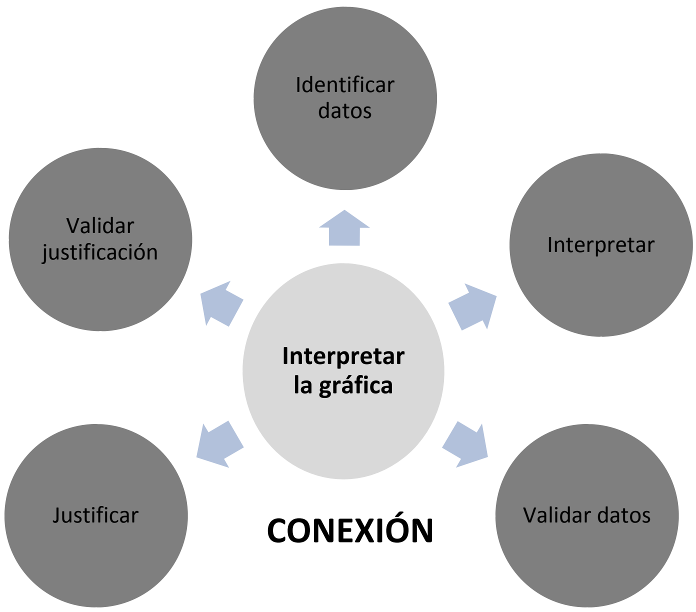


Figura 4.5.3: Nivel de complejidad pregunta c)

En la pregunta d) se mantienen los mismos procesos ya mencionados, por tanto el nivel de complejidad es el de conexión. En cambio en la última pregunta e) se aprecia un desarrollo del proceso de *justificar*. En la figura 4.5.4 se observa que la interpretación no emerge, y es el proceso de justificar el que destaca. Esta relación da un nivel de complejidad de generalización.

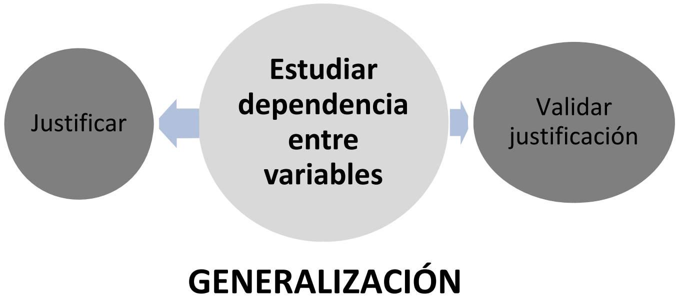


Figura 4.5.4: Nivel de complejidad pregunta e)

En definitiva en la actividad de la clase 3 se cumplen los niveles de complejidad estipulados, pero con la diferencia que en cada tarea emergen más procesos de los esperados *a priori*, sobre todo el de justificación, que prácticamente es transversal a los episodios. En el análisis de la siguiente clase se considera estos criterios para determinar los procesos *a priori*.

4.5.3 Competencia de argumentación, clase 4

De igual modo que en a clase 3, se expone directamente el análisis de esta clase, los datos de la actividad y la transcripción de episodios se encuentran en el subapartado 4.4.3.

4.5.3.1 Nivel de complejidad a priori

Se identifican las tareas, procesos y el nivel de complejidad esperado. El cuadro 4.5.3 caracteriza las tareas, competencias y nivel de complejidad presentes en la actividad.

Cuadro 4.5.4: Componentes de la competencia de argumentación, clase 4

Tareas	Procesos	Complejidad
Identificar variables	Identificar datos	Reproducción
Estudiar dependencia de variables	Interpretar datos Justificar	Conexión/ generalización
Relacionar una representación pictórica con una representación gráfica	Interpretar datos Justificar	Conexión/ generalización

A partir de los resultados de la clase 3, se ha agregado como criterio que el proceso de justificar aparece transversalmente en las tareas, y se ha subrayado para distinguirlo de los otros procesos esperados que se identifican siguiendo el criterio inicial. Siguiendo la caracterización de la competencia de argumentación (figura 4.5.1) la complejidad se puede lograr hasta la generalización, dependiendo de si se desarrolla o no el proceso de justificar.

4.5.3.2 Nivel de complejidad en el aula, clase 4.

La clase 4 consta de tres episodios. Recordamos que el episodio 1 corresponde a una interacción entre la profesora Valentina con un grupo de estudiantes. Valentina les explica cómo interpretar los circuitos y relacionarlos con las gráficas.

Procesos matemáticos

Episodio 1: Mapa de proceso 4.5.6

21 Valentina: ¿tú estás viendo la forma o estás relacionando la velocidad?

In. Identificar datos

22 Mario: la forma y la velocidad.

Identificar datos

23a Valentina: sí porque yo no puedo llegar y decir. Porque, a ver, si esto va así y cae [señala una sección de una gráfica de la ficha], puedo decir, ¿cómo es la velocidad ahí? [Mueve el dedo sobre la sección de la curva].

Validar datos

23b Valentina: ¿y qué pasó con la velocidad ahora?

24 Alfonso y Marcelo: bajó, disminuyó.

25 Valentina: ¿y después qué pasó?

26 Mario: se mantuvo la velocidad.

27 Valentina: ¿y después qué pasó?

28 Alfonso y Marcelo: ¡aumenta!

29 Valentina: [Ahora señala el circuito a)] Salida ¿Qué pasa con la velocidad?

30 Marcelo: aumenta.

31 Valentina: al entrar en la curva que tiene que pasar

32 Marcelo: disminuye.

33 Valentina: después que hago [en el diálogo mueve el dedo por el circuito].

34 Alfonso: (…) [indica con los dedos que tiene que relacionar las dos representaciones El circuito y el gráfico.

36 Valentina: qué tengo que ir viendo yo, imagínate un vehículo, un auto.

37 Mario: [comienza a interpretar una gráfica].

39 Mario: va a una velocidad, disminuye, después aumenta la velocidad.

In. Interpretar datos

Interpretar datos

40 Valentina: ¿qué es lo que estamos buscando en todo esto?

In. Reflexionar sobre argumentación

41 Mario: la velocidad

Identificar datos

42 Valentina: ya po, ¿y tienes que mirar esto no? [Señala una pista].

In. Identificar datos

43 (…) [interpretan la pista Mario con la ayuda de Valentina].

45 [Alfonso relaciona los máximos y mínimos de la gráfica, con las curvas del circuito]

49 Marcelo: ah, y este [señala el circuito circular] va con este gráfico [señala gráfica constante]

Interpretar datos

46 Valentina: ah, ¿entendiste lo que estamos haciendo?

In. Justificar

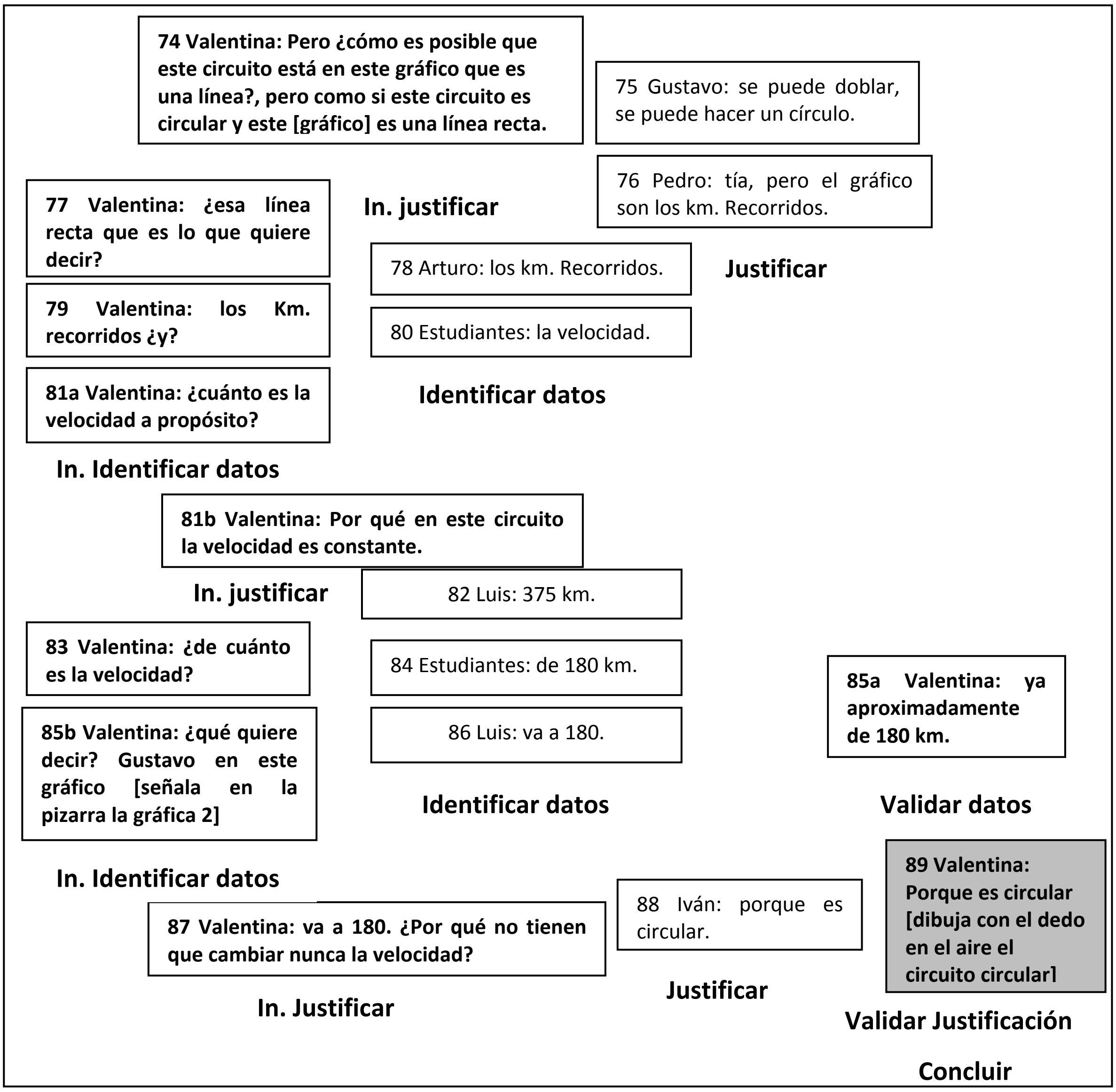
50 Valentina: está bien, sigan adelante

Concluir

En el mapa de proceso 4.5.6, los procesos indican la estrategia que ha seguido la profesora para enseñar a interpretar los circuitos y relacionarlos con las gráficas. En un inicio se enfocan en las variables, y se desarrolla un ciclo de identificar datos, para luego darse un extenso ciclo sobre la interpretación de datos. Valentina en vez de validar o refutar, continúa induciendo a interpretar datos. En la línea 40, con la pregunta ¿qué es lo que estamos buscando? Valentina tiene una intención distinta a las preguntas anteriores. En el desarrollo del proceso de interpretar, Valentina inserta una acción que se ha indicado como un proceso de reflexión sobre la argumentación, pero esta acción no es seguida por lo estudiantes -ellos responden identificando datos- y al ser una acción aislada significa ser una acción de reflexión entre el desarrollo del proceso de interpretar datos. Por otra parte, esta acción induce a los estudiantes a enfocarse en datos que permiten entender la interpretación. En efecto, los estudiantes terminan relacionando correctamente los circuitos con su gráfica. Por tanto podemos decir que, acciones de reflexión intercaladas en el desarrollo del proceso de interpretar, contribuyen al desarrollo de este proceso.

El episodio 2 presenta la puesta en común de los resultados: En el subepisodio 2.1 se discute sobre la representación gráfica del circuito circular, una línea horizontal constante. En el subepisodio 2.2 los estudiantes argumentan por qué el circuito b) corresponde a la gráfica 1.

Subepisodio 2.1: Mapa de proceso 4.5.7



En el subepisodio 2.1 el proceso de justificar es el que predomina, pues se trata de argumentar por qué la gráfica con una línea horizontal corresponde al circuito circular. En el mapa de proceso 4.5.7 se observa que en un inicio las justificaciones de Gustavo y Pedro no son acertadas y Valentina en vez de refutar induce a identificar los datos. En la línea 81 se dan dos acciones de Valentina, se induce a justificar y a identificar datos, Luis responde solamente a identificar datos, con lo que la acción sigue con este proceso. Una vez que se ha validado que la velocidad es constante Valentina nuevamente pide que justifiquen e Iván al repetir el dato que el circuito es circular, relaciona la velocidad constante con la forma del circuito; implícitamente esta acción de Iván significa que la forma del circuito se representa con una línea recta en la gráfica. Valentina valida la acción y se concluye con un ciclo en torno a la justificación (ensombrecido).

Episodio 2.2: En el subepisodio 2.2 se pide a los estudiantes que argumenten por qué la gráfica 1 corresponde al circuito b).

Mapa de proceso 4.5.8

98 Valentina: quien podría explicar que es el b) .

99 Daniela: primero empezó con una velocidad media constante y después dio una vuelta, entonces bajó su velocidad y después volvió con una velocidad constante más acá.

100 Valentina: es decir que esta línea cuando baja, ¿qué quiere decir?

101 Estudiantes: qué da una curva [en tono de pregunta]

102 Valentina: (…) ¿disminuye la velocidad?

104 Valentina: después en esta parte de aquí, se mantiene un poquito, ¿después?

105 Arturo: se eleva y se sigue manteniendo, y después tiene que bajar de nuevo.

In. Interpretar datos

Interpretar datos

110. Valentina: por qué pusiste el a).

111 Osvaldo: porque como que el gráfico es un triángulo me fui guiando por las dobladas, tía como que lo fui formando (…).

In. Justificar

Justificar

112b Valentina: mira aquí parte a toda velocidad, luego que tiene que hacer aquí [en la primera curva cerrada].

112a Valentina: a ver, pero el triángulo [profesora esboza el circuito]

113 Estudiantes: disminuir.

114 Valentina: (…) ¿y después que es lo que hace aquí? [Señala ese tramo del circuito].

116 Osvaldo: el gráfico 1 baja así po'!

117b Valentina: ¿esta distancia que bajó aquí, es la misma que subió aquí?

117a Valentina: pero mira, [señala tramos del circuito] subió por harto tiempo, después la bajo de nuevo y después la subió ¿esta distancia que bajó aquí, es la misma que subió aquí?

In. Interpretar datos

Interpretar datos

118 Estudiantes: ¡No!

Validar justificación (Refutar)

119 Valentina: entendiste.

Concluir

En el mapa de proceso 4.5.8 el proceso que se desarrolla es la interpretación. Las secuencia de diálogo 98 a 105 trata sobre la variación de la velocidad en función del circuito, y en relación con la gráfica. Luego hay dos acciones puntuales en torno a justificar por qué Osvaldo eligió el circuito a) en vez del b), y la justificación de Osvaldo es discutida en torno al proceso de interpretación que finalmente se refuta. En consecuencia, se ha dado un caso en que para refutar una justificación se han interpretado los datos buscando el argumento erróneo.

El episodio 3 y último, ilustra el cierre de la clase. En el subepisodio 3.1 se discute sobre el gráfico 4. En el subepisodio 3.2 Valentina cierra la actividad preguntando a los estudiantes qué aprendieron en la actividad.

Subepisodio 3.1: Mapa de proceso 4.5.9

144 Arturo: por la curva que cierra, después sale subiendo la velocidad, y manteniéndola, después tiene que bajarla y manteniéndola un poco, y vuelve a bajar hasta la meta.

145 Valentina: Devuelvo la pregunta para todos, este gráfico [señala gráfica 4] me dice a mí, cómo el vehículo va; ganó altura, subió, bajó, y luego cayó en un hoyo.

147 Valentina: ¿en qué tengo que fijarme primero?

149 Valentina: (…) ¿En qué tengo que fijarme primero?

In. Interpretar datos

148 Estudiantes: que bajó la velocidad.

150 Estudiantes: en las variables.

152 Estudiantes: y saber ver los gráficos.

Interpretar datos

151 Valentina: en las variables.

153 Valentina: y saber ver los gráficos.

Validar datos

Conclusión

En el mapa de proceso 4.5.9, ante la interpretación de Arturo, Valentina interpreta intencionalmente de manera errónea para discutir sobre la estrategia de interpretación que están utilizando los estudiantes; estas acciones dan pie a un ciclo en el proceso de interpretar datos. SE ha utilizado el mismo término para dos aspectos distintos, la estrategia de interpretar hace referencia a las tareas de interpretar y traducir de una representación a otra, en cambio interpretar datos se refiere al proceso que emerge en el diálogo.

Subepisodio 3.2: En el momento de cierre de la clase, Valentina con la pregunta sobre qué se aprendió hoy, invita a que los estudiantes reflexionen sobre la actividad.

Mapa de proceso 4.5.10

155 Valentina: a ver alguien aprendió algo hoy.

In. Reflexionar sobre la argumentación

162 Valentina: No puedo juzgar el gráfico me dice su compañero, y como que en el gráfico se está cayendo algo, no puedo juzgar.

163 Pablo: depende de las variables.

166 Francisco: depende de las cosas, de las variables de la figura, porque si no hay variables no va poder ser la figura, lo importante son las dos.

Reflexionar sobre la argmumentación

Conclusión

En el mapa de proceso 4.5.10 los procesos y ciclos que emergen de la competencia de argumentación siguen los mismos criterios dados en la competencia de modelización. Este proceso se define como reflexionar sobre el proceso de argumentación, que se inicia con la pregunta de Valentina que invita a ello. En efecto, Las respuestas se identifican como conclusiones, no de un diálogo si no del desarrollo de la actividad, que a su vez tienen elementos de justificación e interpretación (ver intervención de Francisco, línea 166). Destacamos que este proceso no estaba previsto que apareciera, dado que dependía sustancialmente de la gestión de Valentina en cerrar la actividad. Aun así, no se reflexiona explícitamente sobre la argumentación, de manera que no se alcanza a desarrollar completamente este proceso. En todo caso es un aspecto destacable a considerar para analizar los niveles de complejidad.

Nivel de complejidad

Se han identificado los procesos que han emergido en los tres episodios de la clase 4 que junto a las tareas de la actividad determinan los niveles de complejidad. El análisis de conjunto se presenta en la figura 4.5.5. La tarea "identificar variables" se vincula con dos procesos. La tarea de "estudiar la dependencia", además de darse los procesos estipulados *a priori*, se desarrolla el proceso de interpretar. Finalmente "relacionar representaciones" es la tarea principal en que emergen todos los procesos de la competencia de argumentación, excepto el proceso de fundamentar.

El desarrollo del proceso de justificar, permite que los estudiantes comprendan la estrategia para interpretar el circuito y corresponderla con su gráfica. En el episodio 2 se aprecia el uso de la misma estrategia para cada gráfica, y al final de los subepisodios se valida la justificación. Asimismo la emergencia del proceso de reflexionar sobre la argumentación es otro criterio para determinar un nivel de complejidad de generalización

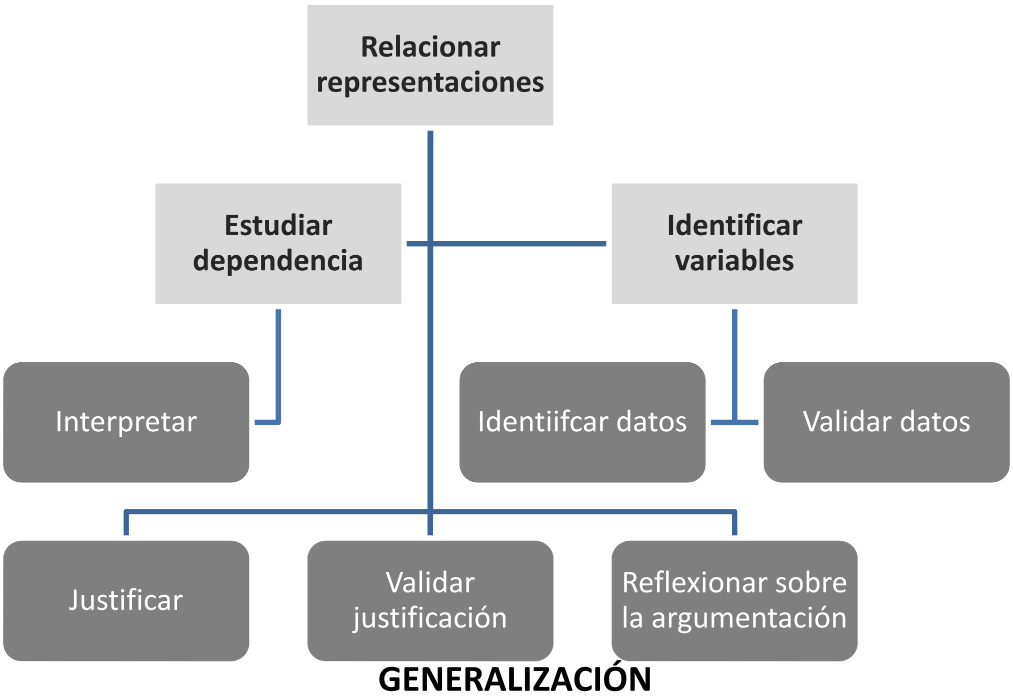


Figura 4.5.5: Competencia de argumentación clase 4

4.5.4 Análisis competencia de argumentación, clase 1 y clase 5

Hasta este momento, en la parte presentada del apartado 4.5 se ha desarrollado la competencia de argumentación en las clases 3 y 4. En el apartado 4.2, en el análisis a la clase 1 y clase 5 si bien se caracterizaron los procesos y se determinaron los niveles de complejidad, aun no se habían validado los procesos. Como para estas clases es relevante presentar de qué manera se desarrolla la competencia de argumentación, de acuerdo con la nueva estructura presentada en el apartado 4.5.1. El desarrollo de la competencia se ejemplifica en el análisis de un episodio para cada clase y no de todos los episodios ya analizados anteriormente de la clase 1 y 5, ya que con un solo episodio es posible mostrar el desarrollo de la competencia de argumentación y en particular determinar el nivel de complejidad. Para ambas clases se presentan los mismos subepisodios analizados en la competencia de modelización, dado que son episodios ricos en procesos de argumentación.

Clase 1. Subepisodio 3.2.

Este subepisodio se ha descrito con detalle en la competencia de modelización, pero recordemos que se ha dividido en dos partes. En el mapa de proceso 4.5.11 se negocian las propiedades de las variables en el sistema cartesiano y en el mapa de proceso 4.5.12 se discute el uso del sistema numérico romano en un sistema de referencia.

Mapa de proceso 4.5.11

396 Ignacio: podríamos establecer una regla.

399 Valentina: ¡establecer una regla!. [Valentina escribe en la pizarra]

Identificar datos

Validar datos

400 Ignacio: por ejemplo, si nosotros decimos que el tesoro está en el (4,3). (…)Si partimos para abajo, el primer número va a ser el de abajo, decimos tres y cuatro. Entonces tomamos el número de abajo que va a ser el primero y tomamos el de arriba que va a ser el segundo.

401 Valentina: yo lo podría tomar así, [escribe en la pizarra (3,4)], tres, rayita o una coma, cuatro. ¿Así?

402 Ignacio: y el primero va a ser el de la línea de abajo.

403 Valentina: y el primero va a ser el de la línea de abajo.

404 Ignacio: siempre, el primero va a tener que ser el de la línea de abajo.

In. justificar

Justificar
Concluir

En el mapa de proceso 4.5.11 se observa que de la discusión sobre las propiedades del sistema de referencia emerge inicialmente el proceso de identificar datos, para luego emerger el proceso de justificar, el cual se destaca en el diálogo.

Mapa de proceso 4.5.12

	408 Oscar: ¿tía, los números romanos también son infinitos?	**409 Valentina: hee, No tienen (duda). Se podrían escribir hasta el infinito, ¿Tú has visto números romanos muy largos? [Escribe 388 en número romano]**
414 Valentina: ¿cuáles son los símbolos que utiliza el sistema decimal? 0, 1, 2,	410: Estudiantes: 380... 388, 389!	**411: Valentina: si utilizamos un sistemas de referencia como lo ponemos [no se escucha bien, pero ella indica con el dedo que por la cantidad de letras que conforma un número romano, no es pertinente**
	Identificar datos	
416 Valentina: con estos dígitos yo puedo armar	415 Estudiantes: 0,1...9	**412 Valentina: la gracia del sistema decimal es que utiliza poquitos símbolos.**
	417 Oscar: cualquier número.	**418 Valentina: cualquier número, el sistema romano no es muy apropiado porque el sistema nuestro decimal utiliza poquitos dígitos. Con eso puedo armar todos los números y es conocido por todos.**
In. Identificar datos	**Identificar datos**	**Validar datos (Refutar) Concluir**

En el mapa de proceso 4.5.12 se aprecia que comprobar la eficiencia de un sistema con números romanos desde el punto de vista de la competencia de argumentación, significa un ciclo en torno a identificar datos. Discutir que los números romanos no son apropiados por su simbolización significa refutar los datos. A su vez se valida el sistema decimal en contraposición al sistema numérico romano.

Nivel de complejidad

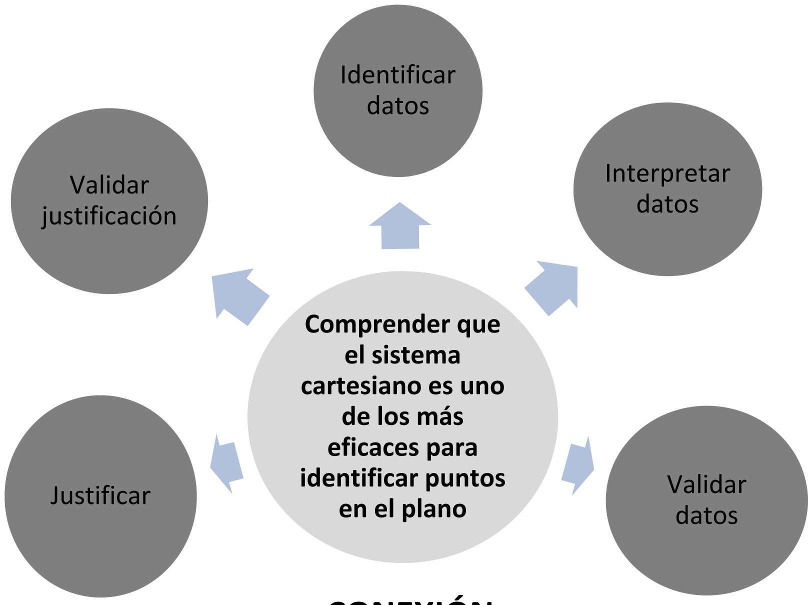
Tal como se ha hecho en las anteriores clases, en el cuadro 4.5.5 se caracterizan los procesos esperados para esta tarea y el nivel de complejidad.

Cuadro 4.5.5: Componentes de la competencia de argumentación en la clase 1

Tarea	Procesos	Complejidad
Construir un sistema de referencia	Identificar datos Interpretar datos	Conexión
Comprender que el sistema cartesiano es uno de los más eficaces para identificar puntos en el plano	Interpretar datos Justificar datos	Conexión

La tarea de "construir un sistema de referencia" se da en la primera parta de la actividad, en cambio la tarea de "comprender que el sistema cartesiano es una de los más eficientes" se desarrolla en todo momento en la actividad, sobre todo en la puesta en común. Se han puesto los procesos que *a priori* se esperan que emerjan, pero en la segunda tarea al ser transversal pueden emerger otros procesos.

En el aula de matemáticas, como se explica en la competencia de modelización, mediante una sola tarea se identifican los procesos que emergen en la actividad. La figura 4.5.6 muestra los cinco procesos que se desarrollan en la tarea transversal de comprender que uno de los más eficaces. Para determinar el nivel de complejidad se contrastan los procesos esperados con los que han emergido, los que coinciden puesto que se dan los tres procesos de identificar, interpretar y justificar. Recordamos el criterio que los procesos de validación no se caracterizan *a priori* pues consideramos que dependen mayormente de la gestión de la actividad por parte de la profesora y no significativamente del tipo de actividad.



CONEXIÓN

Figura 4.5.6: Competencia de argumentación, clase 4.

Clase 5: subepisodio 2.1.

En el cuadro 4.5.6 se presentan las preguntas y se caracterizan las tareas, procesos y el nivel de complejidad esperado en la actividad de la clase 5.

Cuadro 4.5.6: Componentes de la competencia de argumentación, clase 5

Pre.	Tareas	Procesos	Complejidad
a)	Lectura de gráficas	Identificar datos	Reproducción
b)	Interpretar gráficas Traducir a otra representación Estudiar dependencia de variables	Interpretar datos	Conexión
c)	Interpretar gráficas Estudiar dependencia de variables	Interpretar datos Justificar	Generalización
d) e)	Interpretar gráficas Estudiar dependencia de variables	Justificar Reflexionar sobre la argumentación	Reflexión

Los niveles de complejidad de la pregunta a) y b) se determinan con la relación entre las tareas y los procesos. A simple vista la pregunta b) es más compleja que la pregunta a); esta apreciación se caracteriza por las tareas y procesos implicados: la lectura se asocia a identificar datos que determinan un nivel de reproducción, en cambio la interpretación de gráficas se asocia a interpretar los datos y corresponde a un nivel de conexión. En la pregunta c) las tareas se mantienen, pero con la nueva condición de decidir si se está de acuerdo, se promueve el proceso de justificar; la aparición de este proceso promueve un nivel de generalización. Finalmente las preguntas d) y e) se espera que se desarrolle el proceso de reflexionar sobre la argumentación, que se asocia a un nivel de reflexión.

Se ha analizado el subepisodio 2.1, que corresponde a gran parte del desarrollo de las preguntas d) y e). En resumen, se ha dado inicio a la pregunta, pero los estudiantes no las entienden, muestran confusión y dicen que la interpretación de la noticia es falsa. La descripción detallada del episodio se encuentra en el desarrollo de la competencia de modelización de la clase 5, apartado 4. 4.

En el mapa de proceso 4.5.13 se han caracterizado los procesos que emergen del episodio. Se aprecian cinco secuencias argumentativas señaladas con cuatro tipos de líneas distintas, la secuencia sigue el mismo criterio que los anteriores mapas de proceso, la flecha al final de una estructura significa que ha terminado en una conclusión.

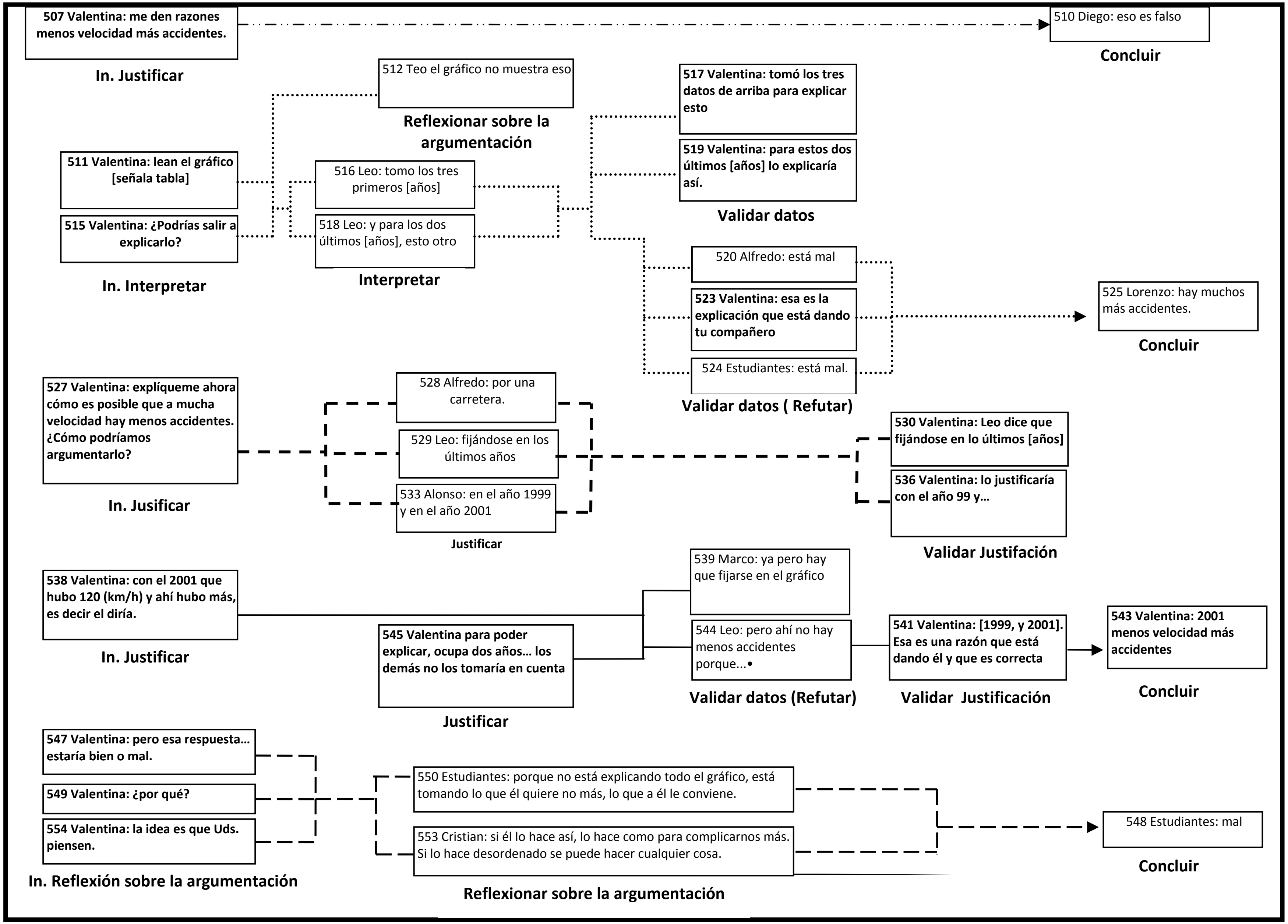
En el mapa de proceso 4.5.13 la primera secuencia se compone solamente de dos acciones, un inicio y una conclusión sin desarrollarse más procesos. En la segunda secuencia se desarrolla un ciclo en torno a interpretar datos que termina en una conclusión. En la tercera secuencia se desarrolla un ciclo en torno al proceso de justificar que no termina en una conclusión. La cuarta secuencia también es un ciclo en torno a la justificación que finaliza con una conclusión. Finalmente la quinta secuencia es un ciclo en torno al proceso de reflexionar sobre la argumentación, proceso que se da de manera inicial en el aula pero que no se alcanza a desarrollar.

Al observar de manera global este mapa de proceso se aprecia que las continuas inducciones de Valentina evidencian el esfuerzo de la profesora para que los estudiantes interpreten y justifiquen bajo las nuevas condiciones impuestas en la actividad. Sin embargo en la cantidad de refutaciones por parte de los estudiantes se aprecia que esta intención es difícil de llevar a cabo; si Valentina validaba una interpretación o justificación, luego surgía una acción de refutación de un estudiante. Las conclusiones que se obtienen concuerdan con este hecho, las dos primeras conclusiones de los estudiantes son contrarias a la solicitud de Valentina para argumentar «a menos velocidad más accidentes», y la tercera conclusión la comunica Valentina y no los estudiantes. Finalmente cuando se pide una reflexión acerca de este tipo de actividad, los estudiantes no dudan en expresar que está mal, y sus reflexiones giran en torno a justificar la errónea interpretación que se hace de la gráfica.

Para caracterizar el nivel de complejidad en la clase 5 nos centraremos en este mismo episodio, puesto que se desarrollan las preguntas en que se espera el nivel de complejidad más alto de reflexión.

Análisis de datos y resultados

Mapa de proceso 4.5.13



En la figura 4.5.7 se caracterizan los procesos identificados en el mapa de proceso 4.5.13. El nivel de reflexión solamente se desarrolla de forma inicial, por tanto la complejidad corresponde a un nivel de generalización.

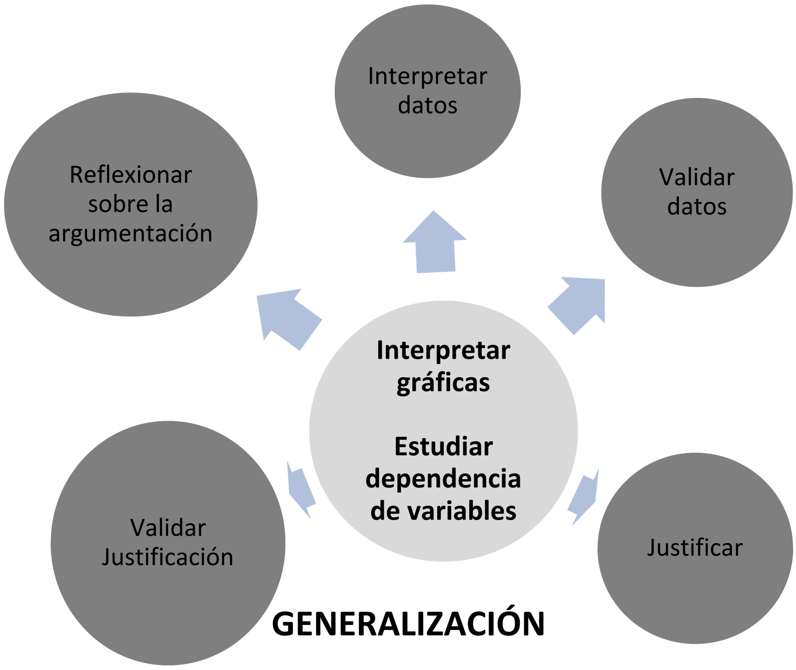


Figura 4.5.7: Competencia de argumentación, clase 5.

La complejidad de la actividad matemática en este episodio se ha elaborado para que sea de un nivel de *reflexión*; desde el punto de vista de la argumentación este nivel se cumple si los estudiantes identifican qué datos de la gráfica pueden llevar a una interpretación distinta a la que anteriormente ellos habían establecido y las razones que tenía el sujeto – Francisco Cerda- que en la noticia daba argumentos para que no se tomaran medidas contra la alta velocidad de los automóviles. Si bien los estudiantes identifican los datos, no son capaces de tener una actitud crítica frente a la actividad y sus reflexiones se limitan a justificar el error de la interpretación expuesta por la persona en la noticia, y no en desarrollar argumentos de los intereses personales para hacerlo. Por tanto no se logró el nivel de reflexión esperado y solo se obtiene el nivel de generalización. Si bien la falta de tiempo era un factor relevante para explicar esto, desde un punto de vista de las normas matemáticas (Yackel y Cobb, 1996) se puede explicar la razón para que no se alcanzara el nivel de reflexión. Los estudiantes no están acostumbrados a desarrollar este tipo de actividades en que se cambien las normas ni tampoco a actividades que impliquen una reflexión, en este caso sobre la posibilidad de más de una interpretación. Por tanto no es de extrañar que al finalizar la clase solo unos cuantos estudiantes levantaran la mano indicando que comprendieron el problema.

Finalmente se destaca la ausencia del proceso de fundamentar. En el cuarto ciclo, en el que se intenta refutar la justificación, se pone en evidencia la necesidad de explicitar los fundamentos. Pero ni los estudiantes ni la profesora buscan los fundamentos y la discusión se resuelve sin que finalmente se llegara a un acuerdo. La ausencia de acciones que se dirijan a los fundamentos no es un hecho aislado si no que se da a lo largo de la aplicación de la unidad didáctica.

4.6 Patrones de interacción

En el apartado 2.4 correspondiente al marco teórico se describieron antecedentes sobre los patrones de interacción, tema necesario para desarrollar el cuarto objetivo de investigación. La discusión del apartado concluyó en estudiar los patrones de interacción según los procesos que emergen en el aula. Por tanto una vez desarrollado el modelo de competencia en el estudio empírico, en el cuadro 4.6.1 se ha sistematizado el cuarto objetivo y las preguntas relacionadas, centradas en el estudio de caso.

Cuadro 4.6.1: Objetivo y preguntas en torno al rol del profesor

Objetivo 4: Describir la interacción en el aula de matemáticas en relación al desarrollo de competencias.

Dado que los procesos emergen de la interacción en el aula:

- **¿Cuáles son los patrones de interacción que caracterizan el desarrollo de los procesos?**
- **¿Cuáles de estos procesos corresponden en mayor medida a las acciones de la profesora?**

En este último apartado del capítulo de análisis se estudian los patrones de interacción en el aula de matemáticas. Las preguntas planteadas servirán de guía para conducir el análisis de los episodios de clases.

El desarrollo de este objetivo se ha estructurado en tres apartados. En el apartado 4.6.1 se explica la estrategia para analizar los episodios de clases. En el apartados 4.6.2 se desarrolla el cuerpo del análisis. Finalmente en el apartado 4.6.3 se discuten los resultados en relación a las preguntas de investigación.

4.6.1 Estrategia para el análisis de patrones de interacción

Para estudiar los patrones de interacción en el aula de matemáticas, se han organizado los procesos diferenciando quien actúa, la profesora o los estudiantes, así también si las acciones de la profesora inducen un proceso o es una acción directa asociada a un proceso, el resultado ha sido una clasificación en tres grupos de procesos. En el cuadro 4.6.2 se han clasificado los procesos de cada competencia en estos tres grupos. A cada proceso se le atribuye un ordinal para poder elaborar una gráfica que visualice la secuencia de los procesos en un episodio.

Cuadro 4.6.2: Grupos de procesos de las competencias modelización y argumentación

inducir profesor (IAP)			Acciones estudiante (AE)			Acciones profesor (AP)		
Modeliza.	**Argumeta.**		**Modeliza.**	**Argumenta.**		**Modeliza.**	**Argumenta.**	
Inducir características del modelo	Inducir a Identificar datos	**2**	Característica s modelo	Identificar datos	22	Características modelo	Identificar datos	42
Inducir interpretar modelo	Inducir a Interpretar datos	**4**	Interpretar modelo	Interpretar datos	24	Interpretar modelo	Interpretar datos	44

Inducir validar características modelo	Inducir validar datos	**6**	Validar característica s modelo	Validar datos	26	Validar características modelo	Validar datos	46
Inducir Identificar propiedades modelo	Inducir Justificar	**8**	Identificar propiedades	Justificar	28	Identificar propiedades	Justificar	48
Inducir construir expresión modelo	Inducir fundament os	**10**	Construir expresión modelo	Fundamentos	30	Construir expresión modelo	Fundamentos	50
Inducir validar modelo	Inducir validar justificación	**12**	Aplicar modelo	Validar justificación	32	Aplicar modelo	Validar justificación	52
Inducir a aplicar modelo	Inducir concluir	**14**	Validar modelo	Concluir	34	Validar modelo	Concluir	54
Inducir a reflexionar sobre el modelo	Reflexionar sobre la argumentac ión	**16**	Reflexionar sobre la modelización	Reflexionar sobre la argumentació n	36	Reflexionar sobre la modelización	Reflexionar sobre la argumentació n	56

En una secuencia de procesos puede emerger un patrón de interacción que hemos denominado *ciclo*, los que se identifican según el recorrido que se establezca por los tres grupos. Por ejemplo si se establece un recorrido lineal en que la profesora induce un proceso, el estudiante responde sobre este proceso y la profesora evalúa este proceso, este recorrido conforma un tipo de ciclo; en cambio si el recorrido es otro en que la profesora en vez de evaluar responde con una acción de inducir un proceso, se conformaría otro tipo de ciclo.

En el análisis de los episodios se han caracterizado cuatro tipos de ciclos, identificados con un número romano. En el cuadro 4.6.3 se ilustra cada grupo.

Cuadro 4.6.3: Ciclos de cada competencia

Ciclos de procesos	Grupo	Descripción
I	AIP-AE-AP (v)	Profesora induce un proceso, estudiante desarrolla un proceso y la profesora valida o refuta el proceso.
II	AIP- AE-AP	Profesora induce un proceso, estudiante desarrolla un proceso y la profesora responde con una acción directa a un proceso, no evalúa.
III	AIP- AE-AIP	Profesora induce un proceso, estudiante desarrolla un proceso y la profesora vuelve a inducir un proceso.
IV	AE- AP, AE-AP(v)	Estudiante desarrolla un proceso, profesora evalúa el proceso o bien responde con una acción conducente a un proceso.

Estos ciclos agrupan los patrones de interacción frecuentes en los episodios, otras secuencias encontradas no eran tan frecuentes y no se identificaron con un ciclo.

Los ciclos se han clasificado según tres criterios:

- Según el recorrido en los tres grupos

- Según el proceso, por ejemplo si la competencia de argumentación gira en torno a la identificación de datos, la interpretación, la justificación o la reflexión.

- Según la valoración en los procesos de validación. En el caso de ser negativa o refutar se identifica con el símbolo *(R)*

La figura 4.6.1 muestra un ejemplo de gráfica de una secuencia de procesos para cada competencia. La variable vertical de la gráfica corresponde a los indicadores de grupo, señalados con siglas AIP, AE, y AP. La variable horizontal simboliza la secuencia del episodio, cada punto indica un proceso (ver leyenda en el cuadro 4.6.4). Las tres franjas de la gráfica representan la división entre un tipo de acción y otro.

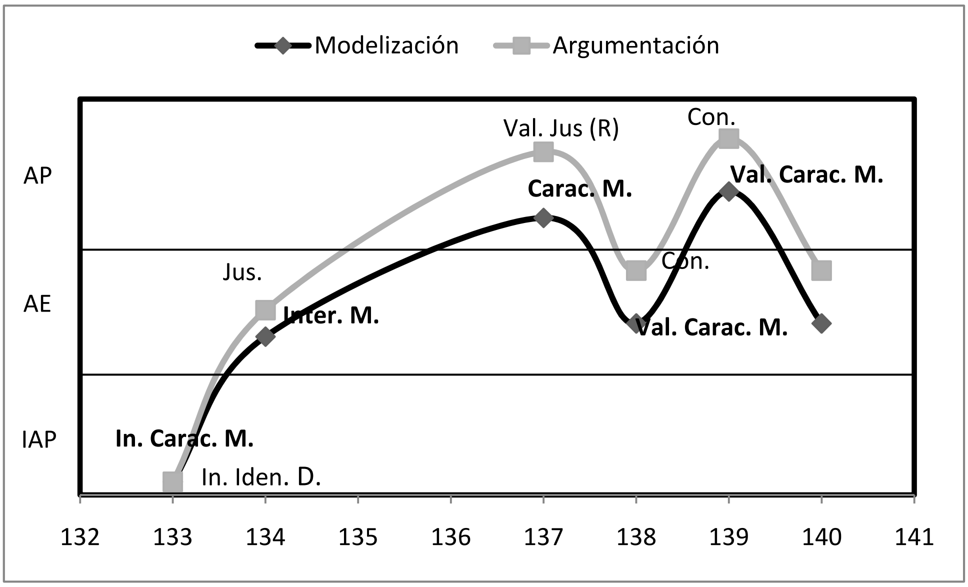


Figura 4.6.1: Ejemplo de gráfica secuencia de procesos

La gráfica permite analizar para cada competencia tanto las características propias de cada ciclo como el paso de un ciclo a otro. Asimismo permite comparar las dos competencias.

La organización de los procesos en una gráfica tienen la ventaja de que la información es más manipulable que la organización expuesta en los mapas de proceso. Si bien la gráfica no muestra el contenido, visualmente permite caracterizar como se desarrollan los procesos de una competencia a lo largo de una secuencia, así como permite identificar el paso de un ciclo a otro. Otra ventaja es poder visualizar el recorrido de las dos competencias en una misma gráfica, recurso que permite comparar y relacionar las dos competencias.

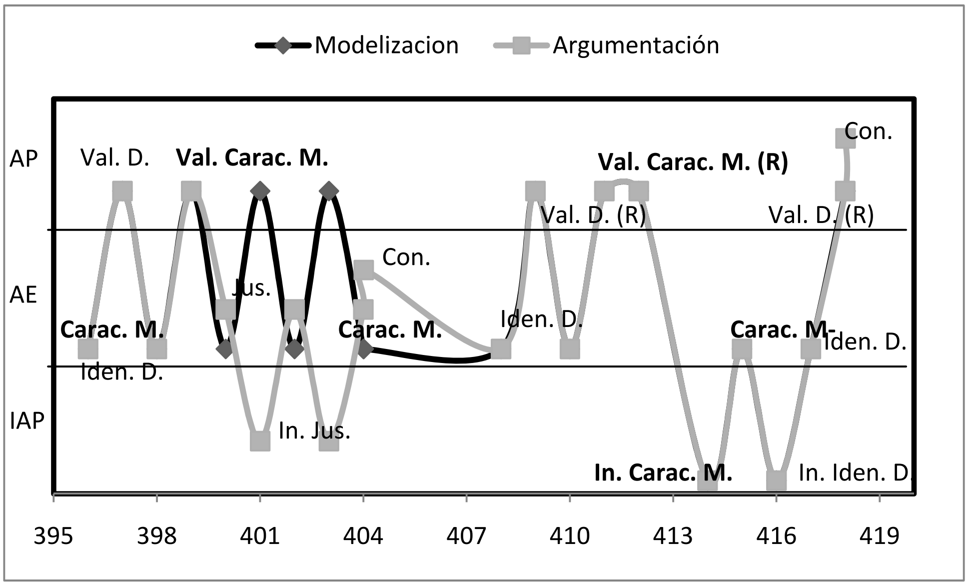
Cuadro 4.6.4: Leyenda grupos de procesos

In. inter. M. : *Inducir características modelo*	Carac. M.: *Características modelo*
In. Carac. M. : *Inducir interpretar modelo*	Inter. M.: *Interpretar modelo*
In. Val. Carac. M.: *Inducir validar características modelo*	Val. Carac. M.: *Validar características modelo*
In. Prop. M.: *Inducir Identificar propiedades modelo*	Prop. M.: *Identificar propiedades modelo*
In. Cons. M.: *Inducir construir expresión modelo*	Cons. M.: *Construir expresión modelo*
In. Val. M. : *Inducir validar modelo*	Val. M. : *Validar modelo*
In. Apl. M. : *Inducir aplicar modelo*	Ap l. M.: *Aplicar modelo*
In. Refle. M. : *Inducir reflexionar sobre la modelización*	Refle. M. : *Reflexionar sobre la modelización*
Indicadores competencia de modelización	
In. Iden. D. : *Inducir identificar datos*	Iden D. : *Identificar datos*
In. Inter.D : *Inducir interpretar datos*	Inter. D. : *Interpretar datos*
In. Val. D. : *Inducir validar datos*	Val. D. : *Validar datos*
In. Jus. : *Inducir justificar*	Jus. : *Justificar*
In. Fun. : *Inducir fundamentos*	Fun. : *Fundamentos*
In. Val. Jus.: *Inducir validar justificación*	Val. Jus. : *Validar justificación*
In. Con. : *Inducir Conclusión*	Con. : *Concluir*
In. Refle. A.: *Inducir reflexionar sobre la argumentación*	Refle. A.: *Reflexionar sobre la argumentación*
Indicadores competencia de argumentación	

En el próximo apartado 4.6.2 se aplica esta estrategia a los episodios de clase. Se han mantenido los mismos episodios de clase analizado en los apartados 4.3 y 4.4, pero esta vez se sigue la secuencia de la unidad didáctica: clase 1, clase 3, clase 4 y clase 5. Para la clases 1 y clase 5 solo hay un episodio por clase, no obstante cada episodios es un buen reflejo de las secuencias de procesos del resto de episodio de cada clase, y por tanto permite obtener resultados sobre los patrones de interacción que se dan en el aula.

4.6.2 Análisis patrones de interacción

Clase 1 (episodio 3.1): Gráfica 4.6.1



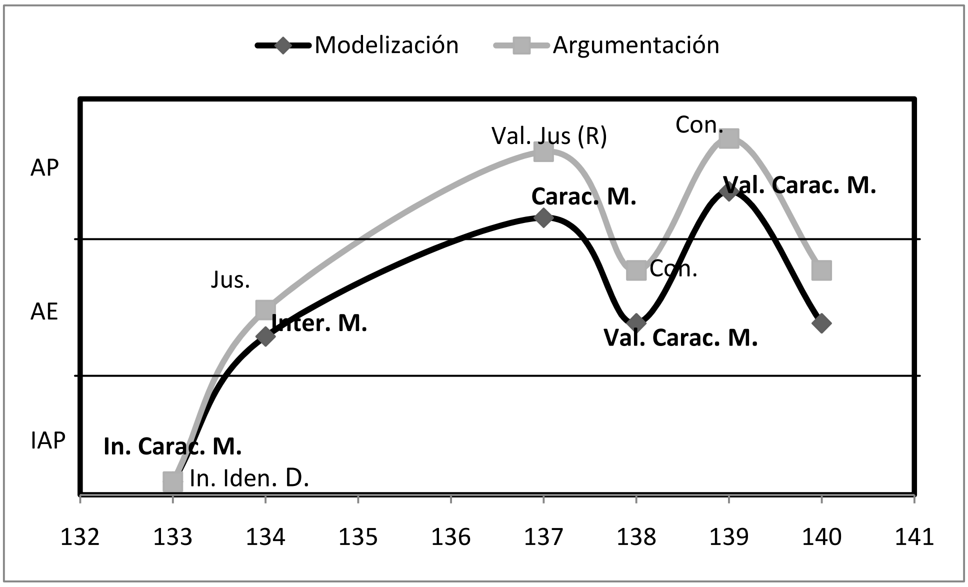
En la gráfica 4.6.1 respecto a la competencia de modelización, se aprecia que *caracterizar el modelo* es el único proceso en el episodio y que la interacción se comporta en un ciclo IV en gran parte del episodio. En el primera mitad del episodio (hasta acción 404) Valentina valida las características del modelo propuestas por los estudiantes, pero desde la acción 408 (un estudiante propone los números romanos como sistema) se sigue dando un ciclo IV pero esta vez Valentina refuta las características del modelo. Al final del episodio se da un ciclo I en el mismo proceso en que Valentina termina de refutar los números romanos para el sistema de referencia.

Respecto a la competencia de argumentación hay una mayor variedad de procesos. Hay un menor número de ciclos IV y son en torno a *la identificación de datos*, para luego darse dos ciclos III en torno a la *justificación*. Desde la acciones 408 se da los mismos ciclos que en modelización y con el proceso de *identificar datos* que actúa de manera similar a *caracterizar el modelo*.

Comparando las dos competencias, se identifica una relación entre el proceso de c*aracterizar el modelo* y *justificar*.

Clase 3

Episodio 1: Gráfica 4.6.2

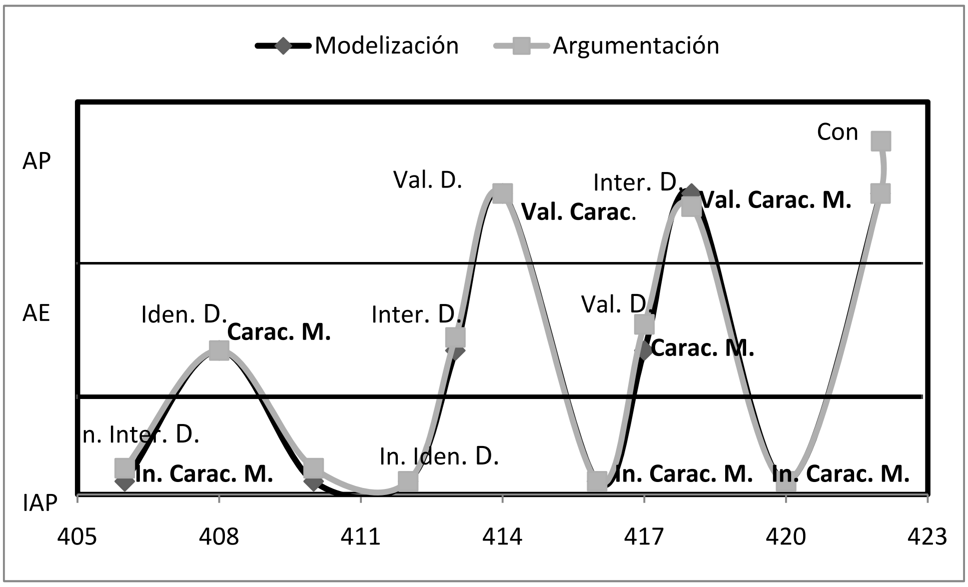


En la gráfica 4.6.2, la secuencia de los procesos de modelización se asocia a un ciclo II en torno a *caracterizar el modelo* para darse un ciclo III respecto a *validar características del modelo.* Este ciclo muestra matices significativos: Valentina induce a caracterizar, los estudiantes interpretan en vez de caracterizar y finalmente son ellos quienes validan, Valentina repite la validación.

Los procesos de argumentación se asocian a un ciclo I en torno a *justificar* con refutación, que termina con una *conclusión* por parte de los estudiantes.

Dado el comportamiento de las dos competencias, se pude apreciar una relación entre *caracterizar el modelo* y *justificar.* Cuando se induce un proceso de *caracterizar el modelo* en este caso emerge el proceso de j*ustificar*.

Episodio 2: Gráfica 4.6.3

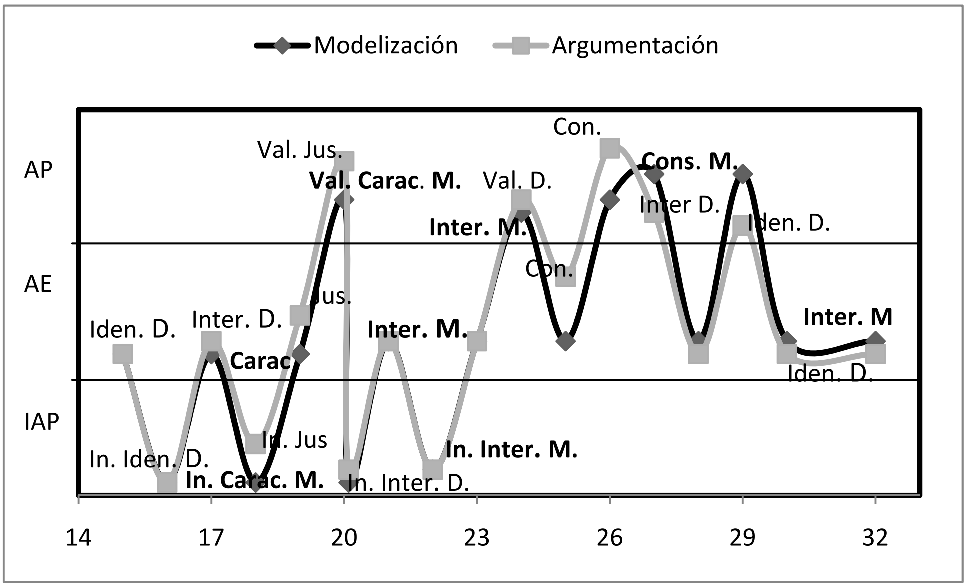


La secuencia de procesos de modelización representada en la gráfica 4.6.3 corresponde a ciclos en torno a *caracterizar el modelo*. En efecto, hay dos ciclos I bien definidos que se inician con una acción de inducir por parte de Valentina y termina con la validación de Valentina.

La secuencia de procesos de argumentación presenta un ciclo I en torno a i*dentificar datos* e *interpretar datos*, para luego darse una secuencia en que el estudiante valida en vez de responder a la inducción de Valentina, la profesora responde con una interpretación. Las acciones finales corresponden al cierre de la pregunta y no se asocian a un ciclo.

Las dos curvas visualmente están superpuestas, esto significa que hay una elevada correspondencia entre el tipo de procesos de cada competencia.

Episodio 3: Gráfica 4.6.4

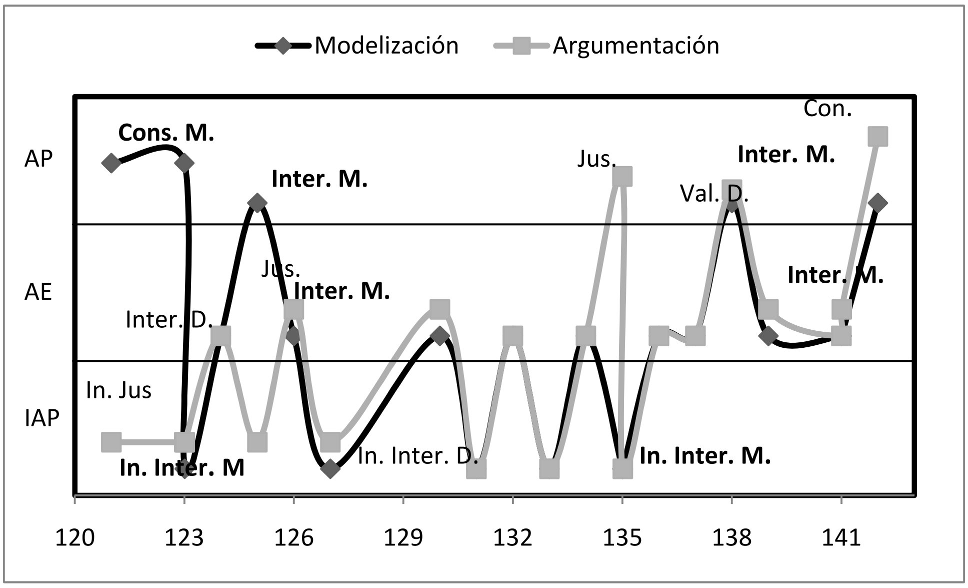


En la gráfica 4.6.4, la secuencia de los procesos de modelización comienza con una secuencia de procesos que deriva en un ciclo I en torno a *caracterizar el modelo*. La acción 20 de Valentina corresponde a dos procesos: *validar características del modelo* y a inducirlo nuevamente, estas acciones dan paso a un ciclo II en torno a la *interpretación del modelo*. Finalmente se dan dos secuencias consecutivas en que Valentina *construye la expresión del modelo* y los estudiantes *interpretan el modelo*, no se ha considerado como ciclo dado que es un caso aislado y no se repite en otros episodios.

La secuencia de los procesos de argumentación también muestra una secuencia de procesos de *identificación de datos* e *interpretación de datos*, que deriva en un ciclo I en torno a *justificar*. En otras palabras, los procesos que proponen los estudiantes de *identificar datos* e *interpretar datos* son planteados para su justificación. Luego se continúa con un ciclo I en torno a la *interpretación de datos* que termina en una conclusión de Valentina. El episodio finaliza con dos secuencias en que Valentina *interpreta datos e identifica datos* y los estudiantes continúan con el mismo proceso.

Generalmente hay una correspondencia entre el tipo de procesos de cada competencia, pero en dos intervalos se ven dos correspondencias no triviales que nos lleva a dos implicaciones: el proceso de *caracterizar el modelo* se corresponde con el proceso de *justificar*; y el proceso de *construir la expresión del modelo* se corresponde con el proceso de *interpretar datos*.

Episodio 4: Gráfica 4.6.5

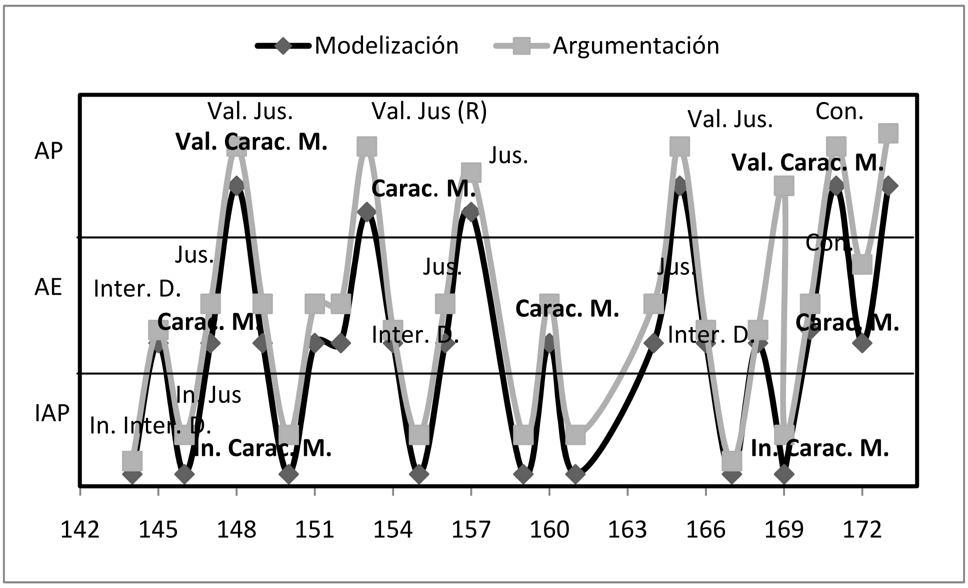


En la gráfica 4.6.5 en la secuencia de procesos de modelización, Valentina comienza con una acción de construir la expresión del modelo que da paso a un ciclo II en torno a la interpretación. A partir de la acción 127 se dan tres ciclos III en interpretación del modelo que terminan en un ciclo II sobre el mismo proceso.

En la secuencia de procesos de argumentación, los procesos hasta la acción 130 se asocian a tres ciclos III en torno a *justificar*. Para luego darse un ciclo II en torno a *interpretar datos*, y un ciclo I en torno al mismo proceso.

Al observar las relaciones entre los procesos de cada competencia, los procesos de *construir la expresión del modelo* e *interpretar el modelo* se corresponden con el proceso de *justificar*. El resto de relaciones son las esperadas dado que se corresponde *interpretar el modelo* con *interpretar datos*.

Episodio 5: Gráfica 4.6.6



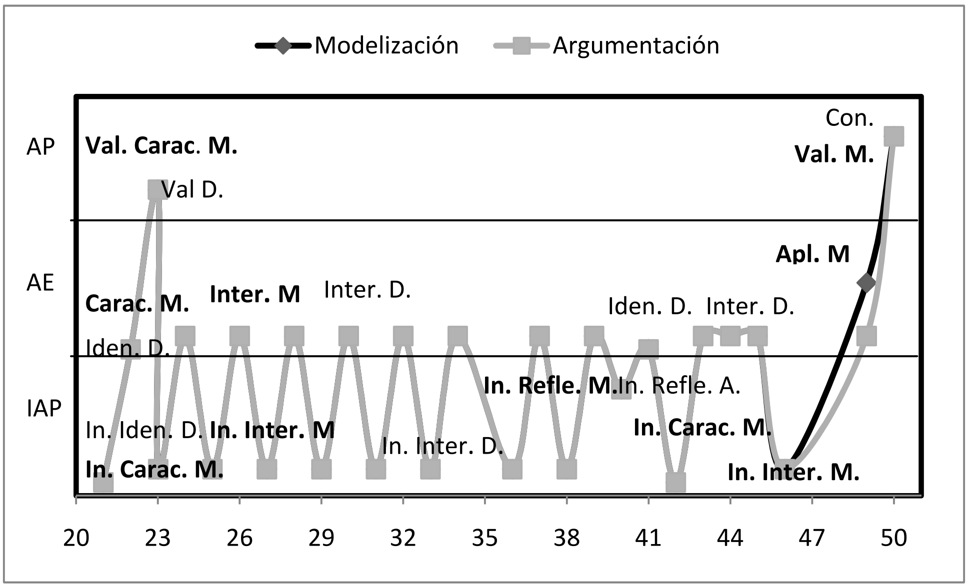
En la gráfica 4.6.6 la secuencia de procesos de modelización, es un largo episodio en torno a *caracterizar el modelo*. Se dan ciclos I, ciclos II y ciclos III de forma intercalada, entre cada ciclo si bien hay una acción de un estudiante, es Valentina con nuevas preguntas quién da pie a un nuevo ciclo.

En la secuencia de procesos de argumentación, el proceso predominante es *justificar*, que se intercala en algunas ocasiones con el proceso de *interpretar datos* en el momento en que termina un ciclo I en torno a la justificación. Se dan los mismos ciclos que en los procesos de modelización

Se destaca nuevamente la correlación entre el proceso de *caracterizar el modelo* con el proceso de j*ustificar*.

4.6.2.2 Clase 4

Episodio 1 Gráfica 4.6.7

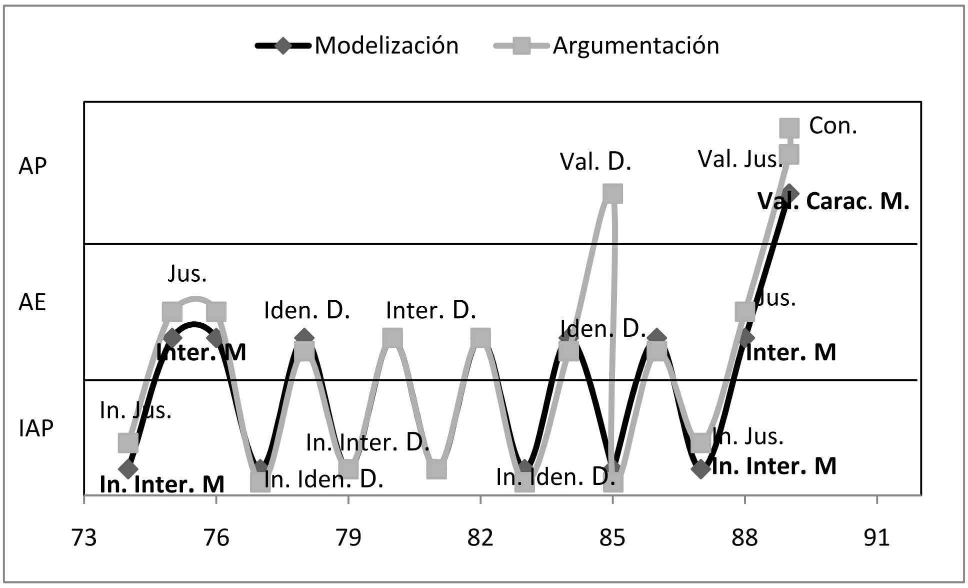


En la gráfica 4.6.7 se aprecia una elevada correlación entre los procesos de interpretación de cada competencia en que predomina el ciclo III. Al término del episodio la competencia de modelización muestra un procesos diferente (*aplicar el modelo*) que se asocia a un ciclo I.

Respecto a la argumentación en el inicio hay un ciclo I torno a *identificar datos*, pero mayoritariamente son ciclos III en torno a *interpretar datos*.

Las escasas acciones directas de Valentina, sobre todo de validación, se pueden explicar porque este episodio es el único que corresponde a un trabajo de pequeño grupo entre estudiantes en que Valentina les apoya. El grupo está elaborando una estrategia para relacionar las gráficas con los circuitos, o en otras palabras, caracterizar el modelo. En términos de modelización las dos validaciones son significativas: la que se da al inicio es respecto a *caracterizar el modelo* y la segunda, al final del episodio, luego de estar interpretando el modelo a lo largo de episodio se da el proceso de *validar el modelo*. En los otros episodios difícilmente se encuentra ese tipo de secuencias pues las interacciones corresponden a puestas en común sobre el desarrollo de la actividad.

Episodio 2.1 Gráfica 4.6.8

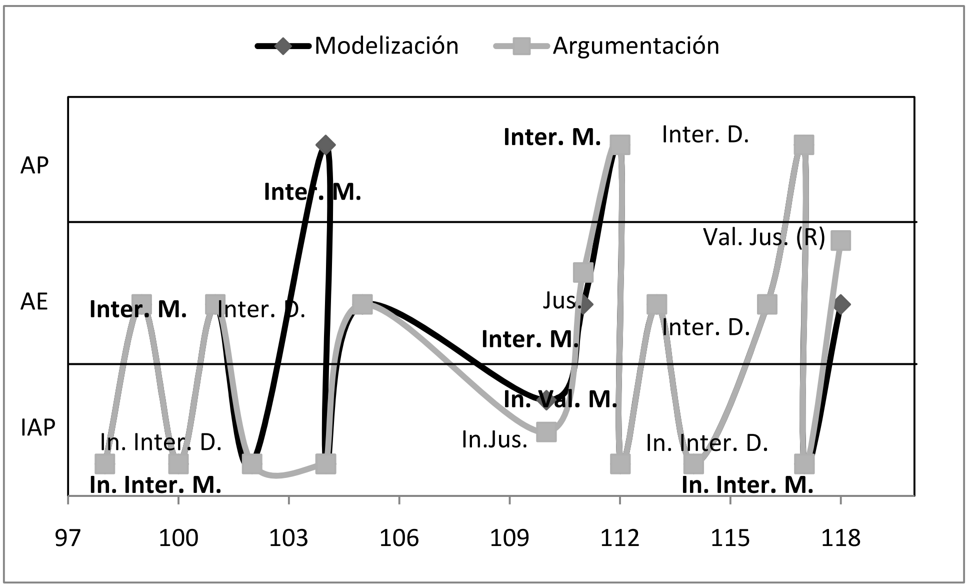


En la gráfica 4.6.8 el proceso predominante de modelización es *interpretar el modelo*. El cual sigue un ciclo III en el transcurso del episodio que culmina en un ciclo I al validarse la interpretación del modelo.

En los procesos de argumentación hay una mayor variabilidad. En un inicio hay un ciclo III en torno a justificar, luego tres ciclos III sobre los procesos de *identificar* datos e *interpretar datos* que conlleva a un ciclo I en que se validan los datos, que da paso a un nuevo ciclo I en torno a justificar.

Se observa una relación significativa entre las dos competencias. Todas las acciones asociadas a *interpretar datos* también se asocian a *interpretar el modelo*, pero no viceversa pues hay algunas acciones que se han asociado a *interpretar el modelo*, que a su vez se han asociado *justificar*. En efecto el último ciclo de *interpretar el modelo* se asocia a un ciclo de justificación. Por tanto el proceso de *interpretar datos* implica un proceso de *interpretar el modelo.*

Episodio 2.2 Gráfica 4.6.9

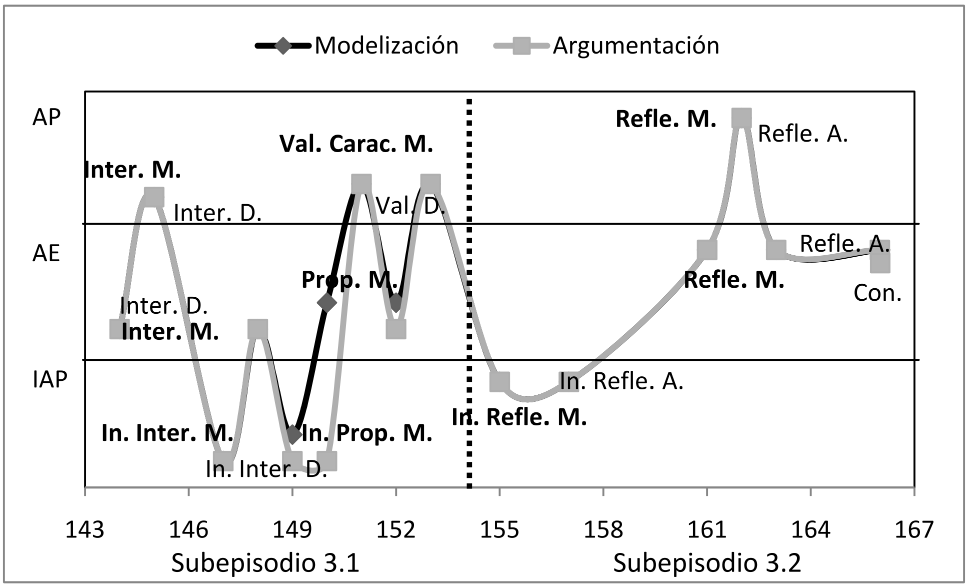


En la gráfica 4.6.9 respecto a los procesos de modelización se muestra que sigue predominando el proceso de *interpretar el modelo*, pero con una participación mayor de Valentina en el desarrollo de procesos de interpretación en comparación a otros episodios anteriores en que Valentina se limita a validar las interpretaciones. En efecto, hay dos ciclos III y tres ciclos II en torno *a interpretar el modelo*, y en contraparte ninguna validación.

Respecto a los procesos de argumentación, en un inicio hay tres ciclos III en torno a la *interpretar datos* para darse un ciclo II en torno a *justificar*, luego se da otro ciclo III en torno *a interpretar los datos* que decanta en un ciclo II en el mismo proceso. La secuencia termina con una acción de refutación por parte de los estudiantes.

Se destaca nuevamente la relación en el ciclo II entre el proceso de interpretar el modelo y *justificar*.

Episodio 3 (3.1.-3.2) Gráfica 4.6.10



En la gráfica 4.6.10 se ha graficado el episodio 3 completo, el segmento punteado separa los dos subepisodios.

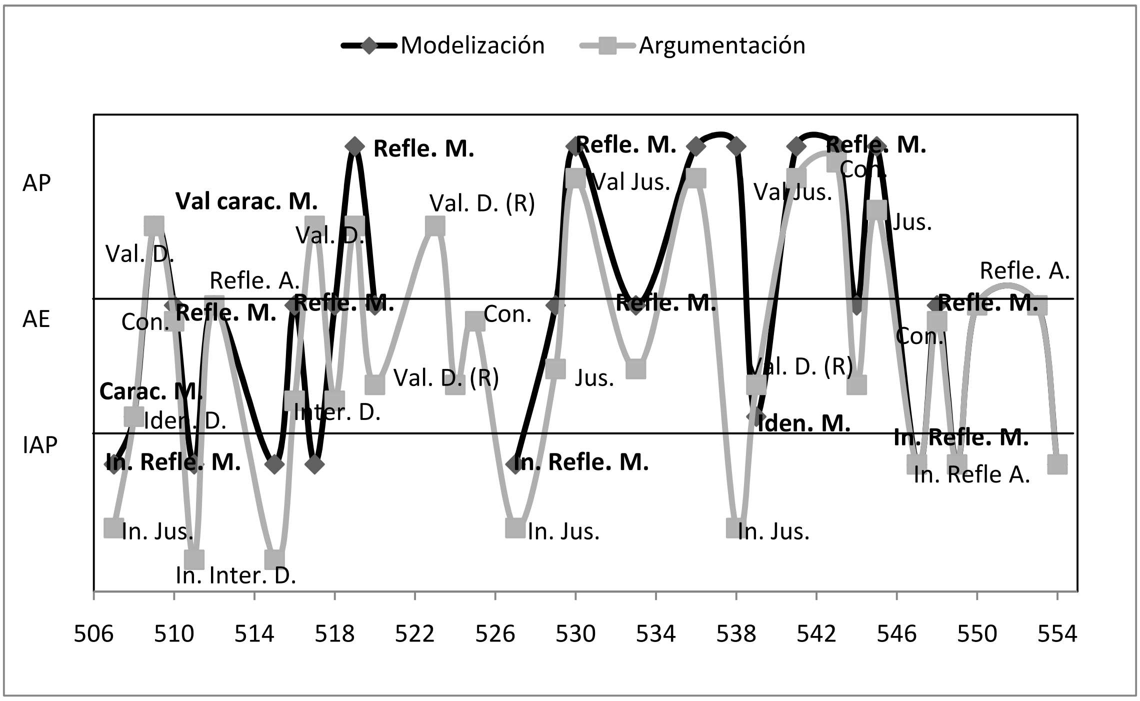
En el subepisodio 3.1 respecto a la modelización, se comienza con una ciclo IV en torno a *interpretar el modelo,* se continúa en el mismo proceso que se conforma en un ciclo III; Valentina en vez de validar la interpretación, responde con una nueva pregunta, es vez con una acción asociada a *identificar las propiedades del modelo*, proceso que se desarrolla en un ciclo.

Respecto a la argumentación, también se siguen los mismos ciclos anteriores en torno a *interpretar datos*, que decanta en un ciclo I en torno a este proceso.

En el subepisodio 3.2 surge el proceso de reflexionar para las dos competencias. Las dos se comportan de forma similar y se asocian a un ciclo II, dado que Valentina no valida las acciones de reflexión de los estudiantes.

Se visualiza una correspondencia elevada entre las dos competencias. En el subepisodio 3.1 se establece la correspondencia esperada entre los dos procesos de interpretación. En el subepisodio 3.2 las secuencias de cada proceso hace un recorrido identifico. Con lo cual las características de los dos procesos se puede anunciar que son parecidos

Clase 5: Gráfica 4.6.11



Este episodio caracterizado en la gráfica 4.6.11, es el que tiene menos correspondencia entre procesos de cada competencia. En modelización el proceso predominante es *reflexionar sobre la modelización* dado que la intención *a priori* de la pregunta que se discute apunta a desarrollar este proceso, y por eso cada acción no se asocia solamente a lo que indica de forma puntual si no que a la intención que tiene, es por ello que varias acciones que podían ser asociadas a caracterizar o interpretar el modelo se han asociado directamente al proceso de *reflexionar sobre la modelización*.

En cambio, en la argumentación se ha actuado con un criterio en que se asocian los procesos que indica la acción de manera puntual, y solo en los casos en que la acción destaca la reflexión se ha asociado a este proceso. Con este criterio se ha privilegiado identificar qué procesos de argumentación y con qué ciclos se dan en un contexto de reflexión.

Respecto a la modelización en el inicio se da un ciclo I que se inicia con *reflexionar sobre la modelización* pero que se responde con una acción de caracterizar el modelo y que Valentina valida. Posteriormente se dan prácticamente solo acciones asociadas al proceso de *reflexionar sobre la modelización*. Se dan dos ciclos II en torno a este proceso, para luego darse un ciclo IV y finalmente tres ciclos III.

Respecto a la argumentación, destacamos que en un contexto de reflexión, el proceso de justificación y validación se da frecuentemente; en efecto, tanto los estudiantes como Valentina interactúan o bien validando o refutando acciones, hay un ciclo I y tres ciclos VII en torno a la refutación de datos. Asimismo en el sector central se aprecian tres ciclos en torno a j*ustificar* (dos ciclos I y un ciclo IV). Finalmente se da un ciclo III en torno a *reflexionar sobre la argumentación*.

4.6.3 Discusión de resultados

El análisis de gráficas de cada episodio ha permitido caracterizar el tipo de ciclos que se han dado, los procesos más frecuentes y las relaciones que se establecen entre las dos competencias; es decir, se han establecido correspondencias entre los procesos de una competencia con los procesos de otra.

Para desarrollar las preguntas propuestas inicialmente se ha resumido en el cuadro 4.6.3 el análisis anterior. Se destacan los siguientes resultados:

- La mayoría de las secuencias se asocian a un ciclo III. La profesora induce un proceso, los estudiantes responden de forma aislada sin completar el proceso y la profesora generalmente induce nuevamente el mismo proceso.
- Los procesos más frecuentes se dan en los tres primeros ciclos. En la competencia de modelización son: *caracterizar el modelo* e *interpretar el modelo*; en la competencia de argumentación son: *identificar datos*, *interpretar datos* y *justificar*. En el cuadro también aparece la refutación de los datos (R), proceso que aparece respectivamente en los tres ciclos que puede estar I, III y IV.
- De los casos particulares los procesos *de identificar propiedades del modelo* y *aplicar el modelo* la única vez que se desarrollaron cumplen un ciclo I. En cambio los procesos asociados a reflexionar se dan en los ciclos II y III pero no el ciclo I, es decir que no se han encontrado acciones en que la profesora valide las reflexiones de los estudiantes.
- En modelización el proceso que predomina es *caracterizar el modelo*, en argumentación es *interpretar datos*
- Se destaca una relación entre los procesos de *caracterizar el modelo* y *justificar.* En varios episodios cuando se da un proceso en un ciclo I ó II, también se da el otro, en menos casos se asocia la interpretación del modelo con la justificación.

Cuadro 4.6.3: Resumen ciclos[1]

Nº[2]	Ciclo I	Ciclo II	Ciclo III	Ciclo IV	observaciones
1	Carac. M. Iden. D. (R)		Jus. (2)	Carac. M. (4) Carac. M. (R) (2) Iden. D. (4)	Relación entre el proceso de caracterizar el modelo y justificar
2	Jus. (R)	Carac. M.		Val. M.	Relación entre el proceso de caracterizar el modelo y justificar
3	Carac. M. (2) Iden. D. (2) Inter. D. (2)				Elevada correspondencia entre el tipo de procesos de cada competencia
4	Carac. M. Jus. Inter. D.	Inter. M.			Características del modelo se corresponde con justificar. Construir la expresión del modelo se corresponde con interpretación de los datos

[1] El número entre paréntesis en los procesos indica la frecuencia del ciclo en la gráfica.
[2] Nº: número de gráfica, por ejemplo 4.6.1 se denota 1, en correspondencia con el último dígito

					interpretación de los datos
5	Inter. M.	Inter. D. Inter. M. (2)	Inter. M. (3) Jus. (2) Inter. D. (2)		construir la expresión del modelo e interpretación se corresponden con el proceso de justificar
6	Carac. M. (3) Jus. (3) Jus. (R)	Carac. M. (2) Jus. (2)	Carac. M. (3) Inter D. Jus.		Correlación entre el proceso de caracterizar el modelo con el proceso de justificar
7	Carac. M. Apl. M. Iden. D.		Inter. M. (9). Inter. D. (9)		Escasas validaciones, episodio de trabajo en grupo
8	Inter. M. Iden. D. Jus.		Inter. M. (6) Jus. Iden. D. Inter. D. (3)		Interpretar datos implica interpretar modelo, pero no viceversa. Ciclo de interpretar modelo se asocia a un ciclo de justificación
9		Inter. M. (3) Jus. Inter. D.	Inter. M. (2) Inter D. (2) Val. Jus. (R)		Relación en el ciclo II entre el proceso de interpretar el modelo y justificar
10	Prop. M. Inter. D.	Refle. M. Refle. A.	Inter. M. Inter. D.	Inter. M. Inter. D. (2)	Las dos procesos de reflexión se comportan de forma similar
11	Carac. M. Jus. (2)	Refle. M. (2)	Refle. M. (3) Refle. A.	Refle. M. Val. D. (R) (3) Jus.	En un contexto de reflexión, el proceso de justificación y validación se da frecuentemente

- **Sobre la interacción**

Para analizar el tipo de interacción de aula, primero hay que indicar que la estructura en que se han agrupado los procesos (IAP-AE-AP) ya condiciona los posibles resultados, pues esta organización sigue el patrón de interacción I-R-E (iniciación – respuesta - evaluación). La decisión de seguir estos tres grupos viene apoyada porque los datos que han sido recogidos provienen generalmente de la puesta en común de una actividad. En este escenario el patrón de interacción I-R-E es un medio muy frecuente, y responde a las acciones de la profesora Valentina en este momento del aula: genera preguntas, espera respuestas, y retroalimenta, es decir que se asemeja al patrón de interacción I-R-E.

Ante este escenario, el propósito de este apartado del estudio es indagar la interacción desde el punto de vista de los procesos, y establecer patrones de interacción. En los antecedentes respecto a patrones de interacción (apartado 2.4) se describieron algunos modelos de interacción, desde situaciones dirigidas por el profesor para lograr un conocimiento matemático puntual, hasta situaciones más abiertas en que el significado matemático se construye de forma colectiva (Scott et al., 2006).

En base a la estructura de ciclos que se ha elaborado, el ciclo I corresponde a un patrón de interacción I-R-E. La profesora induce un proceso, los estudiantes responden según este proceso u otro y Valentina valida o refuta la acción. Si bien este ciclo se da frecuentemente y en todos los episodios (menos en el episodio 9, ver cuadro 4.6.3), no es el más frecuente. El ciclo II se diferencia del ciclo anterior en la respuesta de Valentina, su acción en vez de ser de validación se asocia a otro proceso. Este patrón si bien se da con menos frecuencia que el ciclo I, tiene la particularidad de que los procesos de reflexión se desarrollan en este ciclo y no en el ciclo anterior. A su vez también hay episodios que cumplen ciclos en torno a justificación, los respectivos de interpretación en cada competencia y caracterizar el modelo. En cambio el proceso de identificar datos no se desarrolla en este ciclo II (resultado esperado puesto que anteriormente se ha señalado que este proceso no lo desarrolla Valentina). En base a estos antecedentes se puede establecer una relación entre los ciclos y los niveles de complejidad: los procesos asociados a niveles de complejidad bajo tales como identificar datos y caracterizar el modelo generalmente corresponden a un ciclo I, en cambio los procesos asociados a un nivel de complejidad mayor como justificar y los respectivos de reflexionar se corresponden a un ciclo II. Finalmente destacamos que el ciclo II es un patrón de interacción más abierto que no se asocia a una estructura I-R-E, pues la profesora al responder con una acción que no conduce al proceso de validación da pie a que, o bien los estudiantes sean lo que validen o en la propia interacción se negocien los significados, en que una acción de validación indica la confirmación de un significado previamente validado implícitamente. Así se genera un clima en que se puedan negociar los significados matemáticos en vez de sea la profesora quien los instruya.

El ciclo III corresponde a las dos acciones I y R pero no hay respuesta directa por parte de la profesora si no que vuelve inducir un proceso. Este patrón de interacción puede interpretarse bajo dos perspectivas.

- Una situación cerrada: la profesora induce un proceso hasta que encuentra la respuesta correcta y la valida.
- Situación abierta: la profesora en vez de validar las acciones de los estudiantes, sigue induciendo hasta que ellos mismos encuentran las respuestas.

Los ciclos III que se desarrollan en los episodios que corresponden a la segunda interpretación de este ciclo. En el cuadro 4.6.4 se expone un fragmento del episodio 5 (gráfica 4.6.6) correspondiente a la clase 3 y un fragmento del episodio 1 (gráfica 4.6.7) de la clase 4. Se han elegido estas gráficas porque pese a que difieren en el tipo de acciones directas de Valentina, la gráfica 4.6.6 presenta varios ciclos I y ciclos II y menos ciclos III que la gráfica 4.6.7, ambas reflejan una situación abierta.

En términos de la competencia de modelización, en el episodio 5 Valentina promueve que expliquen la diferencia entre las dos piscinas. Los estudiantes caracterizan el modelo en cada situación, Valentina valida algunas acciones pero a su vez induce nuevamente a caracterizar el modelo hasta que los estudiantes lleguen a un acuerdo en las características de cada situación, en la primera piscina la relación entre tiempo y profundidad de aguas es constante y en la segunda piscina no. En el episodio 1 es más evidente el rol de Valentina de inducir acciones, ya que en todas sus intervenciones promueve la interpretación del circuito y relacionarlo con la gráfica. Esta interacción se representa en que los ciclos III se identifican fácilmente pues no hay acciones directas de Valentina en el desarrollo del diálogo. Los dos episodios describen patrones similares de interacción en el aula de matemáticas. En el resto de episodios los ciclos III también describen situaciones abiertas.

Episodios de clase 3 y clase 4 respectivamente

EPISODIO 5
161 Valentina: ya, entonces ¿por qué son diferentes los dos gráficos?
162 Pablo: por la relación.
163 Valentina: ¿por qué?
164 Pablo: por la relación de tiempo y profundidad.
165 Valentina: por la relación que hay entre tiempo y profundidad. La relación aquí era: [gráfica uno] aumenta el tiempo, aumenta. Aumenta el tiempo y aumenta... en la misma.
166 Estudiantes: unidad
167 Valentina: en la misma (…)
168 Estudiantes: constante, frecuencia.
169 Valentina: en la misma frecuencia. Pero que pasa aquí, [gráfica dos] aumenta el tiempo, aumenta la profundidad, ¿pero?
170 Iván en distintas cantidades, va bajando.
171 Valentina: en distintas cantidades, es decir que la altura que va subiendo, la profundidad que va subiendo el agua no.
172 Estudiantes: no es la misma
173 Valentina: no es la misma.

EPISODIO 1
25 Valentina: bajó la velocidad, disminuyó la velocidad. ¿Y después qué pasó?
26 Mario: se mantuvo la velocidad.
27 Valentina: se mantuvo la velocidad. ¿Y después qué pasó?
28 Alfonso y Marcelo: ¡aumenta!.
29 Valentina: ya, entonces yo, ¿qué tengo que hacer? ¿Qué tengo que investigar?. [Ahora señala el circuito a)] Salida, salgo de aquí. ¿Qué pasa con la velocidad?
30 Marcelo: aumenta.
31 Valentina: Ya, y ahora al entrar en la curva que tiene que pasar.
32 Marcelo: disminuye.
33 Valentina: Ya disminuye, después que hago [en el diálogo mueve el dedo por el circuito].
34 Alfonso: (…) [indica con los dedos que tiene que relacionar las dos representaciones. El circuito y el gráfico].
35 Marcelo: aaaaaaaaaaah.

El ciclo IV, asociado al inicio de un estudiante y respuesta de la profesora, presenta menos ciclos (solo en cuatro gráficas). Los procesos que describe en la competencia de modelización son *caracterizar el modelo*, *validar datos* y *reflexionar sobre la modelización*; en la competencia de argumentación se presentan *identificar datos*, *validar datos* (refutar) y *justificar*. Asimismo este patrón se asocia a una situación abierta pues son los estudiantes quienes generan la acción y desarrollan los procesos; en cambio la profesora generalmente valida estas acciones.

Los cuatro ciclos se pueden ordenar en una secuencia que va desde una situación cerrada -dirigida por el profesor- hacia una situación más abierta. En la figura 4.6.2 se ha relacionado el ciclo con los patrones de interacción identificados por Mortimer y Scott (2003). El primer ciclo se asocia directamente al patrón de interacción I-R-E, el cual promueve situaciones de aprendizaje más cerradas. El ciclo II se asocia a I-R-F (*feedback*). El tercer ciclo se asocia a una cadena de interacciones tríadicas del tipo I-R-P-I-R-P, en que P es una acción discursiva que sigue la acción del estudiante y F un feedback para que el estudiante elabore más su discurso. El cuarto ciclo se identifica como un patrón no tríadico en que es el estudiante quien inicia la acción (Scott et al., 2006). En efecto, estos autores sostienen que las cadenas que emergen de ciclos tipo II, III y IV son situaciones abiertas.

La flecha ennegrecida muestra que a partir del ciclo II se considera patrones de interacción abiertos. En particular los ciclos III y IV se consideran ambos abiertos, sin distinguir necesariamente entre ellos.

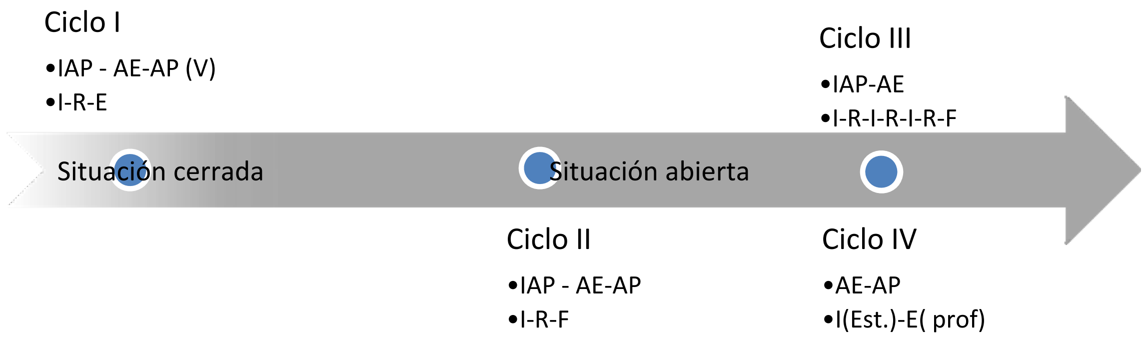


Figura 4.6.2: Ciclos de procesos y patrones de interacción

- **Sobre los procesos del profesor**

En el aula de matemáticas, los procesos emergen en la interacción entre la profesora y los estudiantes. Si bien la estrategia que se ha seguido es indicar cada acción con un proceso, éste emerge y se desarrolla no solo en una acción, si no de un conjunto de acciones que derivan en un proceso, acciones que en el aula de matemáticas resulta ser la interacción entre Valentina y los estudiantes. Aun así, se han evidenciado ciertos procesos que generalmente desarrolla un solo agente, ya sea la profesora o los estudiantes.

Los cuatro procesos de validar, dos en cada competencia, generalmente los desarrolla la profesora. De hecho estos procesos son los más frecuentes en las acciones de Valentina, *validar características del modelo* y *validar datos* son los más frecuentes, con menos frecuencia se desarrolla el proceso de *validar la justificación* y solo aparece una vez *validar el modelo*. Si bien hay cuatro gráficas de episodio con procesos de validación de estudiantes, estos procesos son escasos y no hay regularidad en alguno de ellos, por tanto los estudiantes no los desarrollan.

Del resto de procesos, los más frecuentes son interpretar el modelo e interpretar datos, y luego se encuentran algunas acciones de Valentina sobre caracterizar el modelo y justificar. Solo se encuentra una acción de identificar datos.

De estos resultados se evidencia que la profesora es quien desarrolla los procesos de validación, y por el contrario desarrolla menos los otros procesos. El ejemplo que más destaca es el proceso de identificar datos, que Valentina induce regularmente en los estudiantes y que refuta o valida después de la respuesta de ellos, pero sin desarrollarlo ella misma.

Los procesos que induce Valentina son lo que desarrollan los estudiantes; estos se han descrito en los apartados anteriores pero por los resultados evidenciados estos procesos no son los mismos que Valentina desarrolla por sí misma.

- **Patrones de interacción y nivel de complejidad**

Los resultados muestran que el desarrollo de los procesos en el aula de matemáticas se da más bien en un patrón de interacción abierto. Si bien hay varios ciclos, estos se acompañan en el mismo episodio por el resto de los ciclos (La gráfica 4.6.3 es la única que presenta solo ciclos I). Además se evidencia una tendencia en el desarrollo de las clases en la frecuencia de ciclos más abiertos. En el cuadro 4.6 3 se pueden apreciar que las primeras gráficas, que representan la clase 1 y 3 respectivamente, tienen una mayor presencia de los ciclos I que los otros ciclos, y en la medida que avanzan los episodios esta relación cambia, hasta el punto de que el último episodio de la clase 4 y el episodio de la clase 5 muestren una predominancia de los ciclos II, III y IV en comparación con el ciclo I.

Anteriormente establecimos una relación entre los ciclos y los niveles de complejidad para los casos particulares de los ciclos I y ciclos II. Esta relación se puede extender para el resto de ciclos III y ciclos IV, en los cuales también predominan los procesos más complejos, sobre todo en los últimos episodios. Por tanto, siguiendo esta línea argumentativa, y con los resultados expuestos, podemos decir que los patrones de interacción más cerrados se asocian a niveles de complejidad más bajos; en cambio los patrones de interacción más abiertos se asocian a niveles de complejidad más altos.

5. Discusión de resultados y conclusiones

En este último capítulo de la investigación, se presenta la discusión de los resultados y las conclusiones. El apartado 5.1 consiste en sistematizar los resultados, orientarlos hacia el problema de investigación y discutirlos según la literatura. El apartado 5.2 se presenta las conclusiones de la investigación, que consiste en responder a los objetivos de la investigación, poner de manifiesto las aportaciones, y describir qué prospectivas tiene este el estudio.

5.1 Discusión de resultados

Hay una multiplicidad de definiciones de la competencia matemática. En nuestro modelo la hemos caracterizado a partir de la noción propuesta por DeSeCo (Rychen y Salganik, 2006), la cual potencia aspectos a desarrollar en un estudiante transversalmente a los conocimientos que adquiere a lo largo de la escolaridad obligatoria, en cada una de las disciplinas.

En nuestro modelo de competencia matemática, se ha recogido esta visión para la enseñanza de las matemáticas, por tanto hemos entendido la(s) competencia(s) como aspectos del propio conocimiento matemático a desarrollar a largo plazo, y transversales a los bloques temáticos. Para estudiar esta propuesta nos hemos centrado en un tópico matemático, interpretación de gráficas funcionales, que *a priori* nos permitía indagar en estos aspectos transversales de la matemática a desarrollar: las competencias matemáticas.

Cada una de estas competencias se compone de tareas matemáticas, procesos matemáticos y niveles de complejidad. Las tareas matemáticas son aspectos del conocimiento matemático desarrollables a corto plazo y en un tópico matemático, mientras que los procesos se desarrollan a largo plazo, y son transversales. Respecto a los niveles de complejidad, su desarrollo depende de la relación entre tareas y procesos propios de cada competencia, dos aspectos que se encuentran en las actividades matemáticas que conforman una secuencia didáctica.

En nuestro trabajo hemos desarrollado dos competencias matemáticas que nos han parecido relevantes en este tópico matemático: la modelización y la argumentación. En la interpretación de gráficas se introduce la noción de función, en la cual se desarrolla el modelo de dependencia de variables y la gráfica como una expresión del modelo, lo cual justifica la importancia de la modelización en este escenario. Por otra parte la argumentación se destaca como uno de los aspectos más importantes en la interpretación de gráficas. La acción de interpretar implica la generación de argumentaciones por parte del estudiante, y por tanto se ha considerado una competencia relevante.

En esta investigación nuestro modelo de competencia matemática se ha experimentado realizando un estudio de caso en la aplicación de una unidad didáctica sobre interpretación de gráficas, para estudiantes de entre catorce y quince años, que constituye su primer acercamiento a la noción de función. Se ha estudiado el caso de un aula de matemáticas en la que su profesora, Valentina, pone en práctica la unidad didáctica a lo largo de ocho clases, de las que se han seleccionado cinco para la obtención de datos.

Antes de aplicar la unidad didáctica, se adaptó a nuestro modelo, esto es, se caracterizaron las actividades en términos de competencias, evidenciando las tareas matemáticas y los niveles de complejidad involucrados. De acuerdo con este análisis, se modificaron, suprimieron y agregaron actividades, de modo que en el desarrollo de la unidad didáctica el nivel de complejidad aumentara progresivamente para cada competencia.

Se analizaron dos aspectos: la caracterización de la unidad didáctica en términos de competencia, y el desarrollo de dicha unidad. El análisis consistió en caracterizar y validar los procesos matemáticos de cada una de las dos competencias, desarrollar las competencias de modelización y argumentación en el transcurso de las clases, determinando en cada una el nivel de complejidad de las actividades, y finalmente relacionar las secuencias de procesos de las dos competencias y determinar los patrones de interacción en el aula.

A lo largo del estudio han ido emergiendo una serie de resultados en relación a la noción de competencia: la viabilidad de nuestro modelo de competencia matemática, sobre la planificación de una unidad didáctica en función de las competencias, sobre la caracterización de los niveles de complejidad, respecto a cada competencia y las relaciones entres estas, la noción de proceso y tarea matemática, la función del contexto en las actividades y finalmente respecto a los patrones de interacción. Estos resultados se han agrupado en nueve ejes temáticos que se exponen a continuación.

5.1.1 Una unidad didáctica desde una aproximación por competencias

Rico y Lupiáñez (2008) han esbozado una unidad didáctica por competencias en una estructura que promueve tareas, considerando su nivel de dificultad y su grado de complejidad, y objetivos entendidos bajo una lógica de acción, centrando las expectativas de aprendizaje en el logro de competencias. Asimismo, la evaluación de competencias se realiza a través de contenidos y tareas, organizados de forma coherente. Bajo esta perspectiva, la planificación de una unidad didáctica, de forma global, considera tareas, junto a su nivel de complejidad, contenidos y competencias.

Nuestro modelo de competencia matemática también ha considerado la expectativa del aprendizaje en términos de competencias matemáticas acordes a un contenido, caracterizándolas en términos de procesos y tareas. Esto implica que en la planificación de la enseñanza de un contenido se consideran, *a priori*, unas competencias, procesos y tareas matemáticas a desarrollar. De este modo, en la planificación, además de las tareas, se han incorporado las competencias, caracterizadas por procesos matemáticos, cuyo nivel de complejidad se puede determinar, relacionando las tareas y los procesos involucrados en una actividad. Así, la incorporación de los niveles de complejidad a la planificación de una unidad didáctica, permite evidenciar el progreso de la competencia a lo largo de dicha unidad.

La noción de competencia matemática queda, de este modo, incorporada tanto a la concepción de enseñanza, como a la planificación de secuencias didácticas, lo que constituye una de las contribuciones de nuestra investigación, dado que actualmente hay escasas evidencias de diseños curriculares a este nivel de concreción en términos de competencias matemáticas, a pesar de ser una cuestión relevante en el contexto educativo.

Los resultados obtenidos permiten no solamente la creación de unidades didácticas desde un marco competencial, sino además la reformulación de unidades didácticas ya existentes basadas en otras perspectivas.

5.1.2 Un diseño metodológico para estudiar las competencias

A lo largo del estudio se han validado diversos aspectos del modelo de competencia matemática, lo que se ha evidenciado especialmente en la validación de los procesos matemáticos que conforman cada competencia, que se ha extendido hasta el análisis.

Esta estrategia se planteó inicialmente teniendo en cuenta que se trataba de un estudio sin precedentes sobre las competencias matemáticas a este nivel de concreción. Desde el inicio de esta memoria, en un marco teórico inusual, se propone un modelo de competencia matemática que va emergiendo de la necesidad de crear un modelo propio. Uno de los resultados de la revisión bibliográfica ha sido evidenciar que, si bien existe un consenso sobre la importancia de la aproximación a la enseñanza por competencias, no hemos encontrado una propuesta que se ajuste a los requerimientos de nuestro estudio. En la literatura encontramos discusiones teóricas sobre las competencias o sobre propuestas curriculares - que no se han sostenido en la investigación experimental-, pero no hemos encontrado investigaciones enfocadas hacia una innovación curricular.

Una vez elaborado el modelo de competencia matemática lo hemos desarrollado a partir de un estudio experimental, proponiendo en primer lugar una unidad didáctica bajo este enfoque, para luego observar su aplicación en un estudio de caso.

Se ha realizado este estudio bajo una metodología cualitativa inductiva. De los tres componentes del modelo - tareas, procesos y niveles de complejidad - el primero se ha caracterizado a partir de la literatura sobre el tópico matemático, los procesos se han ido desarrollando a través de una estrategia de comparación constante, puesto que no provienen de antecedentes teóricos, y finalmente los niveles de complejidad se han caracterizado a partir del estudio experimental.

Las tareas matemáticas se han caracterizado principalmente a partir de la literatura referida a la interpretación de gráficas (Leinhardt et al., 1990; Solar, 2006) y desde la descripción de tareas matemáticas que aparecen en la unidad didáctica. En el análisis de los datos el criterio ha sido describir de qué manera se desarrollan estas tareas en la aplicación de la unidad didáctica.

La caracterización de procesos se ha realizado mediante dos fases de análisis. En la primera se han identificado los procesos que conforman cada competencia, siguiendo una estrategia de comparación constante, en que se ha descrito por primera vez una sesión de clase en términos de competencias. La segunda fase ha consistido en la validación de los procesos en que se discutió cada uno de ellos. Esta validación tuvo el soporte de dos jueces que a nivel teórico discutieron la pertinencia y fiabilidad de los procesos elaborados; al terminar la validación se obtuvo una lista definitiva de procesos para cada una de las competencias. Estas dos fases han conllevado un análisis exhaustivo e igualmente extenso de los datos, reflejado en la memoria, necesario para evidenciar la pertinencia de la inducción como enfoque metodológico para la caracterización de los procesos. Desde este enfoque, en la medida en que se iba desarrollando el análisis, se ha ido revisando continuamente tanto la definición de cada uno, como su coherencia global y la pertinencia de analizar una clase a través de estos procesos.

La caracterización de los procesos matemáticos, basada en un enfoque inductivo, ha demostrado ser una metodología necesaria y adecuada para su desarrollo. Necesaria porque no existían en la literatura referentes de indagación experimental en los procesos matemáticos, y adecuada porque los procesos identificados para cada competencia, además de ser validados, tanto con criterios internos –comparación constante- como por jueces externos, nos han permitido describir el aula matemática a través de los procesos.

La caracterización de los niveles de complejidad se ha realizado tanto en la unidad didáctica como en su aplicación. En ambos casos se ha seguido el enfoque de la pirámide de de Lange (1995) aplicado al desarrollo de las pruebas PISA (OCDE, 2003, 2006), que identifica tres niveles de complejidad: reproducción, conexión y reflexión. Para la unidad didáctica hemos reformulado los tres niveles, determinando inicialmente seis niveles de complejidad que responden a la necesidad de describir el progreso de las competencias –modelización y argumentación – con mayor detalle. Para el estudio de caso, en el primer análisis se han aplicado estos seis niveles de complejidad, pero en vista de que tal detalle era poco significativo, se han reajustado los niveles en el segundo análisis, estableciendo finalmente cuatro niveles de complejidad: reproducción, conexión, generalización y reflexión.

Como consecuencia de los análisis realizados se han podido caracterizar los componentes de las competencias matemáticas; en particular hemos descrito el desarrollo de las tareas matemáticas, hemos identificado y caracterizado los procesos matemáticos involucrados, y adaptado los niveles de complejidad para el estudio de caso. El desarrollo de los tres componentes, si bien se realiza bajo estrategias metodológicas distintas, permite caracterizar de manera íntegra el desarrollo de las competencias matemáticas en el aula.

5.1.3 Nivel de complejidad en las competencias

Dado que uno de los aspectos sustanciales de las competencias matemáticas es la característica de desarrollarse a lo largo de la escolaridad, es necesario tener herramientas para estudiar el progreso de los estudiantes en el desarrollo de dichas competencias. En nuestro modelo de competencias el componente que cumple esta función son los niveles de complejidad, determinados a partir de la relación entre las tareas y procesos de una actividad matemática. Se han identificado cuatro niveles: reproducción, conexión, generalización y reflexión. Para la competencia de modelización en la figura 4.4.8 se describen las relaciones entre tareas, procesos y fases de modelización para determinar cada uno de estos niveles de complejidad. La figura 4.5.1 describe las relaciones entre tareas, procesos para determinar la complejidad en la competencia de argumentación.

En cada una de las actividades se determinaron *a priori* los niveles esperados según cada competencia, para luego contrastar con el nivel realmente logrado. Los resultados mostraron que se evidencia un progreso entre los niveles de complejidad, pasando desde un nivel de conexión hasta un nivel de generalización. En todas las clases analizadas el nivel de complejidad esperado se corresponde con el nivel logrado en la aplicación de las actividades menos en la última clase (5) en que no se logra el nivel esperado de reflexión.

El progreso en la complejidad de las actividades es continuo de un nivel a otro, lo cual sirve como criterio para evaluar que la secuencia de la unidad didáctica cumple el requisito de que las actividades aumenten en el nivel de complejidad, tal como se esperaba en la caracterización de la unidad didáctica antes de su aplicación.

Una de las contribuciones de la investigación ha sido desarrollar los niveles de complejidad para cada competencia Este resultado genera controversia con la literatura al respecto. En el proyecto PISA (OCDE, 2003, 2006) al referirse a la caracterización de las competencias se sostiene que no es su intención desarrollar preguntas que evalúen las competencias. En una pregunta pueden haber varias competencias que se entremezclan, de manera que evaluarlas por separado resulta artificial y una compartimentación innecesaria en el área. En consecuencia se propone "describir grupos de competencias a partir de los requisitos cognitivos necesarios para resolver diferentes problemas matemáticos", que resultan ser los niveles de complejidad de la pirámide de de Lange (1995). Esta reflexión ya se encuentra en un proyecto anterior, en el que surge la idea de "*Grupos de competencia*" sostenida desde la pirámide de de Lange (1999).

En el estudio experimental se ha contrastado esta visión de las competencias. En el estudio PISA se parte de un principio evaluativo, no es su propósito desarrollar competencias pero sí de alguna manera evaluarlas; por tanto, utilizar los niveles de complejidad que originalmente se idearon bajo un supuesto evaluativo resulta ser idóneo para sus propósitos. En nuestro caso estamos bajo un supuesto distinto, se pretende desarrollar las competencias y no evaluarlas, y por tanto estamos bajo un supuesto de enseñanza.

El progreso de las competencias es un aspecto que nos ha interesado indagar. La descripción de los tres niveles que propone de Lange se ha utilizado como criterio para elaborar nuestra propia definición basada en la idea de proceso y tarea. En el subapartado 2.3 se discutió la incorporación de los procesos como componente para determinar la complejidad de una actividad, los criterios que se describe en la literatura para clasificar una actividad en un nivel u otro (Boertien y de Lange, 1994; de Lange 1995, 1999; Shafer y Foster, 1997; OCDE, 2003, 2006; Dekker y Querelle, 2002; Dekker 2007) en ocasiones son ambiguos y difícilmente operativos. En nuestra propuesta nos hemos preocupado de que estos criterios sean operativos, proponiendo clasificar una actividad según la relación entre sus tareas y procesos.

Rico y Lupiáñez (2008) explican que las competencias matemáticas no son variables de la actividad sino del sujeto, es decir que su desarrollo depende del aula de matemáticas (profesor, estudiantes) y no de un currículum o un libro de texto; en cambio las tareas matemáticas sí son variables de la actividad. Si bien estamos de acuerdo en que las competencias emergen del sujeto, nuestro objetivo es que sean consideradas en la enseñanza de las matemáticas, incorporándolas explícitamente al currículo. Para tal propósito es necesario caracterizar el componente principal de las competencias, los procesos, en la interacción en el aula de matemáticas, para que pueda pasar de ser una variable del sujeto a ser una variable de la actividad. Identificar los procesos que conforman una competencia implica que se puedan enseñar. De esta manera, que las tareas y procesos sean consideradas variables de la actividad, implica que se tomen como base para determinar el progreso en la competencia. Por tanto, la transformación de los procesos de variables del sujeto a variables de la actividad justifica que la relación entre estos dos componentes determina el nivel de complejidad.

5.1.4 Competencia de modelización

La competencia de modelización a diferencia de la competencia de argumentación tiene un componente más. Además de las tareas y procesos, se suman las fases de modelización; y de la relación entre estos tres componentes se determinan los niveles de complejidad.

En la competencia de modelización se discute la caracterización de: los procesos, las fases de modelización y los niveles de complejidad. En cambio las tareas matemáticas solamente se han presentado y no se han discutido como los otros componentes, ya que vienen fijadas de antemano por los contenidos en la unidad didáctica de interpretación de gráficas, y son las mismas para cualquier competencia, siendo transversales a la competencia de modelización.

Ocho procesos conforman la competencia de modelización, que se pueden asociar con las cinco fases de modelización presentadas por Maaß (2006): simplificación, matematización, trabajar matemáticamente, interpretación, validación *Caracterizar el modelo* es un proceso que generalmente ha emergido en la fase de simplificación al identificar las propiedades del modelo real. El proceso de *interpretar el modelo* comprende acciones de interpretar el modelo o su expresión (gráfica, tabla). Las acciones de construcción se asocian al proceso de *construir expresión del modelo*. Ambos procesos han emergido generalmente en la fase de matematización (paso del modelo real al modelo matemático), y en menos ocasiones en la fase de interpretar la solución que proviene de modelo matemático a la situación original. El proceso de *identificar propiedades del modelo* se enfoca en las propiedades del modelo matemático; éste se ha dado en escasas ocasiones y en la fase de matematización. El proceso de *aplicar el modelo*, que implica utilizar de forma explícita el modelo matemático y la expresión correspondiente a la situación problemática, se ha dado en escasas ocasiones y en la fase de interpretar la solución. Los dos procesos de *validación* (características del modelo y el modelo) emergen en fases y con frecuencias distintas. Las acciones asociadas a validar las características del modelo se han dado frecuentemente entre la simplificación y la matematización, en cambio la validez del modelo ha emergido en escasas acciones coincidiendo con la fase de validación.

Del mismo modo, el proceso de *reflexionar sobre la modelización* consiste en acciones críticas sobre el modelo, sobre las fases de modelización y la aplicación de la solución a la situación problemática. Este proceso se asocia a acciones metacognitivas y actitudinales que difieren de las fases de modelización (Maaß, 2006); en el estudio de caso se ha evidenciado que este proceso se da o bien cuando la actividad incentiva la reflexión por medio de las preguntas finales, o de forma espontanea al cierre de una actividad, lo cual se puede relacionar con las fases de interpretación y validación en la fases de modelización.

Algunos trabajos han asociado las competencias a las fases de modelización (Kaiser, 2007; Sol et al., 2006), en nuestro estudio se evidencia que no hay una correspondencia completa, ya que los procesos pueden darse en cualquier fase. Por tanto, siguiendo a Maaß (2006), las competencias son un aspecto que se desarrolla transversalmente a la secuencia que siguen las fases de modelización, tal como hemos reflejado con la caracterización de los procesos en la competencia de modelización.

El desarrollo de los ochos procesos en su conjunto se comprenden como la construcción del modelo. En el tópico de interpretar gráficas construir el modelo significa: caracterizar sus elementos, trabajar con sus expresiones asociadas, interpretarlo, validarlo, aplicarlo; es decir, cada uno de los procesos contribuye a la construcción del modelo. Este significado es diferente al tradicional, que entiende la elaboración de la expresión algebraica o de la gráfica como la construcción del modelo. Nosotros, siguiendo a Gravemeijer (2007) quien señala que el modelo se entiende más como un concepto que como un modelo propiamente dicho, entendemos por modelo un conjunto de propiedades matemáticas ligadas a unas representaciones que permiten estudiar una situación. En el tópico de interpretación de gráficas, dos ejemplos de modelos son “sistemas de referencia” y “dependencia entre variables”. En este último las expresiones algebraicas, gráficas o numéricas son las expresiones del modelo. En la unidad didáctica estudiada se apuesta por introducir las funciones a través de la expresión gráfica.

En los mapas de procesos se evidencia que los procesos más frecuentes son *caracterizar el modelo* e *interpretar el modelo*. Los procesos de validación emergen generalmente de la profesora, el más frecuente es *validar las características del modelo* y en escasas ocasiones se da el proceso de *validar el modelo*; este último proceso es difícil que emerja porque requiere una formalización y un nivel de abstracción alto de los aprendizajes.

El resto de procesos emergen de forma ocasional, dado que actúan en momentos puntuales. El proceso de *identificar las propiedades del modelo* suponemos que se da con poca frecuencia porque las propiedades generalmente se discuten en referencia al modelo real o al contexto, sin un interés especial de hacerlo en el modelo matemático. Asimismo, el proceso de *aplicar el modelo* aparece con baja frecuencia porque generalmente la utilización del modelo se da en acciones asociadas a otros procesos tales como interpretar o construir la expresión del modelo, pero ha sido difícil encontrar acciones enfocadas a aplicar un modelo ya conocido.

En cuanto a las fases de modelización, de acuerdo con el análisis de los episodios, se han identificado cinco focos en el tópico de interpretación de gráficas: modelo real; variables; valores de la variable; modelo matemático y expresión del modelo matemático. Estos cinco focos, a diferencia de los procesos, se identifican en un intervalo continuo de acciones que centran la atención en uno de los cinco aspectos mencionados. Estos focos, que son parte de la interpretación de gráficas, se han asociado con las fases de modelización señaladas por Maaß (2006). La correlación entre las fases y los focos de modelización se da de la siguiente manera: en la fase de simplificación se analiza el modelo real, en la fase de matematización se pasa hacia el mundo matemático dado que entran en juego las variables. La fase de trabajo con el modelo se focaliza en el modelo matemático y en sus expresiones; la fase de interpretar el modelo matemático también se focaliza en la interpretación de su expresión y de las variables. Finalmente, en la fase de validación, las acciones se centran principalmente en validar el modelo matemático, pero también se validan los cuatro focos restantes (expresión del modelo, variables y sus valores). Si se refutan alguno de estos aspectos se vuelve a alguna fase anterior. Dada esta correspondencia entre las fases de modelización y los cinco focos, al componente que agrupa estos aspectos se le ha atribuido el nombre de fases de modelización.

Para analizar este componente se adoptó la perspectiva de modelización emergente (Gravemeijer, 1999). De acuerdo al diseño heurístico de modelización emergente, el modelo comienza a destacar como un *modelo de* las estrategias informales de los estudiantes. Con el tiempo, el modelo gradualmente se convierte en una entidad propia y empieza a servir como un *modelo para* un razonamiento matemático más formal.

Este progreso se ha caracterizado en cuatro niveles de la actividad: escenario de la tarea, referencial, general y formal; el primer nivel está ligado y depende del contexto de la tarea, esta dependencia va desapareciendo hasta que en el último nivel el modelo está ligado a las propiedades matemáticas independiente del contexto de la actividad. En nuestras fases de modelización el modelo real se asocia al nivel referencial, y el modelo matemático se asocial al nivel general o formal, de modo que en el estudio empírico se han utilizado los niveles de la actividad para caracterizar las fases de modelización. En consecuencia el nivel de complejidad en una actividad se determina por la relación entre las tareas, procesos y fases de modelización (en términos del nivel de la actividad).

Además del carácter funcional que se le ha atribuido a esta perspectiva, la modelización emergente ha sido un buen referente dado su carácter didáctico. Compartimos el hecho de que los modelos no cambian, sino que son los significados sobre el modelo los que cambian. La clasificación *modelo de/ modelo para,* se evidencia en el desarrollo de la unidad didáctica: la actividad de la clase 1 implica que emerja el sistema cartesiano como uno de los sistemas de referencia más eficientes para identificar puntos en el plano, éste surge como un *modelo de* las estrategias negociadas entre Valentina y los estudiantes. Asimismo en la clase 5 para interpretar los datos expresados en un gráfico de barras se utiliza la expresión numérica y gráfica del modelo para concluir que no hay dependencia entre las variables. En los esquemas que muestran el desarrollo de la competencia de modelización en las distintas clases (figuras 4.4.4 - 4.4.11) se observa un progreso continuo desde un predominio de un nivel de la actividad referencial hasta un predominio de un nivel general.

Los niveles de complejidad en esta competencia también muestran un continuo avance desde conexión a generalización. A medida que se analizan las clases, los criterios para determinar la complejidad mejoran siendo cada vez más fiables, de modo que en la última clase (5) hay una alta correlación entre los procesos y niveles esperados *a priori*, con los procesos y niveles desarrollados; además, cuando éstos son diferentes se encuentran explicaciones sostenidas en el modelo de competencia matemática o bien explicaciones que no contradicen nuestra perspectiva. En la propia clase 5 no se logra el nivel de reflexión esperado. Una posible explicación desde la perspectiva de nuestro estudio es que el modelo de dependencia entre variables aun es emergente en los estudiantes y no ha llegado a nivel de la actividad formal; otra explicación es que no se desarrolló el proceso de reflexionar sobre la modelización por parte de los estudiantes.

Por otra parte, otra explicación desde un marco alternativo, es que puede haber un conflicto de normas sociomatemáticas (Yackel y Cobb, 1996) en el que los estudiantes encuentran ambiguo el propósito de las preguntas, y no están acostumbrados a este tipo de actividades, es decir las normas sociomatemáticas de los estudiantes no permiten desarrollar la actividad tal como se esperaba. Si bien esta explicación con las anteriores no son contradictorias, tienen implicaciones de distinta índole. Las explicaciones desde nuestro modelo tienen un componente curricular; por ello, la resolución de la discrepancia entre el nivel esperado y el alcanzado, puede ser abordada desde la planificación, adaptando las actividades para que puedan permitir que emerja y se desarrolle un proceso de reflexión sobre la modelización y/o que el nivel de la actividad sea más formal. En cambio la explicación desde una aproximación de las normas (Yackel y Cobb, 1996) tiende a ser resuelta desde la gestión de aula, centrándose en temas como patrones de interacción y participación en matemáticas.

Los procesos de validación, por lo general, no se determinaban *a priori* puesto que partimos del planteamiento que las acciones de validación dependen más de la gestión de aula que de las actividades. En contraste, en el estudio se observó que el proceso de *validar características del modelo* se daba con cierta frecuencia y que se podrían sistematizar criterios para que fuera también una variable de la actividad. En cambio, *el proceso de validar el modelo* se presentó en tan escasas ocasiones que con los datos presentados no es posible plantear la identificación de dichos criterios.

De los resultados de la competencia de modelización, planteamos que el desarrollo de esta competencia depende en gran parte de la planificación, en el sentido de que según el tipo de actividad y secuencia didáctica es posible determinar unos procesos y niveles de complejidad. Si bien esta idea no se ha desarrollado en profundidad en el estudio, la caracterización *a priori* de los componentes de la modelización es un resultado utilizable como implicación didáctica en investigaciones que tengan dicho propósito.

5.1.5 Competencia de argumentación

La competencia de argumentación depende en mayor parte de la gestión del aula de matemáticas. Si bien se ha seguido un procedimiento semejante a la competencia de modelización, de caracterizar *a prori* procesos y niveles de complejidad, los procesos que emergen en el aula son menos previsibles. La argumentación se genera entre los sujetos y siguiendo la misma lógica, la competencia de argumentación es parte intrínseca de la gestión. Aun así, en el estudio se han logrado caracterizar procesos que forman una estructura argumentativa y con implicaciones didácticas curriculares.

Los ocho procesos que conforman esta competencia, se han inspirado en la estructura argumentativa de Toulmin (1958). Se ha constatado que los episodios cumplen la terna argumentativa de inicio, desarrollo y conclusión. El inicio se asocia con el proceso de *identificar datos*, los datos no se refieren solo a unos enunciados, también son los datos matemáticos con que se cuenta para desarrollar la argumentación (modelo real, variables y sus valores, gráfica, tabla, modelo).

En el desarrollo es donde emergen la mayoría de procesos. La *interpretación de datos* es un proceso que actúa sobre los mismos datos matemáticos enunciados, pero en vez de identificarlos, se interpretan asignándoles un significado. El *proceso de validar datos* es la valoración de los procesos anteriores, que puede ser positiva o negativa (refutación). En la estructura argumentativa, los datos también son justificados, proceso que consiste en explicar el razonamiento que se lleva a cabo para identificar o interpretar los datos. Asimismo el *proceso de justificar* indica las valoraciones positivas y negativas (refutación). Finalmente el último proceso asociado al desarrollo es la *fundamentación*, que consiste en datos socialmente aceptados que no requiere una validez y que apoyan una justificación.

En la conclusión emergen dos procesos. La *reflexión sobre la argumentación* que contempla tanto las reflexiones sobre los enunciados y datos matemáticos que son tratados, así como la reflexión sobre la secuencia de argumentación. El proceso de *conclusión* cumple la misma función que en el modelo de Toulmin de cerrar una argumentación.

En los mapas de procesos se muestra cómo emergen cada uno de estos procesos; la *interpretación de datos* es el proceso más frecuente, pero también hay mapas en que predomina el proceso *de identificar datos* e incluso en que emerge solamente el proceso de *justificar*. El proceso de *validar la justificación* emerge regularmente, mientras que el proceso de *validar datos* surge con baja frecuencia. Estos procesos de validación generalmente conciernen a la profesora pero también hay varias acciones de validación por parte de los estudiantes. La *reflexión sobre la argumentación* es un proceso que se espera que surja en escasas ocasiones, y en efecto en los mapas de procesos se da en forma casual, pero también se espera que emerja cuando se crean las condiciones para ello, como el caso de la actividad de la clase 5, que termina con una problemática que incita a que los estudiantes reflexionen sobre la interpretación y justificación.

Un resultado a destacar es la total ausencia de acciones asociadas al proceso de *fundamentar*. La profesora no incita a indagar las fundamentaciones ni tampoco emerge por parte de los estudiantes. Hay varios episodios en que se refutaban los datos o justificaciones y se daba pie para que emergiera este proceso. En los subepisodio 2.2 y 3.1 (mapas de procesos 4.5.8- 4.5.9) se discute la estrategia para traducir del modelo real (circuito) a la gráfica, se negocia la manera de interpretar las curvas y constantes en el circuito en las gráficas. En esta negociación pudo haber emergido una estrategia de interpretar la inclinación de la pendiente en la gráfica; focalizar en la pendiente es una acción asociada a los fundamentos, pero que no apareció en esta aula de matemáticas. Asimismo, en el subepisodio 2.1 de la clase 5 (mapa de proceso 4.5.13) los estudiantes no entendían las preguntas de la actividad sobre accidentes automovilísticos, lo que se constató en la cantidad de acciones conducentes a refutar los datos. Este conflicto en la estructura argumentativa daba pie para que Valentina incentivara a los estudiantes a estudiar con profundidad por qué la interpretación de la noticia sobre accidentes automovilísticos es errónea, pero no emergen estos fundamentos. En vez de esto, los estudiantes desarrollan procesos de interpretación y justificación que se limitan a identificar que la interpretación no es correcta.

Siguiendo con los resultados, el proceso de justificación apareció con una frecuencia mayor a lo esperada, poniéndose de manifiesto que surgió para cada tarea. Este resultado se utilizó como criterio para determinar los procesos *a priori* en la actividad. Asimismo también se observó que las acciones de reflexión no alcanzaron a desarrollarse como un proceso, pero se constató que en varias ocasiones estas acciones se intercalan entre acciones asociadas a otro proceso, contribuyendo al desarrollo de dicho proceso.

Otro aspecto a destacar en la competencia de argumentación es la relevancia que tiene el proceso de *interpretar datos* en la secuencia argumentativa. La interpretación es un proceso que no aparece en la estructura argumentativa de Toulmin ni en la adaptación para matemáticas de Krummheuer (1995) que han seguido el resto de autores que han estudiado la argumentación en matemáticas (Stephan y Rasmussen, 2002; Whitneack y Knipping, 2002; Yackel, 2002; Rasmussen et al. 2004; Pedemonte, 2005). Sin embargo, en nuestro estudio experimental se ha evidenciado que las acciones de interpretar son parte de la argumentación colectiva, lo que se pone de manifiesto en la variedad de acciones en los episodios de clase en que la profesora induce a interpretar, los estudiantes y profesora interpretan, la profesora valida la interpretación, los estudiantes justifican la interpretación, y finalmente la profesora valida la justificación de la interpretación. Es decir, la interpretación es uno de los aspectos centrales en la secuencia argumentativa en un tópico de interpretación de gráficas. En el mapa de proceso 4.5.13 se ilustra este hecho en la segunda secuencia argumentativa. La interpretación es la acción con la mayor frecuencia tanto en la profesora como en los estudiantes. Si no fuera parte de la estructura argumentativa, perdería riqueza la caracterización de la argumentación.

Para entender mejor la naturaleza de la interpretación, en el mismo mapa de proceso 4.5.13 se puede observar que al terminar esta segunda secuencia argumentativa en torno a la interpretación, se inicia un nuevo ciclo en torno a la justificación. En esta secuencia se refuta la afirmación con una interpretación de los datos, para luego darse una acción de justificación por parte de la profesora. Este comportamiento refleja que la interpretación se da en muchos casos previo a la justificación.

La figura 5.1 ilustra la relación que hemos establecido entre la interpretación y los otros componentes del modelo de Toulmin.

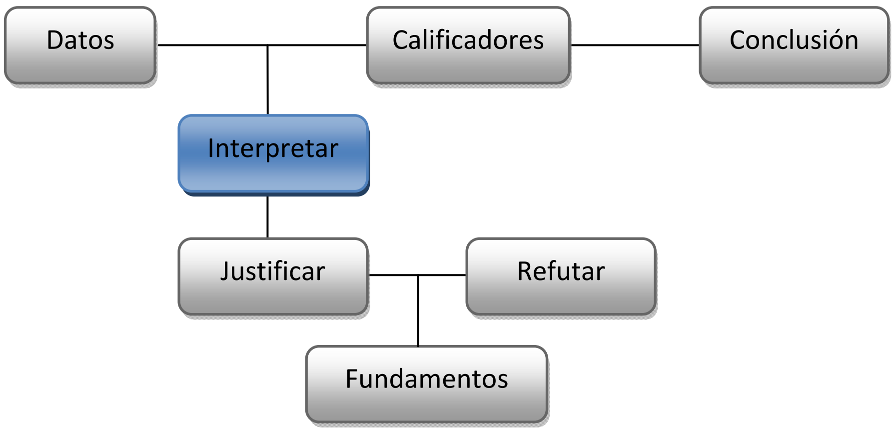


Figura 5.1: Interpretación en el modelo de Toulmin

Asimismo en la adaptación de Krummheuer (1995) la interpretación cumple la misma función que la ilustrada en la figura 5.1, sirve de sostenimiento a los datos y apoya la justificación.

La interpretación aparece en la estructura argumentativa en el tópico de interpretación de gráficas, sin embargo en otros tópicos matemáticos la interpretación pueden estar ausente y que por ejemplo, los fundamentos sí emergieran como un proceso en el aula. Como resultado, sostenemos que la secuencia argumentativa que se genere depende de los contenidos matemáticos que se pongan en juego, y no es transversal, tal como suponen en el común de los estudios sobre argumentación matemática.

5.1.6 Relación entre tarea y proceso

El término procesos matemáticos es usado con varios significados en didáctica de las matemáticas (Sfard, 1991; Dubinsky, 1991). Nuestra perspectiva concuerda con la propuesta curricular del NCTM (2003) que propone cinco estándares de proceso. Los estándares de proceso corresponden a lo que nosotros denominamos competencias matemáticas. Asimismo se puede establecer cierta asociación entre las tres o cuatro expectativas de aprendizaje que se identifican en cada estándar, y los procesos que conforman cada competencia. Por otro lado, las expectativas de contenido en los estándares corresponden a las tareas matemáticas en nuestro modelo de competencia.

La propuesta del NCTM representa el primer trabajo de innovación curricular en que se describe para cada período escolar unos estándares de proceso. Los objetivos en cada estándar son descritos en términos de ejemplos que demuestran lo que los estándares deberían tener en cuenta en cada curso y lo que el rol del profesor debería ser para su logro. Esta propuesta abre una nueva problemática: de qué manera se articulan los estándares de proceso con los de contenidos; en otras palabras, para un estándar de contenido, qué estándares de proceso predominan y con qué expectativas. En nuestro modelo de competencia matemática se ha desarrollado este interrogante como uno de los objetivos de la investigación, articulando las tareas y procesos que conforman cada competencia.

Tanto las tareas como los procesos se determinan por las acciones de los estudiantes y la profesora. En la unidad didáctica de interpretación de gráficas, las tareas más usuales se asocian a acciones de interpretar y construir gráficas, traducir entre representaciones, así como identificar variables. A su vez, las acciones también son asociadas a procesos de cada competencia. En términos curriculares, si bien tareas y procesos persiguen propósitos distintos, su origen común muestra que en ocasiones son difíciles de separar. La figura 5.2 muestra la relación que se evidencia en varios episodios de clase respecto a la acción de interpretar. Un mismo conjunto de acciones responde a la tarea de "interpretar una gráfica", que a su vez generan los procesos *interpretar el modelo* e *interpretar los datos* respecto a las competencias de modelización y argumentación. Por tanto un mismo conjunto de acciones denota tanto una tarea como procesos de competencias distintas.

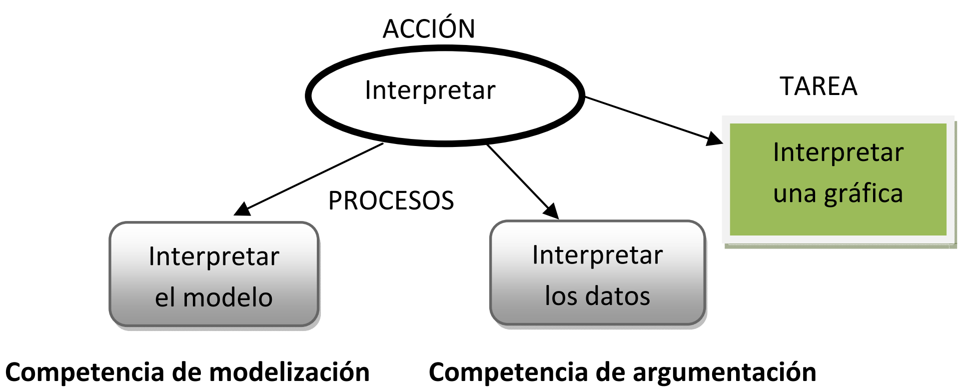


Figura 5.2: Relación entre acción, tarea y proceso

Esta relación es menos evidente en otras acciones. En un conjunto de acciones respecto a identificar variables responde a la tarea del mismo nombre, estas acciones usualmente generan los procesos de *caracterizar el modelo* y de *identificar los datos*, que se focalizan en aspectos distintos.

En el apartado de patrones de interacción, cuando se relacionan las competencias se observó en varias ocasiones que el proceso de *caracterizar el modelo* se corresponde con el proceso de *justificar*; esta relación se da en varios episodios y no en una tarea particular. Por ejemplo en la tarea de estudiar la dependencia entre variables, por un lado las acciones de identificar las variables y probar valores se asocian al proceso de *caracterizar el modelo*, y a su vez las acciones de explicar estos razonamientos se asocian al proceso de *justificar*. Esta relación se identifica en distintas tareas tales como construir un sistema de referencia o interpretar la gráfica.

Las acciones de reflexión también derivan en procesos de reflexión. Respecto a los procesos *de reflexionar sobre la modelización* y de *reflexionar sobre la argumentación*, en varias ocasiones las acciones se asocian a los dos procesos simultáneamente. Si bien se evidencia una gran similitud entre estos dos procesos, la reflexión en cada proceso es distinta; en la competencia de modelización se reflexiona sobre las fases de modelización y actitud crítica sobre la validez y aplicación del modelo; en cambio en la competencia de argumentación se reflexiona sobre la secuencia argumentativa o la importancia de argumentar.

Clasificar las acciones según tareas y procesos, pone de manifiesto que los conocimientos matemáticos, en la medida que se enseñan y aprenden, además de fijarse en el desarrollo de contenidos también se pueden fijar en los procesos, rasgos que permiten caracterizar las competencias como aspectos a desarrollar a largo plazo.

5.1.7 Función del contexto

Las funciones del contexto no han sido tratadas en el capítulo de análisis por el hecho de que éste se dirigió a los cuatro objetivos de la investigación, que consistieron en estudiar los componentes de cada competencia y los patrones de interacción. Por tal motivo se ha dejado el análisis de la función del contexto para este capítulo de discusión de resultados.

En el discurso sobre las competencias, hay un consenso en que el rol del contexto es relevante, hasta el punto de plantear que las competencias deben desarrollarse en actividades en contexto. En particular, el discurso sobre las competencias matemáticas destaca el aspecto funcional del conocimiento matemático y la posibilidad de aplicarlo de forma variada, reflexiva y perspicaz a una multiplicidad de situaciones de los más diversos tipos. A la hora de indagar en la literatura investigaciones sobre contexto y competencias matemáticas, hay una gran brecha puesto que no hemos encontrado evidencias de dichas investigaciones.

En nuestro modelo, se desarrollan las competencias por medio de las actividades matemáticas; por tanto se ha enfocado el estudio del contexto en la determinación de su función en las actividades matemáticas. Bajo esta perspectiva, los trabajos provenientes desde la Educación Matemática Realista (EMR) han elaborado una serie de criterios sobre la función del contexto (Treffers y Goffree, 1985; de Lange, 1996; Dekker y Querelle, 2002). Desde una perspectiva por competencias hemos organizado estos criterios para elaborar cinco funciones del contexto:

desarrollar conceptos matemáticos en términos de tareas; desarrollar procesos de modelización; mostrar la aplicabilidad de las matemáticas; desarrollar procesos matemáticos; y desarrollar procesos reflexivos.

De Lange (1987) sostiene que mientras más significativa sea el contexto, más complejidad se logra en la actividad. En términos de nuestro modelo de competencia matemática, mientras más funciones cumpla el contexto, mayor nivel de complejidad logra la actividad.

Nuevamente siguiendo a de Lange (1987), el nivel de abstracción en la matematización actúa como el regulador de los niveles de complejidad de la actividad. De este modo se harán valer los resultados recogidos en la competencia de modelización para tratar la función del contexto.

En el subapartado 2.3.6 se describieron las funciones del contexto en cuatro actividades, mostrando que, mientras más ligada está la actividad a un contexto real, más funciones del contexto se presentan.

La unidad didáctica sobre interpretación de gráficas ha sido elaborada, de acuerdo con el tipo de contenido, con actividades extramatemáticas, bajo el supuesto de que el contexto contribuye a dotar de significado a dichas actividades. En este escenario la función del contexto que se da en toda la unidad didáctica es *desarrollar conceptos matemáticos en términos de tareas*.

En las cuatro actividades que se han analizado en el estudio de caso, se han caracterizado los procesos, en particular los que conforman la competencia de modelización. Por tanto se han identificado las funciones de *desarrollar procesos* y *desarrollar procesos de modelización*.

En las actividades de la clase 1 (encuentra el tesoro), clase 3 (piscinas), y clase 4 (carrera de coches) el contexto cumple las tres funciones mencionadas, pero las otras funciones no las cumple de manera evidente. No muestra la aplicabilidad de las matemáticas puesto que las situaciones desde su originen usan las matemáticas, es decir ya están previamente matematizadas; tampoco desarrolla actitudes críticas en los estudiantes. En cambio en la actividad de la clase 5 (accidentes automovilísticos), además de darse las funciones del contexto ya mencionadas, también se aprecia la necesidad de matematizar para resolver las preguntas, poniendo de manifiesto la función de *mostrar la aplicabilidad de las matemáticas*. Asimismo la actividad tiene como propósito interpretar los datos con una actitud crítica por lo que se aprecia la función de *desarrollar procesos reflexivos*.

La relación que sostuvimos en el apartado 2.3.6, mientras más ligada está la actividad a un contexto real más funciones del contexto se presentan, también se ha dado en las actividades analizadas de la unidad didáctica. Si comparamos este hecho con los resultados de las fases de modelización encontramos un resultado revelador: hay una correlación entre las funciones del contexto y el nivel de abstracción del modelo en la actividad. En efecto, recordemos que la secuencia didáctica en la unidad cambia desde un nivel referencial hacia uno general, en que el modelo proviene de las estrategias informales de los estudiantes y se induce un modelo formal y abstracto extensible a varias actividades (*modelo de/ modelo para).* Asimismo en la medida que se sigue la secuencia didáctica se identifican más funciones del contexto, hasta llegar a la última clase (5) en que aparecen todas las funciones del contexto. Por tanto, mientras más funciones cumpla el contexto más nivel de abstracción del modelo se espera en la actividad.

Asimismo, se encuentra la misma relación entre las funciones del contexto y los niveles de complejidad. En las cuatro actividades se progresa desde un nivel de conexión a un nivel de generalización.

Estas relaciones indican que la unidad didáctica tiene una secuencia coherente respecto a la complejidad, la abstracción en los modelos y las funciones.

El contexto es una variable de la actividad, lo cual implica que las funciones del contexto en las actividades de una unidad didáctica son las mismas para cualquier aula de matemáticas. En cambio la complejidad y la abstracción del modelo son variables del sujeto. En la complejidad, si bien se esperan unos procesos *a priori*, es en el aula en donde se desarrollan los procesos y muchas veces éstos no coinciden con los procesos esperados. Asimismo, si se alterara el orden en las actividades, por ejemplo si la actividad de accidentes automovilísticos pasara de la clase 5 a la clase 1, en vez de ser un *modelo para*, sería un *modelo de,* y el nivel de la abstracción en la actividad sería inferior.

Finalmente sostenemos que el tópico matemático de interpretación de gráficas ha sido un buen medio para mostrar que el contexto crea significado, lo cual se refleja en las cinco funciones del contexto en la unidad didáctica.

5.1.8 Patrones de interacción

El cuarto objetivo de investigación consiste en estudiar los patrones de interacción en función de los procesos matemáticos. Se elaboraron gráficas que visualizan a la vez los dos ciclos de procesos de cada competencia, permitiendo estudiar tanto la secuencia de ciclos en cada competencia, como las posibles relaciones entre las dos competencias.

Los ciclos son los patrones de interacción identificados en los episodios de aula según los procesos. Se identificaron cuatro ciclos de procesos que se secuencian desde una situación cerrada hacia una situación abierta. Siguiendo la organización de patrones que sugieren Mortimer y Scott (2002), el ciclo I se asocia al patrón más tradicional del aula I-R-E (iniciación, respuesta, evaluación). El ciclo II se asocia a un patrón similar en que la devolución en vez de ser una valoración evaluativa actúa como una retroalimentación. El ciclo III se asocia a una cadena I-R-I-R-I-R que termina en una valoración negociada entre profesora y estudiantes. Finalmente el ciclo IV es una cadena que inicia el estudiante y responde la profesora y que también termina con una valoración negociada. Estos dos últimos ciclos son los más abiertos, y responden a un patrón de focalización (Wood, 1998) y a un patrón de discusión (Voigt, 1995); el ciclo II representa una situación intermedia (más abierta que cerrada). En cambio, el ciclo I representa una situación cerrada y se puede asociar con el patrón de embudo (Wood, 1998) y con el patrón extractivo (Voigt, 1995).

Los resultados han mostrado que en la medida que avanzan las clases, los patrones de interacción cambian hacia situaciones más abiertas; asimismo, la secuencia de procesos que se desarrollan en el aula de matemáticas se asocia más a patrones de interacción abiertos que a patrones de interacción cerrados.

Por otro lado, se ha puesto de manifiesto que los patrones de interacción más cerrados se asocian a un nivel de complejidad bajo (ej. reproducción), en cambio los patrones de interacción más abiertos se asocian a niveles de complejidad más altos (ej. reflexión). Este resultado debe interpretarse adecuadamente, no significa que la actividad por si misma incite patrones de interacción, ya que estos dependen principalmente de la interacción en el aula entre estudiantes y el profesor, pero sí se evidencia que en el caso de la clase de Valentina los patrones cambian con un tipo de actividad u otra. En la revisión de la literatura no se ha encontrado evidencias que relacionan el tipo de actividades con los patrones de interacción. Lo más cercano ha sido el trabajo de Mortimer y Scott (2002) que en un aula de ciencias, proponen que el recorrido desde el modelo del estudiante al modelo científico, se progrese hacia un abordaje comunicativo dialógico.

Finalmente respecto a las dos competencias, éstas muestran una alta correlación entre los ciclos; aun así, hay varios casos en que los ciclos no corresponden. Esto pasaba generalmente entre los ciclos en torno a la caracterización del modelo y en torno a la justificación, en que la acción de la profesora según la competencia de modelización podía significar una validación, y la misma acción según la competencia de argumentación se considera como una valoración no evaluativa (justificación). Esta diferencia evidencia que los patrones de interacción son distintos según la competencia y por tanto se diferenciarían de los que idealmente se hubieran encontrado siguiendo los criterios que proponen Mortimer y Scott (2002) u otros autores que analizan el discurso en el aula sin diferenciar aquellos aspectos relacionados con el contenido matemático del resto. En nuestra investigación no hemos profundizado en este asunto y de hecho los resultados sobre los patrones de interacción se han dado sin diferenciar entre competencias.

5.1.9 Modelo de competencia matemática

El modelo de competencia matemática que se propuso teóricamente se ha puesto a prueba en un estudio experimental en que se ha constatado su viabilidad para incorporar un enfoque por competencias en el aula de matemáticas. Los resultados presentados en los ocho puntos anteriores, interpretados de forma conjunta, tienen el interés en común de desarrollar competencias. A continuación presentamos estos resultados:

- Se ha elaborado un instrumento que permite caracterizar los procesos matemáticos en la interacción del aula, lo que implica que estos pasen de ser una variable de sujeto a una variable de la actividad. Este cambio tiene como repercusión que los procesos que conforman una competencia puedan ser identificados en la planificación de una unidad didáctica.

- Se han diferenciado las tareas matemáticas -aspectos de la matemática ligados a un tópico matemático y desarrollables a corto plazo-, de los procesos matemáticos -transversales y desarrollables a lo largo plazo-. Nuestra propuesta substituye la formulación de objetivos por procesos y tareas en los materiales curriculares, ya que en la formulación de un objetivo de aprendizaje se puede identificar, por lo menos, una tarea matemática con un proceso asociado. La comparación entre objetivos y el dúo tarea-proceso no ha sido parte del estudio y se menciona aquí solo como un elemento más de discusión para mostrar las contribuciones de nuestro modelo de competencia.

- Se ha estudiado el progreso de una competencia en función de las tareas y procesos, lo que constituye la raíz de nuestro modelo. Si bien se puede determinar la complejidad de una actividad a través de la pirámide de de Lange (1995), aplicado de forma extensiva a PISA

(OCDE, 2003, 2006), hemos señalado con ejemplos que sus criterios para determinar la complejidad de una actividad son ambiguos y carecen de un estructura que los fundamente. En cambio en nuestro modelo nos hemos preocupado de fundamentar los criterios para determinar la complejidad, incluso incorporando criterios según la competencia. En la competencia de modelización se reconoce la función que cumplen las fases de modelización en el progreso, agregándose como un componente de la competencia distinto de las tareas y procesos. Reconocemos que la aplicación de estos criterios para determinar el nivel de complejidad en una actividad provienen en gran parte de la subjetividad del investigador, y probablemente variarían algunos criterios en una réplica del estudio. Sin embargo, lo que destacamos es que estos criterios están fundamentados en una estructura en función de tareas y procesos, y se espera seguir perfeccionando los criterios de complejidad a partir de esta estructura.

- Asimismo en el estudio de los patrones de interacción y de las funciones del contexto en las actividades se han determinado resultados que constituyen una contribución a la investigación en didáctica de las matemáticas, y desde el modelo de competencia matemática son interpretados para que sirvan de criterio, no solo en la gestión del aula de matemáticas, sino también en la planificación de una unidad didáctica. En particular, se destacan dos resultados: la relación establecida entre niveles de complejidad bajos (reproducción) con patrones de interacción cerrados y niveles de complejidad altos (generalización, reflexión) con patrones de interacción abiertos; y asimismo, a medida que el contexto cumple más funciones, el nivel de complejidad de la actividad aumenta.

Los cuatro puntos expuestos convergen en la idea de proceso. Analizar el desarrollo de una competencia implica que se pueden caracterizar los procesos en el aula de matemáticas; este análisis permite estudiar tanto los procesos esperados en las actividades de una unidad didáctica como los que efectivamente se desarrollan en el aula cuando se aplica la unidad didáctica. En particular, se puede evaluar el desarrollo de los procesos esperados, y la ausencia de los mismos. Desde un punto de vista de la planificación, estos aspectos pueden ser interpretados para proponer actividades enfocadas a destacar los procesos que no se han desarrollado.

De esta manera se ha constatado que el modelo de competencia ha permitido estudiar: dos competencias (modelización y argumentación), el desarrollo de un contenido por medio de las tareas matemáticas, los procesos matemáticos asociados a una competencia, el progreso de una competencia, la función del contexto en las actividades, y los patrones de interacción en el aula en función de cada competencia. Hemos mostrado que los resultados en torno a estos aspectos tienen implicaciones didácticas tanto en la planificación como en la gestión de la actividad matemática. En consecuencia, se evidencia la riqueza del modelo de competencia matemática desarrollado en la investigación.

5.2 Conclusiones

Los resultados de la investigación que han sido discutidos en el apartado anterior sirven de apoyo para redactar las conclusiones de la investigación. Su presentación se organiza en tres apartados. En el apartado 5.2.1 se presentan las conclusiones asociadas a los cuatro objetivos. En el apartado 5.2.2 se presentan otras aportaciones, distinguiendo entre teóricas y metodológicas. Finalmente en el apartado 5.2.3 se presentan las prospectivas de la investigación.

5.2.1 Conclusiones de la investigación

El objetivo que ha guiado la investigación es caracterizar un modelo de enseñanza por competencias matemáticas en el tópico de interpretación de gráficas funcionales, el cual se ha desarrollado en cuatro objetivos específicos. A continuación se presenta de qué manera se han alcanzado dichos objetivos.

Objetivo 1: definir un modelo de competencia matemática

De la revisión bibliográfica no ha sido posible encontrar un modelo de competencia matemática que respondiera a las necesidades de la investigación, por lo que se ha propuesto un modelo de competencia matemática que combina tres características: el contenido matemático en términos de tareas; los procesos organizadores del currículo en términos de competencias específicas; y el progreso de la competencia en términos de niveles de complejidad. Este modelo se ha puesto a prueba y perfeccionado en el estudio de caso de un aula de matemáticas en que se aplica una unidad didáctica de interpretación de gráficas funcionales. Se ha puesto de manifiesto que el modelo propuesto ha sido adecuado para analizar tanto una unidad didáctica como su aplicación en el aula, en términos de las competencias matemáticas. Esta propuesta representa una contribución, tanto desde un punto de vista de la investigación como de la innovación, porque constituye un modelo de competencia matemática que se ha elaborado desde la investigación con una función curricular; más aun, destacamos que no tenemos antecedentes de un modelo curricular en función de las competencias matemáticas a un nivel de concreción que permita planificar una secuencia didáctica y evaluar su desarrollo en el aula.

Objetivo 2: caracterizar las competencias de modelización y argumentación que se desarrollan en el tópico de interpretación de gráficas y tablas.

Para presentar el modelo de competencia matemática, se han desarrollado las competencias de modelización y argumentación, especialmente relevantes para este tópico.

La modelización es un tópico de notable actualidad en la investigación en Didáctica de las Matemática. En el estudio se ha caracterizado la competencia de modelización en términos de: tareas matemáticas, ocho procesos que conforman la competencia, cuatro niveles de complejidad y las fases de modelización, este último componente que inicialmente no estaba previsto en la caracterización de la propuesta, pero que en la puesta a prueba del modelo se ha identificado como una variable que incide en el progreso de la competencia. Se ha constatado que la relación entre tareas, procesos y fases de modelización determina el nivel de complejidad de la actividad. Los procesos que conforman la competencia se han caracterizado a partir del estudio de caso; destacamos que los ocho procesos en su conjunto se comprenden como la construcción del modelo. Se define modelo como un conjunto de propiedades matemáticas ligadas a unas representaciones que permiten estudiar una situación; destacamos el hecho que los modelos no cambian, sino que son los significados sobre el modelo los que cambian.

La competencia de modelización permite estudiar de qué manera se desarrolla la modelización en un aula, considerando el nivel de abstracción del modelo, el nivel de complejidad, así como el desarrollo de las tareas matemáticas. Estas características hacen que la competencia de modelización tenga un enfoque didáctico pues se centra en estudiar la enseñanza de los modelos y las fases de modelización.

La argumentación matemática también es un ámbito que actualmente es relevante en la investigación: los principales estudios se sustentan en la adaptación propuesta por Krummheuer (1995) del modelo de Toulmin (1958) para analizar la argumentación en el aula de matemáticas. En nuestra propuesta, los procesos que conforman la competencia de argumentación también se han sustentado en el modelo de Toulmin, pero éstos son finalmente caracterizados en el estudio de caso, obteniendo como resultado ocho procesos de argumentación para la interpretación de gráficas funcionales. La estructura, si bien es similar a la de Toulmin, se diferencia en la incorporación del proceso de interpretar como parte sustancial de la secuencia argumentativa, debido a que la interpretación no aparece en el modelo Toulmin ni en la adaptación de Krummheuer, ni tampoco destaca en la literatura al respecto. Este resultado sirve de base para sostener que la secuencia argumentativa está en función de un tópico matemático, y no es transversal, tal como resulta implícito en la literatura sobre argumentación matemática en el aula.

La competencia de argumentación tiene una función didáctica puesto que la caracterización de sus componentes es una estructura útil tanto para la planificación de una secuencia didáctica, como para el desarrollo de la argumentación en el aula. Esta competencia consiste en estudiar el desarrollo de las tareas matemáticas, los diferentes procesos de argumentación que emergen, y el nivel de complejidad de una actividad según la argumentación.

Objetivo 3: caracterizar la relación que existe entre las tareas, procesos y niveles de complejidad en el tópico de interpretación de gráficas y tablas.

El tercer objetivo consiste en concretar la pregunta central de la investigación en el tópico matemático: ¿de qué manera se relacionan las tareas, procesos y la complejidad en el desarrollo de una competencia matemática? Los resultados han mostrado que hay una estructura base: los niveles de complejidad identifican el nivel cognitivo de una tarea matemática según el proceso. Esta relación puede tener más variables según la competencia, como en el caso de la competencia de modelización, en la que las fases de modelización también son una variable de complejidad.

Una actividad puede tener diferentes niveles de complejidad según la competencia. Como las tareas matemáticas son las mismas para cualquier competencia, un componente diferenciador son los procesos matemáticos que se han desarrollado; y en el caso de la competencia de modelización, las fases de modelización pueden ser otro factor que determina la complejidad.

La relación establecida entre los componentes es una contribución a la discusión sobre los niveles de complejidad de la actividad. De Lange (1999) y el proyecto PISA (OCDE, 2003, 2006) sostienen que no es posible identificar el progreso en función de una competencia; en este estudio se desplazado esta afirmación, mostrando que la complejidad de la actividad puede ser determinada en función de una competencia. Esta contribución ha sido posible principalmente por dos causas:

- Los criterios que se describen en la literatura para clasificar una actividad en un nivel u otro en ocasiones son ambiguos y difícilmente operativos. En nuestra propuesta nos hemos preocupado de que estos criterios sean operativos, proponiendo clasificar una actividad en función de la relación entre sus tareas y sus procesos.
- Los componentes que determinan la complejidad se han tratado como una variable de la actividad. En el caso de los procesos, han pasado de ser variables de sujeto a variables de la actividad.

Objetivo 4: describir la interacción en el aula de matemáticas en relación al desarrollo de competencias.

En este objetivo se plantearon dos preguntas: ¿cuáles son los patrones de interacción que caracterizan el desarrollo de los procesos? ¿Cuáles de estos procesos corresponden en mayor medida a las acciones del profesor?

Respecto a la primera pregunta, se han identificado cuatro ciclos de procesos. El ciclo I se asocia al patrón más tradicional del aula I-R-E (iniciación, respuesta, evaluación). El ciclo II se asocia a un patrón similar en que la devolución, en vez de ser una valoración evaluativa, actúa como una retroalimentación. El ciclo III se asocia a una cadena I-R-I-R-I-R que termina en una valoración negociada entre profesora y estudiantes. Finalmente el ciclo IV es una cadena que inicia el estudiante, responde la profesora y que termina con una valoración negociada. El ciclo I representa un patrón de interacción cerrado, el ciclo II representa una situación intermedia (más abierta que cerrada), mientras que los dos últimos ciclos representan situaciones abiertas en que se negocian los significados entre la profesora y los estudiantes.

Los resultados del estudio de caso han mostrado que en la medida que avanza la aplicación de la unidad didáctica, los patrones de interacción cambian hacia situaciones más abiertas; asimismo, la secuencia de procesos que se desarrollan en el aula de matemáticas se asocia más a patrones de interacción abiertos que a patrones de interacción cerrados.

Respecto a la segunda pregunta, a partir de los resultados se evidencia que la profesora es quien desarrolla los procesos de validación, sobre todo respecto a las características del modelo y de los datos, y con menos frecuencia los procesos de validación del modelo y de justificación. Por el contrario, hay procesos, tales como caracterizar el modelo e identificar datos que induce la profesora pero sin desarrollarlos.

Los estudiantes desarrollan gran parte de los procesos que conforman las competencias, pero no desarrollan, como mostraba el análisis *a priori*, los procesos sobre reflexión. Asimismo, en la competencia de argumentación hay una ausencia total del proceso de fundamentación, y en la competencia de modelización es poco frecuente el proceso de identificar las propiedades del modelo.

Por otro lado, se ha puesto de manifiesto que los patrones de interacción más cerrados se asocian a un nivel de complejidad bajo (ej. reproducción), en cambio los patrones de interacción más abiertos se asocian a un nivel de complejidad más alto (ej. reflexión).

Finalmente, los patrones de interacción son distintos según la competencia; este resultado complementa la literatura sobre el tema, debido a que los criterios que proponen autores como Mortimer y Scott (2002) analizan el discurso en el aula sin diferenciar aquellos aspectos relacionados con el contenido matemático del resto. En cambio, en nuestro estudio hemos diferenciado los procesos del contenido.

5.2.2 Otras aportaciones

En el transcurso de la investigación se han logrado otros resultados no directamente relacionados con los objetivos de la investigación, respecto a las funciones del contexto en un enfoque por competencias, y algunas aportaciones metodológicas y teóricas.

5.2.2.1 Sobre el contexto

Se ha reservado el uso del término *contexto* para hacer referencia al referente de las actividades de una secuencia didáctica. En cambio se usa el término *escenario* para hacer referencia al lugar donde se desarrolla el proceso de enseñanza aprendizaje: el entorno del aula, un grupo de estudiantes u otros entornos que se mencione.

Para desarrollar competencias matemáticas, se han identificado cinco funciones del contexto: desarrollar conceptos matemáticos en términos de tareas; desarrollar procesos de modelización; mostrar la aplicabilidad de las matemáticas; desarrollar procesos matemáticos; y desarrollar procesos reflexivos.

Los resultados han mostrado que, en términos de nuestro modelo, mientras más funciones cumpla el contexto, mayor nivel de complejidad y abstracción logra la actividad.

Finalmente se ha mostrado que la unidad didáctica de interpretación de gráficas ha sido un buen medio para mostrar que el contexto crea significado, lo cual se refleja en que a medida que se aplicaba la unidad didáctica se cumplían más funciones del contexto, hasta llegar a la última clase en que se cumplen las cinco funciones del contexto.

5.2.2.2 Aportaciones metodológicas:

A nivel metodológico, nuestro estudio ofrece diversas aportaciones relacionadas fundamentalmente con los instrumentos elaborados. Se han generado una serie de instrumentos que permiten estudiar las competencias matemáticas.

- La *matriz de competencias* permite caracterizar las actividades de una unidad didáctica en términos de tareas, competencias y nivel de complejidad. En concreto, en el desarrollo de las competencias de modelización y argumentación este instrumento se ha perfeccionado incorporando los procesos esperados según la competencia. Esta adaptación del instrumento sirve para contrastar los procesos y niveles de complejidad esperados, con los que se lograron en el desarrollo de la actividad.

- La estrategia para caracterizar los procesos en el aula de matemática se refleja en los denominados *mapas de procesos,* cuya función es identificar los procesos que se desarrollan en un episodio de la clase según una competencia. Los mapas de procesos sirven para describir la clase en términos de procesos de una competencia.

- Las *gráficas de procesos* visualizan simultáneamente las secuencias que forman los procesos de ambas competencias, permitiendo estudiar tanto la secuencia de ciclos en cada competencia, como las posibles relaciones entre las dos competencias. Es un instrumento que se genera a partir de los mapas de procesos, que diferencia entre los procesos que induce la profesora, los procesos que desarrolla el estudiante, y los procesos que desarrolla la profesora.

En términos generales, la estrategia metodológica basada en un enfoque inductivo ha demostrado ser una metodología necesaria y adecuada para la caracterización de los procesos. Ésta representa una contribución relevante dado que no hemos encontrado en la literatura, referentes de indagación experimental sobre el desarrollo de procesos matemáticos en el aula. Destacamos la necesidad de validar la caracterización de procesos tanto con criterios internos -comparación constante- como con criterios externos; en nuestro caso han participado dos jueces externos en función de expertos, y sus análisis han sido muy útiles porque han servido para adaptar el listado de procesos a la versión definitiva.

El modelo de competencia matemática, visto desde una perspectiva metodológica, es un instrumento que permite determinar el nivel de complejidad de una actividad según la competencia, siendo un importante aporte porque los criterios de complejidad existentes determinan la complejidad de la actividad sin considerar la competencia matemática como una variable.

5.2.2.3 Aportaciones teóricas:

A continuación destacamos la contribución teórica que significa esta investigación. Del propio aporte que significa el modelo de competencia matemática, destacamos tres aspectos:

- Establecer la conexión entre el enfoque por competencias y la enseñanza de las matemáticas. El enfoque por competencias, entre otras, aporta tres contribuciones: destacar el aspecto funcional de los aprendizajes, desarrollar un espíritu crítico y reflexivo sobre lo que se aprende; y desarrollar las competencias a largo plazo y de forma transversal a las disciplinas. Para la enseñanza de las matemáticas se han incorporado estas tres características a nuestro modelo: la funcionalidad de las matemáticas, el desarrollo de procesos de reflexión en cada competencia, y el desarrollo de competencias matemáticas a largo plazo y de forma transversal a los contenidos matemáticos; esta última característica constituye la conexión más importante entre el enfoque por competencias y la enseñanza de las matemáticas.

- Profundizar en la definición de competencia matemática. Esta se entiende como un proceso -calcular, representar, resolver problemas, modelizar, argumentar etc- que permite organizar el currículo de matemáticas de acuerdo con dicho proceso. Asimismo, las competencias se estudian en un contenido en particular, organizado en términos de tareas matemáticas. A través de los procesos y las tareas matemáticas se puede articular el currículo de matemáticas, identificando su progreso en la competencia.

- Relacionar las tareas matemáticas, los procesos, y el progreso de una competencia en el desarrollo de la enseñanza: los *niveles de complejidad* identifican el nivel cognitivo de una *tarea matemática* según el *proceso.* Este resultado implica poder estudiar una secuencia didáctica según la competencia, lo cual desplaza la afirmación de varios autores (de Lange , 1999; OCDE, 2006) que sostienen que las competencias se confunden en una actividad, imposibilitando diferenciar su desarrollo de forma particular.

5.2.3 Prospectivas de la investigación

Por lo general este apartado tiene relación con las implicaciones didácticas que tiene la investigación, así como la propuesta de algunos caminos que puede continuar la investigación.

En ocasiones estas prospectivas tienen un valor poco significativo en el estudio y no forman parte de las contribuciones principales de la tesis. En nuestro caso, este apartado no comparte los supuestos mencionados. Dado que una de las principales características del estudio es plantear los resultados en términos de innovación, no hay un subapartado de implicaciones didácticas ya que éstas han sido presentadas a lo largo de la investigación. Por otra parte, esta investigación al ser una de las precursoras en cuanto a introducir un estudio experimental en el aula sobre competencias matemáticas, presenta un panorama que permite optar por varias direcciones a seguir; por ello, las prospectivas presentan una importancia significativa en este trabajo.

Las prospectivas que se presentan abarcan varios enfoques que puede tomar la investigación. Las dos primeras están centradas en la interpretación de gráficas funcionales; la tercera y cuarta extienden el modelo de competencia matemática hacia otros ámbitos, como el aprendizaje; las siguientes son más generales y versan sobre las características de una investigación en competencias matemáticas y hacia donde es posible dirigirlas.

- Respecto al tópico matemático tratado a lo largo de la investigación, se han ido conformando una serie de aspectos en torno a la interpretación de gráficas, tales como: qué estrategias de interpretación son las que se utilizan de forma espontanea los estudiantes, el paso de las estrategias cualitativas a cuantitativas, la formalización de la interpretación, y la caracterización de una secuencia de interpretación. Estos aspectos no se han tratado en profundidad porque escapaban a los propósitos de nuestra investigación, pero retomar la enseñanza y aprendizaje de la interpretación de gráficas funcionales en base a estos aspectos, sería una contribución a la didáctica del análisis en el panorama vigente.

- Ampliación del estudio a la caracterización de las competencias de modelización y argumentación en un entorno virtual; actualmente se dispone de applets centrados en la interpretación de gráficas secuenciados según la complejidad de la actividad, condición suficiente para poder aplicar el modelo de competencia. En particular, nos interesa indagar en los procesos que emergen en este escenario. Asimismo, el entorno virtual es propicio para el estudio de la construcción de gráficas, e indagar en los procesos que emergen a partir de esta acción.

- Si bien el estudio de caso se ha centrado en la interacción entre profesora y estudiantes, la metodología también sirve para centrarse solo en los estudiantes, quedando la posibilidad de indagar en los procesos matemáticos que se desarrollan en los propios estudiantes, para identificar qué procesos aparecen en este escenario.

- Extender la recogida de datos al estudio de los estudiantes, permite llevar a cabo una investigación desde el punto de vista del aprendizaje. En este sentido, el siguiente paso es estudiar la adquisición de las competencias en que el profesor sea consciente del desarrollo de dichas competencias y del modelo que lo constituya -procesos, tareas, niveles de complejidad-. En este entorno se podrían estudiar tanto las interacciones entre estudiantes como sus producciones; y como objetivo, valorar de qué manera se aprende un contenido en base a las competencias, lo que se puede concretar en las siguientes preguntas: ¿en una planificación por competencias matemáticas, de qué manera se construyen significados en los estudiantes? ¿Qué características presenta una planificación en función de procesos y contenidos?

- Con esta investigación estamos abriendo lo que se puede llamar "la línea de investigación en competencias matemáticas". Para identificar en qué perspectiva se asocia esta línea de investigación, recordemos las principales perspectivas vigentes en educación. La *cognitiva*, enfoque que predominó en el pasado; la *sociocultural*, que actualmente se ha consolidado como un enfoque en la investigación educativa. La línea de competencias matemáticas comparte rasgos de las dos perspectivas. Por una parte se preocupa de focos de atención que han sido parte del enfoque cognitivo, tal como la enseñanza de un contenido; pero por otra parte destacan los procesos transversales a los contenidos, principalmente aquellos que se desarrollan en la interacción entre profesor y estudiantes por el intercambio y negociación de significados. Este principio es una característica de una perspectiva sociocultural de la enseñanza. Asimismo, las estrategias metodológicas que se han utilizado para caracterizar los procesos en el aula de matemáticas se usan generalmente en investigaciones socioculturales. Por tanto queda abierto el problema de situar la investigación sobre las competencias matemáticas, y se plantea la posibilidad que por el tipo de preguntas que se plantea desde esta línea de investigación, no se sitúe ni en un enfoque cognitivo ni sociocultural, si no que se cree una perspectiva acorde con sus intereses.

- No hay todavía un acuerdo suficiente en la definición de competencia matemática, ni tampoco en la contribución del enfoque por competencias al currículo de matemáticas. Respecto a lo primero, esperamos que la extensa presentación de los antecedentes sobre competencia matemática contribuya como un antecedente para asociar las competencias matemáticas a procesos organizadores del currículo. A su vez, esperamos que el estudio de las competencias de modelización y argumentación sirva de precedente para el estudio de otras competencias tales como representar, calcular, resolver problemas, tanto en distintos contenidos como niveles educativos.

- Desde el año 2007 se ha implantado el currículo por competencias en España. No está siendo fácil implantarlos en el aula, el argumento más presente es la falta de concreción del currículo debido tanto a la ausencia de libros de texto basados en competencias, como de ejemplificación curricular. Creemos que el problema radica más en la falta de compresión del cambio que genera un nuevo currículo, de un enfoque del aprendizaje principalmente cognitivo a un enfoque del aprendizaje más abierto, que podríamos llamar sociológico. El hecho de considerar competencias básicas transversales a las asignaturas, que proviene de un enfoque multidisciplinar, se ha llevado a nuestra propuesta de competencias matemáticas. Esperamos que esta conexión entre competencia y matemática sea reconocida por la comunidad.

- El modelo de competencia matemática propuesto sirve para estudiar tanto problemas en el aula de matemáticas como problemas curriculares a gran escala. Nuestro planteamiento es que esta propuesta sirva de antecedente a más investigaciones sobre competencias matemáticas. Esperamos que en un futuro cercano, cuando existan una variedad de investigaciones en torno a la línea de competencia matemática, se desarrolle un currículo por competencia fundamentado en la investigación.

Referencias

Aberdein, A. (2005). The uses of argument in mathematics. *Argumentation, 19*, 287–301.

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos como a Matemática. A experiência do projecto MAT_{789}.* Tesis doctoral. Lisboa: APM.

Abrantes, P. (2001). Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles. *Educational Studies in Mathematics,* 47, 125-143.

Alcolea Banegas, J. (1998). L'Argumentació en matemàtiques. En E. C. i Moya (Ed.), *XIIè Congrés Valencià de Filosofia* (pp. 135–147). Valencia, España: Diputacion de Valencia.

APM (2001). Competências matemáticas essenciais na educação básica. En: *Competências essenciais no Ensino Básico - visões multidisciplinares*. Cadernos do CRIAP. Porto: ASA.

Armendáriz, M. V.; Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1993). Didáctica de las Matemáticas y Psicología. *Infancia y Aprendizaje, 62-63,* 77-99.

Arons, A. B.(1979). Some Thoughts on Reasoning Capacities Implicitly Expected of College Student. En J. Lochhead y J. Clement (eds.), *Cognitive Process Instruction: Research on Teaching and Learning Skills,* J (pp. 209-215). Philadelphia: Franklin Institute Press.

Azcárate, C. (1995). Sistemas de representación. *Uno,* 4, 53-61.

Azcárate, C., Deulofeu, J. (1990). *Funciones y Gráficas*. Madrid: Síntesis.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia: "la derivada un concepto a caballo entre la matemática y la física"* Tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona (UAB).

Balacheff, N. (1999). ¿Es la Argumentación un Obstáculo? Invitación a un debate, *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proff*, 05/06.

Barbé, Q., Bosch, M., Espinoza, L., Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice. The case of limits of functions. *Educational Studies in Mathematic,.* 59, 235-268.

Bauersfeld, H. (1980). Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 23-41.

Blomhøj, M. & Højgaard, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications,* 22(3), 123-139.

Blum, W.; Galbraith, P. L.; Henn, H.-W. y M. Niss. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study*. New York: Springer.

Boertien, H., y de Lange, J. (1994). *The national option of TIMSS in The Netherlands*. Enschede, The Netherlands: University of Twente.

Bodgan, R.C. y Knoop-Biklen, S. (2003). *Qualitative Research for Education*. New York: A and B.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. y Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics,* 23, 247-285.

Cantoral, R.; Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México: Prentice Hall.

Cazden, C. B. (1998). *Two meanings of 'discourse'.* Annual Meeting of the American Association for Applied Linguistics, Seattle.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

Chosmky, N. (1970). *Aspectos de la teoría de la sintaxis.* Madrid: Aguilar.

Coll, C. (1989). *Marc curricular per a l'ensenyament obligatori*. Barcelona: Departament d'Ensenyament de la Generalitat.

Coller, X. (2000). *Estudio de casos*. Madrid: CIS.

Comisión de las Comunidades Europeas (2005). *Propuesta de recomendación del parlamento Europeo y del Consejo sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente* 2005/0221 (COD). Bruselas: Autor.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *RELIME*, 10 (1), 7-38.

Cruz, P. (2006). *El capital humano y la gestión por competencias.* Descargado mayo 9 de 2007, desde http://www.monografias.com/trabajos6/gepo/gepo.shtml.

Curriculo Nacional do Ensino Básico (2001). *Competêncis Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educcação, Departamento da Educação Básica.

Dapueto, C; Lapenti, (1999). Contributions and obstacles of contexts in the development of mathematical knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 1–21.

De Bock, D.; Verschaffel, L.; Janssens, D.; Van Dooren, W. y Claes, K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students' performance? Negative evidence from a study on modelling non-linear geometry problems. *Learning and Instruction*, 13(4), 441–463.

De Ketele, J. (2006). *L'approche par compétences: ses fondements*. Descargado el 18 de mayo de 2008, desde http://www.itg.be/becausehealth/uploads/index/20061016_375189448_2presentationjmdeketele.pdf

Dekker, T. (2007). A model for constructing higher level classroom assessments. *Mathematics Teacher,* 101(1), 56-61.

Dekker, T. y Querelle, N. (2002). *Great assessment picture book*. Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

De Lange, J. (1987). *Mathematics: Insight and meaning*. Utrecht, The Netherlands: OW & OC.

De Lange, J. (1995). Assessment: No change without problems. En T. A. Romberg (Ed.), *Reform in school mathematics and authentic assessment (pp.* 87–172). New York: SUNY Press.

De Lange, J. (1996). 'Using and applying mathematics in education'. En Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 49–97). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

De Lange, J. de (1999*). Framework for classroom assessment in mathematics*. Madison: WCER.

Deulofeu, J. (1993). *Els Gràfics cartesians de funcions: un estudi de les concepcions dels alumnes centrat en el significat del gràfic*. Tesis doctoral. Bellatera: Universitat Autònoma de Barcelona (UAB).

Dolores, C. y Cuevas, I. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *RELIME*, 10(1), 69-96.

DOGC. (2007). 4915 *Decret 142/2007 de 26 de juny*, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació primària.

Doorman, M. y Gravemeijer, K. (2009) Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM Mathematics Education*, 41, 199–211.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers (pp.95-123). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación matemática*, 8(3), 24-41.

Dubinsky, E.; Weller, K.; Mcdonald, M. A. y Brown, A. (2005a). Some Historical Issues and Paradoxes Regarding the Concept of Infinity: An APOS-Based Analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58(3) 335-359.

Dubinsky, E.; Weller, K.; Mcdonald, M. A. y Brown, A. (2005b). Some Historical Issues and Paradoxes Regarding the Concept of Infinity: An APOS-Based Analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 60(2) 253-266.

Duval, R (1988). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et Sciencies Cognitives* 1, 235-253.

Espinoza, L; Barbé, Q.; Mitrovich, D.; Solar, H.; Rojas, D. y Matus, C. (2008) *Análisis de las competencias matemáticas en primer ciclo. Caracterización de los niveles de complejidad de las tareas matemáticas*. Proyecto FONIDE N°: DED0760. Santiago: Ministerio de Educación de Chile.

Eurydice. (2002). Las *Competencias clave. Un concepto en expansión dentro de la educación general obligatoria*. Unidad Europea: Bruselas.

Even, R. (1998). Factors Involved in Linking Representations of Functions. *Journal of Mathematical Behavior,* 17 (1), 105-121.

FESPM. (2009). Análisis y desarrollo de la competencia matemática. Seminario federal. *Suma*, 61, 137-142

Font, V. (2001). Processos mentals versus competència. *Biaix,* 18, 33-36.

Font, V. y Ramos, A.B**.** (2005). Contexto y contextualización en educación matemática. Una perspectiva ontosemiótica. *Actas del V Congreso Iberoamericano* (pp. 1-8). Associação de Professores de Matemática de Portugal: Oporto.

Forman, E. A. y Ansell, E. (2002). Orchestrating the Multiple Voices and Inscriptions of a Mathematical classroom*. The Journal of the learning sciences*. 11(2/3), 251-274.

Freudenthal, H. (1973*). Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers

Freudenthal, H. (1977). Antwoord door Prof. Dr H. Freudenthal na het verlenen van het eredoctoraat' [Answer by Prof. Dr H. Freudenthal upon being granted an honorary doctorate]. *Euclides,* 52, 336–338.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Friel, S., Cursio, F., Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factor influencing comprehension and instructional implications*.* J*ournal for Research in Mathematics Education,* Vol. 32, No. 2, 124-158.

Garagorri, X. (2007). Propuestas curriculares basadas en competencias en el ámbito europeo. *Aula de Innovación Educativa*. Núm. 161.

Departament d'Educació (2006). *Pacte Nacional per a l'Educació: Pacte Curricular*. Barcelona: Genaralitat de Catalunya.

Godino, J. (2002a). Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3), 237-284.

Godino, J. (2002b). Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen? *Revista Uno*, 29, 9-19.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* Vol. 39 (1-2): 127-135.

Gómez, P. y Lupiáñez, J.L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, 1(2), 79-98.

Gómez, J. (1998). *Contribució a l`estudi dels processos de modelització a l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques a nivell universitari*. Tesis doctoral: Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona (UAB).

González, J. y Wagenaar, R.G. (2003). *Tuning Educational Structures in Europe. Final Report. Phase One.* Bilbao: Universidad de Deusto.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 155–177.

Gravemeijer, K., y Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 111–129.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6, 105–128.

Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. En W. Blum; P. L. Galbraith; H.-W. Henn y M. Niss (Eds*.), Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study (pp.* 137–144). New York: Springer.

Greer, B. y Verschaffel, L. (2007). Modelling competencies – overview. En W. Blum; P. L. Galbraith; H.-W. Henn y M. Niss (Eds*.), Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 119–124). New York: Springer.

Henning, H. y Keune, G (2007). Levels of modeling competence. En W. Blum; P. L. Galbraith; H.-W. Henn y M. Niss (Eds*.), Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* , 225–232. New York: Springer.

Hiebert, James (2003). What research says about the NCTM Standards. En J. Kilpatrick; W. G. Martin y D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 5-23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of mathematical behavior,* 17(1), 123-134.

Houston, H. (2007). Assessing the "phases" of mathematical modeling. En W. Blum; P. L. Galbraith; H.-W. Henn y M. Niss (Eds*.), Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 249–256). New York: Springer.

Howson, G.; Keitel, C. y Kilpatrick, J. (1981). *Curriculum development in mathematics*. Cambridge: Cambridge University press.

Inglis et al. (2007). Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics,* 66, 3-21.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations-Studies and teaching experiments.* Tesis doctoral. Nottingham: University of Nottingham.

Janvier, C. (1981). Use of situations in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*. 12, 113-122.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. En C. Janvier, (Ed), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp.* 27-32). Hillsdadel: NJ Erlbaum.

Jurdak, M. (2006). Contrasting perspectives and performance of high school students on problem solving in real world, situated, and school contexts. *Educational Studies in Mathematics*. 63, 283–301.

Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. En C. Haines; P. Galbraith; W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling. The 12th ICTMA Study. Education, Engineering and Economics.* Chichester: Horwood.

Kaiser, G. y Schwarz, B. (2006). Mathematical modelling as bridge between school and university. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38,(2), 196-208.

Karplus, R.; Kaprlus, E.; Formisano, M.; Paulsen, A-C. (1979). Proportional Reasoning and Control of Variables in Seven. En J. Lochhead y J. Clement (eds.), *Cognitive Process Instruction: Research on Teaching and Learning Skills* (pp. 47-103). Philadelphia: Franklin Institute Press.

Kleijne, W. y Schuring, H. (1993). Assesment of examinations in the Netherlands. En Niss, M. (ed.), *Cases of Assesment in Mathematics education* (pp.139-154). Kluwer: Netherlands.

Kline, M. (1976). *El fracaso de la matemática moderna: ¿por qué Juanito no sabe sumar?*. Madrid: Siglo veintiuno.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Latorre,. A.; del Rincón, D. y Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: Hurtado Ediciones.

Leinhardt, G.; Zaslavsky, O. y Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Task, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60*, 1-64.

Lemke, J. L. (1997). *Aprender a hablar de ciencias*. Barcelona: Paidós.

Lerman, S. (2001). Cultural, Discursive Psychology: a Sociocultural Approach to Studying the Teaching and Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 46(1-3), 87-113.

Lichtiman, M. (2006). *Qualitative research in education A user's guide*. Londres: Sage.

Lochhead, J y Clement, J. (1979). *Cognitive process instruction: Research on teaching and learning skills.* Philadelphia: Franklin Institute Press.

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2006). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: organización de competencias y capacidades de los escolares en el caso de los números decimales. *Indivisa: Boletín de estudios e investigación*, 4, 47-58.

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA, 3*(1), 35-48.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 113-142.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, pp.173–204. Rotterdam: Sense.

Martín, W. G. y Berk, D. (2001). "The cyclical Relationship Beetween Research and Standards: The case of Principles and Standars fos School mathematics". *School Science and Mathematics*, 101(6), 328-339.

McClain, K. (2000). An analysis of the teacher's role in supporting the emergence of symbolizations in one first-grade classroom. *Journal of Mathematical Behavior*, 19, 189-207.

Mehan, H. (1979). *Learning lessons: social organization in the classroom*. Cambridge: Harvard University Press.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Mesa, G.; Solar, H.; Azcárate, C. (2007). Una aproximación a las competencias matemáticas. Caracterización de actividades de un libro de texto utilizando indicadores para la complejidad de las tareas. *Actas XIII JAEM*, Granada del 2 al 7 de Julio, 2007.

Mevarech, Z. y Kramarsky, B. (1997). From verbal descriptions to graphic representations: stability and change in students' alternative conceptions. *Educational Studies in Mathematics* 32, 229–263.

Ministerio de Educación. (2006). *Historia*. Descargado el 17 de junio del 2006, desde http://www.mineduc.cl/index.php?id_portal=1&id_seccion=205&id_contenido=89

Ministerio de Educación y Ciencia. (2006a). Real decreto 1513/2006 de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE, 293, 43053-43102*.

Ministerio de Educación y Ciencia. (2006b). Real decreto 1631/2006 de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE, 5, 677-773.*

Ministerio de Educación. (2007). *Mapas de Progreso del Aprendizaje. Sector Matemática Mapa de Progreso de Números y Operaciones*. Descargado el jueves 4 de octubre de 2007, desde http://www.curriculum-mineduc.cl/curriculum/mapas-de-progreso/

Ministry of Education. (2005). The Ontario Curriculum in Secondary Mathematics. Descargado el 23 de Marzo de 2006, desde http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/secondary/math.html.

Monk S. (2003). Representation in school mathematics: Learning to graph and graphing to learn. En J. Kilpatrick; W. G. Maring y D. Schifter (Eds.) *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 250-262). Reston VA: NCTM.

Moreno, A. (2007). Desarrollo de la competencia matemática. Una estrategia de planificación. *Uno*, 46, 33-42.

Moreno, M.; Mesa, G. y Azcárate, C. (2008). La evaluación de las competencias matemáticas y el desarrollo profesional: elementos de cambio en la educación superior. En Menezes, L.; Santos, L. et al. (Eds), *Avaliaçao em Matemática. Problemas e desafios*. Viseu, Portugal:Fundaçao para a Ciencia e a Tecnologia.

Mortimer E. y Scott P. (2002) Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino. *Investigações em Ensino de Ciências,* 7(3).

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. (versión original 2000).

Nemirosvsky, R. (2004). On ways of symbolizing: the case of Laura and the velocity sign. *Journal of Mathematical Behavior*, 13, 389-422.

Niss, M. (1999). Competencies and Subject Description. *Uddanneise*, 9, 21-29.

Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish kom project (Proyecto KOM. The national academies: The national academies). Descargado el 25 de octubre 2007, desde http://www7.nationalacademies.org/mseb/mathematical_competencies_and_the_learning_of_mathematics.pdf.

OCDE. (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas*. Paris: OCDE.

OCDE. (2005). *La Definición y Selección de Competencias Claves. Resumen ejecutivo.* OCDE. Descargado el 25 de junio de 2008, desde www.deseco.admin.ch

OCDE. (2006). *PISA marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura*. España: Santillana.

Parlamento Europeo y Consejo de la Unión Europea. (2006). *Recomendación del Parlamento Europeo del Consejo de 18 de diciembre del 2006 sobre competencias clave para el aprendizaje permanente*. Diario oficial de la Unión Europea. L 394/10-18. 30 de diciembre del 2006.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 25(3), 313–348.

Perrenoud, P. (1999). *Construir competencias desde la escuela*. Chile: Dolmen Ediciones.

Planas, N. y Gorgorió, N. (2001). Estudio de la diversidad de interpretaciones de la norma matemática en un aula multicultural. *Enseñanza de las Ciencias,* 19 (1), 135-150.

Plantin, C. (1990). *Essais sur l'argumentation*. Paris : Editions Kimé.

Puig, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. *PNA, 2*(3), 87-107.

Radford, L. (2009). ''No! He starts walking backwards!'': interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM,* 41(4), 467-480.

Rasmussen, C. y Blumenfeld, H. (2007). Reinventing solutions to systems of linear differential equations: A case of emergent models involving analytic expressions. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, 195–210.

Rasmussen, C., Stephan, M., y Allen, K. (2004). Classroom mathematical practices and gesturing. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*, 301–323.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.

Rico, L. y Lupiáñez, J.L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva Curricular*. Alianza: España.

Rojas F. (2009). *Participación en el aula de matemáticas: indicadores discursivos para caracterizar su gestión*. Tesis doctoral, Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona (UAB).

Roth, W.-M y Bowen, M. (2001). Professionals Read Graphs: A Semiotic Analysis, *Journal for Research in Mathematics Education.* 32(2), 159-194

Rychen, D.S. y Salganik, L. H. (eds) (2006). *Las competencias clave para el bienestar personal, social y económico*. Aljibe, Málaga: Archidona.

Sarramona, J. (2004). *Las competencias básicas en la educación obligatoria*. Barcelona: CEAC.

San Martín, V. (2004). La formación en competencias: el desafío de la educación superior en Iberoamérica. *OEI Revista Iberoamericana de Educación*.

Sánchez-Matamoros, S.; Llinares, S. y García, M. M. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 24, (1), 85-98.

Schoenfeld, A. H. (1979). Can Heuristics be Taught?. En J. Lochhead y J. Clement (eds.), *Cognitive process instruction: research on teaching and learning skills* (pp. 315-338). Philadelphia: Franklin Institute Press.

Schoenfeld, A. H. (2007). *Assessing Mathematical Proficiency*. Cambrige: Universitiy Press.

Schoenfeld, A. y Arcavi, A. (1988). On the Meaning of Variable. M*athematics Teacher,* 81, 420-427.

Scott, P., Mortimer, E., y Aguiar, O. (2006). The tension between authoritative and dialogic discourse: a fundamental characteristic of meaning making interactions in high school science lessons. *Science Education, 90*, 605-631.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Schafer, M. y Foster, S. (1997). The changing face of assessment*. Principled Practice in Mathematics and Science Education*. 1(2), 1.

Shell Centre for Mathematical Education (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas*. Bilbao: Universidad del país Vasco.

Sherin, G. (2002). A balancing act: developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education* 5, 205–233.

Sinclair, J. M. y Coulthard, M. (1975). *Towards an analysis of discourse: The English used by teachers and pupils*. London: Oxford University Press.

Sol, M.; Giménez, J. y Rosich, N. (2007). Competencias y proyectos matemáticos realistas en la ESO. *Uno*, 46, 43-60.

Solar, H. (2006). *La interpretación de gráficas y tablas en marcos y materiales curriculares a través de un análisis de texto.* Tesis de master. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona (UAB).

Solar, H.; Zamorano, A. (2006). Algebrización en la proporcionalidad de Magnitudes, En L. Ruiz-Higueras; A. Estepa y F. J. Garcia (Eds), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 507-526.). Jaen, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaen.

Stake, R.E. (1994). Case studies. En K. Denzin, y Y-S. Lincoln (Eds), *Handbook of qualitative research*. (236-246). Thousand Oaks: Sage.

Stephan, M. y Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*, 459-490.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel Publishing Company.

Treffers, A., y Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education – The Wiskobas Program. En L. Streefland (ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 97–122). Utrecht, The Netherlands: OW & OC.

Tójar, J.C (2006). Investigación cualitativa: comprender y actuar. Madrid: La Muralla.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. England: Cambridge University Press.

Uno. (2002). Competencias matemáticas. *Uno,* 29.

Uno. (2007). Competencias y uso social de las matemáticas. *Uno,* 46.

Van den Heuvel- Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the learning of mathematics*. 25(2), 2-9.

Van den Heuvel- Panhuizen, M. (2008). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics. 54, 9-35.*

Vergnaud, G. (2007). Forma operatoria y forma predictiva del conocimiento. *Conferencia Plenaria I encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática,* 11 al 13 de abril, Universidad Nacional del centro de la provincia de Buenos Aires.

Verschaffel, L., Greer, B. and De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets and Zeitlinger.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning* (pp. 163- 201). New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum Asociates.

Wainer H. (1992). Understanding graphs and tables*. Educational Research*, 21(1), 14.23.

Weber, K. y Alcock, L. (2005). Using warranted implications to understand and validate proofs. *For the Learning of Mathematics*, *25*(1), 34–38.

Wedege, T. (1999). To know – or not to know – mathematics, that is a question of context. *Educational Studies in Mathematics,* 39, 205-227.

Wells, G. (1993). Reevaluating the IRF sequence: A proposal for the articulation of theories of activity and discourse for the analysis of teaching and learning in the classroom. *Linguistics and Education, 5,* 1–37.

Whitenack, J., y Knipping N. (2002). Argumentation, instructional design theory and student's mathematical learning: a case for coordinating interpretive lenses. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*, 441-457.

Wistedt. I. (1994). Reflection, communication, and learning mathematics: a case study. *Learning and Instruction*, 4, 123-138.

Wood, T. (1998). Alternative patterns of communication in mathematics classes: funneling or focusing? En H. Steinbring, M. G. Bartolini-Bussi y A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in mathematics classroom* (pp. 167-178). Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics.

Wood, T., Cobb, P. y Yackel, E. (1991). Change in teaching mathematics: *A case study. American Educational Research Journal*, 28(3), 587-616.

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*, 423-440.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.

Yin, R.K. (1993). Applications of case study research. *Applied social research methods series*. Vol. 34, Sage: Newbury Park, CA.

Zabala, A y Arnau, L. (2007). *Cómo aprender y enseñar competencias*. Graó: Barcelona.

Índice de cuadros

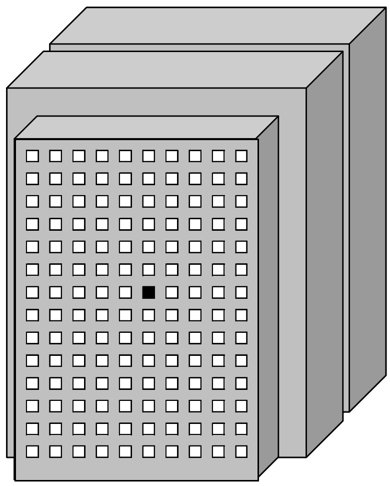
Índice de figuras

ANEXO 1:
UNIDAD DIDÁCTICA

Ficha 1	**Primera Unidad** **Clase 1**	**Octavo Básico**	Nombre: ______________________________ Curso: _______________

En un edificio del barrio una señora pidió auxilio por la ventana. El conserje del edificio llamó a los bomberos quienes llegaron muy rápidamente. Para realizar la maniobra de rescate, los bomberos le preguntaron al conserje cuál era la ventana, mirando de frente al edificio.

A continuación se encuentra el lado del edificio donde está ventana del siniestro. Corresponde a la que está ennegrecida.



¿Qué debiera decir el conserje a los bomberos para que estos identifiquen la ventana exacta del suceso?

____

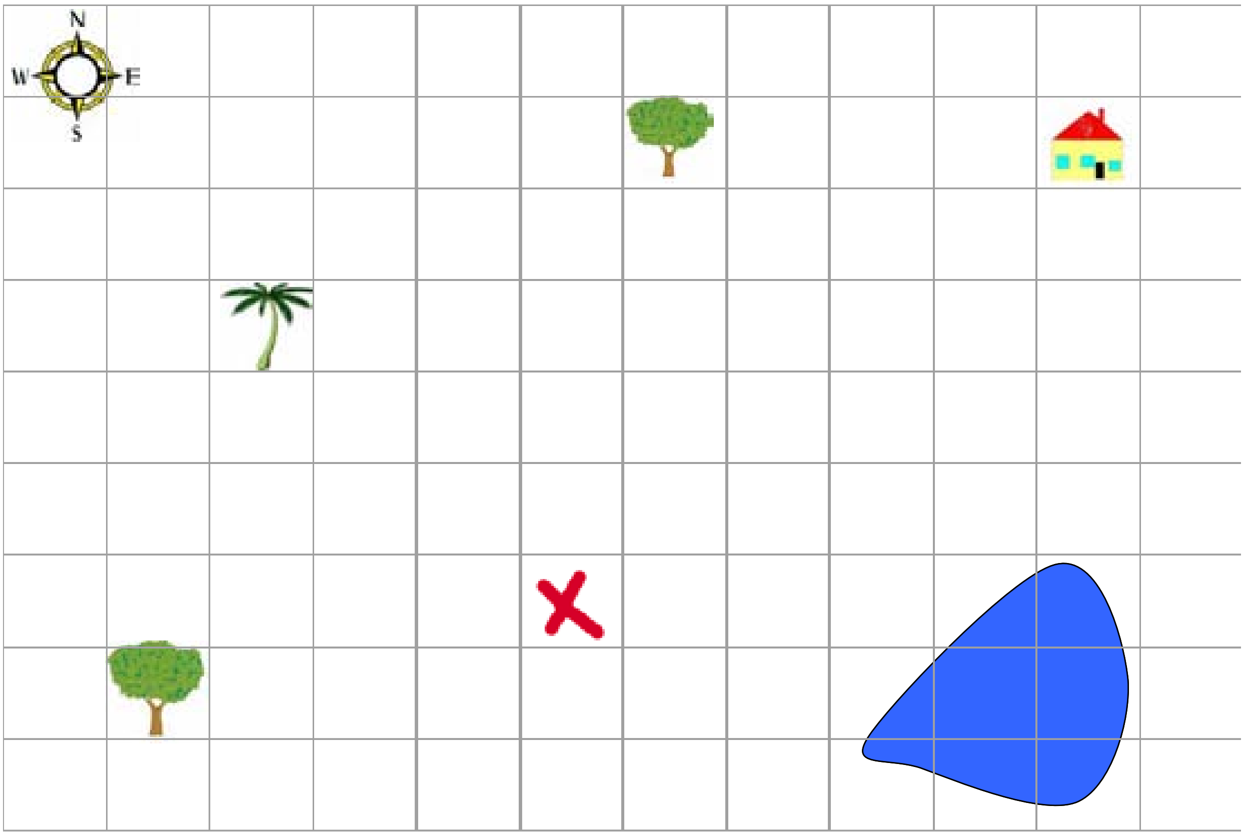
____

____

Ficha 2	Primera Unidad Clase 1	Octavo Básico	Octavo Básico

Mapa del Tesoro

Un explorador va en busca de un tesoro a la isla Maru Maru. Para ello tiene el siguiente mapa en donde aparece la ubicación exacta del tesoro. En el trayecto a la isla pierde el mapa. Le manda un telegrama a su socio, quien posee una copia del mapa, y le pide que le dé las instrucciones para poder ubicar el tesoro. Si tú fueras la persona que tiene que enviar el telegrama, ¿qué instrucciones le darías al explorador para que pueda encontrar el tesoro? Se debe tener en cuenta que cada cuadrado corresponde a un paso.



Escribe aquí las instrucciones.

Ficha 3	Primera Unidad Clase 1	Octavo Básico	Nombre: ______________________________ Curso: _______________

Encuentra los Tesoros

Jugadores: 2

Instrucciones:

- Ubicar dos tesoros en el sector cuadriculado de juego, **sin que los vea tu compañero(a).**
- Los tesoros **no** pueden estar ubicados en dos cuadrados contiguos.
- Trata de adivinar la ubicación en que el otro jugador ubicó los tesoros.
- Por turnos, para cada intento, el jugador a quien le están adivinando debe indicar si es que ha sido descubierto o no alguno de sus tesoros.
- Es solamente un intento por turno.
- Gana aquel jugador que encuentra todos los tesoros de su pareja.

Responde a las siguientes preguntas:

a. Describe que expresión utilizabas (que decías) para identificar el tesoro en tu primer turno.

b. Describe nuevamente que decías en tu tercer turno.

c. En el último turno ¿Qué preguntas hiciste? Fue la misma que en el tercer turno.

Jueguen otra vez, y respondan a las siguientes preguntas.

d. ¿Cambiaste la manera de preguntar en comparación al juego anterior?

e. ¿Quién, ganó? ¿Y por qué? ¿Puedes establecer una relación entre el número de aciertos y qué preguntabas para identificar los tesoros?

Ficha 4	Primera Unidad Clase 4	Octavo Básico	Nombre: ____________________ Curso: __________

- Ubicar dos puntos en alguna intersección del cuadriculado, sin que los vea tu compañero(a).
- Escribir un mensaje a tu compañero(a) para que dibuje en su cuadriculado dos puntos en la misma posición.
- No se podrá pedir más información anexa al mensaje escrito.
- Una vez dibujados los puntos, superponen las hojas para verificar si los puntos han quedado en la misma posición.

Material 1	Primera Unidad **Clase 2**	**Octavo Básico**	Nombre: ______________________ Curso: ___________

Situación Experimental

Materiales requeridos para la actividad:

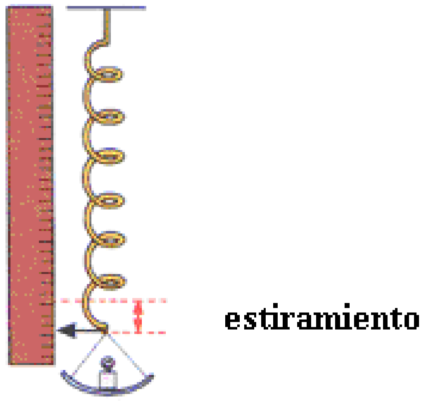
- Un resorte: un espiral grueso y ancho de los que su utilizan para anillar hojas.
- Un soporte: una bolsita plástica o una bandejita.
- Objetos de igual tipo con distintos pesos.
- Una regla graduada.

Previo a la exploración:

Fijar un resorte en forma vertical y en su extremo inferior colgar un soporte para colocar distintos pesos. Una vez fijado el resorte, se marcar la longitud que alcanza el extremo inferior cuando este no tiene ningún peso agregado (nivel cero).

Desarrollo del experimento:

Medir experimentalmente el estiramiento del resorte con diferentes cantidades de objetos de un mismo tipo. Por ejemplo monedas de $10: 1 moneda, 3 monedas, 7 monedas, etc.



Mientras se realiza el experimento, responde lo siguiente:

a) ¿Qué sucede al agregar peso en el extremo del resorte? ¿Qué sucede con el resorte si hay 5 objetos en su extremo?

b) ¿Qué sucede con el resorte si hay 10 monedas de $10 en su extremo?

c) ¿Qué esperarías que sucediera con el largo del resorte si se agregan 5 monedas más? ¿Y si se quitan 10 monedas?

d) ¿Cuáles son las variables en este experimento?

e) ¿Existe dependencia de una de estas variables con respecto a la otra? Justifica tu respuesta.

f) Para este problema, ¿cuál de las variables es la que está siendo determinada por el comportamiento de la otra?, ¿por qué?

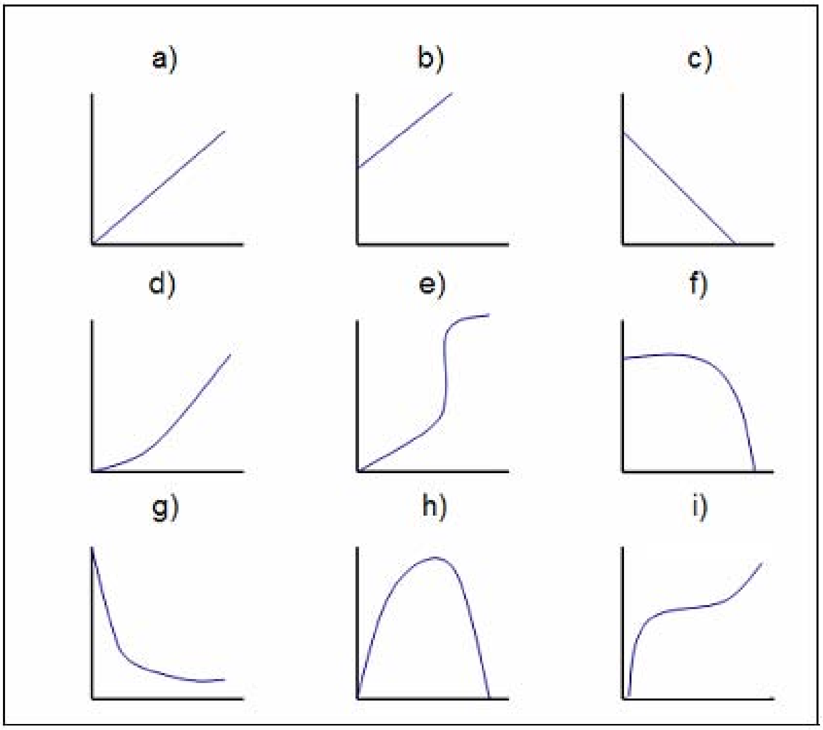
Material 2	Primera Unidad **Clase 3**	**Octavo Básico**	Nombre: ______________________ Curso: ____________

Problema 1: Encuentra la variable

A.-De las cinco situaciones descritas, únelas con una flecha con las variables que les corresponda. A cada situación le corresponde dos variables.

Situaciones	Variables
	Altura
1. El levantador mantuvo las pesas sobre su cabeza por unos segundos y luego las dejó caer con un violento estrépito.	Cantidad
2. El auto alcanzó una velocidad de 100 Km./h en 8 segundos	Altura
3. Si el trabajo en la escuela es demasiado fácil, no aprendes nada con ello. Por otra parte, si es tan difícil que no lo puedes entender, tampoco aprendes. Por eso es tan importante trabajar con el nivel adecuado de dificultad.	Cantidad Aprendizaje Tiempo
4. Desde tierra el águila emprendió vuelo hasta llegar a 100 m. para buscar a una presa, y en vista que no vio nada apetecible subió a lo alto de la montaña al nido a descansar.	Velocidad Dificultad
5. Debido a la ausencia de tiburones, hay una abundante provisión de peces en la zona	Distancia Tiempo

B. Ahora elige entre las gráficas las que mejor describan cada situación. Copia la gráfica y etiqueta los ejes con las variables. Si no puedes encontrar el gráfico que quieres, dibuja tu propia versión y explícala.

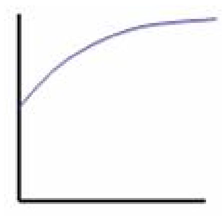


Problema 2: ¿Cuál es la variable de…?

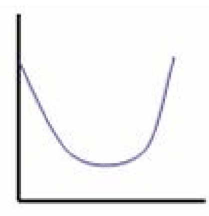
Instrucciones

- Indica que gráfica describe mejor cada una de las cinco situaciones que están descritas.
- Establece cuales son las variables descritas en cada situación y sitúalas en los ejes.
- Si no encuentras la gráfica que quieres, dibuja tu propia versión.

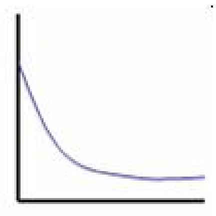
a)



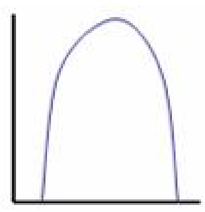
b)



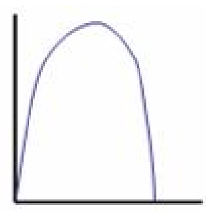
c)



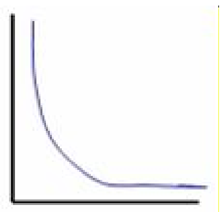
d)



e)



f)



I.

1. Los precios están subiendo más despacio que en ningún otro momento de los últimos cinco años.

2. Me gusta bastante la leche fría y la leche caliente, pero ¡detesto la leche templada!

3. Cuánto más pequeñas son las cajas, más podemos cargar en la camioneta.

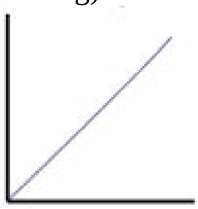
4. Después del concierto hubo un silencio abrumador. Entonces una persona de la audiencia empezó a aplaudir. Gradualmente los que estaban alrededor se les unieron y pronto todo el mundo estaba aplaudiendo y vitoreando.

5. Si las entradas del cine son muy baratas, los dueños perderán dinero. Pero si son demasiado caras, irá poca gente y también perderán. Por lo tanto, un cine debe cobrar un precio moderado para obtener beneficio.

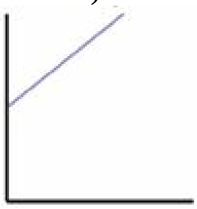
II. Agrúpense en parejas. En las siguientes cinco situaciones, en no menos de dos líneas, tienen que decidir y explicar claramente lo que pasa; elijan entre las gráficas la mejor que se adapte a cada situación. Establece cuales son las variables descritas en cada situación y sitúalas en los ejes.

Este material es una versión modificada por Horacio Solar de la unidad didáctica: “Analizando y construyendo gráficos”, del proyecto Asesoría a la Escuela completa para la implementación Curricular en Lenguaje y Matemática (MINEDUC), elaborada por Grupo Félix Klein (USACH).

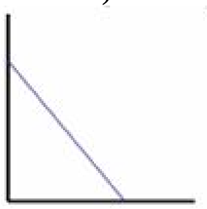
g)



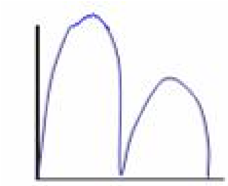
h)



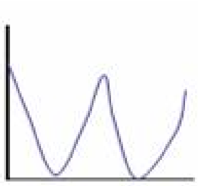
i)



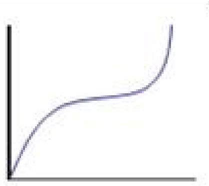
j)



k)



l)



1. ¿Cómo depende el precio de una bolsa de patas de su peso?

2. ¿Cómo varía el diámetro de un globo cuando sale aire lentamente de él?

3. ¿Cómo depende la duración de una carrera de su longitud?

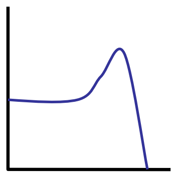
4. ¿Cómo varía la velocidad de una niña en un columpio?

5. ¿Cómo varía la velocidad de una pelota cuando bota?

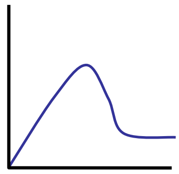
Problema 3: ¡Inventa una historia!

I) Inventa tres situaciones con estas variables y gráficos.

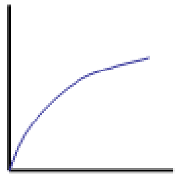
a) Tiempo
b) Velocidad



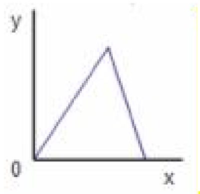
a) días
b) ganancias

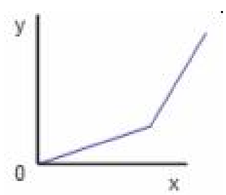


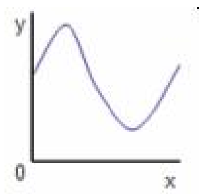
a) x
b) y



II) Elabora una historia, es decir una descripción verbal, de las siguientes gráficas. A las variables *x* e *y* puedes atribuirle el significado que tu quieras.



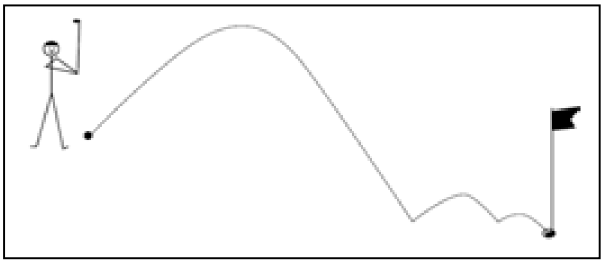


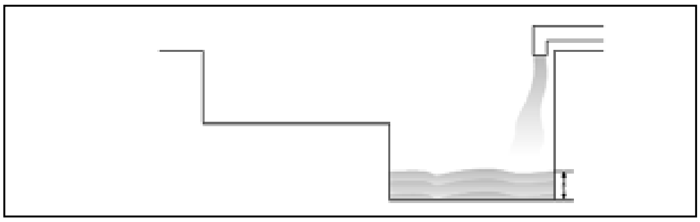


Problema 4: en la búsqueda de variables

Qué variables inciden en:

a) Un lanzamiento de bola de golf.   b) El llenado de una piscina





Problema 5 ¿Qué plan elegir?

Tomás con su familia, quiere elegir un plan *trío* (teléfono, banda ancha Internet y TV cable), luego de informarse se quedan para elegir con seis planes distintos de tres compañías de telefonía.

	Telefónica		VTR		Manquehue	
	Plan 1	Plan 2	Plan 1	Plan 2	Plan 1	Plan 2
Minutos gratis llamada local	350	650	350	350	400	700
Velocidad navegación Kbps	300	600	300	600	450	650
TV cable	si					
Costo mensual	40.990p.	45.990p.	33.900p.	46.900p.	35.990p.	39.990p.

Reúnanse en grupos de 3 a 4 personas para responder a las preguntas.

a) Identifiquen cuales son las variables más relevantes para tomar la decisión de cual plan elegir. ¿Son las mismas variables para cada compañía?________________________

b) Elijan un plan en cada una de las siguientes condiciones.

- La familia de Tomás pasa un buen tiempo hablando por teléfono.__________
- Tomas y su hermano quieren velocidad al navegar.______________________
- El más económico con televisión.____________________________________
- Un plan con la mejor navegación y televisión.__________________________

c) Hay variables que no incidan en la decisión? ¿Cuáles?

____

d) ¿Hay variables que inciden en la decisión y no están reflejadas en la tabla? Si es así indiquen cuales son.

____

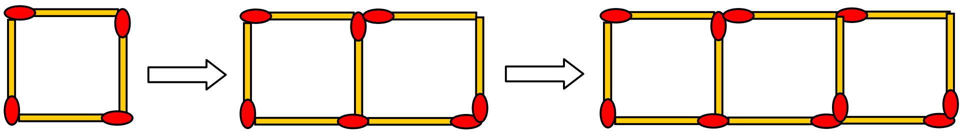
e) ¿Qué plan elegirían Uds.?

____

Ficha 5	Primera Unidad Clase 4	Octavo Básico	Nombre: ____________________ Curso: __________

Problema 1:

Construir una cadena de cuadrados con palos de fósforos, según se muestra en la figura:



a) Determinar cuántos palos de fósforos se utilizan si la cadena tiene 4, 5 y 8 cuadrados.

____

____

b) ¿De qué depende la cantidad de palos de fósforos utilizando la cadena? Nombra las variables.

____

c) Construye una tabla con valores para cada una de las variables.

d) ¿De qué naturaleza son los valores que toman las variables en la situación? ¿Cuantitativas, cualitativas? ¿Discretas o continuas? Justifica tu respuesta.

____

e) ¿Es posible formar una cadena de cuadrados con 9 palos de fósforos? ¿Por qué?

f) ¿Qué valores no puede tomar la variable independiente para que la situación tenga sentido? ¿Y la variable dependiente?

Problema 2:

a) Construyan en una hoja de cuaderno un rectángulo de largo 18 cm y ancho 6 cm.

¿Cuál es el perímetro de este rectángulo? ___________________________________

b) Tracen una paralela al ancho del rectángulo que lo divida en dos y con una tijera corta cualquiera de los dos rectángulos.

¿Cuál es el largo del rectángulo?, ¿y su ancho? _______________________________
¿Cuál es el perímetro de este nuevo rectángulo? _______________________________

Con el procedimiento efectuado es fácil detectar que la longitud del rectángulo disminuye, mientras que se ancho se mantiene constante.

c) Compara tus resultados con los de tus compañeros. Veras que se puede establecer distintos valores para las longitudes del rectángulo y su perímetro Registra estos datos en la siguiente tabla de valores.

d) ¿Qué sucede con el perímetro del rectángulo a medida que su largo disminuye?

e) Según las condiciones del problema, ¿es posible tener un rectángulo de 50,4 cm. de perímetro?

f) ¿Cuál es la variable dependiente?, ¿y la independiente?

g) Dado dos valores cualesquiera de la variables independiente. ¿Es posible tomar siempre otro valor entre estos? ¿y entre las variable dependiente ocurre algo parecido? razona tu respuesta.

h) ¿Qué naturaleza tienen los valores que toman las variables de la situación?

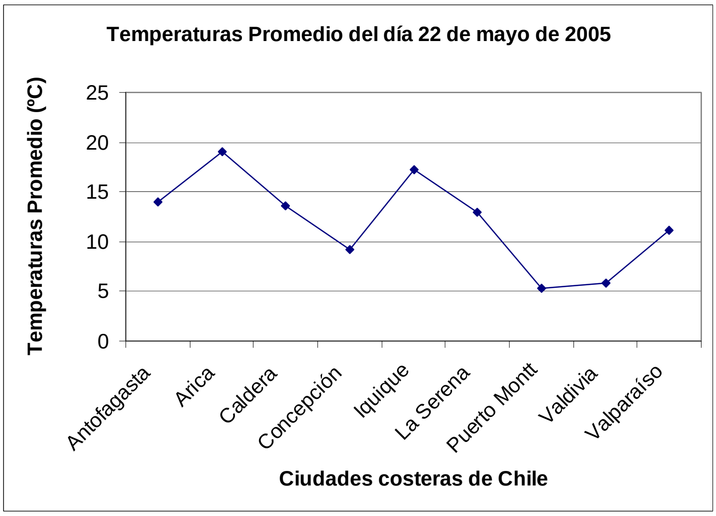
i) ¿Siempre es posible determinar con precisión los valores de estas variables? ¿Por qué?

j) ¿Qué valores no puede tomar la variable independiente para que la situación tenga sentido?

Ficha 6	Primera Unidad Clase 5	Octavo Básico	Nombre: ____________ Curso: ________

Determina las variables involucradas en cada gráfico y el tipo de información que es posible obtener del *Gráfico 1* y del *Gráfico 2*, en que se encuentran representadas "Temperaturas Promedio del día 22 de mayo de 2005".

Gráfico 1



Variables involucradas:

____

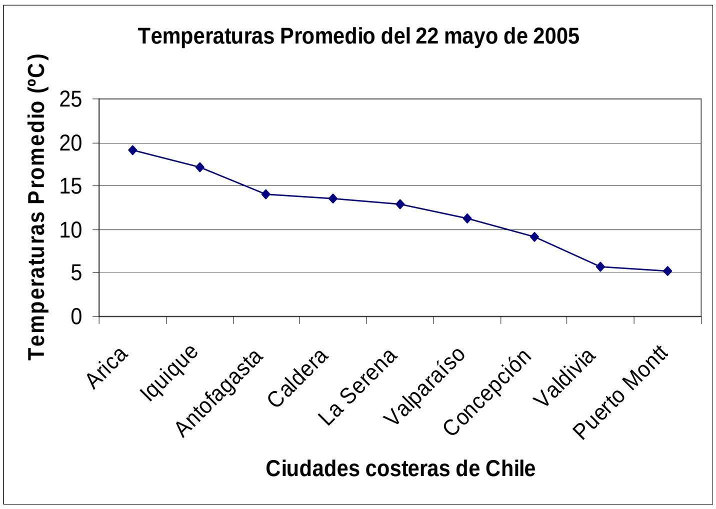
____

Algunos datos que podemos obtener:

____

____

Gráfico 2



Variables involucradas:

____

____

Algunos datos que podemos obtener:

____

____

2. Establece las similitudes y diferencias entre ambos gráficos.

____

3. Se desea estimar la temperatura promedio de ese día en la ciudad de Tocopilla ¿Es posible realizar esta estimación.

____

Ficha 7	Primera Unidad Clase 5	Octavo Básico	Nombre: ____________________________ Curso: ______________

1. En la ficha médica de un paciente se encuentra el registro de su temperatura durante los tres primeros días de hospitalización. Una enfermera ha organizado estos datos en la siguiente tabla:

Tiempo (Hrs.)	Temperatura (ºC)
0	38,5
6	39
12	39,5
18	38,5
24	37,5
30	38
36	38,5
42	37,5
48	37
54	37,5
60	37,5
66	37
72	36,5

a) ¿Cada cuántas horas se ha tomado la temperatura?______________________________

b) ¿Cuándo tuvo la temperatura más alta? ¿Y la más baja? ________________________________

c) ¿En torno a qué valor estuvo la temperatura más frecuente? ________________________________

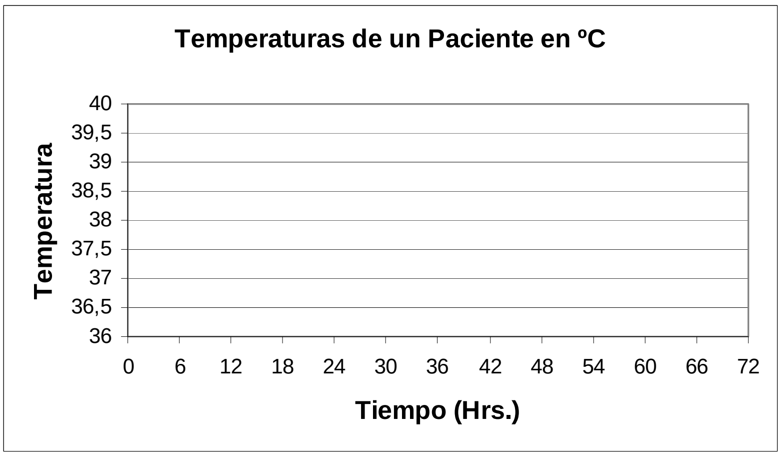
d) ¿Cuáles son las variables? ¿Se puede predecir la temperatura al cuarto día?¿ hay alguna variable que dependa de otra?______________________

e) ¿Imagínate que tu eres el médico y tienes que describir el diagnostico del paciente a un familiar, describe su evolución: como llego, su desarrollo en los tres días de hospitalización, ¿Sabrías decir cuando dar de alta al paciente?

____

____

f) Representar en el sistema de coordenadas dado los datos recogidos en la tabla.



g) ¿Qué significado tiene el hecho de unir puntos de un gráfico? ¿Tiene siempre sentido hacerlo?

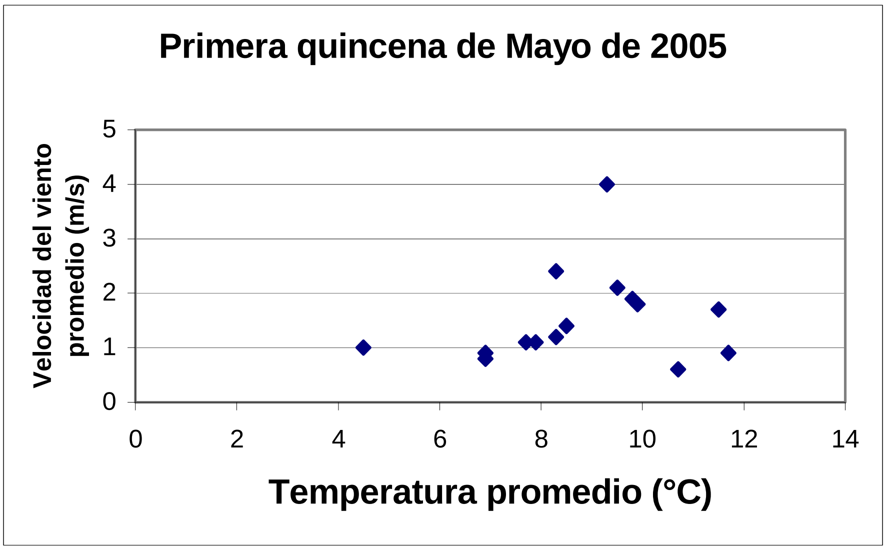
____

Ficha 8	Primera Unidad Clase 5	Octavo Básico	Nombre: ______________________________ Curso: _______________

Problema 1: variación del viento

Observa la siguiente tabla con su respectiva gráfico:

Primera quincena de Mayo	
Temperaturas promedio (ªC)	Velocidad del viento promedio (m/s)
9,3	4
11,5	1,7
7,9	1,1
7,7	1,1
9,5	2,1
9,9	1,8
8,3	1,2
10,7	0,6
11,7	0,9
8,3	2,4
9,8	1,9
8,5	1,4
6,9	0,8
4,5	1
6,9	0,9



a) ¿Cuáles son las dos *variables asociadas* de la situación?

____

____

b) ¿Cuál fue la mayor velocidad del viento de esta quincena?

____

c) ¿Cuál fue la velocidad del viento cuando la temperatura promedio fue la mayor?

____

d) ¿Cuál fue la velocidad del viento cuando la temperatura promedio fue de 6,9°C?

____

e) ¿Cuál fue la velocidad del viento cuando la temperatura promedio fue de 8,3°C?

____

f) ¿Qué ocurre con la velocidad del viento a medida que disminuye la temperatura?

____

g) ¿Es posible conocer la temperatura del viento que habrá si es que hay 12°C de temperatura?

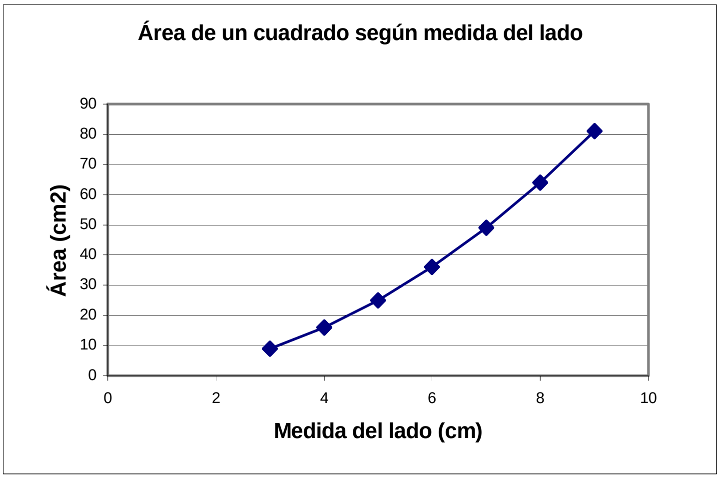
---

h) ¿Existe una relación de dependencia entre las dos variables asociadas? ¿Por qué?

Problema 2: variación de un cuadrado

Observa la siguiente tabla con su respectivo gráfico:

Medida del lado del cuadrado (cm)	Área del cuadrado (cm2)
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81



a) ¿Cuáles son las dos variables asociadas de la situación?

---

b) ¿Cuál es el área de un cuadrado de lado 12cm?

---

c) ¿Qué ocurre con el área del cuadrado cuando aumenta la longitud de su la lado?

---

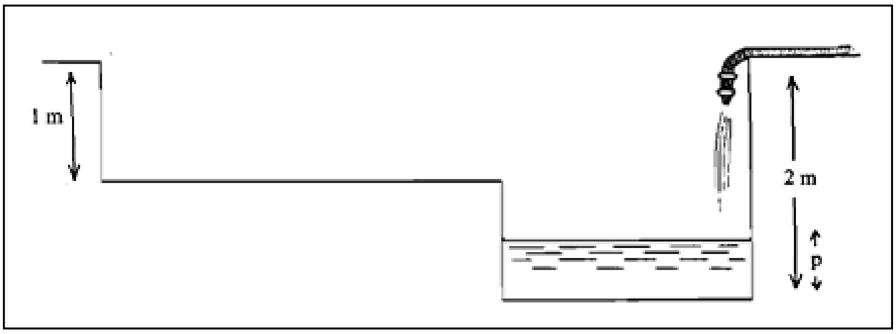
d) ¿Es posible conocer el área del cuadrado para cualquier valor de la longitud de su lado?

---

e) ¿Existe una relación de dependencia entre las dos variables asociadas? ¿Por qué?

Material 3	Primera Unidad Clase 6	Octavo Básico	Nombre: ______________________ Curso: __________

Problema 1. Rellenando una piscina



Se está rellenando una piscina rectangular con una manguera que vierte agua a una velocidad constante. A continuación se muestra una sección transversal de la piscina.

Contesta las preguntas:

a) Cuáles son las variables asociadas a la situación.

____

b) Cómo varía la profundidad del agua con el tiempo en el extremo más profundo de la piscina.

____

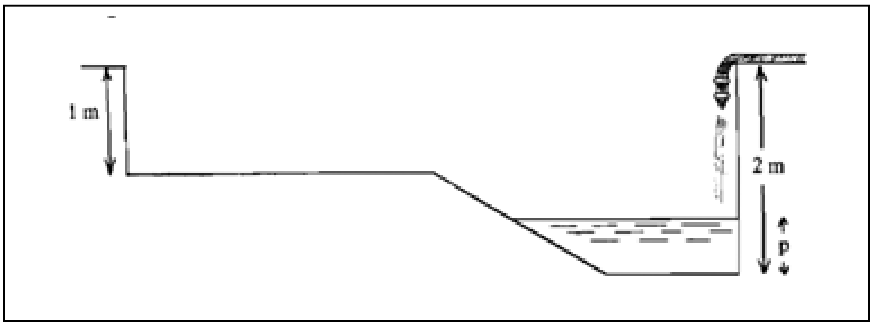
c) Haz una gráfica que muestre como varía la profundidad del agua con el tiempo en el extremo más profundo de la piscina, a partir del momento en que la piscina vacía comienza a ser rellenada

d) Describe completamente, con palabras, cómo varia con el tiempo la profundidad del agua en el extremo más profundo de la piscina, a partir del momento en que comienza a rellenarse la piscina vacía.

____

____

____



Una piscina rectangular diferente se rellena de una forma similar. Vierte agua a una velocidad constante.

a) ¿Cómo varía la profundidad del agua con el tiempo en el extremo más profundo de la piscina.

____

b) Haz una gráfica que muestre como varía la profundidad (p) del agua con el tiempo en el extremo más profundo de la piscina, a partir del momento en que la piscina vacía comienza a ser rellenada.

c) ¿Qué piscina tarda más tiempo en llenarse? Justifica tu respuesta.

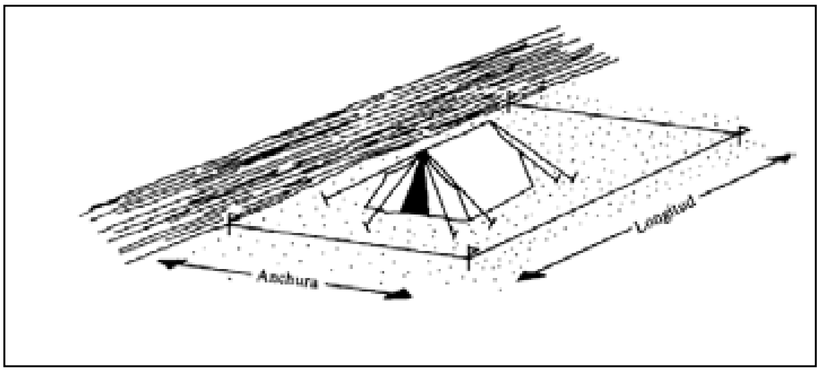
____

____

____

Problema 2: Camping

A su llegada a un camping, a un grupo de campistas les dan una cuerda de 50 metros de largo y cuatro estacas con los cuales deben marcar un recinto rectangular para su tienda.



Deciden colocar la tienda junto a un río, tal como se muestra en la ilustración. Esto supone que la cuerda sólo se tiene que usar para tres lados del recinto

a) Si deciden hacer un recinto con una anchura de 10 metros. ¿Cuál será su longitud?

____

b) Describe con palabras, lo más completamente posible, cómo cambia la longitud del recinto cuando la anchura toma todos los valores posibles. (Considera valores grandes pequeños de la anchura)

____

____

____

c) Encuentra el área encerrada por el recinto para una anchura de 10 metros, luego calcula el área para 5 metros, 15 metros y otras anchuras que estimes conveniente.

____

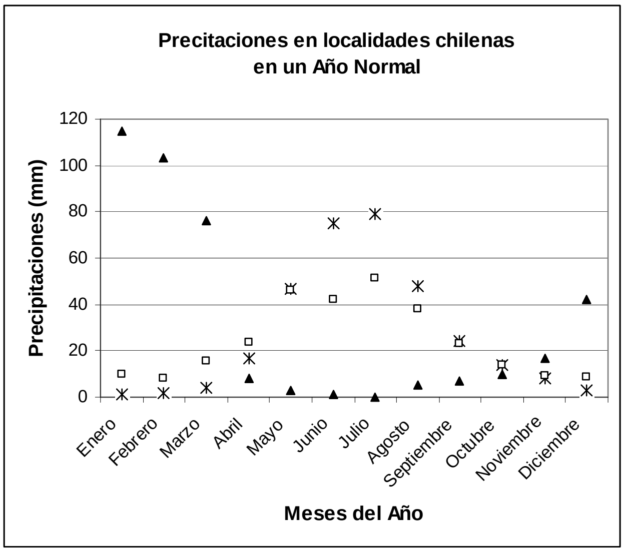
____

d) Dibuja una gráfica aproximada para mostrar cómo varía el área encerrada cuando la anchura va tomando posibles valores. (Considera valores grandes y pequeños de la anchura).

Ficha 9	Primera Unidad Clase 6	Octavo Básico	Nombre: ____________ Curso: ________

La siguiente tabla contiene las precipitaciones (en milímetros) para cada mes de un año con lluvia normal en tres localidades de Chile. En tanto, en el gráfico se ha representado estos datos.

	Precipitaciones		
	Santiago	Chile Chico	Parinacota
Enero	1	10	115
Febrero	2	8	103
Marzo	4	16	76
Abril	17	24	8
Mayo	47	46	3
Junio	75	42	1
Julio	79	52	0
Agosto	48	38	5
Septiembre	24	23	7
Octubre	14	14	10
Noviembre	8	9	17
Diciembre	3	9	42



1) ¿En qué ciudad hubo una mayor cantidad de agua caída durante el mes de abril?

____

____

2) A partir del gráfico determina:

i) ¿En qué mes tuvo Santiago la mayor cantidad de agua caída en el año?

____

ii) ¿En qué mes tuvo Chile Chico la menor cantidad?

____

iii) ¿En qué mes no llovió en Parinacota?

____

3) Imagina que eres un comentarista del tiempo, tienes que describir el comportamiento fluvial en las tres ciudades. Reúnanse en grupos de 3 a 4 personas.

i) Cada uno describa en formal oral, en aproximadamente un minuto, la caída de lluvias en el año.

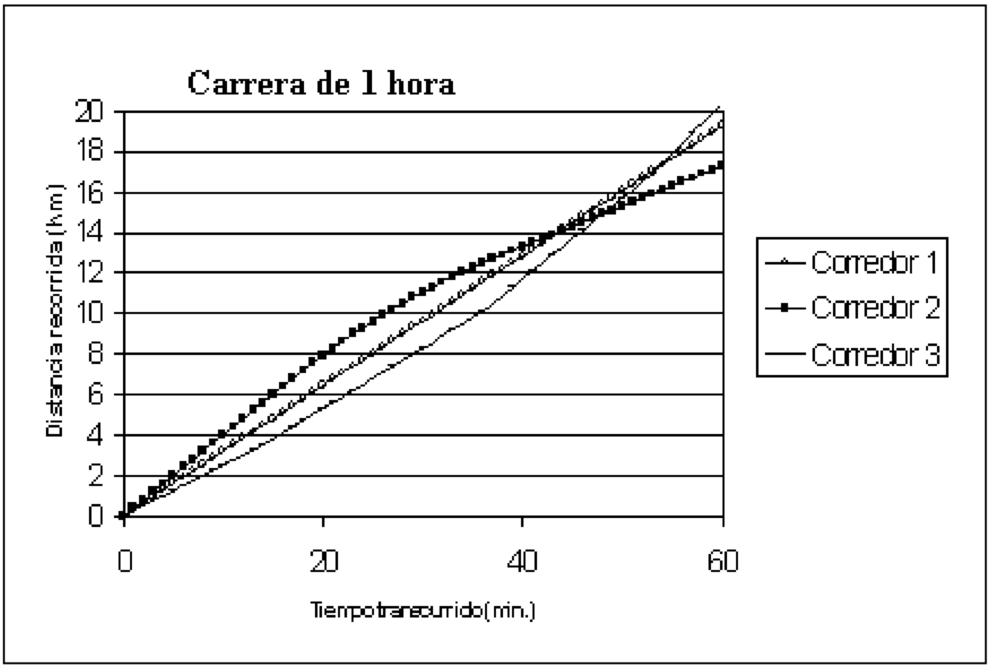
ii) Entre todos redacten en no menos de 3 líneas, un informe con las razones climáticas que justifica el comportamiento de las tres ciudades.

____

____

____

Ficha 10	Primera Unidad Clase 7	Octavo Básico	Nombre: ______________________ Curso: ____________



El siguiente gráfico describe en forma aproximada el comportamiento de tres corredores, durante una competencia llamada “carrera de 1 hora”. Esta es una carrera muy peculiar, en la que los corredores corren durante una hora, y gana aquel corredor que una vez concluido el tiempo de competencia haya recorrido una mayor distancia.

De acuerdo a la información entregada por el gráfico, responde:

a) ¿Cuál de los tres corredores recorrió una mayor distancia?

___

b) ¿Cuál de los corredores mantuvo siempre el mismo ritmo durante la carrera? ¿Por qué?

___

c) ¿Cuál de los tres corredores comenzó la carrera con una mayor velocidad?

___

___

d) ¿Por qué falló la estrategia del corredor que llegó último de los tres?

___

e) Reúnanse en grupos de 3 a 4 personas.
   i) Imagina que eres un comentarista radial de la carrera, cada uno comente toda la carrera en tiempo real.
   ii) Con las respuestas de todos, describan la carrera en no menos de tres líneas.

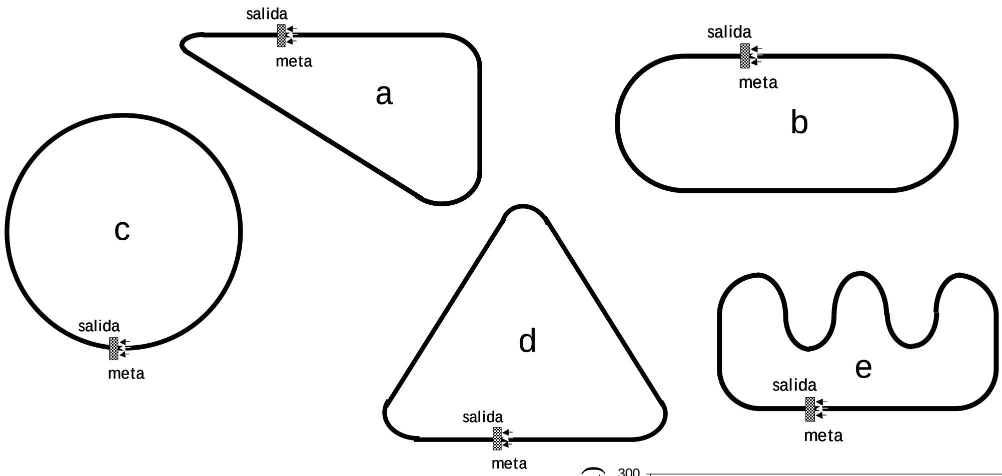
___

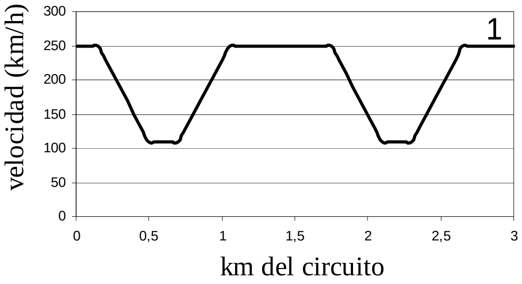
___

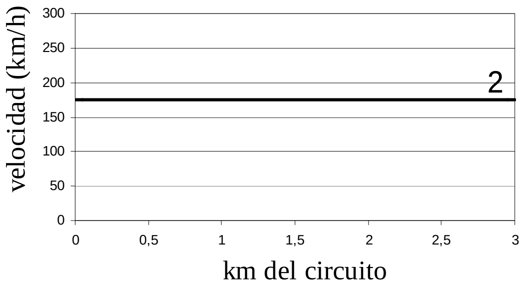
___

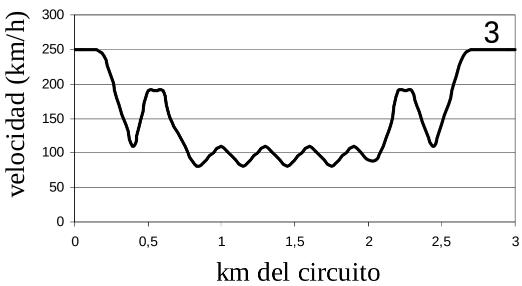
Ficha 11	Primera Unidad Clase 7	Octavo Básico	Nombre: ______________________ Curso: ____________

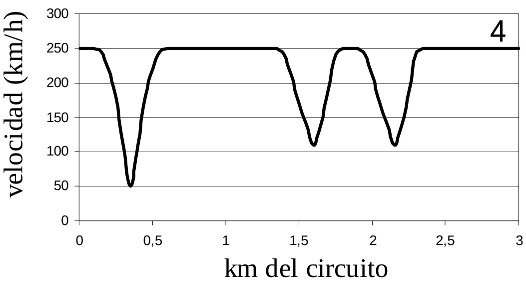
A continuación aparecen esquematizados cinco circuitos de carreras de 3 km, en los que se señala el punto de partida y llegada del automóvil. Además, encontrarás cuatro gráficos en los que se representa la velocidad de un automóvil al ir recorriendo uno de los circuitos.







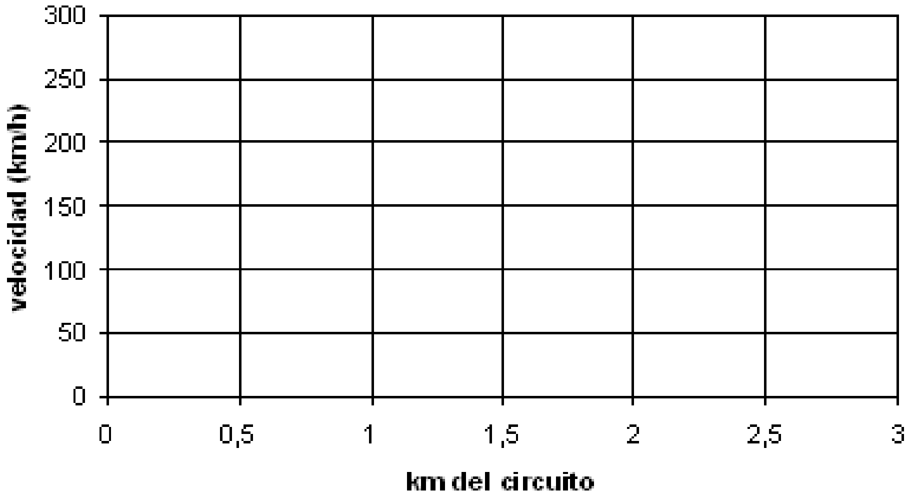




a) Indica qué circuito corresponde a cada uno de los distintos gráficos.

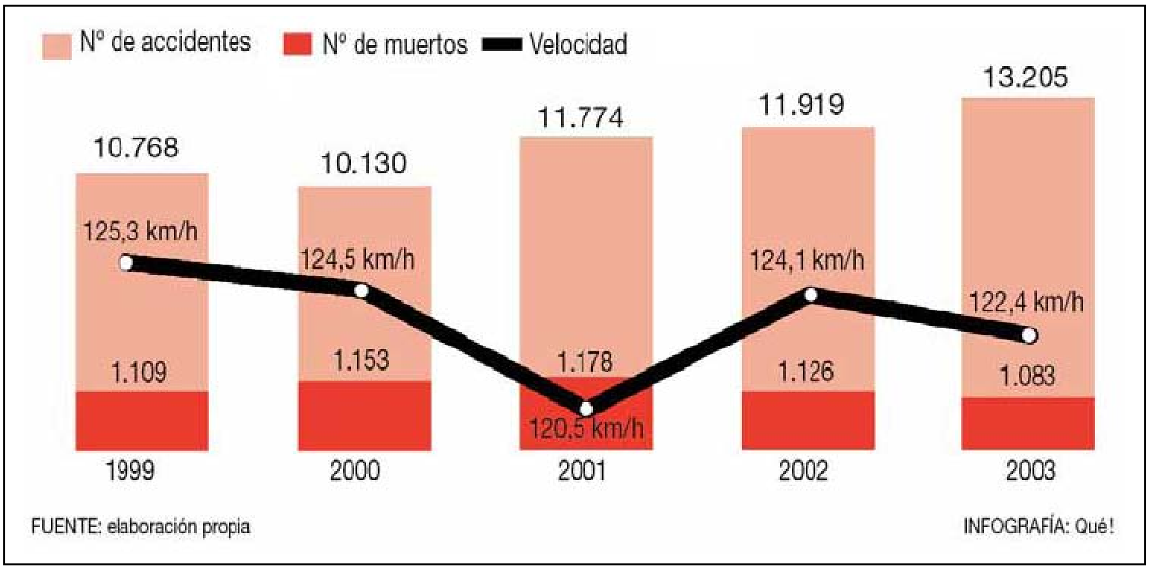
Pista a → Gráfico _____
Pista b → Gráfico _____
Pista c → Gráfico _____
Pista d → Gráfico _____
Pista e → Gráfico _____

b) Construir el gráfico correspondiente al circuito que no está representado, considerando que la velocidad máxima que alcanza un auto de carreras en ese circuito es de 250 km/h y la mínima es de 120 km/h.



Material 4	Primera Unidad Clase 7		Nombre: ______________ Curso: ________

El gráfico que ves a continuación muestra la velocidad promedio de un auto en el momento que tiene un accidente.



a) ¿Qué año hay más número de accidentes? ¿En qué año es más alta la velocidad promedio de un auto en el momento que tiene un accidente? ¿Qué año hay más número de muertos?

____

____

b) Discute si hay una dependencia entre la velocidad y el número de víctimas (accidentes) ¿Y velocidad con el número de muertos?

____

____

c) El siguiente párrafo fue extraído de una noticia real de un periódico, la cual tenía anexado el gráfico de arriba. Haz un comentario sobre la interpretación que se hace del gráfico en la noticia. ¿Estas de acuerdo?

La velocidad indebida es más peligrosa que la excesiva

Como se muestra en el gráfico "a menos velocidad, más accidentes". Y tal como afirma automovilistas Europeos Asociados (AEA), el peligro de la carretera reside en realidad en la velocidad inadecuada que mantienen los vehículos. Para Francisco Huerta, presidente de esta asociación. "es tan peligroso ir muy deprisa como viajar excesivamente lento. Por este hecho los radares no son la solución real a los problemas de los accidentes". Esta apreciación ha sido defendida por la asociación ya que se ha probado que ha bajado la velocidad media de los conductores. No así los accidentes.

d) Supón que eres Francisco Huerta, Presidente de la asociación AEA. Basándote en el gráfico intenta explicar que la velocidad excesiva no es un factor decisivo en los accidentes automovilísticos. Explica como lo harías.

e) Supón que eres un agente de seguridad vial, Basándote en el gráfico intenta explicar como la velocidad es un factor decisivo en los accidentes automovilísticos. Explica como lo harías.

Abstract for the European PhD Mention

1.Introduction

Nowadays the competence approach has reached most of the European countries. For obligatory education the DeSeCo project (OCDE, 2005; Ryche y Salganik, 2006) has been adopted, and the Tuning Project promoted that universities change their curricular design to the competencies (González y Wagenaar, 2003).

In the Spanish curriculum for obligatory education the competence approach appeared with the basic competencies (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006). The competence model applied in Spain is called "mixed" (Garragori, 2007) as the key competencies has a transversal character (learn to learn competence, autonomy and personal initiative) and also a disciplinary character (linguistic communication competence, mathematical competence), in which the disciplines contributes to the acquisition of the competencies through the school education.

From the perspective of mathematical education several projects, based in the implementation of the mathematical competence approach, have been appearing. We have identified three projects that are significant to us: Paulo Abrantes, who promotes a mathematical competence characterization in Portugal (Abrantes, 2001); the KOM project, by Morgen Niss, in which the mathematical competencies are incorporated in the Danish curriculum (Niss, 2001) and finally the PISA 2003 theoretical framework that adapts the competencies proposed by Niss (1999) and an evaluative approach (OCDE, 2003).

The mathematics curriculum's turn through competencies approach is not present in research. There is an imbalance between the abundance of innovation in mathematical competence, and the empiric researches that investigates them from the mathematical education approach.

In our study we have started this research problem considering the mathematical competence list of the three projects, that converges in the mathematical process notion. Under our point of view, the contribution of the competencies approach to the mathematics curriculum is to structure and focus the curriculum towards the mathematical processes. Taking into account the key competencies proposed by DeSeCo and the basic competencies in Spain, as the competencies are transversal and developed during the school stage, the mathematical processes are also transversal to the thematic cores, and repeated in every educative level. Then, a competence approach is coherent with a curricular structure where the mathematical processes stand out.

In our research the mathematical competence was studied to generate a competence model that was useful to plan a teaching sequence, and also to analyze its development in the mathematics class. The goal was complicated, as there were no previous empirical works in which we could sustain our researching work that intends to develop a theoretical model.

The mathematical competence model is elaborated from the mathematical topic graph interpretation, as we start assuming that the mathematical competencies aren't independent of the mathematical contents. Also, as competencies are developed through the mathematical processes, we intend to know the relation between processes and contents, and also if the processes change depending on the school level.

In our proposal we formulate the contents in terms of mathematical tasks, understood as the mathematical goals of an activity and that are part of the contents to work on; these mathematical tasks change depending on the teaching sequence, and they have a short-term development.

We have taken into account two curriculum organizers that stand out in graph interpretation: modeling and argumentation, that we consider competencies. In graph interpretation the notion of function is introduced, in which the variables dependence and graphs are developed as expressions of the model: that justifies the importance of modeling in that mathematical topic. On the other hand, argumentation stands out as one of the most important aspects of graph interpretation. Interpretation implies that students generate arguments, and that's why we have considered argumentation as a significant competence.

Modeling and argumentation are competencies characterized by processes that shape them. These processes are not characterized in the literature: they have defined modeling stages and argumentative structures but not in terms of processes. Thus, there was another research problem: determining which processes conform every competence.

Moreover, we are interested in finding out how mathematical competencies are progressing and what are the variables affecting that progress. In the mathematical competence model, the progress is studied by the level of complexity of the activity, based on de Lange's pyramid (1995). Our proposal intends to find the way to determine the level of complexity depending on the tasks and processes.

In a competency-based approach it is essential to consider the importance of context in the activities. From our model of mathematical competence, we want to collect information about the role of context in the activities although it is not one of the explicit goals of our research.

The mathematical competence model, based on processes, tasks and levels of complexity, is tested in the study of modeling and argumentation competencies, in a mathematical class in which a teaching unit about functional graph interpretation is applied.

To study the processes it is necessary to focus in the mathematical class, where the interaction between teacher and students occur because there is where the meanings are constructed and negotiated. In this scenario a new problem arises through interaction and the processes that conform every competence. Starting with the case study, we're interested in describing the interaction in the mathematics class in relation to competencies development. In particular, characterize the patterns of interaction in terms of processes of each competence studied, and also to relate the patterns with the level of complexity of the activities presented in the classroom.

From this background, we present as research objective **to characterize a mathematical competence education model in functional graph interpretation**.

The mathematical competence model is composed of tasks, processes and levels of complexity. The central research question is: **¿How are related tasks, processes and complexity in the development of a mathematical competence?**

To try to answer to the research question, four specific objectives are described, which together represents the next steps in our research:

1. **To define a mathematical competence model.**
2. **To characterize the modeling and argumentation competencies, developed in the topic of graph interpretation.**

3. **To characterize the relationship between tasks, processes and levels of complexity in the topic of graph interpretation.**
4. **To describe the interaction in the mathematical class in relation to the competencies development.**

2. Theoretical framework

To develop the mathematical competence model we describe how the notion of competence has been originated in the curriculum from DeSeCo project (OCDE, 2005; Ryche y Salganik, 2006). In particular we describe the three most outstanding projects around mathematical competencies (Abrantes, 2001; Niss, 1999; OCDE, 2003).

Different meanings of mathematical competence are identified (Rico, 2007), to justify that the most appropriate meaning is that competencies are mathematical processes.

From the literature review we conclude that there is no mathematical model in a level of detail that allows both plan and study the class with the competence notion.

In turn, the mathematical competence model is presented, with the following features:

Mathematical literacy: we propose as the starting point of the model the notion of "mathematical literacy" (OCDE, 2003) that we literally translate from the French "culture mathematique".

Mathematical competence: the mathematical competencies are processes that articulate and organize the curriculum at diverse levels. In order to articulate the curriculum, competencies must meet three criteria:

- Integrate a variety of specific mathematical processes related to a mathematical competence.
- Be not totally transverse, that means, not always be present in every activity, which allows the discrimination and organization of the mathematical activities in terms of the mathematical competence that they develop.
- Be meaningful to the school mathematics activity.

Mathematical processes: the meaning of process has been adopted from the NCTM curricular proposal (2003). Each mathematical competence consist of mathematical processes, that are present across all the mathematical content and that are developed at long term.

Mathematical tasks: the term mathematical task has been adapted from Lenhardt et al. (1990) and Chevallard (1999). We propose the mathematical contents to be structured in terms of mathematical tasks. Accordingly, the mathematical activity can be defined as a set of mathematical tasks with a common purpose. The tasks change and progress, at short term, and they become more complex through the school period.

Levels of complexity: the competence progress is determined in terms of activity complexity, that depends on the tasks, and also on the processes that shape them. The term "level of complexity" is adopted from the competence groups of PISA (OCDE, 2003) based on de Lange's pyramid (1995).

After presenting the theoretical model, we studied the mathematical topic, graph interpretation, to characterize the interpretation tasks, and then to study each component of the mathematical competence model: tasks, processes and levels of complexity. In addition a proposal is made about the roles of the context in a mathematical competence framework. Finally, through examples of activities, the incorporation of the processes for the identification of the level of complexity is discussed.

Moreover, we study the patterns of interaction in the mathematics class by adapting the work of Mortimer and Scott (2002), Weed (1995) and Voigt (1998).

Finally, we have studied modeling, highlighting the phases of modeling from Maaß (2006), the work of de Lange (1987) with modeling in terms of mathematization, and the work of Gravemeijer (1987) about emergent modeling. These background have provided a support to characterize the modeling competence.

Similarly, the mathematical argumentation has been explored; the argumentation model of Toulmin (1958) is described and also the Frummehuer (1995) adaptation for mathematics, used by most of the authors that have studied argumentation in mathematics (Stephan y Rasmussen, 2002; Whitneack y Knipping, 2002; Yackel, 2002; Rasmussen et al. 2004; Pedemonte, 2005).

3. Methodology

To test the competence model an experimental study was conducted in Santiago de Chile. We studied the case of Valentina's class, an 8th grade teacher (14-15 years old) who applied a teaching unit called "Analyzing and constructing graphs".

3.1 Data collection

The teaching unit was analyzed before its implementation, with the competence matrix instrument to characterize each activity, identifying the mathematical tasks and their level of complexity depending on the competence. This analysis led the teaching unit adaptation to the research requirements, replacing some activities for others that, a priori, developed high levels of complexity for the two competencies.

The application of the teaching unit was followed with a strategy of non participating observation during five classes. Using video recordings, records were considered focusing in the interaction between teacher and students. Finally the five classes recorded were transcribed.

3.2 Analysis strategy

The strategy to characterize mathematical tasks is already validated by the literature. In contrast the characterization of the processes is not supported the same way, and they arise/emerge from the episodes by an inductive methodology.

Episodes were selected from each class to show a greater richness in the interaction between teacher and students. The unit of analysis corresponded to each of the actions of the episode, both Valentina and students. Each action is characterized by a term indicating the process associated with competence. The strategy followed an approach of constant comparison between the processes that emerged from the analyzed episodes, concluding with the characterization of a process list for each competence.

The stages of modeling have also been characterized in interpreting graphs. Although modeling phases have support in the literature, they are general and not focused on content. Therefore, from an inductive perspective, we have repeated the strategy of constant comparison to identify the phases of modeling episodes. But rather than take each action in the classroom as the unit of analysis, the units correspond to a set of consecutive actions that are associated to a modeling phase.

4. Data analysis

The data analysis consists of two types of analysis, one on the final teaching unit and one on the mathematics class. The teaching unit was analyzed by the competence matrix to identify the mathematical tasks and determine a priori the complexity levels for each competency in the activities.

The analysis of mathematics class was conducted in two stages.
The first stage was aimed to characterize the mathematical processes. Through a strategy of constant comparison, we have obtained a list of processes for each competence. These mathematical processes have been validated by applying criteria of coherence and significance depending on the competence. Later, two judges outside the research, as experts, discussed the relevance and reliability of the processes developed; at the end of the validation a definitive listing of processes was obtained for each of the competencies.

In the second stage of the analysis we present the modeling and argumentation competencies. For each competence tasks, processes, and level of complexity are characterized in the chosen episodes, and the level of complexity a priori and the level of sophistication achieved in the classroom are compared. For modeling competence the stages of modeling are also characterized.

Finally, the patterns of interaction in the mathematics class are analyzed from a perspective of the processes developed.

5. Discussion of the results and conclusions.

In this last research chapter, the discussion of the results and the conclusions are presented. Section 5.1 consists of the systematization of the results and leads them to the research question while discussing them according to the existing literature. In section 5.2 the research conclusions are presented and consists of to answer the research objectives, to reveal the contributions, and to describe which is the prospective that this work is bringing.

5.1 Discussion of the results

There are multiple definitions of the mathematical competence. In our model we describe it from the notion proposed by DeSeCo (Rychen y Salganik, 2006), which potentates aspects that a student should develop transversally to the knowledge that he is acquiring during the obligatory education period, for each one of the disciplines.

In our mathematical competence model, this view for mathematics teaching has been taken into account; therefore we understand competence(s) as aspects of the mathematical knowledge to be developed in a long term, and transversally to the thematic blocks. In order to study this proposal we have focused in a mathematical topic, functional graph interpretation, which *a priori* will enable to investigate these mathematics transversal aspects that are going to be developed: the mathematical competencies.

Each one of these competencies are composed by mathematic tasks, mathematical processes and levels of complexity. The mathematical tasks are aspects of mathematical knowledge that can be developed in a short term and in a mathematical topic, meanwhile the processes are developed in a long term, and they are transversal. Regarding to the levels of complexity, its development depends on the relation between each competence's tasks and processes, which are part of the mathematical activity that conform the teaching sequence.

In our work we have developed two mathematical competencies which we considered relevant for this mathematical topic: modeling and argumentation. In the graph interpretation the notion of function is introduced, and it is where the variables dependence model and the graph as an expression of the model are being developed, and it is justifying the importance of the model in this scenario. On the other hand, the argumentation it is emphasized as one of the most important aspects for the graph interpretation. The interpretation action implies the generation of argumentations by the student, and therefore it is considered as a relevant competence.

In the research our mathematical competence model has been tested with a case study of the application of a teaching unit about the interpretation, with fourteen and fifteen year old students, when it is the first time that they approach the notion of function. The case of a mathematics class has been studied where the teacher, Valentina, puts into practice the teaching unit through eight lessons, five of them have been chosen for the data collection.

Before putting into practice the teaching unit, it was adapted to our model, which means, the activities where characterized in terms of competencies emphasizing the mathematical tasks and the levels of complexity involved. According to this analysis, activities where modified, suppressed, and added, in a way that while the teaching unit was being develop, the level of complexity would increase progressively for each competence.

Two aspects where analyzed: the characterization of the teaching unit in terms of the competence, and the development of the mentioned unit. The analysis was: to characterize and to validate the mathematical processes of each one of the competencies, to develop the modeling and argumentation competencies during the lessons –defining for each one of them the complexity level of the activities- and, finally, to relate the process sequences of the two competencies and to determine the interaction patterns in the class.

During the process, a group of results have emerged and have been organized in nine thematic axes: about the planning of a teaching unit from competencies approach, about the characterization complexity levels -according to each competence and the relation between them-, about the notion of mathematical process and task, about the context function in the activities and, finally, according to the patterns of interaction. These results are grouped in nine thematic axis as follows.

5.1.1 The teaching unit from a competencies approach

Rico and Lupiáñez (2008) outlined a teaching unit from competencies in a structure that promotes tasks -considering its level of difficulty and complexity- and objectives defined from the logic of the action, focusing the learning expectations on the competencies acquisition. Likewise, the competencies assessment is carried out through contents and tasks, coherently organized. Under this perspective, the planning of a teaching unit, globally considers tasks -and its level of complexity- contents and competencies.

Our mathematical competence model has also considered the learning expectation in terms of mathematical competencies relating to content, characterizing them in terms of processes and tasks. This implies that when planning the teaching of content, it is considered, *a priori*, mathematical competencies, processes and tasks that are going to be developed. Like this, during the planning, besides the tasks, also the competencies have been added and characterized by mathematical processes. Its level of complexity can be defined by the relation between tasks and processes involved in an activity. So, the incorporation of levels of complexity in the teaching unit planning helps to give evidences on the competence progress along the mentioned unit.

The notion of mathematical competence becomes introduced in the teaching conception and in the teaching sequences planning. This is one of the contributions of this research, because nowadays there are not so many evidences of curricular designs in this level of concretion in terms of mathematical competencies, even though it is a relevant matter of the educative field.

The obtained results are useful for the creation of teaching units from the competence framework and also for the reformulation of teaching units based on other perspectives.

5.1.2 A methodological design to study the competencies.

Along the study some aspects of the mathematical competence model have been validated, especially in the validation of the mathematical processes that constitute each competence, which is extended until the analysis.

This strategy was initially considered taking into account that it is a study without precedents about the mathematical competencies to this level of concretion. From the beginning of this report, from an unusual theoretical framework, a model of mathematical competence it is proposed emerging from the need to create an own model. One of the results of the bibliographical revision it is to put evidence in the fact that, there is a consensus about the importance of a competency-based education, but we didn't find a proposal that would be suitable to the requirements of our study. In the literature we found theoretical discussions about the competencies or about curricular proposals -which have not been taken into account in the experimental research-, but we didn't find researches focused on the curricular innovation.

Once the mathematical competence model has been elaborated it has also been developed from an experimental study, proposing, first of all, a teaching unit under this focus, so after we could observe its application en a case study.

This study has been realized using a qualitative inductive methodology. From the three components of the model -tasks, processes and levels of complexity- the first has been characterized from the literature about the mathematical topic, the processes have been developed through constant comparison strategy - because they don't come from a theoretical background- and, finally, the levels of complexity have been characterized from the experimental study.

The mathematical tasks have been characterized mainly from the literature related to the s interpretation (Leinhardt et al., 1990; Solar, 2006) and from the description of mathematical tasks that appear in the teaching unit. In the analysis of the data the criterion has been to describe in which way these tasks have been developed in the application of the teaching unit.

The characterization of the processes has been developed through two phases of the analysis. The first one, where the processes that constitute each competence have been analyzed following the strategy of constant comparison, a class session in terms of the competencies has been described for the first time. And the second phase it is the validation of the analysis where each one of the processes were discussed. This validation found support on two judges that in the theoretical level discussed the pertinence and reliability of the elaborated processes; when the validity was finished a definitive list of the processes was obtained for each one of the competencies. These two phases have leaded to a more exhaustive analysis of the data, reflected in the report, and necessary to prove the appropriateness of the induction as a methodological focus for the characterization of the processes. From this focus, meanwhile the analysis was being develop, the definition of each process was being checked, and also their global coherence and the appropriateness to analyze a class through these processes.

The characterization of the mathematical processes, based on an inductive focus, has proved to be a necessary and suitable methodology for its development. It is necessary because referents of experimental investigation in the mathematical processes didn’t exist in the literature. And suitable because the identified processes for each competence enabled us to describe the mathematics class, besides being validated by intern criterion -constant comparison- and extern referees.

The characterization of the levels of complexity has been realized both in the teaching unit and its application. In both cases Lange's pyramid (1995) has been taken when being applied to the development of the PISA project (OCDE, 2003, 2006). It identifies three levels of complexity called competency clusters: reproduction, connection, and reflection. For the teaching unit we have reformulated the three levels, initially defining six levels of complexity because of the need to describe in more detail the competencies progress -modeling and argumentation-. For the case study, in the first analysis, these six levels of complexity have been applied, but observing that so much detail was not so significant, the levels have been readjusted in the second analysis, establishing, finally, four levels of complexity: reproduction, connection, generalization and reflection.

As a consequence of the analysis, the components of the mathematical competence have been characterized; in particular we described the development of the mathematical tasks, we have identified and characterized the mathematical processes involved, and adapted the levels of complexity for the case study. The development of the three components, even though it is carried out under different methodological strategies, it is useful to characterize the entire development of the mathematical competencies in the class.

5.1.3 Level of complexity in the competencies

Due to the fact that one of the substantial aspects of the mathematical competencies it is the characteristic of being developed along the education, it is necessary to have the tools to study the progress of the students in the development of such competencies. In our model of competencies the component that fulfills this function are the levels of complexity, defined in the relation between tasks and processes of a mathematical activity. Four levels have been identified: reproduction, connection, generalization and reflection. In figure 4.4.8 the relations between tasks and processes to define each one of these levels of complexity for the modeling competence, have been described. Figure 4.5.1. Is describing the same for the argumentation competence.

In each one of the activities the levels expected for each competence have been defined *a priori,* and afterwards contrast them with the level really achieved. The results showed an evident progress between levels of complexity, going from a level of connection to a level of generalization. In all the analyzed classes the expected level of complexity corresponds to the achieved level in the application of the activities, except the last class (5) where the level of reflection expected is not achieved.

The progress in the complexity of the activities is continuous from one level to the other. This is a useful criterion to evaluate if the sequence of the teaching unit fulfills the requirement of the activities increasing in the level of complexity. As expected in the characterization of the teaching unit before its application.

One of the contributions of the research it has been to develop a level of complexity for each competence. This result generates controversy in the related literature. In the PISA project (OCDE, 2003, 2006) when talking about the characterization of the competencies, it is also said that is not their aim to develop questions which evaluate competencies. In one question there can be different competencies mixed, so to evaluate them separately becomes artificial and an unnecessary compartmentalization in the mathematical literacy. As a consequence it is proposed “to describe groups of competencies from the cognitive requirements needed to solve different mathematic problems”, which in fact they are the levels of complexity of de Lange's pyramid (1995). This reflection it is already found in a previous project, where it appears the idea of “competency clusters” supported from de Lange’s pyramid (1999).

In the experimental study this vision of the competence has been tested. The PISA study starts from an evaluative principal -it is not its intention to develop competencies but it is so to evaluate them-; therefore, to use levels of complexity that originally where conceived as an evaluation assumptions it becomes really suitable for our purposes. In our case we are under different assumption, as the aim is the development of the competencies, not the evaluation, therefore we are under a teaching assumption.

The progress of the competencies is an aspect that we want to investigate. The description of the three levels suggested by de Lange is used as a criterion to elaborate our own definition based in the idea of process and task. In the subsection 2.3 the incorporation of the processes as a component to define the complexity of an activity has been discussed, the described criterion in the literature to classify an activity in one level or the other (Boertien and de Lange, 1994; de Lange 1995, 1999; Shafer and Foster, 1997; OCDE, 2003, 2006; Dekker and Querelle, 2002; Dekker 2007) sometimes are ambiguous and rarely operative. In our proposal we take care that this criterion would be operative, proposing to classify an activity depending on the relation between its tasks and processes.

Rico and Lupiáñez (2008) explain that the mathematical competencies are not variables of the activity but of the subject, that is to say that its development depends on the mathematics class (teachers and students) and not on the curriculum or a text book; however the mathematical tasks are variables of the activities. If we are agreeing with the fact that the competencies emerge from the subject, our aim is that they are considered in the mathematics teaching, incorporating them explicitly in the curriculum. According to this purpose it is necessary to characterize the main component of the competencies, the processes, in the interaction in the mathematics class, so it can go from being a variable of the subject to a variable of the activity. To identify the processes that constitute the competence implies that they can be taught. So, the tasks and processes being considered variables of the activities, implies that they are taken as a base to determine the progress of the competence. Therefore, the transformation of the processes from variables of the subject to variables of the activity justifies that the relation between these components determines the level of complexity.

5.1.4 Modeling competence

The modeling competence has one more component comparing to the argumentation competence. Besides the tasks and processes, the modeling phases are added; and from the relation between these three components the levels of complexity can be defined.

In the modeling competence it is discussed the characterization of: the processes, the modeling phases and the complexity levels. However the mathematic tasks have only been presented and not discussed like the other components, as they are previously fixed by the contents in the teaching unit of s interpretation and they are the same for any competence, being transversal to the modeling competence.

Eight processes conform the modeling competence, and they can be associated to five modeling phases presented by Maaß(2006): Simplification, matematization, to work mathematically, interpretation, validation. To characterize the model is a process that generally emerges in the simplification phase when identifying the properties of the real model. The process *to interpret the model* implies actions of interpreting the model or its expression (s, table). The actions of setting up are associated to the process *to set up an expression of the model.* Both processes have emerged generally in the mathematization phase (the pass from the real model to the mathematical model), and in less occasions in the phase of interpreting the solution that comes from the mathematical model to the original situation. The process *to identify the model properties* focuses in the properties of the mathematical model; this has been achieved in not so many occasions and in the mathematization phase. The process of applying the model, that implies to use the mathematic model and the corresponding expression to the problematic situation, it is been achieved in few occasions and in the solution interpretation phase. Both processes of *validation* (model characteristics and the model itself) emerge in phases and with different frequencies. The actions related to the validation of the model characteristics have been achieved frequently between simplification and matematization, however the validity of the model emerged in few actions coinciding with the validation phase.

In the same way, the process of *to reflect about the modeling* consists in critical actions about the model, about the modeling phases and the application of the solution to the problematic situation. This process it is associated to metacognitive and attitudinal actions that differ from the modeling phases (Maaß, 2006); in the case study it has been evidenced that this process occurs when the activity incentives the reflection through final questions, but also spontaneously when closing an activity, what it means that it can be related to the interpretation and validation phases in the modeling phases.

Some works associate the competencies to the modeling phase (Kaiser, 2007; Sol et al., 2006), in our study it is evident that there is no complete correspondence, because the processes can be done in any phase. Therefore, following Maaß (2006), the competencies are an aspect that it is developed transversally to the sequence that follows the modeling phases, like we have reflected in the characterization of the processes in the modeling competence.

The development of the eight entire processes is understood as the construction of the model. In the topic of integrating s, to set up the model means: to characterize its elements, to work with its associated expressions, to interpret it, to validate it, the application of it; that is to say, each one of the processes contributes to the construction of the model. This meaning is different than the traditional, which understands the elaboration of the algebraic expression or the as a construction of the model. We follow Gravemeijer (2007) who points the fact that the model it is understood more like a concept than like a model itself, we understand as a model a group of mathematical properties linked to representations which enable to study the situation. In the topic of the interpretation, two examples are "systems of reference" and "dependence between variables". In this last one the algebraic expressions, or numeric, are the expression of the model. Our bet is to introduce the functions through the expression in the studied teaching unit.

In the maps of processes it is evident that the more frequent ones are to *characterize the model* and *to interpret the model*. The validation processes emerge generally from the teacher, the most frequent is to validate the characteristics of the model and in rare occasions it occurs the process *to validate the model*; this last process it is difficult that would emerge because it requires high learning levels of formalization and abstraction.

The rest of the processes emerge in an occasional way, due to the fact that acts in punctual moments. We suppose that the process *to identify the properties of the mode*l it is occurring frequently because the properties generally are discussed in reference to the real model or to the context, without a special interest to do it in the mathematical model. Also, the process *to applicate the model* appears not so frequently because generally the use of the model occurs in actions linked to other processes like to interpret or to construct the expression of the model, but it has been difficult to find actions focused on applying the model already known.

Relating to the modeling phases, and according to the analysis of the episodes, five focuses have been identified in the topic of interpretation: analysis of the real model, analysis of the variables, analysis of the values of the variable, analysis of the mathematic model and analysis of the expression of the mathematical model. These five focuses, differing to the processes, can be identified in a continuous interval of actions that center the attention in one of the five mentioned aspects. These focuses, that are part of the s interpretation, have been associated with the modeling phases suggested by Maaß (2006). The correlation between phases and the modeling focus occurred in the following way: in the simplification phase the real model is analyzed, in the matematization phase it goes to the mathematic world because the variables come into play. The working with the model phase it is focused in the mathematical model and its expressions; the phase of interpretation of the mathematical model it is also focused in the interpretation of its expression and of the variables. Finally, in the validation phase, the actions are centered, mainly, in the validity of the mathematical model but also they validate the four remaining focus (expression of the model, variables and its values). If any of these aspects are refuted then it is to going back to the previous phase. Due to this correspondence between modeling phases and the five focuses, the number of modeling phases it is attributed to the component that groups these aspects.

In order to analyze this component the perspective of the emergent modeling was taken (Gravemeijer, 1999). According to the heuristic design of the emergent modeling, the model starts to stand out as a *model of* the informal strategies of the students. In the course of time the model gradually turns into an entity itself and starts to be used as a *model for* the mathematical reasoning, more formal.

This progress has been characterized in four levels of activity: scenario of the task, referential, general, and formal; the first level is linked and dependent on the context of the task, this dependence disappears gradually until the last level of the model, when it is linked to the mathematical properties independently of the activity context. In our modeling phases the real model it is associated to the referential level, and the mathematic model it is associated to the general or formal level, in a way that in the empiric study the levels of the activity have been used in order to characterize the modeling phases. Consequently the level of complexity in an activity it is determined by the relation between tasks, processes and modeling phases (in terms of the activity).

Along the functional character attributed to this perspective, the emergent modeling has been a good referent due to its didactic character. We share the fact that the models don't change, but the meanings about the model do. The classification *model of/model for,* becomes evident in the development of the teaching unit: the activity of class 1 implies that a Cartesian system would emerge as one of the more efficient systems of reference when identifying points in the plane, this appears as a *model* of the strategies negotiated between Valentina and the students. Also in the class 5, in order to interpret the data expressed in a bar graph the numeric expression and the model have been used to conclude that there is no dependence between variables. In the schema that shows the development of the modeling competence in different classes (figures 4.4.4 – 4.4.11) a continuous progress it is observed from a predominance of the referential activity level to a predominance of a general level.

The levels of complexity in this competence also show a continuous advance from connection to generalization. Meantime the classes are analyzed, the criterion to determine the complexity are improved while they are also more reliable, in a way that, in the last class (5) there is high correlation between processes and expected levels *a priori*, and processes and developed levels; moreover, when these are different there are some explanations found supported in the mathematical competence model or also explanations that are not in a contradiction with our perspective. In the class 5 the level of reflection expected is not achieved. One possible explanation from the perspective of our study is that the model of dependence between variables it is still emerging in the students and didn't reach the level of formal activity; another explanation is that the reflecting process about the modeling wasn't developed by the students.

In the other hand, another explanation from an alternative frame is that it can be a conflict of sociomathematical norms (Yackel and Cobb, 1996) where the students find ambiguous the purpose of the questions, and they are not used to this kind of activities. That is to say, the sociomathematical norms of the students don't enable the activity to be developed as expected. Even though this explanation and the others are not in a contradiction, they have different kind of implications. The explanations from our model have a curricular component; that is why the resolution of the discrepancy between the expected level and the achieved level can be approached from the planning, adapting the activities so they would enable that a reflection about the modeling would emerge and be developed, and that the activity level would be more formal. However the explanation from the norms approach (Yackel and Cobb, 1996) tends to be understood from the class management, focusing in matters like interaction patterns and participation in mathematics.

The processes of validation, in general, are not determined *a priori* because we start from the reasoning that the actions of validation depend more on the management of the class than on the activities. In contrast, it was observed in the study that the process *to validate characteristics of the model* was more frequently achieved and that the criterion could be systematized in order that it could be taken also as a variable of the activity. However, *the process to validate the model* it was presented in so few occasions that with the presented data it is not be possible to set out the identification of such criterion.

From the results of the modeling competence, we set out that the development of this competence depends mainly on the planning, in the sense that depending on the kind of activity and on the teaching sequence, it is possible to determine processes and levels of complexity. If this idea hasn't been developed in depth in this study, the characterization *a priori* of the modeling components, it is a useful result as a teaching implication for researches which would pursue such purpose.

5.1.5 Argumentation competence

The argumentation competence depends mainly on the management of the mathematical class. If a similar process to the modeling competence has been pursued, of characterizing a *priori* the processes and levels of complexity, the processes that emerge in the class are less foreseeable. The argumentation it is generated between subjects and following the same logic, the competence of the argumentation it is intrinsic part of the management. Even so, in the study the processes that form the argumentative structure could be characterized and with curricular teaching implications.

The eight processes which constitute this competence have been inspired by Toulmin's argumentation structure (1958). It has been stated that the episodes obey the argumentative trio: beginning, development, and conclusions. The beginning it is associated with the process *to identify data*, the data are not referred only to enunciates, they are also mathematical data used to develop an argumentation (real model, variables and its values, graphs, table, model).

In the development it is where the majority of processes emerge. The *interpretation of the data* is a process that acts on the same mathematical data enunciated, but instead of being identified, they are interpreted assigning a meaning to them. The process *to validate the data* it is the appraisal of the previous processes that can be negative or positive (refutation). In the argumentative structure data is also justified, this is a process that consists on the explanation of the reasoning that it is carried out to identify or to interpret the data. Likewise the process *to justify* indicates the positive and negative appraisals (refutation). Finally the last process associated to the development it is the backing, which consists on the socially accepted data that don't require a validity and that are supporting the justification.

In the conclusion two processes are emerging, the *reflection about argumentation* that integrates both the reflections about the formulation -and the treated mathematical data- and the reflection about the sequence of the argumentation. The process of the *conclusion* obeys the same function as in Toulmin's model: closing an argumentation.

In the maps of processes it is shown how each one of these processes emerge; the i*nterpretation of the data* is the most frequent process, but there are also maps where the process of *to identify data* it is also predominant and even the process *to justify* emerges. The process *to validate the justification* emerges regularly; meanwhile the process *to validate data* arises not so frequently. These processes of validation generally concern to the teacher, but there can be also several validation students actions. The *reflection about the argumentation* it is a process that it is expected to appear en rare occasions, and indeed in the maps of processes it happens in a casual way, but also it is expected to emerge when the conditions are there created for it, as the case of the activity in the last class, which ends up with a problem that incites the students to reflect about the interpretation and the justification.

One result to remark it is the total lack of actions related to the backing process. The teacher doesn't incite to investigate the backings and either emerges from the students' side. There are different episodes where the data or justifications where refuted and helped for this process to emerge. In the sub episodes 2.2 and 3.1 (maps of processes 4.5.8- 4.5.9) it is discussed the strategy to translate the real model (circuit) to the, and the way to interpret the curves and constants in the circuit it is negotiated. In this negotiation it could have emerged a strategy to interpret the inclination of the slope in the; to focus in the slope it is an action associated to the backings, but it didn't appear in the mathematics class. Also, in the sub episode 2.1 of the last class (map of process 4.5.13) the students didn't understand the questions of the activity about automobile accidents, what it was stated in the number of actions which led to the refutation of the data. This conflict in the argumentative structure gave cause for Valentina to incentive the students to deeply study why the interpretation of the news about automobile accidents is wrong, but this backings didn't emerge. The students developed interpretation and justification processes instead, which only identified the interpretation as incorrect.

Following the results, the process of justification appeared more frequently than expected, showing that it rose for each task. This result was used as a criterion to determine a *priori* the processes in the activity. Likewise it was also observed that the reflection actions were finally developed as the process was developed, but it was stated that in several occasions they are interspersed between actions linked to other process, contributing to the development of such process.

Other aspect to highlight in the argumentation competence it is the relevance that *to interpret data* has in the argumentative sequence. The interpretation it is a process that doesn't appear in Toulmin's argumentative structure nor either in the Krummheuer mathematics adaptation (1995) which have followed the rest of authors who have studied the argumentation in mathematics (Stephan and Rasmussen, 2002; Whitneack and Knipping, 2002; Yackel, 2002; Rasmussen et al.; Pedemonte, 2005). However, in our experimental study it has been evidenced that the interpreting actions are part of the collective argumentation, what arises in the variety of actions in the class episodes where the teacher induces to interpret, is that the students and the teacher interpret, and the teacher validates the justification of the interpretation. That is to say, the interpretation is one of the central aspects of the argumentative sequence in as interpretation topic. In the process map 4.5.13 the fact in the second argumentative sequence it is illustrated. The interpretation is the most frequent action both for the teacher and students. If it wasn't part of the argumentative structure, the characterization of the argumentation would loose richness.

To better understand the nature of the interpretation, in the process map 4.5.13 it can be observed that in the end of the second argumentative sequence about the interpretation, a new cycle has started around the justification. In this sequence the affirmation it is refuted with the data interpretation, so afterwards a justification action would be achieved by the teacher. This behavior reflects that theinterpretation it is in many cases achieved previously to the justification.

Figure 5.1 illustrates the relation established between interpretation and the other components of Toulmin model.[1]

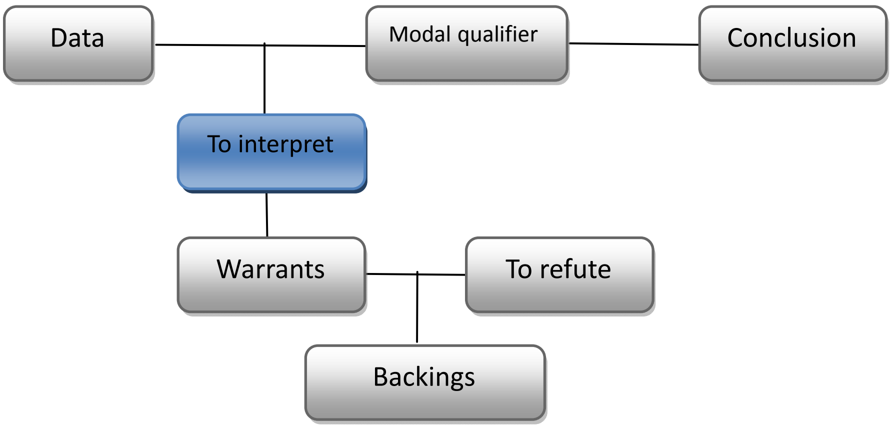


Figure 5.1: Interpretation in Toulmin's model

Likewise in the Krummheuer adaptation (1995) the interpretation has the same function like what is illustrated in figure 5.1, it is useful for supporting data and the warrants.

The interpretation appears in the argumentative structure in the s interpretation topic, however in other mathematical topics the interpretation can be absent, and as an example, the backings would emerge as a process in the class. As a result we support the idea that the argumentative sequence generated depends on the mathematical contents that would come into play, and it is not transversal, like it is supposed in the common studies about mathematical argumentation.

5.1.6 Relation between task and process.

The term *mathematical processes* it is used under different meanings in the mathematics education (Sfard, 1991; Dubinsky, 1991). Our perspective coincides with the NCTM (2003) which proposes the standards of the process. These standards correspond to what we call mathematical competencies. Likewise it can be established certain relation between three or four learning expectations which can be identified for each standard and the processes that conform each competence. In the other hand, the content expectations in the standards correspond to the mathematical tasks in our competence model.

The NCTM proposal represents the first curricular innovation work describing standards of the process for each school period. The aims in each standard are described through examples which show what the standards should take into account for each course, and which should be the role of the teacher to achieve it. This proposal opens a new problematic: in which way the standards are articulated with the contents in the process; in other words, for a content standard, what standards predominate and which are its expectations. In our model, the mathematical competence has been developed this question as one of the aims of the research, articulating the tasks and processes that conform each competence.

Both tasks and processes are determined by the students and the teacher actions. In the teaching unit of s interpretation, the more usual tasks are associated to the interpretation of actions and to the construction of graphs, to the translation between representations, and also to the identification of the variables. At the same time the actions are also linked to processes for each competence. In curricular terms, if this tasks and

[1] We consider warrants associated to the process of justifying in our model.

processes pursue different purposes, its common origin shows that in some occasion are difficult to separate. Figure 5.2. Shows the relation that arises in different class episodes, regarding to the interpreting action. A cluster of actions itself responds to the task “to interpret a”, which at the same time generates the processes *to interpret the model* and *to interpret data* regarding to the modeling and argumentation competencies. Therefore an action cluster shows both the task and the processes of different competencies.

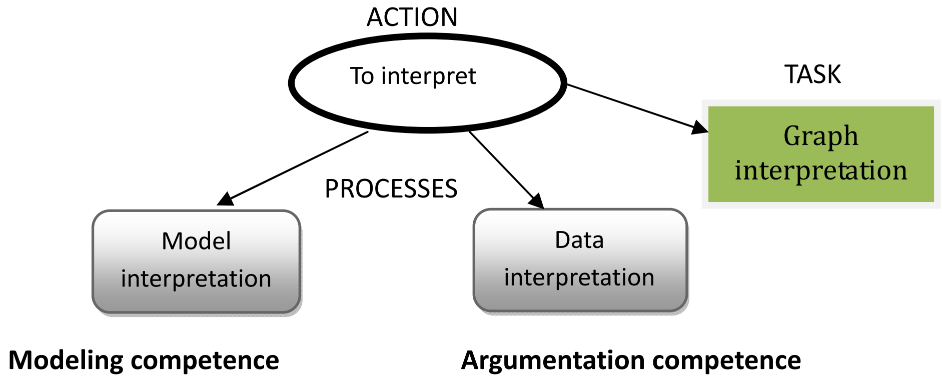


Figure 5.2: Relation between action, task and process

This relation is less evident in other occasions. In an action cluster, regarding to the identification of the variables, it is responding to the same name task. These actions usually generate processes t*o characterize the models* and to *identify data,* which are focused in different aspects.

In the interaction patterns section, when the competencies are being linked, it was observed in different occasions that the process *to characterize the model* corresponds with the *justification process*; this relation occurs in different episodes and not in a particular task. For example, when studying the dependence between variables, the actions to identify the variables and to prove values, in one hand, are associated to the process *to characterize the model*, and at the same time the actions to explain its reasoning are associated to the process *to justify.* This relation it is identified in different tasks like to build system of reference or the graph interpretation.

Reflection actions lead to reflection processes. Regarding to the processes to *reflect about the modeling* and *to reflect about the argumentation*, in several occasions the actions are associated to the two processes simultaneously. Even though it is evidenced a great similarity between these two processes, the reflection in each is different; in the modeling competence there is a reflection about the modeling phases and a critical attitude about its validity and application to the model; however in the argumentation competence there is a reflection about the argumentative sequence or the argumentation importance.

To classify the actions according to tasks and processes, states that the mathematical knowledge, while they are being taught and learned, besides being focused on the content development can be also focused on the processes, features that enable to characterize competencies as aspects to be developed in the long term.

5.1.7 Context function

The context functions haven't been treated in the analysis chapter because this was lead to the four objectives of the research, which consist in the study of the components of each competence and the interaction patterns. For this reason, the context function will be analyzed in this results discussion chapter.

In the competencies discourse, there is a consensus about the role of the context being relevant, so far as it is considered that the competencies should be developed in context. In particular, the discourse about the mathematical competencies, highlight the functional aspect of the mathematical knowledge and the possibility to apply it in different ways, reflexive and perceptive for multiple and many different situations. When investigating in the research literature about context and mathematical competencies, there is a big gap because we didn't find evidences of such researches.

In our model, the competencies are developed by the mathematical activities; therefore the study of the context focuses in the determination of its function in the mathematical activities. Under this perspective, works coming from the Realistic Mathematics Education (RME) have elaborated a serial of criterion about the context function (Treffers and Goffree, 1985; de Lange, 1996; Dekker and Querelle, 2002). From a competence perspective we have organized these criterion to elaborate five functions of the context: to develop mathematical concepts in terms of task; to develop modeling processes; to show mathematics applicability; to develop mathematical processes; and to develop reflective processes.

De Lange (1987) sustains that the more significant it is the context, the more complexity it is reached in the activity. In terms of our mathematical competence model, the more functions that are satisfied in the context, the higher level of complexity the activity is achieving.

Following de Lange (1987) again, the level of abstraction in the mathematization actuates as a regulator of the activity levels of complexity. That is why the results taken in the modeling competence are valuable in order to deal with the context function.

In the subsection 2.3.6 the functions of the context were described through four activities, showing that, the more connected the activity is to a real context, more functions of the context are presented.

The teaching unit about graph interpretation has been elaborated according to the type of content, with extra mathematical activities, under the supposition that the context contributes to give meaning to such activities. In this scenario the context function given for the entire teaching unit it is *to develop mathematical concepts in terms of tasks*.

Processes have been characterized in the four analyzed activities in the case study, in particular those which conform the modeling competence. Therefore the functions *to develop processes* and *to develop modeling processes* have been identified.

In the class 1 activities (find the treasure), class (swimming pools), and class 4 (car races) the context fulfills the three mentioned functions, but the other functions are not achieved in an evident way. It doesn't show the applicability of the mathematics because the situations from its origin use the mathematics, that is to say they are previously mathematized; it is either developing critical attitudes in the students. However in the activity of the last class (5) (automobile accidents), besides achieving the functions of the context already mentioned, it can be also appreciated the necessity to mathematize in order to solve questions, stating the function *to show the applicability of the mathematics*. Also the activity has the purpose to interpret the data with a critical attitude so the function *to develop reflexive processes* is appreciated.

The relation that we sustain in the section 2.3.6, is that the more linked the activity is to a real context more functions of the context are presented, and it also occurs in the analyzed activities of the teaching unit. If we compare this fact with the results of the modeling phases we find a revealing result: there is a correlation between the context functions and the level of abstraction of the model in the activity. Indeed, it is to remember that the teaching sequence in the unity changes from a referential level to a general one, where the model comes from the informal strategies of the students, and a formal and abstract model extensible to various activities (*model of/ model for*) it is induced. However meanwhile the teaching sequence it is carried on more functions of the context are identified, until the last class (5) when all the functions of the context are appearing. Therefore, the more functions the context fulfills the more level of abstraction of the model it is expected in the activity.

Also, the same relation it is found between the functions of the context and the levels of complexity. In the four activities there is a progress from a connection level to a generalization level.

These relations indicate that the teaching unit has a coherent sequence regarding to the complexity, the abstraction in the models and the functions.

The context it is an activity variable, what means that the functions of the context in the activities of a teaching unit are the same for each mathematics class. Instead, the complexity and the abstraction of the model are part of the subject. In the complexity some results are expected *a priori*, it is in the class where processes are being developed and many times they don't coincide with the expected processes. Likewise, if the order of the activities would be altered, for instance, if the automobile accidents activity would go from class 5 to class 1, instead of being a *model for*, it would be a *model of*, and the level of abstraction in the activity would be inferior.

Finally we sustain that the mathematical topic of graph interpretation has been a good tool to show that the context creates meaning, what it means that it is reflected in the five functions of the context in the teaching unit.

5.1.8 Interaction patterns

The fourth aim of the investigation consists in the study of the interaction patterns in relation to the mathematical processes. Some graphs have been elaborated which visualize the two cycles of processes for each competence at the same time, enabling the study of both the sequence of cycles for each competence, and the possible relations between the two competencies.

The cycles are the patterns of interaction identified in the class episodes according to the processes. Four cycles of processes have been identified and are describing a sequence from a closed situation to an open situation. Following the organization of patterns suggested by Mortimer y Scott (2002), the cycle I it is associated to the more traditional pattern of the classroom I-R-E (initiation, response, evaluation). The cycle II it is associated to a similar pattern where the devolution acts as feedback instead of being an evaluative assessment. Cycle III it is associated to a chain I-R-I-R-I-R which determines a negotiated assessment between teacher and students. Finally the cycle IV is a chain which initiated by the student and the teacher answers, and it also ends up with a negotiated assessment. These last cycles are the most open, and are related to a focusing pattern (Wood, 1998) and to a discussion pattern (Voigt, 1995); cycle II represents an intermediate situation (more open than closed). However the cycle I represents a closed situation and can be associated to the funnel pattern (Wood, 1998) and with the elicitation pattern (Voigt, 1995).

The results have shown that meanwhile the class goes on, the patterns of interaction change to more open situations; also, the sequence of the processes that are developed in the mathematical class are more associated to open interaction patterns than to closed interaction patterns.

In the other hand, it is stated that more closed interaction patterns are associated to low levels of complexity (ex. reproduction), instead more open interaction patterns are associated to higher levels of complexity (ex. reflection). This result needs to be interpreted properly: it doesn't mean that the activity itself incites interaction patterns because this depends, mainly, on the interaction between teacher and students in the classroom. But it is evident that in Valentina case the patterns change with one kind of activity or the other. In the revision of the literature there were no evidences found which relate different types of activities with the interaction patterns. The closer work has been Mortimer and Scott (2002) who, in the science class, proposes that on the path from the student model to the scientific model, there should be a progress to a more dialogic communicative approach.

Finally, the two competencies show a high correlation between cycles; even though there are different cases where cycles are not corresponding. This happened generally between the characterization of the model and the justification cycles, where the teachers action, according to the modeling competence, could represent an assessment; and the same action, according to the argumentation competence, it is considered as a non evaluative judgment (justification). This difference evidences that interaction patterns are different according to the competence and therefore they are also different of those ideally founded following the criterion proposed by Mortimer and Scott (2002) or other authors who analyze the discourse in the class without differencing the aspects related to the mathematical content from the rest. In our research we didn't go deep into this subject and the results about interaction patterns which have been achieved without differentiating between competencies.

5.1.9 Mathematical competence model

The mathematical competence model proposed theoretically has been tested in the experimental study where the viability to incorporate the competence focus in the mathematics class has been stated. The presented results in the eight previous points have been achieved through the modeling and argumentation competencies. And some aspects are highlighted, under the mathematical competence model, and they can be interpreted together and with the same competencies development interest. These results are detailed below:

- An instrument which enables to characterize the mathematical processes in the class interaction has been elaborated, which means that these processes become a variable of the subject -coming from being considered a variable of the activity-. This change has an effect on the fact that the processes which constitute a competence could be identified in the teaching unit planning.

The mathematic tasks, mathematic aspects linked to a mathematical topic and with the possibility to be developed in the short term, and the mathematical processes, transversal and able to be developed in the long term, have been differenced. Our proposal substitutes the objectives formulation by processes and tasks in the curricular materials, because in the formulation of a learning aim, at least one mathematic task with an associated process can be identified. The comparison between objectives and the duet task-process wasn't part of the mentioned study and it is now mentioned only as one more element of the discussion in order to show the contributions of our competence model.

The root of our model is the study of the progress of a competence. If the complexity of an activity can be determined through de Lange's pyramid (1995), applied in an extensive way to PISA (OCDE, 2003, 2006), we have pointed with examples that his criterion to determine the complexity of an activity are ambiguous and they lack of the structure where to be based on. However in our model we have taken care in backing the criterion to determine the complexity, also incorporating criterion according to the competence. In the modeling competence we acknowledge the modeling phases function in the progress, adding them as a component of the competence different than the tasks and the processes. We acknowledge recognize that the application of this criterion to define the level of complexity in an activity comes mainly from the subjectivity of the researcher, and probably some criterion could change in a repetition of the study. However, what we emphasize is that these criterions are backed in a structure according to the tasks and processes and it is also expected to keep on improving the complexity criterion from the structure.

Likewise in the study of interaction patterns and context functions in the activity some results have been determined which constitute a contribution to the research in the mathematics education, and from the mathematical competence model are interpreted in order to use them as a criterion, both in the class management, and the in the teaching unit planning. In particular, there are two results enhanced: the established relation between low levels of complexity (reproduction) with closed interaction patterns and high levels of complexity (generalization, reflection) with open interaction patterns; while the context is fulfilling more functions, the activity level of complexity increases.

The four exposed points converge in the idea of the process. To analyze the development of one competence implies that processes can be characterized in the mathematics class; this analysis enables us to study both the expected processes in the activities of the teaching unit and also those who are developed in the class when the teaching unit it is applied. In particular, the expected results development can be evaluated, and also the lack of them. From a planning point of view, these aspects can be interpreted to propose activities focused on enhancing the non developed processes.

Like this, it has been stated that the competence model enables to study: two competencies (modeling and argumentation), the development of content through the mathematic tasks, the mathematical process associated to a competence, the progress of a competence, the context function in the activities, and the interaction patterns in the class regarding to each competence. We showed that the results around these aspects have teaching implications both in the planning and the planning of the mathematic activity. In consequence, the richness of the developed mathematical competence model it is evidenced.

5.2 Conclusions

The research results discussed in the previous section are useful as a support to draw up the research conclusions. Its presentation it is organized in three sections. In section 5.2.1 the associated conclusions are presented associated to the four aims. In section 5.2.2 other contributions are presented, differencing between methodological and theoretical. Finally in section 5.2.3 the prospective of the research is presented.

5.2.1 Research conclusions

The objective which guided the research it is to characterize a teaching model by mathematical competencies in the topic of functional graph interpretation, which has been developed in four specific objectives. How these aims have been achieved it is detailed bellow:

Objective 1: To define a mathematical competence model.

It wasn't possible to find, from the bibliographical revision a mathematical competence model which respond to the research needs. That is why a mathematical competence has been proposed. This model combines three characteristics: the mathematical content in terms of tasks, the processes which organize the curriculum in terms of specific competencies; and the progress of the competence in terms of levels of complexity. This model has been tested and improved in the case study in the mathematics class, where the teaching unit of functional graph interpretation has been applied. It has been stated that the proposed model it is suitable to analyze both the teaching unit and its application in the class, in terms of mathematical competencies. This proposal represents a contribution both from the research and the innovation points of view, because it constitutes a mathematical competence model that has been elaborated from the research with a curricular function; and even more we highlight that there are no previous curricular models described in relation to the mathematical competencies in such level of concretion which enables to plan a teaching sequence and to evaluate its development in the class.

Objective 2: To characterize the modeling and argumentation competencies developed in the graphs and tables interpretation topic.

To present the mathematics competence model, the modeling and argumentation competencies have been developed, and they are especially relevant for this theoretical framework.

Modeling it is remarkable and actual topic in the mathematics education. In this study the modeling competence has been characterized in terms of: mathematical tasks, eight processes that constitute the mathematical competence, four levels of complexity and the modeling phases. This last component initially wasn't foreseen in the characterization of the proposal, but in the tested model it has been identified as a variable that is influent in the progress of the competence. It is been stated that the relations between tasks, processes, and modeling phases defines the activity complexity level. The processes which conform the competence have been characterized from a case study, we highlight that the eight processes as a whole are understood as the model construction. The model has been defined as a group of mathematical properties linked to representations which enable to study the situation; we highlight the fact that the models don't change, but the meanings about the model do.

The modeling competence enables to study in which way the modeling it is developed in a class, considering the level of abstraction of the model, the level of complexity, and the development of the mathematical tasks. These characteristics make the modeling competence being an educational approach because it is focused in the study of the teaching models and the model phases.

The mathematical argumentation It is also a field that nowadays it is relevant for the research: the main studies are supported on the adaptation of Krummheuer's proposal (1995) and Toulmin's model (1958) to analyze the argumentation in the mathematics class. In our proposal, the processes which conform the argumentation competence are also sustained on Toulmin's model, but these are finally characterized in the study case. Obtaining, as a result, eight argumentation processes for the functional graph interpretation processes. Even though the structure is similar to Toulmin's, it is different when incorporating the interpretation process as an important part of the argumentative sequence, due to the fact that the interpretation doesn't appear in Toulmin's model or in the Krummheuer adaptation and it is either highlighted in the relevant literature. This result is a good base to support the idea that the argumentative sequence is related to a mathematical topic, and it is not transversal, as it is shown implicit in the literature about mathematical argumentation in class.

The argumentation competence has a didactic function because the characterization of its components it is a useful structure both for the planning of a teaching sequence and the argumentation development in the class. This competence consists on the study of the mathematical tasks development, the different processes of argumentation which emerge, and the activity complexity level according to argumentation.

Objective 3: To characterize the relation between tasks, processes and levels of complexity for the graphs and tables interpretation topic.

The third objective it is the concretion of the central question of the research in the mathematical topic: How are tasks, processes and complexity linked in the development of a competence? The results have shown that there is a base structure: the levels of complexity identify the cognitive level of a mathematical task regarding the process. This relation can have more variables according to the competence, as in the modeling competence case, where the modeling phases are also a variable of complexity.

An activity can have different levels of complexity according to the competence. As the mathematical tasks are the same for any competence, a component that makes de difference are the mathematical processes that have been developed; and in the case of the modeling competence, the modeling phases can be another factor which determines complexity.

The relation between components it is a contribution to the discussion about activity complexity levels. De Lange (1999) and PISA project (OCDE, 2003, 2006) support the idea that it is not possible to identify the progress according to a competence; in this study this affirmation has been moved, showing that the activity complexity can be defined in relation to a competence. This contribution has been possible mainly due to two causes:

- The described criterion in the literature to classify the activity in one level or the other, in some occasions is ambiguous and hardly operative. In our proposal we took care of this criterion being operative, proposing to classify an activity according to the relation between tasks and processes.

- The components which define the complexity have been treated as a variable of the activity. The processes have been transformed from variables of the subject to activity variables.

Objective 4: describes the interaction in mathematics class in relation to the competencies development.

In this objective two questions where formulated: which are the interaction patterns that characterize the process development? Which of these processes better attend the teacher actions?

Regarding to the first question, four cycles of processes have been identified. Cycle I it is related to the more traditional pattern of the class I-R-E (initiation, respond, evaluation). Cycle II it is associated to a similar pattern where the devolution, instead of being an evaluative valuation, it is acting as a feedback. And cycle III it is associated to a chain I-R-I-R-I-R which ends in a negotiated assessment between teacher and students. Finally the cycle IV it is a chain that starts with the student, the teacher responds and ends up in a negotiated assessment. Cycle I it is a closed interaction pattern, cycle II represents an intermediate situation (more open than closed), meanwhile the last two cycles are open situations where the meanings between teacher and students are negotiated.

The results of the case study have shown that meanwhile the application of the teaching unit moves forward, the interaction patterns changes to more open situations; likewise, the sequence of processes that are developed in the mathematics class it is associated to more open than closed interaction patterns.

Regarding to the second question, from the results it can be evidenced that the teacher is the one who is developing the validation processes, mainly regarding to the model characteristics and the data, and less frequently the process of validation and justification. In the other hand there are processes like the characterization of the model and the identification of the data that are induced but not developed by the teacher.

The students develop the greater part of the processes that constitutes the competencies, but they don't develop, as shown in the *a priori* analysis, the reflection processes. Likewise, in the argumentation competence there is a total lack of the backing process, and in the modeling competence it is not so frequent the process to identify the properties of the model.

In the other hand, it has been enhanced that the closed interaction patterns are related to a low complexity level (ex. Reproduction), instead more open interaction patterns are related to higher levels of complexity (ex. Reflection).

Finally, patterns of interaction are different according to the competence; this result complements the literature about this subject, because the proposed criterion by authors like Mortimer and Scott (2002) analyze the discourse in the class without differencing these aspects from the rest of the mathematic content. Instead, in our study we have differenced the content processes.

5.2.2 Other contributions

During the research other results have been achieved not directly linked to the research objectives, regarding to the content functions in a competence approach, and other methodological and theoretical contributions.

5.2.2.1 About the context:

The use of the term *context* has been saved to refer the teaching sequence activities. Instead the term scenario it is used to referred it to the place where the teaching learning process it is carried out: the class environment, a group of students or other mentioned environments.

In order to develop mathematical competencies, five functions of the context have been defined: to develop mathematic concepts in terms of tasks, to develop modeling processes, to show the applicability of mathematics; to develop mathematical processes; and to develop reflexive processes.

The results showed that, in terms of our model, the more functions the context is fulfilling, the complexity and abstraction level of the activity is higher.

Finally it has been also shown that the graph interpretation has been a good tool to show that the context it is creating meaning, what it is reflected in the fact that meantime the teaching unit is being applied the more functions of the context were satisfied, until arriving to the last class (5) where the five functions of the contexts are fulfilled.

5.2.2.2 Methodological contributions:

In the methodological level, our study offers various contributions basically regarding to the instruments that has elaborated. These developed instruments are useful to study the mathematical competencies.

6 The competencies matrix enables the characterization of the activities of a teaching unit in terms of tasks, competencies and complexity level. In particular, in the development of the modeling and argumentation competencies this instrument has been improved including expected processes according to the competence. This adaptation of the instrument it is useful to contrast the expected processes and complexity levels with the ones obtained during the development of the activity.

7 To strategy to characterize the processes in mathematics are reflected in what is called *processes maps*, which function is to identify the processes that are developed in the class episode according to a competence. The processes maps are useful to describe the class in terms of a competence processes.

8 The *processes graphs* simultaneously visualize the sequences which constitute the processes for both competencies, enabling then the study of the cycle sequence for each competence, and also the possible connection between the two competencies. It is an instrument that it is generated from the processes maps, and makes a difference between the processes that the teacher induces, the processes that the student develops and the process that the teacher develops.

In general terms, the methodological strategy based on an inductive approach has demonstrated being a necessary methodology and appropriate for the characterization of the processes. This represents a relevant contribution because we didn't find in the literature any, referents of experimental investigation about the development of mathematical processes in the class. We highlight the necessity to validate the characterization of processes both internal criterion -constant comparison- and external criterion; in our case external referees have participated as experts, and their analysis has been very useful because they have been used to adapt the processes list to the definitive version.

The mathematics competence model, from a methodological point of view, is an instrument that enables to define the activity level of complexity according to the competence, being this an important contribution because the existing complexity criterion determines the complexity of the activity without considering the mathematical competence as a variable.

5.2.2.3 Theoretical contributions:

The theoretical contributions of this research are presented. From the contributions itself we highlight three aspects:

- To establish the connection between the competence approach and the mathematics teaching. The competence approach, among others, it is offering three contributions: to enhance functional aspect of the learning processes, to develop a critical and reflexive spirit about what is being learnt; to develop competencies in the long term and transversally to the disciplines. For the mathematics teaching these three characteristics have been incorporated to our model: the mathematics functionality, the development of reflection processes for each competence and the development of mathematical competencies in the long term and transversally to the mathematical contents; this last characteristic is the most important connection between the competence approach and the mathematics education.

- To go deeply in the definition of mathematical competence. This is understood as a process -to calculate, to represent, to solve problems, modeling, to argument, etc-, which enables the organization of the mathematics curriculum according to each process. Likewise, the competencies are studied in a particular content, organized in terms of mathematical tasks. Through these processes and the mathematical tasks, a mathematics curriculum can be articulated, identifying its progress in the competence.

- To link the mathematical tasks, the processes, and a competence progress in the development of the teaching: the *complexity levels* identify the cognitive level of a *mathematical task* according to the *process*. This result implies to study the teaching sequence according to the competence, what it is moving forward from the other authors affirmations (de Lange, 1999; OCDE, 2006) who support the idea that the competencies are blurred in an activity, not being possible to differentiate each one of them.

5.2.3.4 Research prospective.

In general this section is linked to the teaching implications of this research, and also to the different paths that this investigation could take in the future.

Sometimes this prospective have a not very significant value in the study and they are not part of the main contributions of the thesis. In our case, this section is not sharing the mentioned situation. Because one of the main characteristics of the study is to set out the results in terms of innovation, there is no subsection for the teaching implications because they have been already presented during the research. In the other hand, this investigation, because it is one of the precursors of the introduction of an experimental study in the class about mathematical competencies, it is giving a panorama that enhances to choose different directions; that is why the prospective is relevant in this work.

The prospective that is presented covers the different focus that the research can take. The two first are centered in the functional graph interpretation; the third and fourth extend the mathematical competence model to other fields, like the learning; the next ones are more general and are related to a mathematical competence research and to where it is possible to bring them.

- According to the mathematical topic treated during the research, the following aspects have been defined about the graph interpretation: which interpretation strategies are the ones being used spontaneously by the students, going from the qualitative to quantitative strategies, the formalization of the interpretation, and the characterization of an interpretation sequence. These aspects have not been treated deeply because they are out of the purposes of our research, but to take up again the teaching and learning of the graph interpretation according to these aspects, it would be a contribution to the functional graphs education in the current panorama.
- The widening of the study to the modeling and argumentation competence in a virtual context; nowadays there are applets focused on the graph interpretation sequenced according to the activity complexity, sufficient condition to apply the competence model. In particular, we are interested to investigate in the processes that emerge in this scenario. Likewise, the virtual environment is favorable to the study of graphs construction, and to investigate the processes which emerge during this action.
- If the case study is been focused in the interaction between teacher and students, the methodology it is also useful to be focused only in the students, giving the possibility to investigate in the mathematical processes that have been developed by the students themselves, in order to identify which processes are appearing in this scenario.
- To extend the data collection to the study of the students enables to carry out a research from the learning approach. In this sense, the following step is to study the acquisition of the competencies where the teacher is aware of the development of such competencies and the model that constitutes it -processes, tasks, and complexity levels-. In this environment interactions between students and its productions can be studied; and as an objective to assess in which way content is being learned on the base of the competencies, what it can be specified in the following questions: In a mathematical competence planning, in which way the students are constructing meanings? Which characteristics are presented the planning based on contents and processes?
- With this research we are opening what it can be called “the research line in mathematical competencies”: in order to identify under which approach this research line is linked, we will remember the

main current perspectives in education. The *cognitive*, was the dominating approach in the past; the *sociocultural,* is nowadays consolidated as an education approach. The mathematical competence line is sharing aspects of both perspectives in one hand it is taking into account the attention focus that have been part of the cognitive approach, as it is the teaching of a content*;* and in the other hand the transversal processes to the contents, mainly those that are developed in the interaction between teacher and students during the exchange and negotiation of meanings. This principal it is characteristic of an education sociocultural perspective. Likewise, the methodological strategies used to characterize the processes in the mathematics class are usually used in sociocultural researches. Therefore the problem to situate the research on mathematical competencies remains open, and it is giving the possibility that due to the kind of questions that are being settled from this research line, it would not be situated in as cognitive approach and either in as sociocultural approach, therefore a perspective according to its interests should be created.

- There is still no sufficient agreement in the definition of mathematical competence, neither in the contribution of the competencies approach to the mathematics curriculum. According to the first one, we expect that the long presentation of the background about mathematical competence contributes as a part of the background to associate the mathematical competencies to the processes that organize the curriculum. At the same time, we expect that the study of modeling and argumentation competencies will be a precedent for the study of other competencies likes to represent, to calculate, to solve problems, both for different contents and educative levels.

- From the year 2007 it has been implemented the competencies curriculum in Spain. It is not being easy to implement them in the class, the most regular argument it is the lack of concretion of the curriculum due to the lack of text books based on competencies and also the lack of curricular exemplification. We believe that the problem is the lack of understanding about the change that a new curriculum is causing, going from a cognitive approach to a more open learning approach, which could be identified as sociological. The fact to consider the subjects as basic transversal competencies, which comes from a multidisciplinary approach, it has been brought to our mathematics competencies proposal. We expect that this connection between competence and mathematics will be acknowledged by the community.

- The mathematic model competence proposed it is useful to study the problems in the mathematics class and also the curricular large-scale problems. Our idea is that this proposal would be useful as a background for more researches on mathematics competencies. We expect that in a close future, when other researches on mathematics competencies line will be existing, a competency-based curriculum will be developed backed on the research.