

# Successions d'interpolació en certs espais de funcions.

Daniel Blasi Babot

Aquesta memòria consta de dos capítols que corresponen a l'estudi de les successions d'interpolació en dos espais de funcions diferents. Al primer capítol s'estudia un problema d'interpolació a l'espai de funcions harmòniques i positives mentre que al segon capítol l'estudi es realitza en espais de tipus Besov. La tesi està basada en tres articles. El capítol 1 correspon a l'article [BN] i el capítol 2 presenta resultats dels articles [BP] i [ABP].

El primer capítol està dedicat a l'estudi de les successions d'interpolació per funcions harmòniques i positives ( $h^+$ ) al disc unitat. Utilitzant la desigualtat de Harnack per funcions harmòniques i positives es planteja un problema d'interpolació que es resol en les dues primeres seccions del capítol provant una condició que caracteritza geomètricament les successions d'interpolació. Per provar la necessitat de la condició es fa ús de la desigualtat de Harnack i del Lema de Hall, un resultat sobre mesura harmònica. Per provar la suficiència, el primer pas consisteix en reduir el problema d'interpolació a un problema d'aproximació a partir del Lema de Farkas, un resultat clàssic d'anàlisi convexa. La prova de la suficiència es completa utilitzant la caracterització de les successions d'interpolació per funcions holomorfes i acotades i un lema força tècnic on es construeixen uns conjunts suportats a la vora del disc amb bones estimacions de mesura harmònica en els punts de la successió d'interpolació. A la tercera secció es mostren condicions equivalents que caracteritzen les successions d'interpolació per  $h^+$  i es resol també un problema d'interpolació per funcions holomorfes i acotades sense zeros. També s'estudia un problema anàleg d'interpolació per funcions harmòniques i positives al semiespai  $\mathbb{R}_+^{d+1}$  en dimensions  $d$  majors o iguals a 2 però en aquest cas s'obté una condició necessària que han de complir les successions d'interpolació que es conjectura com a condició també suficient. Resta doncs com a problema obert provar la caracterització geomètrica completa d'aquestes successions.

Al segon capítol s'estudien les successions d'interpolació als espais de tipus Besov  $B_p(s)$  de funcions analítiques  $f$  amb

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-2+s} dA(z) < \infty,$$

per  $1 < p < \infty$  i  $0 < s < 1$ . També s'estudien les successions d'interpolació pels corresponents espais de multiplicadors  $\mathcal{M}(B_p(s))$ . Aquest capítol consta de cinc seccions, a la primera de les quals es presenten algunes tècniques i resultats coneguts que s'utilitzaran al llarg del capítol. A la segona secció es prova una nova caracterització dels espais de Besov  $B_p(s)$  sense utilitzar derivades i també es presenten algunes propietats del nucli reproduïdor. A la tercera secció s'estudien les mesures de Carleson pels espais  $B_p(s)$  i s'utilitzen per caracteritzar els espais de multiplicadors  $\mathcal{M}(B_p(s))$ . Així mateix s'introdueixen els espais frontera  $L_s^p$  i es proven algunes relacions amb els espais de Besov  $B_p(s)$ . La secció quatre està dedicada a resoldre problemes  $\bar{\partial}$  amb estimacions a  $L_s^p$  i  $\mathcal{M}(L_s^p)$  i aquests resultats s'utilitzen en aquesta mateixa secció per solucionar el problema de la corona a  $\mathcal{M}(B_p(s))$

i per provar un resultat de descomposició de tipus Fefferman-Stein. Finalment a la secció cinc es caracteritzen les successions d'interpolació pels espais de Besov  $B_p(s)$  i pels corresponents espais de multiplicadors  $\mathcal{M}(B_p(s))$ . Les proves d'aquests resultats utilitzen tècniques diverses com ara la desigualtat de Khinchine, fórmules de reproducció o una construcció de funcions analítiques d'interpolació a partir de funcions no analítiques i productes de Blaschke.

## **Interpolating sequences in certain function spaces.**

**Daniel Blasi Babot**

This memory is organized in two chapters that correspond to the study of interpolating sequences in two different spaces. In the first chapter we study an interpolation problem in the space of positive harmonic functions while in the second chapter the study is carried on Besov type spaces. The thesis is based on three articles. Chapter 1 corresponds to the article [BN] and chapter 2 presents results from the articles [BP] and [ABP].

The first chapter is devoted to the study of the interpolating sequences for positive harmonic functions ( $h^+$ ) in the unit disc. Using Harnack's inequality for positive harmonic functions we pose an interpolation problem that we solve in the first two sections of the chapter, proving a condition that provides a geometric characterization of the interpolating sequences. To prove the necessity of the condition we use Harnack's inequality and Hall's Lemma, a result on harmonic measure. To prove the sufficiency, the first step consists on reducing the interpolation problem to an approximation problem due to Farkas' Lemma, a classical result in convex analysis. The proof of the sufficiency is completed using the characterization of the interpolating sequences by bounded analytic functions and a rather technical lemma where we construct some sets in the boundary of the unit disc with good estimations of the harmonic measure in the points of the interpolating sequence. In the third section we show equivalent conditions that characterize the interpolating sequences for  $h^+$  and we also solve an interpolation problem for bounded analytic functions without zeros. We also study an analogous problem of interpolation by positive harmonic functions in the semispace  $\mathbb{R}_+^{d+1}$  for dimensions  $d$  greater or equal than 2 but in this case we obtain a necessary condition that must fulfill the interpolating sequences that we conjecture to be also sufficient. Then, it remains as an open problem to prove a complete geometric characterization of this sequences.

In the second chapter we study the interpolating sequences in the Besov type spaces  $B_p(s)$  of analytic functions  $f$  with

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-2+s} dA(z) < \infty,$$

for  $1 < p < \infty$  and  $0 < s < 1$ . We also study the interpolating sequences for the corresponding multiplier spaces  $\mathcal{M}(B_p(s))$ . This chapter has five sections, in the first of which we

present some techniques and known results that we will use through the chapter. In the second section we prove a new characterization of the Besov spaces  $B_p(s)$  without using derivatives and we also present some properties of the reproducing kernel. In the third section we study Carleson measures for the spaces  $B_p(s)$  and we use them to characterize the multiplier spaces  $\mathcal{M}(B_p(s))$ . Furthermore, we introduce the boundary spaces  $L_s^p$  and we prove some relations with the Besov spaces  $B_p(s)$ . Section 4 is devoted to solve some  $\bar{\partial}$  problems with estimations in  $L_s^p$  and  $\mathcal{M}(L_s^p)$  and we use this results in the same section to solve the Corona problem in  $\mathcal{M}(B_p(s))$  and to prove a Fefferman-Stein type decomposition result. Finally in section five we characterize the interpolating sequences for the Besov spaces  $B_p(s)$  and for the corresponding multiplier spaces  $\mathcal{M}(B_p(s))$ . The proofs of this results use different techniques such as Khincine's inequality, reproducing formulas and a construction of analytic interpolating sequences via non analytic functions and Blaschke products.

[BN] D. Blasi & A. Nicolau, *Interpolation by positive harmonic functions*, J. London Math. Soc. (2), **76** (2007), 253–271.

[BP] D. Blasi & J. Pau, *A characterization of Besov type spaces and applications to Hankel type operators*, per aparèixer a Michigan Math. J. **56** (2008).

[ABP] N. Arcozzi, D. Blasi & J. Pau, *Interpolating sequences on analytic Besov type spaces*, sotmès a publicació (2008).