Soluciones de la ecuación de Beltrami con coeficiente regular

Victor Cruz
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Tesis presentada per aspirar al grau de
Doctor en Matemàtiques

Bellaterra 2011

CERTIFIQUEM que aquesta memòria ha estat realitzada per Victor A. Cruz B., sota la direcció dels Drs. Joan Mateu Bennassar i Joan Orobitg i Huguet.

Bellaterra, setembre del 2011.

Dr. Joan Mateu Bennassar

Dr. Joan Orobitg i Huguet

—Vine a pescar recuerdos con el cebo del paisaje.
José Rubén Romero

A la meva mare i germana, les Letys

Agraïments

Vull donar el meu més sincer agraïment als Professors Joan Mateu i Joan Orobitg per la seva disposició a ensenyar-me però sobretot pels consells i idees. He de dir que la seva paciència és molt gran i que jo l'he posada a prova. Sempre tindré present la claredat a la pissarra per mostrar-me el que jo no sóc capaç de veure. Moltíssimes gràcies per l'experiència de conviure amb vosaltres que mai oblidaré. També vull agrair de forma molt especial al Professor Albert Clop per transmetre el seu entusiasme i motivació al meu treball, una persona sempre disposada a escoltar-me i a treballar amb mi. Quedo en deute amb tots tres.

Agraeixo al Professor Kari Astala pel suport per realitzar una estada a la Universitat de Helsinki i la seva disposició per parlar de Matemàtiques. Als professors Artur Nicolau, Xavier Massaneda, María José González, Albert Clop i Jordi Pau per llegir aquest treball. Al Professor Oscar Palmas pels seus comentaris a aquesta tesis però sobretot les seves paraules i consells que em va donar des de *el otro lado del charco*. Als Professors José A. Gomez, Mario Pineda i César Sousa pels ànims donats per continuar aquesta aventura. Al Professor Isaul Pineda, per mostrar-me per primera vegada les matemàtiques i fer-me canviar el camí. Agraeixo als membres del Departament de Matemàtiques per acceptar-me i a la Universitat Autònoma de Barcelona per donar-me la beca de formació de personal investigador per poder realitzar el doctorat. De manera especial vull donar una altra vegada les gràcies al professor Albert Clop pel suport per acabar aquesta tesis. Al professor Xavier Mora i la seva manera de fer mates, vaig gaudir sent el seu professor de problemes. Als grups d'investigació de l'àrea d'Anàlisi. He d'agrair a tot i cadascun del Departament de Matemàtiques de la UAB que fan un ambient increïble i propici per les Matemàtiques, els professors, alumnes i personal administratiu.

He de dir que després de cinc anys per Barcelona he trobat fantàstica gent que mai oblidaré. Començo amb el Leopoldo i la seva família, Nancy i els petits Zaira i Andreu, moltes gràcies per deixar-me conviure amb vosaltres. També vull agrair al *professor* i amic Set, sempre disposat a ajudar i donar consells. Als meus amics i professors de Català: en David (campió de *balero*) i l'Anna, gràcies pel temps que van conviure amb mi, per ensenyar-me de Catalunya i per corregir-me no només el Català. Als Drs. Albert's per l'ambient de treball al CB/003. Al Zhaoyang, tot i que fins que el meu anglès no va resultar ser prou eficaç vam haver d'utilitzar mètodes una mica arcaics. A tots els companys del despatx CB/003 que van fer que m'agradés anar a treballar cada dia. A l'amiga Elena per la seva sinceritat i visió de les coses. Al Jorge i en Carlos per la seva disposició a escoltar i xerrar amb mi. Als *carnales* Jaime, Vasileios , Luis, Joel, Jorge i Tizoc, que van tenir la mala sort de conèixer-me, tots nous i vells amics que sempre van donar consells i disponibilitat per ajudar. Als amics que vaig conèixer a Catalunya: Anny, Ana i Mauricio, Julian i Lorena, Mariana i Adrian, Salomón i Johanna, Josue, Marianita, Vicente i Pol. Als amics de sempre: Alex, Edgar, Ismael, Israel, Laura, Liber, Leo, Leonel, Rocio, Oziel, Yuval i Nacho; tots sempre recordant coses per fer-me sentir a Mèxic.

Tinc molt clar que sense la meva família mai podria ser aquí. Agraeixo als meus oncles: Paco i Chabe, Gaby, Cristi, Clarita, Natalia i Ma. del Carmen, sempre pendents del nebot i les seves aventures. A la meva àvia Gloria i als avis que ja no hi són. Per últim, però per mi la part més important, aquests, que facis el que facis, són amb tu. Al meu pare i la seva filosofia del que havien de viure els seus fills. Al meu cunyat Doug i les seves classes d'anglès però sobretot, paciència i consells. Als meus nebots *superchobinos* Ale i Pablin sempre disposats a parlar amb el *Tio Vito* i fer-li feliç la setmana. A la meva germana Lety, la seva sinceritat per comentar tot el que faig, els seus consells, el suport i, sobretot, per fer molt bé la seva feina de germana. A la meva mare, què puc dir? sempre donant-me suport, consells, escoltant, deixant coses per coincidir i parlar, per preocupar-se, per tantes coses que segurament m'he deixat.

A tots i cadascun dels que han passat per la meva vida i em van ensenyar alguna cosa valuosa.

Gràcies.

Índice general

Introducción

Consideremos la ecuación de Beltrami

$$\overline{\partial} f(z) = \mu(z)\, \partial f(z), \quad z \in \mathbb{C} \tag{*}$$

donde μ es una función medible definida en el plano y tal que satisface la condición de elipticidad $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. A la aplicación μ se le llama *coeficiente de Beltrami.* Por el Teorema de Morrey [40] de 1938, existe esencialmente una única solución de (*) que es un homeomorfismo y pertenece al espacio de Sobolev $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ (funciones donde tanto la función como sus primeras derivadas parciales pertenecen a $L^2_{loc}(\mathbb{C})$). A esta solución se le llama *μ-quasiconforme* o *K-quasiconforme.* Toda solución en $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ de la ecuación de Beltrami (*) se llama *quasiregular.*

Es conocido que uno puede encontrar una aplicación quasiconforme que puede expresarse de forma explícita como

$$f(z) = z + Ch(z) \tag{0.0.1}$$

donde C es la transformada de Cauchy

$$Ch(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{h(w)}{z - w} \mathrm{d}w$$

y $h(z) = \bar{\partial} f(z)$ (véase *e. g.* Ahlfors [1]). A esta aplicación quasiconforme la llamamos *solución principal.*

Un cálculo sencillo muestra que si f es quasiconforme y ϕ es una función analítica, entonces la composición $\phi \circ f$ es también solución de (*). No sólo esto, mediante el Teorema de Stoilow, podemos relacionar las aplicaciones quasiregulares con la aplicación quasiconforme puesto que *cualquier solución de la ecuación de Beltrami es la* *composición de una función holomorfa con la aplicación quasiconforme* (véase, *e. g.* [3, Teorema 5.5.1]).

Los libros de Ahlfors [1], Astala *et al.* [3], Lehto y Virtanen [32] y Renelt [43] contienen un amplio compendio de resultados clásicos y por tanto, son una referencia obligada. Si nos concentramos en la regularidad de soluciones, el Teorema de Stoilow nos permite concentrarnos únicamente en la solución principal puesto que las aplicaciones holomorfas son infinitamente diferenciables. Un resultado de Mori [39] de 1956 establece que las aplicaciones quasiregulares pertenecen a $\mathcal{C}^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{C})$ para $\alpha < \frac{1}{K} < 1$ donde $K = \frac{1+\|\mu\|_\infty}{1-\|\mu\|_\infty}$. De las estimaciones de Schauder [45] se tiene que si el coeficiente de Beltrami está en la clase $\mathcal{C}^{0,\epsilon}(\mathbb{C})$ (Hölder continua de exponente ϵ) y tiene soporte compacto, entonces la aplicación quasiconforme$f$ pertenece a $\mathcal{C}^{1,\epsilon}(\mathbb{C})$. En este caso se puede ver que la aplicación f es bilipschitz. Recordemos que la propiedad bilipschitz de una función permite preservar todas las propiedades métricas de los conjuntos, en particular la dimensión de Hausdorff.

Desde el punto de vista de las ecuaciones en derivadas parciales, es natural considerar el caso en que los coeficientes están en el espacio de funciones con oscilación media que se anula denotado por VMO. Ejemplo de ello son los trabajos de Chiarenza [8], Chiarenza *et al.* [9], Vitanza [60], entre otros. En el contexto de las aplicaciones quasiconformes, Iwaniec en [24] establece que cuando el coeficiente de Beltrami $\mu \in VMO(\mathbb{C})$ con soporte compacto, entonces $f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ para todo $p \in (1, \infty)$ y por tanto pertenecen a $\mathcal{C}^{0,\epsilon}(\mathbb{C})$ para todo $\epsilon < 1$. En el libro de Ahlfors [1] se demuestra, en particular, que cuando $p > 2$ y el coeficiente de Beltrami $\mu \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ con soporte compacto, entonces la aplicación quasiconforme $f \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{C})$.

El objetivo de esta tesis es presentar resultados de regularidad de la soluciones a la ecuación de Beltrami cuando el coeficiente tiene una cierta regularidad. Más concretamente, si el coeficiente de Beltrami está en ciertos espacios de Sobolev ó Besov entonces las soluciones de la ecuación tienen las derivadas localmente en estos espacios de Sobolev ó Besov. La demostración de este hecho se obtiene a partir de la solución principal. *Dado un espacio de funciones $X(\mathbb{C})$, si el coeficiente de Beltrami $\mu \in X(\mathbb{C})$ tiene soporte compacto y satisface la condición de elipticidad $\|\mu\|_\infty \le k < 1$, entonces la solución principal $f(z) = z + Ch(z)$ y cumple que $h \in X(\mathbb{C})$* (Teorema 2.2).

En el capítulo 4 consideramos, de forma similar al capítulo 2, el estudio de la regularidad de las soluciones para coeficientes de Beltrami que están restringidos a un dominio acotado Ω del plano. La motivación del estudio de la regularidad para coeficientes restringidos a dominios proviene del artículo de Mateu *et al.* [36] donde se considera el caso en que el coeficiente de Beltrami es una función de $\mathcal{C}^{0,\epsilon}(\Omega)$ restringida a un dominio acotado de clase $\mathcal{C}^{1,\epsilon}$ con $0 < \epsilon < 1$. En este caso la solución principal también es bilipschitz. El resultado principal demostrado, que corresponde al Teorema 4.1, es el siguiente: *Sean* $0 < \alpha < \epsilon < 1$ *y* $1 < p < \infty$ *tal que* $\alpha p > 2$. *Consideremos un dominio acotado* Ω *con frontera de clase* $\mathcal{C}^{1,\epsilon}$ *y* μ *una función medible soportada en* Ω *tal que* $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. *Entonces, si* $\mu \in X^{\alpha,p}(\Omega)$, *entonces la solución principal de la ecuación de Beltrami es* $f(z) = z + Ch(z)$, *donde* $h \in X^{\alpha,p}(\Omega)$ *y donde* $X^{\alpha,p}(\Omega) = W^{\alpha,p}(\Omega)$ *ó* $B^{\alpha}_{p,p}(\Omega)$. La propiedad bilipschitz de la solución principal queda garantizado por el resultado de Mateu *et al.* en [36].

La prueba de los resultados presentados, lleva al estudio de la invertibilidad del *operador de Beltrami* $I - \mu B$ donde B es la transformada de Beurling. Dicha idea fue presentada por Iwaniec en [24] y utiliza métodos del análisis funcional y armónico. Iwaniec demostró que cuando $\mu \in VMO(\mathbb{C})$, el operador de Beltrami es invertible como operador de $L^p(\mathbb{C})$ en si mismo para todo $1 < p < \infty$. En el artículo de Astala *et al.* [4] probaron que si el coeficiente de Beltrami $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$ con soporte compacto, el operador $I - \mu B$ tiene inverso acotado en $L^q(\mathbb{C})$ para $q \in (1 + k, 1 + \frac{1}{k})$ donde $k = \|\mu\|_\infty$. Este resultado se deduce del teorema de distorsión de área de Astala en [2] y de argumentos de la teoría de pesos.

En el capítulo 3, consideramos el espacio de Lebesgue con pesos $L^p(\omega)$ donde ω es de la clase de Muckenhoupt A_p. El resultado principal dice que el operador de Beltrami $I - \mu B$ es invertible en $L^p(\omega)$ cuando ω es un peso de A_p. Para ello demostramos que el conmutador $[\mu, B]$ es un operador compacto en $L^p(\omega)$.

Como ya mencionamos, en el capítulo 4 consideramos el estudio de la regularidad de la solución principal para coeficientes de Beltrami que están restringidos a un dominio acotado Ω del plano. Un primer problema es la continuidad de la transformada de Beurling restringida al dominio. Al restringir un operador de convolución a un dominio este deja de ser de convolución. Meyer estudió en [38, 37] que los operadores de Calderón-Zygmund que no son de convolución son continuos en espacios de Sobolev y Hölder definidos en $\mathbb{R}^n$. También Lemarie en [33] estudió esto en los espacios de Besov. Ambos utilizaron la condición $T1 = 0$. Nosotros demostramos para ciertos espacios de funciones definidos en un dominio Ω de $\mathbb{R}^n$ que si T es un operador de Calderón-Zygmund de tipo par, la condición que $T\chi_\Omega$ pertenezca al espacio de funciones $X(\Omega)$ (donde χ_Ω es la función característica en Ω) equivale a que T sea acotado de $X(\Omega)$ en $X(\Omega)$. Un problema abierto es conocer cómo son los dominios Ω para los cuales es posible aplicar el resultado. Tolsa demostró en [54] que en la clase de dominios cuya parametrización de la frontera pertenece a $W^{2-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R})$ se satisface $B\chi_\Omega \in W^{1,p}(\Omega)$

y, por tanto, la continuidad de la transformada de Beurling. En los casos $W^{\alpha,p}(\Omega)$ y $B^{\alpha}_{p,p}(\Omega)$ con $\alpha p > 2$ basta con que la frontera sea de clase $\mathcal{C}^{1,\epsilon}$ con $\alpha < \epsilon < 1$.

Por último, en el capítulo 5 consideramos una generalización de la ecuación de Beltrami obtenida al aumentar el orden de las derivadas parciales. En particular, consideramos la ecuación tipo Beltrami:

$$\bar{\partial}^{\,2} f(z) = \mu(z)\, \partial^2 f(z).$$

Recordemos que la solución principal de la ecuación de Beltrami (*) es biyectiva. Al garantizar la existencia y unicidad de soluciones del tipo

$$f(z) = \frac{z^2}{2} + C^2 h(z)$$

bajo ciertas condiciones de normalización, claramente la solución no es biyectiva. Sin embargo, el primer sumando de la expresión nos hace pensar que pudieran tener la propiedad dos a uno. El Ejemplo 5.0.1 muestra que esta propiedad no se cumple en general.

Para terminar con esta introducción, a lo largo de esta tesis C será una constante que no depende de cantidades importantes y puede representar una constante diferente en cada aparición (a menos que utilicemos explicitamente un subíndice). En algunas ocasiones necesitaremos constantes C que dependan de ciertos parámetros, en cuyo caso se denotará por subíndices. Además, $A \lesssim B$ indicará que $A \leq CB$ y $A \approx B$ si $A \lesssim B \lesssim A$.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo recordaremos las definiciones y algunas propiedades sobre espacios de funciones y operadores necesarios para la lectura del trabajo. Cabe mencionar que las definiciones y resultados presentados pueden presentarse en un contexto más general, para lo cual sugerimos consultar, los libros de Grafakos [21], Stein [50] ó Triebel [55].

1.1. Espacio de funciones L^p

Un subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un *dominio* si es abierto y conexo. En este trabajo denotaremos la clase de *funciones continuas* $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ por $C(\Omega)$. Para $k \in \mathbb{N}$, denotamos la clase de *funciones con derivadas continuas de orden* k por $C^k(\Omega)$. El *soporte* de una función f, denotado por $\operatorname{supp} f$, es el conjunto

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega\colon f(x) \neq 0\}}.$$

donde la barra superior denota la adherencia del conjunto. La clase de funciones que tiene derivadas de cualquier orden se denotará por $C^\infty(\Omega)$. Dos subclases importantes de la clase anterior son las clases de funciones $C_c^\infty(\Omega)$ y $C_0^\infty(\Omega)$, que representan la clase de funciones con derivadas de cualquier orden cuyo soporte es compacto y la clase de funciones con derivadas de cualquier orden que se anulan en el infinito, respectivamente.

Sea (X, μ) un espacio de medida y consideremos $1 \leq p < \infty$. Denotamos la clase de *funciones p-integrables en X* como $L^p(X)$ al conjunto de funciones medibles f que

satisfacen
$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} := \left(\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$
En nuestro caso, $X = \Omega \subset \mathbb{R}^n$ o directamente $X = \mathbb{R}^n$ y la medida utilizada será la medida de Lebesgue $\mu = m$, de esta forma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}m(x)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

El espacio $L^p(\Omega)$ con la norma $\| \quad \|_{L^p(\Omega)}$ es un espacio de Banach, si $1 \leq p \leq \infty$.

En el caso que $p = \infty$, el espacio $L^\infty(\Omega)$ es la clase de funciones acotadas y la norma está dada por
$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \text{ess sup}_{x\in\Omega}|f(x)|.$$
Es conocido que la clase de funciones $C_c^\infty(\Omega)$ es un subconjunto denso de $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$ pero no para $p = \infty$.

Diremos que una función f es *localmente p-integrable* si $f \in L^p(U)$ para cada subconjunto compacto U de Ω. La clase de funciones localmente p-integrables se denota por $L^p_{loc}(\Omega)$. Mediante la desigualdad de Hölder, es fácil ver que $L^q_{loc}(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$ si $p < q$. Denotaremos los espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$ por L^p y $\| \quad \|_{L^p(\Omega)}$ por $\| \quad \|_p$ cuando no se preste a confusión.

Para poder definir la *clase de Schwartz,* definimos una familia de seminormas sobre la clase de funciones $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dado un par de multi-índices α y β, sea

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha \frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta}(x)\right|.$$
Decimos que la función f pertenece a la *clase de Schwartz sobre* $\mathbb{R}^n$ si $\rho_{\alpha,\beta}(f) < \infty$ para todo α y para todo β. Esta clase se denota por $S(\mathbb{R}^n)$.

Un ejemplo de una función de la clase $S(\mathbb{R})$ es

$$\phi(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t}\right), & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
Además la función, para $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi\left(1 - |x|^2\right)$$

pertenece a la clase $S(\mathbb{R}^n)$. Observemos que se tienen las siguientes inclusiones entre clases de funciones,
$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Una propiedad importante es que la clase de funciones $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (y por tanto la clase de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$) es densa en $L^p(\mathbb{R}^n)$ si $1 \leq p < \infty$. Definimos el espacio de *distribuciones temperadas*, denotada por $S'(\mathbb{R}^n)$, a la colección de todos los funcionales continuos definidos en $S(\mathbb{R}^n)$ con valores en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

1.2. Espacios de Lorentz

Los espacios de Lorentz son una *escala* intermedia entre los espacios L^p.

Definición 1.2.1. La *función de distribución* d_f de una función f está dada por

$$d_f(t) := m\{x \in \Omega : |f(x)| > t\} = |\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}|$$

para todo $t \geq 0$.

La función de distribución d_f depende del valor absoluto de f y puede tomar el valor $+\infty$. Las funciones de distribución tienen, entre otras, las siguientes propiedades.

Proposición 1.2.1. Supongamos que f, g son funciones medibles y consideremos un escalar λ distinto de cero. La función de distribución d_f es no-negativa, decreciente y continua por la derecha en $[0, \infty)$. Más aún

1. Si $|g| \leq |f|$ casi para todo punto, entonces $d_g \leq d_f$.
2. $d_{\lambda f}(t) = d_f\left(\frac{t}{|\lambda|}\right)$ para todo $t \geq 0$.
3. $d_{f+g}(t_1 + t_2) \leq d_f(t_1) + d_g(t_2)$ con $t_1, t_2 \geq 0$.

Definición 1.2.2. Supongamos que f es una función medible. La *reordenada decreciente de f* es la función f^* definida en $[0, \infty)$ por la regla

$$f^*(t) = \text{ínf}\{s : d_f(s) \leq t\}$$

para todo $t \geq 0$.

Para una función f general, si primero formamos la función de distribución d_f y después la función de distribución d_{d_f} de d_f (con respecto a la medida de Lebesgue m en $[0, \infty)$) obtenemos el reordenamiento decreciente f^*. Esto es una consecuencia inmediata de las identidades

$$f^*(t) = \sup\{s : d_f(s) > t\} = d_{d_f}(t)$$

para todo $t \geq 0$. Dicha relación se obtiene de la definición del reordenamiento decreciente, el hecho que d_f es decreciente y la definición de función de distribución. Además, se tiene la relación

$$d_{f^*} = d_f.$$

Proposición 1.2.2. Supongamos que f, g son funciones medibles y consideremos un escalar λ distinto de cero. El reordenamiento decreciente f^* es no negativo, decreciente y continuo por la derecha en $[0, \infty)$. Además,

1. Si $|g| \leq |f|$ casi para todo punto, entonces $g^* \leq f^*$.
2. $(\lambda f)^*(t) = |\lambda| f^*(t)$ para todo $t \geq 0$.
3. $(f+g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$ con $t_1, t_2 \geq 0$.
4. $(|f|^p)^* = (f^*)^p$ para cualquier $0 < p < \infty$.

Utilizando la función de distribución y la reordenada decreciente de una función f tenemos si $0 < p < \infty$, entonces

$$\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x = p \int_0^{m(\Omega)} s^{p-1} d_f(s) \mathrm{d}s = \int_0^{m(\Omega)} f^*(t)^p \mathrm{d}t.$$

Definición 1.2.3. Sea $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$. Definimos el *espacio de Lorentz* con índices p y q, denotado por $L^{p,q}(\Omega)$ a la clase de funciones tales que la cantidad

$$\|f\|_{L^{p,q}(\Omega)} := \left(\int_0^{m(\Omega)} t^{\frac{q}{p}} f^*(t)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

en el caso que $q < \infty$ y por

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t)$$

cuando $q = \infty$.

Es fácil ver que $L^{\infty,q} = \{0\}$ para $q < \infty$ y $\| \quad \|_{L^{\infty,\infty}} = \| \quad \|_\infty$. Además, de la definición de la norma en espacios de Lorentz y la integración mediante la función de distribución, tenemos que $\| \quad \|_{L^{p,p}} = \| \quad \|_p$ para toda p (notemos que $|f^p|^* = (f^*)^p$). Es posible demostrar la desigualdad del triángulo para $\| \quad \|_{L^{p,q}}$ si $1 \leq q \leq p$ y que la norma de Lorentz es equivalente, mediante la función de distribución, a la presentada a continuación.

Proposición 1.2.3 (Norma en el espacio de Lorentz mediante la función de distribución)**.**

$$\|f\|_{L^{p,q}} = p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty s^q \, d_f(s)^{\frac{q}{p}} \frac{\mathrm{d}s}{s} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

En los espacios de Lorentz, al igual que en los espacios L^p, se tiene la desigualdad de Hölder.

Teorema 1.1 (Desigualdad de Hölder en espacios de Lorentz)**.** Si $0 < p_1, p_2, p < \infty$ y $0 < q_1, q_2, q \le \infty$ tales que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$, entonces

$$\|fg\|_{L^{p,q}} \le C \|f\|_{L^{p_1,q_1}} \|g\|_{L^{p_2,q_2}}$$

donde $C = C(p_1, p_2, q_1, q_2)$ es constante.

Es conocido que si $m(\Omega) < \infty$ y $p < q$, se tiene la inclusión $L^q \subset L^p$. De forma similar, en el caso de espacios de Lorentz se tienen las siguientes inclusiones.

Teorema 1.2 (Inclusiones entre espacios de Lorentz)**.** Sean $1 \le p, q, P, Q \le \infty$.

1. Si $q < Q$, entonces $\|f\|_{L^{p,Q}} \le C \|f\|_{L^{p,q}}$. Es decir,

$$L^{p,q} \hookrightarrow L^{p,Q}.$$

2. Si $p < P$, entonces $(m(\Omega))^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^{p,q}} \le C (m(\Omega))^{-\frac{1}{P}} \|f\|_{L^{P,Q}}$. Es decir,

$$L^{P,Q} \hookrightarrow L^{p,q}.$$

La inclusión $L^{P,Q} \subset L^{p,q}$ no es válida si la medida de Ω es infinita. Observemos que sin importar si la medida de Ω es finita o no, se tiene $L^p \subset L^{p,\infty}$. Al espacio $L^{p,\infty}$ se le conoce como L^p-*débil.* Otra caracterización de la norma en los espacios de Lorentz se obtiene utilizando la dualidad de $L^{p,q}$.

Teorema 1.3 (Caracterización dual de los espacios de Lorentz)**.** Sea $1 < p < \infty$ y $1 \le q \le \infty$. Para toda $f \in L^{p,q}$,

$$\|f\|_{L^{p,q}} \approx \sup \left\{ \left| \int_\Omega f \bar{g} \mathrm{d}m(x) \right| : \|g\|_{L^{p',q'}} \le 1 \right\}$$

donde $\approx$ representa que las dos cantidades son comparables con constantes que dependen de p y q. Además, la hipótesis $f \in L^{p,q}$ puede cambiarse por f y g no negativas.

En la sección 1.9, caracterizaremos el espacio de Lorentz mediante la interpolación real de espacios de Lebesgue.

1.3. Espacios de Hölder

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $0 < \gamma \leq 1$.

Definición 1.3.1. Una función f que satisface la condición

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\gamma \tag{1.3.1}$$

para $x, y \in \Omega$ es *Hölder continua o Lipschitz continua de exponente* γ.

Toda función Hölder continua es uniformemente continua.

Definición 1.3.2.

1. Si $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ es acotada y continua, entonces

$$\|f\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

2. La γ-seminorma de Hölder de $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ está dada por

$$[f]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\gamma}$$

   y la γ-norma de Hölder se define como

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} = \|f\|_\infty + [f]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}.$$

3. El espacio de Hölder $\mathcal{C}^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ consiste de todas las funciones $f \in C^k(\bar{\Omega})$ para las cuales la norma

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} := \|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [\partial^\alpha f]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}$$

   es finita.

Observación 1.3.1.

1. $\mathcal{C}^{k_2,\gamma_2}(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{C}^{k_1,\gamma_1}(\bar{\Omega})$ si $k_1 + \gamma_1 \leq k_2 + \gamma_2$.

2. $C^1 \subsetneq \mathcal{C}^{0,1}$ pero $\mathcal{C}^{0,1}$ es *cercano* a C^1. Por el Teorema de Rademacher, toda función Lipschitz continua es diferenciable casi para todo punto y las primeras parciales son acotadas (véase [16, pág. 281]).

1.4. Las clases de funciones $BMO(\mathbb{R}^n)$ y $VMO(\mathbb{R}^n)$

Denotamos por f_B al promedio de la función f sobre la bola B, es decir,

$$f_B = \frac{1}{|B|}\int_B f(x)\mathrm{d}x.$$

Las *funciones de oscilación media acotada*, son las funciones localmente integrables para las cuales la expresión

$$\|f\|_* = \sup\left\{\int_B |f(x) - f_B|\mathrm{d}x\right\}$$

es finita y donde el supremo es tomado sobre todas las bolas en $\mathbb{R}^n$. Es conocido que la caracterización es equivalente para bolas o cubos. El espacio de funciones de *oscilación media acotada* es denotado por $BMO(\mathbb{R}^n) = BMO$. En general, la expresión $\|f\|_*$ no es una norma pero sí una seminorma.

Una clase importante de funciones a lo largo de este trabajo es la clase de funciones con *oscilación media que se anula* denotada por $VMO(\mathbb{R}^n)$ y definida como la adherencia de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ en la norma de $BMO(\mathbb{R}^n)$. Debido a la desigualdad

$$\|f\|_* \leq 2\|f\|_\infty$$

tenemos que las funciones continuas que se anulan al infinito C_0 pertenecen a dicha clase.

1.5. Espacios de Sobolev

Decimos que $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$ con $\alpha_i \in \mathbb{N}$ para todo $i = 1, \dots, n$ es un *multi-índice* y escribimos $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Denotamos por D^α a la α-ésima derivada parcial, es decir,

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f.$$

Sean $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Decimos que g es la *derivada débil* ó *en el sentido de las distribuciones* de f de orden α, denotado por $D^\alpha f = g$ si se satisface la relación

$$\int_\Omega (D^\alpha \phi(x)) f(x)\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g(x)\phi(x)\mathrm{d}x$$

para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Definición 1.5.1. Sean $1 \leq p < \infty$ y $k \in \mathbb{N}$. Definimos el *espacio de Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$ como el conjunto de funciones $f \in L^p(\Omega)$ tal que para cada multi-índice α tal que $|\alpha| \leq k$ las derivadas en el sentido de las distribuciones $D^\alpha f$ pertenecen a $L^p(\Omega)$. La norma en este espacio está dada por

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_p.$$

Es posible definir los espacios de Sobolev de orden *fraccionario.* Para tal efecto, consideremos primero el núcleo de Bessel G_α por

$$G_\alpha = \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$$

donde $\mathcal{F}^{-1}$ es la transformada inversa de Fourier.

Definimos el *espacio de potenciales de Bessel* $G_\alpha(L^p(\mathbb{R}^n))$ como el conjunto de las funciones f que pueden escribirse como $f = G_\alpha * g$ para alguna $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

En el libro de Stein [50, teorema 3, capítulo V] se muestra que los espacios de potenciales de Bessel $G_\alpha(L^p(\mathbb{R}^n))$ y de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ son equivalentes cuando $k \in \mathbb{N}$. Esta relación nos motiva a definir los espacios de Sobolev de orden fraccionario.

Definición 1.5.2. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. El *espacio de Sobolev fraccionario* $W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de todas las aplicaciones $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para las cuales $G_\alpha * f$ pertenece a $L^p(\mathbb{R}^n)$.

En el caso particular cuando $0 < \alpha < 1$ tenemos la siguiente caracterización para el espacio de Sobolev fraccionario.

Lema 1.5.1. Sea $0 < \alpha < 1$, $\frac{2n}{n+2\alpha} < p$. Entonces, $f \in W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y

$$D_\alpha f(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}} \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{2}} \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Entonces $\|f\|_{W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \approx \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|D_\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

Cabe mencionar que existen otras normas equivalentes en el espacio $W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ y para lo cual referimos al trabajo de Strichartz [52].

De suma importancia son las inclusiones entre los espacios de Sobolev, Lebesgue y Hölder. Mostramos algunos de ellos en el siguiente Teorema

Teorema 1.4 (Corolario 9.13 en [6])**.** Sea $k \geq 1$ y $p \in [1, \infty)$.

1. $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ donde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ si $\frac{1}{p} - \frac{k}{n} > 0$.

2. $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$, para toda $q \in [p, \infty)$ si $\frac{1}{p} - \frac{k}{n} = 0$.

3. $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$, si $\frac{1}{p} - \frac{k}{n} < 0$.

Todas estas inclusiones son continuas. Más aún, si $k - \frac{n}{p} > 0$ no es un entero, sean $s = [k - \frac{n}{p}]$ y $\theta = k - \frac{n}{p} - s$ para $0 < \theta < 1$. Entonces para toda $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leq C\|f\|_{W^{k,p}}$$

para todo multi-índice α con $|\alpha| \leq k$ y

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| \leq C\|f\|_{W^{k,p}}|x - y|^\theta \quad \text{c. p. t. } x, y \in \mathbb{R}^n$$

y para todo multi-índice α con $|\alpha| \leq k$. En particular,

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \subset C^s(\mathbb{R}^n). \tag{1.5.1}$$

Decimos que $A(\mathbb{R}^n)$ es un *álgebra de funciones* si para $f, g \in A(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $fg \in A(\mathbb{R}^n)$ y existe una constante C tal que,

$$\|fg\|_{A(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{A(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{A(\mathbb{R}^n)}.$$

Como ejemplo de un álgebras de funciones tenemos a los espacios de Sobolev $W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ cuando $\alpha p > n$. Otros ejemplos de álgebras de funciones son los espacios de Besov para ciertos índices que se tratarán en la siguiente sección.

Por otra parte, para todo α y $1 < p < \infty$, la clase de funciones $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es densa en $W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ (véase [56, pág. 172]). Por último, mostramos el siguiente lema sobre inclusiones en los espacios de Sobolev.

Lema 1.5.2 (Observación 2 pág. 206 en [56])**.** Para todo $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$ y $1 < p < \infty$ se tiene

$$W^{\alpha_2,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{\alpha_1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Relacionado con los espacios de Sobolev, tenemos los espacios de Besov y Triebel-Lizorkin. Estas clases de funciones pueden entenderse como una escala diferente entre espacios de Sobolev. En la siguiente secciones estudiaremos otros espacios de funciones de interés para esta tesis.

1.6. Espacios de Besov

Consideremos $0 < \alpha < 1$ y $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{si } |x| > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Sea $\psi_0 = \psi$ y definamos $\psi_j(x) = \psi(2^{-j}x) - \psi(2^{-j+1}x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $j \in \mathbb{N}$. Como $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x) = 1$ para $x \in \mathbb{R}^n$, la familia $\{\psi_k\}$ es una partición de la unidad.

El *espacio de Besov* $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de las funciones f tales que

$$\|f\|_{B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \|(\psi_j \hat{f})\check{}\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/q} \tag{1.6.1}$$

es una cantidad finita para $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$ y donde el símbolo $\hat{}$ representa la transformada de Fourier y por $\check{}$ su inversa (véase, por ejemplo, [55, pág. 45]).

Otra forma de caracterizar estos espacios de Besov es mediante el siguiente lema que utiliza las primeras diferencias de una función y cuando $0 < \alpha < 1$ (para más detalles véase [50, pag. 151]).

Lema 1.6.1 (Caracterización del espacio de Besov)**.** Para $0 < \alpha < 1$ y $1 \leq p, q \leq \infty$, son equivalentes

1. $f \in B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$
2. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y satisface

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{q}+\alpha}} \right)^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{q}{p}} \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

En la sección 1.9, se introducirá otra caracterización de los espacios de Besov utilizando la interpolación real de espacios de funciones.

Una propiedad importante que utilizaremos en esta tesis es el hecho de que cuando $\alpha p > n$ y $1 \leq p, q \leq \infty$, el espacio de Besov $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de funciones. Además, se tiene que la inclusión $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^n)$ es compacta en el caso $\alpha p > n$ (véase [55, pág. 145]).

Por otra parte, de forma análoga a los espacios de Sobolev, el espacio $C^{\infty}_c(\mathbb{R}^n)$ y $S(\mathbb{R}^n)$ son densos en $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ para $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$ y $1 < q < \infty$ (véase [56, pág. 172]).

1.7. Espacios de Triebel-Lizorkin

Si permutamos las normas en la expresión 1.6.1 de la definición de los espacios de Besov, obtenemos una escala distinta de espacios. Consideremos ψ_j como en la sección anterior. El *espacio de Triebel-Lizorkin* $F^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de las funciones f tales que

$$\|f\|_{F^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} ((\psi_j \hat{f})\check{})^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

es una cantidad finita para $0 < p \leq \infty$ y $0 < q \leq \infty$ y donde el símbolo $\hat{}$ representa la transformada de Fourier y por $\check{}$ su inversa (véase, por ejemplo, [55, pág. 45]).

Los espacios $F^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ son álgebras de funciones en el caso que $0 < p < q \leq \infty$ y $\alpha p > n$ (véase el corolario en la subsección 2.8.3 en [55, pág. 146]) y la clase de funciones $C^{\infty}_c(\mathbb{R}^n)$ es densa para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $1 < p, q < \infty$.

Un hecho importante es la identificación de los espacios de Sobolev con el espacio de Triebel-Lizorkin, es decir,

$$W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) = F^{\alpha}_{p,2}(\mathbb{R}^n).$$

En el caso entre los espacios de Besov y Triebel-Lizorkin se tiene que éstos coinciden, cuando $p = q$, $B^{\alpha}_{p,p} = F^{\alpha}_{p,p}$. Además, entre estos espacios se tiene las siguientes inclusiones

$$B^{\alpha}_{p,\text{mín}\{p,q\}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{\alpha}_{p,\text{máx}\{p,q\}}(\mathbb{R}^n).$$

1.8. Operadores de Calderón-Zygmund. Las transformadas de Riesz, Cauchy y Beurling

Recordemos que un *núcleo estándar* es una función medible K definida en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ que toma valores en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ que satisface:

1. $|K(x,y)| \lesssim \frac{1}{|x-y|^n}$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,
2. $|K(x,y) - K(x',y)| \lesssim \frac{|x-x'|}{|x-y|^{n+1}}$ si $|x-y| \geq 2|x-x'|$.

De esta manera, T es un *operador de Calderón-Zygmund* ó *integral singular* si para cada $f \in C^{\infty}_c(\mathbb{R}^n)$ existe un núcleo estándar K tal que

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) \mathrm{d}y$$

y T se extiende a un operador continuo en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Dado un operador integral singular T, definimos el *operador integral singular truncado* como

$$T_\epsilon f(x) = \int_{|x-y|\geq\epsilon} K(x,y)f(y)\mathrm{d}y, \qquad x \notin \operatorname{supp} f$$

y el *operador integral singular maximal* mediante la relación

$$T^* f(x) = \sup_{\epsilon>0} |T_\epsilon f(x)|\,.$$

Sea $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$. Definimos el operador conmutador de T y b para $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ como

$$C_b f(x) = [b,T]f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))K(x,y)f(y)\mathrm{d}y. \tag{1.8.1}$$

Los operadores de Calderón-Zygmund son acotados en L^p y también los conmutadores C_b.

Teorema 1.5. Si T es un operador de Calderón-Zygmund, entonces para $1 < p < \infty$ existe una constante C tal que

$$\|Tf\|_p \leq C\|f\|_p.$$

La constante C es menor o igual que $A \operatorname{máx}\{p, p'\}$ donde A depende de la dimensión n, la constante en las condiciones (1) y (2) en la definición del núcleo de Calderón-Zygmund y la acotación para T en L^2.

A continuación presentamos un ejemplo de núcleo de Calderón-Zygmund.

Ejemplo 1.8.1. Supongamos que Ω es una función de clase C^∞ definida en la esfera $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ con integral cero, entonces

$$K(x,y) = \Omega\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)\frac{1}{|x-y|^n}$$

se puede probar que es un núcleo de Calderón-Zygmund. En particular, sea $z \in \mathbb{C}$, entonces

$$K(z,w) = \frac{1}{(z-w)^2}$$

es un núcleo de Calderón-Zygmund.

Proposición 1.8.1. Si T es un operador de Calderón-Zygmund, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $t > 0$, entonces

$$m\left(\{x : |Tf(x)| > t\}\right) \leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\mathrm{d}x$$

Sean $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, se define la *convolución de dos funciones f y g* , denotada por $f * g$, como la función

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}m(y).$$

Es inmediato de la definición que la convolución es conmutativa, es decir, $f*g = g*f$. Además que con respecto a la diferenciabilidad

$$\partial^\alpha(f * g) = f * (\partial^\alpha g) = (\partial^\alpha f) * g.$$

Decimos que el operador T con núcleo K es de *convolución* si

$$Tf(x) = K * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\mathrm{dy}.$$

Consideremos el núcleo de Calderón-Zygmund $K(z, w) = \frac{1}{(z-w)^2}$ del ejemplo 1.8.1, entonces

$$Tf(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{f(w)}{(z-w)^2}\mathrm{d}w = \int_{\mathbb{C}} \frac{f(z-w)}{w^2}\mathrm{d}w = \left(\frac{1}{w^2} * f\right)(z),$$

es decir, el operador T es de convolución.

Definimos la familia de operadores *potenciales de Riesz* mediante la regla:

$$I_\alpha(f)(x) = \gamma(\alpha, n)\int_{\mathbb{R}^n} f(y)|x-y|^{\alpha-n}\mathrm{d}y$$

para $0 < \alpha < n$. La constante $\gamma(\alpha, n)$ está dada por la relación

$$\gamma(\alpha, n) = \frac{2^{n-\alpha}\Gamma((n-\alpha)/2)}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(\alpha/2)}$$

donde Γ es la función gamma usual.

La condición $\alpha > 0$ es necesaria para garantizar que $|x|^{\alpha-n}$ sea localmente integrable.

Proposición 1.8.2. Para $f \in S(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$I_\alpha(f) = (\hat{f}(\xi)|\xi|^{-\alpha})\check{}.$$

Las propiedades de homogeneidad del operador implican que aplica L^p en L^q sólo si $1/p - 1/q = \alpha/n$. Es decir,

Teorema 1.6 (Hardy-Littlewood-Sobolev)**.** Si $1/p - 1/q = \frac{\alpha}{n}$ y $1 < p < n/\alpha$, entonces existe una constante $C = C(n, \alpha, p)$ tal que

$$\|I_\alpha f\|_q \leq C\|f\|_p.$$

La constante C satisface $C < C(n, \alpha)\,\text{mín}\left\{(p-1)^{-(1-\frac{\alpha}{n})}, \left(\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{p}\right)^{-(1-\frac{\alpha}{n})}\right\}$.

Observemos que el Teorema 1.6 implica que los operadores $I_\alpha\colon L^p \to L^q$ es continuo cuando $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$.

En el caso de espacios de Lorentz, para los potenciales de Riesz, se tienen los siguientes resultados.

Teorema 1.7. Sea $0 < \alpha < n$. Los potenciales de Riesz I_α son acotados de L^1 en $L^{\frac{n}{(n-\alpha)},\infty}$ y de $L^{\frac{n}{\alpha},1}$ en L^∞.

En el artículo [5] de Bagby, se muestra, además que I_α aplica $L^{\frac{n}{\alpha},1}$ en C_0.

Comenzamos ahora la discusión de las transformadas de Cauchy y Beurling que será de vital importancia en este trabajo.

Definición 1.8.1. Definimos la *transformada de Cauchy* de una función f de la clase de Schwartz por

$$Cf(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(w)}{z-w}\mathrm{d}w$$

para $z, w \in \mathbb{C}$.

Si $f \in S(\mathbb{C})$, se puede demostrar

$$\|Cf\|_* \leq C\|f\|_2.$$

Esta desigualdad se traduce en que la transformada de Cauchy de una función de L^2, es un elemento de BMO;

$$C\colon L^2 \to BMO.$$

Es conocido que la transformada de Cauchy es continua de L^p con $2 < p < \infty$ en $\mathcal{C}^{0,\gamma}$ con $\gamma = 1 - \frac{2}{p}$. Además,

$$[Cf]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{C})} \leq C_p\|f\|_p$$

donde $C_p \leq \frac{12p^2}{p-2}$.

Observemos que podemos escribir la transformada de Cauchy como un operador de convolución

$$Cf(z) = \left(\frac{1}{\pi w} * f\right)(z).$$

Para $f \in S(\mathbb{C})$ se tiene

$$\begin{aligned}
\bar\partial Cf(z) &= \bar\partial\left(\frac{1}{\pi w} * f\right)(z)\\
&= \left(\bar\partial\left(\frac{1}{\pi w}\right) * f\right)(z)\\
&= f(z)
\end{aligned}$$

pues $\frac{1}{\pi w}$ es la solución fundamental del operador $\bar{\partial}$. Si $f \in L^p$ para $1 < p < \infty$ se tiene
$$\bar{\partial} Cf = f.$$

Además, si f es una función de Schwartz,
$$\partial Cf(z) = \lim_{\epsilon \to 0^+} -\frac{1}{\pi} \int_{|z-w|>\epsilon} \frac{f(w)}{(z-w)^2} \mathrm{d}w = -VP\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(w)}{(z-w)^2} \mathrm{d}w.$$

Definición 1.8.2. La *transformada de Beurling* B se define como el valor principal de la integral
$$Bf(z) = -VP\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(w)}{(z-w)^2} \mathrm{d}w.$$

Observemos que B es un operador de Calderón-Zygmund cuyo núcleo es
$$-\frac{1}{\pi(z-w)^2}.$$

Para funciones $f \in S(\mathbb{C})$, la relación entre la transformada de Cauchy y la de Beurling está dada por
$$\partial Cf(z) = \partial \left(\frac{1}{\pi w} * \bar{\partial} f \right)(z) = \left(\frac{1}{\pi w^2} * \bar{\partial} f \right)(z) = Bf(z).$$

Ahora, presentamos el siguiente resultado sobre la transformada de Beurling en espacios de Sobolev de exponente entero. Cabe mencionar que la proposición 1.8.3, podemos cambiar la transformada de Beurling por cualquier operador de convolución.

Proposición 1.8.3. La transformada de Beurling satisface $B\colon W^{1,p}(\mathbb{C}) \to W^{1,p}(\mathbb{C})$. En general, si $k \in \mathbb{N}$
$$B\colon W^{k,p}(\mathbb{C}) \to W^{k,p}(\mathbb{C}).$$

Demostración. Observemos que la transformada de Beurling B es un operador de convolución con núcleo $-\frac{1}{\pi z^2}$, es decir,
$$Bf(z) = \left(-\frac{1}{\pi w^2} * f \right)(z).$$
Si $k \geq 1$, de las propiedades de diferenciabilidad de la convolución tenemos,
$$\partial^k Bf(z) = \left(-\frac{1}{\pi w^2} * \partial^k f \right)(z) = B\left(\partial^k f\right)(z).$$
Esto termina la demostración.

□

En el caso de espacios de Sobolev de exponente $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ utilizamos la caracterización mediante potenciales de Bessel. Sea $f \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$, entonces existe $g \in L^p(\mathbb{C})$ tal que $f(z) = G_\alpha * g(z)$. Mediante el Teorema de Fubini y dado que B es un operador continuo en $L^p(\mathbb{C})$ tenemos

$$\begin{aligned} Bf(z) &= \left(-\frac{1}{\pi w^2} * f\right)(z) \\ &= \left(-\frac{1}{\pi w^2} * (G_\alpha * g)\right)(z) \\ &= \left(G_\alpha * \left(-\frac{1}{\pi w^2} * g\right)\right)(z) \\ &= G_\alpha * Bg(z) \end{aligned}$$

Esto implica que $Bf \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$. Mediante la Proposición 1.8.3 y utilizando el método de interpolación compleja podemos obtener la misma conclusión en el caso de los espacios de Sobolev fraccionarios. Esto es parte de nuestra siguiente sección.

1.9. Interpolación real y compleja

Comenzamos esta sección con dos resultados clásicos de interpolación. El primero debido a Riesz (1926) y Thorin (1938) y el cual es la base de la interpolación compleja. El segundo es debido a Marcinkiewicz (1939) y Zygmund (1956) y se considera precursor del método de la interpolación real.

Para comenzar, recordemos que

$$L^p + L^q = \{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} :\ f = f_0 + f_1,\ f_0 \in L^p,\ f_1 \in L^q\}.$$

Teorema 1.8 (Interpolación de Riesz-Thorin)**.** Sea T un operador lineal de $L^{p_0} + L^{p_1}$ en $L^{q_0} + L^{q_1}$, donde $1 \leq p_0, q_0, p_1, q_1 \leq \infty$ tal que

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^{q_0}} &\leq C_0 \|f\|_{L^{p_0}} && \text{para todo } f \in L^{p_0} \\ \|Tf\|_{L^{q_1}} &\leq C_1 \|f\|_{L^{p_1}} && \text{para todo } f \in L^{p_1} \end{aligned}$$

Para $0 < \theta < 1$, definimos p y q por

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Si $1 < q < \infty$, entonces T aplica L^p en L^q y

$$\|Tf\|_{L^q} \leq C_0^{1-\theta} C_1^{\theta} \|f\|_{L^p}$$

para $f \in L^p$.

Ahora mencionamos el Teorema de interpolación de Marcinkievicz. Para tal caso recordemos que T es un operador cuasi-lineal si para algún $C \geq 1$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y para todo f, g en el dominio de T,

$$\begin{aligned} |T(\lambda f)| &= |\lambda||Tf|, \\ |T(f+g)| &\leq C(|Tf| + |Tg|). \end{aligned}$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $C \geq 1$.

Teorema 1.9. Sean $0 < r \leq \infty$, $0 < p_0 \neq p_1 \leq \infty$, $0 < q_0 \neq q_1 \leq \infty$ y consideremos dos espacios de medida (X, μ) y (Y, ν). Sea T un operador cuasi-lineal definido en $L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X)$ que toma valores en el conjunto de las funciones medibles de Y o sobre un conjunto de funciones simples de X en Y. Supongamos que para algunos $M_0, M_1 < \infty$ las siguientes estimaciones de tipo débil son válidas

$$\begin{aligned} \|T(\chi_A)\|_{L^{q_0,\infty}} &\leq C_0 \mu(A)^{1/p_0}, \\ \|T(\chi_A)\|_{L^{q_1,\infty}} &\leq C_1 \mu(A)^{1/p_1} \end{aligned}$$

para todo subconjunto medible de $A \subset X$ de medida finita. Fijemos $0 < \theta < 1$ y sean

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \\ \frac{1}{q} &= \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \end{aligned}$$

Entonces existe una constante C que depende de $K, p_0, p_1, q_0, q_1, C_0, C_1, r, \theta$ tal que para toda f en el dominio de T y en $L^{p,r}(X)$ se tiene

$$\|T(f)\|_{L^{q,r}} \leq C\|f\|_{L^{p,r}}.$$

Observemos que $L^{p,\infty} \subset L^{p_0} + L^{p_1}$ y por lo tanto, el operador T está bien definido en $L^{p,r}$ para toda $r \leq \infty$.

Como una aplicación del Teorema de Marcinkiewicz, presentamos la siguiente.

Lema 1.9.1. Un operador de Calderón-Zygmund T es continuo de $L^{p,r}$ en $L^{p,r}$. Es decir, satisface $T\colon L^{p,r} \to L^{p,r}$ y la estimación

$$\|Tf\|_{L^{p,r}} \lesssim \|f\|_{L^{p,r}}.$$

Demostración. Por la proposición 1.8.1,

$$|\{x : |T(\chi_E)(x)| > t\}| \leq C\frac{|E|}{t}.$$

De esta forma sabemos que

$$\|T(\chi_E)\|_{L^{1,\infty}} \leq C|E|$$

para todo conjunto medible E.
Ahora recordemos que $L^p \subset L^{p,\infty}$ y que para $1 < p < \infty$, por el Teorema 1.5, los operadores de Calderón-Zygmund son acotados en L^p,

$$\|T(f)\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

De esta manera,

$$\|T(\chi_E)\|_{L^{p,\infty}} \leq \|T(\chi_E)\|_{L^p} \leq C_p \|\chi_E\|_p = C_p |E|^{\frac{1}{p}}.$$

Por el Teorema 1.9,

$$\|T(f)\|_{L^{q,r}} \leq C\|f\|_{L^{p,r}}.$$

□

En particular, para la transformada de Beurling tenemos que

$$\|B\,f\|_{L^{2,r}} \leq C\|f\|_{L^{2,r}}$$

para $r \leq \infty$.

Para el caso de potenciales de Riesz, mediante el Teorema 1.7 y el Teorema de Marcinkiewicz 1.9, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.10 (Hardy-Littlewood-Sobolev para potenciales de Riesz en espacios de Lorentz [5])**.** Supongamos que $0 < \alpha < n$ y $1 < p < q < \infty$ con $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} > 0$. Si $1 \leq r \leq \infty$, entonces para $f \in L^{p,r}$

$$\|I_\alpha f\|_{L^{q,r}} \leq C\|f\|_{L^{p,r}}.$$

Es decir, el potencial de Riesz I_α es un operador lineal acotado de $L^{p,r}$ en $L^{q,r}$.

Para terminar esta sección, enunciamos las definiciones y resultados sobre interpolación real y compleja que utilizaremos a lo largo de este trabajo.

Definición 1.9.1. Sea A un grupo abeliano escrito de forma aditiva. Si $c \geq 1$ es una constante, una *c-cuasinorma* $\|\cdot\|$ es una función definida en A que toma valores reales que satisface

1. $\|a\| \geq 0$ y $\|a\| = 0$ si y sólo si $a = 0$.

2. $\| -a\| = \|a\|$ para $a \in A$.

3. $\|a+b\| \leq c(\|a\| + \|b\|)$ para $a, b \in A$.

Decimos que $(A, \|\cdot\|)$ es un *cuasigrupo normado.*

Definición 1.9.2. Un *espacio vectorial cuasinormado* es un espacio vectorial que es cuasinormado y donde la cuasinorma satisface $\|\lambda a\| = |\lambda|\|a\|$ para todo escalar λ.

Ejemplos de espacios vectoriales cuasinormados, son espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$. Si $0 < p < \infty$, tenemos que

$$\|f+g\|_p \leq \text{máx}\{1, 2^{\frac{1-p}{p}}\}(\|f\|_p + \|g\|_p).$$

Entonces $L^p(\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial cuasinormado para $0 < p < \infty$.

Es conocido que los grupos cuasinormados son espacios métricos (véase, por ejemplo [56]). Por otra parte, a un espacio vectorial cuasinormado y completo se le llama *cuasi-Banach.*

Los espacios L^p son cuasi-Banach si $0 < p \leq \infty$. De hecho son Banach si $1 \leq p \leq \infty$.

Definición 1.9.3. Sean A_0 y A_1 grupos cuasinormados. Decimos que (A_0, A_1) es una *pareja de interpolación* (cuasinormada) si existe un grupo cuasinormado $\mathcal{A}$ tal que $A_0 \subset \mathcal{A}$, $A_1 \subset \mathcal{A}$ con inclusiones continuas.

Si (A_0, A_1) es una pareja de interpolación, entonces los conjuntos $A_0 \cap A_1$ y $A_0 + A_1$ son subgrupos de $\mathcal{A}$ donde

$$A_0 + A_1 = \{a \in \mathcal{A} : a = a_0 + a_1; a_j \in A_j\}.$$

Definimos

$$\begin{aligned} \|a\|_{A_0 \cap A_1} &= \text{máx}\{\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}\}, \\ \|a\|_{A_0 + A_1} &= \inf_{\substack{a = a_0 + a_1, \\ a_j \in A_j}} \{\|a\|_{A_0} + \|a\|_{A_1}\}. \end{aligned}$$

Lema 1.9.2. Si (A_0, A_1) es una pareja de interpolación, entonces $A_0 \cap A_1$ y $A_0 + A_1$ son grupos cuasinormados.

La idea de la teoría de interpolación es encontrar grupos A_θ tales que $A_0 \cap A_1 \subset A_\theta \subset A_0 + A_1$ donde A_θ es intermedio entre A_0 y A_1.

De acuerdo con el Teorema de Riesz-Torin y Marcinkiewicz, los resultados sobre acotación de operadores, utilizan operadores lineales o sublineales. De forma similar, en la teoría de interpolación más general, consideraremos homomorfismos, es decir, aplicaciones $T\colon A \to B$ tales que $T(a+b) = T(a) + T(b)$ y $T(-a) = T(a)$.

Definición 1.9.4. Sean A, B grupos cuasinormados y consideremos $T\colon A \to B$ un homomorfismo. La cuasinorma de T está dada por

$$\|T\| = \|T\|_{A\to B} = \sup_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ a\neq 0}} \frac{\|Ta\|_B}{\|a\|_A}.$$

Decimos que T es *acotado* si $\|T\| < \infty$.

Sean $t \in (0,\infty)$ y $a \in A_0 + A_1$, entonces la *K-funcional* está dada por

$$K(t,a) = K(t,a;A_0,A_1) = \text{ínf}\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}\}.$$

Definición 1.9.5. Consideremos (A_0, A_1) una pareja de interpolación. Si $0 < \theta < 1$ y $0 < q < \infty$, sea

$$\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} = \left(\int_0^\infty [t^{-\theta}K(t,a)]^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.9.1}$$

para $a \in A_0 + A_1$. Denotamos $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ al conjunto de $a \in A_0 + A_1$ para los cuales (1.9.1) es finita.

El número θ es el parámetro de interpolación y q es parámetro fino. Por ejemplo, si $p_0 < p$ entonces

$$(L^{p_0}(\mathbb{R}^n), L^{p_1}(\mathbb{R}^n))_{\theta,q} = L^{p,q}(\mathbb{R}^n) \tag{1.9.2}$$

donde

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

y $p_0 \le q$. Por tanto los espacios de Lorentz pueden obtenerse mediante la interpolación real de espacios L^p.

Otra caracterización de los espacios de Besov, es la obtenida mediante la interpolación real entre el espacio L^p y el espacio de Sobolev, es decir, para $0 < \alpha < 1$,

$$(L^p(\mathbb{R}^n), W^{1,p}(\mathbb{R}^n))_{\alpha,q} = B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n). \tag{1.9.3}$$

Teorema 1.11 (Interpolación de operadores)**.** Sean (A_0, A_1) y (B_0, B_1) dos parejas de interpolación y consideremos T un homomorfismo de $A_0 + A_1$ en $B_0 + B_1$ acotado $A_j \to B_j$ con cuasinormas M_j para $j = 0, 1$. Entonces T es acotado $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ en $(B_0, B_1)_{\theta,q}$ para θ, q y

$$\|T\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}\to(B_0,B_1)_{\theta,q}} \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

Como una aplicación del Teorema anterior, consideremos la transformada de Beurling B. Sabemos por el Teorema 1.5 que $B\colon L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$ y dado que B es un operador de convolución, para $k \geq 1$ con $k \in \mathbb{N}$, $B\colon W^{k,p}(\mathbb{C}) \to W^{k,p}(\mathbb{C})$. Entonces

$$B\colon B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C}) \to B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C}) \tag{1.9.4}$$

para $1 \leq q \leq \infty$ y $0 < \alpha < k$.

Teorema 1.12 (Propiedades elementales de interpolación real)**.** Sean (A_0, A_1)una pareja de interpolación, $0 < \theta < 1$ y $0 < q < \infty$. Entonces

1. $(A_0, A_1)_{\theta,q} = (A_1, A_0)_{1-\theta,q}$
2. $(A_0, A_1)_{\theta,q} \subset (A_0, A_1)_{\theta,Q}$ si $q \leq Q$
3. Si $A_0 = A_1$ entonces $(A_0, A_1)_{\theta,q} = A_0 = A_1$
4. $\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} \leq C_{\theta,q}\|a\|^{1-\theta}_{A_0}\|a\|^{\theta}_{A_1}$ para $a \in A_0 \cap A_1$.

Pasamos ahora a mostrar de forma muy sintetizada el método de interpolación compleja. Nos restringimos al caso de espacios de Banach.

Definición 1.9.6. Sea $0 < \theta < 1$. Decimos que $a \in [A_0, A_1]_\theta$ si y sólo si existe una función $f(z)$ con $z = x + iy$, tal que:

1. $f(z)$ es holomorfa, acotada en la banda $0 < x < 1$ y que toma valores en $A_0 + A_1$ con valores continuos sobre las lineas frontera $x = 0$ y $x = 1$.
2. $f(iy)$ es continua y acotada con valores en A_0.
3. $f(1 + iy)$ es continua y acotada con valores en A_1.
4. $a = f(\theta)$.

Consideramos la norma para $[A_0, A_1]_\theta$ a

$$\|a\|_{[A_0,A_1]_\theta} = \inf_f \max\{\|f(iy)\|_{A_0}, \|f(1 + iy)\|_{A_1}\}.$$

En este caso, diremos que $[A_0, A_1]_\theta$ es un *espacio de interpolación de exponente θ.*

Como ejemplo, tenemos que

$$[L^{p_0}, L^{p_1}]_\theta = L^p$$

si

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

con $0 < \theta < 1$.

Otro caso interesante para nuestro trabajo, son los espacios de Sobolev fraccionarios. En el caso $0 < \alpha < 1$, se pueden caracterizar como el espacio de interpolación de exponente α entre $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, es decir

$$[L^p(\mathbb{R}^n), W^{1,p}(\mathbb{R}^n)]_\alpha = W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 1.13 (Interpolación compleja de operadores)**.** Sean $[A_0, A_1]$ y $[B_0, B_1]$ dos parejas de interpolación de espacios de Banach y $T\colon A_j \to B_j$ para $j = 0, 1$ un homeomorfismo entre parejas de interpolación. Entonces $T\colon [A_0, A_1]_\theta \to [B_0, B_1]_\theta$ es continuo. Más aún,

$$\|T\|_{[A_0,A_1]_\theta \to [B_0,B_1]_\theta} \leq \|T\|_{A_0 \to B_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1 \to B_1}^{\theta}.$$

En el caso de los espacios L^p, del Teorema anterior se sigue el Teorema de Riesz-Torin 1.8. Ahora apliquemos el Teorema anterior a la transformada de Beurling B. Recordemos que B es un operador de Calderón-Zygmund continuo de L^p en L^p y por ser de convolución es continuo de $W^{k,p}$ en $W^{k,p}$ para $k \in \mathbb{N}$. En este caso se tiene

$$B\colon W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \to W^{\alpha,p}(\mathbb{C}).$$

Para concluir esta sección, enunciamos los resultados de las parejas de interpolación que caracterizan espacios utilizados en este trabajo. Dichos resultados pueden consultarse, por ejemplo, en el libro de Triebel [56, pág. 182, 184 y 185].

Teorema 1.14. Sean $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ y $1 < p_0, p_1, q_0, q_1 < \infty$. Si $0 < \theta < 1$, definimos α, p, q mediante las relaciones,

$$\begin{aligned} \alpha &= (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1, \\ \frac{1}{p} &= \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \\ \frac{1}{q} &= \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \end{aligned}$$

Entonces:

1. Los espacios de Besov satisfacen

$$
\begin{aligned}
(B^{\alpha_0}_{p,q_0}, B^{\alpha_1}_{p,q_1})_{\theta,q} &= B^{\alpha}_{p,q} && \text{si } p_0 = p_1 = p,\\
(B^{\alpha_0}_{p_0,q_0}, B^{\alpha_1}_{p_1,q_1})_{\theta,q} &= B^{\alpha}_{p,q} && \text{si } p = q,\\
[B^{\alpha_0}_{p_0,q_0}, B^{\alpha_1}_{p_1,q_1}]_{\theta} &= B^{\alpha}_{p,q} && \text{si } 1 \le q_0 < \infty,\ 1 \le q_1 \le \infty \text{ y } 1 < p_0, p_1 < \infty.
\end{aligned}
$$

2. Los espacios de Triebel-Lizorkin satisfacen

$$
\begin{aligned}
(F^{\alpha_0}_{p,q_0}, F^{\alpha_1}_{p,q_1})_{\theta,p} &= B^{\alpha}_{p,p} && \text{si } \alpha_0 \neq \alpha_1,\\
(F^{\alpha}_{p_0,q_0}, B^{\alpha}_{p_1,q_1})_{\theta,q} &= B^{\alpha}_{p,p} && \text{si } \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha \text{ y } p = q,\\
(F^{\alpha}_{p_0,r}, F^{\alpha}_{p_1,r})_{\theta,q} &= F^{\alpha}_{p,r} && \text{si } \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha \text{ y } 1 < r < \infty,\\
[F^{\alpha_0}_{p_0,q_0}, F^{\alpha_1}_{p_1,q_1}]_{\theta} &= F^{\alpha}_{p,q} && .
\end{aligned}
$$

3. Los espacios de Sobolev satisfacen

$$
\begin{aligned}
(W^{\alpha_0,p}, W^{\alpha_1,p})_{\theta,r} &= B^{\alpha}_{p,r} && \text{si } \alpha_0 \neq \alpha_1,\ p_0 = p_1 = p \text{ y } 1 < r < \infty,\\
(W^{\alpha,p_0}, W^{\alpha,p_1})_{\theta,p} &= B^{\alpha}_{p,p} && \text{si } \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha,\\
[W^{\alpha_0,p_0}, W^{\alpha_1,p_1}]_{\theta} &= W^{\alpha,p} && .
\end{aligned}
$$

1.10. Resultados sobre compacidad de operadores

Antes de comenzar a enunciar los resultados utilizados sobre compacidad de operadores, recordemos algunas definiciones.

Un subconjunto $\mathfrak{F}$ de un espacio métrico es *relativamente compacto* si su adherencia es compacta. Los siguientes criterios son equivalentes:

1. $\mathfrak{F}$ es relativamente compacto si y sólo si toda sucesión de puntos de $\mathfrak{F}$ contiene una subsucesión de Cauchy.

2. $\mathfrak{F}$ es relativamente compacto si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ puede recubrirse por un número finito de bolas de radio ϵ.

Estas equivalencias pueden consultarse en el libro de Lax [31, pag. 233].

Sean X e Y dos espacios de Banach. Un operador lineal $T\colon X \to Y$ es *compacto* si la imagen $T(B)$ de la bola unitaria $B \in X$ es un conjunto relativamente compacto en Y. Sobre operadores compactos, recordamos las siguientes afirmaciones:

Teorema 1.15.

1. La suma de operadores compactos es un operador compacto.

2. Multiplicar por un escalar un operador compacto nos da un operador compacto.

3. Sean X, X_1, Y, Y_1 espacios de Banach y supongamos que el operador $T\colon X \to Y$ es compacto y los operadores $V\colon X_1 \to X$ y $U\colon Y \to Y_1$ son continuos, entonces los operadores $U \circ T$ y $T \circ V$ son compactos.

4. Si $T_n\colon X \to Y$ es una sucesión de operadores compactos que convergen en la norma del operador a T, es decir

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\|_{X\to Y} = 0.$$

   Entonces el operador T es compacto.

Para la prueba de los enunciados antes mencionados sugerimos consultar el libro de Lax [31] ó el de Schechter [46].

Retomando la teoría de interpolación, enunciamos dos resultados referentes a la interpolación de operadores y compacidad. El primero, debido a Cobos y Persson [12] utilizando el método de interpolación real y el segundo a Cwikel y Kalton [14] referente al método de interpolación compleja.

Teorema 1.16 (Teorema 3.1 en [12])**.** Sean (A_0, A_1) y (B_0, B_1) parejas de interpolación y $T\colon A_j \to B_j$ con $j = 0, 1$, tal que $T\colon A_0 \to B_0$ es compacto. Entonces

$$T\colon (A_0, A_1)_{\theta,q} \to (B_0, B_1)_{\theta,q}$$

es compacto para cada $0 < \theta < 1$ y $0 < q \leq \infty$.

El caso de la interpolación compleja entre parejas de interpolación es más delicado. No bastan las condiciones del Teorema 1.16. Para tener un resultado equivalente al Teorema 1.16, necesitamos la propiedad de que un espacio de Banach posea la propiedad *incondicional para sucesiones de diferencias de martingalas*, denotada por UMD por sus siglas en inglés (*unconditionality property for martingales differences*). Debido a que no es nuestra intención tratar esta propiedad, sólo mencionaremos que los espacios L^p poseen la propiedad UMD para $1 < p < \infty$ y que la propiedad UMD es estable por interpolación, es decir, si (A_0, A_1) es una pareja de interpolación de espacios UMD, entonces los espacios de interpolación $[A_0, A_1]_\theta$ y $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ son UMD para $0 < \theta < 1$ y $1 < q < \infty$. De esta forma los espacios de Lorentz poseen la propiedad UMD. Para más detalles sobre la propiedad UMD véase el artículo Fernandez y García [17].

Teorema 1.17 (Teorema 9 en [14])**.** Sean (A_0, A_1) y (B_0, B_1) parejas de interpolación y supongamos que A_0 es un espacio UMD. Supongamos que $T\colon A_0 \to B_0$ es compacto. Entonces $T\colon [A_0, A_1]_\theta \to [B_0, B_1]_\theta$ es compacto para cada $0 < \theta < 1$.

Teorema 1.18 (Teorema 10 en [14])**.** Sea (A_0, A_1) una pareja de interpolación donde A_0 es reflexivo y está dado por $A_0 = [W, A_1]_\alpha$ para algún $0 < \alpha < 1$ y algún espacio de Banach W que forma una pareja de interpolación con A_1. Si $T\colon A_j \to B_j$ con $j = 0, 1$ y $T\colon A_0 \to B_0$ es compacto, entonces $T\colon [A_0, A_1]_\theta \to [B_0, B_1]_\theta$ es compacto para $0 < \theta < 1$.

1.11. Operadores de Fredholm

En la teoría utilizada en este trabajo, son de gran importancia los operadores de Fredholm. Presentamos las definiciones y resultados empleados aquí. Excelentes referencias para este tópico son los libros [6, 31, 46].

Definición 1.11.1. Dados dos espacios de Banach X e Y , decimos que el operador $T\colon X \to Y$ es de *Fredholm* si satisface:

1. La dimensión del núcleo $\ker(T)$ es de dimensión finita.

2. La imagen del operador $T(X)$ es cerrado y tiene codimensión finita.

   El *índice* de T está definido por

$$\operatorname{index}(T) = \dim\ker(T) - \dim\operatorname{coker}(T) \tag{1.11.1}$$

   donde $\operatorname{coker}(T) = Y/T(X)$.

El índice es estable bajo pequeñas perturbaciones, es decir,

Teorema 1.19. Si $T\colon X \to Y$ es de Fredholm y $P\colon X \to Y$ tiene norma suficientemente pequeña, entonces $\dim\ \ker(T + P) \leq \dim\ \ker(T)$ y se tiene $\operatorname{index}(T + P) = \operatorname{index}(T)$.

Los siguientes resultados nos permiten decidir cuándo un operador es de Fredholm.

Teorema 1.20.

1. Si $T\colon X \to Y$ y $P\colon Y \to Z$ son de Fredholm, entonces $P \circ T\colon X \to Z$ es de Fredholm y satisface

$$\operatorname{index}(P \circ T) = \operatorname{index}(P) + \operatorname{index}(T).$$

2. Si $T\colon X \to Y$ es de Fredholm y $K\colon X \to Y$ es un operador compacto, entonces $T + K$ es un operador de Fredholm y el $\text{index}(T + K) = \text{index}(T)$.

3. Si $T\colon X \to Y$ y existen $P_j\colon Y \to X$, $j = 1, 2$, tales que

$$\begin{aligned} T \circ P_1 &= I + K_1, \\ P_2 \circ T &= I + K_2, \end{aligned}$$

   donde K_j son operadores compactos para $j = 1, 2$, entonces T, P_1 y P_2 son de Fredholm y

$$\text{index}(T) = -\text{index}(-P_j), \quad j = 1, 2.$$

Como una consecuencia de la parte 3 del Teorema 1.20, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.21. Sea $T\colon X \to Y$ un operador continuo y supongamos que existen operadores continuos $P_i\colon Y \to X$ para $i = 1, 2$ y operadores compactos $K_1\colon X \to X$ y $K_2\colon Y \to Y$ tales que

$$\begin{aligned} P_1 \circ T &= A_1 + K_1 \\ T \circ P_2 &= A_2 + K_2 \end{aligned}$$

donde A_i con $i = 1, 2$ son operadores invertibles. Entonces T es de Fredholm.

En lo sucesivo entenderemos que TP es la composición $T \circ P$ de dos operadores.

CAPÍTULO 2

Ecuación de Beltrami en el plano

Consideremos la ecuación de Beltrami

$$\bar{\partial} f(z) = \mu(z)\, \partial f(z), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{2.0.1}$$

donde el coeficiente de Beltrami μ es una función medible sobre $\mathbb{C}$ que cumple la condición de elipticidad $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$.

En 1938, Morrey en [40] demostró que existe esencialmente una única función $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ que satisface la ecuación (2.0.1) casi para todo punto y es un homeomorfismo del plano. Nos referiremos a tal aplicación f como *μ-quasiconforme*. Las soluciones de (2.0.1) que pertenecen al espacio de Sobolev $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ se llaman *μ-quasiregulares* (ó *K-quasiregulares*, donde $K = \frac{1+\|\mu\|_\infty}{1-\|\mu\|_\infty}$).

Un resultado de Mori de 1956 [39] (véase también [1, pag. 47]) establece que las aplicaciones K-quasiregulares pertenecen a $\mathrm{Lip}_{loc}(\alpha, \mathbb{C})$ para $\alpha < \frac{1}{K} < 1$. Recordamos también que toda aplicación μ-quasiregular es la composición de una aplicación μ-quasiconforme con una función holomorfa. Este resultado es conocido como el Teorema de factorización de Stoilow (véase, por ejemplo [3, pag. 149]). En el caso del estudio de la regularidad, el Teorema de Stoilow nos permite concentrarnos únicamente en la aplicación μ-quasiconforme. Sobre el estudio de la regularidad de las aplicaciones μ-quasiconformes tenemos los siguientes resultados.

1. Las estimaciones de Schauder aseguran que $f \in \mathcal{C}^{1,\epsilon}(\mathbb{C})$ si el coeficiente de Beltrami $\mu \in \mathcal{C}^{0,\epsilon}(\mathbb{C})$. Además, no es difícil mostrar que dicha aplicación es bilipschitz.

2. Si $\mu \in \mathrm{VMO}(\mathbb{C})$ (véase [4, 24]), entonces $f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ para todo $1 < p < \infty$ y por tanto pertenece a $\mathcal{C}^{0,\epsilon}(\mathbb{C})$ para todo $\epsilon < 1$.

3. Si $\mu \in W^{1,2}(\mathbb{C})$, la aplicación f preserva conjuntos de capacidad analítica cero, aún cuando f no sea bilipschitz (véase [10, 11]).

4. En el artículo de Mateu *et al.* [36] se demuestra que si $\mu = g\chi_\Omega$ donde Ω es un dominio acotado de clase $\mathcal{C}^{1,\epsilon}$ con $\epsilon > 0$ y $g \in \mathrm{Lip}(\epsilon, \Omega)$ tal que $\|g\|_\infty < 1$, entonces la aplicación μ-quasiconforme asociada es bilipschitz.

En el artículo de Clop *et al.* [10], mediante la regularidad del coeficiente de Beltrami μ se caracteriza la regularidad de la *solución principal* $f(z) = z + Ch(z)$.

Teorema 2.1 (Proposición 4 en [10])**.** Sea $\mu \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ con soporte compacto tal que $\|\mu\|_\infty \leq \frac{K-1}{K+1} < 1$. Sea f la solución de la ecuación de Beltrami (2.0.1), entonces

1. Si $p > 2$, entonces $f \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{C})$.

2. Si $p = 2$, entonces $f \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$ con $q < 2$.

3. Si $\frac{2K}{K-1} < p < 2$, entonces $f \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$ para cada $q < q_0$, donde $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p} + \frac{K-1}{2K}$.

En el mismo artículo [10, pág. 205–206] se muestra que la función μ-quasiconforme en una vecindad del origen,

$$f(z) = z(1 - \log|z|) \tag{2.0.2}$$

con coeficiente de Beltrami dado por

$$\mu(z) = \frac{z}{\bar{z}} \frac{1}{2\log|z| - 1} \tag{2.0.3}$$

satisface $\mu \in W^{1,q}_{loc}(\mathbb{C})$ cuando $q < 2$ pero $f \notin W^{2,2}_{loc}(\mathbb{C})$.

Definimos el *espacio de potenciales de funciones de Lorentz* como

$$I_\alpha(L^{p,q}) = \{f : \text{existe } g \in L^{p,q} \text{ tal que } f = I_\alpha g\}.$$

La norma en este espacio está dada por

$$\|f\|_{I_\alpha(L^{p,q})} = \|g\|_{L^{p,q}}$$

donde g es la función en $L^{p,q}$ tal que $f = I_\alpha g$.

El coeficiente de Beltrami (2.0.3) satisface $\mu \notin I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$ pero $\mu \in I_1(L^{2,q}(\mathbb{C}))$ para $q > 1$ (véase la subsubsección 2.1.1.1). Nuestro interés de introducir la clase de funciones $I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$ está motivada del Teorema de Stein en [49] pues toda función de esta clase es continua y nos permite tener *buenas* propiedades para el coeficiente de Beltrami. Primeramente se tiene la inclusión $I_1(L^{2,1}(\mathbb{C})) \hookrightarrow C_0(\mathbb{C})$. Observamos, además, que en este espacio se tiene la relación

$$\|f\|_{I_1(L^{2,1})} \approx \|\nabla f\|_{L^{2,1}}.$$

Por otra parte, intentando caracterizar las soluciones como en el Teorema 2.1, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2. Consideremos el coeficiente de Beltrami μ con soporte compacto y que cumple la condición de elipticidad $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$.

1. Si $\mu \in I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$, entonces la solución principal $f(z) = z + Ch(z)$ es tal que $h \in I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$.

2. Si $0 < \alpha < 1$, $\alpha p > 2$ y $\mu \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$, entonces la solución principal $f(z) = z + Ch(z)$ es tal que $h \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$.

3. Si $0 < \alpha < 1$, $\alpha p > 2$, $1 \leq q \leq \infty$ y $\mu \in B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C})$, entonces la solución principal $f(z) = z + Ch(z)$ es tal que $h \in B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C})$.

4. Si $0 < \alpha < 1$, $(1+\alpha)p > 2$ y $\mu \in W^{1+\alpha,p}(\mathbb{C})$. La solución principal $f(z) = z + Ch(z)$ es tal que $h \in W^{1+\alpha,p}(\mathbb{C})$.

5. Si $0 < \alpha < 1$, $(1+\alpha)p > 2$, $1 < q \leq \frac{2p}{2-\alpha p}$ y $\mu \in B^{1+\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$. La solución principal $f(z) = z + Ch(z)$ es tal que $h \in B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C})$.

Como mencionamos antes, por el Teorema de Stoilow, para estudiar la regularidad, nos basta saber qué propiedades tiene la solución principal μ-quasiconforme ya que las otras soluciones se obtienen por composición con una función holomorfa que es de la clase $C^\infty(\mathbb{C})$.

En el contexto de la regularidad, la demostración de los apartados 1, 2 y 3 del Teorema 2.2 se basa en la idea de Iwaniec [24, pág. 42–43] para la demostración de la invertibilidad del operador $I - \mu B$ en $L^p(\mathbb{C})$ cuando el coeficiente de Beltrami $\mu \in VMO(\mathbb{C})$. Observemos que si $f(z) = z + Ch(z)$, entonces las derivadas parciales satisfacen

$$\begin{aligned} \partial f(z) &= 1 + Bh(z), \\ \bar{\partial} f(z) &= h(z). \end{aligned}$$

Mediante estas relaciones, transformamos la ecuación de Beltrami (2.0.1) en la ecuación funcional

$$(I - \mu B)h(z) = \mu(z) \tag{2.0.4}$$

y por tanto nos interesa estudiar cuándo el operador $I - \mu B$ es invertible. Entonces tenemos

$$h(z) = (I - \mu B)^{-1}\mu(z).$$

La invertibilidad del operador en la clase de funciones respectiva nos permite transferir las propiedades del coeficiente de Beltrami a la aplicación h.

La demostración de la invertibilidad del operador $I - \mu B$ corresponde a la sección 2.1. Observemos que en estos casos, la clase de funciones $X(\mathbb{C})$ a la que pertenece el coeficiente de Beltrami, satisfacen las siguientes propiedades.

1. X es un álgebra multiplicativa de funciones invariantes por traslaciones que tiene una norma caracterizada por primeras diferencias.
2. $X \subset L^p(\mathbb{C})$.
3. X es invariante bajo operadores de Calderón Zygmund, es decir, $T\colon X \to X$.
4. $X \subset C(\mathbb{C})$.
5. $C_c^\infty(\mathbb{C})$ es una clase densa en X.
6. Se satisface la desigualdad de Minkowski (véase [47, Teorema 13.14]),
$$\left\| \int_A f(x,y)\mathrm{d}y \right\|_X \leq \int_A \|f(x,y)\|_X \,\mathrm{d}y.$$

Cuando $\alpha \in (0,1)$ y $(1+\alpha)p > 2$, las clases de funciones $W^{1+\alpha,p}(\mathbb{C})$ y $B^{1+\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ son álgebras de funciones pero no tienen una representación en primeras diferencias. Esto hace que no las podamos tratar como en los casos anteriores. Para estas clases, procedemos utilizando una idea de Ahlfors en [1, pág. 94].

Consideremos una función λ tal que

$$\begin{aligned} \partial f(z) &= \lambda(z), \\ \bar{\partial} f(z) &= \mu(z)\lambda(z). \end{aligned}$$

La aplicación λ satisface la *ecuación no homogénea de Beltrami*

$$\bar{\partial}\,\lambda(z) = \lambda(z)\partial\mu(z) + \partial\lambda(z)\,\mu(z),$$

de donde, utilizando el hecho que $B(\bar{\partial}\,\lambda) = \partial\lambda$ y $g(z) = \bar{\partial}\,(\log\lambda(z))$, obtenemos la ecuación funcional de Beltrami,

$$(I - \mu B)g(z) = \partial\mu(z)$$

y por tanto nos interesa

$$g(z) = (I - \mu B)^{-1}\partial\mu(z).$$

Observamos que en el caso correspondiente, $\partial\mu \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ ó $\partial\mu \in B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$. Si $\alpha p > 2$, las clases de funciones $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ y $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ son álgebras de funciones y por tanto podemos aplicar directamente el resultado obtenido en estos casos (véase la Proposición 2.1.1). En el caso $\alpha p \leq 2$ tenemos algunas complicaciones. Para comenzar, no es evidente que el operador de Beltrami $I - \mu B$ sea continuo. Sin embargo, en el caso que $\mu \in W^{1+\alpha,p}_c(\mathbb{C})$ sea un multiplicador de $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ (Lema 2.2.1) se tiene la continuidad del operador. Análogamente, en el caso de los espacios de Besov, el Lema 2.2.5 nos dice que las aplicaciones de $B^{1+\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ con soporte compacto son multiplicadores de $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ pero pagando el precio de una restricción sobre el índice q.

Debido a las similitudes que tienen las demostraciones de los casos $I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$, $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ y $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$, las concentramos en la sección 2.1. Las demostraciones en los casos $W^{1+\alpha,p}(\mathbb{C})$ y $B^{1+\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ aparecen en la sección 2.2.

2.1. Invertibilidad del operador de Beltrami

En esta subsección exhibiremos el método general para demostrar la invertibilidad del operador de Beltrami en $X(\mathbb{C})$ que denotará a $I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$, $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ ó $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$.

Utilizamos los métodos de [24, pág. 42–43] para demostrar la invertibilidad. Consideremos el operador

$$P_m = I + \mu B + \cdots + (\mu B)^m$$

y observemos que

$$(I - \mu B)P_{n-1} = P_{n-1}(I - \mu B) = I - \mu^n B^n + K. \tag{2.1.1}$$

Si el operador $I - \mu^n B^n$ es invertible (Lemas 2.1.1, 2.1.3 y 2.1.5) y el operador K es compacto entonces el operador de Beltrami $I - \mu B$ es de Fredholm (Corolario 1.21).

La compacidad del operador K se sigue del hecho que es suma finita de operadores que contienen como factor el conmutador $[\mu, B]$ que es compacto (Lemas 2.1.2, 2.1.4 y 2.1.6). Consideremos la deformación continua de la identidad en el operador $I-\mu B$ dada por $I - t\mu B$ con $t \in [0,1]$. Por el Teorema 1.19 y dado que $\operatorname{index}(I) = 0$, el operador $I - \mu B$ tiene índice cero.
Por otra parte, $I - \mu B$ es un operador inyectivo pues

$$\ker_{X(\mathbb{C})}(I-\mu B) \subset \ker_{L^p(\mathbb{C})}(I-\mu B)$$

y dado que el núcleo de $I - \mu B$ es trivial en $L^p(\mathbb{C})$ para toda $1 < p < \infty$ (véase [24, pág. 43]), también lo es en el caso $X(\mathbb{C}) = I_1(L^{2,1}(\mathbb{C})), W^{\alpha,p}(\mathbb{C}), B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$. De esta manera tenemos que $I - \mu B$ es un operador de Fredholm de índice cero e inyectivo. De la definición del índice para un operador de Fredhom (1.11.1) se sigue que es exhaustivo. Esto concluye que $I - \mu B$ es invertible.

En resumen, sobre la invertibilidad del operador de Beltrami tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1. Sea μ una función con soporte compacto tal que $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. Entonces:

1. Si $\mu \in I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$, entonces $I - \mu B \colon I_1(L^{2,1}(\mathbb{C})) \to I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$ es invertible.
2. Si $0 < \alpha < 1$, $\alpha p > 2$ y $\mu \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$, entonces $I - \mu B \colon W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \to W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ es invertible.
3. Si $0 < \alpha < 1$, $\alpha p > 2$, $1 \leq q \leq \infty$ y $\mu \in B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$, entonces $I - \mu B \colon B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C}) \to B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ es invertible.

Las diferencias entre las tres clases de funciones nos obligan a tratar los detalles técnicos de forma separada en las siguientes subsecciones.

2.1.1. Invertibilidad en $I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$

En esta subsección consideramos la invertibilidad del operador $I - \mu^n B^n$ y la compacidad del operador conmutador $[\mu, B]$ en $I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$.

Comenzamos estudiando la invertibilidad del operador $I - \mu^n B^n$.

Lema 2.1.1. Sea $\mu \in I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$ una función con soporte compacto tal que $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. El operador $I - \mu^n B^n \colon I_1(L^{2,1}(\mathbb{C})) \to I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$ es invertible

Demostración. Usando métodos que utilizan la transformada de Fourier ([50, pág. 73]), de demuestra que el núcleo de las iteradas de la transformada de Beurling está dado por

$$b_n(z) = \frac{(-1)^n n}{\pi} \frac{\bar{z}^{n-1}}{z^{n+1}}.$$

Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, las iteradas de la transformada de Beurling B^n son operadores de Calderón-Zygmund y la norma de cada operador está acotada por la constante

$$\|b_n(z)|z|^2\|_\infty + \|\nabla b_n(z)|z|^3\|_\infty \leq Cn^2 \tag{2.1.2}$$

donde C es una constante positiva.
Recordemos que

$$\|\mu^n B^n(f)\|_{I_1(L^{2,1})} \approx \|\nabla(\mu^n B^n(f))\|_{L^{2,1}}.$$

Entonces, utilizando las propiedades de las funciones de $I_1(L^{2,1})$ y que $\|FG\|_{L^{2,1}} \lesssim \|F\|_\infty \|G\|_{L^{2,1}}$ para $F \in L^\infty(\mathbb{C})$ y $G \in L^{2,1}(\mathbb{C})$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|\mu^n B^n(f)\|_{I_1(L^{2,1})} &\leq \||\nabla\mu| n\mu^{n-1} B^n(f)\|_{L^{2,1}} + \|\mu^n B^n(\nabla f)\|_{L^{2,1}} \\
&\lesssim n\|\nabla\mu\|_{L^{2,1}} \|\mu\|_\infty^{n-1} \|B^n(f)\|_\infty + C\|\mu\|_\infty^n \|B^n(\nabla f)\|_{L^{2,1}}
\end{aligned}$$

Dado que $\|B^n f\|_\infty \lesssim \|B^n f\|_{I_1(L^{2,1})} \lesssim n^2 \|f\|_{I_1(L^{2,1})}$ y $\|B^n(\nabla f)\|_{L^{2,1}} \lesssim n^2 \|\nabla f\|_{L^{2,1}} \approx n^2 \|f\|_{I_1(L^{2,1})}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\mu^n B^n(f)\|_{I_1(L^{2,1})} &\lesssim n^3 \|\nabla\mu\|_{L^{2,1}} \|\mu\|_\infty^{n-1} \|\nabla f\|_{L^{2,1}} + n^2 \|\mu\|_\infty^n \|\nabla f\|_{L^{2,1}} \\
&\lesssim n^2 \|\mu\|_\infty^{n-1} \|\mu\|_{I_1(L^{2,1})} (n\|\nabla\mu\|_{L^{2,1}} + \|\mu\|_\infty) \|f\|_{I_1(L^{2,1})} \\
&\lesssim n^2 \|\mu\|_\infty^{n-1} \|\mu\|_{I_1(L^{2,1})} (n\|\mu\|_{I_1(L^{2,1})} + \|\mu\|_\infty) \|f\|_{I_1(L^{2,1})}
\end{aligned}$$

lo cual muestra que la norma del operador $\mu^n B^n$ es pequeña en $I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$ para n suficientemente grande. Esto implica que $I - \mu^n B^n$ es invertible en $I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$.

□

Lema 2.1.2. Si $\mu \in I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$ entonces $[\mu, B]\colon I_1(L^{2,1}(\mathbb{C})) \to I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$ es compacto.

Demostración. Observemos que el operador $[\mu, B]$ es continuo en $I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$ pues

$$\begin{aligned}
\|[\mu, B]f\|_{I_1(L^{2,1})} &= \|\mu Bf - B(\mu f)\|_{I_1(L^{2,1})} \\
&\leq \|\mu Bf\|_{I_1(L^{2,1})} + \|B(\mu f)\|_{I_1(L^{2,1})} \\
&\lesssim \|\nabla\mu \cdot Bf\|_{L^{2,1}} + \|\mu \cdot B(\nabla f)\|_{L^{2,1}} + \|B(\nabla\mu \cdot f + \mu \cdot \nabla f)\|_{L^{2,1}} \\
&\lesssim \|\nabla\mu \cdot Bf\|_{L^{2,1}} + \|\mu \cdot B(\nabla f)\|_{L^{2,1}} + \|B(\nabla\mu \cdot f)\|_{L^{2,1}} + \\
&+ \|\mu \cdot \nabla f\|_{L^{2,1}}.
\end{aligned}$$

Utilizando que la transformada de Beurling es continua en $L^{2,1}(\mathbb{C})$, el hecho que $\|FG\|_{L^{2,1}} \lesssim \|F\|_\infty \|G\|_{L^{2,1}}$ para $F \in L^\infty(\mathbb{C})$ y $G \in L^{2,1}(\mathbb{C})$ y dado que $\|Bf\|_\infty \lesssim \|f\|_{I_1(L^{2,1})}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|[\mu, B]f\|_{I_1(L^{2,1})} &= \|\nabla\mu\|_{L^{2,1}}\|Bf\|_\infty + \|\mu\|_\infty \|B(\nabla f)\|_{L^{2,1}} \\
&\quad + \|B\|_{L^{2,1}\to L^{2,1}}(\|\nabla\mu \cdot f\|_{L^{2,1}} + \|\mu \cdot \nabla f\|_{L^{2,1}}) \\
&\lesssim \|\mu\|_{I_1(L^{2,1})}\|f\|_{I_1(L^{2,1})} + \|B\|_{L^{2,1}\to L^{2,1}}(\|\nabla\mu\|_{L^{2,1}}\|f\|_\infty + \|\mu\|_\infty\|\nabla f\|_{L^{2,1}}) \\
&\lesssim \|\mu\|_{I_1(L^{2,1})}\|f\|_{I_1(L^{2,1})} + \|B\|_{L^{2,1}\to L^{2,1}}(\|\mu\|_{I_1 L^{2,1}}\|f\|_\infty + \|\mu\|_\infty\|f\|_{I_1(L^{2,1})}) \\
&\lesssim \|\mu\|_{I_1(L^{2,1})}\|f\|_{I_1(L^{2,1})}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, debido a que las funciones de clase $C_c^\infty(\mathbb{C})$ son densas en $I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$, reducimos el estudio de la compacidad del conmutador a funciones $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{C})$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\|[\mu, B]f\|_{I_1(L^{2,1})} &= \sum_{j=1}^{2} \|\partial_j(\mu B(f) - B(\mu f))\|_{L^{2,1}} \\
&\leq \sum_{j=1}^{2} \|[\partial_j\mu, B]f\|_{L^{2,1}} + \|[\mu, B](\partial_j f)\|_{L^{2,1}}
\end{aligned}$$

donde ∂_j es ∂ si $j = 1$ ó $\bar{\partial}$ si $j = 2$. El conmutador $[\mu, B]\colon L^{2,1}(\mathbb{C}) \to L^{2,1}(\mathbb{C})$ es compacto por el Teorema de interpolación de operadores 1.16 y dado que dicho operador es compacto en L^p por el Teorema 2 del artículo de Uchiyama [58].

Nos concentraremos en demostrar que $[a, B]\colon I_1(L^{2,1}(\mathbb{C})) \to L^{2,1}(\mathbb{C})$ es compacto donde $a \in C_c^\infty(\mathbb{C})$. Reduciendo como en el artículo de Krantz y Li [29, pág. 643], dado $\eta > 0$ definimos los operadores K^η mediante la extensión continua del núcleo de la transformada de Beurling. Es decir,

$$\begin{aligned}
K^\eta(z, w) &= K(z, w) \quad \text{si } |z - w| \geq \eta, \\
|K^\eta(z, w)| &\leq \frac{C}{|z - w|^2} \quad \text{si } |z - w| < \eta, \\
K^\eta(z, w) &= 0 \quad \text{si } |z - w| \leq \frac{\eta}{2}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
|[a, B - B^\eta](f)(z)| &= \left| \int (a(z) - a(y))(K(z - y) - K^\eta(z - y)) f(y)\,\mathrm{d}y \right| \\
&\leq C \int_{|z-y|<\eta} \frac{|a(z) - a(y)|}{|z - y|^2} |f(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\leq C\|f\|_\infty \int_{|z-y|<\eta} \frac{1}{|z - y|}\,\mathrm{d}y \leq C\eta\|\nabla f\|_{L^{2,1}}.
\end{aligned}$$

Dado que a tiene soporte compacto, $[a, B - B^\eta](f)(z) = 0$ cuando $|z|$ es suficientemente grande. Por tanto tenemos que $[a, B^\eta]$ tiende a $[a, B]$ cuando $\eta \to 0$ en la norma del operador. Así, por la parte 4 del Teorema 1.15, sólo nos restará probar que $[a, B^\eta]\colon I_1(L^{2,1}) \to L^{2,1}$ es compacto.

De forma directa tenemos que $[a, B^\eta]$ es uniformemente acotado en $L^{2,1}$. Afirmamos que es equicontinuo, si $f \in I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$ y $|z - w| < \eta$, entonces

$$\begin{aligned}
[a, B^\eta]f(z) - [a, B^\eta]f(w) &= (a(z) - a(w)) \int_{\mathbb{C}} K^\eta(z, \xi) f(\xi) \mathrm{d}A(\xi) \\
&+ \int_{\mathbb{C}} (K^\eta(w, \xi) - K^\eta(z, \xi)) (a(\xi) - a(w)) f(\xi) \mathrm{d}A(\xi) \\
&= \theta_1(z, w) + \theta_2(z, w).
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
|\theta_1(z, w)| &= \left| (a(z) - a(w)) \int_{\mathbb{C}} K^\eta(z, \xi) f(\xi) \mathrm{d}A(\xi) \right| \\
&\leq |(a(z) - a(w))| \int_{|z-\xi|>\eta} \left| \frac{1}{(z-\xi)^2} \right| |f(\xi)| \mathrm{d}A(\xi) \\
&\leq C \|f\|_\infty \eta \leq \tilde{C} \|\nabla f\|_{L^{2,1}} \eta \leq \tilde{C} \|f\|_{I_1(L^{2,1})} \eta.
\end{aligned}$$

y también se tiene

$$\begin{aligned}
|\theta_2(z, w)| &= \left| \int_{\mathbb{C}} (K^\eta(w, \xi) - K^\eta(z, \xi)) (a(\xi) - a(w)) f(\xi) \mathrm{d}A(\xi) \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{C}} |K^\eta(w, \xi) - K^\eta(z, \xi)| \, |a(\xi) - a(w)| \, |f(\xi)| \, \mathrm{d}A(\xi) \\
&\leq \int_{\mathbb{C} \setminus B(z, \eta/2)} \|\nabla K^\eta\|_\infty \frac{|z - w|}{|\xi - w|^2} \, |a(\xi) - a(w)| \, |f(\xi)| \, \mathrm{d}A(\xi) \\
&\leq \tilde{\tilde{C}} \|\nabla f\|_{L^{2,1}} \eta.
\end{aligned}$$

Por tanto tenemos que

$$|[a, B^\eta]f(z) - [a, B^\eta]f(w)| \leq \tilde{K} \|\nabla f\|_{L^{2,1}} \eta$$

y se tiene la condición de equicontinuidad.

Ahora veremos que se tiene una condición de decaimiento en el infinito. Supongamos que $\operatorname{supp} a \subset \mathbb{D}(0,2)$. Entonces si $|z| > R$

$$\begin{aligned}
|[a,B]f(z)| &\leq \left|\int_{\mathbb{C}} (a(z)-a(w))K^{\eta}(z,w)f(w)\mathrm{d}A(w)\right| \\
&\leq \int_{\operatorname{supp} a} |a(w)||K^{\eta}(z,w)||f(w)|\mathrm{d}A(w) \\
&\leq \|f\|_{\infty}\|a\|_{\infty}\int_{\operatorname{supp} a} |K^{\eta}(z,w)|\mathrm{d}A(w) \\
&\leq \|f\|_{\infty}\|a\|_{\infty}\int_{|w|>R} \frac{1}{|z-w|^2}\mathrm{d}A(w) \\
&\leq C\|f\|_{\infty}\|a\|_{\infty}\frac{1}{|z|^2}.
\end{aligned}$$

Con la condición de acotación uniforme, de equicontinuidad y de decaimiento en el infinito y utilizando el Teorema de Frechet-Kolmogorov para espacios de Lorentz (Corolario 2.5), concluimos que $[\nabla\mu, B^{\eta}]$ es compacto de $I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$ en $L^{2,1}(\mathbb{C})$.

□

Concluimos esta subsección, con la prueba de la versión del Teorema de Frechet-Kolmogorov para espacios de Lorentz. Para la demostración, utilizaremos el clásico Teorema de Arzelá-Ascoli.

Teorema 2.3 (Arzelá-Ascoli)**.** Sea K un espacio métrico compacto y $\mathfrak{H}$ un subconjunto acotado de $C(K)$. Supongamos que $\mathfrak{H}$ es uniformemente equicontinuo. Entonces $\mathfrak{H}$ es relativamente compacto en $C(K)$.

Teorema 2.4 (Frechet-Kolmogorov para espacios de Lorentz)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y consideremos $\omega \subset \Omega$. Supongamos que $\mathfrak{F}$ es un subconjunto acotado de $L^{p,q}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$ y $1 \leq q < \infty$. Además, supongamos que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, $\delta < \operatorname{dist}(\omega, \Omega^c)$ tal que $\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^{p,q}(\omega)} < \epsilon$ para todo $h \in \mathbb{R}^n$ que satisface $|h| < \delta$ y para todo $f \in \mathfrak{F}$. Entonces $\mathfrak{F}|_{\omega}$ es relativamente compacto en $L^{p,q}(\omega)$.

Demostración. Supongamos primeramente que Ω es acotado. Para $f \in \mathfrak{F}$ definimos

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Observemos que $\tilde{\mathfrak{F}} = \{\tilde{f} : f \in \mathfrak{F}\}$ es acotado en $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ y $L^1(\mathbb{R}^n)$. Consideremos las funciones regularizantes $\rho_i \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \rho_i \subset B(0, \frac{1}{i})$ y $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_i = 1$, $\rho_i \geq 0$ en $\mathbb{R}^n$. Utilizando las funciones regularizantes, tenemos que $\|\rho_i * \tilde{f} - \tilde{f}\|_{L^{p,q}(\omega)} < \epsilon$ para todo $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{F}}$ y para todo $n > \frac{1}{\delta}$.

Consideremos el conjunto de funciones $\mathfrak{H} = (\rho_i * \tilde{\mathfrak{F}})|_\omega$. Para cada i, tenemos que se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.3. Primeramente, para todo $\tilde{f} \in \mathfrak{F}$, se tiene

$$\|\rho_i * \tilde{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\rho_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\tilde{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C_i.$$

Por otra parte, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{F}}$

$$\begin{aligned} |(\rho_i * \tilde{f})(x_1) - (\rho_i * \tilde{f})(x_2)| &\leq |x_1 - x_2| \|\rho_i\|_{Lip} \|\tilde{f}\|_{L^1} \\ &\leq C_i |x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

Esto implica que $\mathfrak{H}$ es relativamente compacto en $C(\omega)$ y por tanto en $L^{p,q}(\omega)$. Dado $\epsilon > 0$ se fija $n > \frac{1}{\delta}$ de forma que

$$\|(\rho * \tilde{f}) - f\|_{L^{p,q}(\omega)} < \epsilon$$

para todo $f \in \mathfrak{F}$. Como $\mathfrak{H}$ es relativamente compacto en $L^{p,q}(\omega)$, se puede cubrir con un número finito de bolas de radio ϵ (en $L^{p,q}(\omega)$). Las bolas correspondientes de radio 2ϵ cubren a $\mathfrak{F}|_\omega$. Por tanto $\mathfrak{F}|_\omega$ es precompacto en $L^{p,q}(\omega)$

$\square$

Corolario 2.5 (Teorema de Riesz-Frechet-Kolmogorov)**.** Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathfrak{F}$ un subconjunto acotado de $L^{p,q}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$ y $1 \leq q < \infty$. Supongamos que

1. Para todo $\epsilon > 0$ y para todo $\omega \Subset \Omega$, existe $\delta > 0$, $\delta < \text{dist}(\omega, \Omega^c)$ tal que

$$\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^{p,q}(\omega)}$$

para todo $h \in \mathbb{R}^n$ con $|h| < \delta$ y para todo $f \in \mathfrak{F}$,

2. Para todo $\epsilon > 0$ existe $\omega \Subset \Omega$ tal que $\|f\|_{L^{p,q}(\Omega\setminus\omega)} < \epsilon$ para todo $f \in \mathfrak{F}$.

Entonces $\mathfrak{F}$ es relativamente compacto en $L^{p,q}(\Omega)$.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$ elegimos $\omega \Subset \Omega$ tal que

$$\|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} < \epsilon$$

para todo $f \in \mathfrak{F}$. Por el Teorema 2.4 se tiene que el conjunto $\mathfrak{F}|_\omega$ es relativamente compacto en $L^{p,q}(\omega)$. Por tanto podemos cubrir $\mathfrak{F}|_\omega$ por un número finito de bolas de radio ϵ en $L^{p,q}(\omega)$. Sea

$$\mathfrak{F}|_\omega \subset \cup_{i=1}^k B(g_i, \epsilon)$$

con $g_i \in L^{p,q}(\omega)$. Consideramos

$$\tilde{g}_i(x) = \begin{cases} g_i(x) & \text{si } x \in \omega, \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus \omega. \end{cases}$$

De esta forma $\mathfrak{F} \subset U_{i=1}^{k} B(\tilde{g}_i, 2\epsilon)$ considerando las bolas en $L^{p,q}(\Omega)$. Utilizando la equivalencia 2 a la definición de que un subconjunto sea relativamente compacto termina la demostración.

□

2.1.1.1. Ejemplo

A continuación recordamos el ejemplo presentado en Vaslil'ev de [59] y Clop *et al.* de [10].

Ejemplo 2.1.1. Consideremos la aplicación $f(z) = z(1 - \log|z|)$. Dicha aplicación es μ-quasiconforme en un entorno del origen con coeficiente de Beltrami

$$\mu(z) = \frac{z}{\bar{z}} \frac{1}{2\log|z| - 1}.$$

En particular, se sabe que $\mu \in W^{1,2}(\mathbb{C})$ en un entorno del origen. Un cálculo directo muestra que $f \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$ cuando $q < 2$ pero $f \notin W^{2,2}_{loc}(\mathbb{C})$.
La aplicación $\mu \notin I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$ pero $\mu \in I_1(L^{2,q}(\mathbb{C}))$ para $q > 1$.

Un cálculo directo muestra que

$$\partial\mu(z) = \frac{2}{\bar{z}(2\log|z| - 1)^2}$$

En $\mathbb{D}(0, \epsilon)$ con $\epsilon < \frac{1}{e}$ se tiene que

$$|\partial\mu(z)| \simeq \left| \frac{1}{|z|\log|z|} \right|.$$

Sea $z = re^{i\theta}$ donde $0 \leq r \leq \epsilon$. Entonces $|\partial\mu(z)| > t$ para toda $t \in [0, \epsilon)$ y en este caso

$$d_{\partial\mu}(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\epsilon} r dr d\theta = \pi\epsilon^2.$$

Ahora, si $t \geq \epsilon$,

$$d_{\partial\mu} = 2\pi \int_0^{\phi(t)} r dr = \pi\phi^2(t),$$

donde $\phi(t) = r$, es decir,

$$t^{-1} = \phi^{-1}(r) = \frac{1}{r\log\left(\frac{1}{r}\right)}.$$

Por tanto la función de distribución de $\partial\mu$ está dada por

$$d_{\partial\mu}(t) = \begin{cases} \pi\epsilon^2 & t \in [0,\epsilon) \\ \pi\phi^2(t) & t \geq \epsilon. \end{cases}$$

La relación $d(t) = s$ equivale a que

$$t = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}\log\left(\frac{\pi}{s}\right)}.$$

Entonces,

$$f^*(s) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}\log\left(\frac{\pi}{s}\right)} & s \geq \pi \\ 0 & s \in [0,\pi) \end{cases}$$

Calculando la norma de $\partial\mu$ en $L^{2,q}$ en $\mathbb{D}(0,\epsilon)$ se tiene

$$\begin{aligned} \|\partial\mu\|_{L^{2,q}} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{1/2}\partial\mu^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(2^q\pi^{q/2}\int_0^\infty \frac{dt}{t\left(\log\left(\frac{\pi}{t}\right)\right)^q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(2^q\pi^{q/2}\int_\pi^\infty \frac{dt}{t\left(\log\left(\frac{\pi}{t}\right)\right)^q}\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

la cual es integrable para $q > 1$.

2.1.2. Invertibilidad en $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$

En esta subsección presentamos los lemas técnicos necesarios para la demostración del Teorema 2.1 en el caso de la clase de Sobolev $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ con $\frac{2}{p} < \alpha < 1$.

Lema 2.1.3. Sea $\mu \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ con soporte compacto tal que $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. Si $\alpha p > 2$, el operador $I - \mu^n B^n \colon W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \to W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ es invertible

Demostración. La prueba es similar a la del Lema 2.1.1. Debido a que los núcleos de las iteradas de la transformada de Beurling pueden calcularse explícitamente, utilizando la relación (2.1.2) tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, la norma de la n-ésima iterada de la transformada de Beurling cumple

$$\|B^n\|_{W^{\alpha,p}\to W^{\alpha,p}} \leq Cn^2.$$

Dado que $\alpha p > 2$ y por tanto $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ es un álgebra de funciones,

$$\begin{aligned} \|\mu^n B^n f\|_{W^{\alpha,p}} &\leq C\,\|\mu^n\|_{W^{\alpha,p}}\|B^n f\|_{W^{\alpha,p}} \\ &\leq C\,n^2\|\mu^n\|_{W^{\alpha,p}}\|f\|_{W^{\alpha,p}}. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\mu^n(z)-\mu^n(w) = (\mu(z)-\mu(w))(\mu^{n-1}(z)+\mu^{n-2}(z)\mu(w)+\cdots+\mu(z)\mu^{n-2}(w)+\mu^{n-1}(w)).$$

Así, tenemos que

$$|\mu^n(z) - \mu^n(w)| \lesssim n|\mu(z) - \mu(w)|\ \|\mu\|_\infty^{n-1}$$

y de donde, utilizando el operador D_α del Lema 1.5.1 para la caracterización del espacio de Sobolev fraccionario, tenemos

$$\begin{aligned} D_\alpha(\mu^n)^2 &= \int_{\mathbb{C}} \frac{|\mu^n(x) - \mu^n(y)|^2}{|x-y|^{2+2\alpha}}\mathrm{d}y \\ &\leq n^2(\|\mu\|_\infty^{n-1})^2 \int_{\mathbb{C}} \frac{|\mu(x) - \mu(y)|^2}{|x-y|^{2+2\alpha}}\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

es decir,

$$D_\alpha(\mu^n) \leq n\|\mu\|_\infty^{n-1} D(\mu).$$

Por tanto, utilizando que μ tiene soporte compacto y que $W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \subset L^p(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \|\mu^n\|_{W^{\alpha,p}} &\approx \|\mu^n\|_p + \|D_\alpha(\mu^n)\|_p \\ &\leq n\|\mu\|_\infty^{n-1}(\|\mu\|_p + \|D_\alpha(\mu)\|_p) \\ &\approx n\|\mu\|_\infty^{n-1}\|\mu\|_{W^{\alpha,p}} \quad . \end{aligned}$$

De lo anterior concluimos que

$$\begin{aligned} \|\mu^n B^n\|_{W^{\alpha,p}} &\leq Cn^2\|\mu^n\|_{W^{\alpha,p}} \\ &\leq Cn^3\|\mu\|_\infty^{n-1}\|\mu\|_{W^{\alpha,p}}, \end{aligned}$$

y como consecuencia, la norma del operador $\mu^n B^n$ es pequeña cuando n es suficientemente grande. Por tanto el operador $I - \mu^n B^n$ es invertible de $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ en $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$. $\square$

Lema 2.1.4. Sea $\alpha p > 2$. El operador conmutador $[\mu, B]\colon W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \to W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ es compacto para $\mu \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$.

Demostración. Observemos que, utilizando que $\alpha p > 2$, el espacio de Sobolev $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ es un álgebra de funciones,

$$
\begin{aligned}
\|[\mu, B]f\|_{W^{\alpha,p}} &= \|\mu Bf - B(\mu f)\|_{W^{\alpha,p}} \\
&\leq \|\mu Bf\|_{W^{\alpha,p}} + \|B(\mu f)\|_{W^{\alpha,p}} \\
&\leq \|\mu\|_{W^{\alpha,p}}\|Bf\|_{W^{\alpha,p}} + \|B\|_{W^{\alpha,p}\to W^{\alpha,p}}\|\mu f\|_{W^{\alpha,p}} \\
&\lesssim \|\mu\|_{W^{\alpha,p}}\|f\|_{W^{\alpha,p}}.
\end{aligned}
$$

Esto implica que el conmutador es continuo en $W^{\alpha,p}$. Para demostrar que el conmutador $[\mu, B]$ es compacto sobre $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$, utilizamos que las funciones $C_c^\infty(\mathbb{C})$ son densas en $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ y de esta manera aproximamos la función μ por funciones $\mu_j \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, tales que $\mu_j \to \mu$ cuando $j \to \infty$ en $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$. Entonces, dado que la transformada de Beurling B es un operador continuo en $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ y por la propiedad de álgebra multiplicativa de la clase,

$$
\begin{aligned}
\|[\mu_j, B]f - [\mu, B]f\|_{W^{\alpha,p}} &= \|[\mu_j - \mu, B]f\|_{W^{\alpha,p}} \\
&\leq \|(\mu_j - \mu)Bf\|_{W^{\alpha,p}} + \|B((\mu_j - \mu)f)\|_{W^{\alpha,p}} \\
&\lesssim \|\mu_j - \mu\|_{W^{\alpha,p}}\|f\|_{W^{\alpha,p}} \xrightarrow{j\to\infty} 0.
\end{aligned}
$$

Por tanto la familia de conmutadores $[\mu_j, B]$ aproximan al conmutador $[\mu, B]$ de forma uniforme en la norma del operador. Esto nos reduce a demostrar que el conmutador $[\mu, B]$ es compacto cuando $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ debido al Teorema 1.15 inciso 4.
Es conocido que el espacio $L^p(\mathbb{C})$ es un espacio UMD para $1 < p < \infty$ (véase [14, pag.264]). Por el Teorema 2 de [58], para $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{C}) \subset VMO(\mathbb{C})$, el conmutador $[\mu, B]\colon L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$ es compacto para $1 < p < \infty$. Observemos que,

$$
\begin{aligned}
\|[\mu, B]f\|_{W^{1,p}(\mathbb{C})} &\lesssim \|\mu\|_{W^{1,p}(\mathbb{C})}\|Bf\|_{W^{1,p}(\mathbb{C})} + \|B(\mu f)\|_{W^{1,p}(\mathbb{C})} \\
&\lesssim \|\mu\|_{W^{1,p}(\mathbb{C})}\|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{C})}\|B\|_{W^{1,p}(\mathbb{C})\to W^{1,p}(\mathbb{C})}.
\end{aligned}
$$

Esto implica que el conmutador es acotado en $W^{1,p}(\mathbb{C})$. De los hechos de que, $L^p(\mathbb{C})$ es un espacio UMD, el conmutador es compacto en $L^p(\mathbb{C})$ y continuo en $W^{1,p}(\mathbb{C})$; por el Teorema 1.17, el operador conmutador $[\mu, B]\colon W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \to W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ es compacto. Esto termina la prueba.

□

2.1.3. Invertibilidad en $B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C})$

En esta subsección presentamos los lemas técnicos necesarios para la demostración del Teorema 2.1 en el caso de la clase de Besov $B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C})$ para $\frac{2}{p} < \alpha < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$.

Lema 2.1.5. Sea $\mu \in B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ con soporte compacto tal que $\|\mu\|_{\infty} \leq k < 1$. Si $\alpha p > 2$, el operador $I - \mu^n B^n \colon B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C}) \to B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ es invertible

Demostración. Para mostrar que $I - \mu^n B^n \colon B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C}) \to B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ es invertible, procedemos a calcular la norma de $\|\mu^n B^n f\|_{B^{\alpha}_{p,q}}$. Utilizando métodos de análisis de Fourier se tiene el siguiente control de la norma de las iteradas de la transformada de Beurling

$$\|B^n\|_{B^{\alpha}_{p,q} \to B^{\alpha}_{p,q}} \leq C n^2$$

y por la condición de álgebra para el espacio de Besov $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$,

$$\|\mu^n B^n f\|_{B^{\alpha}_{p,q}} \leq C\, n^2 \|\mu^n\|_{B^{\alpha}_{p,q}} \|f\|_{B^{\alpha}_{p,q}}.$$

Utilizando la caracterización en primeras diferencias de $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ (véase Lema 14), obtenemos

$$\|\mu^n B^n\|_{B^{\alpha}_{p,q} \to B^{\alpha}_{p,q}} \leq C\, n^3 \|\mu\|_{\infty}^{n-1} \|\mu\|_{B^{\alpha}_{p,q}}.$$

Como consecuencia, para n suficientemente grande la norma del operador $\mu^n B^n$ es pequeña y por tanto $I - \mu^n B^n$ es invertible.

□

Lema 2.1.6. Sean $\alpha p > 2$ y $1 \leq q \leq \infty$. Si $\mu \in B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$, el operador conmutador $[\mu, B] \colon B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C}) \to B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ es compacto.

Demostración. Utilizando la condición de álgebra de funciones, observamos que

$$\begin{aligned} \|[\mu, B]f\|_{B^{\alpha}_{p,q}} &= \|\mu B f - B(\mu f)\|_{B^{\alpha}_{p,q}} \\ &\leq \|\mu B f\|_{B^{\alpha}_{p,q}} + \|B(\mu f)\|_{B^{\alpha}_{p,q}} \\ &\leq C\, \|\mu\|_{B^{\alpha}_{p,q}} \|f\|_{B^{\alpha}_{p,q}}. \end{aligned}$$

Esto implica que el operador es continuo en los espacios de Besov $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ cuando $\alpha p > 2$. Ahora bien, dado que la clase de funciones $C^{\infty}_c(\mathbb{C})$ es densa en $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$, existe una sucesión $\{\mu_j\}_{j \geq 1} \subset C^{\infty}_c(\mathbb{C})$ tales que $\mu_j \xrightarrow{j \to \infty} \mu$ en $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$. Utilizando que $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ es un álgebra de funciones y la invarianza del espacio de Besov para operadores de Calderón-Zygmund,

$$\|[\mu_j, B]f - [\mu, B]f\|_{B^{\alpha}_{p,q}} \leq \|\mu_j - \mu\|_{B^{\alpha}_{p,q}} \|f\|_{B^{\alpha}_{p,q}} \xrightarrow{j \to \infty} 0.$$

Es decir, el operador conmutador $[\mu, B]$ es límite uniforme de operadores $[\mu_j, B]$, por el Teorema 1.15 parte 4, basta con demostrar que $[\mu_j, B]$ es compacto en $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$.

Por el Teorema 2 de [58], el conmutador $[\mu, B]\colon L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$ es compacto. Observemos que

$$\|[\mu, B]f\|_{W^{1,p}(\mathbb{C})} \lesssim \|\mu\|_{W^{1,p}(\mathbb{C})}\|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{C})}$$

si $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{C})$. Esto implica que $[\mu, B]\colon W^{1,p}(\mathbb{C}) \to W^{1,p}(\mathbb{C})$ es acotado. Por el Teorema 1.16 tenemos que el operador $[\mu, B]\colon B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C}) \to B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C})$ es compacto.

□

2.2. Parte final del Teorema 2.2

En los casos tratados en la sección 2.1, el hecho que los espacios sean álgebras multiplicativas de funciones garantizan, entre otras cosas, la continuidad de los operadores $I - \mu B$, $I - \mu^n B^n$ y el conmutador $[\mu, B]$.

En general, la derivada del coeficiente de Beltrami $\partial\mu$ no pertenece a ningún álgebra de funciones estudiadas y por tanto no podemos garantizar la continuidad de los operadores tratados. Éste es el caso cuando $0 < \alpha < 1$ y $(1+\alpha)p > 2$ y el coeficiente de Beltrami $\mu \in W^{1+\alpha,p}(\mathbb{C})_c$ ó $\mu \in B^{1+\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})_c$. Como veremos más adelante, nos basta con las clases de funciones con soporte compacto a la que pertenece el coeficiente de Beltrami al comportarse como multiplicador. Este es el primer resultado técnico que necesitamos (Lemas 2.2.1 y 2.2.5).

Por otra parte, para la demostración seguiremos la idea de Ahlfors de [1, pág. 94–95]. El coeficiente de Beltrami pertenece, en los casos $W^{1+\alpha,p}(\mathbb{C})$ ó $B^{1+\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$, a una clase en la cual es posible derivar y por tanto consideramos la ecuación de Beltrami (2.0.1) y λ una función tal que

$$\begin{aligned} \partial f(z) &= \lambda(z), \\ \bar\partial f(z) &= \mu(z)\lambda(z), \end{aligned}$$

entonces, la aplicación λ satisface la ecuación de Beltrami no homogénea

$$\bar\partial \lambda(z) = \partial\mu(z)\,\lambda(z) + \mu(z)\,\partial\lambda(z). \tag{2.2.1}$$

Utilizando el hecho de que $B(\bar\partial\lambda) = \partial\lambda$, la ecuación (2.2.1) se transforma en la ecuación funcional

$$(I - \mu B)h(z) = \partial\mu(z)$$

donde $h(z) = \bar\partial \log\lambda(z)$.

Nuevamente, estamos interesados en obtener la relación

$$h(z) = (I - \mu B)^{-1}\partial\mu(z)$$

la cual nos lleva a demostrar la invertibilidad del operador en el espacio al que pertenece la derivada parcial del coeficiente de Beltrami $\partial\mu$, a decir, $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ ó $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$. Observemos que tanto $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ y $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ no tienen por que ser un álgebra de funciones, en caso de serlo ($\alpha p > 2$), procedemos como en la sección 2.1. Por tanto nos concentramos en el caso cuando $\alpha p \leq 2$.
Utilizando el mismo procedimiento de Iwaniec en [24] utilizado en la sección 2.1, para demostrar la invertibilidad del operador de Beltrami $I - \mu B$ nos basta con demostrar $I - \mu^n B^n$ es invertible (Lemas 2.2.2 y 2.2.6) y que el conmutador $[\mu, B]$ (Lemas 2.2.3 y 2.2.7) es un operador compacto.

De ésta manera tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.2.1. Sea μ con soporte compacto tal que $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$.

1. Si $\mu \in W^{1+\alpha,p}(\mathbb{C})$ con $\frac{2}{\alpha+1} \leq p \leq \frac{2}{\alpha}$, el operador $I - \mu B\colon W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \to W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ es invertible

2. Sea $\mu \in B^{1+\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ donde $\frac{2}{\alpha+1} \leq p \leq \frac{2}{\alpha}$ y $1 < q \leq \frac{2p}{2-\alpha p}$. Entonces el operador $I - \mu B\colon B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C}) \to B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ es invertible

2.2.1. Invertibilidad en $W^{1+\alpha,p}(\mathbb{C})$

Comenzamos esta subsección con un resultado general de multiplicadores de la clase $W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$.

Lema 2.2.1. Las funciones de $W^{1+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto son multiplicadores de $W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ donde $\frac{n}{\alpha+1} \leq p \leq \frac{n}{\alpha}$ con $0 < \alpha < 1$. Además, para $\mu \in W^{1+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ y $F \in W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\begin{aligned} \|\mu F\|_{W^{\alpha,p}} &\leq (\|\mu\|_\infty + \|\mu\|_{W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}})\|F\|_{W^{\alpha,p}} \qquad (2.2.2) \\ &\leq \|\mu\|_{W^{1+\alpha,p}}\|F\|_{W^{\alpha,p}} \quad . \qquad (2.2.3) \end{aligned}$$

Demostración. Sea $\mu \in W^{1+\alpha,p}_c(\mathbb{R}^n)$ y $F \in W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$. Por el Teorema de Sobolev (véase, por ejemplo, [52, pág. 1034]),

$$W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{\beta,q}(\mathbb{R}^n) \quad \text{si} \quad \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} + \frac{\alpha-\beta}{n}. \qquad (2.2.4)$$

Utilizando la caracterización de la norma por diferencias del espacio $W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ del Lema 1.5.1,

$$
\begin{aligned}
\|\mu F\|_{W^{\alpha,p}} &\approx \|\mu F\|_p + \|D_\alpha(\mu F)\|_p \\
&= \|\mu F\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\mu(x)F(x)-\mu(y)F(y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|\mu F\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\mu(y)(F(x)-F(y))|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|F(x)(\mu(x)-\mu(y))|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

Dado que $W^{1+\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (véase el Teorema 1.4 parte 3),

$$
\begin{aligned}
\|\mu F\|_{W^{\alpha,p}} &\leq \|\mu\|_\infty\|F\|_p + \|\mu\|_\infty\|D_\alpha(F)\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}^n}|F(x)|^p D_\alpha(\mu)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|\mu\|_\infty\|F\|_{W^{\alpha,p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n}|F(x)|^p D_\alpha(\mu)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2.2.5) \\
&\leq \|\mu\|_{W^{1+\alpha,p}}\|F\|_{W^{\alpha,p}} + \|F\ D_\alpha(\mu)\|_p.
\end{aligned}
$$

Nos concentramos ahora en el sumando de la derecha. Sea $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, entonces, por la desigualdad de Hölder,

$$
\|F\ D_\alpha(\mu)\|_p \leq \|F\|_q\|D_\alpha(\mu)\|_{q'}
$$

donde $\frac{1}{q'} = \frac{\alpha}{n}$. Por el encaje (2.2.4), $F \in W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ para $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ y $\mu \in W^{1+\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{\alpha,\frac{n}{\alpha}}(\mathbb{R}^n)$ con $\frac{1}{p} \leq \frac{\alpha+1}{n}$,

$$
\begin{aligned}
\|F\ D_\alpha(\mu)\|_p &\leq \|F\|_{W^{\alpha,p}}\|D_\alpha(\mu)\|_{q'} \\
&\leq \|F\|_{W^{\alpha,p}}\|D_\alpha(\mu)\|_{\frac{n}{\alpha}} \\
&\leq \|F\|_{W^{\alpha,p}}\|\mu\|_{W^{\alpha,\frac{n}{\alpha}}} \qquad (2.2.6) \\
&\leq \|F\|_{W^{\alpha,p}}\|\mu\|_{W^{1+\alpha,p}}.
\end{aligned}
$$

De lo anterior, concluimos

$$
\|\mu F\|_{W^{\alpha,p}} \leq \|\mu\|_{W^{1+\alpha,p}}\|F\|_{W^{\alpha,p}}.
$$

Por último, observemos que de (2.2.5) y (2.2.6) se tiene

$$
\|\mu F\|_{W^{\alpha,p}} \leq (\|\mu\|_\infty + \|\mu\|_{W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}})\|F\|_{W^{\alpha,p}}.
$$

Esto termina la demostración del lema.

□

Mediante el Lema 2.2.1 y la invarianza de $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ para operadores de Calderón-Zygmund tenemos que $I-\mu B$ es continuo en $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ y además, se tiene el siguiente control de normas

$$\|(I-\mu B)f\|_{W^{\alpha,p}} \leq (1+\|\mu\|_{W^{1+\alpha,p}}\|B\|_{W^{\alpha,p}\to W^{\alpha,p}})\|f\|_{W^{\alpha,p}}. \tag{2.2.7}$$

Remplazando en (2.2.7) μ^n por μ y por B por B^n se obtiene la continuidad del operador $I-\mu^n B^n$.

Por otra parte, para demostrar la invertibilidad del operador $I-\mu^n B^n$, necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.2.2. Si $\mu \in W^{1+\alpha,p}(\mathbb{C})$ con $\frac{2}{\alpha+1} \leq p \leq \frac{2}{\alpha}$ tal que $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$, el operador $I-\mu^n B^n \colon W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \to W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ es invertible

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la norma del operador B^n está acotada por Cn^2, donde C es una constante. De las estimaciones (2.2.2) del Lema 2.2.1 y la caracterización en diferencias para $W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})$ (véase lema 1.5.1) se obtiene,

$$\begin{aligned}
\|\mu^n B^n f\|_{W^{\alpha,p}} &\leq \|\mu^n\|_{W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}}\|B^n f\|_{W^{\alpha,p}} \\
&\leq Cn^2\|\mu^n\|_{W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}}\|f\|_{W^{\alpha,p}} \\
&\leq Cn^3\|\mu\|_\infty^{n-1}\|\mu\|_{W^{1+\alpha,p}}\|f\|_{W^{\alpha,p}}
\end{aligned}$$

la cual es pequeña cuando n es suficientemente grande. Esto implica que el operador $I-\mu^n B^n$ es invertible.

□

Por último, demostramos la compacidad del operador.

Lema 2.2.3. Dada $\mu \in W^{1+\alpha,p}(\mathbb{C})$, el conmutador $[\mu, B] \colon W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \to W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ es compacto.

Demostración. Observemos que, mediante el Lema 2.2.1,

$$\|[\mu,B]f\|_{W^{\alpha,p}} \leq \|\mu Bf\|_{W^{\alpha,p}} + \|B(\mu f)\|_{W^{\alpha,p}} \leq \|B\|_{W^{\alpha,p}\to W^{\alpha,p}}\|\mu\|_{W^{1+\alpha,p}}\|f\|_{W^{\alpha,p}}.$$

Esto implica que el operador conmutador $[\mu, B] \colon W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \to W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ está acotado. Dado que $C_c^\infty(\mathbb{C})$ es una clase densa de funciones en $W^{1+\alpha,p}(\mathbb{C})$, existe una sucesión de funciones $\mu_j \xrightarrow{j\to\infty} \mu$ en $W^{1+\alpha,p}(\mathbb{C})$ y de las estimaciones del Lema 2.2.1,

$$\begin{aligned}
\|[\mu_j,B]f-[\mu,B]f\|_{W^{\alpha,p}} &\leq \|[\mu_j-\mu,B]f\|_{W^{\alpha,p}} \\
&\leq \|\mu_j-\mu\|_{W^{1+\alpha,p}}\|Bf\|_{W^{\alpha,p}} \xrightarrow{j\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Esto nos dice que el conmutador $[\mu, B]$ es límite uniforme de conmutadores $[\mu_j, B]$ para $\mu_j \in C_c^\infty(\mathbb{C})$. Por el Teorema 1.15 parte 4, basta con demostrar la compacidad para el conmutador cuando $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{C})$. Sea $g(z) = Cf(z)$ donde $f \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$. Utilizando la regla de Leibnitz y el hecho de que $B(\bar\partial) = \partial$, tenemos la siguiente relación para el conmutador,

$$\begin{aligned}
[\mu, B]f(z) &= \mu(z)Bf(z) - B(\mu f)(z) \\
&= \mu(z)\partial g(z) - B(\mu\bar\partial\, g)(z) \\
&= \partial(\mu(z)g(z)) - \partial\mu(z)\, g(z) - B(\bar\partial\,(\mu g))(z) + B(\bar\partial\,\mu\, g)(z) \\
&= B(\bar\partial\,\mu\, g)(z) - \partial\mu(z)\, g(z) \\
&= B(\bar\partial\,\mu\, Cf)(z) - \partial\mu(z)\, Cf(z) \qquad (2.2.8)
\end{aligned}$$

Del Lema 2.2.4 tenemos que cada sumando es un operador compacto, lo cual concluye que $[\mu, B]\colon W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \to W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ es compacto.

□

La descomposición del conmutador (2.2.8) proviene del argumento presentado en Astala *et al.* para la demostración del conmutador en el caso $L^p(\mathbb{C})$ y también es posible aplicarse en los casos de espacios de Besov.

Lema 2.2.4. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ y consideremos $f \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$. El operador definido como $T_\varphi f(z) = \varphi(z)\, Cf(z)$, donde C es la transformada de Cauchy, es un operador compacto de $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ en $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$.

Demostración. Para $f \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$, la transformada de Cauchy de f satisface $Cf \in L^q(\mathbb{C})$ para $q > p$ y tiene derivadas en $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$. Debido al encaje entre espacios de Sobolev [56, pág. 203], $Cf \in W^{1+\alpha,q}(\mathbb{C})$. Por otra parte sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, entonces $T_\varphi f(z) = \varphi(z)Cf(z)$. El operador T_φ es continuo de $W^{1+\alpha,p}(\mathbb{C})$ en sí mismo (véase [55, pág.195]) y satisface $T_\varphi f \in W^{1+\alpha,p}(\operatorname{supp}\varphi)$. Debido a que la inclusión de $W^{1+\alpha,p}(\operatorname{supp}\varphi) \hookrightarrow W^{\alpha,p}(\operatorname{supp}\varphi)$ es compacta, concluimos que $T\colon W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \to W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ es compacto.

□

2.2.2. Invertibilidad en $B_{p,q}^{1+\alpha}(\mathbb{C})$

De manera análoga a la subsección anterior, probamos los resultados técnicos de la demostración de la Proposición 2.1.1 en el caso $B_{p,q}^{1+\alpha}(\mathbb{C})$ para $0 < \alpha < 1$, $(1+\alpha)p > 2$. Comenzamos con el tema de los multiplicadores. De forma análoga a los espacios de

Sobolev fraccionarios, estamos interesados en saber si las funciones de $B^{1+\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ que tienen soporte compacto, son multiplicadores de $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ y como es el control que se tiene de estas normas.

Primeramente, mencionamos la versión del Teorema de encaje de Sobolev para espacios de Besov que puede consultarse en [34, Teorema 14.29, pág. 437].

Teorema 2.6. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ que se anula en el infinito y tal que $f \in B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ para algún $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ y $1 < q \leq \frac{np}{n-\alpha p}$. Entonces, existe una constante $C = C(n, p, q, \alpha) > 0$ tal que

$$\|f\|_{\frac{n-\alpha p}{np}} \leq C\|f\|_{B^{\alpha}_{p,q}}.$$

En particular,

$$B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \subset L^r(\mathbb{R}^n)$$

para $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{r} + \frac{\alpha}{n}$.

Por otra parte, tenemos el siguiente encaje entre espacios de Besov que puede consultarse en [34, teorema 14.17 pág. 425].

Teorema 2.7. Sean $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q_1 < q_2 \leq \infty$. Entonces existe una constante $C = C(n, p, \alpha, q_1, q_2) > 0$ tal que

$$\|f\|_{B^{\alpha}_{p,q_2}} \leq C\|f\|_{B^{\alpha}_{p,q_1}}$$

para toda función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. En particular, $B^{\alpha}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \subset B^{\alpha}_{p,q_2}(\mathbb{R}^n)$.

Ahora procedemos a mostrar un resultado sobre multiplicadores para $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Lema 2.2.5. Sean $\mu \in B^{1+\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_c$ y $f \in B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ con $0 < \alpha < 1$ entonces $\mu f \in B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Además se tienen las estimaciones

$$\begin{aligned} \|\mu f\|_{B^{\alpha}_{p,q}} &\leq \|\mu\|_{\infty}\|f\|_{B^{\alpha}_{p,q}} + \|\mu\|_{B^{\alpha}_{p,\frac{n}{\alpha}}}\|f\|_{B^{\alpha}_{p,q}} && (2.2.9) \\ &\leq \|\mu\|_{B^{1+\alpha}_{p,q}}\|f\|_{B^{\alpha}_{p,q}}. && (2.2.10) \end{aligned}$$

Demostración. Utilizamos la caracterización de $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ del Lema 1.6.1, entonces

$$\begin{aligned}
\|\mu F\|_{B^\alpha_{p,q}} &\approx \|\mu F\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|\mu(x)F(x)-\mu(y)F(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{q}+\alpha}}\right)^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}} \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|\mu F\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|\mu(x)||F(x)-F(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{q}+\alpha}}\right)^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}} \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} + \\
&\quad + \left(\int_{\mathbb{R}^n}|F(y)|^q\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|\mu(x)-\mu(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{q}+\alpha}}\right)^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}} \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|\mu\|_\infty\|F\|_p + \|\mu\|_\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|\mu(x)||F(x)-F(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{q}+\alpha}}\right)^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}} \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} + \\
&\quad + \left(\int_{\mathbb{R}^n}|F(y)|^q\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|\mu(x)-\mu(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{q}+\alpha}}\right)^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}} \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|\mu\|_\infty\|F\|_{B^\alpha_{p,q}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n}|F(y)|^q\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|\mu(x)-\mu(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{q}+\alpha}}\right)^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}} \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Sea $G(y) = \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|\mu(x)-\mu(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{q}+\alpha}}\right)^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$, entonces buscamos estimar $\|FG\|_p$ en términos de la norma de F en $B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ y la de G en alguna clase de funciones adecuada. Tenemos que para $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$, mediante la desigualdad de Hölder,

$$\|FG\|_p \leq \|F\|_r\|G\|_{r'}.$$

Por el Teorema 2.6 tenemos que

$$\|F\|_r \lesssim \|F\|_{B^\alpha_{p,q}}$$

con $1 \leq q \leq \frac{np}{n-\alpha p}$ y $r = \frac{np}{n-\alpha p}$. Entonces

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{n}.$$

De esta manera,

$$\|G\|_{\frac{n}{\alpha}} = \|\mu\|_{B^\alpha_{p,\frac{n}{\alpha}}}$$

y entonces

$$\|\mu F\|_{B^\alpha_{p,q}} \lesssim \|\mu\|_\infty\|F\|_{B^\alpha_{p,q}} + \|\mu\|_{B^\alpha_{p,\frac{n}{\alpha}}}\|F\|_{B^\alpha_{p,q}}.$$

Por otra parte, el Teorema 2.7 implica que si $q < \frac{n}{\alpha}$,

$$\|\mu F\|_{B^\alpha_{p,q}} \lesssim \|\mu\|_\infty \|F\|_{B^\alpha_{p,q}} + \|\mu\|_{B^\alpha_{p,q}} \|F\|_{B^\alpha_{p,q}} \lesssim \|\mu\|_{B^{1+\alpha}_{p,q}} \|F\|_{B^\alpha_{p,q}}.$$

□

Observemos que por lo anterior que $I - \mu B \colon B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C}) \to B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C})$ pues

$$\|(I - \mu B)f\|_{B^\alpha_{p,q}} \leq (1 + \|\mu\|_{B^{1+\alpha}_{p,q}} \|B\|_{B^\alpha_{p,q} \to B^\alpha_{p,q}}) \|f\|_{B^\alpha_{p,q}}. \tag{2.2.11}$$

Además al substituir μ^n por μ y B^n por B en (2.2.11) se tiene la continuidad del operador $I - \mu^n B^n$.

Lema 2.2.6. Si $\mu \in B^{1+\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ con soporte compacto tal que $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$ donde $0 < \alpha < 1$, $\frac{2}{\alpha} \leq p < \frac{2}{\alpha+1}$ y $1 < q \leq \frac{2p}{2-\alpha p}$, entonces $I - \mu^n B^n \colon B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C}) \to B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C})$ es invertible.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la norma del operador B^n está acotada por Cn^2, donde C es una constante. Así, de las estimaciones del Lema 2.2.5 y la caracterización en primeras diferencias para $W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})$ (Lema 1.5.1) se obtiene,

$$\begin{aligned} \|\mu^n B^n f\|_{B^\alpha_{p,q}} &\leq \|\mu^n\|_{W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}} \|B^n f\|_{B^\alpha_{p,q}} \\ &\lesssim n^2 \|\mu^n\|_{W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}} \|f\|_{W^{\alpha,p}} \\ &\lesssim n^3 \|\mu\|^{n-1}_\infty \|\mu\|_{W^{1+\alpha,p}} \|f\|_{W^{\alpha,p}} \end{aligned}$$

la cual es pequeña cuando n es suficientemente grande. Esto implica que el operador $I - \mu^n B^n$ es invertible.

□

La compacidad del conmutador se sigue de los dos siguientes resultados.

Lema 2.2.7. Sea $\mu \in B^{1+\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ con soporte compacto. Entonces el operador conmutador $[\mu, B] \colon B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C}) \to B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C})$ es compacto.

Demostración. Observemos que, mediante el Lema 2.2.5,

$$\|[\mu, B]f\|_{B^\alpha_{p,q}} \leq \|\mu B f\|_{B^\alpha_{p,q}} + \|B(\mu f)\|_{B^\alpha_{p,q}} \leq \|B\|_{B^\alpha_{p,q} \to B^\alpha_{p,q}} \|\mu\|_{B^{1+\alpha}_{p,q}} \|f\|_{B^\alpha_{p,q}}.$$

Esto implica que $[\mu, B] \colon B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C}) \to B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C})$ está acotado. Dado que $C^\infty_c(\mathbb{C})$ es una clase densa de funciones en $B^{1+\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$, existe una sucesión de funciones $\mu_j \xrightarrow{j \to \infty} \mu$ en $B^{1+\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ y de las estimaciones del Lema 2.2.5,

$$\begin{aligned} \|[\mu_j, B]f - [\mu, B]f\|_{B^\alpha_{p,q}} &\leq \|[\mu_j - \mu, B]f\|_{B^\alpha_{p,q}} \\ &\leq \|\mu_j - \mu\|_{B^{1+\alpha}_{p,q}} \|Bf\|_{B^\alpha_{p,q}} \xrightarrow{j \to \infty} 0. \end{aligned}$$

Esto nos dice que el conmutador $[\mu, B]$ es límite uniforme de conmutadores $[\mu_j, B]$ para $\mu_j \in C_c^\infty(\mathbb{C})$. Por el Teorema 1.15 inciso 4, basta con demostrar la compacidad para el conmutador cuando $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{C})$. Utilizando la regla de Leibnitz y el hecho de que $B(\bar{\partial}\,) = \partial$, tenemos la siguiente relación para el conmutador,

$$\begin{aligned} [\mu, B]f(z) &= \mu(z)Bf(z) - B(\mu f)(z) \\ &= B(\bar{\partial}\mu\, Cf)(z) - \partial\mu(z)\, Cf(z). \end{aligned}$$

Del Lema 2.2.8 tenemos que cada sumando es un operador compacto, lo cual concluye que $[\mu, B]\colon B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C}) \to B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C})$ es compacto.

□

Para concluir esta subsección tenemos un lema sobre compacidad.

Lema 2.2.8. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ y consideremos $f \in B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C})$. El operador definido mediante la regla $T_\varphi f(z) := \varphi(z)\, Cf(z)$, donde C es la transformada de Cauchy, es un operador compacto de $B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C})$ en $B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C})$.

Demostración. El operador T_φ es lineal. Observemos que el operador $T_\varphi\colon L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$ es compacto por el Teorema 4.3.14 en [3, pág. 116]. Por otra parte, el operador T_φ es continuo en el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{C})$, es decir, $T_\varphi\colon W^{1,p}(\mathbb{C}) \to W^{1,p}(\mathbb{C})$. Utilizando el Teorema 1.16 tenemos que $T_\varphi\colon B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C}) \to B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C})$ es compacto.

□

2.3. Comentarios al capítulo

Como sabemos, Stein en [49] demostró que toda función $\mu \in I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$ es continua con anulación en el infinito. Pruebas alternativas a este hecho fueron dadas por Maly en [35, Teorema 5.5] y Kauhanen [26]. Las funciones de $I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$, en general, no son Dini continuas. Por ejemplo la función $f(z) = \frac{1}{\log|z|}$ pertenece a $I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$ pero no es Dini continua. Por otra parte Bagby en [5] demostró que toda función del espacio $I_\alpha(L^{\frac{2}{\alpha},1}(\mathbb{C}))$ para $0 < \alpha < 2$ es continua que se anula en el infinito. Cuando el coeficiente de Beltrami $\mu \in I_\alpha(L^{\frac{2}{\alpha},1}(\mathbb{C}))$, utilizando la misma técnica que en el caso $I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$, es posible demostrar un resultado análogo a la parte 1 del Teorema 2.2.

Por otra parte, también es posible obtener un resultado similar a la parte 3 del Teorema 2.2 en el caso de espacios de Triebel-Lizorkin $F^\alpha_{p,q}(\mathbb{C})$ con $\alpha p > 2$ siguiendo esencialmente la demostración del espacio de Sobolev fraccionario $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ y utilizando la caracterización por diferencias de los espacios de Triebel-Lizorkin de [55, pág.

101]. En el caso $F^{1+\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ necesitamos que las funciones de la clase $F^{1+\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ con soporte compacto sean multiplicadores de $F^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ y de cuya afirmación desconocemos la veracidad.

CAPÍTULO 3

Espacios $L^p(\omega)$ y ecuación de Beltrami

En este capítulo estudiamos la resolubilidad de la ecuación de Beltrami no homogénea

$$\bar{\partial} f(z) - \mu(z)\partial f(z) = g(z) \tag{3.0.1}$$

donde el coeficiente de Beltrami μ es una función medible definida en el plano y tal que $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$.

Es bien sabido que la existencia de soluciones f depende de la elipticidad k y del término independiente g. Astala *et al.* demuestran en [4] que si $1 + k < p < 1 + \frac{1}{k}$ y $g \in L^p(\mathbb{C})$ entonces (3.0.1) tiene una única solución f en $W^{1,p}(\mathbb{C})$. Este resultado es óptimo.

En ecuaciones en derivadas parciales, es natural considerar coeficientes en la clase $VMO(\mathbb{C})$ (véase, *e. g.* [8, 9, 60]). Esta filosofía fue trasladada al contexto de la ecuación de Beltrami por Iwaniec [24], quien demostró que si el coeficiente de Beltrami $\mu \in VMO(\mathbb{C})$ y $g \in L^p(\mathbb{C})$ con $1 < p < \infty$, entonces la ecuación 3.0.1 admite una única solución $f \in W^{1,p}(\mathbb{C})$.

En los dos resultados citados, la estrategia consiste en reescribir la ecuación (3.0.1) como

$$(I - \mu B)(\bar{\partial} f(z)) = g(z). \tag{3.0.2}$$

La obtención de esta relación está legitimada dado que $B(\bar{\partial} f)(z) = \partial f(z)$ siempre que $f \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ para $1 < p < \infty$. Además permite replantear el problema de resolubilidad en términos de la inyectividad del operador $I - \mu B \colon L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$.

En Astala *et al.* [4], la invertibilidad del operador $I - \mu B$ se deduce del Teorema de distorsión de área de Astala [2] combinado con la teoría de pesos de Muckenhoupt. Cuando $\mu \in VMO(\mathbb{C})$, la invertibilidad proviene de un argumento de compacidad más típico del análisis funcional, como ya hemos observado en el capítulo anterior.

En este capítulo estamos interesados en resolver (3.0.1) cuando $g \in L^p(\omega)$ donde ω es un peso de Muckenhoupt A_p. El siguiente es nuestro resultado principal.

Teorema 3.1. Sea $1 < p < \infty$. Consideremos $\omega \in A_p$ y $\mu \in VMO_c(\mathbb{C})$ tal que $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. Entonces el operador de Beltrami $I - \mu B\colon L^p(\omega) \to L^p(\omega)$ tiene inverso acotado.

Como consecuencia, si $1 < p < \infty$ y $\omega \in A_p$ entonces, para cada $g \in L^p(\omega)$ la ecuación (3.0.1) tiene una única solución f con derivadas parciales en $L^p(\omega)$.

Utilizando las ideas de Iwaniec en [24], la invertibilidad del operador $I - \mu B$ en los espacios de Lebesgue con pesos proviene de la teoría de operadores de Fredholm. Un paso fundamental es demostrar que el conmutador de una función $\mu \in VMO_c(\mathbb{C})$ y la transformada de Beurling B es un operador compacto de $L^p(\mathbb{C})$ en sí mismo. Esto se deduce de un hecho más general, según el cual, el conmutador de un operador de Calderón-Zygmund y una función de $b \in VMO(\mathbb{R}^n)$ es compacto en $L^p(\mathbb{R}^n)$ si $1 < p < \infty$ ([58, Teorema 2]). Krantz y Li demuestran el análogo en espacios homogéneos[1] (véase [29, Teorema 1.1]).

En nuestro caso, necesitamos una versión de este teorema en $L^p(\omega)$. En la Sección 3.3 probaremos que el conmutador de una función $b \in VMO(\mathbb{R}^n)$ y un operador de Calderón-Zygmund T es compacto en $L^p(\omega)$ si $\omega \in A_p$.

Teorema 3.2. Sea $\omega \in A_p$ con $1 < p < \infty$ y consideremos $b \in VMO(\mathbb{R}^n)$. El conmutador $[b, T]\colon L^p(\omega) \to L^p(\omega)$ es compacto.

El criterio utilizado para demostrar la compacidad corresponde a una condición suficiente de compacidad en $L^p(\omega)$ que, si elegimos $\omega = 1$, no es más que el Teorema clásico de Frechet y Kolmogorov (véase *e. g.* [6, Teorema 4.26])

Teorema 3.3. Sean $p > 1$, $\omega \in A_p$ y consideremos $\mathfrak{F} \subset L^p(\omega)$. Entonces, la familia $\mathfrak{F}$ es totalmente acotada si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. $\mathfrak{F}$ es *uniformemente acotada.*

[1] Un *espacio homogéneo* X es un espacio Hausdorff localmente compacto que está dotado de una pseudométrica y una medida doblante (véase [28, pág. 630]).

2. $\mathfrak{F}$ es *uniformemente equicontinua*, i.e.

$$\sup_{f\in\mathfrak{F}} \|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_{L^p(\omega)} \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

3. $\mathfrak{F}$ satisface la *condición de decaimiento al infinito* de forma uniforme, i.e.

$$\sup_{f\in\mathfrak{F}} \|f-\chi_{Q(0,R)}f\|_{L^p(\omega)} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

   donde $Q(0,R)$ es el cubo centrado en el origen de lado R.

A diferencia de $L^p(\mathbb{R}^n)$, esta condición suficiente de compacidad no es necesaria en general. Esto se debe a que la mayoría de las veces $L^p(\omega)$ no es invariante por traslaciones y por tanto la condición (2) del Teorema 3.3 es extremadamente fuerte. Por ejemplo, si consideramos el peso $\omega(x)=|x|^{\frac{1}{2}}$ y $f(x)=|x|^{-\frac{n}{2}}$, se tiene que $f\in L^2(\omega)$ pero para todo $h\neq 0$, $f(\cdot+h)\notin L^p(\omega)$.

En la demostración del Teorema 3.3, utilizamos las ideas de Hanche y Olsen en [22, Teorema 5].

Por otra parte, la invertibilidad del operador de Beltrami está relacionada con otros problemas de la teoría de pesos. En particular, se puede caracterizar la invertibilidad de $I-\mu B$ en $L^p(\omega)$ en términos del operador de composición $\omega\mapsto\omega\circ f^{-1}$ asociado a una aplicación quasiconforme f con coeficiente μ. Combinando este hecho con resultados de Johnson y Neugebauer [25, Teorema 2.10] se tiene el siguiente corolario:

Corolario 3.4. Si $\mu\in VMO_c(\mathbb{C})$ entonces el

$$J(f^{-1})\in\cap_{p>1}A_p,$$

donde $J(z,\phi)=J(\phi)=|\partial\phi|^2-|\bar\partial\,\phi|^2$ denota el Jacobiano de la aplicación ϕ.

Por otra parte, el Teorema de Reimann que afirma que el logaritmo de una aplicación quasiconforme pertenece a $BMO(\mathbb{C})$ y cuya norma depende de la distorsión (véase [3, corolario 13.4.4.]). Esto nos permite conjeturar que:

Conjetura 1. Si $\mu\in VMO_c(\mathbb{C})$ entonces el $\log J(f)$ pertenece a la adherencia en $BMO(\mathbb{C})$ de las funciones acotadas. Es decir,

$$\mathrm{dis}_*(\log J(f),L^\infty(\mathbb{C})) := \inf_{g\in L^\infty(\mathbb{C})}\|\log\ J(f)-g\|_*=0.$$

3.1. Espacios de Lebesgue con pesos

Sea $1 < p < \infty$. Un *peso* ω es una función que pertenece a $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y tal que $\omega(x) > 0$ casi para todo punto $x \in \mathbb{R}^n$. Un peso ω es de la *clase* A_p si

$$[\omega]_{A_p} := \sup \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)\mathrm{d}x \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{-\frac{p'}{p}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{p}{p'}} < \infty$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos $Q \subset \mathbb{R}^n$ y donde se satisface la relación $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Dentro de las propiedades principales de la clase A_p tenemos las siguientes:

1. $A_p \subsetneq A_q$ si $1 < p < q < \infty$
2. Para $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p$ si y sólo si $\omega^{1-p'} \in A_{p'}$
3. Si $\omega \in A_p$ con $1 < p < \infty$, entonces para cada $0 < \epsilon < 1$, $\omega^\epsilon \in A_p$
4. Si $\omega \in A_p$ con $1 < p < \infty$, existe $\epsilon > 0$ tal que $p - \epsilon > 1$ y $\omega \in A_{p-\epsilon}$
5. Si $\omega \in A_p$ con $1 < p < \infty$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\omega^{1+\epsilon} \in A_{p-\epsilon}$

El *espacio de Lebesgue de orden* p *con peso* ω es el conjunto de funciones medibles que satisfacen

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x) \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{3.1.1}$$

La cantidad (3.1.1) se denota por $\| \quad \|_{L^p(\omega)}$ y define una norma con la cual $L^p(\omega)$ es un espacio de Banach.

Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n$, la *función maximal de Hardy-Littlewood* $Mf(x)$ *de* f está definida por

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| \mathrm{d}y$$

donde $|E|$ denota la medida de Lebesgue del conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^n$. Al considerar M como operador, recibe el nombre de *operador maximal de Hardy-Littlewood.*

Dado un operador integral singular T, definimos el *operador integral singular truncado* como

$$T_\epsilon f(x) = \int_{|x-y| \geq \epsilon} K(x,y) f(y) \mathrm{d}y$$

y el *operador integral singular maximal* mediante la relación

$$T^* f(x) = \sup_{\epsilon > 0} |T_\epsilon f(x)| \, .$$

Es conocido que dado un peso $\omega \in A_p$, los operadores de Calderón-Zygmund, los operadores singulares truncados y maximales son continuos en $L^p(\omega)$ (*e. g.* Cap. IV, Teoremas 3.1 y 3.6 en [19]). Además el operador conmutador también es continuo en $L^p(\omega)$ (*e. g.* Teorema 2.3 en [48]).

3.2. Demostración del Teorema 3.3

En esta sección presentamos un resultado sobre la compacidad de subconjuntos de $L^p(\omega)$, que en $L^p(\mathbb{R}^n)$ se reduce al Teorema de Frechet-Kolmogorov. Su demostración se basa en ideas contenidas en el artículo de Hanche y Olsen [22].

Recordemos que un espacio métrico X es *totalmente acotado* si para todo $\epsilon > 0$ existe un número finito de bolas abiertas de radio ϵ cuya unión es el espacio X. Además, un espacio métrico es compacto si y sólo si es completo y totalmente acotado. Por tanto, en espacios con pesos $L^p(\omega)$, demostrar la compacidad de un subconjunto es equivalente a demostrar que dicho subconjunto sea totalmente acotado. El siguiente lema provee de condiciones para que un conjunto sea totalmente acotado.

Lema 3.2.1 (Lema 1 en [22])**.** Sea X un espacio métrico. Supongamos que para cada $\epsilon > 0$ existen $\delta > 0$, un espacio métrico W y una aplicación $\Phi\colon X \to W$ tal que $\Phi(X)$ es totalmente acotado, y cuando $x, y \in X$, son tales que $d(\Phi(x), \Phi(y)) < \delta$, entonces $d(x, y) < \epsilon$. Entonces X es totalmente acotado.

Demostración del Teorema 3.3. Supongamos que la familia $\mathfrak{F}$ satisface las tres condiciones del enunciado del Teorema 3.3. Dado $\rho \geq 0$, sea Q el máximo cubo abierto centrado en el origen y tal que $Q \subset B(0, \frac{\rho}{2})$. Para $R > 0$, consideremos $Q_1, \ldots, Q_N$ traslaciones de Q de forma que no se traslapen y tal que, además, se cumpla

$$\overline{Q(0, R)} = \overline{\cup_i Q_i},$$

donde $Q(0, R)$ es el cubo abierto en el origen de lado R. Sea P la proyección de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ en el espacio generado por las funciones características χ_{Q_i} de los cubos Q_i, es decir,

$$\begin{aligned} Pf(x) &= \begin{cases} \frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i} f(z)\mathrm{d}z, & x \in Q_i, i = 1, \ldots, N, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} && (3.2.1) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \chi_{Q_i}(x) \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} f(z)\mathrm{d}z. && (3.2.2) \end{aligned}$$

Notemos que si $f \in L^p(\omega)$ entonces $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y además,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} & |Pf(x)|^p \omega(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\cup_{i=1}^n Q_i} \left| \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} f(z)\mathrm{d}z \right|^p \omega(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{1}{|Q_i|^p} \left(\int_{Q_i} \omega(x)\mathrm{d}x \right) \left| \int_{Q_i} \frac{f(z)\omega^{\frac{1}{p}}(z)}{\omega^{\frac{1}{p}}(z)} \mathrm{d}z \right|^p \\
&\leq \sum_{i=1}^N \frac{1}{|Q_i|^p} \left(\int_{Q_i} \omega(x)\mathrm{d}x \right) \left(\int_{Q_i} |f(z)|^p \omega(z)\mathrm{d}z \right) \left(\int_{Q_i} \omega^{\frac{-p'}{p}}(z)\mathrm{d}z \right)^{\frac{p}{p'}} \\
&\leq [\omega]_{A_p} \|f\|^p_{L^p(\omega)}. \qquad (3.2.3)
\end{aligned}
$$

Esto demuestra que el operador proyección P es continuo de $L^p(\omega)$ en sí mismo. Por otra parte, para $f \in \mathfrak{F}$, tenemos que

$$
\|f - Pf\|_{L^p(\omega)} \leq \|f - f\chi_{Q(0,R)}\|_{L^p(\omega)} + \|f\chi_{Q(0,R)} - Pf\|_{L^p(\omega)}.
$$

De la hipótesis 3 sabemos que

$$
\sup_{f \in \mathfrak{F}} \|f - \chi_{Q(0,R)} f\|_{L^p(\omega)} \xrightarrow{R \to \infty} 0. \qquad (3.2.4)
$$

Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe $R_0 > 0$ tal que

$$
\sup_{f \in \mathfrak{F}} \|f - \chi_{Q(0,R)} f\|_{L^p(\omega)} < \frac{\epsilon}{4}, \qquad \text{si } R > R_0. \qquad (3.2.5)
$$

Para el otro término, utilizando la desigualdad de Jensen,

$$
\begin{aligned}
\|f\chi_{Q(0,R)} - Pf\|^p_{L^p(\omega)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |f\chi_{Q(0,R)}(x) - Pf(x)|^p \omega(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\cup_i Q_i} \left| f(x) - \sum_{j=1}^N \chi_{Q_j}(x) \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(z)\mathrm{d}z \right|^p \omega(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{Q_i} \left| \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} (f(x) - f(z))\mathrm{d}z \right|^p \omega(x)\mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{i=1}^N \int_{Q_i} \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} |f(x) - f(z)|^p \mathrm{d}z\, \omega(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Ahora bien si $x, z \in Q_i$, entonces $z - x = h \in 2Q$. Así,

$$\begin{aligned}
\|f\chi_{Q(0,R)} - Pf\|^p_{L^p(\omega)} &\leq \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} \frac{1}{|Q_j|} \int_{2Q} |f(x) - f(x+h)|^p \mathrm{d}h \, \omega(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{2Q} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_i} |f(x) - f(x+h)|^p \omega(x) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}h \\
&\leq \frac{1}{|Q|} \int_{2Q} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x+h)|^p \omega(x) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}h \\
&\leq \sup_{h \in 2Q} \|f(\cdot) - f(\cdot + h)\|^p_{L^p(\omega)} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{2Q} \mathrm{d}h \right) \\
&= 2^n \sup_{f \in \mathfrak{F}} \|f(\cdot) - f(\cdot + h)\|^p_{L^p(\omega)} \qquad (3.2.6)
\end{aligned}$$

Entonces, si combinamos esto con la hipótesis 2 sobre $\mathfrak{F}$, podemos encontrar $\rho > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$\|f\chi_{Q(0,R)} - Pf\|_{L^p(\omega)} < \frac{\epsilon}{4} \qquad \text{para todo } f \in \mathfrak{F}. \qquad (3.2.7)$$

De las relaciones (3.2.5) y (3.2.7) tenemos que

$$\|f - Pf\|_{L^p(\omega)} < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{para todo } f \in \mathfrak{F}$$

y, por la desigualdad del triángulo,

$$\|f\|_{L^p(\omega)} < \frac{\epsilon}{2} + \|Pf\|_{L^p(\omega)}. \qquad (3.2.8)$$

Para concluir la prueba observemos que, por (3.2.3), la proyección P es acotada. Luego $P(\mathfrak{F})$ es totalmente acotado. Además, si

$$\|Pf - Pg\|_{L^p(\omega)} = \|P(f - g)\|_{L^p(\omega)} < \delta$$

con $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ y para $f, g \in \mathfrak{F}$, entonces, por (3.2.8) y la linealidad de P, obtenemos

$$\|f - g\|_{L^p(\omega)} < \frac{\epsilon}{2} + \|Pf - Pg\|_{L^p(\omega)} < \epsilon.$$

Aplicando el lema 3.2.1, la familia $\mathfrak{F}$ es totalmente acotada.

$\square$

3.3. Compacidad del conmutador en $L^p(\omega)$

En esta sección demostramos el Teorema 3.2. Antes de comenzar la demostración, haremos dos reducciones. En primer lugar, y dado que las funciones de la clase $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ son densas en $VMO(\mathbb{R}^n)$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $b \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (subsección 3.3.1). En segundo lugar, utilizaremos una *extensión continua del núcleo*. Esta técnica fue utilizada en el artículo de Krantz y Li [29] para demostrar la compacidad del conmutador en espacios homogéneos (subsección 3.3.2). Por último, en la subsección 3.3.3, terminamos la prueba del Teorema 3.2.

3.3.1. Reducción a $b \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

Como consecuencia de [41, Teorema 1], y dado que el operador maximal es acotado en $L^p(\omega)$ en sí mismo para pesos $\omega \in A_p$ (*e. g.* Teorema I de [13, pag.242]), se demuestra que el conmutador $C_b = [b, T]$ es continuo para $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ y satisface la estimación

$$\|C_b f\|_{L^p(\omega)} \leq C_1[\omega]_{A_\infty}\|b\|_*\|M^2 f\|_{L^p(\omega)} \leq C_1[\omega]_{A_\infty}\|b\|_*\|f\|_{L^p(\omega)} \tag{3.3.1}$$

donde la constante C_1 depende de las constantes del núcleo de Calderón-Zygmund y la dimensión. Como la clase de funciones $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es densa en $VMO(\mathbb{R}^n)$, podemos aproximar la función b por funciones $b_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, es decir,

$$\|b_j - b\|_* \xrightarrow{j\to\infty} 0.$$

De esta manera,

$$\|C_b f - C_{b_j} f\|_{L^p(\omega)} = \|C_{b-b_j} f\|_{L^p(\omega)} \leq C_1[\omega]_{A_\infty}\|b - b_j\|_*\|f\|_{L^p(\omega)} \xrightarrow{j\to\infty} 0. \tag{3.3.2}$$

Debido a lo anterior y utilizando la parte 4 del Teorema 1.15, supondremos de ahora en adelante que $b \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

3.3.2. Regularización del conmutador C_b

En esta subsección, seguimos las ideas de Krantz y Li en [29]. Para cada $\eta > 0$ suficientemente pequeño, definimos una *extensión continua del núcleo* K como la función K^η definida en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(x, y) : |x - y| < \eta\}$ que toma valores en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y que satisface las siguientes condiciones,

1. $K^\eta(x, y) = K(x, y)$ si $|x - y| \geq \eta$

2. $|K^\eta(x,y)| \leq \frac{C_0}{|x-y|^n}$ para $\frac{\eta}{2} < |x-y| < \eta$

3. $K^\eta(x,y) = 0$ si $|x-y| \leq \frac{\eta}{2}$

done C_0 es independiente de η. Nótese que, debido al crecimiento de K, no es restrictivo suponer que la condición 2 se cumple para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dada K^η una extensión continua del núcleo K, definimos

$$T^\eta f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K^\eta(x,y) f(y) \mathrm{d}y$$

y

$$C_b^\eta f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y)) K^\eta(x,y) f(y) \mathrm{d}y.$$

Lema 3.3.1. Para $1 < p < \infty$, el conmutador C_b puede aproximarse por los conmutadores C_b^η en la norma del operador, es decir,

$$\|C_b - C_b^\eta\|_{L^p(\omega)\to L^p(\omega)} \xrightarrow{\eta\to 0} 0.$$

Demostración. Sea $f \in L^p(\omega)$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos:

$$\begin{aligned} C_b f(x) - C_b^\eta f(x) &= \int_{B(x,\eta)} (b(x) - b(y)) K(x,y) f(y) \mathrm{d}y \\ &\quad - \int_{B(x,\eta)\setminus B(x,\frac{\eta}{2})} (b(x) - b(y)) K^\eta(x,y) f(y) \mathrm{d}y \\ &= I_1(x) + I_2(x). \end{aligned}$$

Para el sumando $I_1(x)$ se tiene

$$\begin{aligned} |I_1(x)| &= \left| \int_{B(x,\eta)} K(x,y)(b(x) - b(y)) f(y) \mathrm{d}y \right| \\ &\leq \int_{B(x,\eta)} |b(y) - b(x)||K(x,y)||f(y)| \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Debido a que $b \in C_c^\infty(\mathbb{C})$,

$$|I_1(x)| \leq C_0 \|\nabla b\|_\infty \int_{B(x,\eta)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-1}} \mathrm{d}y.$$

Utilizando la descomposición en coronas y la definición de la función maximal tenemos

$$\begin{aligned}
|I_1(x)| &\leq C_0\,\|\nabla b\|_\infty \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\frac{\eta}{2^{j+1}}<|x-y|<\frac{\eta}{2^j}} \frac{|f(y)|}{\left(\frac{\eta}{2^j}\right)^{n-1}}\mathrm{d}y \\
&= 2^n C_0\,\eta\,\|\nabla b\|_\infty \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} \frac{1}{\left(\frac{\eta}{2^j}\right)^{n}} \int_{\frac{\eta}{2^{j+1}}<|x-y|<\frac{\eta}{2^j}} |f(y)|\mathrm{d}y \\
&= 2^n C_0\,\eta\,\|\nabla b\|_\infty \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} \frac{1}{\left(\frac{\eta}{2^j}\right)^{n}} \int_{\frac{\eta}{2^{j+1}}<|x-y|<\frac{\eta}{2^j}} |f(y)|\mathrm{d}y \\
&\leq 2^n C_0\,\eta\,\|\nabla b\|_\infty \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} \frac{1}{\left(\frac{\eta}{2^j}\right)^{n}} \int_{|x-y|<\frac{\eta}{2^j}} |f(y)|\mathrm{d}y \\
&\leq 2^n C_0\,\eta\,|B(0,1)| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} \|\nabla b\|_\infty\, Mf(x)
\end{aligned}$$

para casi todo x. La estimación puntual implica que

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_{L^p(\omega)} &\leq 2^n C_0\,\eta\,|B(0,1)| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} \|\nabla b\|_\infty \|Mf\|_{L^p(\omega)} \\
&\leq 2^n C_0\,\eta\,|B(0,1)| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}}\, \|\nabla b\|_\infty \|f\|_{L^p(\omega)}. \qquad (3.3.3)
\end{aligned}$$

Para el sumando $I_2(x)$ se tiene,

$$\begin{aligned}
|I_2(x)| &\leq \max_{z\in B(x,\eta)} \{|b(z)-b(x)|\} \left| \int_{B(x,\eta)\setminus B(x,\frac{\eta}{2})} K^\eta(x,y) f(y)\mathrm{d}y \right| \\
&\leq C_0 \max_{z\in B(x,\eta)} \{|b(z)-b(x)|\} \int_{\frac{\eta}{2}<|x-y|<\eta} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n}\mathrm{d}y \\
&\leq C_0 \max_{z\in B(x,\eta)} \{|b(z)-b(x)|\} \int_{\frac{\eta}{2}<|x-y|<\eta} \frac{|f(y)|}{\left(\frac{\eta}{2}\right)^n}\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Utilizando la regularidad de la función b se tiene

$$|I_2(x)| \leq C_0 2^n \max_{z\in B(x,\eta)} \{|b(z)-b(x)|\} Mf(x) \leq C_0 2^n \|\nabla b\|_\infty \eta\, Mf(x).$$

Por tanto, nuevamente la estimación puntual implica

$$\|I_2\|_{L^p(\omega)} \leq 2^n C_0\,\eta\,\|\nabla b\|_\infty \|Mf\|_{L^p(\omega)} \leq 2^n C_0\,\eta\,\|\nabla b\|_\infty \|f\|_{L^p(\omega)}. \qquad (3.3.4)$$

Finalmente concluimos de (3.3.3) y de (3.3.4) que

$$\|C_b f - C_b^\eta f\|_{L^p(\omega)} \leq C_2\ \eta\ \|\nabla b\|_\infty \|f\|_{L^p(\omega)} \xrightarrow{\eta \to 0} 0$$

donde la constante C_2 depende de la constante C_0, el área de la bola unidad y la norma infinito de ∇b. Esto termina la demostración. $\square$

Dado que el límite de operadores compactos es un operador compacto por el inciso 4 del Teorema 1.15 nos reducimos al operador C_b^η.

3.3.3. Demostración del Teorema 3.2

Recordemos que si X e Y son dos espacios métricos completos entonces un operador $T\colon X \to Y$ es *compacto* si la imagen $T(B)$ de la bola unitaria $B \subset X$ es un conjunto *totalmente acotado.*

Demostración. Para demostrar la compacidad, utilizamos el Teorema 3.3. Para toda $f \in L^p(\omega)$ tal que $\|f\|_{L^p(\omega)} \leq 1$, consideramos la familia de funciones $\mathfrak{F} = \{C_b^\eta f\}$. La acotación uniforme es consecuencia directa de la continuidad del conmutador en $L^p(\omega)$, es decir

$$\|C_b^\eta f\|_{L^p(\omega)} \leq [\omega]_{A_\infty} \|b\|_* \|f\|_{L^p(\omega)}$$

para $1 < p < \infty$ (véase (3.3.1)). Para demostrar la equicontinuidad uniforme de la familia $\mathfrak{F}$, es necesario demostrar la condición

$$\|C_b^\eta f(\cdot) - C_b^\eta f(\cdot + h)\|_{L^p(\omega)} \xrightarrow[unif]{h \to 0} 0.$$

Escribimos,

$$\begin{aligned} C_b^\eta f(x) - C_b^\eta f(x+h) &= (b(x) - b(x+h)) \int_{\mathbb{R}^n} K^\eta(x,y) f(y) \mathrm{d}y \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} (b(x+h) - b(y))(K^\eta(x,y) - K^\eta(x+h,y)) f(y) \mathrm{d}y \\ &= I_1(x,h) + I_2(x,h). \end{aligned}$$

Para $I_1(x,h)$, utilizando la regularidad de la función b y la definición del operador T^*,

$$
\begin{aligned}
|I_1(x,h)| &\leq |b(x)-b(x+h)| \left| \int_{|x-y|>\frac{\eta}{2}} K^{\eta}(x,y) f(y) \mathrm{d}y \right| \\
&\leq \|\nabla b\|_{\infty} |h| \left| \int_{|x-y|>\frac{\eta}{2}} \left(K^{\eta}(x,y) - K(x,y)\right) f(y)\mathrm{d}y + \int_{|x-y|>\frac{\eta}{2}} K(x,y) f(y)\mathrm{d}y \right| \\
&\leq \|\nabla b\|_{\infty} |h| \cdot \\
&\quad \cdot \left(\left| \int_{|x-y|>\frac{\eta}{2}} \left(K^{\eta}(x,y) - K(x,y)\right) f(y)\mathrm{d}y \right| + \sup_{R>0} \left| \int_{|x-y|>R} K(x,y) f(y)\mathrm{d}y \right| \right) \\
&\leq \|\nabla b\|_{\infty} |h| \ (Mf(x) + T^{*}f(x).)
\end{aligned}
$$

Entonces (utilizando *e. g.* Teorema 3.6 del Cap. IV de [19]),

$$
\|I_1(\cdot,h)\|_{L^p(\omega)} \leq \|\nabla b\|_{\infty} |h| \, \|T^{*}f\|_{L^p(\omega)} \leq |h| \|\nabla b\|_{\infty} \, \|f\|_{L^p(\omega)}. \tag{3.3.5}
$$

Para acotar el término $I_2(x,h)$, consideramos las siguientes regiones,

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{ |x-y| > \frac{\eta}{2}, \quad |x+h-y| > \frac{\eta}{2} \right\}, \\
B &= \left\{ |x-y| > \frac{\eta}{2}, \quad |x+h-y| < \frac{\eta}{2} \right\}, \\
C &= \left\{ |x-y| < \frac{\eta}{2}, \quad |x+h-y| > \frac{\eta}{2} \right\}.
\end{aligned}
$$

Observemos que,

$$
I_2(x,h) = I_2(x,h)|_A + I_2(x,h)|_B + I_2(x,h)|_C.
$$

De esta manera procedemos a acotar cada sumando. Primeramente, por la condición del núcleo K^{η} y dado que $b \in C_c^{\infty}(\mathbb{C})$

$$
\begin{aligned}
|I_2(x,h)|_A| &= \left| \int_A (b(x+h) - b(y))(K^{\eta}(x,y) - K^{\eta}(x+h,y)) f(y) \mathrm{d}y \right| \\
&\leq C_0 \|\nabla b\|_{\infty} |h| \int_{|x-y|>\frac{\eta}{4}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n+1}} \mathrm{d}y \\
&\leq C_0 \|\nabla b\|_{\infty} |h| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\left(2^j \frac{\eta}{4}\right)^{n+1}} \int_{\frac{2^{j+1}\eta}{4} < |x-y| < \frac{2^j \eta}{4}} |f(y)| \mathrm{d}y \\
&\leq C_0 \|\nabla b\|_{\infty} |h| \frac{2}{\eta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{1}{\left(\frac{2^j \eta}{4}\right)} \int_{\frac{2^{j+1}\eta}{4} < |x-y| < \frac{2^j \eta}{4}} |f(y)| \mathrm{d}y \\
&\leq C_0 \|\nabla b\|_{\infty} |h| \quad Mf(x)
\end{aligned} \tag{3.3.6}
$$

Para $I_2(x,h)|_B$, supongamos sin pérdida de generalidad que el soporte de $b(x)$ está contenido en la bola con centro en $B_0 = B(0,R_0)$, entonces podemos suponer que el soporte de $b(x+h)$ está en la bola $2B_0 = B(0,2R_0)$. De esta manera consideramos dos casos. Primero, si $|x| < 3R_0$,

$$\begin{aligned}
|I_2(x,h)|_B| &\leq C_0 \int_{B\cap 2B_0} \frac{|b(x+h)-b(y)|\,|f(y)|}{|x-y|^n}\mathrm{d}y \\
&\leq C_0 \frac{\|\nabla b\|_\infty}{\left(\frac{\eta}{2}\right)^n} \int_{B\cap 2B_0} |x+h-y|\,|f(y)|\mathrm{d}y \\
&\leq C_0 \frac{\|\nabla b\|_\infty}{\left(\frac{\eta}{2}\right)^{n-1}} \int_{B\cap 2B_0} \frac{|f(y)|\omega(y)^{\frac{1}{p}}}{\omega(y)^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}y \\
&\leq C_0 \|\nabla b\|_\infty \|f\|_{L^p(\omega)} \left(\frac{2}{\eta}\right)^{n-1} \left(\int_B \omega(y)^{-\frac{p'}{p}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p'}} \qquad (3.3.7)
\end{aligned}$$

debido a que $\omega^{-\frac{p'}{p}} \in L^1_{loc}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{|x|<3R_0} |I_2(x,h)|_B|^p \omega(x)\mathrm{d}x &\leq C_0 \|\nabla b\|_\infty^p \|f\|_{L^p(\omega)}^p \int_{3B_0} \omega \left(\int_{B_0} \omega^{-\frac{p'}{p}}\right)^{\frac{p}{p'}} \left(\frac{2}{\eta}\right)^{(n+1)p} \\
&\leq C_0 \|\nabla b\|_\infty^p \|f\|_{L^p(\omega)}^p [\omega]_{A_p} |3B_0|^p \left(\frac{2}{\eta}\right)^{(n+1)p}.
\end{aligned}$$

Además

$$\int_{|x|<3R_0} |I_2(x,h)|_B|^p \omega(x)\mathrm{d}x \to 0$$

cuando $|B| \to 0$ de forma uniforme en f . Ahora bien, si $|x| > 3R_0$,

$$\begin{aligned}
|I_2(x,h)|_B| &\leq \|b\|_\infty \int_{B\cap B(0,2R_0)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n}\mathrm{d}y \\
&\leq \|b\|_\infty \frac{1}{|x|^n} \int_{B\cap B(0,2R_0)} |f(y)|\mathrm{d}y \\
&\leq \|b\|_\infty \frac{1}{|x|^n} \int_{B\cap B(0,2R_0)} \frac{|f(y)|\omega(y)^{\frac{1}{p}}}{\omega(y)^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}y \\
&\leq \|b\|_\infty \frac{\|f\|_{L^p(\omega)}}{|x|^n} \left(\int_{B\cap B(0,2R_0)} \omega(y)^{-\frac{p'}{p}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}\int_{|x|>3R_0} |I_2(x,h)|_B|^p \omega(x)\mathrm{d}x &\leq \|b\|_\infty \|f\|^p_{L^p(\omega)} \left(\int_{|x|>3R_0} \frac{\omega(x)}{|x|^{np}}\mathrm{d}x\right)\cdot \\ &\qquad \left(\int_{B\cap B(0,3R_0)} \omega(y)^{-\frac{p'}{p}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{p'}} \\ &\leq C_3 \left(\int_{B\cap B(0,3R_0)} \omega(y)^{-\frac{p'}{p}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{p'}} \xrightarrow[unif]{h\to 0} 0. \quad (3.3.8)\end{aligned}$$

Para obtener la conclusión en (3.3.8) falta por demostrar que

$$\int_{|x|>3R_0} \frac{\omega(x)}{|x|^{np}}\mathrm{d}x < \infty.$$

Dado que $\omega \in A_p$ y por la propiedad abierta de los pesos, tenemos que $\omega \in A_q$ para algún $q < p$ (*e. g.* Teorema 2.6, Cap. IV en [19]). Entonces

$$\begin{aligned}\int_{|x|>R_0} \frac{\omega(x)}{|x|^{np}}\mathrm{d}x &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^{j-1}<|x|<2^j} \frac{\omega(x)}{|x|^{np}}\mathrm{d}x \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (2^j R_0)^{-np} \omega(2^j B(0,R_0)) = \sum_{j=1}^{\infty} (2^j R_0)^{-np} \omega(B(0,2^j R_0))\end{aligned}$$

Además, utilizando el Lema 2.2 en [19] se tiene

$$\begin{aligned}\int_{|x|>R_0} \frac{\omega(x)}{|x|^{np}}\mathrm{d}x &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (2^j R_0)^{-np} (2^j R_0)^{nq} \omega(B(0,1)) \\ &\leq \frac{1}{R_0^{n(p-q)}} \sum_{j=1}^{\infty} (2^j)^{-n(p-q)} \omega(B(0,1)). \quad (3.3.9)\end{aligned}$$

Para el término $I_2(x,h)|_C$ se procede de forma análoga. De las estimaciones anteriores se tiene la equicontinuidad para la familia $\mathfrak{F}$.
Finalmente, procedemos a demostrar la condición de decaimiento al infinito, es decir, tenemos que demostrar que

$$\int_{|x|>R} |C_b^\eta f(x)|^p \omega(x)\mathrm{d}x \xrightarrow{R\to\infty} 0,$$

uniformemente en $f \in \mathfrak{F}$. Sea R suficientemente grande y observemos que si $|x| > R$,

$x \notin \operatorname{supp} b$. Entonces, para estos x,

$$
\begin{aligned}
|C_b^\eta f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y)) K^\eta(x,y) f(y) \mathrm{d}y \right| \\
&\leq C_0 \|\nabla b\|_\infty \int_{\operatorname{supp} b} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} \mathrm{d}y \\
&\leq C_0 \|\nabla b\|_\infty \frac{1}{|x|^n} \int_{\operatorname{supp} b} \frac{|f(y)| \omega(y)^{\frac{1}{p}}}{\omega(y)^{\frac{1}{p}}} \mathrm{d}y \\
&\leq C_0 \|\nabla b\|_\infty \frac{\|f\|_{L^p(\omega)}}{|x|^n} \left(\int_{\operatorname{supp} b} \omega(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq C_0 \|\nabla b\|_\infty \frac{\|f\|_{L^p(\omega)}}{|x|^n}. \qquad (3.3.10)
\end{aligned}
$$

Entonces

$$\int_{|x|>R} |C_b^\eta f(x)|^p \omega(x) \mathrm{d}x \leq C_0 \|f\|_{L^p(\omega)} \int_{|x|>R} \frac{\omega(x)}{|x|^{np}} \mathrm{d}x.$$

Nos basta observar que de (3.3.9) tenemos

$$\int_{|x|>R} \frac{\omega(x)}{|x|^{np}} \mathrm{d}x \xrightarrow{R \to \infty} 0.$$

□

3.4. Invertibilidad del operador de Beltrami

En esta sección demostramos el Teorema 3.1.

Demostración del Teorema 3.1. Como en el capítulo 2, el esquema de la demostración se basa en la prueba de Iwaniec en [24, pág. 42–43]. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el operador

$$P_n = I + \mu B + \cdots + (\mu B)^n$$

y observemos que

$$(I - \mu B) P_{n-1} = P_{n-1}(I - \mu B) = I - \mu^n B^n + K \qquad (3.4.1)$$

donde $K = \mu^n B^n - (\mu B)^n$. Utilizaremos la teoría de operadores de Fredholm para demostrar la invertibilidad de $I - \mu B$.

El operador K es compacto por ser suma finita de operadores que tienen como factor el conmutador que es compacto por el Teorema 3.2. Además, el operador $I - \mu^n B^n$ es invertible. Para ver esto observemos que, las iteradas de la trasformada de Beurling B^n tienen como núcleo

$$b_n(z) = \frac{(-1)^n n}{\pi}\frac{\bar{z}^{n-1}}{z^{n+1}}.$$

Por tanto

$$\|B^n\|_{L^p(\omega)} \leq Cn^2,$$

donde la constante C depende de $[\omega]_{A_p}$. Luego

$$\begin{aligned}\|\mu^n B^n f\|_{L^p(\omega)} &\leq \|\mu\|_\infty^n \|B^n f\|_{L^p(\omega)} \\ &\leq Cn^2 \|\mu\|_\infty^n \|f\|_{L^p(\omega)}.\end{aligned}$$

Si n es suficientemente grande, la norma de $\mu^n B^n$ es pequeña y por tanto $I - \mu^n B^n$ es invertible.

Aplicando el Corolario 1.21 a la relación (3.4.1), tenemos que $I - \mu B$ es un operador de Fredholm. Utilizando este hecho, aplicamos la teoría del índice a $I - \mu B$. La deformación continua $I - t\mu B$ con $t \in [0, 1]$, es una homotopía del operador identidad en el operador de Beltrami. Como index$(I - t\mu B)$ es independiente de t, por el Teorema 1.19 en particular se tiene

$$\operatorname{index}(I - \mu B) = \operatorname{index}(I) = 0.$$

Por otra parte, el operador $I - \mu B$ es inyectivo en $L^p(\omega)$. Para demostrar esta afirmación, sea $f \in \ker_{L^p(\omega)}(I - \mu B)$. Entonces $f = \mu B f$ y por tanto, la aplicación f tiene soporte compacto. De las propiedades de la clase A_p, existe $\delta > 0$ tal que $p - \delta > 1$ y $\omega \in A_{p-\delta}$. Entonces $\omega^{-\frac{1}{p-\delta}} \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$ y tomando $\epsilon = \frac{\delta}{p-\delta}$, tenemos mediante la desigualdad de Hölder ,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} |f(x)|^{1+\epsilon}\mathrm{d}x &\leq \left(\int_{\operatorname{supp} f} |f(x)|^p \omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1+\epsilon}{p}} \left(\int_{\operatorname{supp} f} \omega(x)^{-\frac{1+\epsilon}{p-(1+\epsilon)}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-(1+\epsilon)}{p}} \\ &\leq \|f\|^{1+\epsilon}_{L^p(\omega)} \left(\int_{\operatorname{supp} f} \omega(x)^{-\frac{1+\epsilon}{p-(1+\epsilon)}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-(1+\epsilon)}{p}} < \infty.\end{aligned}$$

Por tanto $f \in L^{1+\epsilon}(\mathbb{C})$. Dado que el operador $I - \mu B$ es inyectivo para todo $1 < p < \infty$ cuando $\mu \in VMO(\mathbb{C})$, concluimos que $f \equiv 0$.

De la definición del índice para un operador de Fredholm 1.11.1, concluimos que el operador $I - \mu B$ es exhaustivo y por tanto invertible.

□

3.5. Comentarios al Capítulo 3

Dado un peso $\omega \in A_p$ con $1 < p < \infty$, en el Teorema 3.1 probamos que el operador $I - \mu B$ tiene inverso continuo como operador de $L^p(\omega)$ en $L^p(\omega)$. Esto implica en particular

$$\|(I - \mu B)g\|_{L^p(\omega)} \geq C\ \|g\|_{L^p(\omega)}.$$

A la práctica, esta desigualdad se puede caracterizar en términos de las clases de Muckenhoupt.

Proposición 3.5.1. Sea $1 < p < \infty$. Supongamos que $\mu \in VMO_c(\mathbb{C})$ tal que $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$ y consideremos f el homeomorfismo quasiconforme asociado al coeficiente μ. Entonces, dado $\omega \in A_p$, son equivalentes:

1. El peso $\eta(z) = \omega \circ f^{-1}(z)\ J(z, f^{-1})^{1-\frac{p}{2}}$ pertenece a la clase A_p.

2. Existe una constante C tal que

$$\|(I - \mu B)g\|_{L^p(\omega)} \geq C\ \|g\|_{L^p(\omega)} \tag{3.5.1}$$

   para todo $g \in L^p(\omega)$.

Demostración. La prueba sigue las líneas de la demostración del Lema 14 en [4]. Veamos primero que (1) implica (2). Dado que las funciones de la clase $C_c^\infty(\mathbb{C})$ son densas en $L^p(\omega)$, nos restringimos a considerar aplicaciones $g \in C_c^\infty(\mathbb{C})$. Sea

$$h(z) := (I - \mu B)g(z).$$

Haciendo $G(z) = Cg(z)$, observamos que $G \in C^\infty(\mathbb{C})$ con derivadas en $L^p(\omega)$. Por tanto la función G satisface la ecuación de Beltrami no homogénea

$$G_{\bar{z}}(z) = \mu(z)G_z(z) + h(z)$$

y la estimación (3.5.1) se transforma en

$$\|h\|_{L^p(\omega)} \geq C\ \|g\|_{L^p(\omega)} = C\ \|G_{\bar{z}}\|_{L^p(\omega)}.$$

Elegimos el homeomorfismo quasiconforme f que satisface la ecuación de Beltrami con coeficiente μ

$$\bar{\partial} f(z) = \mu(z)\ \partial f(z)$$

y sea $u = G \circ f^{-1}$. Mediante la regla de la cadena tenemos las relaciones:

$$\begin{aligned} G_{\bar{z}} &= (u_z \circ f) f_{\bar{z}} + (u_{\bar{z}} \circ f)\overline{f_z}, \\ \mu G_z + h &= \mu((u_z \circ f) f_z + (u_{\bar{z}} \circ f)\overline{f_{\bar{z}}}) + h. \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

Eliminando los términos que tienen a u_z tenemos que

$$(u_{\bar{z}} \circ f)\overline{f_z} = \frac{h}{1 - |\mu|^2}$$

y por tanto, dado que $\omega \in A_p$,

$$\int_{\mathbb{C}} |(u_{\bar{z}} \circ f)\overline{f_z}|^p \omega(z) \mathrm{d}z \leq \frac{1}{(1 - k^2)^p} \int_{\mathbb{C}} |h(z)|^p \omega(z) \mathrm{d}z. \tag{3.5.3}$$

De las propiedades de la aplicación quasiconforme f tenemos

$$|f_{\bar{z}}|^2 \leq |f_z|^2 \leq \frac{J(z, f)}{1 - k^2}.$$

Así, mediante un cambio de variable

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} |(u_z \circ f) f_{\bar{z}}|^p \omega(z) \mathrm{d}z &\leq \frac{1}{(1 - k^2)^{\frac{p}{2}}} \int_{\mathbb{C}} |(u_z \circ f)|^p J(z, f)^{\frac{p}{2}} \omega(z) \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{(1 - k^2)^{\frac{p}{2}}} \int_{\mathbb{C}} |u_z(w)|^p J(w, f^{-1})^{1 - \frac{p}{2}} \omega \circ f^{-1}(w) \mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{(1 - k^2)^{\frac{p}{2}}} \int_{\mathbb{C}} |u_z(w)|^p \eta(w) \, \mathrm{d}w \end{aligned}$$

Por hipótesis, $\eta \in A_p$. Luego,

$$\int_{\mathbb{C}} |u_z(w)|^p \eta(w) \mathrm{d}w \leq C_0^p \int_{\mathbb{C}} |u_{\bar{z}}(w)|^p \eta(w) \mathrm{d}w$$

dado que $u_z = B(u_{\bar{z}})$ y B es acotado en $L^p(J(z, f^{-1})^{1 - \frac{p}{2}} \omega \circ f^{-1})$ con norma $C_0 = C_0(\omega, p, f)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} |(u_z \circ f) f_{\bar{z}}|^p \omega(z) \mathrm{d}z &\leq \frac{C_0^p}{(1 - k^2)^{\frac{p}{2}}} \int_{\mathbb{C}} |u_{\bar{z}}(w)|^p J(w, f^{-1})^{1 - \frac{p}{2}} \omega \circ f^{-1}(w) \mathrm{d}w \\ &= \frac{C_0^p}{(1 - k^2)^{\frac{p}{2}}} \int_{\mathbb{C}} |u_{\bar{z}} \circ f|^p J(z, f)^{\frac{p}{2}} \omega(z) \mathrm{d}z \\ &\leq \frac{C_0^p}{(1 - k^2)^{\frac{p}{2}}} \int_{\mathbb{C}} |(u_{\bar{z}} \circ f) f_z|^p \omega(z) \mathrm{d}z \\ &\leq \frac{C_0^p}{(1 - k^2)^{\frac{p}{2}}} \int_{\mathbb{C}} |h(z)|^p \omega(z) \mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

Al sustituir las estimaciones (3.5.3) y (3.5.4) en la norma en $L^p(\omega)$ de (3.5.2) se tiene

$$\|G_{\bar{z}}\|_{L^p(\omega)} \leq \|(u_z \circ f) f_{\bar{z}}\|_{L^p(\omega)} + \|(u_{\bar{z}} \circ f)\overline{f_z}\|_{L^p(\omega)} \leq \left(\frac{1}{(1-k^2)} + \frac{C_0}{(1-k^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \|h\|_{L^p(\omega)}.$$

Para demostrar que (2) implica (1), utilizaremos el hecho que la transformada de Beurling B caracteriza los pesos de A_p, es decir, probaremos que

$$B \colon L^p(\eta) \to L^p(\eta), \tag{3.5.5}$$

donde $\eta = \omega \circ \phi^{-1} J(\phi^{-1})^{1-\frac{p}{2}}$. Esto implica que $\eta \in A_p$ (véase [13, Teorema II] ó también [51, Proposición 1, pág. 198]).

Dado que las funciones de $C_c(\mathbb{C})$ son densas en $L^p(\eta)$ (véase *e. g.* [44, Teorema 3.14]), nos restringimos a esta clase. Sea entonces $g \in C_c(\mathbb{C})$ y $F(z) = Cg(z)$, así (3.5.5) equivale a demostrar

$$\|\partial F\|_{L^p(\eta)} \leq C \|\bar{\partial} F\|_{L^p(\eta)}.$$

Para F fija, sea $u = F \circ \phi$ donde ϕ es el homeomorfismo quasiconforme asociado al coeficiente μ. Entonces, mediante la regla de la cadena,

$$(I - \mu B)(\bar{\partial} u) = \bar{\partial} u - \mu \partial u = (1 - |\mu|^2)\bar{\partial} F(\phi)\overline{\partial \phi}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\|(I-\mu B)\bar{\partial} u\|^p_{L^p(\omega)} &\leq \int_{\mathbb{C}} |\bar{\partial} F(\phi)(z)\overline{\partial\phi}(z)|^p \omega(z) \mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{C}} |\bar{\partial} F(\xi)|^p |\overline{\partial\phi}(\phi^{-1}(\xi))|^p \omega \circ \phi^{-1}(\xi) J(\xi, \phi^{-1}) \mathrm{d}\xi \\
&\leq \frac{1}{(1-k^2)^{\frac{p}{2}}} \int_{\mathbb{C}} |\bar{\partial} F(\xi)|^p \omega \circ \phi^{-1}(\xi) J(\xi, \phi^{-1})^{1-\frac{p}{2}} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{(1-k^2)^{\frac{p}{2}}} \|\bar{\partial} F\|^p_{L^p(\eta)}.
\end{aligned} \tag{3.5.6}$$

Utilizando la hipótesis (3.5.1), se tiene que $\|(I-\mu B)(\bar{\partial} u)\|_{L^p(\omega)} \geq C\|\bar{\partial} u\|_{L^p(\omega)}$, luego basta demostrar que

$$C\|\bar{\partial} u\|_{L^p(\omega)} \geq \|\partial F\|_{L^p(\eta)}.$$

Mediante la aplicación de la regla de la cadena,

$$\partial F = \partial u(\phi^{-1})\partial\phi^{-1} + \bar{\partial} u(\phi^{-1})\partial\overline{\phi^{-1}}.$$

Luego, utilizando la desigualdad del triángulo

$$\|\partial F\|_{L^p(\eta)} \leq \|\partial u(\phi^{-1})\partial\phi^{-1}\|_{L^p(\eta)} + \|\bar{\partial} u(\phi^{-1})\partial\overline{\phi^{-1}}\|_{L^p(\eta)}.$$

Dado que $\omega \in A_p$ tenemos que $B\colon L^p(\omega) \to L^p(\omega)$ es acotado con norma $C_1 = C_1(\omega, p)$. Para el primer sumando se tiene,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{C}} |\partial u(\phi^{-1})(\xi)\, \partial\phi^{-1}(\xi)|^p \omega\circ\phi^{-1}(\xi) J(\xi,\phi^{-1})^{1-\frac{p}{2}} \mathrm{d}\xi \\
&\qquad\qquad \leq \frac{1}{(1-k^2)^{\frac{p}{2}}} \int_{\mathbb{C}} |\partial u(\phi^{-1})(\xi)|^p \omega\circ\phi^{-1}(\xi) J(\xi,\phi^{-1}) \mathrm{d}\xi \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{(1-k^2)^{\frac{p}{2}}} \int_{\mathbb{C}} |\partial u(z)|^p \omega(z) \mathrm{d}z \\
&\qquad\qquad \leq \frac{C_1^p}{(1-k^2)^{\frac{p}{2}}} \int_{\mathbb{C}} |\bar\partial\, u(z)|^p \omega(z) \mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado que $\|B\|_{L^p(\omega)\to L^p(\omega)} \leq C_1$. En definitiva,

$$\|\partial u(\phi^{-1})\partial\phi^{-1}\|_{L^p(\eta)} \leq \frac{C_1}{\sqrt{1-k^2}} \|\bar\partial\, u\|_{L^p(\omega)}. \tag{3.5.7}$$

Para el segundo sumando observemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} |\bar\partial\, u(\phi^{-1})(\xi)\, \partial\overline{\phi^{-1}}(\xi)|^p \eta(\xi) \mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{C}} |\bar\partial\, u(\phi^{-1})(\xi)|^p |\bar\partial\, \phi^{-1}(\xi)|^p \eta(\xi) \mathrm{d}\xi \\
&\leq \frac{k^p}{(1-k^2)^{\frac{p}{2}}} \int_{\mathbb{C}} |\bar\partial\, u(z)|^p \omega(z) \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\|\bar\partial\, u(\phi^{-1})\partial\overline{\phi^{-1}}\|_{L^p(\eta)} \leq \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \|\bar\partial\, u\|_{L^p(\omega)}. \tag{3.5.8}$$

Deducimos de (3.5.7) y (3.5.8) que

$$\|\partial F\|_{L^p(\eta)} \leq C\|\bar\partial\, u\|_{L^p(\omega)}$$

como habíamos afirmado. Esto termina la prueba. $\square$

Es claro que la desigualdad (3.5.1) implica la inyectividad del operador $I - \mu B$. Por otra parte, del Teorema 3.1 y de las equivalencias de la Proposición 3.5.1, tenemos que si $\mu \in VMO(\mathbb{C})$ con soporte compacto y f es el homeomorfismo quasiconforme asociado a μ, entonces

$$\omega \in A_2 \implies \omega\circ f^{-1} \in A_2.$$

Esto nos remite al problema de determinar qué homeomorfismos preservan la clase A_p por composición. Es decir, dado un homeomorfismo $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dar condiciones necesarias y suficientes sobre f que garanticen la siguiente implicación:

$$\omega \in A_p \implies \omega\circ f^{-1} \in A_p.$$

En este sentido, es útil recordar que Reimann demostró en [42] que BMO es invariante por composición con aplicaciones quasiconformes. Más aún, la quasiconformidad es necesaria. Sin embargo, a nivel de pesos de Muckenhoupt, la cuestión es diferente. Como ejemplo, basta considerar el peso

$$\omega(z) = \frac{1}{|z|^\alpha}, \quad -2(p-1) < \alpha < 2$$

y su composición con un estiramiento radial $f(z) = z|z|^{K-1}$. Este problema ya fue planteado por Johnson y Neugebauer en [25]. En su artículo, se caracterizan aquellos homeomorfismos que preservan la clase A_p. No es difícil ver que si f preserva A_p, entonces también debe preservar BMO por lo que f es quasiconforme [42]. A continuación, enunciamos una versión simplificada del resultado de Johnson y Neugebauer.

Teorema 3.5. Sea $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicación K-quasiconforme donde $K \geq 1$. Son equivalentes:

1. Dado $1 < p_0 < \infty$, si $\omega \in A_{p_0}$ entonces $\omega \circ f^{-1} \in A_{p_0}$, y $[\omega \circ f^{-1}]_{A_{p_0}}$ sólo depende de $[\omega]_{A_{p_0}}$ y K.
2. $J(f^{-1}) \in \bigcap_{p>1} A_p$.

Combinando el Teorema 3.5 y la Proposición 3.5.1 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.6. Si $\mu \in VMO_c(\mathbb{C})$ y $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es la aplicación quasiconforme asociada a μ, entonces

$$J(f^{-1}) \in \bigcap_{p>1} A_p. \tag{3.5.9}$$

Cabe mencionar que, en general, si f es K-quasiconforme entonces del artículo de Astala *et al.* [4] sólo se tiene

$$J(f^{-1}) \in \bigcap_{p>K} A_p.$$

Es decir, la regularidad del coeficiente de Beltrami μ es un factor decisivo. La condición (3.5.9) está estrechamente vinculada a un resultado clásico de Garnett y Jones en [20] que caracteriza la adherencia en BMO de L^∞ (véase también [19, pág. 474]) y que enunciamos a continuación.

Teorema 3.7. Son equivalentes para $h \in BMO(\mathbb{C})$:

1. $\mathrm{dis}_*(h, L^\infty(\mathbb{C})) := \inf_{g \in L^\infty(\mathbb{C})} \|h - g\|_* = 0$. En otras palabras, $h \in \overline{L^\infty}^{BMO}$.

2. e^h, $e^{-h} \in \bigcap_{p>1} A_p$.

Como consecuencia, si dado $\mu \in VMO_c(\mathbb{C})$ pudiéramos ver que la quasiconforme asociada f satisface

$$J(f) \in \bigcap_{p>1} A_p, \tag{3.5.10}$$

entonces combinando el Corolario 3.6 con el Teorema 3.5, se obtendría que

$$\frac{1}{J(f^{-1})} = J(f) \circ f^{-1} \in A_p \quad \text{para todo } 1 < p < \infty.$$

Esto, junto con el Corolario 3.6 y el Teorema 3.7, probaría la implicación

$$\mu \in VMO_c(\mathbb{C}) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{dis}_*(\log J(f), L^\infty) = \mathrm{dis}_*(\log J(f^{-1}), L^\infty) = 0,$$

tal y como habíamos conjeturado en la introducción de este capítulo. Nótese que, en general, si f es K-quasiconforme, sólo se tiene

$$\| \log Jf\|_* \leq C$$

donde C es una constante que depende de K (véase Reimann [42, Teorema 2]). Otra vez, pues, la regularidad de μ es fundamental.

CAPÍTULO 4

Aplicaciones quasiconformes con coeficientes soportados en dominios regulares

En el capítulo 2 estudiamos la regularidad de la solución principal de la ecuación de Beltrami en el plano dependiendo de la clase a la que pertenece el coeficiente μ. Relacionado con el estudio de la regularidad, en los capítulos 2 y 3 se muestra que el operador de Beltrami tiene un inverso acotado.

Nos concentramos ahora en la regularidad de las soluciones cuando nos restringimos a un dominio Ω. En el trabajo de Mateu *et al.* [36] se considera el caso en que el coeficiente de Beltrami es una función de $\mathcal{C}^{0,\epsilon}(\Omega)$ restringida a un dominio Ω de clase $\mathcal{C}^{1,\epsilon}$ con $0 < \epsilon < 1$. En este caso la aplicación quasiconforme asociada al coeficiente de Beltrami es bilipschitz. La importancia de las aplicaciones bilipschitz radica en que preservan propiedades métricas de los subconjuntos como, por ejemplo, la dimensión de Hausdorff.

El resultado principal del capítulo corresponde a la regularidad de la solución principal cuando el coeficiente de Beltrami está soportado en un dominio Ω.

Teorema 4.1. Sean $0 < \alpha < \epsilon < 1$ y $1 < p < \infty$ tal que $\alpha p > 2$. Consideremos un dominio acotado Ω con frontera de clase $\mathcal{C}^{1,\epsilon}$ y μ una función medible soportada en Ω tal que $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$.

1. Si $\mu \in W^{\alpha,p}(\Omega)$, entonces la solución principal de la ecuación de Beltrami es $f(z) = z + Ch(z)$, donde $h \in W^{\alpha,p}(\Omega)$.

2. Si $\mu \in B^\alpha_{p,p}(\Omega)$, entonces la solución principal de la ecuación de Beltrami es $f(z) = z + Ch(z)$, donde $h \in B^\alpha_{p,p}(\Omega)$.

El Teorema 4.1 nos dice en particular que la solución principal y, por el Teorema de Stoilow, todas las demás soluciones tienen un grado de diferenciabilidad más que el dato inicial μ.

La novedad del teorema radica en la expresión de la solución principal ya que el hecho que sea bilipschitz ya estaba garantizado por el resultado de Mateu *et al.* en [36]. El esquema de la demostración del Teorema 4.1 es el mismo que en los capítulos anteriores. Dedicamos la sección 4.2 a dicha prueba. El primer problema al que nos enfrentamos en la demostración es saber si la transformada de Beurling restringida a un dominio Ω es un operador continuo en los espacios $W^{\alpha,p}(\Omega)$ y $B^{\alpha}_{p,p}(\Omega)$. En la página 19 hemos observado que los operadores de Calderón-Zygmund de convolución están acotados en los espacios de Sobolev y Besov. Al restringirlos a un dominio Ω dejan de ser operadores de convolución.

Un operador de Calderón-Zygmund homogéneo es de *tipo par* si es el valor principal del operador de convolución

$$Tf(x) = VP \int f(x-y)K(y)\mathrm{d}y$$

donde $K(x) = \frac{\omega(x)}{|x|^n}$ para $x \neq 0$ y tal que $\omega(x)$es una función homogénea de grado cero, continuamente diferenciable en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y con integral cero sobre la esfera unitaria.

En general, para un operador de la clase de Calderón-Zygmund de tipo par se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.2. Sea T un operador de Calderón-Zygmund de tipo par restringido a un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

1. Si $T\chi_\Omega \in B^{\alpha}_{p,p}(\Omega)$ con $\alpha p > n$, entonces $T\colon B^{\alpha}_{p,p}(\Omega) \to B^{\alpha}_{p,p}(\Omega)$.

2. Si $T\chi_\Omega \in W^{\alpha,p}(\Omega)$ con $\alpha p > n$, entonces $T\colon W^{\alpha,p}(\Omega) \to W^{\alpha,p}(\Omega)$.

3. Si $T\chi_\Omega \in W^{1,p}(\Omega)$ con $p > n$, entonces $T\colon W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)$.

En principio, no se requiere que el dominio Ω sea acotado.

Del hecho que T es de Calderón-Zygmund, se tiene que $T\colon L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ es continuo. Además, utilizando la parte 3 del Teorema 4.2 y los métodos de interpolación real y compleja se tiene que $T\colon A^{\alpha}_{p,q}(\Omega) \to A^{\alpha}_{p,q}(\Omega)$ siempre que se cumpla la hipótesis $T\chi_\Omega \in W^{1,p}(\Omega)$. En particular se obtienen los casos 1 y 2. Sin embargo la condición $T\chi_\Omega \in W^{1,p}(\Omega)$ es más restrictiva que las impuestas $(W^{1,p}(\Omega) \subsetneq A^{\alpha}_{p}(\Omega))$.

La condición que $T\chi_\Omega$ pertenezca al espacio pertinente es claramente necesaria y en nuestro caso obtenemos que es también suficiente. La regularidad de la frontera del dominio Ω juega un papel esencial en ésta cuestión. En el caso $W^{1,p}(\Omega)$, Tolsa en [54] da condiciones sobre la parametrización de la frontera del dominio Ω para que $B\chi_\Omega \in W^{1,p}(\Omega)$.

En la siguiente sección introducimos los resultados necesarios para el resto de este capítulo.

4.1. Resultados preliminares

Recordemos que un *dominio* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y conexo. Decimos que un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es *de clase* C si en cada punto $\partial\Omega$ se tiene una vecindad U tal que el conjunto $U \cap \Omega$ puede representarse por la desigualdad

$$x_n < f(x_1, \dots, x_{n-1}) \tag{4.1.1}$$

en algún sistema de coordenadas cartesianas y donde $f \in C(G)$ para G es un dominio de $\mathbb{R}^{n-1}$. La clase de dominios $\mathcal{C}^{0,1}$ (C^k y $\mathcal{C}^{k,\gamma}$) se obtiene al pedir que la función f de 4.1.1 pertenezca a $\mathcal{C}^{0,1}(G)$ ($C^k(G)$ y $\mathcal{C}^{k,\gamma}(G)$ respectivamente).

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y sean $\alpha > 0$, $p, q \in (0, \infty]$. Definimos $A^\alpha_{p,q}(\Omega)$ como el conjunto de funciones f tales que existe una función $g \in A^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ tal que $g|_\Omega = f$ y donde $A = F$ en el caso de la clase de Triebel-Lizorkin o $A = B$ en el caso de espacios de Besov. La norma en $A^\alpha_{p,q}(\Omega)$ está dada por

$$\|f\|_{A^\alpha_{p,q}(\Omega)} := \inf \|g\|_{A^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las $g \in A^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ tales que $g|_\Omega = f$.

En el caso particular del espacio de Besov $B^\alpha_{p,p}(\Omega)$ para $0 < \alpha < 1$, tenemos la siguiente caracterización cuando el dominio Ω tiene frontera de clase $\mathcal{C}^{0,1}$.

Proposición 4.1.1 (Caracterización del espacio de Besov $B^\alpha_{p,q}(\Omega)$)**.** Supongamos que Ω es un dominio acotado de clase $\mathcal{C}^{0,1}$. Entonces para $0 < \alpha < 1$ y $1 < p < \infty$ son equivalentes

1. $f \in B^\alpha_{p,p}(\Omega)$
2. $f \in L^p(\Omega)$ y
$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+\alpha p}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y < \infty.$$

La clase $B^{\alpha}_{p,p}(\Omega)$ también es conocida como el espacio de Sobolev-Slobodeckij (*e. g.* [30, 53, 56]).

Por otra parte, recordemos que los espacios de Sobolev pertenecen a la familia de los espacios de Triebel-Lizorkin, más concretamente $F^{\alpha}_{p,2}(\Omega) = W^{\alpha,p}(\Omega)$. Un caso particular cuya caracterización nos interesa, es la de los espacios de Sobolev fraccionarios que aparece en el artículo de Strichartz [52] y que presentamos a continuación.

Proposición 4.1.2 (Caracterización del espacio de Sobolev fraccionario $W^{\alpha,p}(\Omega)$)**.** Supongamos que Ω es un dominio acotado de clase $\mathcal{C}^{0,1}$. Entonces para $0 < \alpha < 1$ y $1 < p < \infty$ son equivalentes

1. $f \in W^{\alpha,p}(\Omega)$
2. $f \in L^p(\Omega)$ y
$$\int_{\Omega}\left(\int_{\Omega}\frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}y < \infty.$$

En particular, para $p = 2$ se puede observar que $W^{\alpha,2}(\Omega) = B^{\alpha}_{2,2}(\Omega)$. Por último, en el caso $W^{1,p}(\Omega)$, Brezis en el artículo [7, Corolario 4] caracteriza $W^{1,p}(\Omega)$ utilizando primeras diferencias.

Proposición 4.1.3 (Caracterización del espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$)**.** Supongamos que Ω es un dominio acotado de clase $\mathcal{C}^{0,1}$. Entonces para $1 < p < \infty$ son equivalentes

1. $f \in W^{1,p}(\Omega)$
2. $f \in L^p(\Omega)$ y
$$\lim_{\alpha\to 0}\alpha\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+p-\alpha}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty.$$

En la clase de dominios $\mathcal{C}^{0,1}$, se tienen los siguiente resultados sobre inclusiones y encajes compactos entre espacios de Sobolev y Besov (véase [57, Proposición 7])

Teorema 4.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado de clase $\mathcal{C}^{0,1}$. Denotemos por $a_+ = \max\{a, 0\}$.

1. Sean $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ y $p_0, p_1, q_0, q_1 \in (0, \infty]$. Entonces la inclusión
$$B^{\alpha_0}_{p_0,q_0}(\Omega) \hookrightarrow B^{\alpha_1}_{p_1,q_1}(\Omega)$$
es compacta si y sólo si
$$\alpha_0 - \alpha_1 > n\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)_+.$$

2. Sean $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ y $p_0, p_1 \in (0, \infty]$. Entonces la inclusión

$$W^{\alpha_0,p_0}(\Omega) \hookrightarrow W^{\alpha_1,p_1}(\Omega)$$

   es compacta si y sólo si

$$\alpha_0 - \alpha_1 > n\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)_+ .$$

3. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$. Entonces

$$B^\alpha_{p,q}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$$

   si y sólo si

$$\begin{cases} \alpha > \frac{n}{p} \\ \text{ó} \\ \alpha = \frac{n}{p} \quad \text{cuando } 0 < q \leq 1 \end{cases} .$$

   Además, en estos casos $B^\alpha_{p,q}(\Omega)$ son un álgebra de funciones.

4. Sean $\alpha > 0$ y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces

$$W^{\alpha,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$$

   si y sólo si $\alpha > \frac{n}{p}$. Además en este caso los espacios de Sobolev son álgebras de funciones.

5. Si $\alpha p > 2$ con $0 < \alpha < 1$

$$B^\alpha_{p,2}(\Omega) \hookrightarrow W^{\alpha,p}(\Omega) \hookrightarrow B^\alpha_{p,p}(\Omega).$$

Por otra parte, de forma análoga a las clases de funciones definidas en $\mathbb{R}^n$, los espacios de Sobolev y Besov definidos en dominios pueden identificarse con parejas de interpolación compleja y real respectivamente. Más concretamente,

$$\begin{aligned} B^\alpha_{p,q}(\Omega) &= (L^p(\Omega), W^{1,p}(\Omega))_{\alpha,q}, \\ W^{\alpha,p}(\Omega) &= [L^p(\Omega), W^{1,p}(\Omega)]_\alpha. \end{aligned}$$

4.2. Demostración del Teorema 4.1

Como ya observamos en el capítulo anterior, la solución principal f de la ecuación de Beltrami se escribe explícitamente como

$$f(z) = z + Ch(z).$$

Mediante la relación entre las transformadas de Cauchy y de Beurling, la función $h(z) = \bar{\partial} f(z)$ está determinada por la ecuación

$$(I - \mu B)h(z) = \mu(z).$$

Si podemos invertir este operador en el espacio de funciones adecuado obtendremos $h(z) = (I - \mu B)^{-1}\mu(z)$. Observemos que tanto el coeficiente de Beltrami μ como la función $h(z) = \mu(z)\partial f(z)$ se anulan en $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$. Introducimos la transformada de Beurling restringida en el dominio Ω como

$$B_\Omega g(z) = -\frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{g(w)}{(z-w)^2}\mathrm{d}w.$$

Procedemos a demostrar la invertibilidad del operador $I - \mu B_\Omega$ en los espacios $B^\alpha_{p,p}(\Omega)$ y $W^{\alpha,p}(\Omega)$, los cuales denotaremos genéricamente como $X = X(\Omega)$ cuando no sea necesario distinguirlos.

Definimos

$$P_m = I + \mu B_\Omega + \cdots + (\mu B_\Omega)^m$$

para $\mu \in X$ y observemos que

$$(I - \mu B_\Omega)P_{n-1} = P_{n-1}(I - \mu B_\Omega) = I - \mu^n B_\Omega^n + R \tag{4.2.1}$$

donde $R = \mu^n B_\Omega^n - (\mu B_\Omega)^n$ puede escribirse como una suma finita de operadores que contienen como factor al conmutador $[\mu, B_\Omega]$. En la subsección 4.2.1 demostraremos que el conmutador $[\mu, B_\Omega]\colon X \to X$ es compacto.

Por otra parte, el operador $I - \mu^n B_\Omega^n$ lo escribimos de la siguiente manera

$$(I - \mu^n B_\Omega^n)f(z) = (I - \mu^n B^n)(f\chi_\Omega)(z) + \mu^n(z)(B^n(f\chi_\Omega)(z) - B_\Omega^n f(z))$$

donde B^n es la iterada n-ésima de la transformada de Beurling en todo el plano. Afirmamos que el operador $I - \mu^n B^n$ es invertible pues

$$\|\mu^n B^n\|_X \leq C\, n^3 \|\mu\|_X \|\mu\|_\infty^{n-1}$$

y dicha norma es pequeña cuando la n es suficientemente grande.

Consideremos

$$K_nf(z) := B^n_\Omega f(z) - B^n(f\chi_\Omega)(z), \qquad z \in \Omega. \tag{4.2.2}$$

En cada clase de funciones consideradas, por la subsección 4.2.2, el operador K_n es un operador compacto. Por tanto, de la relación (4.2.1) y del Corolario 1.21, el operador $I - \mu B_\Omega$ es de Fredholm. Además, tiene índice cero pues $I - t\mu B_\Omega$ es una deformación continua del operador $I - \mu B_\Omega$ en el operador identidad. Por otra parte $\ker\{I - \mu B_\Omega \colon X \to X\} \subset \ker\{I - \mu B_\Omega \colon L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ que es trivial por [24, pág. 42–43]. Así, $I - \mu B_\Omega$ es inyectivo, y por la Definición 1.11.1 del índice de un operador es exhaustivo. Esto concluye que el operador $I - \mu B_\Omega$ es invertible.

La demostración de compacidad de los operadores conmutador $[\mu, B]$ y K_n se debe a que estos operadores tienen un núcleo *regularizante*.

Sean $0 < \epsilon \leq 1$ y Ω un dominio acotado. Consideremos la clase de operadores P tales que

$$Pf(x) = \int_\Omega K(x,y) f(y) \mathrm{d}y$$

donde el núcleo K satisface

$$|K(x,y)| \lesssim \frac{1}{|x-y|^{n-\epsilon}} \quad \text{para todo } x, y \in \Omega, \tag{4.2.3}$$

$$|K(x',y) - K(x,y)| \lesssim \frac{|x-x'|^\epsilon}{|x-y|^n} \quad \text{si } |x-y| > 2|x-x'|. \tag{4.2.4}$$

Diremos que un núcleo es *regularizante* si satisface las propiedades (4.2.3) y (4.2.4).

Para operadores con núcleo regularizante tenemos el resultado siguiente.

Teorema 4.4. *Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ y consideremos $\alpha p > n$.*

1. *Si $\alpha < \beta < \epsilon$ y $P\chi_\Omega \in W^{\beta,p}(\Omega)$, entonces el operador $P \colon W^{\alpha,p}(\Omega) \to W^{\beta,p}(\Omega)$. Además $P \colon W^{\alpha,p}(\Omega) \to W^{\alpha,p}(\Omega)$ es compacto.*

2. *Si $\alpha < \beta < \epsilon$ y $P\chi_\Omega \in B^\beta_{p,p}(\Omega)$, entonces el operador $P \colon B^\alpha_{p,p}(\Omega) \to B^\beta_{p,p}(\Omega)$. Además $P \colon B^\alpha_{p,p}(\Omega) \to B^\alpha_{p,p}(\Omega)$ es compacto*

La demostración es similar a la del Teorema 4.2 y la posponemos a la subsección 4.3.2.

4.2.1. Compacidad del conmutador en $B^{\alpha}_{p,p}(\Omega)$ y $W^{\alpha,p}(\Omega)$

Las condiciones que hemos impuesto en el Teorema 4.1 garantizan que la restricción de la transformada de Beurling $B_\Omega\colon X \to X$ es un operador acotado. Debido a las propiedades de álgebra de funciones tenemos que el conmutador y dado que

$$[\mu, B_\Omega]f(z) = \mu(z)B_\Omega f(z) - B_\Omega(\mu f)(z)$$

también está acotado en X pues

$$\|[\mu, B_\Omega]f\|_X \leq C\|\mu\|_X\|f\|_X.$$

Por otro parte, ya que el dominio Ω es de clase $\mathcal{C}^{0,1}$ las funciones $C^\infty(\overline{\Omega})$ son densas en X. Entonces, existe una sucesión de funciones $\mu_j \in C^\infty(\overline{\Omega})$ que converge al coeficiente de Beltrami μ en la norma del espacio X y por tanto $[\mu_j, B_\Omega]$ converge a $[\mu, B_\Omega]$, más precisamente,

$$\|[\mu_j, B_\Omega]f - [\mu, B_\Omega]f\|_X = \|[\mu_j - \mu, B_\Omega]f\|_X \leq C\|B\|_{X\to X}\|\mu_j - \mu\|_X\|f\|_X \xrightarrow{j\to\infty} 0.$$

Debido a que el límite de operadores compactos es compacto (parte 4 del Teorema 1.15) podemos reducirnos a demostrar la compacidad del conmutador en el caso donde $\mu \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Observemos que el núcleo del operador $[\mu, B_\Omega]$ satisface

$$K(z, w) = -\frac{1}{\pi}\frac{\mu(z) - \mu(w)}{(z - w)^2} \tag{4.2.5}$$

y bajo la suposición de que $\mu \in C^\infty(\overline{\Omega})$, dicho núcleo satisface las siguientes propiedades:

$$|K(z, w)| \lesssim \frac{1}{|z - w|} \quad \text{para cualesquiera } z, w \in \Omega, \tag{4.2.6}$$

$$|K(z_1, w) - K(z_2, w)| \lesssim \frac{|z_1 - z_2|}{|w - z_1|^2} \quad \text{si } |z_1 - w| \geq 2|z_1 - z_2|. \tag{4.2.7}$$

Esto implica que el núcleo (4.2.5) es regularizante.

Elijamos $\beta \in (\alpha, \epsilon)$ y denotemos por $X = W^{\alpha,p}(\Omega)$ ó $B^{\alpha}_{p,p}(\Omega)$ y por $Y = W^{\beta,p}(\Omega)$ ó $B^{\beta}_{p,p}(\Omega)$ respectivamente. Entonces $B_\Omega\colon Y \to Y$ es continuo. Dado que $\mu \in C^\infty(\overline{\Omega})$, se tiene que $\mu B_\Omega(\chi_\Omega) \in Y$ y $\mu\chi_\Omega \in Y$. Además, $B_\Omega(\mu\chi_\Omega) \in Y$. Dado que

$$[\mu, B_\Omega]\chi_\Omega = \mu B_\Omega\chi_\Omega - B_\Omega(\mu\chi_\Omega)$$

cada sumando pertenece a Y y $[\mu, B_\Omega]\chi_\Omega \in Y$. Por el Teorema 4.4, el conmutador $[\mu, B_\Omega]\colon X \to Y$ es acotado. La compacidad del conmutador se sigue por (1) y (2) del Teorema 4.3 en el caso de Sobolev y Besov respectivamente.

4.2.2. Compacidad del operador K_n

Recordemos que para $z \in \Omega$,

$$K_n f(z) = B_\Omega^n f(z) - B^n(f\chi_\Omega)(z).$$

Mostraremos que $K_n \colon X \to X$ es compacto donde $X = B_{p,p}^\alpha(\Omega)$ ó $X = W^{\alpha,p}(\Omega)$. Para $n \geq 2$, obtenemos procediendo por inducción

$$\begin{aligned} B_\Omega^n f &= B(B_\Omega^{n-1} f)\chi_\Omega \\ &= B(B^{n-1} f \cdot \chi_\Omega + K_{n-1} f)\chi_\Omega \\ &= B(B^{n-1} f - B^{n-1} f \cdot \chi_{\Omega^c} + K_{n-1} f)\chi_\Omega \\ &= B^n(f)\chi_\Omega - B(B^{n-1} f \cdot \chi_{\Omega^c})\chi_\Omega + B(K_{n-1} f)\chi_\Omega \end{aligned}$$

Entonces es suficiente probar que para $n \geq 1$ el operador

$$B(B^n f \cdot \chi_{\Omega^c})\chi_\Omega$$

es compacto en X. Observemos que $f\chi_\Omega \in X(\Omega)$ y por tanto $B(f\chi_\Omega)\chi_\Omega \in X(\Omega)$. Además, $B_\Omega(f)\chi_\Omega \in X(\Omega)$. Entonces

$$B_\Omega \colon X(\Omega^c) \to X(\Omega) \tag{4.2.8}$$

pues para $f\chi_{\Omega^c} \in X(\Omega^c)$,

$$\begin{aligned} B(f\chi_{\Omega^c})\chi_\Omega &= B(f - f\chi_\Omega)\chi_\Omega \\ &= B(f)\chi_\Omega - B(f\chi_\Omega)\chi_\Omega \end{aligned}$$

donde cada sumando pertenece a $X(\Omega)$.
Por otra parte, para $z \in \Omega$,

$$\begin{aligned} B(B^n f \cdot \chi_{\Omega^c})\chi_\Omega &= -\frac{1}{\pi}\int_{\Omega^c} \frac{B^n f(w)}{(z-w)^2}\mathrm{d}w \\ &= c_n \int_\Omega K(z,\xi) f(\xi)\mathrm{d}\xi, \end{aligned}$$

donde

$$K(z,\xi) = K_n(z,\xi) := \int_{\Omega^c} \frac{1}{(z-w)^2}\frac{n\overline{(w-\xi)}^n}{(w-\xi)^{n+1}}\mathrm{d}w$$

y $c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi^2}$. Si Ω es un disco, entonces $K(z,\xi) = 0$ para todo $z, \xi \in \Omega$ (véase [36, pág. 418]). Afirmamos que si Ω no es el disco, por el Teorema 4.4, el operador

$$Pf(z) = \int_\Omega K(z,\xi) f(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad z \in \Omega,$$

es compacto. La condición $\mathcal{C}^{1,\epsilon}$ sobre la frontera del dominio implica que $B\chi_\Omega \in Y$ y por tanto $B^n\chi_\Omega \in Y$. Debido a (4.2.8) se tiene que $B(B^n\chi_\Omega \cdot \chi_{\Omega^c})\chi_\Omega \in Y$. Por tanto $P\chi_\Omega \in Y$. La propiedad de que el núcleo del operador P sea regularizante es consecuencia del Lema 6 en [36] que enunciamos a continuación

Lema 4.2.1 (Lema 6 en [36])**.** Sea Ω un dominio acotado de clase $\mathcal{C}^{1,\epsilon}$ con $0 < \epsilon < 1$. El núcleo $K(z,\xi)$ satisface las siguientes condiciones:

$$|K(z,\xi)| \leq \frac{C}{|z-\xi|^{2-\epsilon}}, \quad z,\xi \in \Omega;$$

$$|K(z_1,\xi) - K(z_2,\xi)| \leq C\frac{|z_1-z_2|^\epsilon}{|\xi - z_1|^2} \quad z_1, z_2 \in \Omega,\ |\xi - z_1| \geq 2|z_1 - z_2|.$$

Por tanto estamos en condiciones de aplicar el Teorema 4.2. Esto termina la demostración.

4.3. Operadores de Calderón-Zygmund restringidos a un dominio Ω

Consideremos T un operador de Calderón-Zygmund de tipo par con núcleo K. Definimos el *operador de Calderón-Zygmund restringido a* Ω mediante la relación

$$T_\Omega f(x) = T(f\chi_\Omega)(x) = \int_\Omega f(y)K(x,y)\mathrm{d}y.$$

La constante de Calderón-Zygmund del núcleo de T se define como

$$\|T\|_{CZ} = \|K(x)|x|^n\|_\infty + \|\nabla K(x)|x|^{n+1}\|_\infty.$$

Es de nuestro interés estudiar la continuidad de los operadores de Calderón-Zygmund restringidos a un dominio Ω. Comenzamos esta sección con lemas técnicos utilizados en la prueba de la continuidad de operadores de Calderón-Zygmund.

Consideremos la función campana $\varphi(x)$ definida en $\mathbb{R}^n$ con soporte en la bola $|x| \leq 1$ que verifica $\|\varphi\|_X \leq 1$, donde $X = W^{\alpha,p}(\Omega)$, $X = W^{1,p}(\Omega)$ ó $X = B^\alpha_{p,p}(\Omega)$ dependiendo del espacio donde queramos considerar la continuidad del operador. Construimos la función φ_Q mediante la función φ como $\varphi_Q(x) = \varphi\left(\frac{x-x_0}{d}\right)$ donde Q es la bola de centro en x_0 y radio d. Es claro que φ_Q tiene soporte en Q.

Lema 4.3.1. Sea T_Ω un operador de Calderón-Zygmund restringido a Ω de tipo par y consideremos la función antes definida φ_Q tal que $\|\varphi_Q\|_\infty \lesssim 1$ y $\|\nabla\varphi_Q\|_\infty \lesssim \frac{1}{d}$. Entonces, existe una constante C tal que $\|T_\Omega\varphi_Q\|_\infty \leq C$.

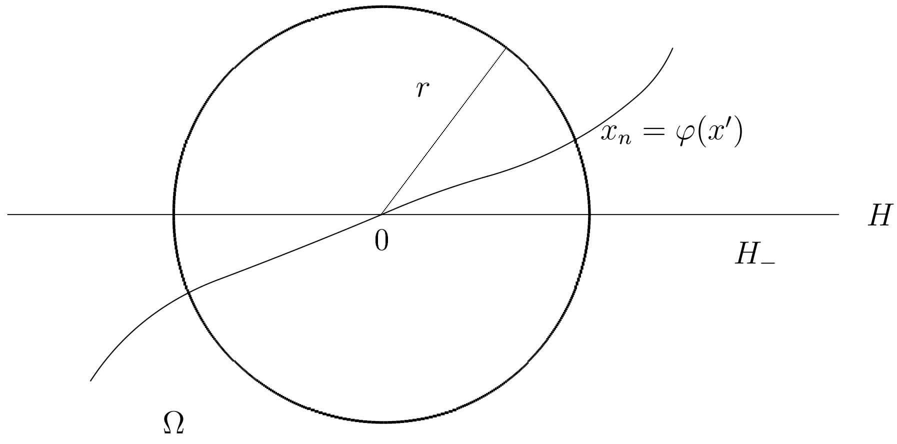

Figura 4.3.1:

Demostración. La prueba se basa en ideas contenidas en la demostración del lema principal de [36, pág. 408-410]. Consideremos

$$\begin{aligned} T_\Omega\varphi_Q(x) &= \int_\Omega K(x,y)\varphi_Q(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\Omega\cap Q} K(x,y)(\varphi_Q(y)-\varphi_Q(x))\mathrm{d}y + \varphi_Q(x)\int_{\Omega\cap Q} K(x,y)\mathrm{d}y \\ &= p(x)+\varphi_Q(x)q(x) \end{aligned}$$

Para $p(x)$ tenemos

$$|p(x)| \lesssim \int_\Omega \frac{|\varphi_Q(x)-\varphi_Q(y)|}{|x-y|^n}\mathrm{d}y \lesssim \|\nabla\varphi_Q\|_\infty \int_\Omega \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{n-1}} \le C.$$

Ahora para $q(x)$, consideremos el operador truncado

$$q_\delta(x) = \int_{\delta<|y-x|<r_0} \chi_\Omega(y)K(x,y)\mathrm{d}y.$$

Supongamos primeramente que $x=0\in\partial\Omega$ y que el hiperplano tangente a $\partial\Omega$ en 0 es $\{x_n=0\}$. Denotemos $H_-=\{x_n<0\}$ (véase la figura 4.3.1). Consideremos coordenadas esféricas $y=r\xi$ con $0\le r$ y $|\xi|=1$. Entonces tenemos que

$$q_\delta(x) = \int_\delta^{r_0}\left(\int_{A(r)}\omega(\xi)\mathrm{d}\sigma(\xi)\right)\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

donde $A(r)=\{\xi : |\xi|=1, r\xi\in\Omega\}$ y σ es la medida de superficie sobre la esfera unitaria U. Como el T_Ω es de tipo par,

$$0 = \int_U \omega(\xi)\mathrm{d}\sigma(\xi) = 2\int_{U\cap H_-} \omega(\xi)\mathrm{d}\sigma(\xi).$$

Entonces

$$\int_{A(r)} \omega(\xi)\mathrm{d}\sigma(\xi) = \int_{A(r)\setminus(U\cap H_-)} \omega(\xi)\mathrm{d}\sigma(\xi) - \int_{(U\cap H_-)\setminus A(r)} \omega(\xi)\mathrm{d}\sigma(\xi)$$

y de esta manera

$$\left|\int_{A(r)} \omega(\xi)\mathrm{d}\sigma(\xi)\right| \leq C\|T\|_{CZ}(\sigma(A(r)\setminus(U\cap H_-)) + \sigma((U\cap H_-)\setminus A(r))).$$

Si la frontera es de clase $\mathcal{C}^{1,\epsilon}$,

$$\sigma(A(r)\setminus(U\cap H_-)) + \sigma((U\cap H_-)\setminus A(r)) \leq Cr^{\epsilon}.$$

Así,

$$|q_\delta| \leq \int_\delta^{r_0} \left|\int_{A(r)} \omega(\xi)\mathrm{d}\sigma(\xi)\right| \frac{\mathrm{d}r}{r} \lesssim \|T\|_{CZ}.$$

Ahora consideremos $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$. Sea δ_0 la distancia de x a $\partial\Omega$ y x_0 tal punto en $\partial\Omega$. Sean

$$\begin{aligned} A &= \{y \in \Omega\cap Q : \delta_0 < |y-x| < r_0\}, \\ A_0 &= \{y \in \Omega\cap Q : \delta_0 < |y-x_0| < r_0\}. \end{aligned}$$

Para $\delta < \delta_0$ se tiene por las propiedades de cancelación

$$\int_{\delta<|y-x|<r_0} \chi_\Omega(y)K(x,y)\mathrm{d}y = \int_{\delta_0<|y-x|<r_0} \chi_\Omega(y)K(x,y)\mathrm{d}y$$

entonces

$$\begin{aligned} &\left|\int_{\delta<|y-x|<r_0} \chi_\Omega(y)K(x,y)\mathrm{d}y - \int_{\delta_0<|y-x|<r_0} \chi_\Omega(y)K(x,y)\mathrm{d}y\right| = \\ &\quad = \left|\int_A K(x,y)\mathrm{d}y - \int_{A_0} K(x,y)\mathrm{d}y\right| \\ &\quad \leq \int_{A\cap A_0} |K(x,y)-K(x_0,y)|\mathrm{d}y + \left|\int_{A\setminus A_0} \chi_\Omega(y)K(x,y)\mathrm{d}y\right| + \\ &\qquad + \left|\int_{A_0\setminus A} \chi_\Omega(y)K(x,y)\mathrm{d}y\right| \\ &\quad = J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

Si $y \in A \cap A_0$, se tiene

$$|K(x-y) - K(x_0-y)| \leq C\|T\|_{CZ} \frac{|x-x_0|}{|y-x|^{n+1}}$$

y por tanto:

$$J_1 \leq C\|T\|_{CZ}|x-x_0| \int_{|x-x_0|>\delta_0} \frac{\mathrm{d}y}{|y-x|^{n+1}} \leq C\|T\|_{CZ}.$$

Para estimar J_2 consideremos

$$A \setminus A_0 = (A \cap B(x_0, \delta_0)) \cup (A \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(x_0, r_0))).$$

Supongamos que $\delta_0 \leq \frac{r_0}{2}$. Si $|x_0 - y| \geq r_0$ entonces $|y-x| \geq \frac{r_0}{2}$. Por tanto

$$J_2 \leq \|T\|_{CZ} \left(\int_{|y-x_0|<\delta_0} \frac{\mathrm{d}y}{\delta_0^n} + \int_\Omega \frac{2^n}{r_0^n} \mathrm{d}y \right) \leq C\|T\|_{CZ}.$$

De forma análoga se obtiene para J_3. Ahora si $\delta_0 \geq \frac{r_0}{2}$ las acotaciones se obtienen de forma sencilla. Por la propiedad de cancelación del núcleo, podemos suponer que $\delta \geq \delta_0$ y por tanto

$$|q_\delta| \leq C.$$

Esto termina la demostración.

$\square$

Como ya mencionamos, al restringir a un dominio Ω un operador de Calderón-Zygmund de tipo convolución, éste deja de ser de convolución y por tanto no sabemos si el operador actúa sobre los espacios de funciones estudiados. Meyer en [37] estudió la continuidad de operadores de Calderón-Zygmund que no son de convolución y que están definidos en espacios de Hölder y Sobolev de $\mathbb{R}^n$ cuando se satisface la condición $T1 = 0$. Utilizando las mismas técnicas, Lemarie en [33] demuestra la continuidad de operadores de Calderón-Zygmund en espacios de Besov. También Komori en [27] demuestra la continuidad de estos operadores relajando la condición $T1 = 0$ al pedir que $T1$ pertenezca a cierto espacio de Hölder.

En nuestro caso, los espacios que consideramos tienen una caracterización en diferencias lo cual nos motiva a utilizar la técnica de Meyer. Por tal motivo escribimos las diferencias del operador obteniendo los sumandos necesarios escritos en términos de primeras diferencias. El siguiente lema nos proporciona dicha descomposición.

Lema 4.3.2. Sean $\xi \in D$ una función radial tal que $\xi(u) = 1$ para $|u| \leq 2$ y $\eta(u) = 1 - \xi(u)$. Entonces:

$$Tf(y) - Tf(x) := \sum_{i=1}^{4} g_i(x,y) + f(x)(T\chi_\Omega(y) - T\chi_\Omega(x)), \qquad (4.3.1)$$

donde

$$\begin{aligned}
g_1(x,y) &= \int_\Omega (K(y,u) - K(x,u))(f(u) - f(x))\ \eta\left(\frac{u-x}{|y-x|}\right) \mathrm{d}u, \\
g_2(x,y) &= -\int_\Omega K(x,u)(f(u) - f(x))\ \xi\left(\frac{u-x}{|y-x|}\right) \mathrm{d}u, \\
g_3(x,y) &= \int_\Omega K(y,u)(f(u) - f(y))\ \xi\left(\frac{u-x}{|y-x|}\right) \mathrm{d}u, \\
g_4(x,y) &= (f(x) - f(y)) \int_\Omega K(y,u)\ \xi\left(\frac{u-x}{|y-x|}\right) \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

La demostración se basa en la descomposición del operador utilizando las funciones ξ y η. Observemos que

$$\begin{aligned}
Tf(x) &= f(x)T\xi(x) + \int_{x \neq w} K(x,w)(f(w) - f(x))\ \xi(w)\mathrm{d}w \\
&\quad + \int K(x,w)f(w)\eta(w)\mathrm{d}w.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
Tf(x) - Tf(y) &= f(x)T\xi(x) - f(y)T\xi(y) \qquad (4.3.2) \\
&\quad + \int_{x \neq w} K(x,w)(f(w) - f(x))\ \xi(w)\mathrm{d}w \\
&\quad - \int_{y \neq w} K(y,w)(f(w) - f(y))\ \xi(w)\mathrm{d}w \\
&\quad + \int (K(x,w) - K(y,w))f(w)\ \eta(w)\mathrm{d}w. \qquad (4.3.3)
\end{aligned}$$

Combinando los sumandos (4.3.2) y (4.3.3) se obtiene la descomposición deseada.

Observemos que la descomposición (4.3.1) puede aplicarse a cualquier operador integral.

La idea de la demostración del Teorema 4.2 es utilizar la relación (4.3.1) y, utilizando la caracterización en cada espacio, acotar cada término. La prueba del Teorema 4.4 la presentamos en la subsección 4.3.1 y utiliza las mismas técnicas de la demostración del Teorema 4.2.

Como aplicación directa del Teorema 4.2 consideremos la transformada de Beurling restringida al dominio Ω.

Corolario 4.5. Consideremos la restricción al dominio acotado Ω del operador de Beurling

$$B_\Omega f(z) = -\frac{1}{\pi} V.P. \int_\Omega \frac{f(w)}{(z-w)^2} \mathrm{d}w$$

1. Si $B_\Omega \chi_\Omega \in B^\alpha_{p,p}(\Omega)$ con $\alpha p > 2$, entonces $B_\Omega \colon B^\alpha_{p,p}(\Omega) \to B^\alpha_{p,p}(\Omega)$.

2. Si $B_\Omega \chi_\Omega \in W^{\alpha,p}(\Omega)$ con $\alpha p > 2$, entonces $B_\Omega \colon W^{\alpha,p}(\Omega) \to W^{\alpha,p}(\Omega)$.

3. Si $B_\Omega \chi_\Omega \in W^{1,p}(\Omega)$ con $p > 2$, entonces $B_\Omega \colon W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)$.

Ya hemos observado con anterioridad que, como una aplicación del Teorema 4.4, dada $\mu \in C^\infty(\overline{\Omega})$, el conmutador $[\mu, B]$ es compacto en los espacios $W^{\alpha,p}(\Omega)$ y $B^\alpha_{p,p}(\Omega)$.

El problema de encontrar dominios para los cuales se cumple la condición de que $B\chi_\Omega$ pertenece al espacio correspondiente se estudiará en la sección 4.4.

4.3.1. Demostración del Teorema 4.2

1. Por la caracterización para espacios de Besov de la Proposición 4.1.1, es suficiente demostrar que $Tf \in L^p(\Omega)$ y

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|Tf(x) - Tf(y)|^p}{|x-y|^{n+\alpha p}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y < \infty. \tag{4.3.4}$$

Es claro por la teoría de operadores de Calderón-Zygmund que $Tf \in L^p(\Omega)$. Para demostrar (4.3.4), utilizamos que

$$Tf(y) - Tf(x) = \sum_{i=1}^4 g_i(x,y) + f(x)(T\chi_\Omega(y) - T\chi_\Omega(x)).$$

según el Lema 4.3.2. Procedemos a acotar cada sumando. Para el término $g_1(x,y)$ y β arbitrario tal que $\alpha < \beta < 1$ y utilizando la condición sobre el núcleo K y la desigualdad de Hölder en espacios de Lebesgue tenemos,

$$\begin{aligned}
|g_1(x,y)| &\lesssim \int_{\Omega\cap\{|u-x|>2|x-y|\}} |K(x,u)-K(y,u)||f(u)-f(x)|\mathrm{d}u \\
&\lesssim \int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{|x-y|}{|x-u|^{n+1}}|f(u)-f(x)|\mathrm{d}u \\
&= |x-y|\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|}{|x-u|^{n+1}}\mathrm{d}u \\
&= |x-y|\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|}{|x-u|^{\frac{n}{p}+\beta}}\frac{1}{|x-u|^{\frac{n}{q}-\beta+1}}\mathrm{d}u \\
&\lesssim |x-y|\left(\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+\beta p}}\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \cdot\left(\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{\mathrm{d}u}{|x-u|^{n-\beta q+q}}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim |x-y|^{\beta+1}\left(\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+\beta p}}\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim |x-y|^{\beta}\left(\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+\beta p}}\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{|g_1(x,y)|^p}{|x-y|^{n+\alpha p}} \lesssim \frac{1}{|x-y|^{n+\alpha p-\beta p}}\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+\beta p}}\mathrm{d}u,$$

y por tanto, mediante el Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\int_\Omega \frac{|g_1(x,y)|^p}{|x-y|^{n+\alpha p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\lesssim \int_\Omega\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n+\alpha p-\beta p}}\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+\beta p}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\lesssim \int_\Omega\int_\Omega\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+p-\alpha p}}\frac{1}{|x-y|^{n+\alpha p-\beta p}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\lesssim \int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+\beta p}}\frac{1}{|x-u|^{\alpha p-\beta p}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+\alpha p}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x < \infty.
\end{aligned}$$

De esta forma tenemos que

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|g_1(x,y)|^p}{|x-y|^{n+\alpha p}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x < \infty \tag{4.3.5}$$

Para $g_2(x,y)$, eligiendo $\beta > 0$ arbitrario tenemos, al utilizar la condición del núcleo K y la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
|g_2(x,y)| &\lesssim \int_{\{|x-u|<4|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|}{|x-u|^n}\mathrm{d}u \\
&= \int_{\{|x-u|<4|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|}{|x-u|^{\frac{n}{p}+\beta}} \frac{1}{|x-u|^{\frac{n}{q}-\beta}}\mathrm{d}u \\
&\lesssim \left(\int_{\{|x-u|<4|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{p+\beta p}}\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \\
&\quad \cdot \left(\int_{\{|x-u|<4|x-y|\}} \frac{\mathrm{d}u}{|x-u|^{n-\beta q}}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim |x-y|^{\beta} \left(\int_{\{|x-u|<4|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+\beta p}}\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$|g_2(x,y)|^p \lesssim |x-y|^{\beta p} \int_{\{|x-u|<4|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+\beta p}}\mathrm{d}u.$$

y así

$$\frac{|g_2(x,y)|^p}{|x-y|^{n+\alpha p}} \lesssim \frac{1}{|x-y|^{n+\alpha p-\beta p}} \int_{\{|x-u|<4|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+\beta p}}\mathrm{d}u$$

De esta forma se tiene mediante el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\int_\Omega \frac{|g_2(x,y)|^p}{|x-y|^{n+\alpha p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \lesssim \\
&\qquad \lesssim \int_\Omega\int_\Omega\int_{\{|x-u|<4|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-y|^{n+\alpha p-\beta p}|x-u|^{n+\beta p}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\qquad \lesssim \int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+\alpha p}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|g_2(x,y)|^p}{|x-y|^{n+\alpha p}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x \lesssim \int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-y|^{n+\alpha p}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x \leq C. \tag{4.3.6}$$

Análogamente a $g_2(x,y)$, para $g_3(x,y)$ se tiene

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|g_3(x,y)|^p}{|x-y|^{n+\alpha p}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x \lesssim \int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-y|^{n+\alpha p}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x \leq C. \tag{4.3.7}$$

Por el lema 4.3.1 se tiene que $\|T\xi\|_\infty \leq C$ y de esta forma,

$$|g_4(x,y)| \leq C(|f(x)-f(y)|).$$

Así se tiene

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|g_4(x,y)|^p}{|x-y|^{n+\alpha p}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x \lesssim \int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\alpha p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le C. \tag{4.3.8}$$

Por último, tenemos el término $f(x)(T\chi_\Omega(y)-T\chi_\Omega(x))$. Debido a que $\alpha p > n$, el espacio de Besov $B^\alpha_{p,p}(\Omega)$ es un álgebra de funciones, basta con demostrar que

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|T\chi_\Omega(y)-T\chi_\Omega(x)|^p}{|x-y|^{n+\alpha p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le C.$$

La condición anterior es equivalente a que $T\chi_\Omega \in B^\alpha_{p,p}(\Omega)$ que se tiene por hipótesis.

2. Dado que T es la restricción de un operador de Calderón-Zygmund, se tiene que $T\colon L^p(\Omega)\to L^p(\Omega)$. Por otra parte, utilizando la caracterización del Lema 4.1.2, nos falta probar que

$$\int_\Omega \frac{|Tf(x)-Tf(y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\mathrm{d}x \in L^p(\Omega).$$

Utilizamos la descomposición en primeras diferencias del operador del Lema 4.3.2 y procedemos a acotar cada sumando $g_i(x,y)$. Comenzamos con $g_1(x,y)$. Consideremos θ arbitrario, tal que $\alpha<\theta<1$, entonces

$$\begin{aligned}
|g_1(x,y)| &\lesssim \int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{|x-y|}{|x-u|^{n+1}}|f(u)-f(x)|\mathrm{d}u \\
&\lesssim |x-y|\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|}{|x-u|^{\frac{n}{2}+\theta}}\frac{1}{|x-u|^{\frac{n}{2}-\theta+1}}\mathrm{d}u \\
&\lesssim |x-y|\left(\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^2}{|x-u|^{n+2\theta}}\mathrm{d}u\right)^{\frac12}\cdot \\
&\quad\cdot\left(\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{1}{|x-u|^{n-2\theta+2}}\mathrm{d}u\right)^{\frac12} \\
&\lesssim |x-y|^\theta\left(\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^2}{|x-u|^{n+2\theta}}\mathrm{d}u\right)^{\frac12}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{|g_1(x,y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\mathrm{d}y &\lesssim \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n+2(\alpha-\theta)}}\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^2}{|x-u|^{n+2\theta}}\mathrm{d}u\mathrm{d}y \\
&\lesssim \int_\Omega \frac{|f(u)-f(x)|^2}{|x-u|^{n+2\theta}}\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{1}{|x-y|^{n+2(\alpha-\theta)}}\mathrm{d}y\mathrm{d}u \\
&\lesssim \int_\Omega \frac{|f(u)-f(x)|^2}{|x-u|^{n+2\alpha}}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Así, concluimos que

$$\int_\Omega \frac{|g_1(x,y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\mathrm{d}y \in L^p(\Omega).$$

Para la función $g_2(x,y)$, consideremos γ arbitrario tal que $0<\gamma<\alpha$, entonces,

$$\begin{aligned}
|g_2(x,y)| &\lesssim \int_{\{|u-x|<2|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|}{|x-y|^n}\mathrm{d}u \\
&\lesssim \int_{\{|u-x|<2|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|}{|x-y|^{\frac{n}{2}+\gamma}}\frac{1}{|x-u|^{\frac{n}{2}-\gamma}}\mathrm{d}u \\
&\lesssim \left(\int_{\{|u-x|<2|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^2}{|x-y|^{n+2\gamma}}\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \\
&\quad \cdot \left(\int_{\{|u-x|<2|x-y|\}} \frac{1}{|x-y|^{n-2\gamma}}\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim |x-y|^\gamma \left(\int_{\{|u-x|<2|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^2}{|x-y|^{n+2\gamma}}\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

De esta manera, para $0<\gamma<\alpha$ arbitrario,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{|g_2(x,y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\mathrm{d}y &\lesssim \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n+2(\alpha-\gamma)}} \int_{\{|x-u|<2|x-y|\}} \frac{|f(x)-f(u)|^2}{|x-u|^{n+2\gamma}}\mathrm{d}u\mathrm{d}y \\
&\lesssim \int_\Omega \frac{|f(u)-f(x)|^2}{|x-u|^{n+2\alpha}}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\int_\Omega \frac{|g_2(x,y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\mathrm{d}y \in L^p(\Omega).$$

El cálculo para $g_3(x,y)$ es análogo y se obtiene que

$$\int_\Omega \frac{|g_3(x,y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\mathrm{d}y \in L^p(\Omega).$$

Por el Lema 4.3.1 se tiene que $|g_4(x,y)| \lesssim |f(x)-f(y)|$. Entonces,

$$\int_\Omega \frac{|g_4(x,y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\mathrm{d}y \in L^p(\Omega).$$

Para el término $f(x)(T\chi_\Omega(y)-T\chi_\Omega(x))$, utilizamos el hecho que $\alpha p>n$. Entonces

$$|f(x)||T\chi_\Omega(y)-T\chi_\Omega(x)| \le \|f\|_\infty |T\chi_\Omega(y)-T\chi_\Omega(x)|,$$

y por tanto nos basta saber que

$$\left(\int_\Omega \frac{|T\chi_\Omega(y)-T\chi_\Omega(x)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{2}} \in L^p(\Omega).$$

que es precisamente la hipótesis de que $T\chi_\Omega \in W^{\alpha,p}(\Omega)$.

3. Por la caracterización para espacios de Sobolev de la Proposición 4.1.3 , es suficiente demostrar que $Tf \in L^p(\Omega)$ y

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega\int_\Omega \frac{\epsilon|Tf(x)-Tf(y)|^p}{|x-y|^{n+p-\epsilon}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty. \tag{4.3.9}$$

Es claro por la teoría de operadores de Calderón-Zygmund que $Tf \in L^p(\Omega)$. Para demostrar 4.3.9, utilizamos la relación (4.3.1) para las primeras diferencias del operador T según el Lema 4.3.2. Procedemos a acotar cada sumando. Mediante las propiedades del núcleo K del operador y la desigualdad de Hölder, para $g_1(x,y)$ tenemos

$$\begin{aligned}
|g_1(x,y)| &\lesssim \int_{\Omega\cap\{|u-x|>2|x-y|\}} |K(x,u)-K(y,u)||f(u)-f(x)\mathrm{d}u\\
&\lesssim \int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{|x-y|}{|x-u|^{n+1}}|f(u)-f(x)|\mathrm{d}u\\
&= |x-y|\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|}{|x-u|^{n+1}}\mathrm{d}u\\
&= |x-y|\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|}{|x-u|^{\frac{n}{p}+1-\alpha}}\frac{1}{|x-u|^{\frac{n}{q}+\alpha}}\mathrm{d}u\\
&\lesssim |x-y|\left(\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n-p-p\alpha}}\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\cdot\left(\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{\mathrm{d}u}{|x-u|^{n+q\alpha}}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{|g_1(x,y)|^p}{|x-y|^{n+p-\epsilon}} \lesssim \frac{1}{|x-y|^{n+p-\epsilon-p-\alpha p}}\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+p-\alpha p}}\mathrm{d}u$$

y por tanto, utilizando el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\int_\Omega \frac{|g_1(x,y)|^p}{|x-y|^{n+p-\epsilon}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\lesssim \int_\Omega\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n+p-\epsilon-p-\alpha p}}\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+p-\alpha p}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\lesssim \int_\Omega\int_\Omega\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+p-\alpha p}}\frac{1}{|x-y|^{n+p-\epsilon-p-\alpha p}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\lesssim \int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+p-\alpha p}}\frac{1}{|x-u|^{\alpha p-\epsilon}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x\\
&= \int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+p-\epsilon}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

De esta forma tenemos que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega\int_\Omega \frac{\epsilon|g_1(x,y)|^p}{|x-y|^{n+p-\epsilon}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x \lesssim \lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega\int_\Omega \frac{\epsilon|f(u)-f(x)|^p}{|x-y|^{n+p-\epsilon}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x \leq C. \quad (4.3.10)$$

Para $g_2(x,y)$, utilizando la propiedad del núcleo K y la desigualdad de Hölder, se tiene

$$\begin{aligned}
|g_2(x,y)| &\lesssim \int_{\{|x-u|<4|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|}{|x-u|^n}\mathrm{d}u \\
&= \int_{\{|x-u|<4|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|}{|x-u|^{\frac{n}{p}+\beta}}\frac{1}{|x-u|^{\frac{n}{q}-\beta}}\mathrm{d}u \\
&\lesssim \left(\int_{\{|x-u|<4|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{p+\beta p}}\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\{|x-u|<4|x-y|\}} \frac{\mathrm{d}u}{|x-u|^{n-\beta q}}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$|g_2(x,y)|^p \lesssim |x-y|^{\beta p}\int_{\{|x-u|<4|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+\beta p}}\mathrm{d}u.$$

y así

$$\frac{|g_2(x,y)|^p}{|x-y|^{n+p-\epsilon}} \lesssim \frac{1}{|x-y|^{n+p-\epsilon-\beta p}}\int_{\{|x-u|<4|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+\beta p}}\mathrm{d}u.$$

De esta forma se tiene por el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\int_\Omega \frac{|g_2(x,y)|^p}{|x-y|^{n+p-\epsilon}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\qquad \lesssim \int_\Omega\int_\Omega\int_{\{|x-u|<4|x-y|\}} \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-y|^{n+p-\epsilon-\beta p}|x-u|^{n+\beta p}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\qquad \lesssim \int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+p-\epsilon}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Por tanto, dado que $f \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega\int_\Omega \frac{\epsilon|g_2(x,y)|^p}{|x-y|^{n+p-\epsilon}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x \lesssim \lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega\int_\Omega \frac{\epsilon|f(u)-f(x)|^p}{|x-y|^{n+p-\epsilon}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x \leq C. \quad (4.3.11)$$

Análogamente a $g_2(x,y)$, para $g_3(x,y)$ se tiene

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega\int_\Omega \frac{\epsilon|g_3(x,y)|^p}{|x-y|^{n+p-\epsilon}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x \lesssim \lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega\int_\Omega \frac{\epsilon|f(u)-f(x)|^p}{|x-y|^{n+p-\epsilon}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x \leq C. \quad (4.3.12)$$

Por último para $g_4(x,y)$, por el Lema 4.3.1 se tiene que $\|T\xi\|_\infty \leq C$ y de esta forma.

$$|g_4(x,y)| \leq C(|f(x)-f(y)|).$$

Esto implica que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{\epsilon|g_4(x,y)|^p}{|x-y|^{n+p-\epsilon}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x \lesssim \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{\epsilon|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+p-\epsilon}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq C. \quad (4.3.13)$$

Para el término $f(x)(T\chi_\Omega(y)-T\chi_\Omega(x))$, utilizamos el hecho que $p>n$. Entonces

$$|f(x)||T\chi_\Omega(y)-T\chi_\Omega(x)| \leq \|f\|_\infty |T\chi_\Omega(y)-T\chi_\Omega(x)|,$$

y de la misma manera que en los casos anteriores,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{\epsilon|T\chi_\Omega(x)-T\chi_\Omega(y)|^p}{|x-y|^{n+p-\epsilon}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq C$$

se sigue de la hipótesis $T\chi_\Omega \in W^{1,p}(\Omega)$. En conclusión se tiene

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{\epsilon|Tf(x)-Tf(y)|^p}{|x-y|^{n+p-\epsilon}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq C.$$

En la demostración puede observarse que no es necesario que el dominio Ω sea acotado. Por tanto la demostración es valida para cualquier dominio de clase $\mathcal{C}^{0,1}$.

4.3.2. Demostración del Teorema 4.4

1. Utilizando la descomposición de las diferencias del operador T del Lema 4.3.2, procedemos a demostrar la afirmación. Cabe mencionar que es válida dicha descomposición a pesar que no estamos tratando un operador de Calderón-Zygmund. Para $g_1(x,y)$, utilizando la propiedad (4.2.6) del núcleo y la desigualdad de Hölder se tiene

$$\begin{aligned}
|g_1(x,y)| &\lesssim \int_{\{|x-u|>2|x-y|\}}\frac{|f(x)-f(u)|}{|x-u|^n}|x-y|^\epsilon \mathrm{d}u\\
&= |x-y|^\epsilon\int_{\{|x-u|>2|x-y|\}}\frac{|f(x)-f(u)|}{|x-u|^{\frac{n}{p}-\alpha}}\frac{1}{|x-u|^{\frac{n}{q}+\alpha}}\mathrm{d}u\\
&\lesssim |x-y|^\epsilon\left(\int_{\{|x-u|>2|x-y|\}}\frac{|f(x)-f(u)|^p}{|x-u|^{n-\alpha p}}\mathrm{d}u\right)^{1/p}\\
&\quad\cdot\left(\int_{\{|x-u|>2|x-y|\}}\frac{1}{|x-u|^{n+\alpha q}}\mathrm{d}u\right)^{1/q}\\
&\lesssim |x-y|^{\epsilon-\alpha}\left(\int_{\{|x-u|>2|x-y|\}}\frac{|f(x)-f(u)|^p}{|x-u|^{n-\alpha p}}\mathrm{d}u\right) \quad (\alpha>0).
\end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema de Fubini

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|g_1(x,y)|^p}{|x-y|^{n+\beta p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\begin{aligned}
&\lesssim \int_\Omega\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n+(\beta+\alpha-\epsilon)p}}\int_{\{|u-x|>2|x-y|\}}\frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n-\alpha p}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\lesssim \int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+\beta p-\epsilon p}}\mathrm{d}u \quad (\beta+\alpha<\epsilon)\\
&= \int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+\alpha p}}\frac{1}{|x-u|^{(\beta-\epsilon-\alpha)p}}\mathrm{d}u\\
&\lesssim \int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(u)-f(x)|^p}{|x-u|^{n+\alpha p}}\mathrm{d}u<\infty \quad (\beta<\epsilon+\alpha)
\end{aligned}$$

Para $g_2(x,y)$, usando la propiedad (4.2.7) del núcleo del operador y por la desigualdad de Hölder se tiene

$$\begin{aligned}
|g_2(x,y)| &\lesssim \int_{\{|x-u|<2|x-y|\}}\frac{|f(x)-f(u)|}{|x-u|^{n-\epsilon}}\mathrm{d}u\\
&= \int_{\{|x-u|<2|x-y|\}}\frac{|f(x)-f(u)|}{|x-u|^{\frac{n}{p}-\epsilon+\alpha}}\frac{1}{|x-u|^{\frac{n}{q}-\alpha}}\mathrm{d}u\\
&\lesssim \left(\int_{\{|x-u|<2|x-y|\}}\frac{|f(x)-f(u)|^{\,p}}{|x-u|^{n+\alpha p-\epsilon p}}\mathrm{d}u\right)^{1/p}\cdot\\
&\quad\cdot\left(\int_{\{|x-u|<2|x-y|\}}\frac{1}{|x-u|^{n-\alpha q}}\mathrm{d}u\right)^{1/q}\\
&\lesssim |x-y|^\alpha\left(\int_{\{|x-u|<2|x-y|\}}\frac{|f(x)-f(u)|^{\,p}}{|x-u|^{n+\alpha p-\epsilon p}}\mathrm{d}u\right)^{1/p} \qquad (\epsilon+\alpha>0)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|g_2(x,y)|^p}{|x-y|^{n+\beta p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\begin{aligned}
&\lesssim \int_\Omega\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n+\beta p-\alpha p}}\int_{\{|x-u|<2|x-y|\}}\frac{|f(x)-f(u)|^{\,p}}{|x-u|^{n+\alpha p-\epsilon p}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\lesssim \int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(x)-f(u)|^{\,p}}{|x-u|^{n+\beta p-\epsilon p}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x \quad (\beta>\alpha)\\
&\lesssim \int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(x)-f(u)|^p}{|x-u|^{n+\alpha p}}\frac{1}{|x-u|^{(\beta-\alpha-\epsilon)p}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x\\
&\lesssim \int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(x)-f(u)|^p}{|x-u|^{n+\alpha p}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x<\infty \quad (\beta<\alpha+\epsilon).
\end{aligned}$$

Análogamente para $g_3(x,y)$,

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|g_2(x,y)|^p}{|x-y|^{n+\beta p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \lesssim \int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(x)-f(u)|^p}{|x-u|^{n+\alpha p}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x<\infty.$$

Para $g_4(x,y)$ se tiene

$$\begin{aligned}|g_4(x,y)| &\lesssim |f(x)-f(y)|\int_{\{|x-u|<2|x-y|\}}\frac{\mathrm{d}u}{|x-u|^{n-\epsilon}}\\ &\lesssim |f(x)-f(y)||x-y|^{\epsilon}.\end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_\Omega\frac{|g_4(x,y)|^p}{|x-y|^{n+\beta p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &\lesssim \int_\Omega\int_\Omega\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\beta p-\epsilon p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\lesssim \int_\Omega\int_\Omega\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\alpha p}}\frac{1}{|x-y|^{(\beta-\epsilon-\alpha)p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\lesssim \int_\Omega\int_\Omega\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\alpha p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty \quad (\beta<\epsilon+\alpha).\end{aligned}$$

La conclusión se sigue al observar que

$$\int_\Omega\int_\Omega\frac{|f(x)(P\chi_\Omega(y)-P\chi_\Omega(x))|^p}{|x-y|^{n+\beta p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\lesssim$$
$$\|f\|_\infty^p\left(\int_\Omega\int_\Omega\frac{|P\chi_\Omega(y)-P\chi_\Omega(x)|^p}{|x-y|^{n+\beta p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\le C$$

que se sigue de la hipótesis $P\chi_\Omega\in B^\beta_{p,p}(\Omega)$. Esto termina la demostración de este apartado.

2. Consideremos la descomposición del operador P como en el Lema 4.3.2, entonces procedemos a acotar cada término. Para el término $g_1(x,y)$, por la propiedad (4.2.6) del núcleo y la desigualdad de Hölder y eligiendo $\alpha<\beta<\epsilon$,

$$\begin{aligned}|g_1(x,y)| &\lesssim |x-y|^{\epsilon}\int_{\{|x-u|>2|x-y|\}}\frac{|f(x)-f(u)|}{|x-u|^n}\mathrm{d}u\\ &\lesssim |x-y|^{\epsilon}\left(\int_{\{|x-u|>2|x-y|\}}\frac{|f(x)-f(u)|^2}{|x-u|^{n-2\alpha}}\mathrm{d}u\right)^{\frac12}\cdot\\ &\quad\cdot\left(\int_{\{|x-u|>2|x-y|\}}\frac{\mathrm{d}u}{|x-u|^{n+2\alpha}}\right)^{\frac12}\\ &\lesssim |x-y|^{\epsilon-\alpha}\left(\int_{\{|x-u|>2|x-y|\}}\frac{|f(x)-f(u)|^2}{|x-u|^{n-2\alpha}}\mathrm{d}u\right)^{\frac12}.\end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{|g_1(x,y)|^2}{|x-y|^{n+2\beta}}\mathrm{d}y &\lesssim \int_\Omega \int_{\{|x-u|>2|x-y|\}} \frac{|f(x)-f(u)|^2}{|x-u|^{n-2\alpha}|x-y|^{n+2\beta+2\alpha-2\epsilon}}\mathrm{d}u\mathrm{d}y \\
&\lesssim \int_\Omega \frac{|f(x)-f(u)|^2}{|x-u|^{n-2\alpha}|x-y|^{n+2\beta-2\epsilon}}\mathrm{d}u \\
&\lesssim \int_\Omega \frac{|f(x)-f(u)|^2}{|x-u|^{n+2\alpha}|x-y|^{2\beta-2\epsilon-2\alpha}}\mathrm{d}u \\
&\lesssim \int_\Omega \frac{|f(x)-f(u)|^2}{|x-u|^{n+2\alpha}}\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\int_\Omega \frac{|g_1(x,y)|^2}{|x-y|^{n+2\beta}}\mathrm{d}y \in L^p(\Omega). \tag{4.3.14}$$

Consideremos ahora $g_2(x,y)$. Entonces, con la condición $\alpha < \beta < \epsilon + \alpha$, la propiedad (4.2.7) del núcleo y por la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}
|g_2(x,y)| &\lesssim \int_{\{|x-u|<2|x-y|\}} \frac{|f(x)-f(u)|}{|x-u|^{n-\epsilon}}\mathrm{d}u \\
&\lesssim \left(\int_{\{|x-u|<2|x-y|\}} \frac{|f(x)-f(u)|^2}{|x-u|^{n-2\epsilon+2\alpha}}\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \\
&\quad \cdot \left(\int_{\{|x-u|<2|x-y|\}} \frac{1}{|x-u|^{n-2\alpha}}\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim |x-y|^\alpha \left(\int_{\{|x-u|<2|x-y|\}} \frac{|f(x)-f(u)|^2}{|x-u|^{n-2\epsilon+2\alpha}}\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{|g_2(x,y)|^2}{|x-y|^{n+2\beta}}\mathrm{d}y &\lesssim \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n+2\beta-2\alpha}} \int_{\{|x-u|<2|x-y|\}} \frac{|f(x)-f(u)|^2}{|x-u|^{n-2\epsilon+2\alpha}}\mathrm{d}u\mathrm{d}y \\
&\lesssim \int_\Omega \frac{|f(x)-f(u)|^2}{|x-u|^{n+2\beta-2\epsilon}}\mathrm{d}u \\
&\lesssim \int_\Omega \frac{|f(x)-f(u)|^2}{|x-u|^{n+2\alpha}} \frac{1}{|x-u|^{2\beta-2\epsilon-2\alpha}}\mathrm{d}u \\
&\lesssim \int_\Omega \frac{|f(x)-f(u)|^2}{|x-u|^{n+2\alpha}}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

De esta forma obtenemos que,

$$\int_\Omega \frac{|g_2(x,y)|^2}{|x-y|^{n+2\beta}}\mathrm{d}y \in L^p(\Omega). \tag{4.3.15}$$

Análogamente se tiene para el sumando $g_3(x,y)$,

$$\int_\Omega \frac{|g_3(x,y)|^2}{|x-y|^{n+2\beta}}\mathrm{d}y \in L^p(\Omega). \tag{4.3.16}$$

Para el término $g_4(x,y)$, se tiene que

$$|g_4(x,y)| \lesssim |f(x)-f(y)| \int_{\{|x-u|<2|x-y|\}} \frac{\mathrm{d}u}{|x-u|^{n-\epsilon}}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|g_4(x,y)|^2}{|x-y|^{n+2\beta}}\mathrm{d}y &\lesssim \int_\Omega \frac{|f(x)-f(y)|^2|x-y|^{2\epsilon}}{|x-y|^{n+2\beta}}\mathrm{d}y \\ &\lesssim \int_\Omega \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que

$$\int_\Omega \frac{|g_4(x,y)|^2}{|x-y|^{n+2\beta}}\mathrm{d}y \in L^p(\Omega). \tag{4.3.17}$$

Para el término $f(x)(P\chi_\Omega(y) - P\chi_\Omega(x))$, con la hipótesis de que $\beta p > n$, basta con probar

$$\int_\Omega \frac{|P\chi_\Omega(y)-P\chi_\Omega(x)|^2}{|x-y|^{n+2\beta}}\mathrm{d}y \in L^p(\Omega).$$

Pero esto equivale a que $P\chi_\Omega \in W^{\beta,p}(\Omega)$.

Para concluir esta subsección, diremos que, en el caso del operador P con núcleo regularizante, es utilizado fuertemente que el dominio Ω sea acotado.

Por otra parte, debido a que no conocemos una descomposición en diferencias para la clase de funciones $W^{1+\epsilon,p}(\Omega)$ con $0<\epsilon<1$, no es posible utilizar este método en el caso de la clase $W^{1,p}(\Omega)$ y obtener un resultado análogo.

4.4. Condición $T\chi_\Omega$

Consideremos T un operador de Calderón-Zygmund de tipo par. La pregunta ahora es saber si existen dominios Ω tales que $T\chi_\Omega \in X$ donde $X = W^{1,p}(\Omega)$, $W^{\alpha,p}(\Omega)$ ó $B^\alpha_{p,p}(\Omega)$. En el caso de $\Omega = \mathbb{D}$, donde $\mathbb{D}$ es un disco, tenemos un primer ejemplo de dominios que cumplen la condición dado que $T\chi_\Omega = 0$.

En [36, página 411], se demuestra que si la frontera del dominio Ω es de clase $\mathcal{C}^{1,\epsilon}$, entonces

$$|T\chi_\Omega(x) - T\chi_\Omega(y)| \le C|x-y|^\epsilon \quad x,y\in\Omega.$$

Si $\alpha<\epsilon$ y $X = W^{\alpha,p}(\Omega)$ ó $X = B^\alpha_{p,p}(\Omega)$, entonces cualquier dominio de clase $\mathcal{C}^{1,\epsilon}$ satisface la condición del Teorema 4.2 y por tanto se obtiene la continuidad del operador T. Sin embargo para $W^{1,p}(\Omega)$ no es suficiente con que la frontera del dominio sea de clase $C^{1,\epsilon}$.

Por otra parte, Tolsa en [54] demostró el siguiente resultado.

Teorema 4.6. Para $2 \leq p < \infty$, sea Ω un dominio acotado Lipschitz cuya frontera pertenece a $W^{2-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R})$. Entonces $B\chi_\Omega \in W^{1,p}(\Omega)$.

Este resultado nos provee de más ejemplos de dominios para los cuales la teoría desarrollada en este capítulo es aplicable.

CAPÍTULO 5

Ecuación tipo Beltrami

En este capítulo estudiamos la ecuación tipo Beltrami que se obtiene al aumentar el orden de las derivadas parciales. Consideremos que el orden de las derivadas es un número natural n, es decir,

$$\bar{\partial}^{\,n} f(z) = \mu(z)\, \partial^n f(z) \quad \text{casi para todo } z \in \mathbb{C} \tag{5.0.1}$$

donde el coeficiente μ satisface la condición de elipticidad $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. Debido a la similitud de los resultados, nos enfocamos únicamente en el caso $n = 2$. Definimos la *ecuación tipo Beltrami de segundo orden*

$$\bar{\partial}^{\,2} f(z) = \mu(z)\, \partial^2 f(z) \quad \text{casi para todo } z \in \mathbb{C}. \tag{5.0.2}$$

Nuestro primer objetivo es demostrar la existencia de soluciones para la ecuación (5.0.2).

Sea μ una función medible tal que $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. Entonces, la ecuación tipo Beltrami (5.0.2) admite la solución

$$f(z) = \frac{z^2}{2} + C^2 h(z) \tag{5.0.3}$$

tal que $h \in L^2(\mathbb{C})$ y donde $C^2 = C \circ C$ con C la transformada de Cauchy. El objetivo es caracterizar a la función h. Observemos que, de existir, dicha solución satisface

$$\begin{aligned} \partial^2 f(z) &= 1 + B^2 h(z) \\ \bar{\partial}^{\,2} f(z) &= h(z). \end{aligned}$$

Como f debe satisfacer (5.0.2), de las identidades anteriores, equivale a resolver la ecuación funcional

$$(I - \mu B^2)h(z) = \mu(z).$$

Recordemos que la transformada de Beurling es una isometría en $L^2(\mathbb{C})$. Por tanto $\|\mu B^2\|_{L^2 \to L^2} \leq k < 1$ y de esta manera el inverso del operador $I - \mu B^2$ existe y se obtiene como serie de Neumann,

$$(I - \mu B^2)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu B^2)^k.$$

Por tanto la función h queda expresada como

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu B^2)^k (\mu(z)).$$

Claramente $h \in L^2(\mathbb{C})$. De esta forma la ecuación tipo Beltrami (5.0.2) tiene solución del tipo (5.0.3) con $h \in L^2(\mathbb{C})$. Para la invertibilidad del operador tipo Beltrami en $L^p(\mathbb{C})$ y por tanto expresar el inverso como serie de Neumann, es necesaria la condición $\|\mu B^2\|_{L^p \to L^p} < 1$.

De forma análoga a la solución 5.0.3, la ecuación tipo Beltrami de orden n admite la solución del tipo

$$f(z) = \frac{z^n}{n!} + C^n h(z)$$

cuando $k\|B^n\|_{L^p \to L^p} < 1$ y donde C^n es la n-ésima iterada de la transformada de Cauchy y

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu B^n)^k (\mu(z)).$$

La condición $k\|B^n\|_{L^p \to L^p} < 1$ es restrictiva y depende fuertemente de conocer la norma de las iteradas de la transformada de Beurling como operador en $L^p(\mathbb{C})$. Un primer problema es que se desconoce la norma de la transformada de Beurling. Iwaniec conjeturó en [23] que

$$\|B\|_{L^p \to L^p} = \begin{cases} p - 1, & \text{si } p \geq 2; \\ \frac{1}{p-1}, & \text{si } p \leq 2. \end{cases}$$

En el caso de las iteradas de la trasformada de Beurling, Dragicevic *et al.* en [15] conjeturaron que la norma de las iteradas de la transformada de Beurling está dada por

$$\|B^n\|_{L^p \to L^p} = \kappa_n(p^*)$$

donde

$$\kappa_n(p) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k - \frac{1}{p} + 1}{k + \frac{1}{p}}$$

y $p^* = \text{máx}\left\{p, \frac{p}{p-1}\right\}$.

En el caso que la conjetura sobre la norma de B^2 sea cierta, la condición sobre norma de este operador implica que, en términos de $k = \|\mu\|_\infty$, la solución $f \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{C})$ con $\varphi\left(\frac{1}{k}\right) < p < \varphi(k)$ donde

$$\varphi(t) = \frac{1 + 3t + \sqrt{t^2 + 14t + 1}}{4t}.$$

La aplicación $f(z) = z^2|z|^\alpha$ con $\alpha = \frac{-8k}{3k+1+\sqrt{k^2+14k+1}}$ donde $k = \|\mu\|_\infty$, satisface la ecuación tipo Beltrami (5.0.3) y es tal que $f \in W^{2,\varphi(k)}_{loc}(\mathbb{C})$ pero $f \notin W^{2,p}_{loc}(\mathbb{C})$ para $p > \frac{3k+1+\sqrt{k^2+14k+1}}{4k}$. Por otra parte, la aplicación $f(z) = \frac{|z|^\beta}{z^2}$ con $\beta = \frac{24k}{5k-1+\sqrt{k^2+14k+1}}$, satisface la ecuación tipo Beltrami (5.0.3) tal que $f \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$ con $q < \frac{k+3+\sqrt{k^2+14k+1}}{4}$ pero $f \notin W^{2,\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}_{loc}(\mathbb{C})$. Esto nos permite pensar que el rango de valores para p para los cuales la solución $f \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{C})$ está dado por $\varphi\left(\frac{1}{k}\right) < p < \varphi(k)$.

Por otra parte, utilizamos nuevamente las ideas de Iwaniec en [24, pág. 42–43] para demostrar que cuando el coeficiente $\mu \in VMO(\mathbb{C})$, el operador tipo Beltrami $I - \mu B^2 \colon L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$ tiene inverso acotado para todo $1 < p < \infty$ y por tanto la solución (5.0.2) satisface $f \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{C})$.

Proposición 5.0.1. Si $\mu \in VMO(\mathbb{C})$ tal que $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$, entonces el operador $I - \mu B^2 \colon L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$.

Demostración. Consideremos los operadores

$$P_m = 1 + \mu B^2 + \cdots + (\mu B^2)^m$$

de donde se tiene

$$(I - \mu B^2)P_{n-1} = P_{n-1}(I - \mu B^2) = I - \mu^n (B^2)^n + K_n \tag{5.0.4}$$

donde $K_n = \mu^n(B^2)^n - (\mu B^2)^n$ es suma finita de operadores que contienen como factor el conmutador $[\mu, B^2]$. Utilizando los métodos del análisis de Fourier se tiene el control de la norma de las iteradas de B^2, es decir,

$$\|(B^2)^n\|_{L^p \to L^p} = \|B^{2n}\|_{L^p \to L^p} \leq Cn^2$$

y entonces,

$$\|\mu^n (B^2)^n (f)\|_p \leq C n^2 \|\mu\|_\infty^n \|f\|_p.$$

Como consecuencia para n suficientemente grande, la norma del operador $\mu^n B^{2n}$ es pequeña y por tanto $I - \mu^n B^{2n}$ es invertible en $L^p(\mathbb{C})$. Dado que $B^2 \colon L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$ es un operador de Calderón-Zygmund, entonces por el Teorema 2 de Uchiyama en [58], se sigue que $[\mu, B^2] \colon L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$ es compacto.

Por tanto, dado que $I - \mu^n B^{2n}$ tiene inverso acotado, K_n es compacto y de la relación (5.0.4) se sigue que $I - \mu B^2$ es un operador de Fredholm. Ahora, la homotopía $I - t\mu B^2$ es una deformación del operador identidad en el operador $I - \mu B^2$ y por tanto se tiene

$$\operatorname{index}(I - \mu B^2) = \operatorname{index}(I) = 0. \tag{5.0.5}$$

Recordemos que la transformada de Beurling es una isometría en $L^2(\mathbb{C})$ y en consecuencia también lo es B^2. Entonces $I - \mu B^2$ es inyectivo en $L^2(\mathbb{C})$ pues si $f(z) = \mu B^2 f$ entonces

$$\|f\|_2 \leq \|\mu\|_\infty \|B^2 f\|_2 \leq \|\mu\|_\infty \|B f\|_2 \leq \|\mu\|_\infty \|f\|_2$$

lo cual sólo es posible si $f \equiv 0$. Si $p > 2$, el núcleo de $I - \mu B^2$ como operador en $L^p(\mathbb{C})$ está encajado en $L^2(\mathbb{C})$. De este hecho, de la identidad 5.0.5 y de la definición del índice de un operador de Fredholm 1.11.1 se sigue que $I - \mu B^2$ es exhaustivo.

Para $1 < p \leq 2$, observemos que el operador adjunto a $I - \mu B^2$ es el operador invertible

$$I - (B^2)^{-1}\bar{\mu} \colon L^{p'}(\mathbb{C}) \to L^{p'}(\mathbb{C})$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. La identidad

$$\overline{(I - B^2\mu) f} = (I - (B^2)^{-1}\bar{\mu})\bar{f}$$

muestra que $I - B^2\mu \colon L^{p'}(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$ es invertible. Entonces también lo es

$$I - \mu B^2 = (B^2)^{-1}(I - B^2\mu) B^2 \colon L^{p'}(\mathbb{C}) \to L^{p'}(\mathbb{C}).$$

Esto termina la demostración.

□

Por otra parte, para considerar la unicidad de soluciones, consideramos la *transformada de Cauchy normalizada* dada por

$$C_0 h(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} h(w) \left\{ \frac{1}{w - z} - \frac{1}{w} \right\} \mathrm{d}w.$$

Es claro que $C_0 h(0) = 0$ y que $f(z) = \frac{z^2}{2} + C_0^2 h(z)$ es solución de la ecuación tipo Beltrami (5.0.2) con la propiedad de que $f(0) = 0$. A esta solución le diremos *normalizada.*

Proposición 5.0.2. La solución normalizada $f(z) = \frac{z^2}{2} + C_0^2 h(z)$ y tal que $\partial^2 f - 1 \in L^p(\mathbb{C})$ es única salvo polinomios $P(z,\bar{z}) = az + b\bar{z} + cz\bar{z}$.

La demostración de la unicidad de la solución utiliza las ideas contenidas en Ahlfors [1, pág. 91] y requiere de una versión generalizada del Lema de Weyl (Lema 5.1.2).

Demostración. Consideremos $F(z) = f(z) - C_0^2(\bar{\partial}^2 f)(z)$ y observemos $\bar{\partial}^2 F(z) = 0$ en el sentido de las distribuciones. Entonces, por el Lema 5.1.2 la aplicación F es bianalítica y puede escribirse como

$$F(z,\bar{z}) = \frac{z^2}{2} + g_1(z) + \bar{z} g_2(z) \tag{5.0.6}$$

donde g_1 y g_2 son funciones analíticas. Sea $G(z) = \partial^2 F(z) - 1$, entonces

$$\|G\|_p = \|\partial^2 f - 1 + B^2(\bar{\partial}^2 f)\|_p \leq \|\partial^2 f - 1\|_p + \|B^2(\bar{\partial}^2 f)\|_p < \infty,$$

es decir, $G \in L^p(\mathbb{C})$. Además $\bar{\partial}^2 G(z) = \partial^2 \bar{\partial}^2 F(z) = 0$. Por el Lema 5.1.3, $G(z) \equiv 0$ y por tanto $\partial^2 F(z) \equiv 1$. Integrando tenemos que

$$F(z,\bar{z}) = \frac{z^2}{2} + z g_3(\bar{z}) + g_4(\bar{z}) \tag{5.0.7}$$

donde g_3, g_4 son funciones anti-analíticas. Del desarrollo de Taylor de las funciones g_1, g_2, g_3 y g_4 y la normalización $f(0) = 0$ podemos concluir que

$$F(z) = az + b\bar{z} + cz\bar{z}.$$

De esta manera obtenemos la expresión

$$f(z) = \frac{z^2}{2} + C_0^2 h(z) + az + b\bar{z} + cz\bar{z}.$$

□

Imponiendo las condiciones $\partial f(0) = 0 = \bar{\partial} f(0)$ y $\partial\bar{\partial} f \in L^p(\mathbb{C})$, obtenemos la solución

$$f(z) = \frac{z^2}{2} + C_0^2 h(z)$$

que llamaremos *solución principal de la ecuación tipo Beltrami.*

Recordemos que la solución principal de la ecuación de Beltrami es un homeomorfismo. Claramente la solución de la ecuación tipo Beltrami (5.0.2) no es dos a uno. Sin embargo, el término $\frac{z^2}{2}$ nos permite pensar que dichas soluciones son dos a uno. Un primer ejemplo de ello es la aplicación $\frac{z^2}{2}$ que es solución principal de la ecuación

$\bar{\partial}^2 f(z) = 0$. Cuando $\mu(z) = \lambda\chi_{\mathbb{D}^c}$ con $|\lambda| < 1$ y donde $\mathbb{D}$ es el disco unitario, la solución principal

$$f(z) = \frac{z^2}{2} + \begin{cases} \lambda\frac{\bar{z}^2}{2}, & z \in \mathbb{D}, \\ \lambda\left(\frac{\bar{z}}{z} - \frac{1}{2z^2}\right), & z \notin \mathbb{D}, \end{cases}$$

es dos a uno excepto en el origen. Muchos más ejemplos pueden obtenerse al cambiar el disco unitario $\mathbb{D}$ por un disco centrado en el origen y de radio arbitrario. Desafortunadamente, mediante la construcción del Ejemplo 5.0.1 se muestra que existen aplicaciones que no son dos a uno.

Ejemplo 5.0.1. Sea

$$f(z) = \frac{z^2}{2} - \frac{|z|^2}{2}$$

en $|z| < \epsilon$. Entonces se tiene que $f(z) = zi\Im m(z)$. Es claro que si $\Im m(z) = 0$, entonces $f(z) = 0$ y por tanto la f aplica el conjunto $\{z : |z| < \epsilon \text{ y } \Im m(z) = 0\}$ en el origen. De esta forma, el valor 0 tiene una infinidad de pre-imágenes.

El problema consiste en extender esta función a todo el plano. Para tal efecto, consideremos una aplicación de la forma

$$f(z) = \frac{z^2}{2} - \phi(|z|^2)$$

donde$\phi \in C_c^2(\mathbb{R})$ y $\phi(|z|^2) = \frac{|z|^2}{2}$ en $|z| < \epsilon$. Recordemos que el hecho $\phi \in C_c^2(\mathbb{C})$ implica que $\phi(z) = C^2\bar{\partial}^2\phi(z)$.

Un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} \partial f(z) &= z - \bar{z}\phi'(|z|^2), \\ \partial^2 f(z) &= 1 - \bar{z}^2\phi''(|z|^2), \\ \bar{\partial} f(z) &= -z\phi'(|z|^2), \\ \bar{\partial}^2 f(z) &= -z^2\phi''(|z|^2), \end{aligned}$$

y por tanto el coeficiente μ está dado por

$$\mu(z) = \frac{-z^2\phi''(|z|^2)}{1 - \bar{z}^2\phi''(|z|^2)}.$$

La condición de elipticidad

$$|\mu(z)| = \left|\frac{z^2\phi''(|z|^2)}{1 - \bar{z}^2\phi''(|z|^2)}\right| < 1.$$

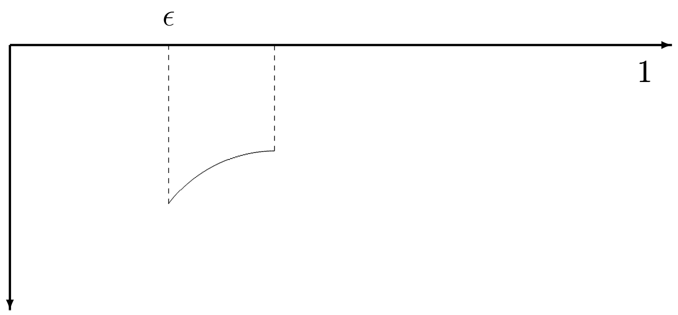

Figura 5.0.1: Gráfica de $\phi_1''(t)$

Observemos que cuando $A \in \mathbb{C}$, entonces

$$\left|\frac{A}{1-\bar{A}}\right| < 1$$

es equivalente a

$$\Re e(A) < \frac{1}{2}.$$

De esta manera, en términos de la función ϕ la condición de elipticidad está dada por

$$|\phi''(t)| < \frac{1}{2t}.$$

Es suficiente construir una función $\phi(t)$ tal que

1. $|\phi''(t)| \leq \frac{1}{3t} < \frac{1}{2t}$
2. $\phi \in C_c^2(\mathbb{R})$
3. $\operatorname{supp}\phi \subset (0,1)$ y tal que $\phi(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & \text{si } 0 \leq t < \epsilon, \\ 0 & \text{si } t \geq 1, \end{cases}$.

Dado que $\phi'(0) = \frac{1}{2}$ y de la continuidad de $\phi''(t)$ se tiene que

$$\int_0^1 \phi''(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}.$$

Como primer paso, construimos la función $\phi_1(t)$ de forma tal que (véase la Figura 5.0.1)

$$\phi_1''(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } (0,\epsilon); \\ -\frac{1}{3t}, & \text{si } [\epsilon, \epsilon e^{\frac{3}{2}}); \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

observemos que

$$\int_0^1 \phi_1''(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}.$$

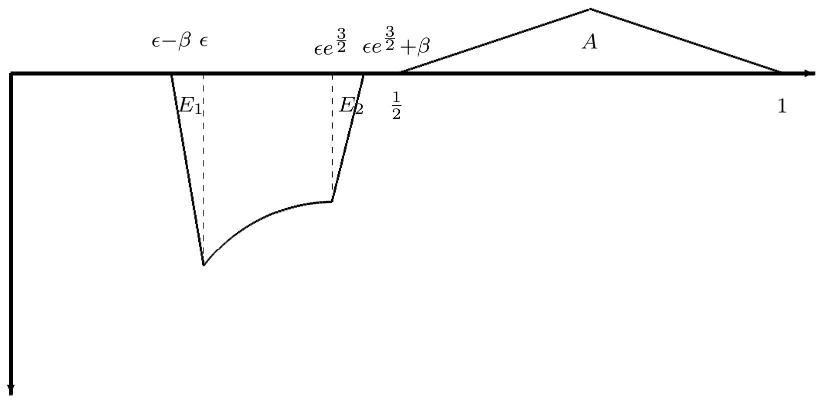

Figura 5.0.2: Gráfica de $\phi''(t)$

La idea ahora es extender la función $\phi_1''(t)$ a una función continua como lo muestra la Figura 5.0.2.

La idea es compensar las áreas E_1 y E_2 que aparecen al momento de extender mediante rectas. Veamos que es posible introducir un área A. Para tal efecto basta con ver que existe un número β tal que $E_1 + E_2 < A$, es decir,

$$E_1 + E_2 = \frac{\beta}{6\epsilon}\left(1 + \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}\right) < \frac{1}{3}\log(2) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{3t}\mathrm{d}t. \tag{5.0.8}$$

La relación 5.0.8 nos lleva a la condición

$$\beta < \epsilon\left(\frac{2e^{\frac{3}{2}}\log(2)}{1 + e^{\frac{3}{2}}}\right)$$

la cual es admisible.

Por otra parte observemos que

$$\phi'(t) = \int_0^t \phi''(u)\mathrm{d}u + \phi'(0) = \int_0^t \phi''(u)\mathrm{d}u + \frac{1}{2}. \tag{5.0.9}$$

y recordemos que

$$\phi'(1) = \int_0^1 \phi''(u)\mathrm{d}u + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

De la identidad (5.0.9), obtenemos la expresión para la función ϕ

$$\phi(t) = \int_0^t \phi'(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \int_0^s \phi''(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s + \frac{t}{2}.$$

Por la condición $\phi(1) = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} 0 = \phi(1) &= \int_0^1 \int_0^s \phi''(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s + \frac{1}{2} \\ &= \int_0^1 \int_u^1 \phi''(u)\mathrm{d}s\mathrm{d}u + \frac{1}{2} \\ &= \int_0^1 (1-u)\phi''(u)\mathrm{d}u + \frac{1}{2} \\ &= \int_0^1 \phi''(u)\mathrm{d}u - \int_0^1 u\phi''(u)\mathrm{d}u + \frac{1}{2} \\ &= -\int_0^1 u\phi''(u)\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Por tanto, resumimos las propiedades de la función $\phi \in C_c^2(\mathbb{R})$ en términos de $\phi''(t)$

1. $|\phi''(t)| \leq \frac{1}{3t} < \frac{1}{2t}$,
2. $\int_0^1 \phi''(u)\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}$,
3. $\int_0^1 u\phi''(u)\mathrm{d}u = 0$.

Por otra parte, el hecho que para las aplicaciones quasiregulares exista el Teorema de factorización de Stoilow, hace que las propiedades de regularidad de la solución principal se hereden a todas las demás. En el caso de la ecuación tipo Beltrami (5.0.2) no se tiene un resultado similar. Por tanto sólo conocemos propiedades para la solución principal.

5.1. Lema de Weyl para funciones bianalíticas

El objetivo en esta sección es obtener un resultado similar al lema Clásico de Weyl para funciones *bianalíticas*. Comenzamos enunciando este resultado.

Lema 5.1.1 (Corolario 24.10 en [18]). Supongamos que T es una distribución sobre un conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que $\frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = 0$. Entonces T es una función analítica en Ω.

Decimos que una función $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es *bianalítica* si $\bar{\partial}^2 f = 0$. Observemos que la condición $\bar{\partial}^2 f = 0$ equivale a que $\bar{\partial} f(z) = h(z)$ donde h es una función analítica. De esta manera tenemos que las funciones bianalíticas tienen la forma general $f(z) = g(z) + \bar{z}h(z)$ donde g, h son analíticas y debido a esto, la representación es única.

Lema 5.1.2. Si $\bar{\partial}^2 f = 0$ en el sentido de las distribuciones, entonces f es bianalítica.

Demostración. Sea $g(z) = \bar{\partial} f(z)$. Observemos que $\bar{\partial} g = \bar{\partial}^2 f = 0$ en el sentido de las distribuciones. Por el Corolario 5.1.1 tenemos que g es analítica. Consideremos $F(z) = f(z) - \bar{z}g(z)$ entonces $\bar{\partial} F(z) = \bar{\partial} f(z) - g(z) = 0$ en el sentido de las distribuciones. De esta forma y mediante la aplicación del Corolario 5.1.1 se tiene que F es analítica. Por tanto $f(z) = F(z) + \bar{z}g(z)$, es decir, f es bianalítica.

□

Lema 5.1.3. Si $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función bianalítica y de $L^p(\mathbb{C})$, entonces $f = 0$ para $p > 1$.

Demostración. Si f es bianalítica, sabemos que $f(z, \bar{z}) = g(z) + \bar{z}h(z)$ donde g y h son funciones analíticas y que dicha representación es única. Las aplicaciones g y h son analíticas y por tanto tienen un desarrollo en serie de potencias alrededor del origen, es decir,

$$f(z, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \bar{z} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Sea $z = re^{it}$ para $0 < r < R$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(r,t) &= g(r,t) + re^{-it}h(r,t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n e^{nit} + b_n r^{n+1} e^{(n-1)it}) \\ &= b_0 r e^{-it} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n + b_{n+1} r^{n+2}) e^{int}. \end{aligned}$$

Observemos que

$$rb_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r,t) e^{it} \mathrm{d}t,$$

de donde al multiplicar por r^2, integrando en r y utilizando coordenadas polares

$$\left| \frac{R^4 b_0}{4} \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{D(0,R)} f(w) w \mathrm{d}w \right|.$$

Mediante la desigualdad de Hölder con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{R^4 b_0}{4} \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_p \left(\int_0^R \int_0^{2\pi} r^{q+1} \mathrm{d}t\mathrm{d}r \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{\|f\|_p}{2\pi} (2\pi)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{R^{q+2}}{q+2} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{\|f\|_p}{(2\pi)^{\frac{1}{p}}} \frac{R^{1+\frac{2}{q}}}{(q+2)^{\frac{1}{q}}}. \end{aligned}$$

Entonces
$$|b_0| \leq \frac{4\|f\|_p}{(2\pi)^{\frac{1}{p}}} \frac{R^{\frac{2}{q}-3}}{(q+2)^{\frac{1}{q}}} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$
Por lo anterior la función f toma la forma
$$f(r,t) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(a_n r^n + b_{n+1}r^{n+2})e^{int}$$
y en general, multiplicando por e^{-int} e integrando en el parámetro t se tiene
$$a_n r^n + b_{n+1}r^{n+2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,t)e^{-int}\mathrm{d}t.$$
Si $n=0$ se tiene que,
$$a_0 + b_1 r^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,t)\mathrm{d}t$$
de donde, multiplicando por r, integrando en r y utilizando coordenadas polares, obtenemos
$$\frac{a_0R^2}{2} + \frac{b_1R^4}{4} = \frac{1}{2\pi}\int_{D(0,R)} f(w)\mathrm{d}w.$$
Utilizando la desigualdad de Hölder
$$\begin{aligned}\left|\frac{a_0}{2R^2} + \frac{b_1}{4}\right| &\leq \frac{\|f\|_p}{2\pi}\frac{\pi^{\frac{1}{q}}R^{\frac{2}{q}}}{R^4}\\ &= \frac{\|f\|_p}{2\pi^{\frac{1}{p}}\left(R^{1+\frac{1}{p}}\right)^2}.\end{aligned}$$
Haciendo $R\to\infty$ se tiene que $b_1=0$ y de donde también $a_0=0$ pues
$$|a_0| \leq \frac{\|f\|_p}{\pi^{\frac{1}{p}}}\frac{1}{R^{\frac{2}{p}}} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$
Mostraremos que en general $a_n=0$ y $b_{n+1}=0$. Debido a que
$$a_n r^n + b_{n+1}r^{n+2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,t)e^{-int}\mathrm{d}t,$$
al multiplicar por r^{n+1}, integrar y utilizar coordenadas polares, tenemos que,
$$\frac{a_nR^{2n+2}}{2n+2} + \frac{b_{n+1}R^{2n+4}}{2n+4} = \frac{1}{2\pi}\int_{D(0,R)} f(w)\bar{w}^n\mathrm{d}w.$$
Entonces, utilizando la desigualdad de Hölder
$$\left|\frac{a_nR^{2n+2}}{2n+2} + \frac{b_{n+1}R^{2n+4}}{2n+4}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|_p\left(\int_0^{2\pi}\int_0^R r^{nq+1}\mathrm{d}r\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}},$$

o bien, al dividir entre R^{2n+4},

$$\left|\frac{a_n}{(2n+2)R^2}+\frac{b_{n+1}}{2n+4}\right| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{p}}}\|f\|_p\frac{R^{\frac{2}{q}-4-n}}{(nq+2)^{\frac{1}{q}}} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Esto implica que $b_{n+1}=0$ y entonces

$$\left|\frac{a_n}{2n+2}\right| \leq \frac{\|f\|_p}{(2\pi)^{\frac{1}{p}}}\frac{R^{-n-2+\frac{2}{q}}}{(nq+2)^{\frac{1}{q}}} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

De esta manera vemos que los coeficientes son cero y por tanto $f(z)\equiv 0$.

$\square$

Bibliografía

[1] Lars V. Ahlfors. *Lectures on quasiconformal mappings.* The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, CA, 1987. With the assistance of Clifford J. Earle, Jr., Reprint of the 1966 original.

[2] Kari Astala. Area distortion of quasiconformal mappings. *Acta Math.*, 173(1):37–60, 1994.

[3] Kari Astala, Tadeusz Iwaniec, and Gaven Martin. *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane*, volume 48 of *Princeton Mathematical Series.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.

[4] Kari Astala, Tadeusz Iwaniec, and Eero Saksman. Beltrami operators in the plane. *Duke Math. J.*, 107(1):27–56, 2001.

[5] Richard J. Bagby. A characterization of Riesz potentials, and an inversion formula. *Indiana Univ. Math. J.*, 29(4):581–595, 1980.

[6] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011.

[7] Kh. Brezis. How to recognize constant functions. A connection with Sobolev spaces. *Uspekhi Mat. Nauk*, 57(4(346)):59–74, 2002.

[8] Filippo Chiarenza. L^p regularity for systems of PDEs, with coefficients in VMO. In *Nonlinear analysis, function spaces and applications, Vol. 5 (Prague, 1994)*, pages 1–32. Prometheus, Prague, 1994.

[9] Filippo Chiarenza, Michele Frasca, and Placido Longo. Interior $W^{2,p}$ estimates for nondivergence elliptic equations with discontinuous coefficients. *Ricerche Mat.*, 40(1):149–168, 1991.

[10] A. Clop, D. Faraco, J. Mateu, J. Orobitg, and X. Zhong. Beltrami equations with coefficient in the Sobolev space $W^{1,p}$. *Publ. Mat.*, 53(1):197–230, 2009.

[11] Albert Clop and Xavier Tolsa. Analytic capacity and quasiconformal mappings with $W^{1,2}$ Beltrami coefficient. *Math. Res. Lett.*, 15(4):779–793, 2008.

[12] Fernando Cobos and Lars-Erik Persson. Real interpolation of compact operators between quasi-Banach spaces. *Math. Scand.*, 82(1):138–160, 1998.

[13] R. R. Coifman and C. Fefferman. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. *Studia Math.*, 51:241–250, 1974.

[14] M. Cwikel and N. J. Kalton. Interpolation of compact operators by the methods of calderón and gustavsson-peetre. *Proccedings of the Edinburg Mathematical Society*, (38):261–276, 1995.

[15] Oliver Dragičević, Stefanie Petermichl, and Alexander Volberg. A rotation method which gives linear L^p estimates for powers of the Ahlfors-Beurling operator. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 86(6):492–509, 2006.

[16] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

[17] D. L. Fernandez and J. B. Garcia. Interpolation of Orlicz-valued function spaces and U.M.D. property. *Studia Math.*, 99(1):23–40, 1991.

[18] Otto Forster. *Lectures on Riemann surfaces*, volume 81 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. Translated from the 1977 German original by Bruce Gilligan, Reprint of the 1981 English translation.

[19] José García-Cuerva and José L. Rubio de Francia. *Weighted norm inequalities and related topics*, volume 116 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 104.

[20] John B. Garnett and Peter W. Jones. The distance in BMO to L^∞. *Ann. of Math. (2)*, 108(2):373–393, 1978.

[21] Loukas Grafakos. *Classical and modern Fourier analysis.* Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2004.

[22] Harald Hanche-Olsen and Helge Holden. The Kolmogorov-Riesz compactness theorem. *Expo. Math.*, 28(4):385–394, 2010.

[23] Tadeusz Iwaniec. Some aspects of partial differential equations and quasiregular mappings. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983)*, pages 1193–1208, Warsaw, 1984. PWN.

[24] Tadeusz Iwaniec. L^p-theory of quasiregular mappings. In *Quasiconformal space mappings*, volume 1508 of *Lecture Notes in Math.*, pages 39–64. Springer, Berlin, 1992.

[25] R. Johnson and C. J. Neugebauer. Homeomorphisms preserving *A_p*. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 3(2):249–273, 1987.

[26] Janne Kauhanen, Pekka Koskela, and Jan Malý. On functions with derivatives in a Lorentz space. *Manuscripta Math.*, 100(1):87–101, 1999.

[27] Yasuo Komori. Singular integrals on Lipschitz and Sobolev spaces. *Taiwanese J. Math.*, 9(1):73–80, 2005.

[28] Steven G. Krantz and Song-Ying Li. Boundedness and compactness of integral operators on spaces of homogeneous type and applications. I. *J. Math. Anal. Appl.*, 258(2):629–641, 2001.

[29] Steven G. Krantz and Song-Ying Li. Boundedness and compactness of integral operators on spaces of homogeneous type and applications. II. *J. Math. Anal. Appl.*, 258(2):642–657, 2001.

[30] Alois Kufner, Oldřich John, and Svatopluk Fučík. *Function spaces.* Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977. Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids; Mechanics: Analysis.

[31] Peter D. Lax. *Functional analysis.* Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2002.

[32] O. Lehto and K. I. Virtanen. *Quasiconformal mappings in the plane*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1973. Translated from the German by K. W. Lucas, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 126.

[33] Pierre Gilles Lemarié. Continuité sur les espaces de Besov des opérateurs définis par des intégrales singulières. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 35(4):175–187, 1985.

[34] Giovanni Leoni. *A first course in Sobolev spaces*, volume 105 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[35] Jan Malý. *Advanced theory of differentiation-Lorentz spaces*.

[36] Joan Mateu, Joan Orobitg, and Joan Verdera. Extra cancellation of even Calderón-Zygmund operators and quasiconformal mappings. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 91(4):402–431, 2009.

[37] Y. Meyer. Continuité sur les espaces de Hölder et de Sobolev des opérateurs définis par des intégrales singulières. In *Recent progress in Fourier analysis (El Escorial, 1983)*, volume 111 of *North-Holland Math. Stud.*, pages 145–172. North-Holland, Amsterdam, 1985.

[38] Yves Meyer. Les nouveaux opérateurs de Calderón-Zygmund. *Astérisque*, (131):237–254, 1985. Colloquium in honor of Laurent Schwartz, Vol. 1 (Palaiseau, 1983).

[39] Akira Mori. On an absolute constant in the theory of quasi-conformal mappings. *J. Math. Soc. Japan*, 8:156–166, 1956.

[40] Jr. Charles B. Morrey. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 43(1):126–166, 1938.

[41] Carlos Pérez. Sharp estimates for commutators of singular integrals via iterations of the Hardy-Littlewood maximal function. *J. Fourier Anal. Appl.*, 3(6):743–756, 1997.

[42] H. M. Reimann. Functions of bounded mean oscillation and quasiconformal mappings. *Comment. Math. Helv.*, 49:260–276, 1974.

[43] Heinrich Renelt. *Elliptic systems and quasiconformal mappings*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1988. Translated from the German, A Wiley-Interscience Publication.

[44] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[45] J. Schauder. Numerische abschätzungen in elliptischen differentialgleichungen. *Studia Mathematica*, (5), 1934.

[46] Martin Schechter. *Principles of functional analysis*, volume 36 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2002.

[47] René L. Schilling. *Measures, integrals and martingales.* Cambridge University Press, New York, 2005.

[48] Carlos Segovia and José L. Torrea. Weighted inequalities for commutators of fractional and singular integrals. *Publ. Mat.*, 35(1):209–235, 1991. Conference on Mathematical Analysis (El Escorial, 1989).

[49] E. M. Stein. Editor's note: the differentiability of functions in $\mathbf{R}^n$. *Ann. of Math. (2)*, 113(2):383–385, 1981.

[50] Elias M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[51] Elias M. Stein. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 43 of *Princeton Mathematical Series.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.

[52] Robert S. Strichartz. Multipliers on fractional Sobolev spaces. *J. Math. Mech.*, 16:1031–1060, 1967.

[53] Luc Tartar. *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, volume 3 of *Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana.* Springer, Berlin, 2007.

[54] Xavier Tolsa. Regularity of the beurling transform of the characteristic function of a domain. *Personal communication*, 2010.

[55] Hans Triebel. *Theory of function spaces*, volume 78 of *Monographs in Mathematics.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.

[56] Hans Triebel. *Interpolation theory, function spaces, differential operators.* Johann Ambrosius Barth, Heidelberg, second edition, 1995.

[57] Hans Triebel. Function spaces in Lipschitz domains and on Lipschitz manifolds. Characteristic functions as pointwise multipliers. *Rev. Mat. Complut.*, 15(2):475–524, 2002.

[58] Akihito Uchiyama. On the compactness of operators of Hankel type. *Tôhoku Math. J. (2)*, 30(1):163–171, 1978.

[59] Alexander Vasil′ev. *Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings*, volume 1788 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[60] Carmela Vitanza. $W^{2,p}$-regularity for a class of elliptic second order equations with discontinuous coefficients. *Matematiche (Catania)*, 47(1):177–186 (1993), 1992.